

IL METODO DELLE FORZE IN FORMA MATICIALE: METODO OPERATIVO

Antonio Mario DE SANTIS¹

Il metodo delle forze per la risoluzione delle strutture iperstatiche fu sintetizzato nel 1864 da Maxwell per poi essere ripreso da Mohr, Scotti e Muller-Breslau nel 1883. Il problema principale per l'epoca, era la soluzione del sistema di equazioni di lineari, perché non essendo ancora conosciute le macchine calcolatrici era molto arduo arrivare alla soluzione di strutture con molte incognite iperstatiche. Nel 1932 ebbe molto successo il metodo di H. Cross in cui si arrivava alla soluzione per successive iterazioni. Negli anni '60 il metodo delle forze viene messo da parte a favore del metodo delle rigidità, perché la scelta delle incognite iperstatiche non poteva essere facilmente automatizzata.

Introduzione

Nel seguente articolo, attraverso un esempio pratico, viene illustrato un metodo operativo per la risoluzione di strutture iperstatiche utilizzando il metodo delle forze in forma matriciale. Partendo dall'equazione di Müller-Breslau, si perviene alla soluzione delle incognite iperstatiche, senza apparentemente esplicitare le equazioni di congruenza e utilizzando solo i coefficienti elastici delle travi appoggiate-appoggiate.

Il metodo proposto ha scopo didattico-formativo ed è rivolto ai professionisti appassionati di scienza delle costruzioni e agli studenti universitari delle facoltà di ingegneria e architettura.

In generale, nel metodo delle forze, la struttura reale originaria, n volte iperstatica, viene trasformata in un sistema isostatico equivalente, caricata dai carichi originari e dalle n incognite iperstatiche (X_n). La determinazione delle n incognite iperstatiche, avviene tramite le equazioni di congruenza, in altre parole tra tutte le configurazioni equilibrate si cerca l'unica congruente. L'equazione che permette di ricavare le incognite iperstatiche (X_n) è quella di Müller-Breslau, che può essere scritta in forma matriciale e per strutture a vincoli perfetti, assume l'espressione:

$$[A]\{X\} + \{\pi\} = 0 \quad (1)$$

La $[A]$ è detta matrice dei coefficienti di flessibilità: essa è quadrata di ordine n e risulta simmetrica, per il teorema di reciprocità.

Il vettore $\{\pi\}$ è detto termine noto e dipende dai carichi agenti. Nel metodo delle forze, la scelta del sistema isostatico equivalente non è unico e ciò comporta una limitazione nell'automatizzare la

procedura di calcolo. Come vedremo più avanti, questa limitazione può essere superata con un'appropriata scelta del sistema isostatico equivalente.

Il metodo delle forze in forma matriciale

Considerando un generico telaio, il metodo delle forze in forma matriciale nell'ipotesi di inestensibilità delle aste e di piccoli spostamenti può svilupparsi attraverso i seguenti passi:

1. si sostituisce una cerniera in ogni nodo interno o esterno del sistema reale, in modo da considerare ogni asta appoggiata-appoggiata soggetta all'azione dei carichi esterni e caricata dai momenti incogniti applicati sulle cerniere di estremità;

2. presa in considerazione l'equazione di Muller-Breslau in forma matriciale, la riga i -esima della matrice $[A]$ può essere calcolata sul sistema isostatico equivalente caricato dalla sola incognita X_n assunta uguale all'unità. Il prodotto matriciale $[A]\{X\}$ rappresenta la somma dei lavori svolti degli n sistemi fittizi, sul sistema isostatico equivalente caricato dalle sole incognite iperstatiche (di seguito denominato sistema delle incognite);

3. viene poi calcolato il vettore dei termini noti $\{\pi\}$, considerando il lavoro svolto dal sistema isostatico equivalente caricato dai soli carichi iniziali (di seguito denominato sistema dei carichi) sugli n sistemi fittizi;

4. determinata la matrice $[A]$ ed il vettore dei termini noti $\{\pi\}$, si risolve il sistema con l'aiuto di un solutore di equazioni lineari e si ricavano le incognite iperstatiche X_n .

Esempio 1. Procedimento generale (telai con nodi in cui non concorrono più di due aste).

Si determini il diagramma del momento per il telaio di fig. 1. Nell'esempio seguente, viene proposto un metodo generale che facilita la scrittura in forma matriciale del sistema (1). Seguendo i passi descritti

¹Docente di Costruzioni, Tecnologia delle Costruzioni e Disegno Tecnico. Collaboratore alle attività didattiche presso l'Università IUAV di Venezia. e-mail: desantisantonio@libero.it

sopra, inseriamo due cerniere nei nodi A e B e introduciamo i relativi momenti incogniti M_A, M_B in modo da ripristinare il sistema statico iniziale. Il telaio in tal modo diventa una volta labile, pertanto è necessario assumere come incognita oltre ai momenti anche lo spostamento orizzontale u (vedi fig. 2).

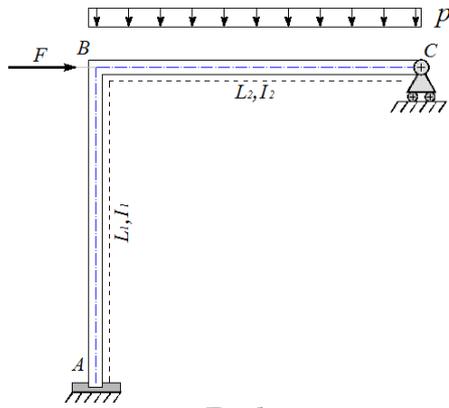


Fig. 1

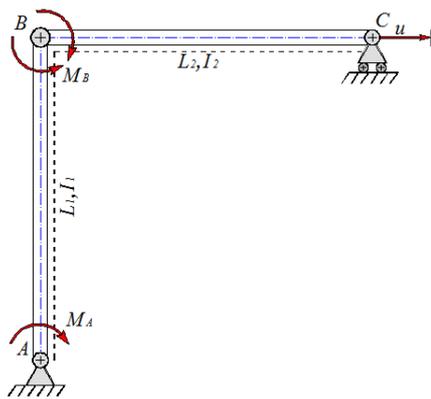


Fig. 2. Sistema delle incognite.

Convenzionalmente, i versi di M_A, M_B vengono scelti positivi in modo che tirano le fibre inferiori di ogni asta. Questo comporta che nei nodi interni i momenti agenti sono assunti nel rispetto dell'equilibrio alla rotazione del nodo, cioè il momento di destra è uguale al momento di sinistra. Nel caso in esame nel nodo B si ha:

$$M_B = M_{BC} = M_{BA}$$

Il verso di u viene scelto positivo in modo che avvenga da sinistra verso destra. Il sistema di fig. 2 viene definito *sistema delle incognite*.

