NAZARIO MAGNARELLI

PROBLEMI DI MATEMATICA GENERALE

INDICE

Prefazione 5
Geometria piana 6
1. Triangolo rettangolo circoscritto ad una circonferenza 7
2. Triangolo isoscele circoscritto ad una semicirconferenza 9
3. Punto intersezione delle diagonali di un trapezio scaleno 11
Geometria solida 14
4. Sulla diagonale di un parallelepipedo retto 15
5. Fusione di un blocco di stagno a forma di piramide 16
6. Piramide retta avente per base un rombo 17
7. Piramide regolare quadrangolare con elementi assegnati 18
8. Piramide retta a base circoscritta ad un cerchio 19
9. Piramide sovrapposta ad un prisma retto 20
10. Cono sovrapposto ad un cilindro 21
11. Tronco di piramide quadrangolare regolare 22
12. Maturità magistrale giugno 1994 23
13. Maturità scientifica, anno 1995 25
Goniometria 27
14. Funzioni goniometriche inverse 28
15. Prima identità goniometrica 30
Progressioni 32
16. Progressioni aritmetiche 33
17. Progressioni geometriche 34
18. Problema su una progressione geometrica 36
19. Problema su una progressione geometrica 38
Analisi matematica 41
20. Primi limiti 42
21. Limite di una funzione per $x \to x_o$ 46
22. Limiti notevoli di forme algebriche indeterminate 48
23. Studio di un particolare problema differenziale 50
24. Limite I di una forma indeterminata 55
25. Limite II di una forma indeterminata 56
26. Limite III di una forma indeterminata 57

27. Limite IV di una forma indeterminata 57
28. Limite V di una forma indeterminata..................................... 58
29. Limite di una funzione per $x \to +\infty$ 59
30. Calcolo elementare della derivata di una funzione 60
31. Cono di sup. laterale minima circoscritto ad una sfera 61
32. Punti estremanti di una funzione parametrica razionale 67
33. Integrale di una particolare forma indeterminata........................ 70
34. Altro integrale notevole 74
35. Punti estremanti di una parabola cubica 77
Calcolo combinatorio.. 80
36. Disposizioni semplici e permutazioni 81
37. Combinazioni semplici 84
Curve nel piano 87
38. Centro di curvatura ed evolvente di una curva 88
39. Asintoti curvilinei 91
ASINTOTI PARABOLICI 92
ASINTOTI CUBICI.. 92
40. Problema geometrico. 96
41. Studio di quartica bicircolare 100
42. Altra quartica bicircolare 104
43. Ricerca dell'equazione polare di una quartica 108
44. Teoria su tacnodi e cuspidi di specie superiore 113
45. Esercizio 7R (L'origine O è un tacnodo di 2^a specie)....... 115
46. Applicazioni delle trasformazioni per raggi vettori reciproci... 124
47. Ancora sulla trasformazione per raggi vettori reciproci 127
48. Equazioni parametriche della cardioide.................................. 131
49. Involuzione dei diametri coniugati di una conica 132
50. Costruzione dei diametri coniugati di una conica..................... 135
51. Approfondimenti sul primo teorema di Steiner-Chasles 137
52. Altra dimostrazione del teorema di Pascal............................... 142
53. Centro di collineazione di due fasci proiettivi di rette.............. 144
Problemi storici.. 146
54. Concoide del cerchio o Lumaca di Pascal 147

55. Su un problema di Apollonio 149
56. La trisettrice di Ippia 152
57. Trisezione di un angolo: altra dimostrazione 158
Equazioni di terzo grado 160
58. Teoria delle equazioni di terzo grado....................................... 161
59. Equazione di terzo grado con discriminante positivo 163
60. Equazione di terzo grado con discriminante nullo.................... 164
61. Equazione di terzo grado con tre radici reali 165
62. L' equazione di terzo grado nel "casus irriducibilis"............... 168
63. Risoluzione grafica delle equazioni di terzo grado 172
Problemi vari.. 174
64. Un problema sulle età di due persone 175
65. Il problema del cane e della lepre 176
66. Quando si viaggiava in carrozza 178
67. Un problema sull'uso delle frazioni... 182
68. Un problema difficile per la Camera dei Comuni.................... 184
69. Problema del trifoglio 185
70. Problema sul numero dei polli, galline e pulcini 187
71. Le età di tre persone 189
72. Somma dei primi n numeri triangolari................................. 190
73. Problema sulle politropiche 191
Fisica 195
74. Esercizi sui moti relativi. 196
75. Moto rettilineo uniforme visto da una piattaforma ruotante 202

Prefazione

In questo volume sono esposti numerosi problemi di matematica generale, dalla geometria del piano alla geometria solida, dall'analisi matematica alle curve, alla geometria proiettiva. Per la storia della matematica si è dato ampio spazio alla risoluzioni delle equazioni di terzo grado ma anche a problemi classici dell'antichità. Completano il libro alcuni classici problemi di applicazione a situazioni reali.

Lo scrivente propone questi argomenti come stimolo per lo studio della Disciplina e come repertorio di regole e procedimenti matematici da tenere sempre presenti.

Nazario Magnarelli

Latina, Ottobre 2010

Geometria piana

1. Triangolo rettangolo circoscritto ad una circonferenza

Determinare i cateti di un triangolo rettangolo ABC, circoscritto ad una circonferenza di centro O e raggio r, sapendo che l'altezza relativa all'ipotenusa è $\overline{AH} = \frac{12}{5} r$ (fig. 9).

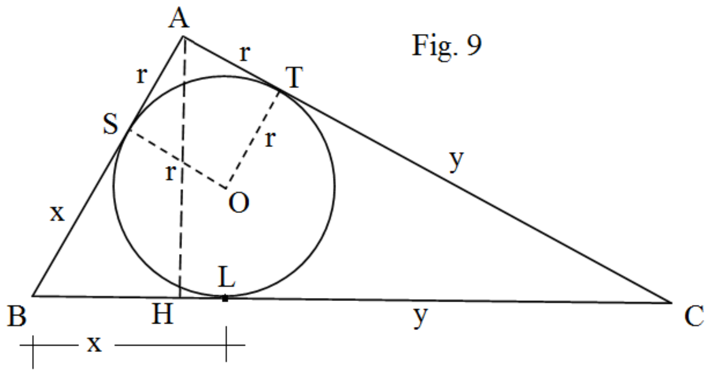


Fig. 9

Siano rispettivamente S,T ed L i punti di tangenza della circonferenza con i cateti AB, AC e con l'ipotenusa BC.

Poniamo $\overline{BS} = \overline{BL} = x$, $\overline{CL} = \overline{CT} = y$; quindi $\overline{BC} = \overline{BL} + \overline{LC} = x + y$.

Ovviamente $\overline{AS} = \overline{AT} = \overline{OT} = r$.

Per il Teorema di Pitagora si ha:

(1) $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, $\rightarrow$ $(x+y)^2 = (x+r)^2 + (y+r)^2$.

Svolgendo i quadrati e semplificando subito si trova

(2) $$xy = xr + yr + r^2 \quad .$$

Per il doppio dell'area del triangolo rettangolo si ha la formula:

(3) $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{BC} \cdot \overline{AH}$, $\rightarrow$ $(x+r)\cdot(y+r) = (x+y)\cdot(12/5)r$.

Da cui (4) $$xy + xr + yr + r^2 = (x+y)\cdot\frac{12}{5}r \quad .$$

Tenendo conto della (2), la (4) diventa

- $2xy = \frac{12}{5}(x+y)r$, ossia (5) $xy = \frac{6}{5}(x+y)r$.

Se ora riprendiamo la (2) e sostituiamo in essa l'espressione del prodotto xy dato dalla (5) si ha:

(6) $\frac{6}{5}(x+y)r = xr + yr + r^2$, $\rightarrow$ $\frac{6}{5}(x+y) = (x+y) + r$, e quindi

(7) $$x + y = 5r \quad .$$

Sostituendo la (7) nella (5) si ha : (8) $xy = 6r^2$.

Abbiamo quindi trovato il sistema risolvente

(9) $$\begin{cases} x + y = 5r \\ xy = 6r^2 \end{cases} \quad .$$

Esso ha le soluzioni simmetriche $x = 2r$, $y = 3r$

e $x = 3r$, $y = 2r$.

Limitandoci a prendere la prima soluzione, rispondente alla fig. 10, si ha

$$\overline{AB} = 3r \; , \qquad \overline{AC} = 4r \; .$$

2. Triangolo isoscele circoscritto ad una semicirconferenza

Un triangolo isoscele ABC è circoscritto ad una semicirconferenza di centro O, raggio 12a ed avente il diametro interno alla base AB del triangolo; il lato CB è tangente in T alla semicirconferenza. Sappiamo inoltre che l'area S del triangolo è $300\,a^2$. Determinare l'altezza e i lati obliqui del triangolo (Fig. 10)

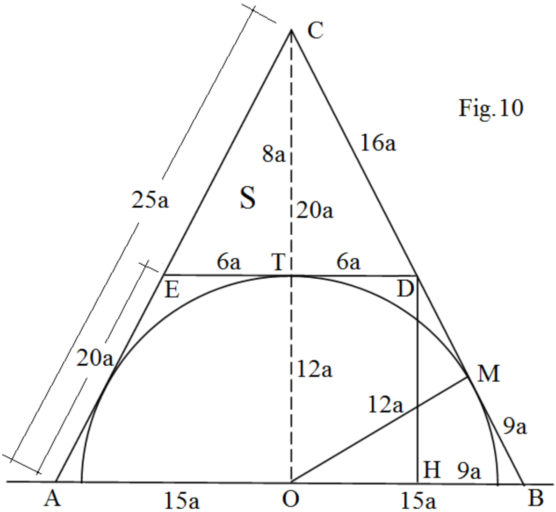


Fig. 10

Determinare il perimetro del trapezio che si ottiene intersecando il triangolo con la retta tangente alla semicirconferenza e parallela alla base AB del triangolo.

<u>Soluzione</u> Il raggio OT della semicirconferenza è perpendicolare al lato CB nel punto T. Possiamo trovare l'area S del triangolo ABC scrivendo

(1) $\overline{CB}\cdot\overline{OT}=S, \quad \rightarrow \quad \overline{CB}=\dfrac{300a^2}{12a}, \quad \rightarrow \quad \overline{CB}=25a$ (lato obliquo) .

Ora, posto $\overline{BT} = x$ e $\overline{TC} = y$, per il secondo teorema di Euclide si ha:

(2) $$\overline{OT}^2 = \overline{BT} \cdot \overline{TC} \; .$$

Abbiamo quindi il sistema risolvente :

(3) $$\begin{cases} x + y = 25a \\ x \cdot y = 144a^2 \end{cases} .$$

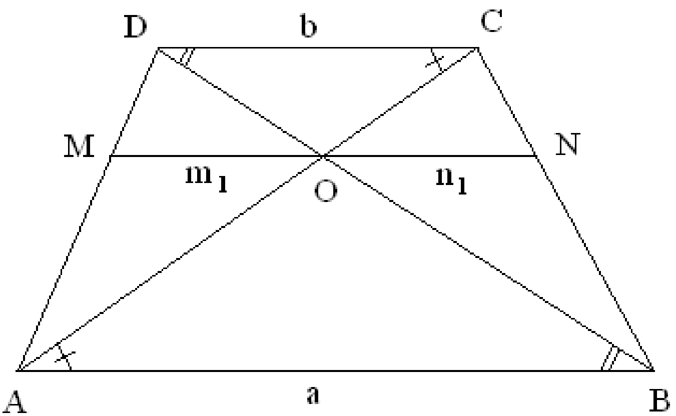
Si ricava $x = \overline{BT} = 9a$, $y = \overline{RC} = 16a$.

Infine, applicando il teor. di Pitagora al triangolo OTC, rettangolo in T , possiamo trovare la l'altezza OC del triangolo ABC . Si ha:

(4) $$\overline{OC} = \sqrt{\overline{OT}^2 + \overline{CT}^2} = \sqrt{(12a)^2 + (16a)^2} = \sqrt{400a^2} = 20a$$

3. Punto intersezione delle diagonali di un trapezio scaleno

Vediamo un problema di geometria piana che trovai molto interessante agli inizi della mia carriera di insegnante.
E' dato un trapezio scaleno ABCD; le misure della maggiore e della base minore sono rispettivamente $\overline{AB} = a$ e $\overline{CD} = b$. Dal punto di intersezione O delle diagonali AC e BD si conduca la parallela alle due basi e siano M ed N i punti di intersezione con i lati obliqui del trapezio (fig. 5-7). Si trovi la misura della corda MN in funzione di a e b .



Poniamo

$\overline{OM} = m_1 \quad \overline{ON} = n_1$

Fig. 5-7

Dalla similitudine dei triangoli (DOC) e (AOB) si ha la proporzione

$$\overline{DC} : \overline{AB} = \overline{DO} : \overline{OB} \text{ , cioè } \quad (1) \qquad \frac{b}{a} = \frac{\overline{DO}}{\overline{OB}} \; .$$

Dalla similitudine dei triangoli (DMO) e (DAB) si ha la proporzione

$$(2) \qquad \frac{m_1}{a} = \frac{\overline{DO}}{\overline{DB}} \; .$$

Dalla similitudine dei triangoli (BDC) e (BON) si ha la proporzione

$$(3) \qquad \frac{b}{n_1} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BO}} \; .$$

Moltiplicando membro a membro le eguaglianze (2), (3) si ha

$$\frac{m_1}{a} \cdot \frac{b}{n_1} = \frac{\overline{DO}}{\cancel{\overline{DB}}} \cdot \frac{\cancel{\overline{BD}}}{\overline{BO}} \;, \text{ da cui } \quad (4) \qquad \frac{b}{a} \cdot \frac{m_1}{n_1} = \frac{\overline{DO}}{\overline{BO}} \; .$$

Ricordiamo che per la (1) si ha $\frac{b}{a} = \frac{\overline{DO}}{\overline{OB}}$;

sostituendo nella (4) si ha: (5) $\frac{\cancel{\overline{DO}}}{\cancel{\overline{OB}}} \cdot \frac{m_1}{n_1} = \frac{\cancel{\overline{DO}}}{\cancel{\overline{BO}}}$.

Dalla (5) si ottiene $\frac{m_1}{n_1} = 1$, cioè (6) $m_1 = n_1$, ossia $\overline{MO} = \overline{ON}$,
e questo risultato è già di per sé notevole.

Riprendendo la (3) si ha: $\frac{b}{n_1} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BO}}$,

da cui $\frac{b}{n_1} = \frac{\overline{BO} + \overline{OD}}{\overline{BO}}$, cioè (7) $\frac{b}{n_1} = 1 + \frac{\overline{OD}}{\overline{BO}}$.

Ma come abbiamo visto dalla (1) si ha $\frac{\overline{OD}}{\overline{BO}} = \frac{b}{a}$;

sostituendo nella (7) si ottiene:

$\frac{b}{n_1} = 1 + \frac{b}{a}$ e da questa si ricava (8) $\frac{b}{n_1} = \frac{a+b}{a}$.

Prendendo i reciproci di ambo i membri della (8) si ha:

$$\frac{n_1}{b} = \frac{a}{a+b} \ , \quad \text{cioè} \qquad n_1 = \frac{ab}{a+b} \ .$$

Poiché $\overline{MN} = m_1 + n_1 = 2n_1$, si ottiene infine:

$$\overline{MN} = \frac{2ab}{a+b} \ .$$

Geometria solida

4. Sulla diagonale di un parallelepipedo retto

E' dato un parallelepipedo retto a base rettangolare: il lato maggiore di base è lungo 36 cm . Sappiamo inoltre che il rapporto fra la diagonale di base e la diagonale maggiore del parallelepipedo è uguale a $15/17$, mentre la somma delle loro misure è uguale a cm 96.

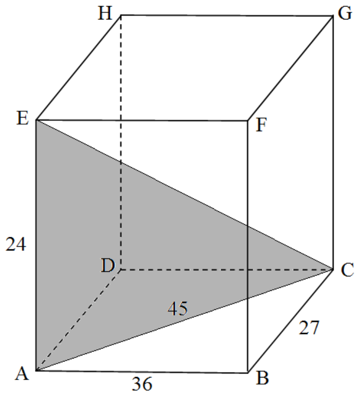


Fig. 1

1) Determinare l'area della superficie totale e il volume del solido.

$(St = cm^2 4968, \quad V = cm^3 23.328 = cm^3 3^6 \cdot 2^5)$

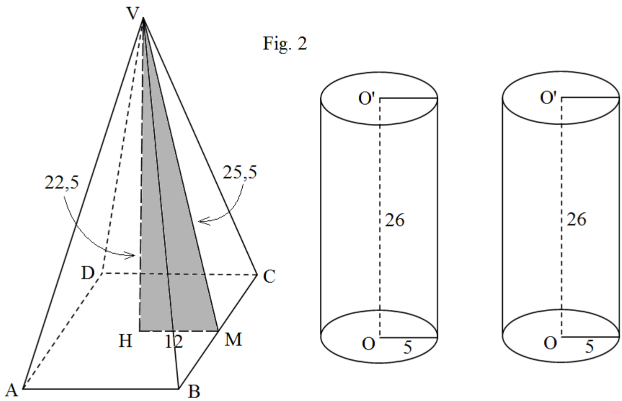
2) Determinare, infine, l'area laterale del cubo equivalente a $1/4$ del parallelepipedo dato.

[Suggerimento: posto x = misura della diagonale di base e y = misura della diagonale maggiore del solido , possiamo scrivere la proporzione $x : y = 15 : 17$.
Sapendo che $x + y = 96$, applicando a questa la regola del comporre si trova $x = 46$ cm, $y = 51$cm] .

5. Fusione di un blocco di stagno a forma di piramide

Un blocco di stagno ha la forma di piramide regolare a base quadrata.

Fig. 2



L'area della superficie totale del blocco è uguale a $1800\ \text{cm}^2$ mentre il rapporto tra la superficie di base e la superficie laterale del solido è uguale a $8/17$.

Esso viene fuso per formare due cilindri retti uguali, aventi ognuno la circonferenza di cm 31,4. Sapendo che nella fusione vanno perduti $238\ \text{cm}^3$ di stagno, determinare la misura dell'altezza e l'area laterale di ciascun cilindro .

NOTARE. Per facilitare i calcoli si è posto $\pi = 3{,}14$.

6. Piramide retta avente per base un rombo

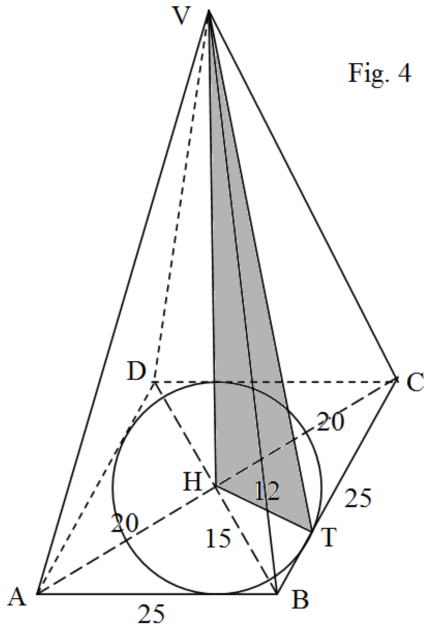


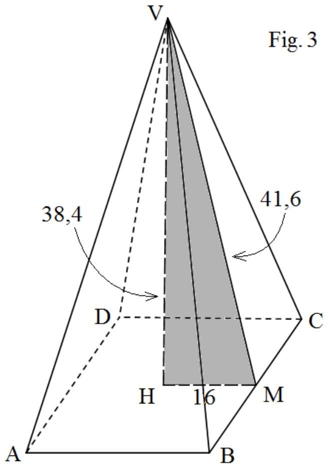
Fig. 4

Un solido ha la forma di una piramide retta avente per base un rombo: ricordo anzitutto che una piramide si dice retta quando ha per base un poligono circoscrittile ad un cerchio e l'altezza della piramide cade nel centro di questo (fig. 4) .

Sappiamo che l'area della superficie totale della piramide è uguale a $cm^2\ 1875$, mentre il rapporto fra la superficie di base e la superficie laterale è uguale a $\frac{8}{17}$; la diagonale minore del rombo, inoltre, è lunga cm 30.
Si calcoli il volume del solido e il suo peso, sapendo che il materiale di cui esso è costituito ha il peso specifico uguale a $2,4\frac{g}{cm^3}$. Si calcoli anche l'area laterale del cono inscritto nella piramide.

7. Piramide regolare quadrangolare con elementi assegnati

In una piramide quadrangolare regolare l'altezza è uguale ai 12/13 dell'apotema e la somma delle loro misure è uguale a dm 80 (fig. 3) .



Calcolare a) la misura del lato di base, il volume e l'area della superficie totale della piramide; b) l'area della superficie totale di un parallelepipedo retto a base quadrata, di ugual volume, la cui altezza misura dm 12,8 .

8. Piramide retta a base circoscritta ad un cerchio

E' data una piramide retta di vertice V e avente per base un trapezio rettangolo ABCD del quale conosciamo l'area, uguale a $cm^2\ 600$, e la lunghezza del perimetro, uguale a cm 100. Chiamiamo AB la base maggiore del trapezio, BC il lato obliquo, CD la base minore e DA l'altezza (fig. 5) .

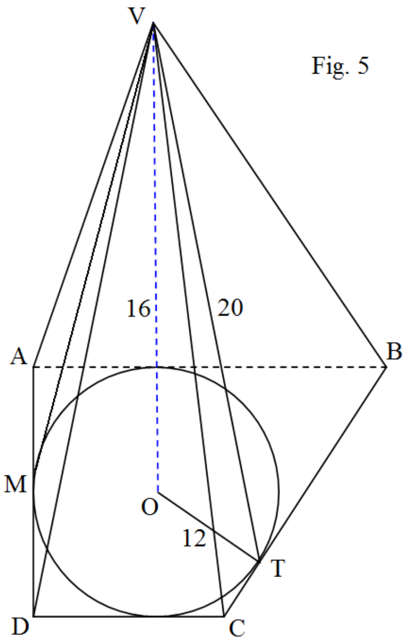


Fig. 5

Calcolare l'area della superficie laterale e il volume della piramide sapendo che l'area della faccia VAD è uguale a $cm^2\ 240$.

9. Piramide sovrapposta ad un prisma retto

Un solido è costituito da un prisma retto la cui base è un quadrato con il lato lungo cm 24 ; ad esso è sovrapposta una piramide regolare quadrangolare la cui base coincide con la base superiore del prisma.

Sappiamo che l'area della superficie laterale del solido uguale a cm^2 2.664 e che il rapporto tra la superficie laterale della piramide e la superficie laterale del prisma è uguale a 17/20 .

Determinare l'altezza h della piramide e il volume di tutto il solido.

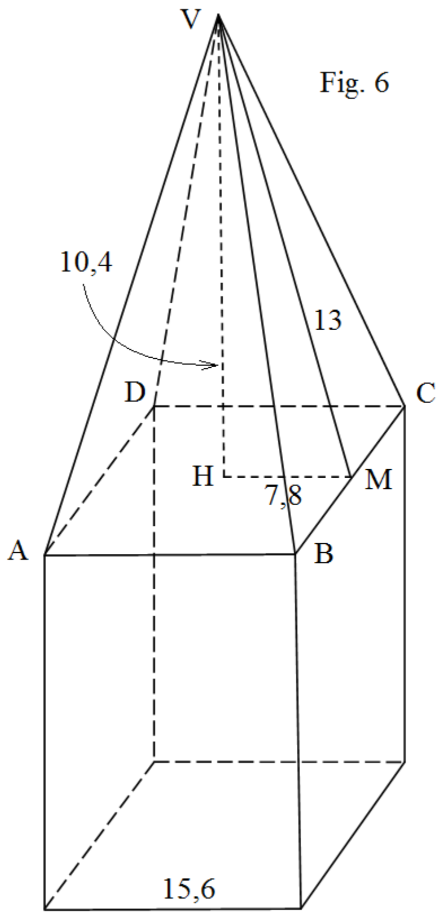


Fig. 6

[Risultati: altezza della piramide cm 22,5 , apotema cm 25,5] .

10. Cono sovrapposto ad un cilindro

Un solido è costituito da un cilindro equilatero sormontato da un cono, la cui base coincide con la base superiore del cilindro (fig. 7) .

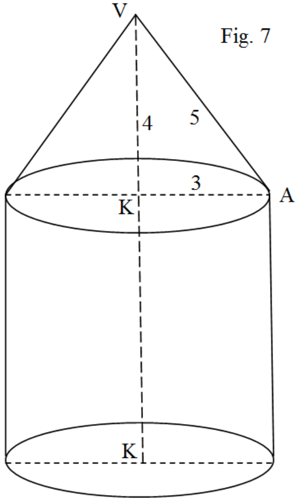


Fig. 7

L’area della superficie totale del solido è uguale a $\mathrm{dm}^2\ 188{,}40$, mentre il rapporto fra la superficie di base e la superficie laterale del solido è uguale a $3/17$. Calcolare il volume del solido.
Per facilitare i calcoli si ponga $\pi = 3{,}14$.

11. Tronco di piramide quadrangolare regolare

Abbiamo un tronco di piramide quadrangolare regolare ABCDEFGH, con AB lato della base maggiore B, ed EF lato della base minore b $\left(AB \nearrow\!\!\nearrow EF\right)$. Sappiamo che $B/b = 4$, $B + b = 405\ \text{cm}^2$, mentre per il volume del tronco si ha $V_{tr} = 1.134\ \text{cm}^3$ (fig. 8).

Calcolare l'area della superficie laterale del tronco.

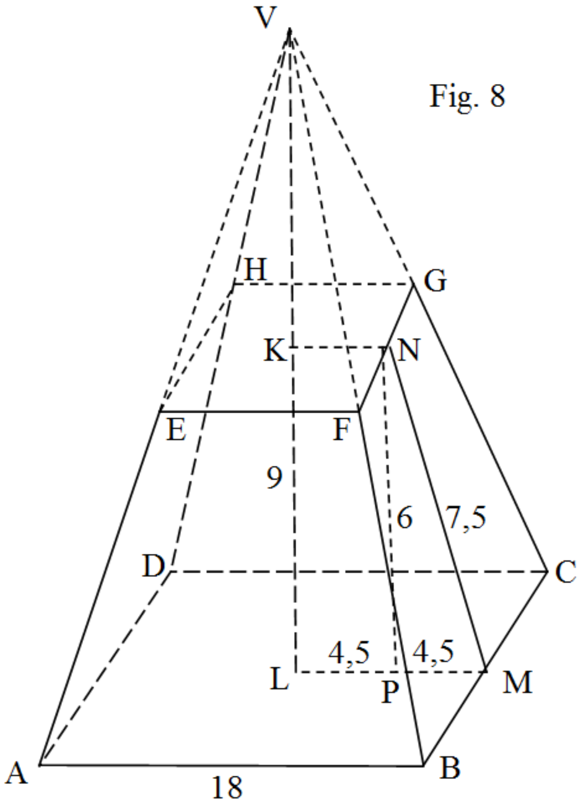


Fig. 8

Soluzione

Subito si trova $B = 324\ \text{cm}^2$, $b = 81\ \text{cm}^2$ e quindi $\overline{AB} = 18\ \text{cm}$ ed $\overline{EF} = 9\ \text{cm}$.

Ora, il volume del tronco è dato dalla formula

(1)
$$V_{tr} = \frac{h}{3} \cdot \left(B + b + \sqrt{B \cdot b}\right)$$

, ove h è la sua altezza. Dalla (1) si ricava $h = 6\ \text{cm}$. Dal triangolo rettangolo NPM possiamo ricavare l'apotema del tronco :

$\overline{MN} = 7,5 \text{ cm}$. E' facile ora trovare l'area della superficie laterale del tronco; si ha $S_{lat} = 405 \text{ cm}^2$.

12. Maturità magistrale giugno 1994

È dato un parallelepipedo rettangolo di vertici A,B,C,D,E,F,G,H . La base superiore è ABCD; la base inferiore è E,F,G,H mentre gli spigoli laterali sono i segmenti AE, BF, CG e DH (fig. 16). Sappiamo inoltre che

(1) $\overline{AB} = 15 \text{ cm}$, $\overline{AD} = 20 \text{ cm}$, $\overline{AE} = 5 \text{ cm}$.

Detto P il piede della perpendicolare condotta dal vertice A alla diagonale di base FH, si consideri il poliedro S avente per vertici i punti A,B,F,E, P .

Del poliedro S calcolare il volume e l'area della superficie laterale .

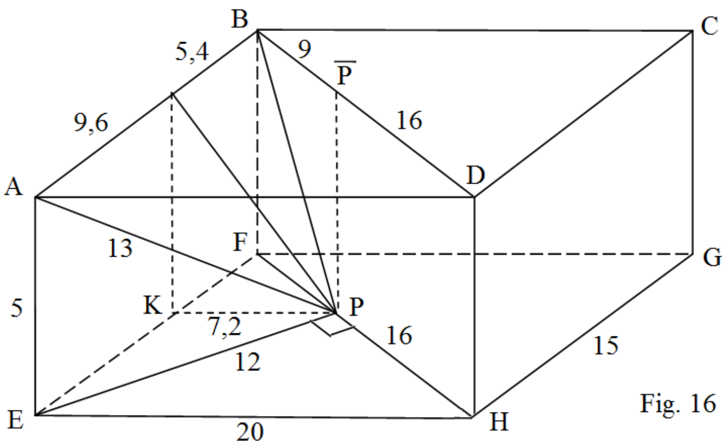


Fig. 16

Svolgimento

Per la diagonale del rettangolo di base si ha:

(2) $$\overline{FH} = \sqrt{\overline{EF}^2 + \overline{EH}^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25 \text{ cm} .$$

Sia ora K il piede dell'altezza del triangolo FEP relativo alla base EF ed L il piede dell'altezza del triangolo ABP relativo alla base AB . La proiezione ortogonale del segmento EP sulla base inferiore del parallelepipedo è il segmento EP, il quale è anche l'altezza del triangolo rettangolo EFH relativa all'ipotenusa FH . Si ha quindi la relazione

- $\overline{FH}\cdot\overline{EP}=\overline{EF}\cdot\overline{EH}$, $\rightarrow$ $25\cdot\overline{EP}=15\cdot 20$, da cui

(2) $$\overline{EP}=12 \text{ cm} .$$

Con il teor. di Pitagora possiamo trovare le misure dei segmenti in cui il punto P divide l'ipotenusa FH del triangolo rettangolo HFH . Si ha:

- $\overline{PH}=\sqrt{\overline{EH}^2-\overline{EF}^2}=\sqrt{20^2-12^2}=16 \text{ cm}$. Quindi

(3) $$\overline{PH}=16 \text{ cm}, \qquad \overline{PF}=9 \text{ cm} .$$

Dal triangolo rettangolo EFP possiamo trovare l'altezza PH del solido . Infatti, calcolando l'altezza del triangolo si ha :

- $\overline{EF}\cdot\overline{KP}=\overline{FP}\cdot\overline{EP}$, $15\cdot\overline{KP}=12\cdot 9$,

(4) $$\overline{KP}=\frac{36}{5} \text{ cm}$$

Si ricava $\overline{PL}=\sqrt{\overline{KL}^2+\overline{KP}^2}=\sqrt{5^2+(36/5)^2}= \text{cm}\sqrt{1921}/5$.

Per il volume del solido si ha:

- $V = \frac{1}{3}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AE}\cdot\overline{PK}=\frac{1}{3}\cdot 15\cdot 5\cdot\frac{36}{5} \text{ cm}^3$, $V=180 \text{ cm}^3$.

Gli elementi trovati ci permettono di calcolare anche l'area della superficie laterale del solido . Si trova

(5) $$\text{Area } S\ell=\frac{3}{2}(71+\sqrt{1921}) \text{ cm}^2 .$$

13. Maturità scientifica, anno 1995

Nel cubo di vertici A,B,C,D,E,F,G,H le facce laterali ABCD ed EFGH sono opposte ; gli spigoli laterali sono AD, BC, FG, EH , mentre i segmenti AB e BF sono due spigoli di base consecutivi (fig. 17) . Tutti gli spigoli del cubo hanno lunghezza unitaria.

Sullo spigolo BF si prenda un punto P tale che $\overline{BP} = x$.

Verificare che la distanza $\overline{PK} = y$ del punto P dalla diagonale AG del cubo è espressa dalla funzione

(1) $$y = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot (x^2 - x + 1)} \ .$$

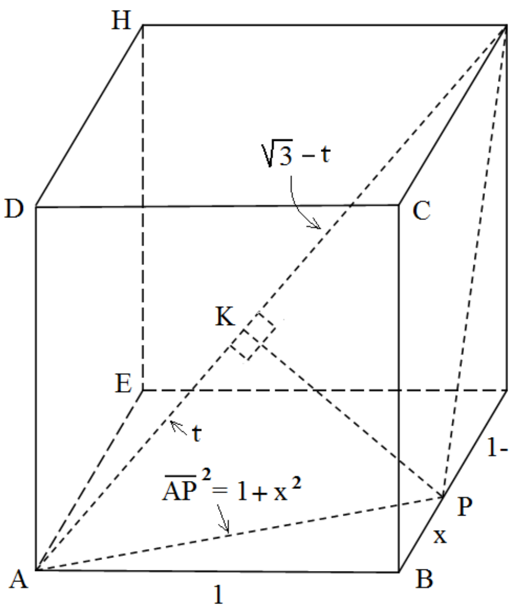


Fig. 17

<u>Svolgimento</u>

Per una qualsiasi diagonale AG del cubo si ha : $\overline{AG} = \sqrt{3}$ cm .

Inoltre, posto $\overline{BP} = x$ e quindi $\overline{PF} = 1 - x$, si ha :

- $\overline{AP}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BP}^2$, $\rightarrow$ (2) $\overline{AP} = \sqrt{1+x^2}$
,
- $\overline{PG}^2 = \overline{PF}^2 + \overline{FG}^2 = (1-x)^2 + 1$, (3)
$\overline{PG} = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$.

Detta K la proiezione ortogonale del punto P sulla diagonale AG , poniamo

- $\overline{AK} = t$, quindi $\overline{KG} = \sqrt{3} - t$.

Dai due triangoli AKP e PKG, rettangoli in K, si ha:
- $\overline{PK}^2 = \overline{AP}^2 - \overline{AK}^2$ e $\overline{PK}^2 = \overline{PG}^2 - \overline{KG}^2$.

Eguagliando i secondi membri e sostituendo i valori trovati per ogni segmento, si ha :

(4) $1 + \cancel{x^2} - t^2 = \cancel{x^2} - 2x + 2 - (\sqrt{3} - t)^2$; da cui

- $2\sqrt{3} \cdot t = 2x + 2$ e quindi (5) $t = \dfrac{x+1}{\sqrt{3}}$.

Da questa si ricava

- $\overline{PK}^2 = \overline{AP}^2 - \overline{AK}^2 = 1 + x^2 - \dfrac{x^2 + 2x + 1}{3} = \dfrac{2x^2 - 2x + 2}{3}$.

