L’analisi di sensitività basata sulla perturbazione dell’ordine dei pesi applicata ai metodi SAW e TOPSIS

Maurizio Rosina

Marzo 2017

email: mau_degustare@yahoo.it

1. Introduzione

L’analisi di sensitività di un modello matematico è quel processo attraverso il quale viene studiato come varia la risposta di un modello al variare di qualcuno dei suoi dati di input, ciò al fine di discriminare tra fattori influenti, non influenti e sul grado di influenza. Spesso alcuni dei dati di ingresso al modello sono solo valori stimati o conosciuti in modo approssimativo - magari entro un determinato range di valori - e/o sono dati derivati da competenza, esperienza ed autorevolezza umana, ecco che allora l’analisi di sensibilità viene in aiuto per tentare di valutare la «robustezza» del modello.
Quando il modello è relativo ad un DSS (Decision Support Systems) nel quale più criteri decisionali sono coinvolti sempre più spesso ci si avvale dei metodi propri della Multi-Criteria Analysis, al fine di fornire al decision-maker, ovvero al decisore umano, un supporto informatico deterministico, razionale ed efficiente, in grado di individuare la migliore decisione tra quelle possibili e/o in grado di definire una graduatoria tra le possibili decisioni. I risultati forniti dai metodi propri della Multicriteria Analysis devono spesso essere analizzati utilizzando tecniche di analisi di sensitività, che mirano in primo luogo a migliorare il processo decisionale attraverso una valutazione della robustezza della graduatoria tra le decisioni individuata dal metodo utilizzato. Tale valutazione viene sovente condotta tramite analisi del tipo *what if*, ovvero analisi nelle quali si valuta come varierebbe l’output (la graduatoria delle decisioni) se cambiassero taluni dei valori assunti dai parametri decisionali iniziali. Tra i principali e più noti metodi della Multicriteria Analysis in grado di fornire graduatorie tra possibili decisioni vi sono sicuramente il SAW (Simple Additive Weighting), ovvero la semplice ponderazione additiva, ed il Topsis (Technique for Order of Preference by Similarity to Ideal Solution). Entrambi tali metodi forniscono una graduatoria tra le possibili decisioni in esame sulla base di un punteggio a loro assegnato elaborando i valori dei parametri decisionali forniti, e nel calcolo si avvalgono dell’informazione relativa ai parametri “peso” assegnati a ciascun criterio oggetto di valutazione. Il valore di ciascun peso rappresenta quindi l’importanza attribuita dal decisore

‘umano’ al criterio cui il peso è riferito, ed assume sovente la connotazione di un dato non ottenuto tramite un rigoroso e ripercorribile processo matematico/statistico, venendo quindi a rappresentare il dato di ingresso al modello di minore oggettiva determinazione.
Generalmente le analisi di sensititivà si avvalgono di tecniche tendenti ad alterare/variare il valore dei dati in ingresso al fine di valutare la robustezza del sistema, ovvero valutare la sensibilità dei risultati ottenuti a fronte di tali variazioni. Nel presente lavoro per l’analisi della sensitività si procederà invece secondo una via lievemente diversa. Non si cambierà/altererà il valore di alcun dato in ingresso, ma piuttosto si opererà in modo opportuno sui dati in ingresso di minore oggettiva determinazione, ovvero i pesi, non variandone i valori, ma tramite scambi di posto tra sequenze di valori di pesi, secondo una opportuna tecnica. L’idea fondamentale è quella di ottenere tramite uno dei metodi sopra citati (Saw o Topsis) una graduatoria iniziale tra le varie decisioni. Tale graduatoria iniziale sarà quella rispetto alla quale verranno confrontate le ulteriori graduatorie ottenute dopo opportuni scambi di posto tra sequenze di pesi.
Ottenuta la graduatoria iniziale tra le decisioni con uno dei metodi citati, il processo di analisi comincerà con l’ordinare i pesi per importanza decrescente, quindi si procederà ed operare ‘rimescolamenti’ di tali pesi ordinati tramite scambi di posto tra due opportune sequenze di pesi, con ciascuna sequenza composta da pesi adiacenti. Ciascun ‘rimescolamento’ varierà come i pesi sono distribuiti, ovvero varierà l’attribuzione dei pesi ai vari criteri, e dopo ciascun ‘rimescolamento’ verrà nuovamente applicato il metodo utilizzato per calcolare la graduatoria tra le decisioni, e si valuterà il numero di differenze tra tale graduatoria corrente e la graduatoria iniziale. Il processo di rimescolamento dei pesi e la relativa verifica di variazioni nella graduatoria corrente delle decisioni rispetto alla graduatoria iniziale verrà iterato in modo opportuno, ogni volta operando il ‘rimescolamento’ sull’iniziale ordinamento dei pesi. Tramite tale semplice tecnica si potranno effettuare analisi di sensibilità del tipo *what if*, in cui si valuta se e di quanto varierebbe l’output (la graduatoria tra le decisioni) a fronte di specifiche nuove configurazioni (variazione dell’input) dei pesi attribuiti ai vari criteri decisionali.