Le considerazioni di cui sopra portano alla determinazione del vettore delle incognite:

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \\ u \end{Bmatrix}$$

Determiniamo ora le componenti della matrice $[A]$, operando riga per riga.

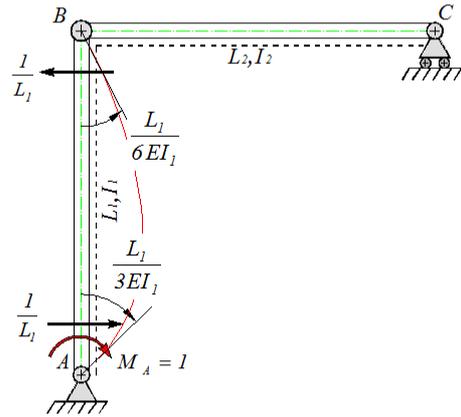


Fig. 3. Primo sistema fittizio.

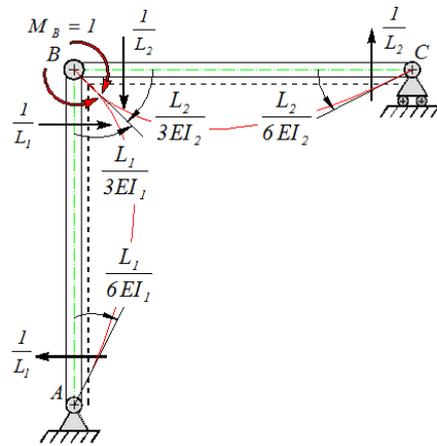


Fig. 4. Secondo sistema fittizio

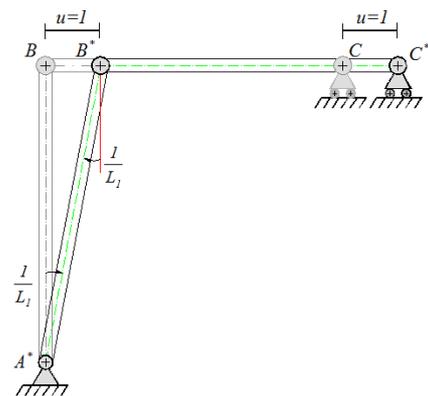


Fig. 5. Terzo sistema fittizio

Calcolo della 1ª riga della matrice $[A]$.

Dal sistema delle incognite si ottiene il primo sistema fittizio ponendo: $[M_A = 1; M_B = 0; u = 0]$ vedi fig. 3.

Determinata la deformata elastica del telaio, i termini

della prima riga di $[A]$ vengono ricavati, considerando il lavoro² che i coefficienti elastici del primo sistema fittizio di fig. 3, compiono sul sistema delle incognite di fig. 2, dal confronto dei due sistemi si evince che:

- nel nodo A la rotazione $\frac{L_1}{3EI_1}$ lavora su M_A e il

lavoro ($M_A \cdot \frac{L_1}{3EI_1}$) risulta positivo perché i versi sono

concordi;

- nel nodo B la rotazione $\frac{L_1}{6EI_1}$ lavora su M_B e il

lavoro ($M_B \cdot \frac{L_1}{6EI_1}$) risulta positivo perché i versi sono

concordi;

- lo sforzo di taglio $\frac{I}{L_1}$ dell'asta AB , lavora sullo

spostamento incognito u e il lavoro ($-\frac{I}{L_1}u$) risulta

negativo perché i versi sono discordi.

In realtà, il lavoro è positivo perché svolto dalla reazione uguale e contraria allo sforzo di taglio, che sollecita l'asta BC (vedi fig. a).

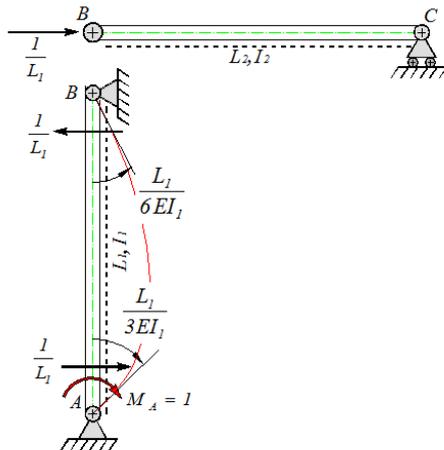


Fig. a

Nella matrice $[A]$ i coefficienti di taglio generati dai momenti fittizi vanno cambiati di segno.

La prima riga di $[A]$ si scrive:

$$\begin{bmatrix} \frac{L_1}{3EI_1} & \frac{L_1}{6EI_1} & \frac{I}{L_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_A \\ M_B \\ u \end{bmatrix} + \dots = 0$$

²Ricordando la definizione di lavoro, in genere si può scrivere che: $L = M \cdot \varphi$ (momento per rotazione) oppure $L = F \cdot u$ (forza per spostamento)

La prima riga di $[A]$ è costituita dalle rotazioni e dai tagli che nascono per effetto di $[M_A = 1; M_B = 0; u = 0]$ rispettivamente nei nodi A, B e C .

Calcolo della 2ª riga della matrice $[A]$.

Per determinare la seconda riga di $[A]$ dobbiamo ricavare il lavoro svolto dal secondo sistema fittizio di fig.4 sul sistema delle incognite di fig.2; La seconda riga di $[A]$ è costituita dalle rotazioni e dai tagli che nascono per effetto di $[M_A = 0; M_B = 1; u = 0]$ rispettivamente nei nodi A, B e C .

Tenendo conto delle considerazioni fatte in precedenza la seconda riga di $[A]$, si scrive:

$$\begin{bmatrix} \frac{L_1}{3EI_1} & \frac{L_1}{6EI_1} & \frac{I}{L_1} \\ \frac{L_1}{6EI_1} & \frac{L_1}{3EI_1} + \frac{L_2}{3EI_2} & -\frac{I}{L_1} \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_A \\ M_B \\ u \end{bmatrix} + \dots = 0$$

Calcolo della 3ª riga della matrice $[A]$.

Dal sistema delle incognite si ottiene il terzo sistema fittizio ponendo: $[M_A = 0; M_B = 0; u = 1]$ (vedi fig. 5).

Dal confronto del terzo sistema fittizio di fig.5 con il sistema delle incognite di fig.2 si evince che:

- nel nodo A^* la rotazione fittizia $\frac{I}{L_1}$ dell'asta B^*A^*

lavora su M_A e il lavoro ($M_A \cdot \frac{I}{L_1}$) risulta positivo

perché i versi sono concordati;

- nel nodo B^* la rotazione fittizia $\frac{I}{L_1}$ lavora su M_B

e il lavoro risulta negativo perché i versi sono discordi $M_B \cdot (-\frac{I}{L_1})$.

Si noti che per effetto di $[M_A = 0; M_B = 0; u = 1]$ il terzo sistema fittizio è labile quindi non soggetto a sforzi di taglio sulle aste ma soltanto a rotazioni rigide.