Si ricava infine la funzione richiesta dal quesito proposto

(6) $\overline{PK} = y = \sqrt{\dfrac{2}{3} \cdot (x^2 - x + 1)}$.

Goniometria

14. Funzioni goniometriche inverse

I) Calcolare l'espressione algebrica della funzione goniometrica

(1) $y = \cos(\text{arcsen } x)$ [su Derive scrivi : $y = \cos(\text{asin}(x))$] .

Poniamo $\text{arcsen } x = \alpha$, $\rightarrow$ $x = \text{sen}\alpha$; da cui

(2) $\cos\alpha = \sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} = \sqrt{1-x^2}$,

e quindi $\alpha = \arccos\sqrt{1-x^2}$.

Ne segue $y = \cos(\text{arcsen}x) = \cos\alpha = \cos(\arccos\sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-x^2}$;

cioè (3) $y = \cos(\text{arcsen}x) = \sqrt{1-x^2}$.

II) Calcolare l'espressione algebrica della funzione goniometrica

(1) $y = \sin(3\arcsin x)$, con $-\frac{\pi}{2} \le 3x \le \frac{\pi}{2}$.

Poiché $x = \sin(\arcsin x)$ e $\sin(3x) = 3\cdot\sin(x) - 4\cdot\sin^3 x$, possiamo scrivere

(2) $y = \sin(3\cdot\arcsin x) = 3\text{sen}(\arcsin x) - 4[\sin(\arcsin x)]^3$,

infine (3) $y = \sin(3\cdot\arcsin x) = 3x - 4\cdot x^3$, ove $-\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{6}$.

III) Calcolare il valore dell'espressione

(1) $\cos(\arccos\frac{3}{5} - \text{arcsen}\frac{1}{3})$.

Poniamo $\arccos\frac{3}{5} = \alpha$ $\rightarrow$ $\cos\alpha = \frac{3}{5}$,

$\text{sen}\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

e teniamo presente che coseno e seno sono positivi per $0 < \alpha < \pi/2$.

Poniamo poi $\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{3} = \beta \quad \rightarrow \quad \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{3}$,

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

E teniamo presente che $\operatorname{sen}\beta$ e $\cos\beta$ sono positivi per $0 < \beta < \pi/2$.

Abbiamo così trovato i valori:

(2) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$ e $\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{3}$, $\cos\beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Si ricava pertanto

(3)

$$\cos(\arccos\frac{3}{5} - \operatorname{arcsen}\frac{3}{5}) = \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta =$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6\sqrt{2} + 4}{15} \quad ,$$

quindi (4) $\cos(\arccos\frac{3}{5} - \operatorname{arcsen}\frac{1}{3}) = \frac{6\sqrt{2} + 4}{15}$.

IV) Dimostrare che $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$.

Infatti, posto $\arcsin(x) = u$ e $\arccos(x) = v$ si ha

* $\sin(u) = x$, $\cos(v) = x$; eguagliando $\sin(u) = \cos(v)$

Si desume che gli angoli u e v sono complementari e quindi $u + v = \frac{\pi}{2}$, infine

(1) $$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2} .$$

15. Prima identità goniometrica

Dimostrare che se $\alpha+\beta+\gamma=180°$ si ha:

$$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\,.$$

Dimostrazione. Ricordando formule goniometriche notevoli si ha:

- $$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\gamma=\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\left[180^{o}-(\alpha+\beta)\right]=$$

$$=\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=$$
$$=\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta=$$
$$=\operatorname{sen}\alpha(1+\cos\beta)+\operatorname{sen}\beta(1+\cos\alpha)=$$
$$=\operatorname{sen}\alpha\cdot2\cos^{2}\frac{\beta}{2}+\operatorname{sen}\beta\cdot2\cos^{2}\frac{\alpha}{2}=$$
$$=4\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^{2}\frac{\beta}{2}+4\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos^{2}\frac{\alpha}{2}=$$

$$=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\right)=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)$$

.

Riprendendo dall'inizio possiamo dire:

$$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}=$$
$$=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\left(90°-\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Ne segue

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\left[\frac{180° - (\alpha+\beta)}{2}\right] .$$

Poiché $\alpha+\beta+\gamma = 180°$, si ha $180° - (\alpha+\beta) = \gamma$; e sostituendo nell'eguaglianza precedente si ha:

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2} .$$

Si ottiene così l'identità goniometrica che volevamo dimostrare.

Progressioni

16. Progressioni aritmetiche

a) Data una progressione aritmetica, supponiamo che il numero dei termini da determinare sia dispari; esempio

(1) $$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \ .$$

Indichiamo con x il termine centrale e con y la ragione della progressione, cioè poniamo $a_3 = x \ , \quad d = y \ .$

Allora in modo più conveniente possiamo scrivere i 5 termini in questo modo:

(2) $$x-2y, \quad x-y, \quad x, \quad x+y, \quad x+2y.$$

b) Supponiamo invece che il numero dei termini da determinare sia pari, per es:

(3) $$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \ .$$

In tal caso indichiamo con x la semisomma dei due termini centrali e con $2y$ la ragione, cioè poniamo:

(*) $$x = \frac{a_3 + a_4}{2} \ , \qquad d = 2y \ .$$

Allora si ha : $a_4 + a_3 = 2x \ , \ \text{e} \ \ a_4 - a_3 = 2y \ .$ Da queste si ricava

(*) $a_4 = x + y \ , \quad a_3 = x + y - 2x$, cioè $\quad a_3 = y - x$.

I termini della progressione aritmetica sono pertanto:

(4) $$x-5y, \quad x-3y, \quad x-y, \quad x+y, \quad x+2y \ .$$

17. Progressioni geometriche

a) Data una progressione geometrica, supponiamo che il numero dei termini da determinare sia dispari; esempio

(1) $$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \ .$$

Indichiamo con x il termine centrale e con y la ragione della progressione, cioè poniamo $a_3 = x \ , \quad q = y \ .$

Allora si ha:

(2) $$\frac{a_4}{a_3} = y \ , \ \rightarrow \quad \frac{a_4}{x} = y , \ \rightarrow \quad a_4 = xy \ ,$$

(3) $$\frac{a_3}{a_2} = y \ , \ \rightarrow \quad \frac{a_2}{a_3} = \frac{1}{y} \quad \frac{a_2}{x} = \frac{1}{y} , \ \rightarrow \quad a_2 = \frac{x}{y} \ .$$

I termini della progressione geometrica sono pertanto:

(4) $$\frac{x}{y^2}, \quad \frac{x}{y}, \quad x, \quad xy, \quad xy^2 \ .$$

b) Supponiamo ora che il numero dei termini da determinare sia pari, per es:

(5) $$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \ .$$

Indicando con x il medio geometrico dei due termini centrali e con y^2 la ragione si ha :

(*) $$q = y^2 \ , \qquad x = \sqrt{a_3 \cdot a_4} \ , \quad \text{con} \ \ x > 0 \ .$$

Possiamo dire che si ha :

(6) $$a_3 \cdot a_4 = x^2 \ , \ \text{ e } \quad a_4 / a_3 = y^2 \ \rightarrow \ (7) \quad a_4 = a_3 \cdot y^2 \ .$$

Sostituendo la (7) nella (6) abbiamo :

* $a_3 \cdot a_3 y^2 = x^2 \ , \rightarrow \qquad a_3^2 = \dfrac{x^2}{y^2} \quad ,$ e quindi (8)

$a_3 = \dfrac{x}{y}$,

mentre $a_4 = a_3 y^2, \quad \rightarrow \qquad a_4 = \dfrac{x}{y} y^2,$ e quindi (9)

$a_4 = xy$.

Ricordiamo che un termine della progressione si ottiene moltiplicando il precedente per la ragione y^2; dalle (8), (9) si ricava che i termini della progressione sono:

(10) $$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} = \ldots\ldots \frac{x}{y^5}, \quad \frac{x}{y^3}, \quad \frac{x}{y}, \quad xy, \quad xy^3, \quad xy^5 \quad .$$

18. Problema su una progressione geometrica

Calcolare quattro numeri in progressione geometrica sapendo che se si diminuisce il terzo numero di 8 ed il quarto numero di 40 si ha una progressione aritmetica

(L. Russo; Algebra, 1° V, pag 717)

Svolgimento

Progressione geometrica $\;\div\;$ $a_1,\; a_1q,\; a_1q^2\;, a_1q^3\;;$

La progressione aritmetica è $\;\div\;$ $a_1,\; a_1q,\; a_1q^2-8\;, a_1q^3-40\;,$

che per comodità scriviamo $\;\div\;$ $A_1,\quad A_2,\quad A_3,\quad A_4\;.$

La ragione della progressione aritmetica è $\quad d = a_1q - a_1,$

e quindi possiamo scrivere :

(*) $\begin{cases} A_3 = A_2 + d \\ A_4 = A_3 + d \end{cases}$, ossia $\begin{cases} a_1q^2 - 8 = a_1q + (a_1q - a_1) \\ a_1q^3 - 40 = a_1q^2 - 8 + (a_1q - a_1) \end{cases}$,

da cui

(1) $\begin{cases} a_1q^2 - 2a_1q + a_1 = 8 \\ a_1q^3 - a_1q^2 - a_1q + a_1 = 32 \end{cases}$, quindi

(2) $\begin{cases} a_1(q^2 - 2q + 1) = 8 \\ a_1(q^3 - q^2 - q + 1) = 32 \end{cases}$.

Ma $\quad q^2 - 2q + 1 = (q-1)^2\;$; se ora scomponiamo in fattori l'altro polinomio si ha:

(3) $\quad q^3 - q^2 - q + 1 = q^2(q-1) - (q-1) = (q-1)(q^2-1) = (q-1)^2(q+1)\;;$

quindi $a_1(q^3 - q^2 - q + 1) = 32$ diventa

(4) $a_1(q-1)^2(q+1) = 32$.

Il sistema (2) si può quindi scrivere nella forma :

(5) $$\begin{cases} a_1(q-1)^2 = 8 \\ a_1(q-1)^2(q+1) = 32 \end{cases} .$$

Dalla (5_1) si ha: $a_1 = \dfrac{8}{(q-1)^2}$, e sostituendo nella (5_2) si ha in successione:

* $\dfrac{8}{\cancel{(q-1)^2}} \cdot \cancel{(q-1)^2} \cdot (q+1) = 32$, da cui $q+1=4$, cioè (6) $q = 3$.

Dalla (5_1) segue che $a_1 = \dfrac{8}{(3-1)^2} = \dfrac{8}{4}$, e quindi (7) $a_1 = 2$.

Possiamo ora ricavare a_2, a_3, a_4 . Si ottiene :

(8) $$\begin{aligned} a_2 &= a_1 q = 2 \cdot 3 = 6 \\ a_3 &= a_2 q = 6 \cdot 3 = 18 \\ a_4 &= a_3 q = 18 \cdot 3 = 54 \end{aligned}$$ quindi $a_2 = 6$, $a_3 = 18$, $a_4 = 54$.

Si conclude che la progressione geometrica è data dai termini

(9) $\div\div$ 2, 6, 18, 54 .

19. Problema su una progressione geometrica

Calcolare quattro numeri in progressione geometrica sapendo che la somma fra il secondo e il quarto è 90 mentre la differenza fra il terzo numero e il secondo è 18

(L. Russo; Algebra, 1^o V, pag 717) .

a) Data la progressione geometrica

(1) $$a_1, a_2, a_3, a_4,$$

indicando con x il medio geometrico dei due termini centrali e con y^2 la ragione si ha :

(*) $$q = y^2 \;, \qquad x = \sqrt{a_2 \cdot a_3} \;, \quad \text{con} \;\; x > 0 \;.$$

Ne segue che :

(2) $$a_2 \cdot a_3 = x^2 \;, \;\; \text{e} \quad a_3 / a_2 = y^2 \;\rightarrow\; (3) \quad a_3 = a_2 \cdot y^2 \;.$$

Sostituendo la (3) nella (2) abbiamo :

$$a_2 \cdot a_2 y^2 = x^2 \;, \rightarrow \qquad a_2^2 = \frac{x^2}{y^2} \;, \qquad \text{e quindi}$$

(4) $$a_2 = \frac{x}{y} \;,$$

Poiché $a_3 = a_2 y^2$ si ha $a_3 = \frac{x}{y} y^2$, e quindi

(5) $$a_3 = xy \;.$$

Ricordando che un termine della progressione si ottiene moltiplicando il precedente per la ragione y^2, dalle (4), (5) si ricava che i termini della progressione sono:

(6) $$\frac{x}{y^3}, \quad \frac{x}{y}, \quad xy, \quad xy^3 \;.$$

Si ha quindi il sistema risolvente

(7) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + xy^3 = 90 \\ \\ xy - \dfrac{x}{y} = 18 \end{cases}$, $\rightarrow$ (8) $\begin{cases} x + xy^4 = 90y \\ xy^2 - x = 18y \end{cases}$.

Dalla (8_2) si ricava $y^2 = \dfrac{18y + x}{x}$. e

Sostituendo nella (8_1) si ha in sequenza:

(9) $x + x \cdot \dfrac{(18y+x)^2}{x^2} = 90y,$ $\rightarrow$

$x^2 + 324y^2 + x^2 + 36xy = 90xy$, $x^2 + 162y^2 + 18xy - 45xy = 0$, $\rightarrow$

(10) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - 27 \cdot \dfrac{x}{y} + 162 = 0$.

La (10) ha le radici $\dfrac{x}{y} = \dfrac{27 \pm \sqrt{81}}{2}$, da cui $\dfrac{x}{y} = 9$ e $\dfrac{x}{y} = 18$.

Dalla prima radice si ricava $x = 9y$. Sostituiamo questo valore nella (8_2), cioè nella equazione $xy^2 - x = 18xy$ .. Si ricava

* $9y^3 - 9y = 18y$, da cui $9y^3 = 27y$, quindi $y^2 = 3$.

Poiché $x = 9y > 0$ si ricava : $y = \sqrt{3}$ e $x = 9\sqrt{3}$.

Sostituiamo nelle formule dei termini incogniti, cioè in

* $\dfrac{x}{y^3}$, $\dfrac{x}{y}$, xy , xy^3 .

Si ottiene che questi sono rispettivamente

(11) $\frac{9\cdot\cancel{\sqrt{3}}}{3\cdot\cancel{\sqrt{3}}}$, $\frac{9\cdot\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{3}}}$ $9\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$, $9\cdot\sqrt{3}\cdot3\sqrt{3}$,

ossia

(12) 3, 9, 27, 81 .

Procedimento analogo se si prende la radice $x/y=18$.

Vogliamo dimostrare per induzione la formula che ci dà la somma dei primi n termini di una progressione aritmetica, cioè (14) $S_n=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$.

Essa è vera per $n=1$ ed $n=2$: $S_1=\frac{a_1+a_1}{2}=a_1$, $S_2=\frac{(a_1+a_2)\cdot 2}{2}=a_1+a_2$.

Supponiamo che la (14) sia vera per il valore n e facciamo vedere che essa è vera anche per il valore $n+1$, cioè che si ha $S_{n+1}=\frac{(a_1+a_2)\cdot(n+1)}{2}$. Infatti:

* $$S_{n+1}=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}+a_{n+1}=\frac{na_1+na_n+a_{n+1}+a_{n+1}}{2} ,$$

* $$S_{n+1}=\frac{na_1+n(a_{n+1}-d)+a_{n+1}+a_1+nd}{2}=\frac{(n+1)a_1+(n+1)a_{n+1}}{2} ,$$

Infine $$S_{n+1}=\frac{(a_1+a_{n+1})(n+1)}{2} .$$

C.V.D.

Analisi matematica

20. Primi limiti

Vogliamo calcolare alcuni limiti che si incontrano quando si inizia lo studio dell'Analisi Matematica.

I) Data la successione $a_n = \frac{n}{A^n}$, con $A > 1$, dimostrare che si ha:

(1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{A^n} = 0 \ .$$

Ponendo $\sqrt{A} = 1 + h$ con $h > 0$, si ha

- $$\left(\sqrt{A}\right)^n = (1+h)^n \geq 1 + nh\,, \ \rightarrow \quad \left(\sqrt{A}\right)^{2n} = A^n > n^2h^2 \ .$$

Ma allora $a_n = \frac{n}{A^n} < \frac{n}{n^2h^2}$, cioè $a_n < \frac{1}{nh^2}$.

Ne segue che la successione a_n è una minorante della successione $b_n = \frac{1}{nh^2}$; e poiché $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, a maggior ragione sussiste il limite (1).

II) Dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{p} = 1$, anche quando $0 < p < 1$

.

In questo caso p è un numero decimale minore di 1 per il quale possiamo porre * $p = \frac{1}{q}$,

con $q > 1$ e quindi si ha

- $$\sqrt[n]{p} = \sqrt[n]{\frac{1}{q}} = \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{q}} = \frac{1}{\sqrt[n]{q}} = \frac{1}{1+k_n} \qquad \text{con} \qquad k_n > 0 \quad \text{e}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} k_n = 0$.

Ne segue $\quad p = \dfrac{1}{(1+k_n)^n}$; poiché $(1+k_n)^n \ge 1+nk_n$, si ha

$p \le \dfrac{1}{1+nk_n}$.

Da questa si ricava: $\quad 1+nk_n \le \dfrac{1}{p}$,→ $\quad n\,k_n \le \dfrac{1}{p} -$,→

$0 < k_n \le \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{p} - 1\right)$.

Da quest'ultima diseguaglianza si ha $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} k_n = 0$

Ne segue $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{p} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}(1+k_n)} = \frac{1}{1+\lim\limits_{n\to+\infty} k_n} = \frac{1}{1+0} = 1 \qquad .$$

C.V.D.

III) Dimostrare che: (1) $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Possiamo scrivere : (2) $\quad \sqrt[n]{n} = 1+\varepsilon_n$, con $\varepsilon_n > 0$,

→

- $$n = (1+\varepsilon_n)^n = 1 + \binom{n}{1}\varepsilon_n + \binom{n}{2}\varepsilon_n^2 + \cdots\cdots + \binom{n}{n}\varepsilon_n^n$$

ove $$\binom{n}{1} = n \; , \qquad \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} \quad .$$

Quindi $n > \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon_n^2$, $\rightarrow$ $\varepsilon_n^2 < \frac{2}{n-1}$ e quindi (3)

$\varepsilon_n < \left(\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Dalla (3) si ha $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. Riprendendo la (2) si ha

(4) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1 + \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 1$ C.V.D.

IV) Dimostrare che $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$.

Posto $x = 1/\xi$ si ha:

(*)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{\xi\to\infty} \frac{\log_a(1+1/\xi)}{1/\xi} = \log_a\left[\lim_{\xi\to\infty}\left(1+\frac{1}{\xi}\right)^{\xi}\right] = \log_a e$$

C.V.D.

V) Dimostrare che : (1) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log_e a$.

Posto (2) $a^x - 1 = \xi$ si ha: quando $x \to 0$, anche $\xi \to 0$.

Dalla (2) si ha : $a^x = 1 + \xi$ da cui $\log_a a^x = \log_a(1+\xi)$,

e quindi: (3) $x = \log_a(1+\xi)$.

Usufruendo di (2) e (3) possiamo dire:

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{\xi\to 0}\dfrac{\xi}{\log_a(1+\xi)}=1:\lim\limits_{\xi\to 0}\dfrac{\log_a(1+\xi)}{\xi}=\dfrac{1}{\log_a e}=\log_e a$

(C.V.D.)

VI) Dimostrare che: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$.

Vedi A. Ghizzetti ; Esercizi di Analisi Matematica, Vol. I pag. 239- Ed. Veschi

21. Limite di una funzione per $x \to x_o$

Verificare il limite (1) $$\lim_{x\to 1^-} 2^{\frac{x}{x-1}} = 0 \quad .$$

Per $x \to 1^-$ si ha $\dfrac{x}{x-1} < 0$.

Dobbiamo risolvere il sistema di disequazioni

(2) $$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ \bmod\ (2^{\frac{x}{x-1}}) < \varepsilon \end{cases}$$

e dobbiamo far vedere che le soluzioni del sistema formano un intorno sinistro del punto $x = 1$.

Poiché $2^{\frac{x}{x-1}} > 0$, si ha $\bmod\ (2^{\frac{x}{x-1}}) = 2^{\frac{x}{x-1}}$. La seconda relazione del sistema (2) diventa più semplicemente

(3) $$2^{\frac{x}{x-1}} < \varepsilon \quad .$$ Da questa si ha

- $\log_2 2^{\frac{x}{x-1}} < \log_2 \varepsilon$, $\to$ $\dfrac{x}{x-1} < \log_2 \varepsilon$, e quindi

(4) $$\frac{x}{x-1} - \log_2 \varepsilon < 0 \quad ,$$ ossia

$$\frac{x - x \cdot \log_2 \varepsilon + \log_2 \varepsilon}{x-1} < 0 \quad .$$

Ponendo $\log_2 \varepsilon = -M$ la $((4_2)$ diventa $\dfrac{x + M \cdot x - M}{x-1} < 0$.

Pertanto il sistema (2) diventa

(5)
$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ (x-1)\cdot[x(1+M)-M] < 0, \quad \text{radici } \left(\dfrac{M}{M+1}, 1\right), \quad \text{valori interni} . \end{cases}$$

Soluzione : (6) $$\frac{M}{M+1} < x < 1 \quad .$$

L'intervallo dato dalla (6) ci dice chiaramente che le soluzioni del sistema (2) formano effettivamente un intorno sinistro del punto $x = 1$ e quindi il limite è verificato .

22. Limiti notevoli di forme algebriche indeterminate

I) Calcolare il seguente limite di una forma indeterminata del tipo 1^{∞}

(1) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-2}\right)^{x} .$$

Si ha $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-2}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-2+3}{2x-2}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{2x-2}\right)^{x} =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x-2}{3}}\right)^{\frac{2x-2}{3}}\right]^{\frac{3x}{2x-2}} = \left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-2}{3}}\right)^{\frac{2x-2}{3}}\right]^{\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{2x-2}}$$

=

Poniamo ora $\frac{2x-2}{3} = y$. Allora quando $x \to +\infty$, anche $y \to +\infty$.

Tornando al nostro limite si ha

(2)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-2}\right)^{x} = \left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{2x-2}} = e^{\frac{3}{2}} = \sqrt{e^3} = e\sqrt{e} .$$

II) Calcolare il limite $\lim_{x\to0^+} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$ (forma indet. del tipo $0^{+\infty}$)

.

Poniamo $\frac{1}{x} = y$; allora, quando $x \to 0^+$ si ha che $y \to +\infty$ e per il nostro limite si ha:

(3) $$\lim_{x\to 0^+} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \ln\left(1+\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right] =$$

$$= \ln\left[\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right] = \log_e e = 1 \quad .$$

III) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{2x}}$ (forma indet. 1^{∞})

Poniamo $x = \frac{1}{y}$, da cui $\frac{1}{x} = y$; allora quando $x \to 0$ si ha che $y \to \infty$

Si ha

(1) $$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{1}{2}} = \lim_{y\to\infty}\left[(1+\frac{1}{y})^{y}\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[\lim_{y\to\infty}(1+\frac{1}{y})^{y}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} \quad .$$

IV) $\lim_{x\to-\infty} x\cdot e^{x}$ (forma indet. $\infty\cdot 0$, poniamo $x = -t$) =

$$= \lim_{t\to+\infty} -t\cdot e^{-t} = -\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^{t}}(f.i) - \lim_{t\to+\infty}\frac{Dt}{De^{t}} = -\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{e^{t}} = 0 \quad .$$

23. Studio di un particolare problema differenziale

Risolvere la seguente equazione differenziale lineare e omogenea del terzo ordine, della quale sono date anche le condizioni al contorno:

(1) $$y''' + y'' + \lambda^2 (y' + y) = 0$$

con $y(0) = 0, \quad y(+1) = 0, \quad y(-1) = 0$ ed λ parametro reale.

La soluzione va a merito del mio amico Gianni Barbato, di Latina, stimato cultore di questioni scientifiche.

<u>Soluzione</u> Trattandosi di una equazione lineare a coefficienti costanti, essa avrà soluzioni del tipo $y = e^{\alpha x}$, con α appartenente al campo complesso.
Sostituendo nella (1) si ha:

$$e^{\alpha x}\left[\alpha^3 + \alpha^2 + \lambda^2(\alpha+1)\right] = 0 .$$

Essendo poi $e^{\alpha x} \neq 0 \quad \forall \alpha, x \in \mathbb{C}$, deve essere

$\alpha^3 + \alpha^2 + \lambda^2(\alpha+1) = 0$, (equazione caratteristica dell'eq. differenziale);

$$\alpha^2(\alpha+1) + \lambda^2(\alpha+1) = 0 \ , \ \Rightarrow \quad (2) \quad (\alpha+1)(\alpha^2+\lambda^2) = 0 ,$$

radice $\alpha_1 = -1$, integrale particolare $y_1 = e^{-x}$,
" $\alpha_2 = i\lambda$, " " $y_2 = e^{i\lambda x}$,
" $\alpha_3 = -i\lambda$, " " $y_3 = e^{-i\lambda x}$.

L'integrale generale dipende da tre costanti arbitrarie ed è dato dalla somma di questi tre integrali particolari, fra loro indipendenti:

(3) $$y(x) = Ae^{-x} + Be^{i\lambda x} + Ce^{-i\lambda x} .$$

Prendendo le costanti B e C in modo opportuno, e utilizzando la formula di Eulero $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, possiamo anche scrivere:

$$y(x) = Ae^{-x} + (k_1 - ik_2)(\cos\lambda x + i\sin\lambda x) + (k_1 + ik_2)(\cos\lambda x - i\sin\lambda x) ;$$

$$y(x) = Ae^{-x} + 2k_1 \cos\lambda x + 2k_2 \sin\lambda x ,$$

ossia (4) $$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 \cos\lambda x + c_3 \sin\lambda x .$$

Le costanti c_1, c_2, c_3 si ricavano dalle condizioni al contorno del problema:

$$y(0) = 0, \quad y(+1) = 0, \quad y(-1) = 0 .$$

Esse devono quindi soddisfare il sistema:

(5) $$\begin{cases} c_1 + c_2 + 0 \cdot c_3 = 0 \\ c_1 e \ + \ c_2 \cos\lambda + c_3 \sin\lambda = 0 \\ c_1/e + \ c_2 \cos\lambda - c_3 \sin\lambda = 0 \end{cases} .$$

Questo sistema ammette una soluzione non tutta nulla solo se il determinante della matrice dei coefficienti delle incognite è nullo, cioè se

(6) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ e & \cos\lambda & -\sin\lambda \\ e^{-1} & \cos\lambda & \sin\lambda \end{vmatrix} = 0 ,$$

da cui $\cos\lambda\sin\lambda + \cos\lambda\sin\lambda - e\sin\lambda - \frac{1}{e}\sin\lambda = 0$.

Ne segue che deve essere

$$2\cos\lambda\sin\lambda - \left(e + {}^{1}\!/_{e}\right)\sin\lambda = 0,$$

ossia: (7) $2\cos\lambda = e + {}^{1}\!/_{e}$ e (8) $\sin\lambda = 0$.

L'equazione (7) non ha soluzioni,
mentre la (8) ha la soluzione $\lambda = k\pi$, ove $k = 0, \pm1, \pm2, ...$

Con questa soluzione, la matrice del sistema diventa:

$$(9) \qquad \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ e & \pm1 & 0 \\ e^{-1} & \pm1 & 0 \end{Vmatrix} .$$

La matrice (9) ha sicuramente rango 2 . Si conclude che delle 3 equazioni del sistema (5) solo 2 sono indipendenti; ne segue che delle tre equazioni al contorno solo 2 sono indipendenti. Il sistema è quindi risolubile e ammette ∞^1 soluzioni.

Risolviamo il sistema (5) prendendo come equazioni indipendenti la 1^a e la 2^a. Si ha:

$$(10) \qquad \begin{cases} c_1 + c_2 + 0 \cdot c_3 = 0 \\ c_1 e + c_2\cos k\pi - c_3 \sin k\pi = 0 \end{cases}, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_2 = -c_1 \\ c_1 e + c_2 = 0 \end{cases}.$$

Sostituendo nella 2^a equazione del sistema si ha:

$$c_1 e - c_1 = 0\,, \quad \Rightarrow \quad c_1\left(e - \frac{1}{e}\right) = 0\,; \text{ quindi } \quad c_1 = 0\ .$$

Collegando i risultati, le tre condizioni al contorno del problema differenziale ci permettono di trovare:

$$\lambda = k\pi\,, \quad c_1 = c_2 = 0\,, \quad c_3 = \text{ costante arbitraria }.$$

Sostituendo nella (4), possiamo dire che il problema differenziale ha ∞^1 soluzioni date dall'equazione:

(11) $$y_k(x) = c_k \sin(k\pi x)\,.$$

Abbiamo posto $c_3 = c_k$ per indicare che i valori della costante c_3 possono variare assieme ai valori $k\pi x$ dell'argomento della funzione goniometrica.

I valori $\lambda = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ sono gli <u>autovalori del problema differenziale;</u>
le funzioni $c_k \sin(k\pi x)$ sono le <u>autosoluzioni</u> .

Per la linearità dell'equazione differenziale (1), data dal quesito iniziale, una qualsiasi somma delle funzioni $c_k \cdot \sin(k\pi x)$ è ancora una soluzione dell'equazione stessa; ne segue che la soluzione più generale è data dalla funzione:

(9) $$y_k(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot \sin(k\pi x)\,.$$

Verifichiamo tale soluzione.
Per k = 0, si ha ovviamente $y(0) = y(1) = y(-1) = 0$. Per $k \neq 0$ si ha:

$$y' = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\pi c_k \cdot \cos(k\pi x)\ , \qquad y'' = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^2\pi^2 c_k \cdot \sin(k\pi x)\,,$$

$$y''' = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} k^3\pi^3 c_k \cdot \cos(k\pi x)\ , \qquad \lambda = k\pi\ , \qquad \lambda^2 = k^2\pi^2\ .$$

Sostituendo $y,\ y',\ y'',\ y'''$ e $\lambda^2 = k^2\pi^2$ nell'eq. differenziale (1)

$$y''' + y'' + \lambda^2 y' + \lambda^2 y = 0$$

si ha

$$c_k \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [-k^3\pi^3 \cos(k\pi x) - k^2\pi^2 \sin(k\pi x) +$$
$$+ k^3\pi^3 \cos(k\pi x) + k^2\pi^2 \sin(k\pi x)] = 0\ .$$

Si ha così l'identità $0 = 0$.

c.v.d.

24. Limite I di una forma indeterminata

In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ è inscritto un quadrilatero convesso $ABCD$ tale che $BC = CD$. La perpendicolare al lato DC nel punto C intersechi nel punto E il diametro AB (fig. 15) .

Posto $BAC = x$ (e quindi anche $CAD = x$)s si determini il limite seguente

(1) $$\lim_{x \to 0^+} \frac{CE - EB}{AB - AD} = L$$ (Si ha $L = \frac{1}{4}$) .

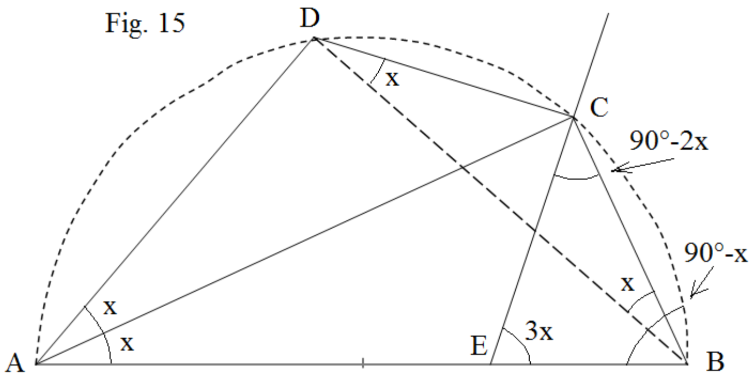


Fig. 15

Suggerimenti

Si ha $ACD = BCE = \alpha$ poiché i due angoli hanno i lati a due a due perpendi-colari ; poi $\alpha = 90^o - 2x$, $\overline{CB} = 2r\text{sen }x$, $\overline{AD} = 2r\cos 2x$. Per il teorema dei seni applicato al triangolo CEB si trova $\overline{EB} = 2r\text{sen}x \cdot \cos 2x / \text{sen}3x$.

25. Limite II di una forma indeterminata

In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ è inscritto un quadrilatero convesso $ABCD$. Sappiamo che $BAC = 3x$, $CAD = \alpha$, $ACD = 2\alpha$.
Al variare dell'angolo x variano anche gli altri due angoli, anche se uno di essi è sempre la metà dell'altro. Calcolare il limite

(1) $$\lim_{x\to(\pi/6)^-} \frac{AC}{AD} = L$$ (Si ha $L = \dfrac{3}{2}$) .

Suggerimenti
Si ha $\overline{AC} = 2r\cos 3x$, $\overline{AD} = 2r\cos(3x+\alpha)$, $ACD = ABD = 2\alpha$ come angoli che insistono sullo stesso arco AD, $BAC + ACB + \alpha + 2\alpha = \pi$ da cui $\alpha = \dfrac{\pi}{6} - x$, quindi $0 \le x \le \pi/6$. Si trova $$\lim_{x\to(\pi/6)^-} \frac{2\cos x\cdot(\cos^2 x - 3\operatorname{sen}^2 x)}{\sqrt{3}\cdot\cos 2x - \operatorname{sen}2x} = ...$$.

Di questo problema si calcoli anche il limite $\displaystyle\lim_{x\to(\pi/6)^-} \frac{DC}{AD} = L'$

($L' = \dfrac{1}{2}$)

26. Limite III di una forma indeterminata

In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ è inscritto un quadrilatero convesso $ABCD$. Sappiamo che l'angolo BAC ha ampiezza x mentre l'angolo ABD ha ampiezza 2x.
Determinare il limite seguente

(1) $$\lim_{x \to 0^+} \frac{AB - BD}{BD - DC} = L \qquad \left(L = \frac{4}{5} \right)$$

Suggerimenti

Si ha $BDC = x$, $ACD = 2x$, $DAB = 90^o - 2x$, $DAC = 90^o - 3x$.
Inoltre $BD = 2r\cos 2x$ e (teor. della corda) $DC = 2r\,\text{sen}(90^o - 3x) = 2r\cos 3x$.

27. Limite IV di una forma indeterminata

In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ è inscritto un quadrilatero convesso $ABCD$. Sappiamo che l'angolo BAC ha ampiezza x mentre l'angolo ABD ha ampiezza 2x. Determinare il limite seguente

(1) $$\lim_{x \to 0^+} \frac{AD + BC}{\sqrt{AB \cdot (AB - DC)}} = L$$

Suggerimenti

Si ha $BC = 2r\,\text{sen}\, x$ e (teor. della corda) $DC = 2r\,\text{sen}(90^o - 3x)$.