2. l’Analisi di Sensitività basata sulla perturbazione dell’ordine dei pesi

Nel presente lavoro si presupporrà di avere a disposizione, quali dati di ingresso, la matrice decisioni/criteri propria dei metodi SAW e Topsis, assieme al consueto vettore dei pesi, che attribuisce un valore di “importanza” ad ogni criterio. La fig. 1 riporta i dati iniziali del problema, ovvero le k decisioni, d_1, d_2, d_3 .., d_k, da valutarsi sulla base di n criteri, c_1, c_3 ,c_3 … c_n, a ciascuno dei quali è associato uno specifico peso w_1, w_2, w_3 … w_n, rappresentativo dell'importanza attribuita al criterio.

Pesi	w_1	w_2	w_3	…	w_n

decisioni/criteri	c_1	c_2	c_3	…	c_n
d_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	…	x_{1n}
d_2	x_{21}	x_{22}	x_{22}	…	x_{2n}
d_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	…	x_{3n}
…	…	…	…	…	…
d_k	x_{k1}	x_{k2}	x_{k3}	…	x_{kn}

Fig . 1 – i dati iniziali composti dalla tabella decisioni/criteri e dai pesi associati ai criteri

Applicando uno dei metodi citati (SAW o Topsis) a tali dati si perviene ad una **graduatoria iniziale tra la k decisioni** per punteggi non crescenti. Sia $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \ldots \geq d_k$ ***la graduatoria iniziale tra le decisioni*** ottenuta dal metodo utilizzato, graduatoria nella quale la decisione d_1 ha punteggio non inferiore alla d_2, la d_2 non inferiore alla d_3 e così via. Vogliamo determinare cosa accade in termini di variazioni nella graduatoria delle decisioni quando si "perturba" l'ordine dei pesi, ovvero quando si 'mescolano' (in modo opportuno) i pesi, in modo da assegnare ai vari criteri pesi diversi rispetto alla configurazione iniziale. A tal fine vogliamo giungere a definire un parametro St (Sensitività) che proponga un valore elevato quando piccole perturbazioni dell'ordine dei pesi hanno l'effetto di produrre un alto numero di variazioni nella graduatoria delle decisioni rispetto a quella iniziale. Più tale valore St risulterà elevato, più il sistema verrà valutato come instabile (poco robusto), in quanto piccole perturbazioni dei pesi (piccole variazioni dell'input) provocano elevate variazioni nella graduatoria delle decisioni (grandi variazioni dell'output). Vogliamo inoltre che il valore St risulti pari a zero nel caso che le perturbazioni dei pesi non producano variazioni nella graduatoria delle decisioni, e che St proponga valori bassi per grandi perturbazioni dei pesi che determinano analoghe grandi variazioni nella graduatoria delle decisioni.