Di conseguenza il termine a_{33} (ultimo termine diagonale) di $[A]$, è nullo.

Tenendo conto delle considerazioni fatte, la terza riga di $[A]$, si scrive:

$$\begin{bmatrix} \frac{L_1}{3EI_1} & \frac{L_1}{6EI_1} & \frac{1}{L_1} \\ \frac{L_1}{6EI_1} & \frac{L_1}{3EI_1} + \frac{L_2}{3EI_2} & -\frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_A \\ M_B \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} = 0 \quad \{\pi\} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{pL_2^3}{24EI_2} \\ F \end{bmatrix}$$

Calcolo del termine noto $\{\pi\}$

A questo punto, al sistema delle incognite di fig. 2, applichiamo tutti i carichi originari e imponiamo la condizione: $[M_A = 0; M_B = 0; u = 0]$, in tal modo si ottiene quello che definiamo *sistema dei carichi*.

Su questo sistema a nodi fissi, determiniamo le rotazioni e le reazioni di tutte le aste considerate appoggiate-appoggiate (vedi fig. 6).

I termini del vettore $\{\pi\}$ si determinano considerando il lavoro svolto dal sistema dei carichi di fig. 6 sui rispettivi sistemi fittizi di fig. 3 e fig. 4 e fig. 5.

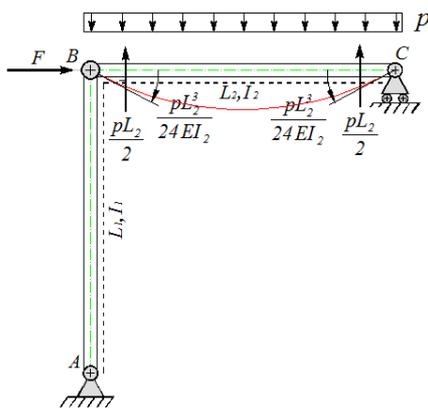


Fig. 6. Sistema dei carichi

Dal confronto di fig. 6, rispettivamente, con fig. 3, fig. 4 e fig. 5 si evince che:

- nessun lavoro è svolto dal sistema dei carichi sul primo sistema fittizio, quindi il primo termine di $\{\pi\}$ risulta pari a 0;
- nel nodo B la rotazione $\frac{pL_2^3}{24EI_2}$ dell'asta BC lavora sul momento $M_B = 1$ e il lavoro $(1 \cdot \frac{pL_2^3}{24EI_2})$ risulta positivo perché i versi sono concordi, quindi il secondo termine di $\{\pi\}$ risulta pari a $\frac{pL_2^3}{24EI_2}$;
- la forza F lavora sullo spostamento unitario u del terzo sistema fittizio e il lavoro risulta positivo $(F \cdot 1)$, quindi il terzo termine di $\{\pi\}$ risulta pari ad F.

Il vettore dei carichi viene così determinato:

A questo punto l'equazione di Müller-Breslau è completa:

$$\begin{bmatrix} \frac{L_1}{3EI_1} & \frac{L_1}{6EI_1} & \frac{1}{L_1} \\ \frac{L_1}{6EI_1} & \frac{L_1}{3EI_1} + \frac{L_2}{3EI_2} & -\frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_A \\ M_B \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{pL_2^3}{24EI_2} \\ F \end{bmatrix} = 0$$

Posto $L = L_1 = L_2$, $I = I_1 = I_2$ e $F = pL$ si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{L}{3EI} & \frac{L}{6EI} & \frac{1}{L} \\ \frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} + \frac{L}{3EI} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_A \\ M_B \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{pL^3}{24EI} \\ -pL \end{bmatrix}$$

Considerando solo i coefficienti numerici si ha:

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 & 1 \\ 1/6 & 2/3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_A \\ M_B \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/24 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Con l'aiuto di un risolutore di equazioni lineari³ e' possibile leggere la soluzione, a meno del fattore $p \cdot L^2$ per i momenti e $p \cdot L^4 / EI$ per gli spostamenti.

$$M_A = -\frac{21}{32} pL^2; \quad M_B = \frac{11}{32} pL^2; \quad u = \frac{31 pL^4}{192 EI}$$

Nota la soluzione si passa alla determinazione del diagramma del momento (vedi fig. 9).

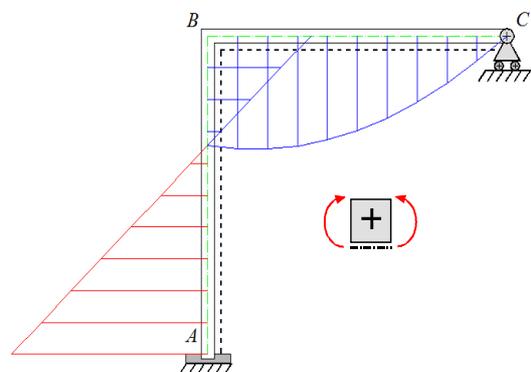


Fig. 9

³ All'indirizzo http://wims.unice.fr/wims/it_tool-linear-linsolver.it.html, si trova uno dei migliori risolutori di equazioni lineari del web, si consiglia di effettuare l'inserimento dei dati col metodo individuale.

Esempio 2. Procedimento semplificato

In riferimento al telaio di *fig.10*, viene ora esposto per passi un procedimento semplificato per la scrittura automatica della matrice di flessibilità $[A]$:

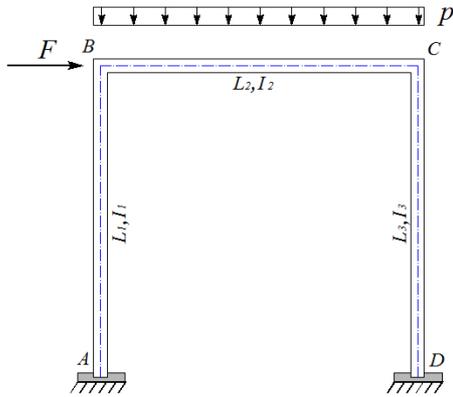


Fig. 10

1. Individuazione dei parametri incogniti;

secondo quanto specificato in precedenza, dopo aver scelto il verso dei momenti (positivi in modo che tirano le fibre inferiori di ogni asta) e il verso dello spostamento orizzontale (positivo se avviene da sinistra verso destra), il sistema delle incognite assume l'aspetto:

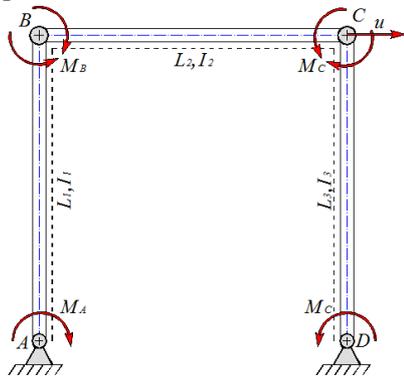


Fig. 11. Sistema delle incognite

Il vettore delle incognite associato è dato:

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \\ M_C \\ M_D \\ u \end{Bmatrix}$$

2. Calcolo della matrice $[A]$;

i coefficienti diagonali (a_{11}, a_{22}, a_{33} e a_{44}) della matrice $[A]$ (5×5) definita simmetrica e positiva, considerando $E=cost$ su tutte le aste, possono essere scritti in maniera generica attraverso l'espressione:

$$\frac{1}{3} \left[\frac{L_{prec}}{EI_{prec}} + \frac{L_{suc}}{EI_{suc}} \right]$$

dove:

L_{prec} e I_{prec} sono rispettivamente la lunghezza e il momento d'inerzia dell'asta precedente al nodo considerato;

L_{suc} e I_{suc} sono rispettivamente lunghezza e il momento d'inerzia dell'asta successiva al nodo considerato.