28. Limite V di una forma indeterminata

In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ è inscritto un quadrilatero convesso $ABCD$ avente i lati AD e DC uguali.. Si consideri la perpendicolare al lato DC nel punto C e sia E il punto di intersezione con il diametro AB. Posto $BAC = BDC = 2x$, calcolare il limite

(1) $$\lim_{x \to (\pi/4)^-} \frac{EB}{AB} = L \qquad \left(\text{Si ha } L = \frac{1}{3} \right) .$$

Suggerimenti

Posto $DAC = \alpha$, $DCA = \beta$ si ha $\alpha + \beta = 180^o - (90^o + 2x) = 90^o - 2x$. Ma $\alpha = \beta$, quindi $\alpha = 45^o - x$; anche $BCE = 45^o - x$. Poiché $BC = 2r \cdot \text{sen } x$,
applicando il teor. dei seni al triangolo (CEB) possiamo trovare EB e il limite.

29. Limite di una funzione per $x \to +\infty$

Verificare il limite (1) $\lim\limits_{x \to 1^+} 2^{\frac{x}{x-1}} = +\infty$.

Svolgimento

Per $x \to 1^-$ si ha $\frac{x}{x-1} > 0$.

Dobbiamo verificare il sistema di disequazioni

(2) $\begin{cases} x > 1 \\ 2^{\frac{x}{x-1}} > M \end{cases}$

e dobbiamo far vedere che le soluzioni del sistema formano un intorno destro del punto $x = 1$.

Prendendo i logaritmi in base 2 dei due membri della seconda relazione del sistema (2) , essa diventa

- $\log_2 2^{\frac{x}{x-1}} > \log_2 M$, $\to$ $\frac{x}{x-1} - \log_2 M > 0$,

(4) ossia $\frac{x - x \cdot \log_2 M + \log_2 M}{x-1} > 0$,

e quindi $\frac{x \cdot \log_2 M - x - \log_2 M}{x-1} < 0$

Pertanto il sistema (4) diventa

(5) $\begin{cases} x > 1 \\ (x-1) \cdot [x \cdot (\log_2 M - 1) - \log_2 M] < 0, \quad \text{rad.} \left(1, \frac{\log_2 M}{\log_2 M - 1}\right) \text{ v.int} \end{cases}$.

Soluzione $\qquad 1 < x < \dfrac{\log_2 M}{\log_2 M - 1}$

Le soluzioni del sistema (5) formano effettivamente un intorno destro del punto $x = 1$ e quindi il limite è verificato .

30. Calcolo elementare della derivata di una funzione

Calcolare in modo elementare la derivata della funzione $y = 1/\sqrt[3]{x}$.
Si ha:
(1)

$$D\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+h}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x+h}}{\sqrt[3]{x\cdot(x+h)}}}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+h}}{h\cdot\sqrt[3]{x\cdot(x+h)}} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h\cdot\sqrt[3]{x\cdot(x+h)}} = -\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x})\cdot(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{(x+h)\cdot x} + \sqrt[3]{x^2}\ )}{h\cdot\sqrt[3]{x\cdot(x+h)}\cdot(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{(x+h)\cdot x} + \sqrt[3]{x^2}\ )} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{(x+h-x)}{h\cdot\sqrt[3]{x\cdot(x+h)}\cdot(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{(x+h)\cdot x} + \sqrt[3]{x^2}\ )} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}\cdot(\ \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2}\ )} = -\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^4}} = -\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{4}{3}} \quad .$$

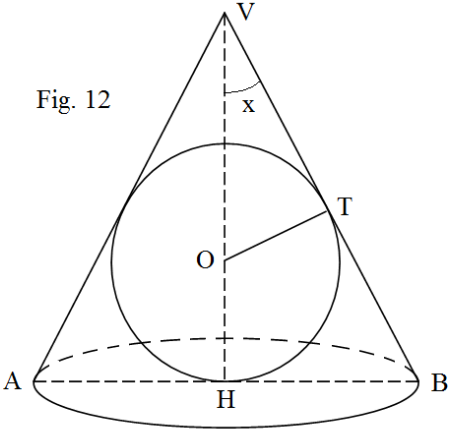
Concludendo, si ha:

(2) $$D\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = D\frac{1}{x^{1/3}} = Dx^{-\frac{1}{3}} = -x^{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} \quad .$$

31. Cono di sup. laterale minima circoscritto ad una sfera

Di tutti i coni circoscritti ad una medesima sfera di centro O e raggio r trovare quello di superficie laterale minima (fig. 12).

Fig. 12



Sia AB un diametro del cerchio di base ; evidentemente esso passa per il piede H dell'altezza VH del cono . Sia poi VT una generatrice del cono e T il punto di tangenza con la sfera. L'area della sup. laterale del cono è data dalla formula

(1) $$S\ell = \pi\overline{HB}\cdot\overline{VB} \ .$$

Risoluzione trigonometrica

Poniamo HVB = x , con $0 < x < \pi/2$. Si ricava :

- $\overline{OT} = \overline{VO}\cdot \text{sen } x$, ossia $r = \overline{VO}\cdot \text{sen } x$, da cui

(2) $$\overline{VO} = \frac{r}{\text{sen } x}, \qquad \overline{VH} = \frac{r}{\text{sen } x} + r \ ,$$ ossia

$$\overline{VH} = \frac{r(1+\text{sen } x)}{\text{sen } x} \ .$$

Da questa possiamo ricavare le misure dei segmenti che compaiono nella (1) :

- $\overline{HB} = \overline{VH} \cdot \text{tg } x$, $\rightarrow$ $\overline{HB} = \dfrac{r(1+\text{sen } x)}{\text{sen } x} \cdot \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$,
- (3) $$\overline{HB} = \frac{r(1+\text{sen } x)}{\cos x} \; .$$
- Inoltre $\overline{HB} = \overline{VB} \cdot \text{sen } x$, $\rightarrow$ $\dfrac{r(1+\text{sen } x)}{\cos x} = \overline{VB} \cdot \text{sen } x$, da cui

(4) $$\overline{VB} = \frac{r(1+\text{sen } x)}{\text{sen } x \cdot \cos x} \; .$$

Si ricava $S\ell = \pi \cdot \dfrac{r(1+\text{sen } x)}{\cos x} \cdot \dfrac{r(1+\text{sen } x)}{\text{sen } x \cdot \cos x}$, e quindi

- $$S\ell = \pi r^2 \cdot \frac{(1+\text{sen } x)^2}{\text{sen } x \cdot \cos^2 x} = \frac{(1+\text{sen } x)^2}{\text{sen } x \cdot (1-\text{sen}^2 x)} \; , \quad \text{ossia}$$
- $$S\ell = \pi r^2 \cdot \frac{(1+\text{sen } x)^{\cancel{2}}}{\text{sen } x \cdot (1-\text{sen}x)\,\cancel{(1+\text{sen } x)}} \; .$$

Quindi la funzione da rendere minima è

(5) $$f(x) = \frac{1+\text{sen } x}{\text{sen } x - \text{sen}^2 x} \; .$$ La sua derivata è

(6) $$f'(x) = \frac{\cos x \cdot (\text{sen}^2 x + 2\text{sen } x - 1)}{(\text{sen } x - \text{sen}^2 x)^2} \; .$$

Le ascisse dei punti estremanti si ottengono eguagliando a zero il numeratore N della (6) . Ciò porta a risolvere le due equazioni

(7) $\cos x = 0 \qquad \operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen}x - 1 = 0$.

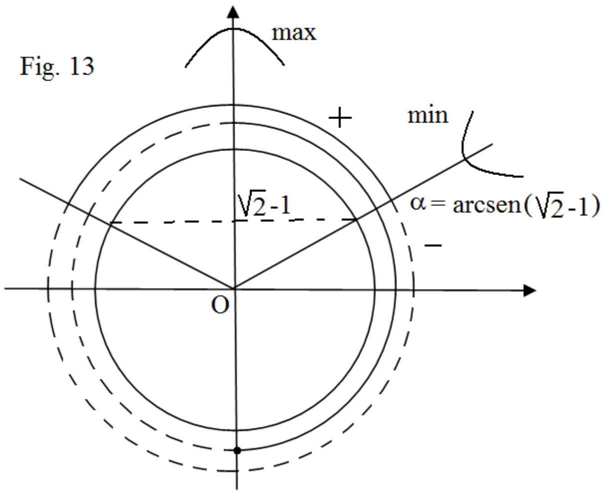
La prima eq. ha le radici $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = 3\frac{\pi}{2}$, le quali non sono accettabili ;
la seconda eq. ha le radici $\operatorname{sen}\, x = -1-\sqrt{2}$ e $\operatorname{sen}\, x = \sqrt{2}-1$
Solo la radice data da $\operatorname{sen}\, x = \sqrt{2}-1$ è accettabile .
La soluzione di questa equazione è

(8) $x = 24^{o}\ 28'$.

Studiamo ora il segno della derivata. Si ha $f'(x) \geq 0$ per

(9) $\cos x \cdot (\operatorname{sen}\, x - \sqrt{2} - 1) \geq 0$.

Fig. 13



La disequazione (9) si può risolvere graficamente (fig. 13) studiando con la regola dei segni il seguente sistema :

(10) R. S. $\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \operatorname{sen}\, x \geq \sqrt{2}-1 \end{cases}$.

L'area della superficie laterale del cono circoscritto alla sfera ha il valore minimo per $x = \text{arcsen}(\sqrt{2}-1)$, $x \simeq 24^{o}\ 28'$.

Risoluzione algebrica

Con riferimento alla fig. 12 , si ha:

(1) $$S\ell = \pi\overline{HB}\cdot\overline{VB}$$

Poniamo $\overline{VH} = x$, con $x > 2r$.

Poiché il triangolo (VOT) è retto nel vertice T, per il teor. di Pitagora si ha:

- $\overline{VT} = \sqrt{\overline{VO}^2 - \overline{OT}^2} = \sqrt{(x-r)^2 - r^2}$; quindi

(2) $$\overline{VT} = \sqrt{x^2 - 2rx} \ .$$

I triangoli (VHB) e (VOT) sono simili e si ha

- $\overline{HB} : \overline{OT} = \overline{VH} : \overline{VT}$, ossia $\overline{HB} : r = x : \sqrt{x^2 - 2rx}$. Si ricava

(3) $$\overline{HB} = \frac{rx}{\sqrt{x^2 - 2rx}}$$ (raggio del cono).

Inoltre si ha : $\overline{VB} = \overline{VT} + \overline{BT}$; poiché $\overline{BT} = \overline{HB}$ si ottiene

- $\overline{VB} = \sqrt{x^2 - 2rx} + \frac{rx}{\sqrt{x^2 - 2rx}}$, $\rightarrow$ (4) $\overline{VB} = \frac{x^2 - rx}{\sqrt{x^2 - 2rx}}$, Si ricava $S\ell = \pi\overline{HB} \cdot \overline{VB} = \frac{rx}{\sqrt{x^2 - 2rx}} \cdot \frac{x^2 - rx}{\sqrt{x^2 - 2rx}}$, da cui, semplificando,

(5) $$S\ell = \cdot \frac{\pi r(x^2 - rx)}{x - 2r} \quad .$$

Possiamo semplificare la ricerca dei punti estremanti studiando la funzione

(6) $$f(x) = \frac{x^2 - rx}{x - 2r}$$ e la sua derivata (7) $$f'(x) = \frac{x^2 - 4rx + 2r^2}{(x - 2r)^2} \quad .$$

Trovo le ascisse dei punti estremanti risolvendo l'equazione

(8) $$N = x^2 - 4rx + 2r^2 = 0, \qquad \text{radici} \quad x_{1,\,2} = 2r \pm r\sqrt{2} \ .$$

La radice $x = 2r - r\sqrt{2}$ è minore di $2r$ e quindi si scarta.

Segno della derivata (fig. 14)

(9) $f'(x) \geq 0$ per $x^2 - 4rx + 2r^2 \geq 0$ $(2r - r\sqrt{2},\ 2r + r\sqrt{2})$ valori esterni.

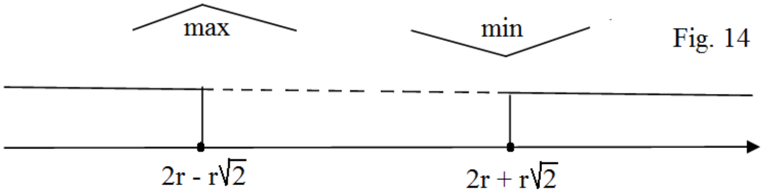


Fig. 14

Conclusione: la superficie laterale del cono è minima quando l'altezza x del cono è (10) $\overline{VH} = x = r(2+\sqrt{2})$.

32. Punti estremanti di una funzione parametrica razionale

Si consideri la funzione

(1) $$y=\frac{x^2+(m-2)x-10}{x^2-2x-3} \quad .$$

1) Trovare per quale valore del parametro m la funzione ha un massimo e un minimo relativi .

2) Si trovi per quali valori di m la funzione non ha né massimo né minimo. In tal caso si dica se la funzione è sempre crescente o decrescente.

Svolgimento

I) Calcoliamo la derivata della funzione ; si ha:

(2)
$$y'(x)=\frac{(2x+m-2)\cdot(x^2-2x-3)-(x^2+mx-2x-10)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x-3)^2} \quad .$$

Svolgendo i calcoli al numeratore e fatte le semplificazioni, si trova

(3) $$y'(x)=\frac{-mx^2+14x-(3m+14)}{(x^2-2x-3)^2} \quad .$$

L'equazione ha un massimo e un minimo relativi se l'equazione $y'(x)=0$,

cioè $$-mx^2+14x-(3m-14)=0$$

ha due radici reali e distinte, cioè se: $\Delta/4>0$ ed $m\neq 0$, $\rightarrow$

- $49-3m^2-14m>0$, ossia (4) $3m^2+14m-49<0$

.

La (4) ha le radici $m_1=-7$, $m_2=7/3$.

Pertanto la disequazione (4) è verificata per valori interni all'intervallo delle radici, con $m \neq 0$, cioè

(5) $$-7 < m < \frac{7}{3} \ , \quad \text{con} \quad m \neq 0 \ .$$

Conclusione

Per $-7 < m < 0$ ed $0 < m < 7/3$ la funzione $y(x) = \dfrac{x^2 + (m-2)x - 10}{x^2 - 2x - 3}$ <u>ha un massimo e un minimo relativi</u> .

II) La funzione $y(x)$ non ha né massimo né minimo relativi se risulta sempre crescente o decrescente, cioè se risulta sempre $y'(x) > 0$ o $y'(x) < 0$, potendo essere $y'(x) = 0$ in qualche punto di flesso orizzontale crescente o decrescente.

La funzione risulta sempre crescente se si ha $y'(x) > 0$, cioè se si ha

(6) $z = -mx^2 + 14x - (3m+14) > 0$, con $-m > 0$, ossia $m < 0$.

In tal caso, infatti, la (6) rappresenta una parabola che non interseca l'asse x e che ha sempre la concavità rivolta verso l'alto.
Ciò si verifica per $m < 0$ e $\Delta/4 < 0$. Dalla (6) si ha

- $m \neq 0$ $\quad 49 - 3m^2 - 14m < 0$, cioè

(7) $m \neq 0$ $\quad 3m^2 + 14m - 49 > 0$.

La disequazione (7) è verificata per valori esterni all'intervallo delle radici dell'equazione corrispondente ($m_1 = -7$, $m_2 = 7/3$) .

Conclusione:
Per $m < -7$ ed $m > 7/3$ la funzione $y(x)$ data non ha né massimo né minimo relativi ed è sempre crescente.

Per $m=-7$ la funzione (1) $y=\dfrac{x^2+(m-2)x-10}{x^2-2x-3}$ si riduce alla funzione omografica $y=(x-10)/(x-3)$, la quale non ha né un punto di massimo né un punto di minimo relativo.
Anche per $m=7/3$ la funzione (1) si riduce ad una funzione omografica.

33. Integrale di una particolare forma indeterminata

Dimostrare che (1) $$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1}\,dx = \frac{\pi^2}{6} .$$

Se poniamo $e^{-x} = t$, si vede facilmente che si ha:

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{t}{1 - t} = t \cdot \frac{1}{1 - t} .$$

Osserviamo ora che
quando $x = 0$ allora $t = 1$, e quando $x \to +\infty$ allora $t \to 0$;
ne segue che $0 < t \le 1$.

Se ora sviluppiamo in serie di Mac Laurin la funzione $\frac{1}{1-t}$ si ha:

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + ... + t^n + ... = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \ , \quad \text{con} \quad |t| < 1 .$$

Ricordando che $t = e^{-x} < 1$ si ha: $$\frac{1}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kx} .$$

Ne segue che

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{t}{1-t} = e^{-x} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kx} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-x} \cdot e^{-kx} \ ,$$

ossia (2) $$\frac{1}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(k+1)x} \ ,$$

ne segue che (3) $$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} x\, e^{-(k+1)x} \; .$$

Integrando la (3) si ottiene

(4) $$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x e^{-(k+1)x}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} x e^{-(k+1)x}\, dx \; .$$

Dobbiamo ora calcolare l'integrale definito

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{-(k+1)x}\, dx$ e la sommatoria (6) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-(k+1)x}\, dx$.

Calcoliamo a parte l'integrale indefinito

(7) $$\int x e^{-(k+1)x}\, dx \; , \; \text{ove} \;\; k = 0,1,2,3,.....$$

Notiamo che: (8) $$e^{-(k+1)x}\, dx = -\frac{1}{k+1} d\, e^{-(k+1)x} \; .$$

Sostituendo la (8) nella (7) si ha:

$$\int x e^{-(k+1)x} dx = -\frac{1}{k+1} \int x d e^{-(k+1)x} \; .$$

Integrando per parti si ha:

$$\int x e^{-(k+1)x}\, dx = -\frac{1}{k+1} x e^{-(k+1)x} + \frac{1}{k+1} \int e^{-(k+1)x}\, dx \, ,$$

da cui $\int xe^{-(k+1)x}\,dx = -\frac{xe^{-(k+1)x}}{(k+1)} - \frac{1}{(k+1)^2}\int e^{-(k+1)x}\,d[-(k+1)x]$.

Calcolando l'ultimo integrale si ricava:

$$\int xe^{-(k+1)x}\,dx = -\frac{xe^{-(k+1)x}}{k+1} - \frac{1}{(k+1)^2}e^{-(k+1)x} \quad ,$$

ossia : (9) $$\int xe^{-(k+1)x}\,dx = -\frac{x}{(k+1)e^{(k+1)x}} - \frac{1}{(k+1)^2 e^{(k+1)x}} \quad .$$

La formula (9) ci dà la possibilità di calcolare l'integrale definito (5) . Si ha:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-(k+1)x}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t xe^{-(k+1)x}dx =$$

$$= -\lim_{t\to+\infty}\left[\frac{x}{(k+1)e^{(k+1)x}}\right]_0^t - \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{(k+1)^2 e(k+1)x}\right]_0^t =$$

$$= -\lim_{t\to+\infty}\cancel{\frac{t}{(k+1)e^{(k+1)t}}} + \lim_{t\to0}\frac{t}{(k+1)e^{(k+1)t}} - \lim_{t\to+\infty}\cancel{\frac{1}{(k+1)e^{(k+1)t}}} +$$

$$+\lim_{t\to0}\frac{1}{(k+1)^2 e^{(k+1)t}} \quad .$$

Il primo e il terzo limite sono nulli, come subito si vede applicando il teor. di de L'Hospital; il terzo integrale è evidentemente nullo. Ne segue che:

(9) $$\int_0^{+\infty} xe^{-(k+1)x}\,dx = \lim_{t\to 0}\frac{1}{(k+1)^2 e^{(k+1)t}} = \frac{1}{(k+1)^2}\ .$$

La (9) ci permette di dire che:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{+\infty} xe^{-(k+1)x}dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\ .$$

Sostituendo questa espressione nella (5) si ottiene infine:

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x-1}dx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\ .$$

34. Altro integrale notevole

Dimostrare che (1) $$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}.$$

L'integrale (1) ha una grande importanza perché interviene nello studio del corpo nero. Per dimostrare la (1) partiamo dalla formula (2) del par.

N.1. Si ha: $$\frac{1}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(k+1)x} .$$

Ne segue: (2) $$\frac{x^3}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^3 e^{-(k+1)x} .$$

Poiché nell'intervallo (0<x<1) la serie è totalmente convergente, essa è anche assolutamente e uniformemente convergente e quindi l'integrale della serie è uguale alla serie degli integrali. Possiamo quindi dire che:

(3) $$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x^3 e^{-(k+1)x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} x^3 e^{-(k+1)x} dx .$$

Calcoliamo prima l'integrale indefinito corrispondente. Si ha:

(4) $$\int x^3 e^{-(k+1)x} dx = -\frac{1}{k+1} \int x^3 de^{-(k+1)x} =$$
$$= -\frac{1}{k+1} x^3 e^{-(k+1)x} + \frac{1}{k+1} \int e^{-(k+1)x} \cdot 3x^2 dx =$$

$$=-\frac{x^3}{(k+1)e^{(k+1)x}}-\frac{3}{(k+1)^2}\int x^2 de^{-(k+1)x}=$$

$$=-\frac{x^3}{(k+1)e^{(k+1)x}}-\frac{3}{(k+1)^2}x^2e^{-(k+1)x}+\frac{3}{(k+1)^2}\int e^{-(k+1)x}\cdot 2xdx=$$

$$=-\frac{x^3}{(k+1)e^{(k+1)x}}-\frac{3x^2}{(k+1)^2e^{(k+1)x}}+\frac{6}{(k+1)^2}\int xe^{-(k+1)x}dx\ .$$

L'ultimo integrale è già stato calcolato nel paragrafo precedente e abbiamo visto che si ha:

$$\int xe^{-(k+1)x}dx=-\frac{x}{(k+1)e^{(k+1)x}}-\frac{1}{(k+1)^2e^{(k+1)x}}\ .$$

Sostituendo questo integrale nell'espressione finale della formula (3) si ha:

$$\int x^3e^{-(k+1)x}dx=-\frac{x^3}{(k+1)e^{(k+1)x}}-\frac{3x^2}{(k+1)^2e^{(k+1)x}}+$$
$$-\frac{6x}{(k+1)^3e^{(k+1)x}}-\frac{6}{(k+1)^4e^{(k+1)x}}\ .$$

Passando a calcolare l'integrale definito si ha:

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{e^x-1}dx\ =\ \lim_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{x^3}{e^x-1}dx\quad ,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = - \lim_{t \to +\infty} \left[\cancel{\frac{x^3}{(k+1)e^{(k+1)x}}} \right]_0^t - \lim_{t \to +\infty} \left[\cancel{\frac{3x^2}{(k+1)e^{(k+1)x}}} \right]_0^t +$$

$$- \lim_{x \to +\infty} \frac{6x}{(k+1)^3 e^{(k+1)x}} + \lim_{x \to 0} \frac{6x}{(k+1)^3 e^{(k+1)x}} - \lim_{t \to +\infty} \left[\frac{6}{(k+1)^4 e^{(k+1)x}} \right]_0^t .$$

I primi quattro termini sono nulli: infatti abbiamo termini frazionari nei quali si verifica che o il numeratore è nullo, o il denominatore è un infinito di ordine maggiore rispetto al numeratore. Solo l'ultimo limite è diverso da zero. Tenendo conto del suo evidente valore si ha:

(5) $$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-(k+1)x} dx = \frac{6}{(k+1)^4} .$$

La (5) ci permette di dire che:

(6) $$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} x^3 e^{-(k+1)x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6}{(k+1)^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k^4} .$$

Sostituendo la (6) nell'ultimo membro della (3) si ottiene la notevole formula:

(7) $$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} x^3 e^{-(k+1)x} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k^4} = \frac{\pi^4}{15} .$$

35. Punti estremanti di una parabola cubica

Dopo aver dimostrato che ogni funzione del tipo

(1) $$y = -x^3 + ax^2 + bx + c$$

ha un massimo ed un minimo relativi o non ha punti estremanti, si determini tra le suddette funzioni quella che presenta un minimo relativo di ordinata $y = 0$ e il cui grafico γ ha un flesso nel punto F(2,2). Si disegni il grafico di γ .

<u>Soluzione</u> . Si ha

(2) $$\lim_{x\to+\infty}(-x^3 + ax^2 + bx + c) = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(-1 + \cancel{\frac{a}{x}} + \cancel{\frac{b}{x^2}} + \cancel{\frac{c}{x^3}}\right) = -\infty$$

$$y(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c \qquad \text{C: E. } (-\infty, +\infty) .$$

Ne segue : Asintoti verticali : nessuno - Asintoti orizzontali : nessuno.

Riscrivo la funzione e le sue derivate prima e seconda. Si ha:

(3) $$y(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c ,$$
$$y'(x) = -3x^2 + 2ax + b , \qquad y''(x) = -6x + 2a .$$

Per avere il punto di flesso impongo le condizioni

(4) $$\begin{matrix} y''(2) = 0 \\ y(2) = 0 \end{matrix} \qquad \begin{cases} -12 + 2a = 0 \\ -8 + 4a + 2b + c = 0 \end{cases} .$$

Si ricava $a = 6$ e quindi $-8 + 24 + 2b + c = 2$. Abbiamo quindi le relazioni

(5) $$a = 6 \qquad \text{e} \qquad c = -14 - 2b .$$

Sostituendo questi valori nelle (3_1), (3_2) si ha:

(6)
$$y(x) = -x^3 + 6x^2 + bx - 2b - 14 \;,$$
$$y'(x) = -3x^2 + 12x + b \;.$$

Ora, affinché la curva $y(x) = 0)$ abbia un massimo e un minimo relativi è necessario e sufficiente che l'equazione

- $y'(x) = 0 \;\rightarrow\qquad x^3 - 6x^2 - (3x^2 - 12x)\cdot x + 6x^2 - 24x + 14 = 0$,

cioè $\qquad -3x^2 + 12x + b = 0$, $\qquad$ ossia $\qquad 3x^2 - 12x - b = 0$

abbia radici reali e distinte, e quindi deve essere $\Delta/4 > 0$.

Si deve quindi avere

- $36 + 3b > 0 \;,\qquad 12 + b > 0 \;,$

e quindi $\quad$ (7) $\qquad b > -12$.

Ora il testo impone che nel punto di minimo la funzione debba avere orinata nulla, ne segue che deve essere $y(x) = 0$ e $y'(x) = 0$.
Si ottiene così il sistema

$$\text{(A)}\qquad \begin{cases} -x^3 + 6x^2 + bx - 2b - 14 = 0 \\ -3x^2 + 12x + b = 0 \;, \end{cases} \qquad \rightarrow$$

$$\text{(A')}\qquad \begin{cases} x^3 - 6x^2 - bx + 2b + 14 = 0 \\ b = 3x^2 - 12x \;. \end{cases}$$

Sostituendo l'espressione di b nella prima equazione del sistema si ottiene:

$x^3 - 6x^2 - (3x^2 - 12x)\cdot x + 6x^2 - 24x + 14 = 0 \qquad$ da cui

$$x^3 - \cancel{6x^2} - 3x^3 + 12x^2 + \cancel{6x^2} - 24x + 14 = 0 \;,$$

$-2x^3 + 12x^2 - 24x + 14 = 0$, $\qquad$ infine

(8)
$$x^3 - 6x^2 + 12x - 7 = 0 \;.$$

La (8) ammette la radice $x = 1$ .Con la regola di Ruffini si ha

(9) $$(x-1)\cdot(x^2-5x+7)=0 \quad .$$

La (9) ha l'unica radice reale $x=1$, che sarà l'ascissa del punto di minimo.

Sostituendo $x=1$ nella $(A_2^{'})$ e nelle equazioni (5) si ricava :

- $b=3x^2-12x$, $\rightarrow$ $b=3-12$, $\rightarrow$ $b=-9$,
- $c=-14-2b$, $\rightarrow$ $c=-14+18$, $\rightarrow$ $c=4$, $a=6$.

L'equazione della curva γ è quindi (10) $y=-x^3+6x^2-9x+4$.

La curva (10), come subito si vede, interseca gli assi nei punti
A(0,4) , N(0,1) , C(4,0) .

Con i metodi dell'analisi matematica si vede che essa ha:

- il punto di massimo relativo M(3,4)
- e il punto di minimo relativo N(1,0) .

Calcolo combinatorio

36. Disposizioni semplici e permutazioni

“Si chiamano disposizioni semplici di n elementi di classe r $(r \leq n)$ il numero dei gruppi (r-ple) che si possono formare con r degli n elementi dati, con l’intesa che due gruppi si debbono considerare diversi non solo se differiscono per qualche elemento, ma anche se contengono gli stessi elementi disposti in ordine diverso “ .
Esempio, sono diversi i gruppi 1 2 3, e 2 1 3 .

Vogliamo trovare il numero delle disposizioni di n elementi di classe r, che indicheremo con la scrittura $D_{n,r}$.
A tale scopo, supponiamo di avere un’urna contenente n oggetti distinti che indicheremo con i numeri 1,2,3,…,n .
Ci proponiamo di estrarre successivamente r oggetti dall’urna e vogliamo sapere quante r-ple ordinate diverse possiamo ottenere.
Se supponiamo che i numeri estratti non vengano rimessi nell’urna, è chiaro che gli elementi di una r-pla sono tutti distinti fra loro, cioè essi formano effettiva-mente una prima disposizione.
Ora, nella 1^a estrazione abbiamo n possibilità diverse, ognuna delle quali va accoppiata con le $n-1$ possibilità della 2^a estrazione .Pertanto il numero di tutte le possibili coppie è $n(n-1)$.
Quando si estrae il terzo numero abbiamo $n-2$ possibilità, sicché il numero di tutte le possibili terne è $n(n-1)(n-2)$.
Generalizzando,
il numero di tutte le possibili r-ple è $n(n-1)(n-2)\cdots\cdots[n-(r-1)]$,

quindi per definizione

(1) $$D_{n,r} = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1) \; ;$$

cioè: “ Il numero delle disposizioni semplici di n elementi di classe r è uguale al prodotto di r numeri interi consecutivi decrescenti a partire da n “ .

Dalla (1) si ha:

(2) $$D_{n,1} = n, \quad D_{n,2} = n \cdot (n-1), \quad D_{n,3} = n \cdot (n-1)(n-2)$$, $$D_{n,4} = n \cdot (n-1)(n-2)(n-3) \text{ ,......ecc.}$$

e quindi

(3) $$D_{n,2} = (n-1) \cdot D_{n,1}, \qquad D_{n,3} = (n-2) \cdot D_{n,2},$$ $$D_{n,4} = (n-3) \cdot D_{n,3},$$ e in generale

(4) $$D_{n,k} = (n-k-1) \cdot D_{n,k-1} \ .$$

Dalla (1), per $r = n$ si ottengono le <u>disposizioni di n elementi di classe n</u> . Esse si dicono <u>Permutazioni di n elementi</u> e si indicano con il simbolo P_n ;

quindi si ha:

- $D_{n,n} =$ cioè $P_n = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-n-1)$,

  ossia

(5) $$P_n = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \ .$$

Le disposizioni di n elementi di classe n si dicono “ Permutazioni di n elementi “ e si indicano con il simbolo $n!$, detto <u>n fattoriale</u> . Quindi si ha:

(6) $P_n = n!$ e si legge “ n fattoriale “.

Concludendo: Le permutazioni di n elementi sono le disposizioni di n elementi di classe n . In tal caso tutti i gruppi contengono gli stessi n elementi e differiscono solo per l’ordine con cui essi sono presi .

NOTARE

Dalla (6) si ha $n! = n \cdot (n-1)!$, da cui $\frac{n!}{n} = (n-1)!$.

Se $n = 1$ da questa si ha $\frac{1!}{1} = 0!$, da cui $0! = 1!$.

Pertanto si pone $0! = 1$.

Per fare un esempio, scriviamo le $D_{3,2}$ e le permutazioni di 3 elementi . Si ha:

(7) $$\begin{matrix} 12, & 13, & 23, \\ 21, & 31, & 32 \end{matrix} .$$

Queste sono le 6 disposizioni di 3 elementi di classe 2 . Se ora aggiungiamo ad ogni gruppo l'elemento mancante, otteniamo le permutazioni di 3 elementi . Si ha

(8) $$\begin{matrix} 123, & 132, & 231, \\ 213, & 312, & 321 \end{matrix} .$$

Le permutazioni di 4 elementi sono $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Un primo gruppo di quattro permutazioni si ottiene dal gruppo 123 nel modo che indichiamo:

(9) 1234, 1243, 1423, 4123 .

Procedendo in modo analogo per ognuno degli altri cinque gruppi della (8) otte-niamo tutte le permutazioni richieste.

Nel gruppo delle 6 permutazioni date dalla (8) sostituiamo ora una prima volta 3 con 4, poi 2 con 4 e infine 1 con 4 . Si ottengono in tal modo le 24 $D_{4,3}$.

37. Combinazioni semplici

Siano dati n elementi distinti e sia k un numero $\leq n$.
“ Si chiamano combinazioni semplici di n elementi di classe k (con $k \leq n$) il numero dei gruppi che si possono formare con k degli n elementi dati, con l’intesa che due gruppi si debbono considerare diversi solo se differiscono per qualche elemento, ma non per l’ordine con cui gli elementi sono disposti nei gruppi. Quindi due gruppi che contengono gli stessi elementi, ma disposti in ordine diverso, formano una sola combinazione “ .

Vogliamo ora trovare il numero delle combinazioni di n elementi di classe k, che indicheremo con il simbolo $C_{n,k}$, o $\binom{n}{k}$.

Dimostriamo che si ha la formula (1) $$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} .$$

Disponiamo in un quadro le $D_{n,k}$ nel modo seguente (fig 20) :

Prendo k degli n elementi dati e ottengo una prima $D_{n,k}$ (prima colonna del quadro). Permutando in tutti i modi possibili questi elementi ottengo un primo gruppo di $D_{n,k}$, che metto in una colonna . Esse sono $k!$.

Prendo altri k degli n elementi dati : basta che ce ne sia almeno uno diverso dai k precedenti e ottengo così un’altra $D_{n,k}$.
Permutando in tutti i modi possibili questi nuovi k elementi, ottengo un altro gruppo di $D_{n,k}$ che metto nella seconda colonna del quadro: essi sono $k!$.