Cominciamo con inizialmente ordinare gli n pesi per valori non crescenti, e supponiamo che ***l'ordinamento iniziale dei pesi*** ottenuto sia $w_1 \geq w_2 \geq w_3 \geq \ldots w_n$, ovvero il peso w_1 ha valore non inferiore a w_2, il w_2 valore non inferiore a w_3 e così via, ed adeguiamo le colonne della matrice decisioni/criteri a tale ordinamento, con ciò mantenendo la varie corrispondenze tra pesi così ordinati e i criteri cui ciascun peso è associato.

L'idea fondamentale è ora di creare delle perturbazioni nei pesi senza *alterarne i valori*, ma variandone l'ordinamento tramite scambi di posto tra sequenze di pesi. Tali scambi di posto tra sequenze di pesi avverranno senza apportare variazioni nelle posizioni delle colonne della matrice decisione/criteri, nel senso che dopo ogni scambio di sequenze di pesi si genererà una nuova e diversa attribuzione dei pesi ai criteri, e con tale nuova distribuzione dei pesi verrà ricalcolata la graduatoria delle decisioni (tramite lo stesso SAW o Topsis già precedentemente utilizzato per calcolare la graduatoria iniziale) ed il risultato ottenuto (ovvero la graduatoria corrente tra le decisioni) verrà confrontato con ***la graduatoria iniziale delle decisioni*** per calcolarne le eventuali differenze.

Nello scambio di posto tra pesi verranno considerati due parametri: il *numero di pesi adiacenti* (**wa**) che andranno a scambiarsi di posto con un analogo numero di (tutti diversi) pesi adiacenti, e la *distanza* (**dw**) tra le due sequenze di pesi adiacenti che si scambiano di posto (vedi fig. 2).

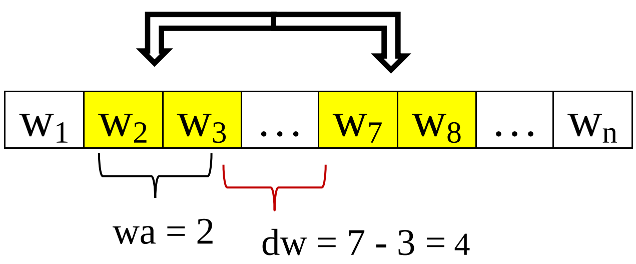

Fig. 2 – Un esempio in cui la sequenza di wa = 2 pesi adiacenti w_2 e w_3 , andrà a scambiarsi di posto con una analoga sequenza di pesi adiacenti, composta dai pesi w_7 e w_8 posta a distanza dw = 4 dalla prima.