Il termine a_{55} di $[A]$, risulta pari a zero perché come precedentemente spiegato, imponendo al sistema delle incognite di *fig.11* la condizione $[M_A = 0; M_B = 0; M_C = 0; M_D = 0; u = 1]$ si ottiene una deformata rigida e i coefficienti di taglio su tutte le aste sono nulli.

I termini diagonali di $[A]$ possono essere quindi scritti in automatico:

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 + \frac{1}{3} \left[\frac{L_1}{EI_1} \right] & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \frac{1}{3} \left[\frac{L_1}{EI_1} + \frac{L_2}{EI_2} \right] & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \frac{1}{3} \left[\frac{L_2}{EI_2} + \frac{L_3}{EI_3} \right] & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \frac{1}{3} \left[\frac{L_3}{EI_3} \right] + 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Si aggiunge poi a sinistra di ogni termine diagonale (escludendo il termine a_{55}), la quantità $\frac{1}{6} \left[\frac{L_{prec}}{EI_{prec}} \right]$ e a destra di ogni termine diagonale la quantità $\frac{1}{6} \left[\frac{L_{suc}}{EI_{suc}} \right]$. La matrice $[A]$ assume l'aspetto:

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 + \frac{1}{3} \left[\frac{L_1}{EI_1} \right] & \frac{1}{6} \left[\frac{L_1}{EI_1} \right] & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{6} \left[\frac{L_1}{EI_1} \right] & \frac{1}{3} \left[\frac{L_1}{EI_1} + \frac{L_2}{EI_2} \right] & \frac{1}{6} \left[\frac{L_2}{EI_2} \right] & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{6} \left[\frac{L_2}{EI_2} \right] & \frac{1}{3} \left[\frac{L_2}{EI_2} + \frac{L_3}{EI_3} \right] & \frac{1}{6} \left[\frac{L_3}{EI_3} \right] & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \left[\frac{L_3}{EI_3} \right] & \frac{1}{3} \left[\frac{L_3}{EI_3} \right] + 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

L'ultima riga di $[A]$, viene determinata imponendo al sistema delle incognite la condizione: $[M_A = 0; M_B = 0; M_C = 0; M_D = 0; u = 1]$ ricavando così la deformata rigida di *fig. 12*.

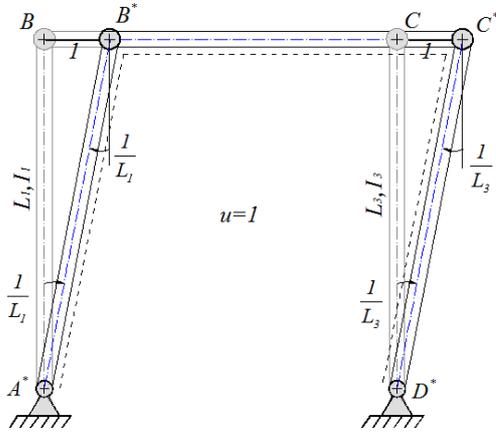


Fig. 12. Deformata rigida

I coefficienti elastici dell'ultima riga di $[A]$ si ottengono considerando il lavoro che le rotazioni rigide di *fig. 12*, compiono sul sistema delle incognite di *fig. 11*.

Sfruttando poi le proprietà di simmetria di $[A]$ l'ultima riga viene ribaltata sull'ultima colonna a completamento di tutti i coefficienti della matrice:

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \left[\frac{L_1}{EI_1} \right] & \frac{1}{6} \left[\frac{L_1}{EI_1} \right] & 0 & 0 & \frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{6} \left[\frac{L_1}{EI_1} \right] & \frac{1}{3} \left[\frac{L_1}{EI_1} + \frac{L_2}{EI_2} \right] & \frac{1}{6} \left[\frac{L_2}{EI_2} \right] & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & \frac{1}{6} \left[\frac{L_2}{EI_2} \right] & \frac{1}{3} \left[\frac{L_2}{EI_2} + \frac{L_3}{EI_3} \right] & \frac{1}{6} \left[\frac{L_3}{EI_3} \right] & \frac{1}{L_3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \left[\frac{L_3}{EI_3} \right] & \frac{1}{3} \left[\frac{L_3}{EI_3} \right] & -\frac{1}{L_3} \\ \frac{1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} & \frac{1}{L_3} & -\frac{1}{L_3} & 0 \end{bmatrix}$$

3. Calcolo del termine noto $\{\pi\}$;

dopo aver reso il telaio a nodi fissi attraverso un carrello ausiliario che annulli lo spostamento orizzontale u , calcoliamo le rotazioni che nascono per effetto del carico p sull'asta BC , (vedi *fig. 13*).

I termini i -esimi del vettore $\{\pi\}$ vengono determinati, considerando il lavoro svolto:

- dalle rotazioni elastiche di *fig. 13* sui momenti incogniti di *fig. 11*, rispettivamente nei nodi A, B, C, D ;
- dalle reazioni e dalle forze nodali del sistema dei carichi di *fig. 13* sulla deformata rigida di *fig. 12*.