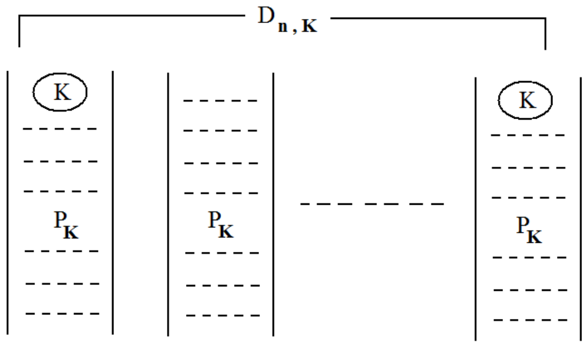


Fig. 20

Ripeto questa operazione sino a considerare tutti i possibili gruppi che possiamo costruire con k elementi diversi, a prescindere dal loro ordine .
In questo modo, in ogni colonna del quadro gli aggruppamenti contengono sempre gli stessi k elementi, solo che in ogni gruppo essi sono disposti in modo diverso dagli altri.
Per definizione di combinazione, ogni colonna del quadro genera quindi una sola $C_{n,k}$, e tutte le $C_{n,k}$ sono tante quante sono le colonne del quadro.
Le righe di ogni colonna sono invece P_k , perché sono state ottenute permutando in tutti i modi possibili i k elementi di un singolo gruppo.
Abbiamo quindi un rettangolo di base $C_{n,k}$ e altezza P_k . Il numero delle caselle di questo rettangolo è uguale al numero delle $D_{n,k}$; quindi si ha:

(2) $$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} \; .$$

Questa relazione si può scrivere nel modo:

(3) $$C_{n,k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-k+1)}{k!} \; .$$

Moltiplicando numeratore e denominatore della frazione per $(n-k)!$ si ha:

- $$C_{n,k} = \frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)!}{k!\cdot(n-k)!} \quad ,$$

ossia

- $$C_{n,k} = \frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)(n-k-1)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{k!\cdot(n-k)!} \quad ,$$

quindi

(4) $$C_{n,k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \quad , \quad \text{o anche} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \ .$$

Si verifica subito la seguente notevole proprietà

(5) $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$; da essa infatti si ha $\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$.

Dimostrare che : (6) $$\binom{n}{k} : \binom{n}{k-1} = \frac{n-k+1}{k} \ .$$ Infatti si ha:

- $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{k(k-1)!(n-k)!} \quad ,$$
- $$\binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)\cdot(n-k)!} \ .$$

Dividendo la prima identità per la seconda si ha il rapporto (6):

$$\binom{n}{k} : \binom{n}{k-1} = \frac{\cancel{n!}}{k\cdot\cancel{(k-1)!}\cdot\cancel{(n-k)!}} \cdot \frac{\cancel{(k-1)!}\cdot(n-k+1)\cdot\cancel{(n-k)!}}{\cancel{n!}} = \frac{n-k+1}{k}$$

.

Curve nel piano

38. Centro di curvatura ed evolvente di una curva

Voglio indicare un procedimento molto semplice che ci permette di trovare le coordinate del centro del cerchio di curvatura di una curva e quindi l'equazione cartesiana dell'evolvente della curva stessa. Ricordo ancora l'angoscia che mi procurò l'argomento nei primi mesi del mio corso di laurea. Il procedimento che illustrerò riesce molte volte vantaggioso. Diamo un esempio.
In un riferimento cartesiano Oxy è data la parabola di equazione $y=\frac{1}{2}x^2$. Trovare le coordinate del centro del cerchio di curvatura relativo al generico punto $P(t;t^2/2)$, cioè le coordinate del centro del cerchio osculatore della curva in tale punto .

Consideriamo due punti infinitamente vicini della parabola: siano essi

$$P(t;\frac{1}{2}t^2) \quad e \quad Q[t+\Delta t;\frac{1}{2}(t+\Delta t)^2] \ .$$

La derivata della funzione $y(x)=\frac{x^2}{2}$ in un generico punto è $y'(x)=x$; ne segue che le tangenti alla parabola nei punti P e Q hanno rispettivamente i coefficienti angolari

$$m_P=t \quad ed \quad m_Q=t+\Delta t \ .$$

Le normali alla parabola nei punti stessi hanno i coefficienti angolari

$$m'_P=-\frac{1}{t} \quad , \quad m'_Q=-\frac{1}{t+\Delta t} \quad .$$

Scriviamo le equazioni delle due normali e mettiamole a sistema

$$(1) \qquad \begin{cases} y-\frac{1}{2}t^2=-\frac{1}{t}(x-t) \\ y-\frac{1}{2}(t+\Delta t)^2=-\frac{1}{t+\Delta t}(x-t-\Delta t) \ . \end{cases}$$

Troviamo le coordinate del punto di intersezione di queste due rette; passando poi al limite per $\Delta t \to 0$ si ottengono le coordinate del centro del cerchio di curvatura nel punto P, cioè del cerchio osculatore in tale punto.

Dalla $(1)_2$ si ha

$$y - \frac{1}{2}[t^2 + (\Delta t)^2 + 2t \cdot \Delta t] = -\frac{x - t - \Delta t}{t + \Delta t} \ .$$

Poiché $(\Delta t)^2$ è trascurabile, essendo esso un infinitesimo del secondo ordine, il sistema diventa:

(2) $$\begin{cases} y = -\dfrac{x}{t} + \dfrac{1}{2}t^2 + 1 \\ y = -\dfrac{x - t - \Delta t}{t + \Delta t} + \dfrac{t^2}{2} + t \cdot \Delta t \ . \end{cases}$$

Eguagliando membro a membro si ha:

$$-\frac{x}{t} + \cancel{\frac{t^2}{2}} + 1 = -\frac{x - t - \Delta t}{t + \Delta t} + \cancel{\frac{t^2}{2}} + t \cdot \Delta t \ ;$$

da cui $\quad -x(t + \Delta t) + t(t + \Delta t) = -t(x - t - \Delta t) + t^2 \Delta t \cdot (t + \Delta t) \ ,$

cioè

$$-\cancel{xt} - x \cdot \Delta t + \cancel{t^2} + \cancel{t \cdot \Delta t} = -\cancel{xt} + \cancel{t^2} + \cancel{t \cdot \Delta t} + t^3 \cdot \Delta t + t^2 \cdot (\Delta t)^2 \ .$$

Semplificando e trascurando il termine $t^2 \cdot (\Delta t)^2$, che è un infinitesimo del secondo ordine, si ha

$$-x \cdot \Delta t = t^3 \cdot \Delta t \ , \quad \text{da cui} \qquad (3) \qquad x = -t^3 \ .$$

Sostituendo la (3) nella $(2)_1$ possiamo trovare l'ordinata del centro del cerchio oscuratore nel punto P:

$$y = t^2 + \frac{1}{2} t^2 + 1 \ , \qquad \text{da cui} \qquad (4) \qquad y = \frac{3}{2} t^2 + 1 \ .$$

Riassumendo, il centro di curvatura ha le coordinate

(5) $$x = -t^3 \ , \qquad (6) \qquad y = \frac{3}{2} t^2 + 1 \ .$$

Al variare del parametro t, il punto, come è noto, descrive l'evolvente della parabola. Le equazioni (5), (6), pertanto, sono le equazioni parametriche dell'evolvente.

Se si ricava t^2 dalla (6) e poi si sostituisce nella (5), possiamo ricavare l'espressione del parametro t in funzione delle variabili x, y. Sostituendo poi l'espressione di t nella (6) si ottiene l'equazione cartesiana dell'evolvente. Essa è:

$$27x^2 = 8 \cdot (y-1)^3 \ .$$

39. Asintoti curvilinei

Una funzione algebrica o trascendente $y = f(x)$ ha un asintoto obliquo quando sono finiti i limiti

$$\begin{cases} \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m \\ \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - mx \right] = q \end{cases}$$

E l'equazione dell'asintoto è

$$y=mx+q$$

Per le funzioni algebriche razionali fratte (cioè quelle costituite dal rapporto fra due polinomi), ciò significa che una funzione del tipo $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (con il numeratore di grado n ed il denominatore di grado d) ammette l'esistenza di un asintoto obliquo quando n-d=1, cioè quando il numeratore è un polinomio di un grado superiore al grado del polinomio a denominatore.

Fin qui la teoria degli asintoti che è generalmente nota a tutti.

Vediamo ora cosa avviene se una funzione algebrica razionale fratta $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ha il numeratore di 2, 3 o più gradi superiore al grado del denominatore, cioè se n-d=2, n-d=3 ecc.

ASINTOTI PARABOLICI

Nel caso in cui n-d=2 si ha (con evidente generalizzazione del criterio precedente)

$$\begin{cases} \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x^2} = a \\ \lim_{x\to\infty} \left[\dfrac{f(x)}{x} - ax \right] = b \\ \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - ax^2 - bx \right] = c \end{cases}$$

e l'asintoto è una parabola con equazione

$$y=ax^2+bx+c$$

ASINTOTI CUBICI

Nel caso in cui sia invece n-d=3 si ha in modo analogo

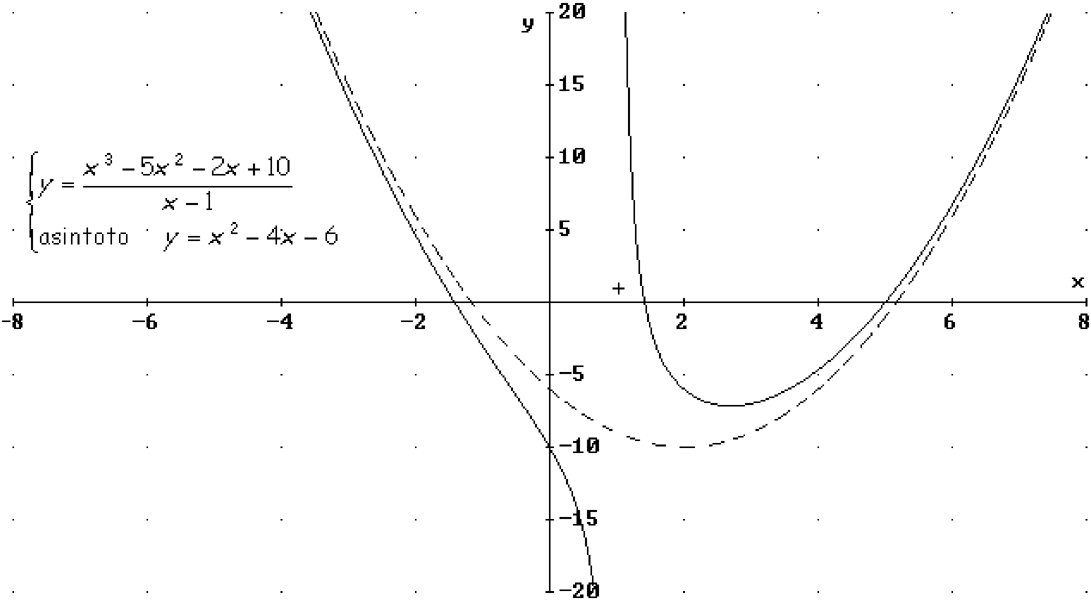
$$\begin{cases} \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x^3} = a \\ \lim_{x\to\infty} \left[\dfrac{f(x)}{x^2} - ax \right] = b \\ \lim_{x\to\infty} \left[\dfrac{f(x)}{x} - ax^2 - bx \right] = c \\ \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - ax^3 - bx^2 - cx \right] = d \end{cases}$$

e l'asintoto è una cubica di equazione

$$y=ax^3+bx^2+cx+d$$

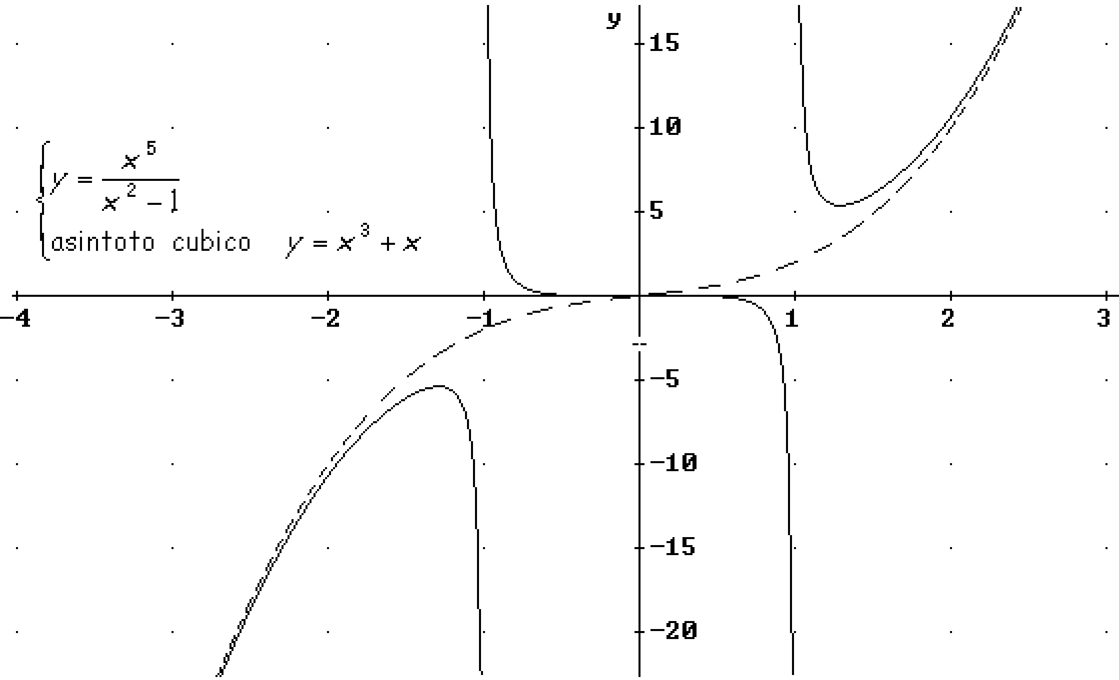
e così via per valori maggiori di n-d.

ESEMPIO 1

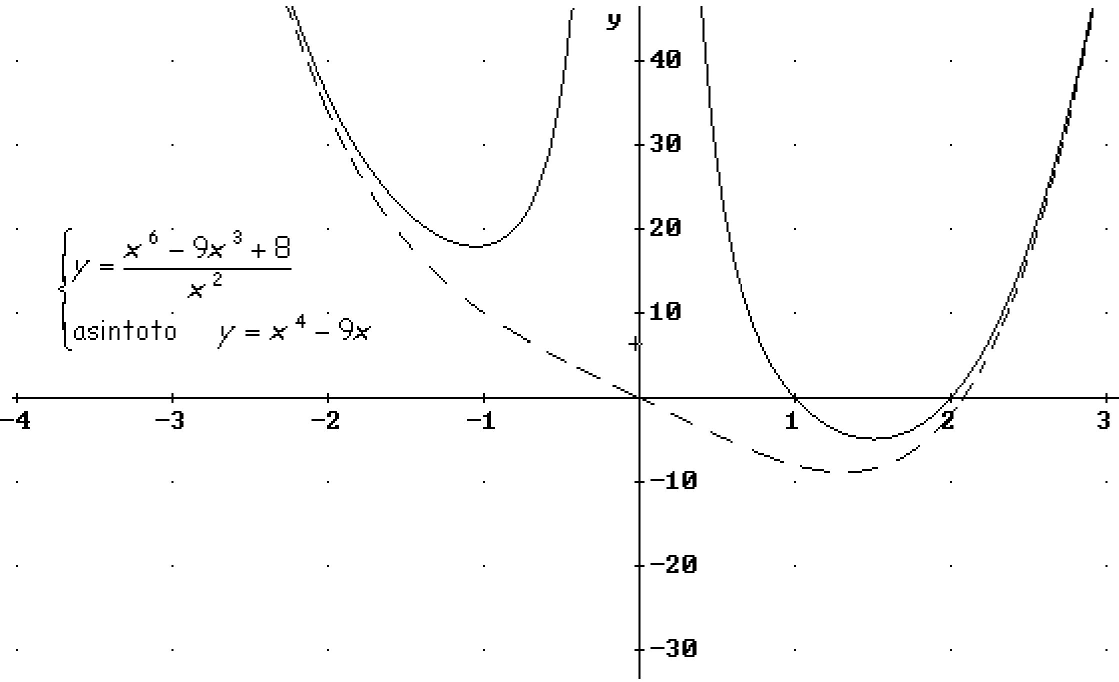


$\begin{cases} y = \dfrac{x^3 - 5x^2 - 2x + 10}{x - 1} \\ \text{asintoto} \quad y = x^2 - 4x - 6 \end{cases}$
y
x
20
15
10
5
-5
-10
-15
-20
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8

ESEMPIO 2


y
15
10
5
-5
-10
-15
-20
-4
-3
-2
-1
1
2
3
$\begin{cases} y = \dfrac{x^5}{x^2-1} \\ \text{asintoto cubico} \quad y = x^3 + x \end{cases}$

ESEMPIO 3



40. Problema geometrico.

Inscrivere in una circonferenza di raggio $r = 1$ un triangolo isoscele di area uguale a k. Discussione.

Sia BC la base del triangolo isoscele e AH l'altezza ad essa relativa. Posto

$$\overline{AH} = x, \quad \text{si ha} \quad \overline{BC} = 2\sqrt{x(2-x)} \quad (2^{o} \text{ Teor. di Euclide}).$$

Area del triangolo: $S = \frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AH}$, da cui $S = x\sqrt{2x - x^2}$.

Si ha il sistema risolvente:

$$\begin{cases} x\cdot\sqrt{2x-x^2} = k \\ 0 < x < 2 \end{cases} , \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ y = k/x \end{cases} \quad \text{con} \quad 0<x<2 .$$

In un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, il problema ha la seguente interpretazione: si tratta di intersecare l'arco di circonferenza $x^2 + y^2 - 2x = 0$ [centro $C(1;0)$ e raggio $r = 1$] posto al di sopra dell'asse x con il fascio di iperboli equilatere $y = \frac{k}{x}$.

Determiniamo il valore di k per cui l'iperbole del fascio è tangente alla circonferenza e le coordinate del punto di tangenza (fig. 4-1).

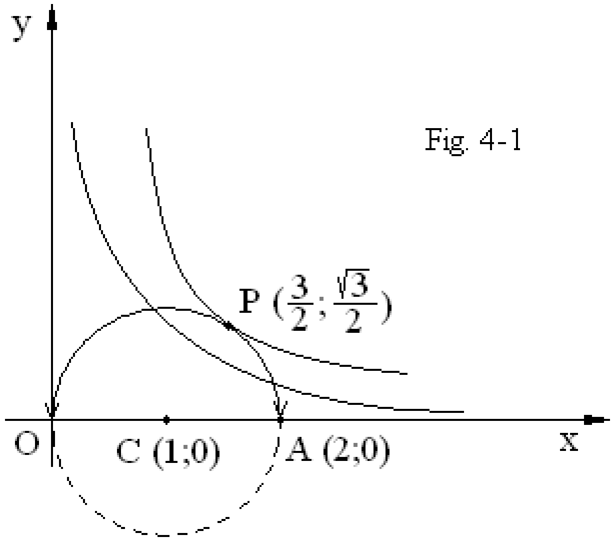


Fig. 4-1

Per un opportuno valore del parametro k, c'è un'iperbole Γ del fascio che tocca la circonferenza in un certo punto $P_o(x_o, y_o)$, il quale cade ovviamente nel primo quadrante.
Per trovare Γ imponiamo le condizioni che le due curve passino per il punto P_o e che le tangenti alle due curve in tale punto coincidano, ossia che queste abbiano coefficienti angolari m ed m' uguali.

Tangente alla circonferenza:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_o}(x-x_o)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_o}(y-y_o)=0 \qquad , \qquad \text{ove}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-2\ , \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=2y\ .$$

Il suo coefficiente angolare è :

$$m = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_o} : \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_o} = -\frac{2(x_o - 1)}{2y_o}, \quad \text{quindi} \qquad m = \frac{1 - x_o}{y_o} \;.$$

Tangente all’iperbole:

$$y - y_o = g'(x_o)(x - x_o), \quad \text{ove} \qquad g'(x_o) = m' = -k/x_o^2 \;.$$

Deve essere $m = m'$, cioè $\dfrac{1 - x_o}{y_o} = -\dfrac{k}{x_o^2}$; da cui $\dfrac{x_o - 1}{y_o} = \dfrac{k}{x_o^2}$.

Dobbiamo ora risolvere il sistema:

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} x_o^2 + y_o^2 - 2x_o = 0, \qquad x_o y_o = k, \\ \dfrac{x_o - 1}{y_o} = \dfrac{k}{x_o^2} \;. \end{cases}$$

Si ricava $\quad k = \dfrac{x_o^2(x_o - 1)}{y_o}$; $\quad$ sostituendo nella $(A)_2$ si ha:

$$x_o y_o = \frac{x_o^2(x_o - 1)}{y_o}, \quad \to \quad y_o^2 = x_o^2 - x_o \;, \quad \to \quad x_o^2 - y_o^2 = x_o \;.$$

Il sistema (A) si riduce al sistema equivalente:

$$\begin{cases} x_o^2 + y_o^2 = 2x_o \\ x_o^2 - y_o^2 = x_o \end{cases}, \qquad \text{che ha le soluzioni} \quad x_o = 0 \quad \text{e} \quad x_o = \frac{3}{2} \;.$$

Alla soluzione $x_o = 0$ corrisponde il valore del fascio $k = 0$, cioè l’iperbole (degenere) spezzata nelle rette $x = 0$ e $y = 0$.

Alla soluzione $x_o = 3/2$ corrisponde l'ordinata

$y_o = \pm\sqrt{x_o^2 - x_o}$, da cui $y_o = +\sqrt{\frac{9}{4} - \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$, cioè $y_o = \frac{3}{2}$.

Si trova così che il valore di k è $k = x_o y_o$, $\Rightarrow$ $k = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Conclusione: l'iperbole del fascio tangente alla circonferenza è

$xy = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ e il punto di tangenza è $P_o\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Il problema ha due soluzioni distinte per $0 < k \le 3\sqrt{3}/4$.

41. Studio di quartica bicircolare

Trovare le equazioni parametriche della quartica

(1) $\qquad C^4 : \quad (x^2+y^2-2x)^2 - xy = 0 \quad$ con $\quad x>0 \quad$ e $\quad y>0$,

ossia (1') $\qquad C^4 : \quad (x^2+y^2)^2 - 4x(x^2+y^2) + 4x^2 - xy = 0$.

La curva giace tutta nel primo quadrante e passa per il punto $A(2,0)$.
L'origine O(0,0) è un punto doppio nodale con tangenti principali di equazioni $x=0$ e $y=4x$.

Soluzione

La C^4 è razionale se ha 3 punti doppi. Omogeneizzando l'equazione e intersecando con la retta impropria $z=0$ si ha:

(1) $\qquad \begin{cases} C^4 \\ z=0\ , \end{cases} \quad \to \quad (x^2+y^2)^2 = 0$. $\qquad$ Si hanno i punti ciclici

(*) $\qquad I_1(1,i,0)$ 2 volte, $\qquad I_2(1,-i,0)$ 2 volte .

La retta impropria $z=0$ interseca la C^4 2 volte in ogni punto ciclico.
Interseco la curva con la generica retta passante per il primo punto ciclico. Si ha

(2) $\qquad \begin{cases} C^4 \\ y = ix+h, \end{cases} \quad \to \quad y^2 = -x^2 + 2ihx + h^2$.

Sostituiamo nella (1) e procediamo nei successivi passaggi; si ha:

(*)
$$(x^2 - x^2 + h^2 + 2ihx)^2 - 4x(x^2 - x^2 + h^2 + 2ihx) + 4x^2 - x(ix + h) = 0 \ ,$$

(*) $$-4h^2x^2 + 4ih^3x + h^4 - 4h^2x - 8ihx^2 + 4x^2 - ix^2 - xh = 0 \ ,$$

(*) $$+4h^2x^2 + 8ihx^2 - 4x^2 + ix^2 + 4h^2x - 4ih^3x + xh - h^4 = 0$$
,

(3) $$x^2(4h^2 + 8ih - 4 + i) + x(4h^2 - 4ih^3 + h) - h^4 = 0 \ .$$

La (3) ci dice che l'equazione risolvente si abbassa di 2 gradi per qualsiasi valore di h, cioè la generica retta passante per il punto ciclico I_1 ha 2 intersezioni con la curva assorbite nel punto stesso. Possiamo già dire che I_1 è un <u>punto doppio</u> e così anche I_2.
Le intersezioni diventano esattamente 3 per i valori di h per cui si ha:

(*) $$4h^2 + 8ih - 4 + i = 0 \quad , \quad \text{radici} \ \rightarrow \ h = \frac{-4i \pm \sqrt{i}}{4} \ .$$

Si conclude che i due punti ciclici sono punti doppi nodali con tangenti a contatto 3-pto, cioè i punti ciclici sono <u>nodi semplici e isolati</u> . Si dice che la quartica è bicircolare.

Si conclude che la C^4 è una curva razionale perché ha tre punti doppi.

Troviamo le sue equazioni parametriche razionali. Considero il fascio di coniche avente i quattro punti base I_1, I_2, il punto O e il punto di coordinate particolarmente semplici $A(2;0)$; si ha il fascio di circonferenze:

(4) $$x^2 + y^2 + ax + by = 0 \ .$$

Imponendo il passaggio per il punto $A(2,0)$ si ha: $4 + 2a = 0$, da cui $a = -2$.
Il fascio si riduce all'equazione

(5) $\quad |C_2|^1 \;:\; x^2+y^2-2x+ty=0$, ossia $|C_2|^1 \;:$ $x^2+y^2=2x-ty$.

Intersecando la quartica con il fascio si ha il sistema

(6) $$\begin{cases}(x^2+y^2)^2-4x(x^2+y^2)+4x^2-xy=0\\ x^2+y^2=2x-ty\ .\end{cases}$$

Si tratta di un sistema di 8^o grado di cui conosciamo a priori ben sette soluzioni : esse sono i due punti ciclici, contato ognuno due volte, due soluzioni corrispon-denti al punto doppio O , più una soluzione corrispondente al punto semplice $A(2,0)$.

Sostituendo la seconda equazione del sistema nella prima abbiamo

(7) $$(2x-ty)^2-4x(2x-ty)+4x^2-xy=0\ .$$

Si ha un'equazione di 2^o grado perché già sono state assorbite le 6 soluzioni di cui sopra. Debbo ora poter mettere in evidenza la retta $OA \equiv y=0$. Infatti, svolgendo la (7) si ha:

(8) $$\cancel{4x^2}+t^2y^2-\cancel{4txy}-\cancel{8x^2}+\cancel{4txy}+\cancel{4x^2}-xy=0\ ,$$

(9) $$t^2y^2-xy=0,\ \rightarrow\quad y(t^2y-x)=0\ .$$

La (9) dà le soluzioni $\quad y=0 \quad$ e $\quad x=t^2y$.

Per $y=0$ l'equazione $x^2+y^2=2x-ty$ ci dà $x=0$ e $x=2$.

Per $x=0$ si ha l'ultima soluzione $x=0,\ y=0$, corrispondente al punto doppio $O(0,0)$ e la soluzione $x=2,\ y=0$, corrispondente al punto $A(2,0)$.

Considerando la soluzione $x = t^2 y$, possiamo impostare il sistema risolvente

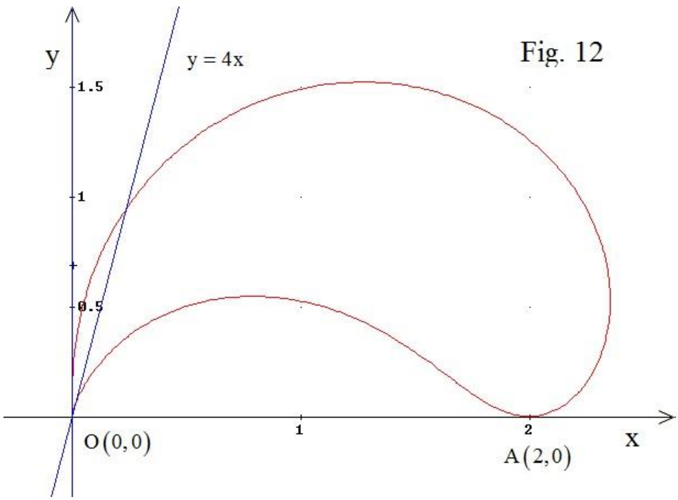
(10) $$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2x - ty \\ x = t^2 y \end{cases}$$ da cui

$t^4 y^2 + y^2 = 2t^2 y - ty$.

Si ricava $y = 0$, corrispondente al punto $A(2,0)$ e, da ultimo,

(11) $$y = \frac{2t^2 - t}{1 + t^4} \qquad x = \frac{2t^4 - t^3}{1 + t^4} .$$

Le (11) sono le equazioni parametriche razionali della C^4 .



Per tracciare il grafico della curva si può far variare t nell'intervallo di estremi $t_1 = -13$, $t_2 = 43$. Si ha il grafico di fig. 12 .

42. Altra quartica bicircolare

Trovare le equazioni parametriche della quartica

(1) $$C^4 : \quad (x^2+y^2)^2 - 2y(x^2+y^2) + (x+y)^2 = 0 \ .$$

La curva è definita per $y \geq 0$. L'origine O(0,0) è un punto doppio con tangenti principali sovrapposte di equazioni $y = -x$.

Intersecando la curva con la tangente in O(0,0) si ha

(2) $$(2y^2)^2 - 2y(2y^2) = 0 , \qquad 4y^4 - 4y^3 = 0 , \qquad y^3(y-1) = 0 \ ,$$

quindi $y = 0$, soluzione 3 volte e $y = 1$ soluzione semplice .

Si conclude che la tangente $y = -x$ ha una intersezione con la C^4 nel punto $A(-1,1)$ (punto semplice) e tre intersezione nel punto $O(0,0)$. Ne segue che O(0,0) è una cuspide di 1^a specie; essa vale come un punto doppio .

Altri 2 punti doppi sono i punti ciclici $I_1(1,i,0)$ e $I_2(1,-i,0)$, quindi la C^4 , avendo 3 punti doppi, è una curva razionale .

Possiamo vedere anche che l'asse y ($x = 0$) è tangente alla C^4 nel punto B(0,1) .

Per trovare le equazioni parametriche della curva, considero il fascio di coniche avente i quatto punti base I_1, I_2, il punto O e il punto di coordinate particolar-mente semplici B(0;1) .

Si ha il fascio di circonferenze:

(3) $$x^2 + y^2 + ax + by = 0 \ .$$

Imponendo il passaggio per il punto $B(0;1)$ si ha: $1+b=0$, da cui $b=-1$.
L'equazione del fascio si riduce a:
(4) $|C_2|^1$: $x^2+y^2+tx-y=0$, ossia $|C_2|^1$: $x^2+y^2=y-tx$.

Intersecando la quartica con il fascio di coniche si ha il sistema

(5) $$\begin{cases}(x^2+y^2)^2-2y(x^2+y^2)+x^2+y^2+2xy=0\\ x^2+y^2=y-tx\end{cases} .$$

Si tratta di un sistema di 8^o grado di cui conosciamo a priori ben sette soluzioni : esse sono i due punti ciclici, contato ognuno due volte, due soluzioni corri-spondenti al punto doppio O , più una soluzione corrispondente al punto semplice $B(0;1)$.

Sostituendo la seconda equazione del sistema nella prima si ha
(6) $$(y-tx)^2-4x(y-tx)+y^2+x^2+2xy=0 .$$

Si tratta di un'equazione di 2^o grado, perché già sono state assorbite le 6 soluzioni di cui sopra. Debbo ora poter mettere in evidenza la retta $OB\equiv x=0$.

Infatti, svolgendo la (6) si ha:

(7) $$\cancel{y^2}+t^2x^2-\cancel{2tyx}-\cancel{2y^2}+\cancel{2tyx}+\cancel{y^2}+x^2+2yx=0 ,$$

$(8_1)\qquad t^2x^2+x^2+2yx=0\,,\ \rightarrow\qquad (8_2)\qquad x(t^2x+x+2y)=0$
.

Dalla (8_2) si ricava $x=0$ e $y=-\dfrac{x(t^2+1)}{2}$.

Sostituendo $x=0$ nell'equazione $x^2+y^2=y-tx$ si ricavano le soluzioni $y=0$ e $y=1$. Ad esse corrispondono l'ultimo punto $O(0,0)$ e il punto semplice $B(0;1)$.

Infine, sostituendo $y=-x(t^2+1)/2$ nell'equazione $x^2+y^2=tx-y$ si ottiene:

$$* \qquad x^2+\frac{x^2(t^2+1)^2}{4}=tx-\frac{x(t^2+1)}{2}\ .$$

Da cui $x=0$, corrispondente al punto $B(0;1)$ e

$$(9)\qquad x\left[1+\frac{(t^2+1)^2}{4}\right]=t-\frac{t^2+1}{2}\ .$$

Ne segue $x\dfrac{t^4+2t^2+5}{4}=\dfrac{2t-t^2-1}{2}$, e quindi

$$(10)\qquad x=-\frac{2(t-1)^2}{t^4+2t^2+5}\ .$$

Sostituendo nell'espressione $y=-x(t^2+1)/2$ si ha

$$(11)\qquad y=\frac{(t-1)^2(t^2+1)}{t^4+2t^2+5}$$

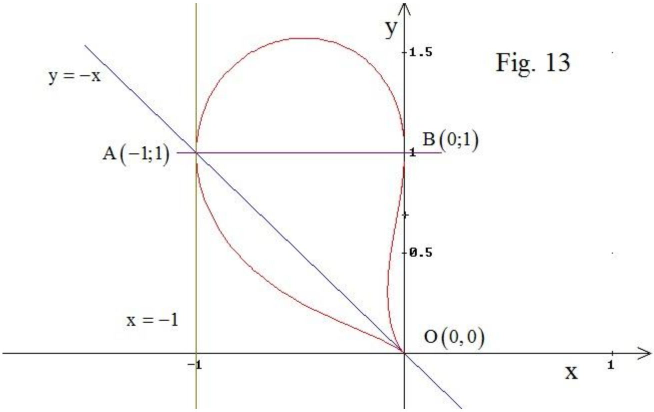


Fig. 13

Le (10) , (11) sono le equazioni parametriche razionali della C^4 . Facendo variare il parametro t in un opportuno intervallo si ottiene il grafico di fig. 13 .

43. Ricerca dell'equazione polare di una quartica

Trovare l'equazione polare di una quartica che in coordinate cartesiane ha l'equazione:

(1) $$C^4 : \ (x^2+y^2)\cdot(3x^2+4y^2)+4y^2 = 8y(x^2+y^2) \ .$$

Il passaggio da un riferimento cartesiano al riferimento polare associato è dato dalle equazioni

(2) $$x = \rho\cos\vartheta \ , \qquad y = \rho\sin\vartheta \ .$$

Sostituendo nella C^4 si ha:

- $$\rho^2\cdot(3x^2+3y^2+y^2)+4\rho^2\sin^2(\vartheta) = 8\rho^3\sin(\vartheta) \ ,$$
- $$(3\rho^2+\rho^2\sin^2(\vartheta))+4\sin^2(\vartheta)-8\rho\sin(\vartheta) = 0 \ ,$$

(3) $$\rho^2(3+\sin^2\vartheta)-8\rho\sin(\vartheta)+4\sin^2\vartheta = 0 \ .$$

Abbiamo un'equazione di 2^o grado nell'incognita ρ che possiamo risolvere. Si ha

- $$\rho = \frac{4\sin\vartheta \pm \sqrt{16\sin^2\vartheta - 12\sin^2\vartheta - 4\sin^4\vartheta}}{3+\sin^2\vartheta} \ .$$

Ora $\Delta = 4\sin^2\vartheta - 4\sin^4\vartheta = 4\sin^2\vartheta(1-\sin^2\vartheta) = 4\sin^2\vartheta\cdot\cos^2\vartheta$

,

quindi $$\rho = \frac{4\sin\vartheta \pm 2\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta}{4-\cos^2\vartheta} = \frac{2\sin\vartheta\cdot(2\pm\cos\vartheta)}{(2+\cos\vartheta)\cdot(2-\cos\vartheta)} \ .$$

Il binomio $2\pm\cos\vartheta$ può essere semplificato, alternativamente, con uno dei due fattori che compaiono al denominatore dell'espressione trovata e si ha:

(4) $$\rho = \frac{2\sin\vartheta}{2-\cos\vartheta}$$, oppure (5) $$\rho = \frac{2\sin\vartheta}{2+\cos\vartheta}$$.