Dati i pesi ordinati per valore non crescente $w_1 \geq w_2 \geq w_3 \geq \ldots \geq w_n$, la prima perturbazione sarà lo scambiare di posto sequenze composte da wa = 1 pesi adiacenti poste a distanza dw =1 tra di loro. I primi due pesi ad essere scambiati saranno quindi w_1 e w_2, giungendo ad una sequenza complessiva dei pesi del tipo w_2**,** w_1, $w_3 \ldots w_n$. Si noti che dopo gli scambi di posto il peso w_2 risulterà attribuito al primo criterio (c_1) ed il peso w_1 risulterà attribuito al secondo criterio (c_2). Con tale nuova distribuzione dei pesi verrà applicato nuovamente l'algoritmo di calcolo della graduatoria tra le decisioni (calcolo della graduatoria corrente), e verranno calcolate quante (eventuali) sono state generate dalla perturbazione dei pesi *rispetto alla graduatoria iniziale*. Il procedimento continuerà riprendendo il vettore descrittivo *dell'ordinamento iniziale dei pesi* (quello ordinato per valori non crescenti), ed iterando la precedente operazione di scambio, ma questa effettuandola avanzando di una posizione nel vettore dei pesi ordinati, ovvero scambiando il peso w_2 con il peso w_3, giungendo ad una sequenza complessiva dei pesi pari a w_1, w_3, w_2, w_4 … w_n, sulla quale verrà applicato nuovamente l'algoritmo di calcolo della graduatoria tra le decisioni, e si calcolerà quante (eventuali) variazioni nella graduatoria così calcolata si riscontrano rispetto alla graduatoria iniziale. Il complesso di tali operazioni si itereranno sino a scambiare di posto i pesi w_{n-1} e w_n, sempre ogni volta operando gli scambi sul vettore iniziale dei pesi ordinati, e confrontando i risultati ottenuti con la graduatoria iniziale delle decisioni. Il processo quindi continuerà con la stessa modalità iterativa, ora però aumentando di una unità la distanza (dw=2) tra i due pesi che si scambieranno di posto e mantenendo inalterato il parametro wa = 1. Operando come sempre sull'ordinamento iniziale dei pesi, si comincerà quindi con lo scambiare il peso w_1 con il peso w_3, calcolare la graduatoria corrente tra le decisioni e valutarne le differenze con la graduatoria iniziale, quindi si procederà scorrendo di una posizione il vettore dei pesi ordinati e si scambierà il peso w_2 con il w_4, e così via, sempre ad ogni passo riprendendo ed operando sul vettore iniziale dei pesi ordinati, sino al passo in cui si scambieranno di posto i pesi w_{n-2} e w_n. Il processo verrà quindi iterato via via aumentando la distanza dw, sino a quando si giungerà per wa = 1 a scambiare pesi a distanza massima possibile, ovvero si scambieranno di posto i pesi posti a distanza dw = n-1, ovvero si scambieranno di posto il primo peso w_1 con l'ultimo w_n. A questo punto si incrementerà la dimensione wa di una unità (wa=2), ovvero si incrementerà il numero dei pesi adiacenti che andranno a sostituire un analogo numero dei pesi adiacenti, si riporterà ad uno (dw =1) il contatore della distanza e si reitererà l'intero processo, che comincerà con lo scambio di posto tra la sequenza di pesi w_1 e w_2 (wa=2) con la sequenza di pesi w_3 e w_4, ovvero con la sequenza di pesi di analogo wa, che si trova a distanza uno dalla prima sequenza. E così via, con ogni operazione di scambio seguita dal calcolo della graduatoria corrente delle decisioni e dalla valutazione di quante variazioni vi sono rispetto alla graduatoria iniziale.

Dati n pesi, la condizione di arresto nell'aumento di wa sarà quella in cui wa rappresenterà il massimo numero di una prima sequenza di pesi adiacenti in grado di scambiarsi di posto con una seconda sequenza di *tutti diversi* pesi adiacenti. La condizione di arresto all'incremento della distanza (dw) sarà, fissato un wa, la massima distanza a cui poter scambiare due sequenze di pesi adiacenti di eguale wa.

Si noti, inoltre, che ad ogni passo le eventuali variazioni nella graduatoria delle decisioni dovranno essere valutate anche in funzione dei parametri che definiscono la perturbazione dei pesi che la hanno generata, ovvero tali variazioni dovranno essere valutate anche in funzione della numerosità (wa) di pesi adiacenti che compongono le due sequenze di pesi che si sono scambiati di posto e della distanza (dw) tra tali due sequenze. Questa valutazione darà luogo alla analisi di sensitività.

Tutti i parametri necessari per seguire i calcoli relativi ai processi iterativi descritti e giungere alla valutazione della sensisitività verranno presentati nel seguente paragrafo.

3. I parametri per il calcolo

L'intero processo di calcolo dipende quindi da tre fattori: la dimensione **wa** della sequenza dei pesi adiacenti (ovvero il numero dei pesi di tali sequenza) che si scambierà di posto con una analoga sequenza di tutti diversi pesi adiacenti; la distanza **dw** tra le due sequenze di pesi che si scambieranno di posto; ed infine il numero di variazioni nella graduatoria delle decisioni (rispetto alla graduatoria iniziale) ottenute in seguito ad agni scambio.