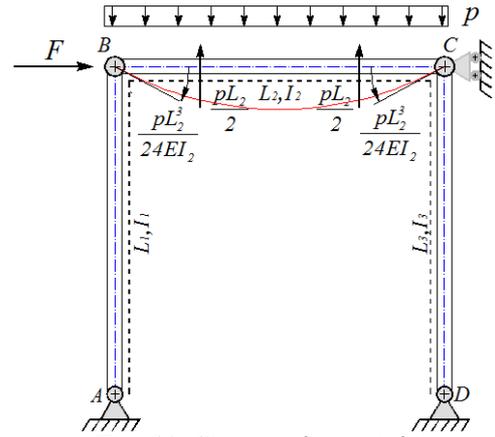


Fig. 13. Sistema dei carichi

Si ottiene quindi il vettore dei termini noti:

$$\{\pi\} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{pL_2^3}{24EI_2} \\ \frac{pL_2^3}{24EI_2} \\ 0 \\ F \end{bmatrix}$$

Posto: $L = L_1 = L_2 = L_3 = L_4$; $I = I_1 = I_2 = I_3 = I_4$;
 $F = pL$ si ha:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \left[\frac{L}{EI} \right] & \frac{1}{6} \left[\frac{L}{EI} \right] & 0 & 0 & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{6} \left[\frac{L}{EI} \right] & \frac{2}{3} \left[\frac{L}{EI} \right] & \frac{1}{6} \left[\frac{L}{EI} \right] & 0 & -\frac{1}{L} \\ 0 & \frac{1}{6} \left[\frac{L}{EI} \right] & \frac{2}{3} \left[\frac{L}{EI} \right] & \frac{1}{6} \left[\frac{L}{EI} \right] & \frac{1}{L} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \left[\frac{L}{EI} \right] & \frac{1}{3} \left[\frac{L}{EI} \right] & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_A \\ M_B \\ M_C \\ M_D \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{pL^3}{24EI} \\ \frac{pL^3}{24EI} \\ 0 \\ pL \end{bmatrix} = 0$$

4. calcolo delle incognite iperstatiche.

Considerando solo i coefficienti numerici si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 & 0 & 0 & 1 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & 0 & -1 \\ 0 & 1/6 & 2/3 & 1/6 & 1 \\ 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_A \\ M_B \\ M_C \\ M_D \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/24 \\ -1/24 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

con l'aiuto di un risolutore lineare, si perviene alla soluzione:

$$M_A = -\frac{65}{252} p \cdot L^2; M_B = \frac{10}{63} p \cdot L^2; M_C = -\frac{17}{63} p \cdot L^2$$

$$M_D = \frac{79}{252} p \cdot L^2; u = \frac{5}{84} \frac{p \cdot L^4}{EI}$$

Si passa poi agevolmente alla determinazione del diagramma del momento (vedi fig. 14).

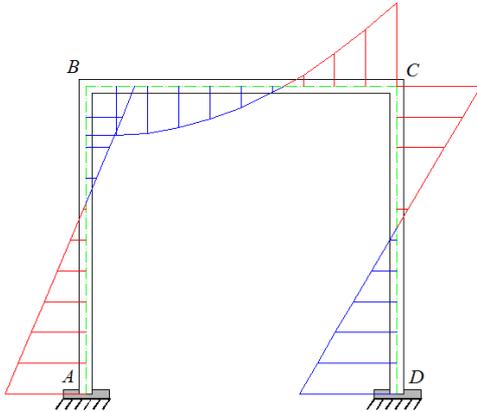


Fig. 14

Esempio 3. Procedimento semplificato (travi continue).

Il procedimento semplificato trova la sua maggiore efficacia nella risoluzione di travi continue. Nel caso generale di strutture a nodi fissi, la matrice $[A]$ contiene solo coefficienti di rotazione e la scrittura dell'equazione di Müller-Breslau, si riduce alla sola determinazione del vettore dei termini noti $\{\pi\}$.

Consideriamo la trave continua di fig. 15.

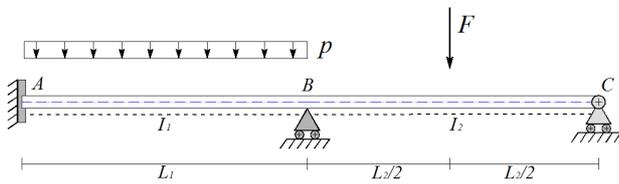


Fig. 15

Si individuano il sistema delle incognite (vedi fig. 16) e il sistema dei carichi (vedi fig. 17).

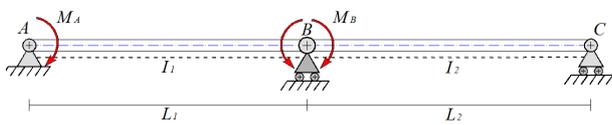


Fig. 16. Sistema delle incognite

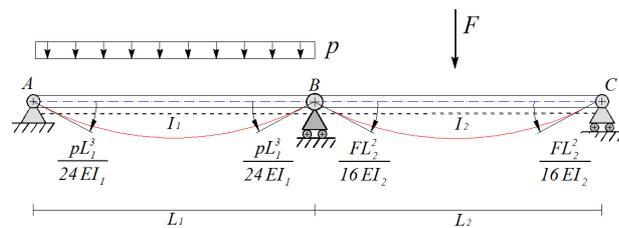


Fig. 17. Sistema dei carichi

Secondo le indicazioni precedenti si scrive l'equazione di Muller-Breslau in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \left[\frac{L_1}{EI_1} \right] & \frac{1}{6} \left[\frac{L_1}{EI_1} \right] \\ \frac{1}{6} \left[\frac{L_1}{EI_1} \right] & \frac{1}{3} \left[\frac{L_1}{EI_1} + \frac{L_2}{EI_2} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_A \\ M_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{pL_1^3}{24EI_1} \\ \frac{pL_1^3}{24EI_1} + \frac{FL_2^2}{16EI_2} \end{bmatrix} = 0$$

Posto ad esempio $L = L_1 = L_2$, $I = I_1 = I_2$ e $F = pL$ si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_B \\ M_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/24 \\ -5/48 \end{bmatrix}$$

Trovata la soluzione ($M_A = -\frac{3}{56} pL^2$, $M_B = -\frac{1}{7} pL^2$) si determina il diagramma del momento (fig. 18).

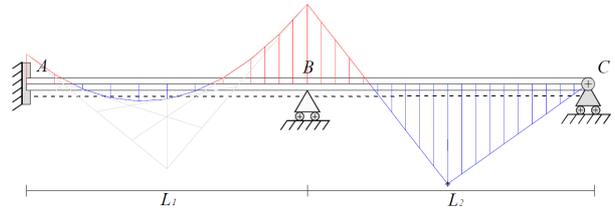


Fig. 18

Esempio 3. Procedimento semplificato (telai ad aste inclinate). Consideriamo il telaio in fig. 19

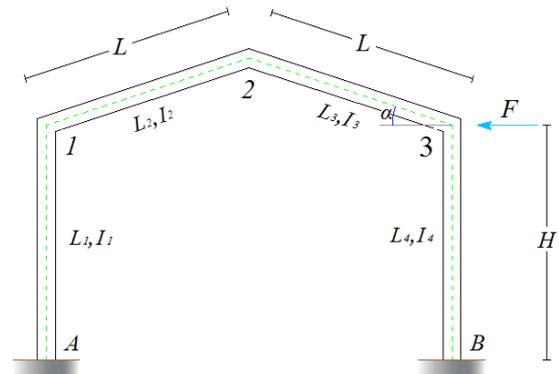


Fig. 19

Si individuano: il sistema delle incognite (vedi fig. 20) e il sistema dei carichi (vedi fig. 21).