Le due espressioni sono equivalenti e rappresentano entrambi l'equazione polare della quartica C^4 (fig. 14) :

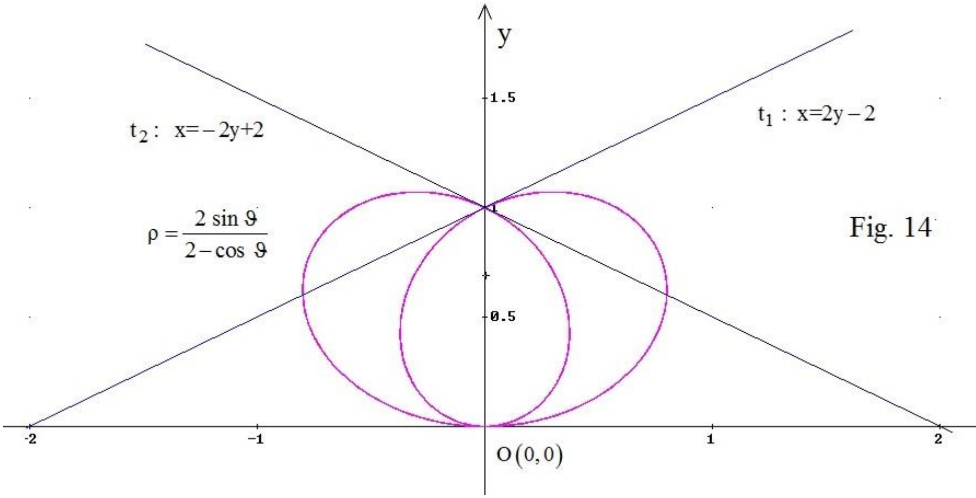


Fig. 14

Se ora passiamo al rif. cartesiano associato al riferimento polare, dalla (4) possiamo ricavare le equazioni parametriche cartesiane della C^4. Infatti, ricordando che $x = \rho\cdot\cos\vartheta$, $y = \rho\cdot\sin\vartheta$, si ha

(6) $$x = \frac{2\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta}{2-\cos\vartheta}$$, e (6') $$y = \frac{2\sin^2\vartheta}{2-\cos\vartheta}$$.

E questa già è una prima forma delle equazioni parametriche .

Dalle (6) possiamo ricavare un'altra forma delle equazioni parametriche. Infatti, ricordiamo le formule di trigonometria

(7) $$\operatorname{sen}\vartheta = 2\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\Big/(1+\operatorname{tg}^2\frac{\vartheta}{2}) = \frac{2t}{1+t^2} \ ,$$

(7') $$\cos\vartheta = (1-\operatorname{tg}^2\frac{\vartheta}{2})\Big/(1+\operatorname{tg}^2\frac{\vartheta}{2}) \quad = \frac{1-t^2}{1+t^2} \ .$$

Sostituendo nella (6), o nella (6') , con facili calcoli si trova :

(8) $$x = \frac{4t\cdot(1-t^2)}{(1+t^2)\cdot(1+3t^2)} \quad , \qquad y = \frac{8t^2}{(1+t^2)\cdot(1+3t^2)} \quad .$$

Terminiamo con lo studio dei punti doppi della C^4 , di cui scriviamo l'equazione in forma esplicita :

(9) $$C^4 \ : \ 3x^4 + 4y^4 + 7x^2y^2 - 8y^3 - 8yx^2 + 4y^2 = 0 \ .$$

Si vede subito che l'origine $O(0,0)$ è un punto doppio con tangenti principali sovrapposte $y=0$, a contatto $4\cdot\text{pto}$ con la quartica nel punto O . L'origine non è una cuspide di 1^a specie .

Approssimo la curva nell'intorno del punto O mediante il fascio di parabole $|C_2|^1$: $y = \lambda x^2$. Intersecando si ha:

(10) $$3x^4 + 4\lambda^4x^8 + 7\lambda^2x^6 - 8\lambda^3x^6 - 8\lambda x^4 + 4\lambda^2x^4 = 0 \ .$$

La generica parabola del fascio ha contatto $4 \cdot$pto con la C^4 in O. Ci sono però due parabole $\overline{C}_2^{(o)}$ e $\overline{G}_2^{(o)}$ che hanno contatto $6 \cdot$pto con la C^4 (parabole iper-osculatrici). Esse si ottengono per i valori di λ per cui si ha:

(11) $$4\lambda^2 - 8\lambda + 3 = 0 \ , \qquad \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{4} = \frac{4 \pm 2}{4} \quad \to \quad \lambda_1 = \frac{1}{2} \ ,$$
$$\lambda_2 = \frac{3}{2} \ .$$

Pertanto $O(0,0)$ è un tacnodo di 1^a specie e vale per due punti doppi.

Un altro punto doppio è $P(0;1)$; infatti per esso si ha $f(P) = 0$, $f_x(P) = 0, f_y(P) = 0$. Pertanto la C^4 è razionale (come già avevamo trovato) , avendo essa il massimo numero di punti doppi compatibile con il suo grado .

Per finire, ricordiamo che le tangenti principali in un punto doppio $P_o(x_o, y_o)$ di una C^n hanno le equazioni $y - y_o = \lambda(x - x_o)$, in λ sono le radici dell'equazione di 2^o grado

(12) $$f_{xx}(P_o) + 2f_{xy}(P_o) \cdot \lambda + f_{yy}(P_o) \cdot \lambda^2 = 0 \ .$$

Dalla (12) si ricavano due radici λ_1, λ_2 , distinte o coincidenti, che sostituite nell'equaz. $y - y_o = \lambda(x - x_o)$, ci danno le due tangenti principali nel punto
$P_o(x_o, y_o)$. Nel caso del punto $P(0;1)$ della nostra curva si ha

- $f_{xx}(0;1) = -2$, $f_{xy}(0;1) = 0$, $f_{yy}(0;1) = 8$.

Quindi la (12) si riduce all'equazione $-2 + 8\lambda^2 = 0$: radici $\lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$.

Le equazioni delle due tangenti sono : $x - 2y + 2 = 0$ e $x + 2y - 2 = 0$.

44. Teoria su tacnodi e cuspidi di specie superiore

Consideriamo una quartica che abbia 3 punti doppi A, B, C coincidenti ,
quindi $A = B = C$. Ciò succede per esempio quando essa ha un tacnodo di 2^a specie o una cuspide di 3^a specie.
Questi tre punti infinitamente vicini non possono giacere su una stessa retta, cioè sulla tangente alla C^4 in $A = B = C$. In tal caso, infatti, la generica retta per A avrebbe 6 intersezioni con la curva assorbite in tal punto e quindi essa sarebbe degenere. Ne segue che i tre punti si troveranno sulla parabola osculatrice nel punto A=B=C o sul cerchio osculatore (fig. 15).

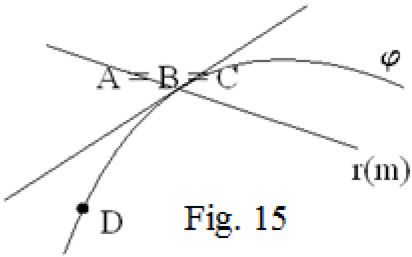


Fig. 15

In tal caso la C^4 è razionale e possiamo trovare le sue equazioni parametriche con il seguente procedimento .
Sia φ la parabola osculatrice, D un punto di coordinate particolarmente semplice della C^4; s la retta tangente alla curva, e quindi alla parabola osculatrice, nel punto di contatto A e sia r(m) una retta generica, di coefficiente angolare m, passante per il punto stesso .

Considero la rete di coniche
(1) $$\varphi + t \cdot s \cdot r(m) = 0 .$$

Impongo alla rete di passare per il punto D; trovo così uno dei due parametri t, m e ciò mi permette di passare da una rete ad un fascio di coniche $|C_2|^1$.

Interseco la C^4 con il fascio ottenuto:

(2) $$\begin{cases} C^4 \\ |C_2|^1 \end{cases} .$$

Ottengo un sistema di 8^o grado nelle variabili x,y del quale conosco a priori ben 7 soluzioni (ascisse):

(*) $$\begin{array}{lll} x = x_A & 6 \text{ volte} & (2+2+2 \text{ soluzioni sovrapposte}), \\ x = x_D & 1 \text{ volta} & . \end{array}$$

Dividendo successivamente per $(x - x_A)^6$, $x - x_D$ ottengo una equazione di 1^o grado in x da cui posso ricavare la x in funzione del parametro t.

Sostituendo il valore di x nell'equazione risolvente posso ricavare la y in funzione del parametro t. La C^4 ha quindi le equazioni parametriche razionali

(12) $$x = x(t), \qquad y = y(t) .$$

Facciamo alcuni esercizi di applicazione che illustrano la teoria svolta. Questi sono stati presi dalle Lezioni del Prof. G. Roghi dell'Università "La Sapienza" di Roma.

45. Esercizio 7R (L'origine O è un tacnodo di 2^a specie)

Studiare la quartica (1) $\quad C^4 : \ (x^2+y^2-2x)^2-x^3=0$

ossia $\quad (x^2+y^2)^2-4x(x^2+y^2)+4x^2-x^3=0$

o anche $\quad 4x^2-5x^3-4xy^2+x^4+2x^2y^2+y^4=0$.

<u>Soluzione</u>

L'origine $O(0,0)$ è un punto doppio con tangenti principali sovrapposte di equazione $x=0$. Interseco la C^4 con la tangente doppia $x=0$:

(2) $$\begin{cases} C^4 \\ x=0\,, \end{cases} \quad \rightarrow \quad y^4=0\,, \qquad y=0 \ \text{ soluzione } 4 \text{ volte.}$$

La tangente ha contatto 4-pto con la C^4 nel punto O: l'origine, quindi, non è una cuspide di 1^a specie, ma può essere un tacnodo o una cuspide di ordine superiore.

Approssimo la quartica nell'intorno del punto O mediante il fascio di parabole $|C_2|^1 : \ x=\lambda y^2$, tangenti alla retta $x=0$ e interseco la C^4:

(3) $$\begin{cases} (x^2+y^2-2x)^2-x^3=0 \\ x=\lambda y^2\,. \end{cases}$$

Si ottiene $\quad (\lambda^2y^4+y^2-2\lambda y^2)^2-\lambda^3y^6=0$,

e quindi

(4) $$y^4\left[(\lambda^2y^2-2\lambda+1)^2-\lambda^3y^2\right]=0\,.$$

La generica parabola del fascio ha contatto 4-pto con la C^4 nel punto O. Per $(1-2\lambda)^2=0$, cioè per $\lambda_1=\lambda_2=\dfrac{1}{2}$, ci sono due parabole coincidenti $C_2^{(O)}$ e $\overline{C}_2^{(O)}$ che hanno contatto esattamente 6-pto, e quindi esse sono <u>iperosculatrici</u> .

Le due parabole sono (5) $\quad C_2^{(O)}\equiv\overline{C}_2^{(O)}:\ x=y^2/2$.

Poiché le due parabole hanno contatto 6-pto con la C^4, il p.to doppio O(0,0) può essere o un <u>tacnodo di 2^a specie</u> (detto oscnodo) o un <u>tacnodo di 3^a specie</u> ; in ogni caso esso vale come 3 punti doppi. Ne segue che la C^4 ha il massimo numero di punti doppi compatibile con il suo grado $(4-1)(4-2)/2=3$ e quindi essa è razionale.

Vediamo se il tacnodo è di 2^a o 3^a specie , anche se non è necessario fare questa precisazione.

Consideriamo il fascio di cubiche $\left|C_3\right|^1$ che approssimano la curva C^4 nell'intorno del punto O e intersechiamo la curva:

(5) $$\begin{cases}(x^2+y^2-2x)^2-x^3=0\\ x=y^2\left(\dfrac{1}{2}+\mu y\right)\end{cases}.$$ Si ottiene

(*) $$\left[y^4\left(\frac{1}{2}+\mu y\right)^2+y^2-2y^2\left(\frac{1}{2}+\mu y\right)\right]^2-y^6\left(\frac{1}{2}+\mu y\right)^3=0\,,$$

(*) $$y^4\left[\frac{1}{4}y^2+\mu^2y^4+\mu y^3+\cancel{1}-\cancel{1}-2\mu y\right]^2-y^6\left(\frac{1}{2}+\mu y\right)^3=0\ ,$$

(6) $$y^6\left[\frac{1}{4}y^2+\mu^2y^3+\mu y^2+\frac{1}{4}y-2\mu\right]^2-y^6\left(\frac{1}{2}+\mu y\right)^3=0\ .$$

La (6) ci dice che la generica cubica del fascio $|C_3|^1$ ha contatto 6-pto con la C^4 nel punto O; ce ne sono però due $\left[C_3^{(O)}\text{ e }\overline{C}_3^{(O)}\right]$ che hanno contatto esattamente 7-pto. Esse si ottengono per i valori di μ per cui si ha

(*) $$[-2\mu]^2-\frac{1}{8}=0,\qquad\rightarrow\qquad \mu^2=\frac{1}{32}\ ,$$ ossia $\mu=\pm\dfrac{1}{4\sqrt{2}}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

Quindi le due cubiche sono:

(7) $$C_3^{(O)}:\ x=\frac{1}{2}y\ +^{2}\frac{\sqrt{2}}{8}y$$ e

$$\overline{C}_3^{(O)}:\ x=\frac{1}{2}y^2-\frac{\sqrt{2}}{8}y^3\ .$$

Il punto doppio O(0;0) è pertanto un <u>oscnodo</u>, che vale come 3 punti doppi coincidenti $A\equiv B\equiv C$. Avendo 3 punti doppi, la C^4 è una curva razionale.

Tracciando i grafici delle eq. (7) si può vedere che nell'intorno dell'oscnodo la curva ha due rami che si attraversano, pur avendo essi la stessa tangente $x=0$, e ciò si verifica per ogni oscnodo di una qualsiasi curva.

I 3 punti doppi $A\equiv B\equiv C$, infinitamente vicini tra loro, non possono essere allineati su una retta s, cioè sulla tangente alla C^4 nel punto O.

In tal caso, infatti, la retta per A avrebbe 6 intersezioni con la curva assorbite in tal punto; allora la C^4 sarebbe degenere e la retta s sarebbe una sua componente. <u>I tre punti si trovano allora sulla parabola osculatrice nel punto O</u> .

Considero la rete di coniche che si ottiene combinando la parabola osculatrice φ e la conica spezzata nella tangente s e in una generica retta per O (vedi fig. 6, pg. 69, con i punti $A=B=C$ che fanno le veci dell'oscnodo O).

Nel caso specifico l'equazione della rete $\varphi + t\cdot s\cdot r(m) = 0$ è:

(8) $$2x - y^2 + t\cdot x\cdot(y - mx) = 0 \ .$$

Impongo il passaggio per un punto di coordinate particolarmente semplici della C^4 , per esempio il punto $D(1,0)$ e ottengo

(*) $$2 - mt = 0, \qquad \text{da cui} \qquad m = \frac{2}{t} \ .$$

Sostituendo,posso passare dalla rete al fascio di coniche

(9) $$|C_2|^1 : \ 2x - y^2 + tx\left(y - \frac{2}{t}x\right) = 0 \ .$$

Interseco la C^4 con il fascio:

(A) $$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 2x)^2 - x^3 = 0 \\ 2x - y^2 + x(ty - 2x) = 0 \ , \end{cases}$$ cioè (B)

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 2x)^2 - x^3 = 0 \\ y^2 = 2x + txy - 2x^2 \ . \end{cases}$$

Ottengo un sistema di 8^o grado di cui conosco a priori ben 7 soluzioni:

(*)

$x=0$ soluzione 6 volte. Infatti il fascio $|C_2|^1$ ha contatto $6\cdot$pto

con la C^4 nel punto O ,

$x=1$ soluzione 1 volta.

Dividendo successivamente per x^6 , $x-1$ ottengo un'equazione di 1^o grado in x, da cui posso ricavare la x in funzione del parametro t.

Procedo nei calcoli. Sostituendo la 2^a equazione del sistema (B) nella 1^a si ha:

(*) $$(x^2+\cancel{2x}+txy-2x^2-\cancel{2x})^2-x^3=0$$. Ne segue:

(*) $$(txy-x^2)^2-x^3=0 \ , \quad \rightarrow \quad x^2(ty-x)-x^3=0 \, .$$

Quindi il sistema (B) si spezza nei due sistemi equivalenti:

(C) $$\begin{cases} x^2=0 \\ y^2=2x+txy-2x^2 \end{cases} ,$$ (D) $$\begin{cases} (ty-x)^2-x=0 \\ y^2=2x+txy-2x^2 \end{cases} .$$

Il sistema (C) ci dà la soluzione O(0;0) contata 4 volte; si poteva prevedere di avere una soluzione multipla perché il fascio di coniche $|C_2|^1$ ha contatto 6-pto con la C^4 nell'origine O(0,0).

Passo al sistema (D) e formo un fascio fra le due coniche del sistema:

(10) $$2x-y^2+txy-2x^2+\lambda(t^2y^2+x^2-2txy-x)=0 \, .$$

Tale fascio deve contenere ancora una soluzione doppia O(0,0) e la soluzione semplice D(1,0); pertanto esso si deve spezzare nella retta

$OD \equiv y = 0$ e in un'altra retta per O. Ciò mi dice che devo avere la possibilità di mettere in evidenza y nell'equazione (10) e perché ciò accada i termini che contengono la sola x devono essere identicamente nulli, cioè deve essere

(11) $$2x - 2x^2 + \lambda x^2 - \lambda x = 0, \quad \rightarrow$$ $$x(2-\lambda) - x^2(2-\lambda) = 0 \;;$$

ciò è possibile solo se $\lambda = 2$. Con questo valore, la (10) ci dà la conica degenere del fascio; sostituendo si ha:

(*) $$\cancel{2x} - y^2 + txy - \cancel{2x^2} + 2t^2y^2 + \cancel{2x^2} - 4txy - \cancel{2x} = 0$$, da cui

(12) $$2t^2y^2 - 3txy - y^2 = 0$$, e quindi $$y(2t^2y - 3tx - y) = 0.$$

Come si vede, i termini in x si eliminano automaticamente, altrimenti ci sarebbe un errore di calcolo.

Grazie alla (12), il sistema di 4^o grado (D) si spezza nei due sistemi

(E) $$\begin{cases} y = 0 \\ (ty - x)^2 - x = 0 \end{cases},$$ (F) $$\begin{cases} 2t^2y - y = 3tx \\ (ty - x)^2 - x = 0 \end{cases}.$$

Il sistema (E) ci dà una quinta soluzione O(0,0) e la soluzione semplice D(1,0).
Il sistema (F) ci dovrà dare la sesta soluzione O(0,0) e le equazioni parametriche razionali $x = x(t)$, $y = y(t)$. Procedendo nei calcoli, dalla prima equazione del sistema si ha

(13) $$x = \frac{y(2t^2 - 1)}{3t} .$$

Sostituendo nella 2^a equazione si ottiene

(*) $$\left(ty-\frac{2t^2y-y}{3t}\right)^2-\frac{2t^2y-y}{3t}=0\,,$$

$$\left(\frac{t^2y+y}{3t}\right)^2=\frac{y(2t^2-1)}{3t}\,,$$

e quindi (14) $$\frac{y^2(t^2+1)^2}{3t}=y(2t^2-1)\ .$$

Dalle equazioni (14), (13) si ricava $x=y=0$, cioè l'ultima soluzione O(0,0). Dalla (14) si ricava anche il valore dell'ordinata y in funzione del parametro t:

(16) $$y=\frac{3t(2t^2-1)}{(t^2+1)^2}\ .$$

Sostituendo nella 1^a equazione del sistema (F) si ha:

(*) $$3tx=\frac{3t(2t^2-1)}{(t^2+1)^2}\cdot(2t^2-1)\ .$$

Le equazioni parametriche della C^4 sono pertanto :

(17) $$x(t)=\frac{(2t^2-1)^2}{(t^2+1)^2}\,,\qquad y(t)=\frac{3t(2t^2-1)}{(t^2+1)^2}\ .$$

Da esse si ricava che il grafico della curva è quello rappresentato in fig. 16.

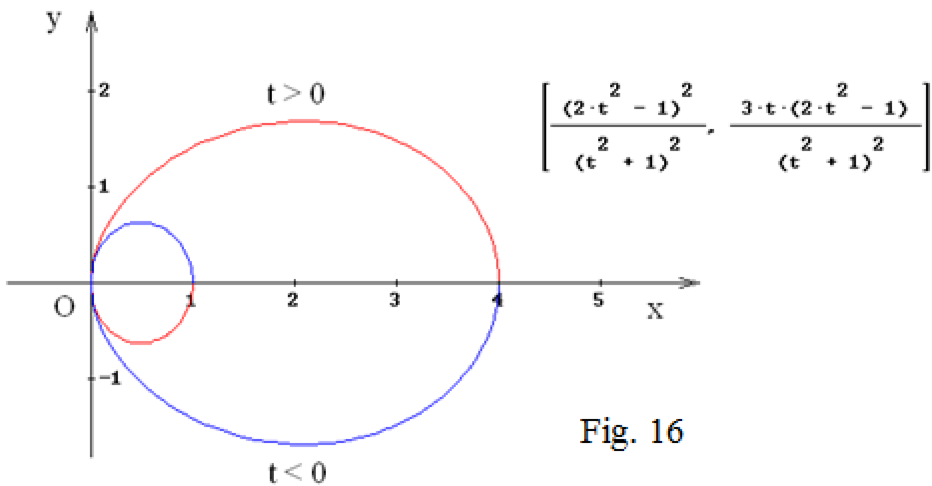


Fig. 16

Voglio ora calcolare il raggio di curvatura della C^4 nell'origine 0 e il centro di curvatura. Ci sono al proposito formule di Analisi matematica, ma sono troppo lunghe; i metodi studiati ci permettono di trovare agevolmente il cerchio osculatore ad uno dei due rami lineari che passa per il punto O.

Ricordo che una parabola osculatrice la C^4 nel punto O è $C_2^{(O)}: 2x - y^2 = 0$. Considero il fascio di coniche $|C_2|^1$, costituito dalla $C_2^{(O)}$ e dalla conica degenere $x(ax + by) = 0$, spezzata nella retta passante per il punto O e nella retta $x = 0$, tangente alla C^4 nel punto stesso. L'equazione del fascio è:

(*) $$|C_2|^1 : 2x - y^2 + x(ax + by) = 0,$$

ossia

(18) $$ax^2 - y^2 + bxy + 2x = 0.$$

Imponendo che la conica sia una circonferenza si hanno le condizioni $a = -1,\ \ b = 0$.

Si ricava così che la circonferenza che oscula la C^4 nel punto O ha l'equazione

(1) $$x^2 + y^2 - 2x = 0 .$$

Il raggio di curvatura è $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$, $\quad r = \frac{\sqrt{4}}{2}$,

$r = 1$;

il centro di curvatura è $C(-a/2, -b/2)$, da cui $C(1, 0)$.

46. Applicazioni delle trasformazioni per raggi vettori reciproci

Al parag. N. 65 abbiamo studiato la quartica

(1) $\quad C^4: \quad (x^2+y^2-2x)^2-xy=0 \quad$ con $\quad x>0 \quad$ e $\quad y>0$,

ossia (1') $\quad C^4: \quad (x^2+y^2)^2-4x(x^2+y^2)+4x^2-xy=0$.

La curva è razionale perché ha 3 punti doppi : l'origine degli assi O(0,0) e i
sono i punti ciclici $I_1(1,i,0)$, $I_2(1,-i,0)$.
Infatti, intersecando la curva con la generica retta $y=ix+h$ passante per il primo punto ciclico I_1 vediamo che l'equazione risolvente si abbassa di 2 gradi per qualsiasi valore di h, cioè la generica retta passante per il punto ciclico ha 2 intersezioni con la curva assorbite nel punto stesso. Possiamo quindi dire che I_1 è un punto doppio e così anche I_2 .
Vogliamo ora trovare le equazioni parametriche per mezzo di un metodo diverso, cioè per mezzo di una trasformazione della curva per raggi vettori reciproci :

$(2_1) \quad x=\dfrac{X}{X^2+Y^2}$, $\qquad (2_2) \quad y=\dfrac{Y}{X^2+Y^2}$.

Sostituendo nella (1') si ha:

(*)

$$\left[\frac{X^2+Y^2}{(X^2+Y^2)^2}\right]^2 - \frac{4X}{X^2+Y^2}\cdot\left[\frac{X^2+Y^2}{(X^2+Y^2)^2}\right] + \frac{4X^2}{(X^2+Y^2)^2} - \frac{XY}{(X^2+Y^2)^2} = 0$$

,

(*)

$$\frac{1}{(X^2+Y^2)^2} - \frac{4X}{(X^2+Y^2)}\cdot\frac{1}{(X^2+Y^2)} + \frac{4X^2}{(X^2+Y^2)^2} - \frac{XY}{(X^2+Y^2)^2} = 0\,,$$

da cui, semplificando, si ha

(3) $$4X^2 - XY - 4X + 1 = 0\ .$$

Si tratta di un'iperbole con un asintoto parallelo all'asse Y. Possiamo trovare facilmente le sue equazioni parametriche intersecando con la retta $X = t$.

Dalla (3) si ha:

(*) $$4t^2 - tY - 4t + 1 = 0\,,\ \rightarrow \qquad Y = \frac{4t^2 - 4t + 1}{t}\ .$$

Le equaz. parametriche dell'iperbole sono quindi:

(4) $$X = t\ \ , \qquad Y = \frac{(2t-1)^2}{t}\ .$$

Sostituendo nelle (2) si ha:

(*) $$x = t : \left[t^2 + \frac{(2t-1)^4}{t^2}\right]\ , \rightarrow x = t : \left[\frac{t^4 + (2t-1)^4}{t^2}\right], \quad \rightarrow$$

$$x = \frac{t^3}{t^4 + (2t-1)^4}\ .$$

Sostituendo le (4) nella (2_2) si ha:

(*) $$y = \frac{(2t-1)^2}{t} : \left[t^2 + \frac{(2t-1)^4}{t^2} \right] , \quad \rightarrow \quad y = \frac{t(2t-1)^2}{t^4 + (2t-1)^4} \quad .$$

Le equazioni parametriche della quartica (1) sono quindi :

(5) $$x = \frac{t^3}{t^4 + (2t-1)^4} \quad , \qquad y = \frac{t(2t-1)^2}{t^4 + (2t-1)^4} \quad .$$

Facendo variare t in un opportuno intervallo $(-t_1, +t_2)$ si ottiene il grafico di fig. 12 , pag. 96 .

47. Ancora sulla trasformazione per raggi vettori reciproci

Consideriamo la quartica di equazione

(1) $\quad C^4 : \quad (x^2+y^2)^2+3y(x^2+y^2)-4y^2+3x^2=0$.

Si riconosce subito che la curva è razionale perché ha 3 punti doppi: l'origine degli assi $O(0,0)$ e i punti ciclici $I_1(1,i,0)$, $I_2(1,-i,0)$.

Vogliamo trovare le equaz. parametriche della quartica con una trasformazione per raggi vettori reciproci:

$(2_1) \quad x=\dfrac{X}{X^2+Y^2}$, $\quad (2_2) \quad y=\dfrac{Y}{X^2+Y^2}$.

Sostituendo nella (1), la C^4 diventa:

(*)

$$\left[\frac{X^2}{(X^2+Y^2)^2}+\frac{Y^2}{(X^2+Y^2)^2}\right]^2+\frac{3Y}{X^2+Y^2}\cdot\left[\frac{X^2}{(X^2+Y^2)^2}+\frac{Y^2}{(X^2+Y^2)^2}\right]+$$

$$-\frac{4Y^2}{(X^2+Y^2)^2}+\frac{3X^2}{(X^2+Y^2)^2}=0, \qquad \text{da cui}$$

(*) $$\frac{1}{(X^2+Y^2)^2}+\frac{3Y}{(X^2+Y^2)^2}-\frac{4Y^2}{(X^2+Y^2)^2}+\frac{3X^2}{(X^2+Y^2)^2}=0 ,$$ e quindi

(3) $$3X^2-4Y^2+3Y+1=0 .$$

La (3) passa per il punto $P(0,+1)$ e quindi possiamo trovare facilmente le sue equazioni parametriche intersecandola con il fascio di rette

(4) $\qquad Y-1=t(X-0)$, ossia (5) $\qquad Y=tX+1$.

Sostituendo nella (3) si ha:

(*) $$3X^2-4(tX+1)^2+3(tX+1)+1=0 \ ,$$

(*) $$3X^2-4t^2X^2-4-8tX+3tX+3+1=0 \ ,$$

(*) $$(3-4t^2)X^2-5tX=0 \ .$$ Si ottiene

(6) $$X=\frac{5t}{3-4t^2} \ .$$

Dalle (5), (6) si ottiene :

(*) $$Y=\frac{5t^2}{3-4t^2}+1 \ ,$$ da cui (7) $$Y=\frac{3+t^2}{3-4t^2} \ .$$

Le (6), (7) sono le equaz. parametriche dell'iperbole che si ottiene per trasformazione dalla quartica (1) .

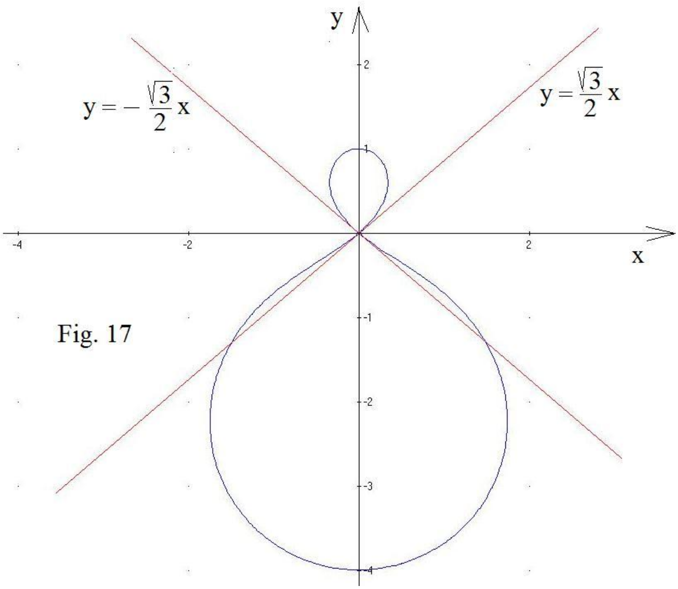


Fig. 17

Sostituendo le (6), (7) nell' equazione della trasformazione (2_1) si ha:

(*) $$x = \frac{5t}{3-4t^2} : \left[\frac{25t^2}{(3-4t^2)^2} + \frac{3t^2}{(3-4t^2)^2} \right], \qquad \rightarrow$$

$$x = \frac{5t}{3-4t^2} : \frac{25t^2 + (3+t^2)}{(3-4t^2)^2} \quad ,$$

quindi (8) $$x = \frac{5t(3-4t^2)}{25t^2 + (3+t^2)^2} \quad .$$

Sostituendo infine le (6), (7) nella (2_2) si ha :

(*) $$y = \frac{3+t^2}{3-4t^2} : \frac{25t^2 + (3+t^2)^2}{(3-4t^2)^2} \quad ,$$ da cui

(9) $$y = \frac{(3+t^2)\cdot(3-4t^2)}{25t^2+(3+t^2)^2} \quad .$$

Le (8), (9) sono le equazioni parametriche della nostra quartica . Facendo variare il parametro t in un opportuno intervallo $(-t_1, +t_2)$ si ottiene il grafico di fig. 17:

Teniamo presente che le equaz. parametriche della C^4 si possono ottenere anche intersecando la curva con il fascio di coniche $|C_2|^1$ passanti per i punti doppi $O(0,0)$, $I_1(1, i, 0)$, $I_2(1, -i, 0)$ e per il punto di coordinate particolarmente semplici $P(0,1)$ della curva. L'equazione del fascio è:

(*) $$|C_2|^1 : \qquad x^2 + y^2 + ax + by = 0 \quad .$$

Imponendo poi il passaggio per il punto P si trova $b = -1$ e l' equazione diventa:

(10) $$|C_2|^1 : \qquad x^2 + y^2 + tx - y = 0 \quad .$$

48. Equazioni parametriche della cardioide

Consideriamo la curva , detta cardioide, di equazione

(1) $$C^4 : \quad (x^2+y^2)^2+4y(x^2+y^2)-4x^2=0$$

Con il procedimento illustrato si trova che le sue equazioni parametriche sono:

(2) $$x=\frac{16t}{(4t^2+1)^2}\ , \qquad y=\frac{4(4t^2-1)}{(4t^2+1)^2}\ .$$

NOTA
Per uno studio più completo delle curve piane si può consultare il sito:

http://digilander.libero.it/santoppe →Fisica no problem→ ancora matematica→ →fisica
Geometria analitica e proiettiva, Vol. II

49. Involuzione dei diametri coniugati di una conica

Sia C una conica reale, non degenere e a centro . In coordinate omogenee la sua equazione generale è:

(1)
$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0 .$$

La polare di un generico punto improprio $P'(1, m, 0)$ del piano si dice diametro della conica, mentre il punto P' si dice polo . L'equazione dei diametri è :

(2) $$(a_{11} + a_{12}m + 0)x_1 + (a_{21} + a_{22}m + 0)x_2 + (a_{31} + a_{32}m + 0)x_3 = 0 \quad ,$$
ossia

(3) $$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + m(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) = 0 \quad .$$

Tutte le rette di questo fascio passano per un punto O , detto centro della conica .

Data la conica C, consideriamo due suoi diametri p' e q', essendo p' la polare del polo P'(1,m,0) e q' la polare del polo Q'(1,m',0). I due diametri si dicono coniugati se uno è la polare del punto improprio dell'altro .
Ossia, i due diametri si dicono coniugati se Q' giace sulla polare p' di P' (e quindi P' giace sulla polare q' di Q') .
In tal caso, il punto Q'(1,m',0) deve appartenere al diametro p' ; sostituendo nella (3) si avrà:

(*) $$a_{11} + a_{12}m' + m(a_{21} + a_{22}m') = 0 \quad ,$$
ossia

(4) $$a_{22}mm'+a_{12}(m+m')+a_{11}=0\ .$$

La (4) rappresenta l'involuzione dei diametri coniugati della conica .