Cominciamo con l'osservare che detto v ($v \leq k$) il numero di variazioni di posizioni in una graduatoria delle decisioni rispetto alla graduatoria iniziale - variazioni dovute ad una perturbazione nell'ordine dei pesi - il parametro

$$\mathbf{s} = v/k \quad (1)$$

fornisce la percentuale di tali variazioni rispetto al totale delle decisioni.

Dati n pesi definiamo **wa** il numero dei pesi adiacenti che si scambieranno di posto con un analogo numero di *tutti diversi* pesi adiacenti, con wa che quindi potrà assumere valori nel range $1 \leq wa \leq \lfloor n/2 \rfloor$. Il valore massimo di wa è dovuto al fatto che $\lfloor n/2 \rfloor$ è la massima numerosità che possono assumere due sequenze composte ciascuna da $wa = \lfloor n/2 \rfloor$ pesi adiacenti in modo che le due sequenze non abbiano alcun peso in comune, ovvero siano composte da pesi tutti diversi l'una dall'altra.

Dati n pesi ordinati per valori non crescenti, consideriamo due sequenze distinte composte ciascuna di wa pesi adiacenti, con ciascuna sequenza che non contiene alcun peso presente nell'altra, e con la prima sequenza contenente pesi con indici posizionali più bassi della seconda. Definiamo **dw** la distanza tra tali due sequenze, con dw espresso dal numero ottenibile sottraendo all'indice del primo peso della seconda sequenza, l'indice dell'ultimo peso della prima sequenza. Ad es. la distanza tra le due sequenze composte ciascuna di un solo peso (wa=1) descritte rispettivamente dai pesi w_1 e w_2 avrà distanza dw = 1; ed ancora consideriamo le due sequenze composte ciascuna di due pesi adiacenti (wa=2) descritte rispettivamente dalla coppia di pesi adiacenti w_1 e w_2 e dalla coppia di pesi adiacenti w_5 e w_6, la loro distanza sarà uguale a dw = 5 – 2 = 3, calcolabile sottraendo all'indice del primo peso della seconda sequenza, l'indice dell'ultimo peso della prima sequenza.

Dati n pesi, il valore massimo che la distanza dw può assumere è funzione del valore di wa, ovvero del numero di pesi adiacenti che si scambieranno di posto con un analogo numero di tutti diversi pesi adiacenti. Nel caso di wa = 1, il valore massimo di dw (dw_m) risulterà essere n-1; quindi in tale caso $1 \leq dw \leq n-1$. Al crescere di wa, ovvero $1 \leq wa \leq \lfloor n/2 \rfloor$, la distanza massima di dw decresce, ed è facilmente calcolabile tramite la formula generale

$$dw_m = n - 2wa + 1 \quad (2)$$

$$\text{in cui } 1 \leq wa \leq \lfloor n/2 \rfloor$$

Quindi nel caso generale di $1 \leq wa \leq \lfloor n/2 \rfloor$, la distanza dw potrà assumere valori nel range $1 \leq dw \leq n - 2wa + 1$, potendo giungere ad un range con valore di distanza massima ($dw_m = n-1$) per wa = 1, nel qual caso dw potrà assumere valori nel range $1 \leq dw \leq n-1$.

Il parametro St che rappresenterà la sensitività del sistema sarà posto nella forma

$$St = s * P \qquad (3)$$

in cui P è un parametro che tiene conto sia del numero di pesi adiacenti sostituiti (wa) che della distanza (dw) tra i due insiemi di pesi adiacenti che si scambiano di posto, ovvero

$$P = f(wa, dw).$$

P verrà calcolato come combinazione pesata di due funzioni, una che terrà conto di wa e l'altra di dw, il cui valore massimo che può assumere (dw_m) però dipende, tramite la (2) ancora da wa; quindi $P = f(wa, dw)$ = α∗g(wa) + β∗h(dw,wa) in cui si porrà α = β = ½, scelta che assegna la stessa importanza alle due funzioni g(wa) e h(dw,wa) nel comporre il valore del parametro P.