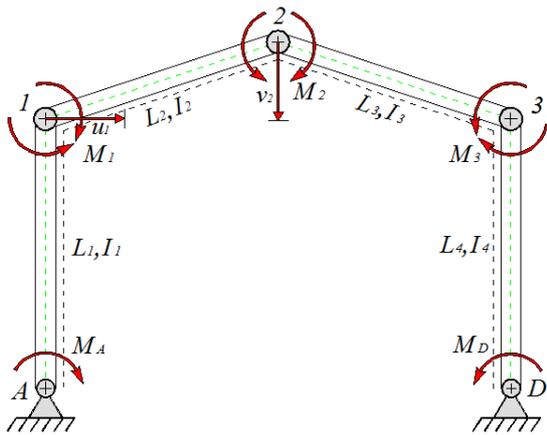


Fig.20

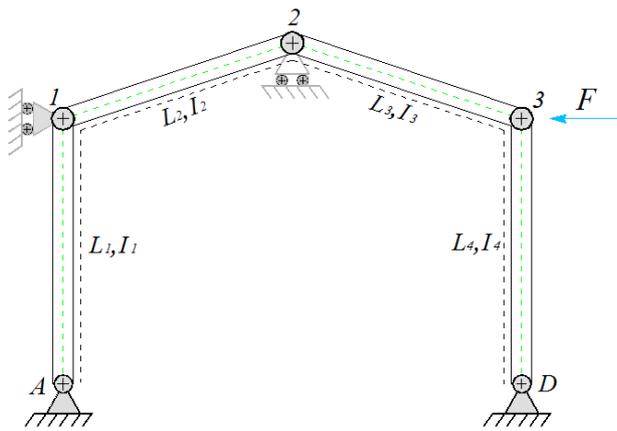


Fig.21

Secondo le indicazioni precedenti si scrivono per prima i termini diagonali della matrice $[A]$:

M_A	M_1	M_2	M_3	M_D	u_1	v_2
$\frac{1}{3} \left[\frac{L_1}{EI_1} \right]$	---	---	---	---	---	---
---	$\frac{1}{3} \left[\frac{L_2 + L_3}{EI_1 + EI_2} \right]$	---	---	---	---	---
---	---	$\frac{1}{3} \left[\frac{L_2 + L_3}{EI_2 + EI_3} \right]$	---	---	---	---
---	---	---	$\frac{1}{3} \left[\frac{L_3 + L_4}{EI_3 + EI_4} \right]$	---	---	---
---	---	---	---	$\frac{1}{3} \left[\frac{L_4}{EI_4} \right]$	---	---
---	---	---	---	---	0	0
---	---	---	---	---	0	0

notiamo che i valori a_{66} , a_{77} , a_{76} e a_{67} sono necessariamente nulli, in quanto le deformate ricavate per $u_3=I$ e $v_2=I$ sono rigide e non producono coefficienti di taglio.

Si aggiungono poi rispettivamente a sinistra e a destra di ogni termine diagonale le quantità

$\frac{1}{6} \left[\frac{L_{prec}}{EI_{prec}} \right]$ e $\frac{1}{6} \left[\frac{L_{suc}}{EI_{suc}} \right]$, escludendo le ultime due righe e le ultime due colonne. La matrice $[A]$ assume così l'aspetto:

M_A	M_1	M_2	M_3	M_D	u_1	v_2
$\frac{1}{3} \left[\frac{L_1}{EI_1} \right]$	$\frac{1}{6} \left[\frac{L_1}{EI_1} \right]$	0	0	0	---	---
$\frac{1}{6} \left[\frac{L_1}{EI_1} \right]$	$\frac{1}{3} \left[\frac{L_2 + L_3}{EI_1 + EI_2} \right]$	$\frac{1}{6} \left[\frac{L_2}{EI_2} \right]$	0	0	---	---
0	$\frac{1}{6} \left[\frac{L_2}{EI_2} \right]$	$\frac{1}{3} \left[\frac{L_2 + L_3}{EI_2 + EI_3} \right]$	$\frac{1}{6} \left[\frac{L_3}{EI_3} \right]$	0	---	---
0	0	$\frac{1}{6} \left[\frac{L_3}{EI_3} \right]$	$\frac{1}{3} \left[\frac{L_3 + L_4}{EI_3 + EI_4} \right]$	$\frac{1}{6} \left[\frac{L_4}{EI_4} \right]$	---	---
0	0	0	$\frac{1}{6} \left[\frac{L_4}{EI_4} \right]$	$\frac{1}{3} \left[\frac{L_4}{EI_4} \right]$	---	---
---	---	---	---	---	0	0
---	---	---	---	---	0	0

I coefficienti elastici della penultima riga, vengono determinati imponendo al sistema delle incognite la condizione:

$$[M_A = 0; M_1 = 0; M_2 = 0; M_3 = 0; M_D = 0; v_2 = 0; u_1 = I]$$

(vedi fig.22).

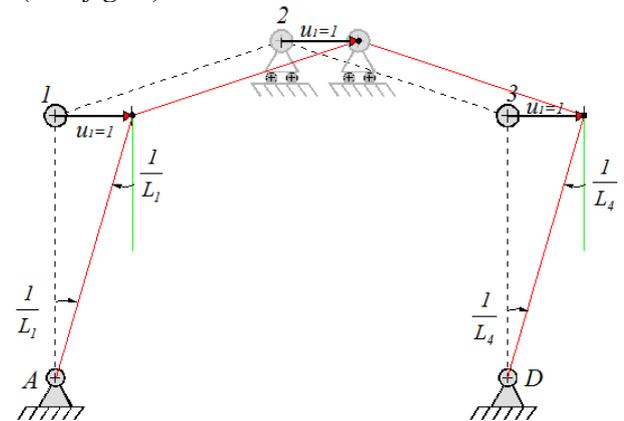


Fig.22

M_A	M_1	M_2	M_3	M_D	u_1	v_2
$\frac{1}{3} \left[\frac{L_1}{EI_1} \right]$	$\frac{1}{6} \left[\frac{L_1}{EI_1} \right]$	0	0	0	---	---
$\frac{1}{6} \left[\frac{L_1}{EI_1} \right]$	$\frac{1}{3} \left[\frac{L_2 + L_3}{EI_1 + EI_2} \right]$	$\frac{1}{6} \left[\frac{L_2}{EI_2} \right]$	0	0	---	---
0	$\frac{1}{6} \left[\frac{L_2}{EI_2} \right]$	$\frac{1}{3} \left[\frac{L_2 + L_3}{EI_2 + EI_3} \right]$	$\frac{1}{6} \left[\frac{L_3}{EI_3} \right]$	0	---	---
0	0	$\frac{1}{6} \left[\frac{L_3}{EI_3} \right]$	$\frac{1}{3} \left[\frac{L_3 + L_4}{EI_3 + EI_4} \right]$	$\frac{1}{6} \left[\frac{L_4}{EI_4} \right]$	---	---
0	0	0	$\frac{1}{6} \left[\frac{L_4}{EI_4} \right]$	$\frac{1}{3} \left[\frac{L_4}{EI_4} \right]$	---	---
$\frac{1}{L_1}$	$-\frac{1}{L_1}$	0	$\frac{1}{L_4}$	$-\frac{1}{L_4}$	0	0
---	---	---	---	---	0	0

I coefficienti elastici dell'ultima riga, vengono determinati imponendo al sistema delle incognite la condizione:

$$[M_A = 0; M_I = 0; M_2 = 0; M_3 = 0; M_D = 0; v_2 = 1; u_1 = 0]$$

(vedi fig.23).