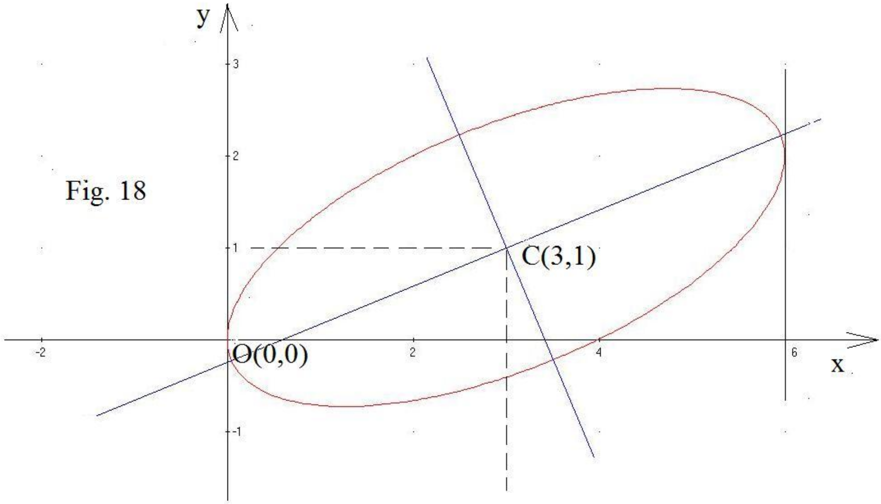
Se si vuole determinare gli asintoti , cioè i diametri coniugati di se stessi, basta porre nella (4) $m=m'$ e si ottiene la relazione, già nota per altra via :

(5) $$a_{22}m^2+2a_{12}m+a_{11}=0\ .$$

Se invece si vogliono ottenere gli assi della conica , cioè i diametri coniugati fra loro perpendicolari, basta porre nella (4) $m'=-1/m$ e si ottiene

(6) $$a_{12}m^2+(a_{11}-a_{22})m-a_{12}=0\ :$$

Le radici dell'equazione (6) ci danno i coefficienti angolari degli assi della conica . Sostituendo tali valori nell'equazione (3) dei diametri , si ottengono le equazioni dei due assi .



Esempio.
Trovare le equazioni degli assi dell'ellisse

(7) $$x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x = 0 \ .$$

Sostituendo nella (6) i suoi coefficienti si ha:

(*) $-m^2 + (1-3)m - 1 = 0$, da cui $m^2 + 2m - 1 = 0$,

che ha le radici $m_1 = -1 + \sqrt{2}$, $m_2 = -1 - \sqrt{2}$.

Sostituendo nell'equazione dei diametri, si ottengono i due assi:

(*) $x - y - 2 + (-1 + \sqrt{2})(-x + 3y) = 0$, da cui

(*) $x(1 + 1 - \sqrt{2}) + y(-1 - 3 + 3\sqrt{2}) - 2 = 0$.

Le equazioni dei due assi sono quindi :

(8) $$(2 - \sqrt{2})x + (3\sqrt{2} - 4)y - 2 = 0, \qquad e$$

(9) $$(2 + \sqrt{2})x - (3\sqrt{2} + 4)y - 2 = 0 \ .$$

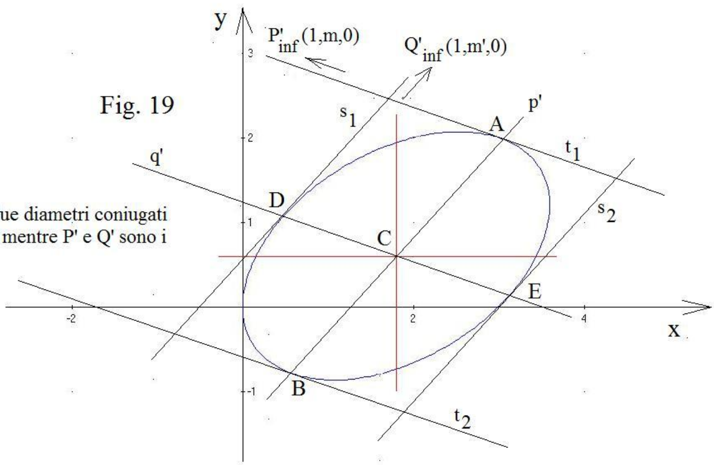
Il tutto è rappresentato nella fig.18 .

50. Costruzione dei diametri coniugati di una conica

Consideriamo, per accuratezza, l'ellisse di fig.19 di equazione

(1) $$2x^2 - 2xy + 3y^2 - 6x = 0$$

Il suo centro è il punto $C\left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)$.



Da un generico punto improprio $P'_{inf}(1, m, 0)$ conduciamo le tangenti t_1, t_2 all'ellisse e siano A e B i punti di tangenza. La retta $AB \equiv p'$ è la polare del punto improprio P', ossia è un diametro della conica, e come tale passa per il centro C . Indicheremo con $Q'_{inf}(1, m', 0)$ il suo punto improprio ,

Siano ora s_1, s_2 le tangenti all'ellisse parallele al diametro p' e siano D, E i punti di tangenza. La retta $DE \equiv q'$ è la polare del punto improprio Q' ed è il diametro coniugato a p' (ricordiamo che due

diametri si dicono coniugati quando ciascuno di essi è la polare del punto improprio dell'altro) .
Abbiamo così indicato il modo di costruire due qualsiasi diametri coniugati di una ellisse . Per l'iperbole si procede in modo identico.

51. Approfondimenti sul primo teorema di Steiner-Chasles

Vogliamo fare alcuni approfondimenti sul 1° teorema di Steiner-Chasles, già studiato nel Vol. I di Geometria Analitica e Proiettiva, pag. 107 . Ne ricordiamo l'enunciato :

"Dati due fasci proiettivi di rette, complanari, distinti e non prospettivi, il luogo dei punti di intersezione di rette corrispondenti è una conica che passa per i centri dei due fasci".
Fissato un rif. cartesiano Oxy, dimostriamo il teorema con un esempio (fig. 20) :

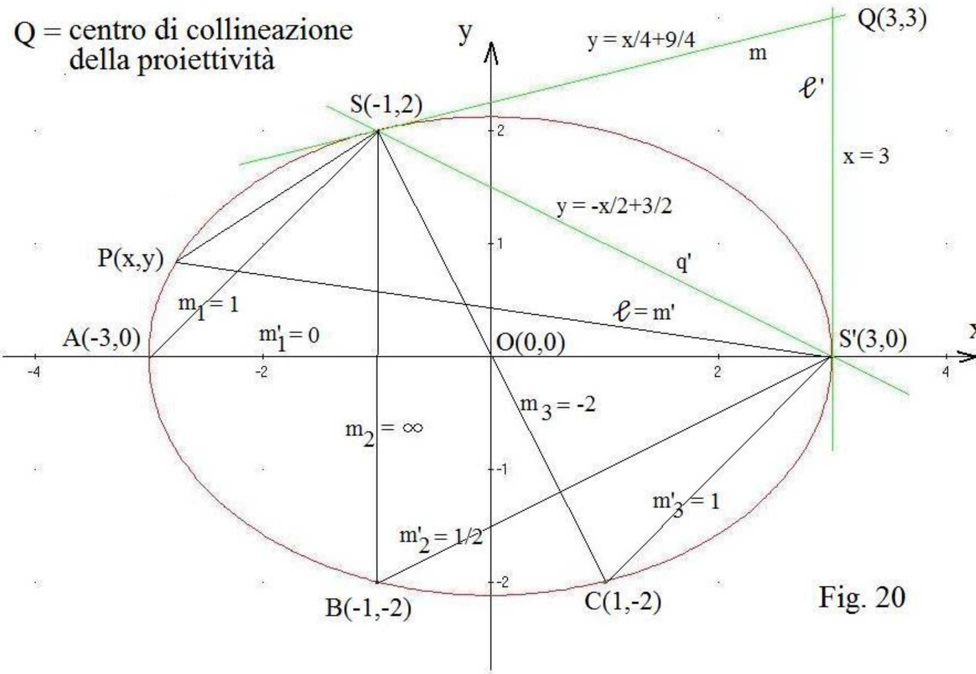


Fig. 20

Consideriamo due fasci proiettivi e non prospettivi di rette

$$S\ (A, B, C, P\ ...)\ \omega\ S'\ (A, B, C, P\ ...),$$

ove i punti hanno le coordinate cartesiane :

$$S(-1;2) \qquad , \qquad S'(3;0)$$
$$A(-3,0)\,,\quad B(-1,-2)\,,\quad C(1,-2)\ ,\quad P\ (x,y)\ .$$

I coefficienti angolari delle rette corrispondenti si leggono sul seguente prospetto

retta	SA	$m_1 = 1$	retta	S'A	$m'_1 = 0$
retta	SB	$m_2 = \infty$	retta	S'B	$m'_2 = +1/2$
retta	SC	$m_3 = -2$	retta	S'C	$m'_3 = 1$
retta	SP	m	retta	S'P	m' .

La proiettività è data dall'eguaglianza di birapporti

(1) $$(m_1, m_2, m_3, m) = (m'_1, m'_2, m'_3, m') \rightarrow$$

$$(1,\infty,-2,m) = (0,\frac{1}{2},1,m')$$

Ne segue

(2) $$(-2,m,1,\infty) = (0,\frac{1}{2},1,m') \quad \text{e quindi} \quad (-2,m,1) = (0,\frac{1}{2},1,m') \quad .$$

Sviluppando il birapporto si ricava l'equazione

(3) $$2mm' - m + m' + 1 = 0 \quad .$$

Troviamo ora i coefficienti angolari delle due rette proiettive corrispondenti passanti per il punto $P(x,y)$. Subito si trova

per la retta SP $m = \dfrac{y-2}{x+1}$, per la retta S'P $m' = \dfrac{y}{x-3}$

Sostituendo le espressioni di m ed m' nell'equazione (3) della proiettività si ricava agevolmente

(4) $$x^2 + 2y^2 = 9$$

cioè: il luogo dei punti di intersezione di raggi corrispondenti di due fasci proiettivi è una conica. Come è facile verificare, essa passa per i centri S ed S' dei due fasci.

Troviamo preventivamente la tangente all'ellisse (4) nel punto $S(-1;2)$, ricor-dando la formula generale

(5) $$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_S (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_S (y - y_0) = 0 ,$$

Poiché $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y$, sostituendo i valori delle coordinate del punto S, si trova che l'equazione della tangente è

(6) $$y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$$

La tangente nel punto $S'(3;0)$ ovviamente è $x = 3$.

Per la retta che passa per i centri S, S' dei due fasci si ha

(*) $y - 0 = m(x-3)$, $\rightarrow$ $2 = m(-1-3)$, $\rightarrow$ $m = -1/2$,

quindi

(7) retta SS' : $$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$.

Possiamo ora pensare che la retta SS' appartenga sia al fascio di centro S, e la chiameremo ℓ, che al fascio di centro S', e la chiameremo m'. Con le stesse lettere indicheremo il loro comune coefficiente angolare ; quindi $\ell=m'=-1/2$.

Troviamo la retta m' del fascio di centro S' che corrisponde alla retta ℓ del fascio di centro S (dobbiamo considerare i loro coefficienti angolari).. Essa è data dall'eguaglianza di birapporti che caratterizzano la proiettività. Si ha:

(8) $$(1,\infty,-2,\frac{1}{2})=(0,\frac{1}{2},1,m')\ ,\rightarrow\ (-2,-\frac{1}{2},1)=(0,\frac{1}{2},1,m')\ ,$$

(*) $$\frac{1+2}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1-0}{1-\frac{1}{2}}:\frac{m'-0}{m'-\frac{1}{2}}\ ,\quad \cancel{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3}}=2:\frac{2m'}{2m'-1}\ ,\rightarrow\ 2m'=2m'-1,$$

(*) $$0\cdot m'=-1\ ,\quad \text{e quindi}\quad m'=\infty .$$

Si conclude che alla retta $SS'\equiv x=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ del fascio di centro S corrisponde la retta $x=3$ del fascio di centro S' .

Supponiamo ora che la retta SS' appartenga al fascio di centro S', quindi $m'=-1/2$, e troviamo il coefficiente angolare m della retta del fascio di centro S , che ad essa corrisponde nella proiettività considerata. Questo coeff. è dato dalla seguente eguaglianza di birapporti:

(9) $$(1,\infty,-2,m)=(0,\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2})\ ,\rightarrow\ (-2,m,1)=(0,\frac{1}{2},1):(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})\ ,$$

(*) $$\frac{1+2}{1-m}=\frac{1-0}{1-\frac{1}{2}}:\frac{-1/2}{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \quad , \quad \text{da cui il coefficiente} \quad m=\frac{1}{4} \ .$$

Nel fascio di centro S ad esso corrisponde la retta $y-2=\frac{1}{4}(x+1)$,

cioè la retta (10) $$m\ :\ y=\frac{1}{4}x+\frac{9}{4},$$

che è la tangente all'ellisse nel punto $S(-1;2)$.

L'intersezione della tangente (10) e dell' altra tangente $x=3$ nel punto S' della ellisse è il punto $Q(3;3)$; esso è detto centro di collineazione della proiettività.

Infine, facciamo notare un fatto interessante : la polare del punto Q rispetto all'ellisse $x^2+2y^2-9=0$ è proprio la retta SS' di cui già abbiamo visto l'equazione .In coordinate non omogenee l'equazione generale di una polare è :

(11)
$$(a_{11}x'+a_{12}y'+a_{13})x+(a_{21}x'+a_{22}y'+a_{23})y+(a_{31}x'+a_{32}y'+a_{33})=0 \ .$$

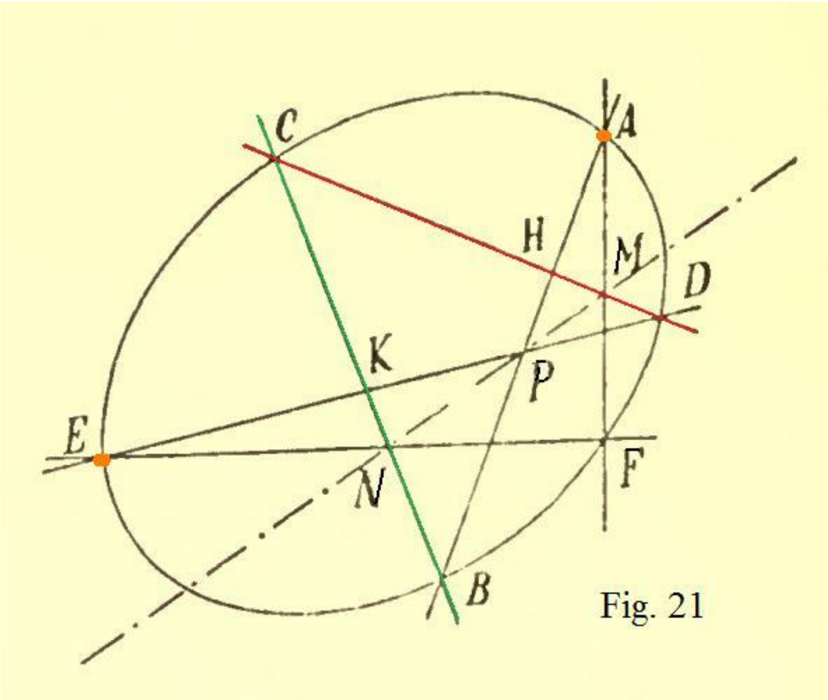
Sostituendo le coordinate del punto $Q(3;3)$ si ha:

(*) $$(3+0+0)x+(0+6+0)y+(0+0-9)=0 \ , \quad \text{da cui}$$

(12) $$x+2y-3=0, \qquad \text{ossia} \qquad y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \ .$$

Abbiamo così trovato l'equazione della retta passante per i centri S e S' dei due fasci di rette proiettive.

52. Altra dimostrazione del teorema di Pascal



Sia ABCDEF un esagono semplice inscritto in una conica (fig. 21); le tre coppie di lati opposti sono rispettivamente il 1° e 4° lato, il 2° e 5°, il 3° e 6°, come viene chiarito nel seguente prospetto

AB DE	BC EF	CD FA
1ª coppia	2ª coppia	3ª coppia

Poniamo $AB \cap DE = P$, $BC \cap EF = N$, $CD \cap FA = M$.

Vogliamo dimostrare che i punti P , M, N sono allineati.

Consideriamo i due fasci di rette di centri A ed E e da questi proiettiamo gli altri quattro punti C, B, D, F.

Per il teor. di Steiner, la condizione necessaria e sufficiente affinché i sei punti appartengano ad una conica è che i due fasci siano proiettivi, cioè siano collegati dall'equazione

(1) $$A(CBDF) = E(CBDF).$$

Intersechiamo il primo fascio con la retta CD e il secondo con la retta CB.

Poiché il birapporto rimane invariato per operazioni di proiezione e sezione, dalla (1) si ha la proiettività:

(2) $$(CHDM) = (CBKN) ,$$

dove H, M e K, N sono i punti di intersezione con le due rette.

La (2) ci dice che le due punteggiate CD e CB sono prospettive, perché il punto C è unito. Ne segue che le rette congiungenti punti omologhi HB , DK ed MN passano per uno stesso punto P ; in altre parole, il punto P, intersezione delle prime due rette, si trova allineato con i punti M ed N.

Dallo prospetto dato all'inizio, si vede che questi punti P, N, M sono i punti di intersezione delle coppie di lati opposti dell'esagono semplice ABCDEFA.

<u>Il teorema di Pascal è così dimostrato</u>.

53. Centro di collineazione di due fasci proiettivi di rette

Consideriamo due fasci proiettivi di rette complanari, distinti, non prospettivi e siano S ed S' i loro centri . Il 1^o teorema di Steiner-Chasles, già studiato nel Vol. I di Geometria analitica e Proiettiva pag. 107, dimostra che:
" Il luogo dei punti di intersezione di rette corrispondenti è una proiettività che passa per i centri dei due fasci ".

Per chiarezza riferiamoci ai fasci di centri $S(-1,2)$ ed $S'(3,0)$ già esaminati al parag. N. 75, dove abbiamo indicato che il centro di collineazione della proietti-vità è il punto Q di intersezione delle tangenti all'ellisse nei centri stessi .
Vogliamo indicare un altro procedimento per trovare il suddetto centro (fig. 22).

Per memorizzare facilmente ogni coppia di rette da considerare, indicheremo le rette con i loro coefficienti angolari; quindi scriveremo:

- retta $SA = m_1$, retta $S'B = m_2'$, $m_1 \cap m_2' = B_0'$,
- retta $S'A = m_1'$, retta $SB = m_2$, $m_1' \cap m_2 = B_0$,
- retta $SA = m_1$, retta $S'C = m_3'$, $m_1 \cap m_3' = C_{0\infty}'$,
- retta $S'A = m_1'$, retta $SC = m_3$, $m_1' \cap m_3 = C_0 \equiv O$.

Passando ai calcoli si ha:

(1) $m_1 : \ x - y = -3$, $m_2' : \ x - 2y = 3$, quindi $B_0'(-9,-6)$;

(2) $m_1' : \ y = 0$, $m_2 : \ x = -1$, quindi $B_0(-1;0)$;

(*) retta $B_0'B_0 : \ -6x + 8y = 6$ e si verifica subito che essa passa per $Q(3;3)$.

Troviamo un'altra retta passante per il centro Q.

(3) $m_1 : \; x - y = -3$, $\quad m_3^{'} : \; x - y = 3$, quindi $C_{0\infty}^{'}(1;1,0)$;

(4) $m_1^{'} : \; y = 0$, $\quad m_3 : \; y + 2x =$, quindi $C_0 \equiv O = (0;0)$;

(*) retta $OC_{0\infty}$: $y = x$ e si verifica subito che anche essa passa per $Q(3;3)$.

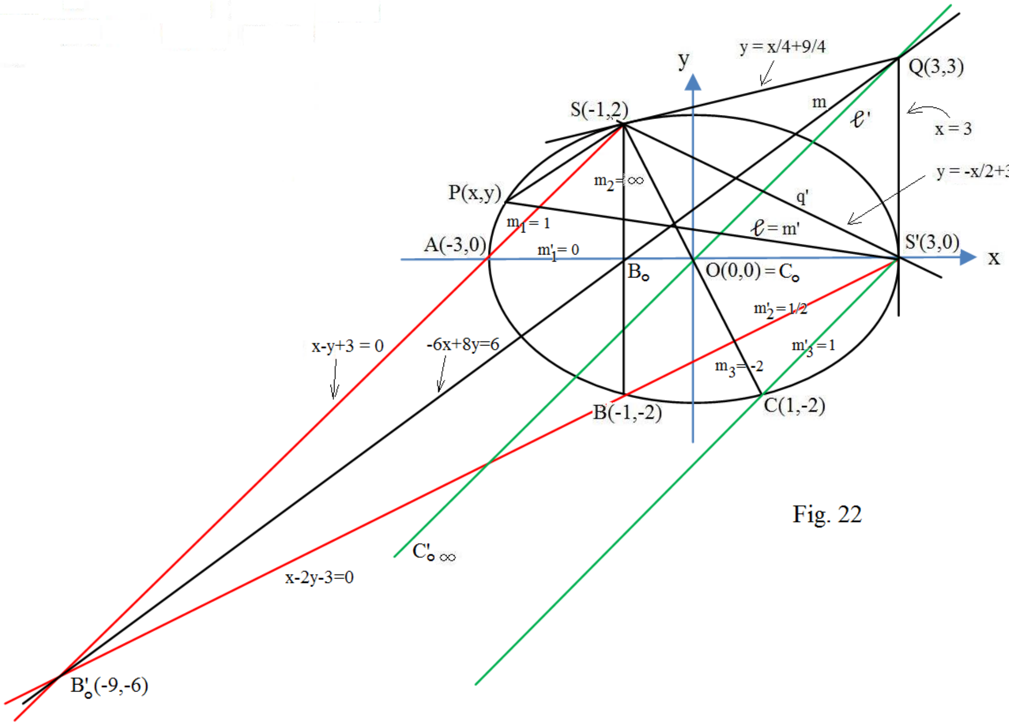


Fig. 22

Abbiamo così provato che il centro di collineazione della proiettività è il punto di intersezione delle rette $B_0^{'}B_0$ e $C_{0\infty}^{'}C_0$.

Problemi storici

54. Concoide del cerchio o Lumaca di Pascal

Dato un riferimento cartesiano Oxy, si consideri nel semipiano $x \geq 0$ una circon-ferenza di raggio R, tangente nell'origine O all'asse y . Dal punto O si conduca una semiretta s che intersechi la circonferenza in un punto P e si prenda su s un segmento di lunghezza $\overline{PQ} = \ell$. Si trovi l'equazione del luogo descritto dal punto Q al ruotare della semiretta attorno al punto O .

Svolgimento

Siano (x,y) le coordinate cartesiane del punto Q, quindi Q(x,y) , e sia A il punto di intersezione della circonferenza con il semiasse x . Se consideriamo un riferimento polare (ρ, φ) di origine O associato al riferimento cartesiano, si ha:

$$\overline{OQ} = \rho \ \text{ e } \ AOP = \varphi, \quad \text{ ove } \ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Per il 2^o teor. sui triangoli rettangoli si ha:

(1) $\qquad OP = OA\cos\varphi$, e quindi $\quad \overline{OP} = 2R\cos\varphi$.

Inoltre

(2) $\qquad \overline{OQ} = \overline{OP} + \overline{PQ}$, da cui $\quad \rho = 2R\cos\varphi + \ell$.

Se ora indichiamo con H la proiezione ortogonale del punto Q sull'asse x si ha:

(3) $\qquad \overline{OH} = \overline{OQ} \cdot \cos\varphi$ e in coord. cartesiane $x = \rho\cos\varphi$.

Si ricava $\quad \cos\varphi = x/\rho$, e sostituendo nella (2) otteniamo

(4) $\qquad \rho = \dfrac{2Rx}{\rho} + \ell$, $\quad$ da cui $\quad \rho^2 = 2Rx + \rho\ell$.

Ricordando l'espressione cartesiana di ρ abbiamo:

(5) $$x^2+y^2=2Rx+\ell\sqrt{x^2+y^2}\ ,$$ da cui $\ell\sqrt{x^2+y^2}=x^2+y^2-2Rx$.

Quadrando si ha $$\ell^2\cdot(x^2+y^2)\ =\ (x^2+y^2-2Rx)^2\ ,$$

e dopo alcuni facili passaggi abbiamo :

(6) $$(x^2+y^2)^2-4Rx(x^2+y^2)+x^2(4R^2-\ell^2)-\ell^2y^2=0$$.

La (6) è l'equazione della Lumaca di Pascal . Studiarla con i valori $R=\ell=2$.

Per $\ell=2R$ si ha la Cardioide: si ponga, per es., $R=2$ ed $\ell=4$.

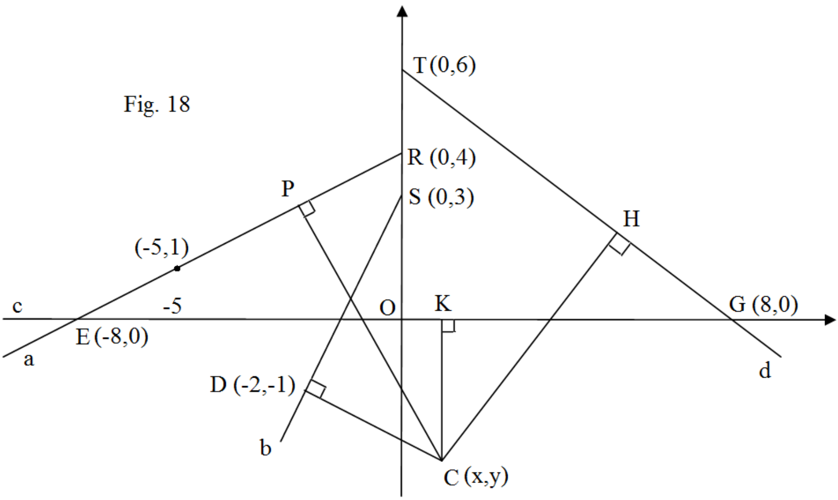
Per $\ell=kR$, dalla (2) si ha l'equazione polare della Lumaca di Pascal . Essa è

(7) $$\rho=R(2\cos\varphi+k)$$

55. Su un problema di Apollonio

Nell'introduzione al libro VII della "Collezione Matematica" il geometra Pappo (III secolo d. C.) ci fa conoscere il seguente famoso teorema: " Dati nel piano due sistemi di rette, trovare i punti C del piano tali che il prodotto delle distanze del punto C dalle rette del primo sistema sia uguale al prodotto delle distanze di C dalle rette del secondo sistema" .
Pappo ci dice che, nel caso di tre o quattro rette, il problema era stato risolto da Apollonio di Perge (III secolo a.C.), il quale aveva mostrato che il punto C sta su una sezione conica.
A distanza di secoli il problema di Apollonio è stato ripreso da Cartesio, nella sua Géometrie, il quale ne indica la soluzione seguendo i metodi della Geometria Analitica. Della versione cartesiana del problema parlano molti storici della Matematica; ma, che io sappia, non ci sono pervenuti esercizi che lo illustrano concretamente. Ciò si vuole fare in questa occasione.

Soluzione
Dato nel piano un riferimento cartesiano ortogonale monometrico Oxy, si consideri il sistema di rette $a: X-2Y+8=0$, $b: 2X-Y+3=0$ e un secondo sistema dato da $c: Y=0$, $d: X+4Y-24=0$ (fig. 18) .



Sia $C(x, y)$ il punto del piano da cui si prendono le distanze e indichiamo in generale le rette con le scritture $a: a_1X+b_1Y+c_1=0$, $b: a_2X+b_2Y+c_2=0$ e analoghe .

Eguagliando i prodotti delle distanze del punto C(x,y) dai due sistemi di rette si ha l'equazione del luogo; questa è:

(1)

$$\frac{(a_1x+b_1y+c_1)\cdot(a_2x+b_2y+c_2)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2+b_2^2}}=\frac{(a_3x+b_3y+c_3)\cdot(a_4x+b_4y+c_4)}{\sqrt{a_3^2+b_3^2}\cdot\sqrt{a_4^2+b_4^2}} .$$

Nel nostro caso si ha:

(2)
$$\frac{(x-2y+8)\cdot(2x-y+3)}{\cancel{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}}=\frac{y\cdot(3x+4y-24)}{\cancel{1\cdot\sqrt{25}}} .$$

Ne segue

- $2x^2-\underline{xy}+3x-\underline{4xy}+\underline{\underline{2y^2}}-6y+\underline{16x}-8y+24=\underline{3xy}+\underline{\underline{4y^2}}-24y$

  $\to$

(3) $$2x^2 - 8xy - 2y^2 + 19x + 10y + 24 = 0$$

La (3) ci dice che il luogo dei punti C(x,y) da cui vengono prese le distanze, eguagliandone i due prodotti, è una conica, e precisamente è un'iperbole equi-latera, essendo $a_{11} + a_{22} = 0$.
Con ciò il nostro asserto è dimostrato .

Vogliamo condurre un rapido studio dell' iperbole.
L'equazione dei diametri coniugati è

• $$\lambda(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + \mu(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}) = 0 \ ,$$ ossia

(4) $$\lambda(4x - 8y + 19) + \mu(-8x - 4y + 10) = 0 \ .$$

I punti impropri della conica sono dati dalle radici dell'equazione :

(5) $$a_{11}\lambda^2 + 2a_{12}\lambda\mu + a_{22}\mu^2 = 0 \ , \quad \to \quad 2\lambda^2 - 8\lambda\mu - 2\mu^2 = 0 \ .$$

Equaz. di secondo grado che ha le radici $\lambda = 2 \pm \sqrt{5}$, $\mu = 1$.
Sostituendo questi valori nella (4) si ottengono le polari dei punti impropri dell'iperbole, cioè i suoi asintoti :

(6) $$\begin{aligned} &4\sqrt{5}x - (20 + 8\sqrt{5})y + 19\sqrt{5} + 48 = 0 \\ &4\sqrt{5}x + (20 + 8\sqrt{5})y + 19\sqrt{5} - 48 = 0 \ . \end{aligned}$$

Le equazioni degli assi dell'iperbole si ottengono sostituendo nella (4) le radici dell'equazione .

(7) $$a_{12}\lambda^2 + (a_{22} - a_{11})\lambda\mu - a_{21}\mu^2 = 0 \ , \to \quad \lambda^2 + \lambda\mu - \mu^2 = 0 \ .$$

Procedendo nei calcoli come sopra fatto, si trovano le equazioni degli assi:

(8) $$\begin{aligned} &(20 + 4\sqrt{5})x - 8\sqrt{5}y + 19\sqrt{5} - 1 = 0 \\ &(20 - 4\sqrt{5})x + 8\sqrt{5}y - 19\sqrt{5} - 1 = 0 \ . \end{aligned}$$

56. La trisettrice di Ippia

(di Arnaldo Vicentini e Nazario Magnarelli)

E’ dato un quadrato ABCD, di lato $\overline{AB} = a$. Il vertice A coincide con l’origine di un riferimento cartesiano Axy e i vertici B e D cadono rispettivamente sugli assi x e y del riferimento.
Facciamo traslare in modo uniforme il segmento DC fino a farlo coincidere con il lato AB e nello stesso tempo facciamo ruotare di moto uniforme il lato AD sino a farlo coincidere con lo stesso lato AB. Trovare l’equazione del luogo geometrico γ dei punti di intersezione dei due segmenti durante il loro movimento. Esso è detto <u>trisettrice di Ippia.</u>
(L’enunciato del problema è tratto dal libro “ Le curve celebri”, di Luciano Cresci; pag. 9).

Indichiamo anzitutto la costruzione grafica del luogo geometrico (Fig. 1).

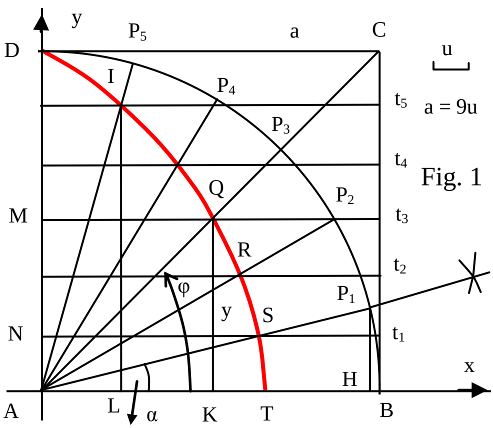


Fig. 1

A partire dal punto A dividiamo il lato AD del quadrato in sei parti uguali e dai punti di divisione conduciamo le parallele al lato AB; indicheremo queste parallele con le lettere t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 . A partire dal

punto B divi-diamo poi l'angolo retto BAD in sei angoli uguali, di ampiezza $\alpha = 15^o$ ciascuno, e siano P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 i punti di intersezione con l'arco BD di circonferenza. Preso l'angolo $BAP_1 = 15^o$, sia H la proiezione ortogonale del punto P_1 sull'asse x.
Per la lunghezza del lato del quadrato, si prenda $\overline{AB} = 9u$. Il punto P_3 è comune alla circonferenza e alla bisettrice del 1° quadrante; i punti P_2 e P_4 si trovano ricordando che $\sin 30^o = 1/2$ e $\cos 60^o = 1/2$. Il punto P_1 si trova dividendo l'arco BP_2 in 2 parti uguali.
I punti $S = AP_1 \cap t_1$, $R = AP_2 \cap t_2$, $Q = AP_3 \cap t_3$, ecc. appartengono al luogo geometrico γ. In seguito ci farà comodo considerare Q(x,y) come un punto generico del luogo.
Eseguendo costruzioni analoghe, possiamo infittire i punti della curva γ a nostro piacere e quindi possiamo tracciare la nostra curva con l'accuratezza desiderata.

Consideriamo ora un generico punto Q della curva γ; sia y l'ordinata del punto e K la sua proiezione ortogonale sull'asse x , quindi $\overline{KQ} = y$. Poniamo $KAQ = \varphi$ .Consideriamo ora due triangoli aventi un vertice sulla curva γ ed il lato opposto sull'asse x, es. i triangoli KAQ ed LAI. Per come abbiamo costruito la curva, si vede che il rapporto fra i lati KQ ed LI è uguale a quello dei corrispondenti angoli opposti. In particolare, quando $I \to D$ sussiste la proporzione:

$$y : a = \varphi : \pi/2, \quad \Rightarrow \quad (1) \quad \varphi = \frac{\pi y}{2a} \qquad \text{e} \qquad (2) \quad y = \frac{2a\varphi}{\pi}$$

Consideriamo ora il riferimento polare $(\rho\varphi)$ di polo A e asse polare coincidente con l'asse x . Per 1° teor. sui triangoli rettangoli, dal triangolo AKQ si ha $\overline{KQ} = \overline{AQ}\sin\varphi$, $\Rightarrow$ (3) $y = \rho\sin\varphi$.