Vogliamo giungere ad un parametro P che pesi maggiormente le piccole perturbazioni, e per piccole perturbazioni intenderemo:

- le sequenze di pesi di minore numerosità, ovvero quelle composte dai minori numeri di pesi adiacenti, il cui esponente più significativo è la sequenza composta da un solo peso (wa=1);
- le distanze minori tra sequenze di pesi che si scambiano di posto, il cui esponente più significativo è la distanza uno (dw =1).

Vogliamo giungere a delle formulazioni di g(wa) e h(dw,wa) che presentino lo stesso comportamento, ovvero che entrambe operino nel range [1..2], ed in particolare che g(wa) al variare della dimensione di wa, con 1≤ wa ≤ ⌊n/2⌋ , valga rispettivamente:

$$wa = 1 \Rightarrow g(wa) = 2$$

$$wa = \lfloor n/2 \rfloor \Rightarrow g(wa) = 1$$

ed analogamente che h(dw,wa), una volta fissato un wa tra quelli ammissibili (1≤ wa ≤ ⌊n/2⌋), al variare della distanza 1≤ dw ≤ n–2wa+1, valga rispettivamente

$$dw = 1 \Rightarrow h(dw,wa) = 2$$

$$dw = n-2wa+1 \Rightarrow h(dw,wa) = 1$$

Ovvero vogliamo che ***piccole perturbazioni*** (bassi valori di wa e, per ciascun fissato wa, bassi valori di dw) ***siano valutate maggiormente***, ciò in quanto siamo interessati ad esaltare, tramite il parametro P, le ***piccole perturbazioni che causano forti variazioni*** nella graduatoria delle decisioni.

Tale comportamento è ottenibile per g(wa) - ricordando che dati n pesi la dimensione massima che wa può assumere è $\text{wa} = \lfloor n/2 \rfloor$ - tramite semplici operazioni, composte essenzialmente da una inversione di valori ed una serie di mapping tra intervalli di valori, talché con rapidi passaggi si giunge alla

$$\mathrm{g(wa)} = \frac{|n/2|-wa}{|n/2|-1} + 1 \quad (3)$$

in cui $1 \le \mathrm{g(wa)} \le 2$, per $1 \le \mathrm{wa} \le |n/2|$.

Calcoliamo ora h(dw,wa) in modo che abbia un comportamento analogo alla precedente g(wa), ovvero in modo tale che, fissato un wa tra quelli ammissibili ($1 \le \mathrm{wa} \le |n/2|$), per la distanza minima dw =1 proponga il valore massimo h(1,wa) = 2 e per il valore massimo della distanza (dw_m = n – 2wa + 1) proponga il valore minimo h(n–2wa+1,wa) = 1. Tramite semplici operazioni, essenzialmente una inversione di valori e mapping tra intervalli, anche in questo caso con rapidi passaggi si perviene alla

$$\mathrm{h(dw,wa)} = \frac{-dw+n-2wa+1}{n-2wa} + 1$$

che vogliamo assuma valori $1 \le \mathrm{h(dw,wa)} \le 2$

per $1 \le \mathrm{dw} \le \mathrm{n-2wa+1}$ e $1 \le \mathrm{wa} \le |n/2|$

Si noti che nel caso di n pari, il massimo valore di wa è pari a wa = ⌊n/2⌋ = n/2, e per tale valore massimo di wa la distanza massima, fornita dalla (2), risulta essere pari ad uno. Quindi nel caso di n pari e wa = n/2 il valore di distanza massima è uguale al valore minimo che una distanza può assumere, ed in tali condizioni la formulazione matematica di h(dw,wa) sopra espressa condurrebbe ad un assurdo. Per tale motivo nella precedente formulazione è necessario introdurre a denominatore della frazione un valore espilon (ε), piccolo a piacere, tale da eliminare tale assurdo, e fare in modo che nel caso di n pari e wa = ⌊n/2⌋ = n/2 nel calcolo della $\mathrm{h(dw,wa)}$ la distanza pari ad 1 venga ad essere considerata come la distanza massima. Tramite l'introduzione dell'epsilon otteniamo quindi che, per n pari, wa = n/2 e conseguente unico valore possibile di distanza pari a dw=1, risulti $\mathrm{h(1,n/2)} = 1$.