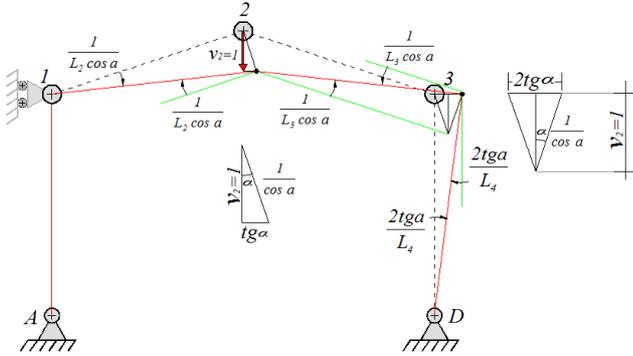


Fig.23

Sfruttando le proprietà di simmetria di $[A]$ si ottiene:

$$\begin{matrix} M_A & M_I & M_2 & M_3 & M_D & u_1 & v_2 \\ \left[\begin{array}{cccccc} \frac{1}{3} \left[\frac{L_1}{EI_1} \right] & \frac{1}{6} \left[\frac{L_1}{EI_1} \right] & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_1} & 0 \\ \frac{1}{6} \left[\frac{L_1}{EI_1} \right] & \frac{1}{3} \left[\frac{L_1 + L_2}{EI_1 + EI_2} \right] & \frac{1}{6} \left[\frac{L_2}{EI_2} \right] & 0 & 0 & -\frac{1}{L_1} & \frac{1}{L_2 \cos a} \\ 0 & \frac{1}{6} \left[\frac{L_2}{EI_2} \right] & \frac{1}{3} \left[\frac{L_2 + L_3}{EI_2 + EI_3} \right] & \frac{1}{6} \left[\frac{L_3}{EI_3} \right] & 0 & -\frac{1}{L_2 \cos a} & -\frac{1}{L_3 \cos a} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \left[\frac{L_3}{EI_3} \right] & \frac{1}{3} \left[\frac{L_3 + L_4}{EI_3 + EI_4} \right] & \frac{1}{6} \left[\frac{L_4}{EI_4} \right] & \frac{1}{L_3} & \frac{1}{L_3 \cos a} + \frac{2tga}{L_4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \left[\frac{L_4}{EI_4} \right] & \frac{1}{3} \left[\frac{L_4}{EI_4} \right] & -\frac{1}{L_4} & -\frac{2tga}{L_4} \\ \frac{1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} & 0 & \frac{1}{L_4} & -\frac{1}{L_4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2 \cos a} & -\frac{1}{L_2 \cos a} - \frac{1}{L_3 \cos a} & \frac{1}{L_3 \cos a} + \frac{2tga}{L_4} & -\frac{2tga}{L_4} & 0 & 0 \end{array} \right] \end{matrix}$$

Il termine noto viene ricavato in questo caso considerando il lavoro che la forza di fig.19 compie sulle deformate rigide di fig. 22 e di fig. 23.

$$\begin{matrix} M_A & M_I & M_2 & M_3 & M_D & u_1 & v_2 \\ \left[\begin{array}{cccccc} \frac{1}{3} \left[\frac{L_1}{EI_1} \right] & \frac{1}{6} \left[\frac{L_1}{EI_1} \right] & 0 & 0 & 0 & \text{---} & \text{---} \\ \frac{1}{6} \left[\frac{L_1}{EI_1} \right] & \frac{1}{3} \left[\frac{L_1 + L_2}{EI_1 + EI_2} \right] & \frac{1}{6} \left[\frac{L_2}{EI_2} \right] & 0 & 0 & \text{---} & \text{---} \\ 0 & \frac{1}{6} \left[\frac{L_2}{EI_2} \right] & \frac{1}{3} \left[\frac{L_2 + L_3}{EI_2 + EI_3} \right] & \frac{1}{6} \left[\frac{L_3}{EI_3} \right] & 0 & \text{---} & \text{---} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \left[\frac{L_3}{EI_3} \right] & \frac{1}{3} \left[\frac{L_3 + L_4}{EI_3 + EI_4} \right] & \frac{1}{6} \left[\frac{L_4}{EI_4} \right] & \text{---} & \text{---} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \left[\frac{L_4}{EI_4} \right] & \frac{1}{3} \left[\frac{L_4}{EI_4} \right] & \text{---} & \text{---} \\ \frac{1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} & 0 & \frac{1}{L_4} & -\frac{1}{L_4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2 \cos a} & -\frac{1}{L_2 \cos a} - \frac{1}{L_3 \cos a} & \frac{1}{L_3 \cos a} + \frac{2tga}{L_4} & -\frac{2tga}{L_4} & 0 & 0 \end{array} \right] \end{matrix}$$

$$\{\pi\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F \\ -2tga F \end{bmatrix}$$