Per la (2) possiamo scrivere: $y = \rho\sin\varphi = \dfrac{2a\varphi}{\pi}$, da cui

(4) $$\rho(\varphi) = \frac{2a}{\pi}\cdot\frac{\varphi}{\sin\varphi} \ .$$

La (4) ci dà l'equazione polare della trisettrice γ.

Vogliamo ora trovare le equazioni parametriche di γ.
Dal triangolo rettangolo KAQ si ha, per il 3° teor:

$$y = x\cdot tg\varphi, \ \Rightarrow \quad (5) \qquad x = \frac{y}{tg\varphi} \ .$$

Se ricordiamo che per la (2) si ha $y = 2a\varphi/\pi$, sostituendo nella (5) si trova

(6) $$x = 2a\varphi/\pi tg\varphi \ .$$

Le equazioni parametriche della trisettrice sono pertanto:

(7) $$x = \frac{2a}{\pi}\cdot\frac{\varphi}{tg\varphi} \qquad e \qquad y = \frac{2a}{\pi}\varphi \ .$$

Dalle equazioni parametriche (7) e dall'equazione polare (4) possiamo ricavare alcuni valori notevoli.

(8) Per $\varphi = \pi/2$ si ha $x = 0$ e $y = \rho = a$.

(9) Per $\varphi = \pi/4$ si ha $x = y = \dfrac{a}{2}$, $\rho = \dfrac{2a}{\cancel{\pi}}\cdot\dfrac{\cancel{\pi}}{4}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{2}}$, $\Rightarrow$ $\rho = a\sqrt{2}/2$.

(10) Per $\varphi \to 0$, dalla (4) si ha:

$$\lim_{\varphi \to 0} \rho(\varphi) = \frac{2a}{\pi} \lim_{\varphi \to 0} \frac{\varphi}{\sin \varphi} = \frac{2a}{\pi} \approx 0,6366a \, .$$

Se prendiamo $a = 9u$, per l'ascissa del punto T, intersezione della curva γ con l'asse x, si ha:

$$x_T = 2a/\pi \approx 5,73u \, , \quad \text{quindi} \quad \overline{AT} \approx 5,73u \, .$$

2^a parte

Costruita la curva γ con la necessaria accuratezza e detto Q un punto generico di essa, vogliamo vedere come si può dividere in tre parti uguali l'angolo $TAQ = \varphi$; per fare questa operazione non è necessario conoscere l'equazione polare di γ .

A tale scopo, si conduca dal punto Q la parallela all'asse x e sia M il punto di intersezione con l'asse y; dividiamo il segmento AM in tre parti uguali e sia $AN = AM/3$. Dal punto N si conduca la parallela all'asse x e sia S il punto di intersezione con la curva γ. La costruzione geometrica della curva ci fa capire che si ha $TAS = \frac{1}{3} TAQ$, ossia $TAS = \frac{1}{3} \varphi$.

Rimane così giustificato il nome di trisettrice dato al luogo geometrico.

3^a parte: la quadratrice di Dinostrato.

La trisettrice di Ippia, come ha dimostrato Dinostrato (350 a.C. circa), si presta ad operare la rettificazione della circonferenza e la quadratura del cerchio; in tal caso essa è nota con il nome di quadratrice di Dinostrato. Teniamo sempre presente che la curva non è costruibile con la sola riga e compasso.

Per dimostrare questa proprietà, facciamo vedere che se indichiamo con R(BD) l'arco BD rettificato e con ℓ la sua misura, sussiste la proporzione

(11) $$R(BD) : AB = AB : AT \quad .$$

Infatti, passando alle misure si ha:

(12) $$\ell : a = a : \frac{2a}{\pi} \;, \quad \ell = \frac{1}{2} a\pi \;, \quad \text{cioè} \quad \ell = \frac{1}{4} 2\pi a \,.$$

Quindi la proporzione (11) è esatta perché essa ci fa ritrovare esattamente la lunghezza di $1/4$ di circonferenza , ossia $\ell = C/4$.

La costruzione grafica del segmento di lunghezza ℓ si ottiene applicando il teorema di Talete. Infatti, scriviamo la (12) nella forma $\frac{2a}{\pi} : a = a : \ell$.

Per eseguire una buona costruzione geometrica del fascio di rette parallele, prendiamo $a = 8u$, anziché $a = 9u$; quindi $2a/\pi \approx 5u$. Si ha la fig. 2 seguente:

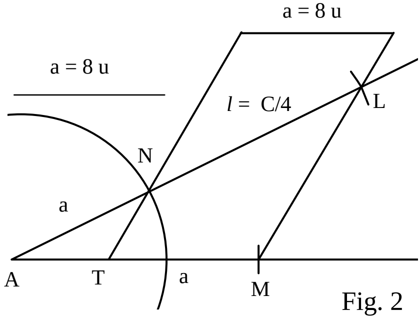


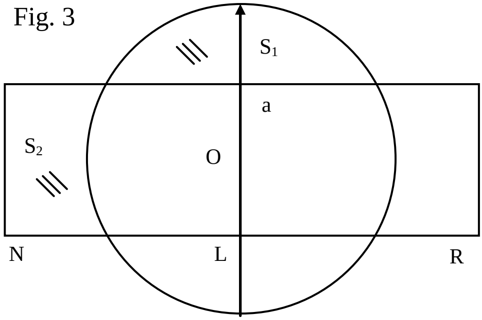
Fig. 2

il segmento NL della figura è il segmento che rettifica $1/4$ di circonferenza di raggio $a = 8u$. Con ciò abbiamo completato il problema della rettificazione della circonferenza.

Per quanto riguarda la quadratura del cerchio, ricordiamo che l'area di un cerchio è equivalente a quella di un rettangolo avente per altezza il raggio e come base un segmento NR pari a mezza circonferenza rettificata. Si ottiene subito la costruzione che risolve il quesito (fig. 3).

La figura ci dice che le superfici segnate S_1 ed S_2 sono equivalenti

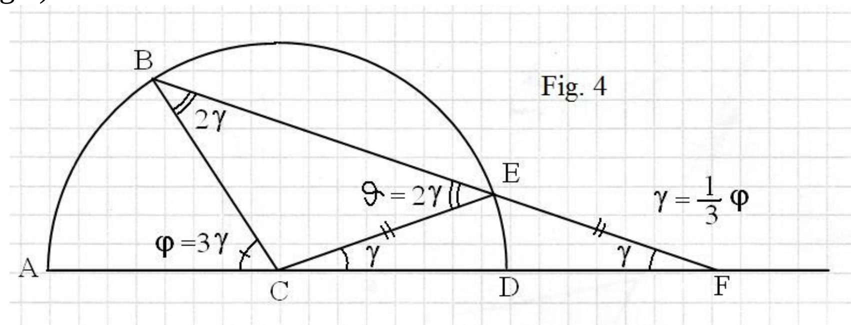
Fig. 3



Rimane da trasformare il rettangolo nel quadrato equivalente; la costruzione geometrica corrispondente si ottiene applicando il 1° o il 2° teor. di Euclide.

57. Trisezione di un angolo: altra dimostrazione

Consideriamo una semicirconferenza di centro C e di diametro AD (fig.4).



Preso un punto B su di essa, consideriamo l'angolo $A\hat{C}B = \varphi$ e supponiamo, per semplicità, che esso sia un angolo acuto. Vogliamo indicare una costruzione geometrica che ci permette di dividere l'angolo φ in tre parti uguali. Vedremo che anche questa costruzione non può essere eseguita con la sola riga e compasso, ma solo per tentativi.

Conduciamo dal punto B una retta; sia E il punto di intersezione con la semicirconferenza ed F il punto di intersezione con il prolungamento del diametro AD. Scegliamo l'inclinazione della retta in modo che il segmento EF sia uguale al raggio della semicirconferenza, quindi

$$EF = CE = \text{raggio} \ .$$

Consideriamo il triangolo (CEF); poiché esso è isoscele sulla base CF possiamo scrivere l'eguaglianza

(1) $$D\hat{F}E = D\hat{C}E = \gamma \ .$$

Inoltre, per il teorema dell'angolo esterno, l'angolo $C\hat{E}B$ è uguale alla somma degli angoli interni non adiacenti; quindi si ha

$$C\hat{E}B = E\hat{C}D + D\hat{F}E \ ,$$

e per la (1) possiamo scrivere

(2) $$C\hat{E}B = 2 \cdot D\hat{F}E \ .$$

Consideriamo ora il triangolo (CBF) ; per il teorema dell'angolo esterno si ha

(3) $$A\hat{C}B = C\hat{B}E + D\hat{F}E \ .$$

Ma il triangolo (CBE) è isoscele sulla base BE, avendo due lati uguali come raggi della semicirconferenza; possiamo quindi scrivere

$$C\hat{B}E = C\hat{E}B \ .$$

In tal modo la (3) diventa

(4) $$A\hat{C}B = C\hat{E}B + D\hat{F}E \ .$$

Ricordando l'espressione di $C\hat{E}B$ data dalla (2), la (4) diventa

$$A\hat{C}B = 2 \cdot D\hat{F}E + D\hat{F}E \,,$$

da cui $A\hat{C}B = 3 \cdot D\hat{F}E \,,$ o anche $A\hat{C}B = 3 \cdot D\hat{C}E \ .$

Più semplicemente possiamo scrivere

$$\varphi = 3 \cdot \gamma \,, \qquad \text{da cui} \qquad \gamma = \frac{1}{3}\varphi \ .$$

Se a partire dal punto A riportiamo tre volte l'arco *DE* sulla semicirconferenza, possiamo dividere l'arco *AB* in tre parti uguali.

c.v.d.

Equazioni di terzo grado

58. Teoria delle equazioni di terzo grado

Consideriamo un'equazione di terzo grado in forma ridotta:

(1) $$x^3 + px + q = 0.$$

Ponendo $x = u + v$ si trova che le sue radici sono date dalla formula risolvente

(2) $$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad ,$$

ove $u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$, $v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ con $uv = -\frac{p}{3}$.

Ognuno dei radicali cubici ha 3 valori, ma per x non si hanno 9 valori, perché, una volta fissato un valore u del primo radicale, resta determinato univocamente il valore v del secondo radicale; e ciò in base alla relazione $uv = -p/3$.

Precisamente, detto u_o un valore del primo radicale, i tre valori che esso può assumere si ottengono moltiplicando u_o per le radici cubiche dell'unita . Queste sono

(3) $$1, \qquad e^{i2\pi/3} \qquad e \qquad e^{-i2\pi/3} \ .$$

Ne segue che i tre valori del primo radicale sono:

(4) $$u_o\,, \qquad u_o \cdot e^{i2\pi/3}\,, \qquad u_o \cdot e^{-i2\pi/3} \ .$$

Detto poi $v_o = -\frac{p}{3u_o}$ il valore del secondo radicale corrispondente al valore u_o del primo, i suoi valori sono :

(*) $$-\frac{p}{3u_o}\ ,\qquad -\frac{p}{3u_o\cdot e^{i2\pi/3}}\ ,\qquad -\frac{p}{3u_o\cdot e^{-i2\pi/3}}\ ,$$

ossia

(5) $$v_o,\qquad v_o\cdot e^{-i2\pi/3}\ ,\qquad v_o\cdot e^{i2\pi/3}\ .$$

Le radici dell'equazione di 3^o grado $x^3+px+q=0$ sono pertanto:

(6) $$x_1=u_o+v_o,\qquad x_2=u_oe^{i2\pi/3}+v_oe^{-i2\pi/3},$$
$$x_3=u_oe^{-i2\pi/3}+v_oe^{i2\pi/3}\ .$$

Si dice discriminante dell'equazione (1) l'espressione

(7) $$\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\ .$$

Allora si verifica quanto segue

1) Se $\Delta>0$, l'equazione (1) ha una radice reale e due complesse coniugate;
2) se $\Delta=0$, la (1) ha una radice reale doppia e una reale semplice;
3) se $\Delta<0$, la (1) ha 3 radici reali semplici .

Nel caso $\Delta<0$, l'equazione $x^3+px+q=0$ ci consente di applicare la formula risolvente (2) solo se le radici sono particolarmente semplici, ma in generale ciò non è possibile e si presenta il "casus irriducibilis". In questa impossibilità, possiamo trovare le radici dell'equazione con un procedimento trigonometrico. Vedremo un esempio di applicazione.

59. Equazione di terzo grado con discriminante positivo

Risolvere la seguente equazione di 3^o grado in forma ridotta:

(1) $$x^3 - 6x - 9 = 0 \ .$$

Risoluzione. Vedremo che il suo discriminante Δ è positivo. Ricordiamo che la formula risolvente di un'equazione di 3^o grado è

(2) $$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \ .$$

Nel nostro caso essa ci dà:

(3) $$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} + \left(-\frac{6}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81}{4} + \left(-\frac{6}{3}\right)^3}} \ ,$$

(4) $$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} - 8}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81}{4} - 8}} \ ,$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}} \ ,$$

ne segue : $x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}}$, ossia $x = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2}{2}}$

Si ricava che una radice dell'equazione è $x = 2 + 1$, cioè $x = 3$. Abbassando di grado con la regola di Ruffini l'equazione $x^3 - 6x - 9 = 0$ si ha una equazione di 2^o grado (con $\Delta < 0$) , che ci dà due radici complesse coniugate .

60. Equazione di terzo grado con discriminante nullo

Consideriamo l'equazione di 3^o grado in forma ridotta

(1) $$x^3 - 3x + 2 = 0 \ .$$

Risoluzione. Applicando la formula risolvente si ha:

(2) $$x = \sqrt[3]{-\frac{2}{2} + \sqrt{\frac{4}{4} - \frac{27}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{2}{2} - \sqrt{\frac{4}{4} - \frac{27}{27}}} \quad , \quad \text{con} \quad \Delta = 0 \ .$$

Si trova : $x = \sqrt[3]{-1} + \sqrt[3]{-1}$, $x = -1 - 1$, ossia $x = -2$.

Vogliamo trovare le altre due radici dell'equazione. Si ha :

(3) $$u_o = 1 \ , \qquad u_1 = u_o e^{i2\pi/3}, \qquad u_2 = u_o e^{-i2\pi/3},$$

Per il secondo radicale si ha:

(4) $$v_o = u_o = 1 \ , \qquad v_1 = v_o e^{-i2\pi/3}, \qquad v_2 = v_o e^{i2\pi/3} \ .$$

Sviluppando gli esponenziali si trova che i valori delle radici dell'equazione sono

(5) $$x_o = -1 - 1 = -2, \qquad x_1 = u_1 + v_1 = 1, \qquad x_2 = u_2 + v_2 = 1 \ .$$

61. Equazione di terzo grado con tre radici reali

Risolvere la seguente equazione di 3^o grado in forma ridotta:

(1) $$x^3 - 7x + 6 = 0 \ .$$

Essa ha il discriminante $\Delta < 0$ e quindi 3 radici reali $[\,x = 1; 2; -3\,]$: siamo nel "casus irriducibilis". Ma non è necessario usare il procedimento trigonometrico per risolvere l'equazione ; infatti, poiché le sue radici sono particolarmente semplici, possiamo utilizzare la formula risolvente .

Risoluzione . Applicando la nota formula risolvente si ha in sequenza :

(2) $$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \ ,$$ da cui

* $$x = \sqrt[3]{-\frac{6}{2} + \sqrt{\frac{36}{4} - \frac{343}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{6}{2} - \sqrt{\frac{36}{4} - \frac{343}{27}}} \ ,$$

* $$x = \sqrt[3]{-3 + \sqrt{-\frac{100}{27}}} + \sqrt[3]{-3 - \sqrt{-\frac{100}{27}}} \ ,$$

(3) $$x = \sqrt[3]{-3 + \frac{i \cdot \sqrt{300}}{9}} + \sqrt[3]{-3 - \frac{i\sqrt{300}}{9}} \ .$$

Ponendo (4) $$\sqrt[3]{-3 + \frac{i \cdot \sqrt{300}}{9}} = a + i\sqrt{b}$$ si ricava

$$* \qquad -3+\frac{i\cdot\sqrt{300}}{9}=a^3+3a^2 i\sqrt{b}-3ab-ib\sqrt{b} \quad ,$$

$$* \qquad -3+\frac{i\cdot\sqrt{300}}{9}=a^3-3ab \ + \ ib(3a^2-b) \quad .$$

Eguagliando le parti reali e le parti immaginarie si ha :

$$(5) \qquad \begin{cases} a^2-3ab=-3 \\ \sqrt{b}(3a^2-b)=\sqrt{300}/9 \ , \end{cases} \quad \to \quad (6) \qquad b=\frac{a^3+3}{3a} \ .$$

Sostituendo la (6) nella (5_2) abbiamo :

$$* \qquad \sqrt{\frac{a^3+3}{3a}}\cdot\left(3a^2-\frac{a^3+3}{3a}\right)=\frac{\sqrt{300}}{9} \quad , \quad \to$$

$$\sqrt{\frac{a^3+3}{3a}}\cdot\left(\frac{8a^3-3}{3a}\right)=\frac{\sqrt{300}}{9} \quad .$$

Innalzando al quadrato si ha:

$$* \qquad \frac{(a^3+3)\cdot(8a^3-3)^2}{27a^3}=\frac{100}{27} \quad .$$

Ponendo $a^3=y$ si ha : (7) $\quad (y+3)(8y-3)^2=100y$, da cui

$$* \qquad (y+3)\cdot(64y^2-48y+9)=100y \ ,$$

$$* \qquad 64y^3-48y^2+9y+192y^2-144y+27-100y=0 \ ,$$

$$(8) \qquad 64y^3+144y^2-235y+27=0 \ .$$

Si verifica subito che questa equazione ammette la radice $y=1$. Poiché abbiamo posto $a^3=y$, si ricava per a il valore reale $a=1$.

Sostituiamo questo valore di a nella $b=\dfrac{a^3+3}{3a}$. Si ottiene $b=\dfrac{4}{3}$.

Sostituendo i valori di a e b nella (4) si ottiene

* $\sqrt[3]{-3+\dfrac{i\cdot\sqrt{300}}{9}}=1+i\sqrt{\dfrac{4}{3}}$, analogamente $\sqrt[3]{-3-\dfrac{i\cdot\sqrt{300}}{9}}=1-i\sqrt{\dfrac{4}{3}}$.

Sostituendo nella (3) si ottiene che una delle radici dell'equazione (1) ha il valore

(9) $$x_1=1+i\sqrt{\frac{4}{3}}+1-i\sqrt{\frac{4}{3}}$$, cioè $x=2$.

Abbassando di grado l'equazione $x^3-7x+6=0$ con la regola di Ruffini, si ha un'equazione di 2^o grado, con $\Delta>0$; essa ci dà le altre due radici dell'equazione .

62. L' equazione di terzo grado nel "casus irriducibilis"

Consideriamo ancora un'equazione di 3^o grado nella forma ridotta

(1) $$x^3 + px + q = 0 \ .$$

Come sappiamo la formula risolvente è

(2) $$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \ .$$

Vogliamo risolvere l'equazione nel caso in cui il suo discriminante sia negativo,

cioè (3) $$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0 \ .$$

In tal caso l'equazione ha tre radici reali, ma non è in generale risolubile con la formula (2) e si presenta il "casus irriducibilis". Le radici dell' equazione si possono allora trovare con un <u>procedimento trigonometrico</u> .

Infatti, nell'ipotesi (3) si ha necessariamente $p < 0$, per cui la quantità

(4) $$\lambda = \pm\sqrt{-\frac{4p}{3}}$$ risulta reale, essendo

$-\frac{4p}{3} > 0$.

Posto (5) $x = \lambda \operatorname{sen}\vartheta$, la (1) diventa

(6) $\lambda^3 \operatorname{sen}^3\vartheta + p\lambda \operatorname{sen}\vartheta + q = 0$, ossia $\lambda^2 \operatorname{sen}^3\vartheta + p \cdot \operatorname{sen}\vartheta + \frac{q}{\lambda} = 0$.

Poiché $\lambda^2 = -\frac{4p}{3}$, sostituendo nella formula precedente si ha :

* $-\frac{4}{3}p \cdot sen^3\vartheta + p \cdot sen\vartheta + \frac{q}{\lambda} = 0$, cioè $3p \cdot sen\vartheta - 4p \cdot sen^3\vartheta + \frac{3q}{\lambda} = 0$

Dividendo per p si ottiene:

(7) $$3 \cdot sen\vartheta - 4 \cdot sen^3\vartheta = -\frac{3q}{\lambda p} .$$

Se ricordiamo la formula di triplicazione del seno, $sen3\vartheta = 3sen\vartheta - 4sen^3\vartheta$, la (7)
diventa

(8) $$sen3\vartheta = -\frac{3q}{p\lambda} .$$

Questa formula ha senso perché si ha $\left|\frac{3q}{\lambda p}\right| < 1$. Infatti, dalla

(3) $$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$$ si ricava:

* $1 + \frac{4p^3}{27q^2} < 0$,$\rightarrow$ $1 < -\frac{4p^3}{27q^2}$, quindi $1 < (-\frac{4p}{3})\frac{p^2}{9q^2}$

ossia $1 < \lambda^2 \frac{p^2}{9q^2}$, da cui $\frac{9q^2}{\lambda^2 p^2} < 1$, infine $\left|\frac{3q}{\lambda p}\right| < 1$.

Dalla (8) segue $$3\vartheta = \arcsin\left(-\frac{3q}{\lambda p}\right) + 2k\pi ,$$ da cui

(9) $$\vartheta = \frac{1}{3}\arcsin\left(-\frac{3q}{\lambda p}\right) + \frac{2}{3}k\pi$$ con $k = 0,1,2$.

Con questi valori dell'angolo ϑ, le radici dell'equazione sono date dalla formula

(10) $$x = \lambda \operatorname{sen}\vartheta, \qquad \text{con} \quad \lambda = \pm\sqrt{-4p/3} \ .$$

<u>Esempio</u> Risolvere l'equazione

(11) $x^3 - 7x + 6 = 0$, cioè del tipo $x^3 + px + q = 0$

Prescindiamo dal fatto che, in questo caso particolare, essa si può scomporre agevolmente in fattori, e precisamente :

- $$x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x-2)(x+3) = 0 \ .$$

La formula risolvente è

- $$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \ .$$

In questo caso il discriminante dell'equazione è negativo ; infatti si ha :

(12) $$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{36}{4} - \frac{343}{27} = 9 - \frac{343}{27} = -\frac{100}{27}$$

mentre (13) $$\lambda = \pm\sqrt{-\frac{4p}{3}} = \pm\sqrt{+\frac{28}{3}} = \pm 2\sqrt{\frac{7}{3}} = \pm\frac{14}{\sqrt{21}} \ .$$

Riprendendo la (9) si ha:

* $$\vartheta = \frac{1}{3}\operatorname{arcsen}\left(-\frac{3q}{\lambda p}\right) + \frac{2}{3}k\pi \, , \qquad \text{con}$$

$k = 0,1,2$

* $$\vartheta = \frac{1}{3}\operatorname{arcsen}\left(-18 : \pm\frac{14\cdot 7}{\sqrt{21}}\right) + \frac{2}{3}k\pi \, ,$$

(14) $$\vartheta = \frac{1}{3}\operatorname{arcsen}\left(\mp 9\cdot\frac{\sqrt{21}}{49}\right) + \frac{2}{3}k\pi \, .$$

Calcoliamo la (14) con $k = 0$ e con il seno positivo. Si ha

(15) $$\vartheta = \frac{1}{3}\operatorname{arcsen}(0,8417) \simeq \frac{1}{3}57^{o}19' \simeq 19^{o}6' \quad .$$

Ne segue

(16) $$x = \lambda \operatorname{sen}\vartheta = \frac{14\cdot\sqrt{21}}{21}\cdot \operatorname{sen}(19^{o}6') \simeq 3.055\cdot 0.3272 \simeq 0,999$$

.

Una breve verifica ci dice che la radice esatta dell'equazione data è $x = 1$.

Se nella (14) poniamo $k = 1$ si trova :

(17) $$\vartheta = \frac{1}{3}\arcsin(0,8417) + \frac{2}{3}\pi = \frac{1}{3}(57^{o}6') + 120^{o} \;\; ; \text{ quindi } 139,1^{o} \quad .$$

Sostituendo in $x = \lambda \operatorname{sen}\vartheta$ si trova $x \approx 2,0002$. Si verifica che la radice esatta è $x = 2$.

Abbiamo così ritrovato, con ottima approssimazione, le radici dell'equazione, note fin dall'inizio. Ciò prova la bontà del procedimento trigonometrico studiato.

63. Risoluzione grafica delle equazioni di terzo grado

Voglio illustrare con un esempio un metodo generale per risolvere graficamente una equazione di terzo grado; es.

(1) $(2x-3)(2x^2+3x+1)=0$, ossia (2) $4x^3-7x-3=0$.

L'equazione ha tre radici reali, cioè $x=-1$, $x=-1/2$ e $x=3/2$. Sebbene siamo nel "casus irriducibilis", il nostro metodo è perfettamente valido.

Moltiplicando la (2) per $x \neq 0$ si ha

- $$4x^4-7x^2-3x=0;$$

ponendo $x^2=y$ si ha

- $$4y^2-7y-3x=0.$$

Aggiungo e tolgo $4x^2$ e ottengo:

- $$4x^2+4y^2-7y-4x^2-3x=0 .$$

Tenendo presente che $-4x^2=-4y$ si ottiene

(3) $$4(x^2+y^2)-11y-3x=0 ,$$

ossia

(4) $$x^2+y^2-\frac{3}{4}x-\frac{11}{4}y=0 .$$

In un riferimento cartesiano Oxy , la (4) è l'equazione di una circonferenza di centro $C\left(\frac{3}{8};\frac{11}{8}\right)$ e raggio CO . Questi elementi ci permettono di tracciare la curva (vedi Fig.11) .

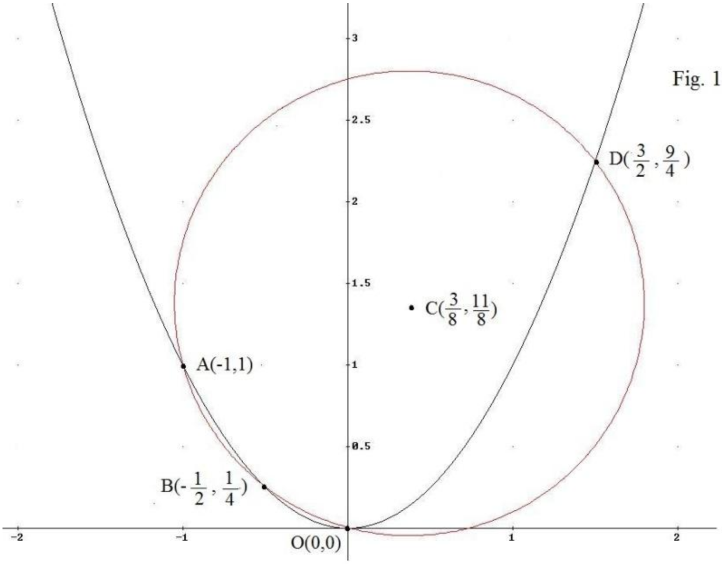


Fig. 11

Ricordando che si è posto $x^2 = y$ (parabola), abbiamo un sistema di equazioni che rappresentano due coniche ; precisamente

(5) $$\begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{3}{4}x - \frac{11}{4}y = 0 \\ y = x^2 \quad . \end{cases}$$

Le due curve si possono tracciare accuratamente e si trova che esse hanno tre punti reali di intersezione. Le ascisse di questi punti sono le radici dell'equazione data : $4x^3 - 7x - 3 = 0$.

Problemi vari

64. Un problema sulle età di due persone

Un individuo A ha il doppio dell'età che un altro individuo B aveva quando A aveva l'età che B ha adesso; e quando B avrà l'età che A ha adesso, allora essi avranno insieme 90 anni. Trovare le età delle due persone.

Sia x l'età attuale di A, e y l'età attuale di B . Possiamo dire:

* A aveva l'età che B ha adesso (cioè l'età y) $x-y$ anni fa,
e allora B aveva l'età $y-(x-y)$, cioè $2y-x$.
Abbiamo quindi la prima equazione

$$x = 2(2y-x) \ .$$

* B avrà l'età che A ha adesso (cioè l'età x) fra $x-y$ anni,
e allora A avrà l'età $x+(x-y)$, cioè $2x-y$.
Abbiamo quindi la seconda equazione:

$$x+(2x-y) = 90 \, .$$

Riducendo le due equazioni a forma normale si ottiene il sistema:

•
$$\begin{cases} 3x-4y=0 \\ 3x-y=90 \end{cases} .$$

Si ottiene subito la soluzione: $x = 40$ anni, $y = 30$ anni .

65. Il problema del cane e della lepre

Un cane appostato nel punto A vede una lepre nel punto B; con 12 salti la potrebbe raggiungere; ma la lepre, accortasi del cane, fugge lungo la retta AB.
Sappiamo che mentre il cane compie 4 salti, la lepre ne compie 5; ma un salto del cane è uguale a 2 salti della lepre. Quanti salti dovrà spiccare il cane per raggiungere la lepre? Nel frattempo quanti salti avrà spiccato questa?

<u>Prima soluzione</u>.
Il cane compie 4 salti di lunghezza x in un certo tempo T; nello stesso intervallo di tempo la lepre compie 5 salti di lunghezza y. Le velocità dei due animali saranno quindi:

(1) $$V_C = 4\frac{x}{T} \quad , \qquad V_L = 5\frac{y}{T} \ .$$

Poiché $x = 2y$ possiamo anche dire:

(2) $$V_C = 8\frac{y}{T} \ , \qquad V_L = 5\frac{y}{T}, \qquad \text{e quindi} \quad V_L = \frac{5}{8}V_C \ .$$

Poiché la velocità della lepre è minore della velocità del cane, essa, presto o tardi, sarà raggiunta.
Precisamente, supponiamo che il cane raggiunga la lepre dopo aver spiccato un numero di salti t, percorrendo così la distanza $L = tx$.
Nello stesso intervallo di tempo la lepre compie un numero di salti pari a $\frac{5}{4}t$, percorrendo così la distanza $\ell = \frac{5}{4}t \cdot \frac{x}{2} = \frac{5}{8} \cdot tx$ (ricordiamo che ogni salto della lepre è uguale alla metà di un salto del cane).
Il cane ha inoltre uno svantaggio iniziale di 12 dei suoi salti, pari alla distanza $\ell' = 12x$.

Nel momento in cui il cane raggiunge la lepre possiamo dire che si ha l'eguaglianza:

- distanza L = distanza ℓ + distanza ℓ', ossia

(3) $$tx = \frac{5}{8} \cdot tx + 12x \ , \quad \to \quad t - \frac{5}{8}t = 12$$. Ne segue

- $$\frac{3}{8}t = 12 \ , \quad \to \quad \frac{1}{8}t = 4 \ ,$$ da cui

(4) $$t = 32 \quad \text{salti del cane} \ .$$

Conclusione: il cane raggiunge la lepre nel tempo in cui ha spiccato 32 salti. In questo intervallo di tempo la lepre ne spicca $\frac{5}{4} \cdot 32$, cioè 40 salti.

<u>Seconda soluzione</u> (data da un collega di Arbizzano - VR).
Il cane inizialmente è in A e dista 12 suoi balzi dalla lepre, che è in B.
Dopo 8 salti il cane dista ancora 4 salti dal punto B, mentre la lepre si è allontanata da B di 10 suoi salti, equivalenti a 5 salti del cane. Ne segue che dopo 8 salti il cane dista dalla lepre di $4+5=9$ suoi salti. Ossia: in 8 salti il cane riduce la distanza dalla lepre di 3 suoi salti. Per vedere con quanti salti il cane può annullare la distanza dalla lepre, cioè può raggiungerla, basta risolvere la proporzione:

(*) $$8:3 = x:12 \ , \quad x = \frac{8 \cdot 12}{3} , \quad x = 32 \quad \text{salti del cane} \ .$$

Nel frattempo la lepre si sarà allontanata dal punto B di una distanza pari a 20 salti del cane, che equivalgono a 40 suoi salti.

66. Quando si viaggiava in carrozza

Una carrozza impiega un certo tempo per andare dal paese A al paese B; una seconda carrozza, che in 4 ore fa Km 7 meno della prima, impiega per fare il medesimo cammino 4 ore più dell'altra. Una terza carrozza, che in 3 ore fa km 12,25 di cammino più della seconda, impiega a percorrere quel cammino 7 ore meno di quest'ultima.
Trovare in quanto tempo ogni carrozza percorre quel cammino e quale è la distanza dei due paesi.

Soluzione
Sia $\overline{AB}$ la distanza fra i due paesi , y la velocità della prima carrozza e x il tempo che essa impiega a percorrere la distanza $\overline{AB}$. Possiamo quindi scrivere l'equazione:

(1) $$x \cdot y = \overline{AB} \quad .$$

Teniamo ora presente che la velocità di ogni carrozza è numericamente uguale allo spazio percorso nell'unità di tempo, cioè in 1 h .

La 2^a carrozza in 4 ore fa 7 km in meno della 1^a (quindi ha una velocità minore) . Il numero di km che essa percorre in meno in 1 h rispetto alla 1^a carrozza si trovano risolvendo la seguente proporzione

- $$4\ \text{h} : 7\ \text{km} = 1\ \text{h} : z_2 \ , \quad \rightarrow \qquad z_2 = \text{km}\,\frac{7}{4} \quad .$$

Pertanto la velocità v_2 della 2^a carrozza è

(2) $$v_2 = y - \frac{7}{4} \quad , \qquad \text{cioè} \qquad v_2 = \frac{4y-7}{4} \quad .$$

La 3^a carrozza in 3 ore fa 12,25 km in più della seconda. Il numero di km che essa percorre in più in 1 h rispetto alla 2^a carrozza si ricavano dalla proporzione

- $$3\ \text{h} : 12,25\ \text{km} = 1\ \text{h} : z_3\ , \quad \rightarrow \quad z_3 = \frac{12,25}{3}\ \text{km}\ .$$

Pertanto la velocità v_3 della 3^a carrozza è

- $$v_3 = \frac{4y-7}{4} + \frac{12,25}{3} = \frac{12y-21+49}{12} = \frac{12y+28}{12}\ ,$$

infine

(3) $$v_3 = \frac{3y+7}{3}$$

Possiamo quindi scrivere il seguente prospetto:

	Tempo	Velocità
1^a carrozza	x	y
2^a carrozza	x+4	$\frac{4y-7}{4}$
3^a carrozza	x+4-7 = x-3	$\left(3\cdot\frac{4y-7}{4}+12,25\right):3$

Possiamo così impostare il sistema:

(4) $$\begin{cases} \overline{AB} = x \cdot y \\ \overline{AB} = (x+4)\cdot(4y-7)/4 \\ \overline{AB} = (x-3)\cdot(3y+7)/3\ . \end{cases}$$

Uguagliando membro a membro la 1^a e la 2^a equazione, e poi la 1^a e
la 3^a equazione, si ha il sistema:

(5) $$\begin{cases} x \cdot y = \dfrac{(x+4)\cdot(4y-7)}{4} \\ x \cdot y = \dfrac{(x-3)\cdot(3y+7)}{3} \end{cases} .$$

Si vede subito che i termini di 2^o grado in $x \cdot y$ si annullano fra loro e con qualche passaggio si trova il sistema

(6) $$\begin{cases} 7x - 16y = -28 \\ 7x - 9y = +21 \end{cases} .$$

Sommando la prima equazione cambiata di segno alla seconda si trova

(7) $$7y = 49 .$$

Si ha così la soluzione $y = 7\dfrac{km}{h}$, $x = 12\ h$

Ne segue che la distanza fra i due paesi è

$$\overline{AB} = km(12 \cdot 7) , \quad \text{ossia} \quad \overline{AB} = 84\ km .$$

Poiché i tempi di percorrenza delle tre carrozze sono

- $T_1 = x$, $T_2 = x + 4$, $T_3 = x + 4 - 7 = x - 3$,

si trovano i tempi :

$$1^a \text{ carrozza: } T_1 = 12 \text{ ore}, \qquad 2^a \text{ carrozza: } T_2 = 16 \text{ ore},$$

$$3^a \text{ carrozza: } T_3 = 9 \text{ ore}.$$

Ha dato la soluzione di questo interessante problema l'amico Gianni Barbato di Latina , cultore di questioni Algebriche e Geometriche .