In sintesi l'espressione $[A]\{X\} + \{\pi\} = 0$ in questo caso diventa:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \left[\frac{L_1}{EI_1} \right] & \frac{1}{6} \left[\frac{L_1}{EI_1} \right] & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L_1} & 0 \\ \frac{1}{6} \left[\frac{L_1}{EI_1} \right] & \frac{1}{3} \left[\frac{L_1 + L_2}{EI_1 + EI_2} \right] & \frac{1}{6} \left[\frac{L_2}{EI_2} \right] & 0 & 0 & -\frac{1}{L_1} & \frac{1}{L_2 \cos a} \\ 0 & \frac{1}{6} \left[\frac{L_2}{EI_2} \right] & \frac{1}{3} \left[\frac{L_2 + L_3}{EI_2 + EI_3} \right] & \frac{1}{6} \left[\frac{L_3}{EI_3} \right] & 0 & 0 & -\frac{1}{L_2 \cos a} - \frac{1}{L_3 \cos a} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \left[\frac{L_3}{EI_3} \right] & \frac{1}{3} \left[\frac{L_3 + L_4}{EI_3 + EI_4} \right] & \frac{1}{6} \left[\frac{L_4}{EI_4} \right] & \frac{1}{L_4} & \frac{1}{L_3 \cos a} + \frac{2tga}{L_4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \left[\frac{L_4}{EI_4} \right] & \frac{1}{3} \left[\frac{L_4}{EI_4} \right] & -\frac{1}{L_4} & -\frac{2tga}{L_4} \\ \frac{1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} & 0 & \frac{1}{L_4} & -\frac{1}{L_4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2 \cos a} & -\frac{1}{L_2 \cos a} - \frac{1}{L_3 \cos a} & \frac{1}{L_3 \cos a} + \frac{2tga}{L_4} & -\frac{2tga}{L_4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_A \\ M_I \\ M_2 \\ M_3 \\ M_D \\ u_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F \\ -2tga F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Posto: $I_2 = I_3 = 11,381 \cdot I$, $I_4 = I_1 = I$, $L_1 = L_4 = 1,108 \cdot L$, $L_2 = L_3 = L$, $tg\alpha = 2/6$, $cosa = 6/\sqrt{40}$

si ha:

$$\begin{pmatrix} 0,3693 & 0,1847 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,9025 & 0,0000 \\ 0,1847 & 0,3986 & 0,0146 & 0,0000 & 0,0000 & -0,9025 & 1,0537 \\ 0,0000 & 0,0146 & 0,0586 & 0,0146 & 0,0000 & 0,0000 & -2,1075 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0146 & 0,3986 & 0,1847 & 0,9025 & 1,6548 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,1847 & 0,3693 & -0,9025 & -0,6011 \\ 0,9025 & -0,9025 & 0,0000 & 0,9025 & -0,9025 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 1,0537 & -2,1075 & 1,6548 & -0,6011 & 0,0000 & 0,0000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_A \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ u_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0000 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \\ 1,0000 \\ 0,6660 \end{pmatrix}$$

a cui corrisponde: $M_1 = -0,2481 F \cdot L$; $M_2 = -0,1262 F \cdot L$; $M_3 = 0,2916 F \cdot L$; $M_D = -0,2976 F \cdot L$;

$$u_1 = -0,0600 \frac{F \cdot L^3}{EI_1}; \quad v_2 = -0,0032 \frac{F \cdot L^3}{EI_1}.$$

Tale soluzione è identica a quella trovata per lo stesso telaio, con il metodo degli spostamenti in "BILOTTI G., DE SANTIS A.M., OLIVITO R.S., PANTUSO A.", *Esercizi di Scienza e Tecnica delle Costruzioni*, Liguori Edizioni 2014" (Esercizio 5.1), a maggior conferma dell'esattezza del metodo proposto.

Trovata la soluzione si determina il diagramma del momento (fig.24).

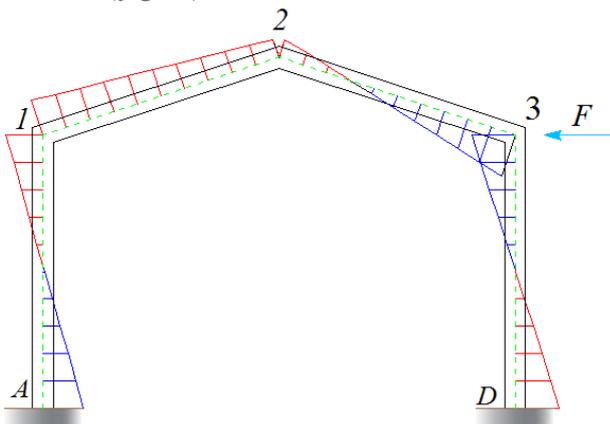


Fig. 24

Conclusioni.

Nelle pagine precedenti si è voluto dimostrare che nei telai piani con nodi in cui non concorrono più di due aste, sostituendo una cerniera in ogni nodo interno o esterno della struttura, in modo da considerare ogni asta appoggiata-appoggiata e imponendo per ogni nodo interno il rispetto dell'equilibrio alla rotazione del nodo ($M_{i,i-1} = M_{i,i+1}$), il metodo delle forze può essere agevolmente espresso in forma matriciale.

Il problema del maggior numero di parametri incogniti rispetto al metodo degli spostamenti, viene facilmente superato con l'ausilio di solutori di equazioni lineari disponibili sul web.

I vantaggi dell'uso di questa metodologia, possono così sintetizzarsi:

- uso dei coefficienti elastici delle travi appoggiate-appoggiate;
- velocità dell'assemblaggio della matrice dei coefficienti di flessibilità $[A]$;
- ricavo diretto dei momenti e spostamenti incogniti;
- maggiore velocità di procedimento e risoluzione di una struttura iperstatica.

Tale approccio può trovare anche applicazione nella ricerca delle frecce delle travi isostatiche ad asse rettilineo e nella determinazione del λ cinematico (statico) nel calcolo a rottura.

Bibliografia:

- [1] P. Gambarova, E. Giuriani, P. Ronca, S. Tattoni. *Esercizi di Tecnica delle Costruzioni*. Ed. De Agostini Scuola SPA Novara 2007
- [2] BILOTTI G., *Meccanica delle Strutture*, Libreria Progetto, Padova 2008.
- [3] BILOTTI G., DE SANTIS A.M., OLIVITO R.S., PANTUSO A., *Esercizi di Scienza e Tecnica delle Costruzioni*, Liguori Edizioni 2014
- [4] VIOLA E., *Esercitazioni di Scienza delle Costruzioni*, Pitagora Editrice, Bologna 1994.
- [5] SARÀ G., *Esercizi di Teoria e Tecnica delle Costruzioni - Vol. 2*, Liguori Editore, Napoli 1978.
- [6] LIPSCHUTZ S., *Algebra Lineare*, McGraw-Hill, Milano 1975.
- [7] Alberto Carpinteri, Giuseppe Lacidogna, Cecilia Surace. *Calcolo dei telai piani. Esempi ed Esercizi*. ed. Pitagora 2002
- [8] Vincenzo Franciosi *Fondamenti di scienza delle costruzioni Volume II: Teoria della trave* Liguori Edizioni
- [9] <http://people.unica.it/tattoni/files/2010/11/tecnica-06eserc-metodo-forze.pdf> "Esercitazioni di Tecnica delle Costruzioni" Sergio Tattoni
- [10] <http://www.scienzadellecostruzioni.co.uk/materiale.html> *La scrittura diretta delle equazioni di congruenza - Il metodo misto. Esercitazioni di Scienza delle Costruzioni* Claudio Franciosi
- [11] http://www.mondovi.polito.it/ebook/doc/AG_P1.pdf
- [12] <https://www.unipa.it/persona/docenti/d/fabio.ditrapani/contnt/documenti/telaio-matriciale.pdf>