67. Un problema sull'uso delle frazioni

Vediamo ora un problema che è un ricordo dei lontani anni del Ginnasio.

Due operai, M ed N, lavorando insieme, compirebbero un lavoro in giorni d. Dopo giorni a l'operaio M si ammala e l'operaio N è costretto a lavorare da solo, terminando così il lavoro dopo altri b giorni. In quanti giorni, lavorando da soli, quei due operai farebbero il lavoro?
Soluzione.

I due operai in un giorno compiono $\frac{1}{d}$ del lavoro.

Nei primi a giorni i due operai compiono la frazione $\frac{a}{d}$ del lavoro; rimane da compiere la frazione di lavoro $1-\frac{a}{d}=\frac{d-a}{d}$, che il secondo operaio N compie da solo in altri b giorni.

Ne segue che il secondo operaio compirà in un giorno $\frac{1}{b}$ di questo lavoro, ossia compirà in un giorno una frazione di lavoro pari a

(1) $$F_2=\frac{1}{b}\cdot\frac{d-a}{d}.$$

Per compiere tutto il lavoro, cioè il lavoro unitario, il secondo operaio impiegherà un numero di giorni pari a

$$g_2=1:\frac{d-a}{bd}\,,\quad \text{ossia}\quad (2)\qquad g_2=\frac{bd}{d-a}\,.$$

Veniamo ora al primo operaio M. La frazione di lavoro F_1 compiuto in un giorno da questo operaio si ottiene sottraendo da $\frac{1}{d}$ la frazione di lavoro (1) compiuto in un giorno dal secondo operaio. Questa frazione giornaliera è data dall'espressione:

$$F_1 = \frac{1}{d} - \frac{d-a}{bd}, \quad \text{ossia} \quad (3) \quad F_1 = \frac{b-d+a}{bd}.$$

Per compiere da solo tutto il lavoro, cioè il lavoro unitario, il primo operaio impiegherà un numero g_1 di giorni pari a:

$$g_1 = 1 : \frac{a+b-d}{bd}, \quad \text{ossia} \quad (4) \quad g_1 = \frac{bd}{a+b-d}.$$

Se, per esempio, d = 16 giorni , a = 4 giorni e b = 18 giorni si trova che

l'operaio N farebbe da solo il lavoro in 24 giorni, mentre
l'operaio M farebbe da solo quel lavoro in 48 giorni.

68. Un problema difficile per la Camera dei Comuni

Un coniglio, stando a 40 m di distanza dalla sua tana, scorge , a 6 m dietro di sé, un cane che vuole raggiungerlo. Il coniglio fa dei salti lunghi m 1,65 ed il cane fa dei salti lunghi m 2,975. Ma mentre il cane fa due salti, il coniglio ne fa tre, a parità di tempo. A quale distanza dalla tana il coniglio viene raggiunto dal cane ?

<u>Soluzione</u>

Nello stesso intervallo di tempo t,

il coniglio percorre la distanza di $\text{m}\ 1,65 \cdot 3 = \text{m}\ 4,950$,

mentre il cane percorre la distanza di $\text{m}\ 2,975 \cdot 2 = \text{m}\ 5,950$.

Quindi il cane recupera 1 metro ogni due salti .

Per recuperare la distanza iniziale di 6 m il cane deve compiere quindi 12 salti, ossia deve percorrere la distanza di $\text{m}\ 2,975 \cdot 12 = \text{m}\ 35,7$.

Quindi il coniglio viene raggiunto dal cane quando la sua distanza d dalla tana sarà uguale a :

$$d = (40 + 6 - 35,7)\ \text{metri} = 10,3\ \text{metri} .$$

69. Problema del trifoglio

Una interessante applicazione dei concetti di intersezione e di unione di più insiemi si ha nella risoluzione del così detto "problema del trifoglio". Ecco il quesito .
In una Scuola di lingue si sono formati tre gruppi di studenti così divisi : 44 allievi studiano il francese, 26 l'inglese e 31 il tedesco.
Rappresenteremo i tre gruppi con tre diagrammi di Venn che indicheremo rispettivamente con le lettere A, B, C e li rappresenteremo con tre petali che si intersecano (fig. 19).
Fra questi allievi, però, ve ne sono

- 12 che studiano contemporaneamente francese e inglese (fr-ing) ,
- 15 che studiano contemp. francese e tedesco (fr-ted) ,
- 9 che studiano contemp. inglese e tedesco (ing-ted) .
- Vi sono poi 3 alunni che studiano tutte e tre le lingue .

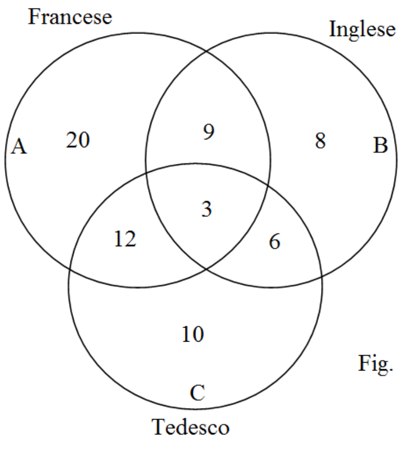


Fig. 19

Si vuol sapere quanti sono gli alunni di quella Scuola.

Tenendo conto dei 3 alunni considerati, possiamo specificare che :

- il gruppo (fr-ing) è formato da $3+\underline{9}=12$ alunni ,
- il gruppo (fr-ted) è formato da $3+\underline{12}=15$ alunni ,
- il gruppo (ing-ted) è formato da $3+\underline{6}=9$ alunni .

Il numero totale degli alunni della Scuola è dato quindi dalla seguente somma:

(1) $$20+8+10+3+9+12+6=68$$

Da questo prospetto si vede che

(1) nel petalo lingua francese ci sono $3+9+12=24$ alunni che studiano anche altre lingue. Pertanto studiano solo francese $44-24=20$ alunni .

(2) nel petalo lingua inglese ci sono $3+9+6=18$ alunni che studiano anche altre lingue. Pertanto studiano solo inglese $26-18=8$ alunni .

(3) nel petalo lingua tedesca ci sono $3+12+6=21$ alunni che studiano anche altre lingue. Pertanto studiano solo tedesco $31-21=10$ alunni .

Il numero totale degli alunni della Scuola è dato pertanto dalla seguente somma:

(4) $$N=20+8+10+3+9+12+6=68 \text{ alunni } .$$

70. Problema sul numero dei polli, galline e pulcini

Abbiamo speso 100 denari per acquistare polli (G), galline (g) e pulcini (p), per un totale di 100 pennuti . Sappiamo che un pollo costa 5 denari, una gallina 3 denari e tre pulcini costano 1 denaro.
Dire quanti polli, quante galline e quanti pulcini abbiamo comperato.

Soluzione
Sia x il numero dei polli, y quello delle galline e 3z quello dei pulcini : (infatti questi vengono venduti secondo multipli di tre) . Tenendo conto che z terne di pulcini costano z denari , possiamo scrivere il seguente sist. indeterminato di 1^o grado:

(1) $$\begin{cases} x+y+3z=100 \\ 5x+3y+z=100 \end{cases} , \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x+y=100-3z \\ 5x+3y=100-z \end{cases} .$$

Risolvendo con la regola di Cramer si trova facilmente:
(2) $x = 4z - 100$, (3) $y = 200 - 7z$.

Poiché deve essere $x > 0$ e $y > 0$
dalla (2) si ha $4z - 100 > 0$ e quindi $z > 25$,
dalla (3) si ha $200 - 7z > 0$ e quindi $z < \frac{200}{7} = 28,7$, ossia $z \leq 28$.

Poiché ogni z indica una terna di pulcini, si deve avere
(4) $75 < z \text{ pulcini } \leq 84$.

Ora i numeri 3z (cioè divisibili per 3) maggiori di 75 e ≤ 84 sono:
(5) $3z = 78, \ 81, \ 84$, cioè $z = 26, \ 27, \ 28$.

Ma per $z = 26$ si ha : $x = 4z - 100 =$, $y = 200 - 7z = 18$, $3z = 78$,
quindi abbiamo : 4 polli, 18 galline, 78 pulcini.

Per $z = 27$ si ha $x = 4z - 100 = 8$, $y = 200 - 7z = 11$, $3z = 81$,
quindi abbiamo : 8 polli, 11 galline, 81 pulcini .

Per $z = 28$ si ha $x = 4z - 100 = 12$, $y = 200 - 7z = 4$, $3z = 84$,
quindi abbiamo : 12 polli, 4 galline, 84 pulcini .

71. Le età di tre persone

Il prodotto delle età di tre persone è $P = 2450$ e la somma delle loro età è 64 anni. Trovare quanti anni può avere ciascuna delle tre persone.

<u>Soluzione</u> Si ha il sistema di 3^o grado seguente

(1) $$\begin{cases} xyz = 2450 \\ x + y + z = 64 \end{cases} .$$

Scomponendo in fattori primi il prodotto P si ha $P = 2450 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$.
Abbiamo quattro terne di numeri che ci danno questo prodotto. Esse sono:

(2) $$\begin{array}{lcl} 2, 25, 49 & & S = 2 + 25 + 49 > 64 \\ 7, 25, 14 & \text{esse danno le somme} & S = 7 + 25 + 14 < 64 \\ 5, 10, 49 & & S = 5 + 10 + 49 = 64 \\ 50, 7, 7 \ , & & S = 50 + 7 + 7 = 64 \ . \end{array}$$

Le prime due ipotesi sono da scartare poiché $S \neq 64$; le altre due sono accettabili . Quindi le età delle tre persone possono essere date dalle terne

(3) 5, 10, 49 o 50, 7, 7 .

Non ci sono altre ipotesi accettabili .

72. Somma dei primi n numeri triangolari

Ricordiamo che i numeri triangolari si ottengono nel modo seguente :

* 1, (1+2), (1+2+3), (1+2+3+4), (1+2+3+4+5),…..

L'ennesimo numero triangolare avrà l'espressione $N = \frac{n(n+1)}{2}$.

Per la somma S_{nt} dei primi n numeri triangolari si ha :

(1) $$S_{nt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k+k^2) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 .$$

Poiché $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ e $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n \cdot (n+1)(2n+1)}{6}$,

sostituendo si ha : (2) $$S_{nt} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} .$$

73. Problema sulle politropiche

Per finire, presentiamo tre problemi di Fisica ; essi ci danno l'occasione di affrontare tre interessanti argomenti di Fisica e nello stesso tempo ci chiamano a svolgere impegnativi calcoli matematici.

PROBLEMA . Un serbatoio avente il volume di 2750 litri contiene una massa d'aria alla pressione di 11 atm e alla temperatura ambiente di 300 °K. Il serbatoio viene collegato ad un pallone sgonfio di volume nullo mediante un tubo chiuso da una valvola. Aprendo la valvola, il pallone si gonfia fino a raggiungere il volume di 11.000 litri e la pressione di 2 atm. Calcolare la temperatura finale di equilibrio del gas.

Soluzione 1° Procedimento. Per l'equazione degli stati corrispondenti di un gas perfetto si ha:

(1) $$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \ .$$

Sostituendo i dati forniti dal problema si ha la relazione :

(2) $$\frac{11 \cdot 2,75}{300} = \frac{2 \cdot 13,75}{T_2} \ ,$$ da cui

$$T_2 = \frac{2 \cdot 13,75 \cdot 300}{11 \cdot 2,75} = \frac{2 \cdot 1375 \cdot 300}{11 \cdot 275} = \frac{2 \cdot 55 \cdot 300}{11 \cdot 11} = \frac{3000}{11} = 272,\overline{72} \ °K \ .$$

Si ha quindi l'abbassamento di temperatura : (2')
$T_1 - T_2 = 27,28 \ °K$.

2° Procedimento. L'espansione del gas, qualunque essa sia, si può considerare come una generica espansione politropica di equazione

(3) $pV^k = \cos t$, ossia $p_1 V_1^k = p_2 V_2^k$, e quindi:

(4) $$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^k = \frac{p_2}{p_1} .$$

Prendendo i logaritmi naturali di ambo i membri si ha:

(5) $k \cdot \ln\frac{V_1}{V_2} = \ln\frac{p_2}{p_1}$, $\rightarrow$ $k \cdot \ln\frac{2,75}{13,75} = \ln\frac{2}{11}$,

ossia

- $$k \cdot \ln(275/1375) = \ln(2/11)$$

Si ottiene $k \cdot \ln\frac{11}{55} = \ln\frac{2}{11}$, da cui $-1,609 \cdot k = -1,704$,

ossia

(6) $k = \frac{1704}{1609}$, alla fin fine $k = 1,06$.

L'equazione della politropica è pertanto

(7) $$pV^{1,06} = \cos t .$$

Essa ci dice che la trasformazione termodinamica politropica ottenuta si discosta poco da una trasf. isoterma . Tornando all'equazione, si ha

(8) $p_1 V_1^k = p_2 V_2^k$, con $k = 1,06$.

Sostituendo in essa le espressioni delle pressioni date dall'equazione di stato dei gas perfetti, $p = \frac{nRT}{V}$, si ha:

(9) $$\frac{\cancel{nR}\,T_1}{V_1} V_1^k = \frac{\cancel{nR}\,T_2}{V_2} V_2^k \quad , \quad \rightarrow$$

$T_1 V_1^{k-1} = T_2 V_2^{k-1}$.

Sostituendo i valori si ha: $300 \cdot 2750^{0,06} = T_2 \cdot 13750^{0,06}$

ossia $300 \cdot 1,608 = T_2 \cdot 1,731$, infine $T_2 = 272,38$ °K .

Questo valore della temperatura finale dell'aria coincide praticamente con il valore dato dalla (2) del primo procedimento.

Calcoliamo anche il lavoro compiuto dall'aria durante la nostra espansione. Ricordiamo il 1^o Principio della Termodinamica per una mole di gas e indichiamo con C_k il calore specifico molare nel caso della trasformazione politropica . Si ha:

(11) $dQ = dU + dL$, $\rightarrow$ $C_k \cdot dT = C_v \cdot dT + dL$. Ne segue

• $$dL = (C_k - C_v) \cdot dT \ , \qquad dL = \frac{R}{1-k} dT \ .$$

Integrando fra la temperatura iniziale e quella finale si ha:

$$L = \frac{R}{1-k} \int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{R}{1-k}(T_2 - T_1) = \frac{R}{1-k}(272,72 - 300)\,\text{Joule/mole}\,.$$

Il lavoro compiuto dall'aria durante la sua espansione è quindi :

(12) $$L = \frac{8,314}{-0,06}(-27,28) = +3780 \text{ Joule/mole} .$$

Fisica

74. Esercizi sui moti relativi.

(A. Signorini, 1° V p. 185; G. Caricato, p. 130; Appunti di Meccanica p. 75)

Un piano π' è sovrapposto ad un piano fisso π e ruota senza attrito su di esso attorno ad un punto O. Consideriamo due riferimenti cartesiani $T \equiv Oxyz$ e $T' = 0'x'y'z'$, aventi l'origine in comune ($O \equiv O'$) e i piani Oxy e $0'x'y'$ coincidenti con i piani π e π'. Ne segue che anche gli assi z e z' sono sovrapposti e perpendicolari ai piani stessi nel punto O.

Assumiamo $T \equiv Oxyz$ come terna fissa e $T' \equiv O'x'y'z'$ come terna mobile che ruota attorno all'asse z. Indicheremo i versori delle due terne rispettivamente con $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$ e con $\vec{i}_1', \vec{i}_2', \vec{i}_3'$ (fig. 6).

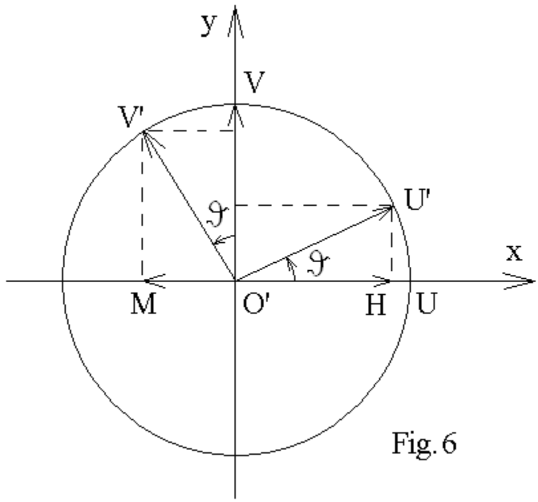


Fig. 6

Sia ω la velocità angolare dell'asse x' rispetto all'asse x e $\vartheta(t)$ l'angolo compreso fra questi due assi all'istante t. Supponiamo che all'istante iniziale i due assi siano sovrapposti, quindi $\vartheta(0) = 0$. Consideriamo ora un punto materiale $P(m)$ posto sull'asse x' e

vincolato al punto $O \equiv O'$ per mezzo di un filo inestensibile di lunghezza r_o. Anche esso si muove con velocità angolare ω descrivendo un circonferenza C di raggio r_o, che interseca l'asse x nel punto A.
All'istante $t = 0$, quando gli assi x e x' sono sovrapposti e il punto P si trova nel punto A, tagliamo il filo. Allora il punto materiale P(m) sfugge secondo la tangente alla circonferenza nel punto A (fig.7)

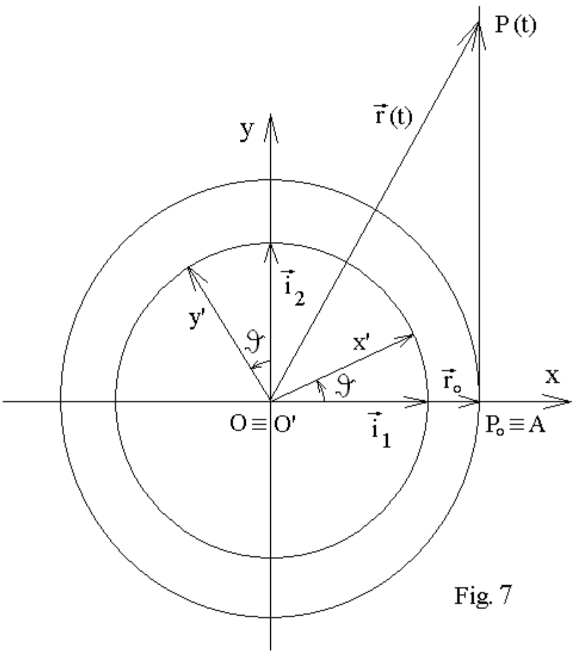


Fig. 7

Vogliamo trovare le equazioni parametriche del punto rispetto al riferimento fisso e a quello mobile.
Come sappiamo, per pura convenzione si dice moto assoluto il moto di P rispetto ad Oxyz e moto relativo quello rispetto ad $0'x'y'z'$.

Procediamo nella dimostrazione.
Poniamo $\overrightarrow{O'U} = \vec{i}_1$, $\overrightarrow{O'V} = \vec{i}_2$, $\overrightarrow{O'U'} = \vec{i}_1'$, $\overrightarrow{O'V'} = \vec{i}_2'$.

Indicando con H la proiezione ortogonale del punto U' sull'asse x all'istante t, si ha la relazione vettoriale

(1) $$\overrightarrow{O'U'} = \overrightarrow{O'H} + \overrightarrow{HU'}\ ,$$

dalla quale si ottiene: $\vec{i}_1{}' = \cos\vartheta\,\vec{i}_1 + \operatorname{sen}\vartheta\,\vec{i}_2\ .$

Analogamente, ponendo $\overrightarrow{O'V'} = \vec{i}_2{}'$, si ha:

- $\vec{i}_2{}' = -\operatorname{sen}\vartheta\,\vec{i}_1 + \cos\vartheta\,\vec{i}_2\ .$

Tra i versori delle due terne $Oxyz$ e $Ox'y'z'$ si hanno le relazioni date dal sistema:

(2) $$\begin{cases} \vec{i}_1{}' = \cos\vartheta\,\vec{i}_1 + \sin\vartheta\,\vec{i}_2 \\ \vec{i}_2{}' = -\sin\vartheta\,\vec{i}_1 + \cos\vartheta\,\vec{i}_2 \\ \vec{i}_3{}' = \vec{i}_3 \quad . \end{cases}$$

Applicando il teorema di Cramer si trovano le formule inverse:

(3) $$\begin{cases} \vec{i}_1 = \cos\vartheta\,\vec{i}_1{}' - \sin\vartheta\,\vec{i}_2{}' \\ \vec{i}_2 = \sin\vartheta\,\vec{i}_1{}' + \cos\vartheta\,\vec{i}_2{}' \\ \vec{i}_3 = \vec{i}_3{}' \quad . \end{cases}$$

Se ora all'istante $t = 0$ tagliamo il filo, un osservatore solidale con il riferimento fisso $Oxyz$ vede che il punto materiale m sfugge secondo la tangente alla circonferenza nel punto $P_O \equiv A$ muovendosi di moto rettilineo uniforme rispetto al riferimento stesso. Se indichiamo con $P(t)$ il punto occupato dalla punto di massa su questa retta all'istante t possiamo scrivere la relazione vettoriale:

$$\overrightarrow{OP}(t) = \overrightarrow{OP_O} + \overrightarrow{P_OP} \quad , \tag{4}$$

ossia

$$\vec{r}(t) = r_o\vec{i}_1 + \omega r_o t \cdot \vec{i}_2 \ . \tag{5}$$

Ne segue che le equazioni parametriche della traiettoria della particella rispetto al rif. $Oxyz$ sono:

$$x(t) = r_o \,, \qquad y(t) = \omega r_o \cdot t \ . \tag{6}$$

Se invece vogliamo determinare il moto della particella m rispetto al riferimento ruotante $O'x'y'z'$, dobbiamo tener presente che il modulo di un vettore posizione $\overrightarrow{OP}$ non cambia quando esso ruota nello spazio ordinario; cambiano solo le sue componenti. A tal fine basta sostituire nella (5) il vettore $\vec{r}(t)$ con $\vec{r}\,'(t)$ e i versori $\vec{i}_1$ e $\vec{i}_2$ con i versori $\vec{i}_1^{\,'}$ e $\vec{i}_2^{\,'}$. Si ottiene :

- $$\vec{r}\,'(t) = r_o(\cos\vartheta \cdot \vec{i}_1^{\,'} - \sin\vartheta \cdot \vec{i}_2^{\,'}) + \omega r_o t(\sin\vartheta \cdot \vec{i}_1^{\,'} + \cos\vartheta \cdot \vec{i}_2^{\,'}) \,, \qquad \text{da cui}$$

$$\vec{r}\,'(t) = r_o(\omega t \sin\vartheta + \cos\vartheta)\vec{i}_1^{\,'} + r_o(\omega t \cos\vartheta - \sin\vartheta)\vec{i}_2^{\,'} \ . \tag{7}$$

Tenendo presente che $\vartheta = \omega t$, le equazioni parametriche della traiettoria rispetto al riferimento ruotante $O'x'y'z'$ sono:

$$\begin{cases} x' = r_o\left[\omega t \cdot \sin(\omega t) + \cos(\omega t)\right] \\ y' = r_o\left[\omega t \cdot \cos(\omega t) - \sin(\omega t)\right] \ . \end{cases} \tag{8}$$

Quadrando e sommando, con facili calcoli mentali, si ha:

(9) $$x'^2 + y'^2 = r_o^2[\omega^2 t^2 + 1].$$

Passando ad un sistema di coordinate polari associato al riferimento $O'x'y'$ si ha:

- $\rho'^2 = r_o^2[\omega^2 t^2 + 1]$, $\rightarrow$ (10): $\rho' = r_o\sqrt{\omega^2 t^2 + 1}$.

Le (9), (10) ci dicono che la traiettoria del punto m rispetto al riferimento ruotante $O'x'y'$ è una circonferenza il cui raggio cresce con il tempo: ossia, la traiettoria è una curva aperta detta spirale (fig. 8).

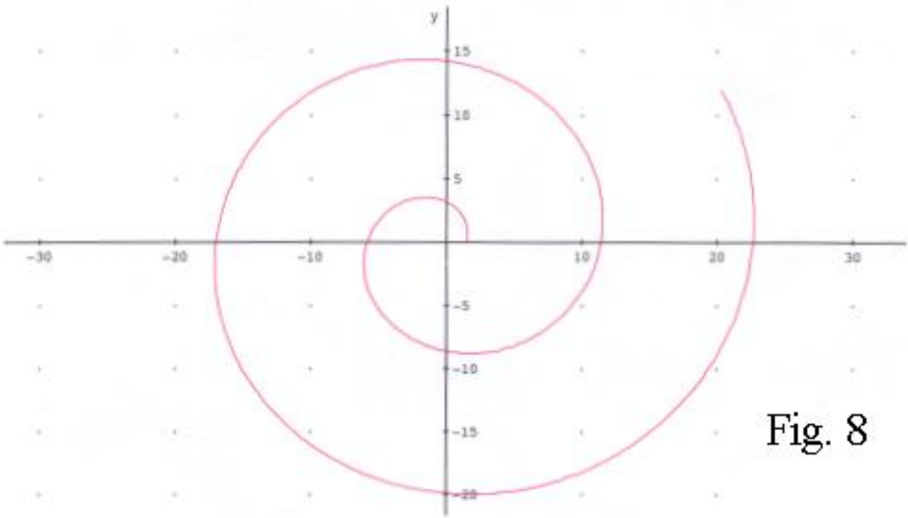


Fig. 8

Ricordiamo che le (8) sono le equazioni parametriche dell'<u>evolvente</u> della circonferenza C: $x = r_o \cos\omega t$, $y = r_o \mathrm{sen}\omega t$, mentre la (10) è l'equazione polare della stessa . Per uno studio approfondito di questa curva si può consultare il testo di A. Ghizzetti, Esercizi di Analisi mat. II, pg. 443 e il testo di
N. Magnarelli - C. Sintini, Equazioni differenziali, pg. 37.

Vogliamo ora sapere quale è la forza che agisce sulla particella per un osservatore solidale con il sistema ruotante. La risposta è che si tratta di una forza apparente data dalla somma della forza di trascinamento e della forza di Coriolis; quindi:

(11) $$\vec{F}_{app} = -m(\vec{a}_t + \vec{a}_{cor}) = -m(\omega^2 \overrightarrow{PO} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r)\,.$$

75. Moto rettilineo uniforme visto da una piattaforma ruotante

(S. Rosati, Problemi di Fisica I, pg. 51 – C. Ed. Ambrosiana) Una piattaforma circolare ruota con velocità angolare costante $\vec{\omega}$ attorno ad un asse verticale passante per il suo centro. All'istante $t=0$ una pallina viene lanciata orizzontalmente con velocità $\vec{v}_o$ dal centro della piattaforma; l'attrito che la pallina incontra è trascurabile, cosicché essa si muove, rispetto al suolo, di moto rettilineo uniforme con velocità $\vec{v}_o$. Si determini l'accelerazione della pallina, ad un generico istante t, rispetto ad un riferimento Oxyz solidale alla piattaforma.

Soluzione

Sia $S_A \equiv O(XYZ)$ un riferimento assoluto fisso rispetto al suolo ed $S_R \equiv Oxyz$ un sistema solidale alla piattaforma (rif. relativo) con l'origine nel centro e l'asse x che all'istante t = 0 del lancio della pallina è parallelo e concorde al vettore $\vec{v}_o$ (fig. 9).

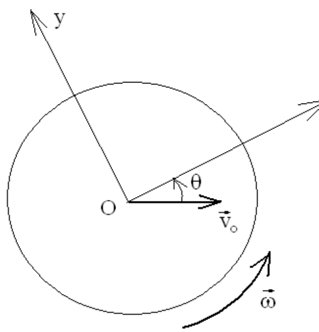
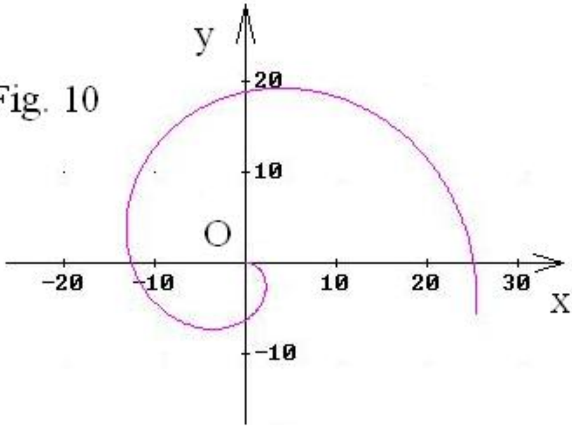


Fig. 9

All'istante t l'asse x forma un angolo $\vartheta = \omega t$ con la direzione di $\vec{v}_o$, mentre lo spazio percorso dalla pallina rispetto al suolo è $s = v_o t$. Ne segue che in questo istante le coordinate x,y della pallina rispetto al riferimento mobile S_R sono:

(1) $$x = v_0 t \cdot \cos \omega t, \qquad y = -v_0 t \cdot \sin \omega t.$$

Fig. 10



In fig. 10 è rappresentata il grafico della curva di equaz. parametriche (1), cioè il moto della pallina visto da un osservatore solidale al sistema mobile.

Derivando queste due equazioni rispetto al tempo otteniamo le componenti della velocità relativa $\vec{v}_R$; si ha:

(2) $$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \omega t - v_0 \omega t \cdot \sin \omega t,$$

$$\frac{dy}{dt} = -v_0 \sin \omega t - v_0 \omega t \cdot \cos \omega t \ .$$

Indicando con $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ i versori del sistema relativo $S_R \equiv Oxyz$, possiamo scrivere in forma vettoriale:

(3)

$$\vec{v}_R \equiv (v_o \cos \omega t - v_o \omega t \cdot \sin \omega t)\vec{i} + (-v_o \sin \omega t - v_o \omega t \cdot \cos \omega t)\vec{j} \ .$$

Derivando ulteriormente le (2) rispetto al tempo si ottengono le componenti dell'accelerazione relativa $\vec{a}_R$ della pallina. Si ha:

(4)
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\,2v_o\omega\cdot\sin\omega t - v_o\omega^2 t\cdot\cos\omega t\ ,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\,2v_o\omega\cdot\cos\omega t + v_o\omega^2 t\cdot\sin\omega t\ .$$

Quadrando e sommando membro a membro si ha

(5)
$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 = 4v_o^2\omega^2 + v_o^2\omega^4 t^2 = v_o^2\omega^2(4+\omega^2t^2)\ .$$

Ne segue che il modulo a_R dell'accelerazione con cui la pallina si muove rispetto al riferimento mobile $S_R \equiv Oxyz$ è:

(6)
$$a_R = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} = v_o\omega\sqrt{4+\omega^2t^2}\ .$$

<u>Altro procedimento</u>

Possiamo verificare le (4), e quindi le (6), con la nota formula che stabilisce la relazione fra le varie forme di accelerazione, cioè:

(7)
$$\vec{a}_A = \vec{a}_R + \vec{a}_{tr} + \vec{a}_{Co}\,.$$

L'accelerazione di trascinamento è l'acc. del punto della piattaforma che all'istante t viene occupato dalla pallina, cioè è l'accelerazione centripeta; quindi

(*)
$$\vec{a}_{tr} = -\omega^2\vec{r}\,, \qquad \text{con } \vec{r} = \overrightarrow{OP}\,.$$

L'accelerazione di Coriolis (o complementare) è: $\vec{a}_{Co} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R$.

Pertanto si ha: (8) $\vec{a}_A = \vec{a}_R - \omega^2 \vec{r} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R$.

L'accelerazione assoluta della pallina, ossia l'accelerazione rispetto al riferimento soli-dale con il suolo, è nulla, quindi $\vec{a}_A = 0$. Infatti la pallina si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $\vec{v}_o$ rispetto a questo riferimento. Ne segue che dalla (8) si ha:

(9) $$\vec{a}_R = \omega^2 \vec{r} - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R .$$

Troviamo ora la componente di $\vec{a}_R$ secondo l'asse x . A tale scopo moltiplichiamo scalarmente la (9) per il versore $\vec{i}$; si ottiene:

(10) $$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 x - \vec{i} \times (2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R) .$$

Teniamo presente l'espressione di un generico prodotto misto:

(11) $$\vec{a} \times (\vec{b} \wedge \vec{d}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ d_x & d_y & d_z \end{vmatrix} .$$

Possiamo allora scrivere:

(12) $$-\vec{i} \times (2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R) = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\omega \\ dx/dt & dy/dt & 0 \end{vmatrix} = -(-2\omega \cdot dy/dt) .$$

Ricordando la componente dy/dt della velocità relativa si ha:

(13) $$-\vec{i} \times (2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_R) = 2\omega \cdot (-v_o \sin\omega t - v_o \omega t \cdot \cos\omega t) .$$

Pertanto dalla (10) si ha:

(14) $$\left(\vec{a}_R\right)_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 x - 2v_o\omega\sin\omega t - 2v_o\omega^2 t\cos\omega t\,.$$

Ricordando l'espressione parametrica della x data dalla (1) si ha:

(15) $$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 v_o t\cdot\cos\omega t - 2v_o\omega\sin\omega t - 2v_o\omega^2 t\cos\omega t \;,$$

da cui

(16) $$\frac{d^2x}{dt^2} = -2v_o\omega\sin\omega t - v_o\omega^2 t\cos\omega t \;.$$

In modo analogo si trova :

(17) $$\frac{d^2y}{dt^2} = -2v_o\omega\cdot\cos\omega t \;+\; v_o\omega^2 t\cdot\sin\omega t \;.$$

Abbiamo così trovato per altra via le formule che ci danno le componenti dell'accelerazione $\vec{a}_R$ della pallina rispetto al riferimento mobile $S_R \equiv Oxyz$.