La $\mathrm{h(dw,wa)}$ assume quindi la forma definitiva seguente

$$\mathrm{h(dw,wa)} = \frac{-dw+n-2wa+1}{n-2wa+\varepsilon} + 1 \quad (4)$$

che assume valori $1 \le \mathrm{h(dw,wa)} < 2$

per $1 \le \mathrm{dw} \le \mathrm{n-2wa+1}$ e $1 \le \mathrm{wa} \le |n/2|$

In particolare tramite la (4) per n pari:

- fissato il valore massimo di wa = $|n/2| = n/2$, il valore massimo di dw risulta dalla (2) dw_m = 1, quindi per tale valore di wa vi è solo tale possibilità di distanza, da cui segue h(dw,wa) = h(1,n/2) = 1;

e per n dispari:

- fissato il valore massimo di wa = $|n/2|$, il valore massimo di dw risulta dalla (2) $dw_m = 2 \Rightarrow$ h(dw,wa) = h(2, $|n/2|$) = 1,
- mentre per l'altro valore possibile di dw, ovvero dw = 1 $\Rightarrow$ h(dw,wa) = h(1, $|n/2|$) ≈ 2;

Quindi g(wa), per valori crescenti di wa da 1 a $|n/2|$ fornisce valori tra 2 ed 1, ed analogamente la h(dw,wa), fissato un wa, e per valori crescenti della distanza dw da 1 a dw_m = n – 2wa + 1 fornisce valori tra ≈ 2 ed 1, con il caso particolare di n pari per il quale nel caso di wa = $|n/2| = n/2$, il valore 1 di distanza viene ad essere considerato, come la (2) indica, come la distanza massima, ottenendosi h(dw,wa) = h(1,n/2) = 1.

Il parametro P assume quindi la forma

$$P = ½\ g(wa) + ½\ h(dw,wa) =$$

$$= ½\ \left(\frac{|n/2| - wa}{|n/2| - 1} + 1\right) + ½\ \left(\frac{-dw + n - 2wa + 1}{n - 2wa + \varepsilon} + 1\right) \quad (5)$$

con P che assume valori nel range $1 \leq P < 2$

Per come è costruito, il parametro P quindi valuta maggiormente le piccole perturbazioni, e ciò in quanto in una analisi di sensitività si è proprio interessati a piccole perturbazioni nell'input in grado di creare notevoli variazione nell'output, variazioni che nel nostro caso sono calcolate tramite la (1), ovvero tramite il parametro s = v/k, che fornisce, per ogni valore ammissibile di wa e per ogni valore di distanza dw ammissibile per ciascun wa, il tasso di variazione delle posizioni delle decisioni tra la graduatoria corrente e la graduatoria iniziale.

Il parametro di sensitività St viene quindi assumere la forma

$$St = s * P$$

$$\text{ovvero } St = v/k * \left[½\ \left(\frac{|n/2| - wa}{|n/2| - 1} + 1\right) + ½\ \left(\frac{-dw + n - 2wa + 1}{n - 2wa + \varepsilon} + 1\right)\right] \quad (6)$$

con $0 \leq St < 2$, valendo St = 0 nel caso di assenza di variazioni nella graduatoria, ovvero per v = 0. Il parametro P nella St quindi 'pesa' la percentuale di variazioni (s), mantenendo tale percentuale invariata nel caso di P=1, ciò che si verifica per grandissime perturbazioni dei pesi, oppure amplificando la percentuale s, ciò che si verifica per piccole perturbazioni, il cui caso estremo è $P \approx 2$, in cui l'effetto è di circa raddoppiare la percentuale s, caso che si ottiene solo nel caso di scambio di posto di due singoli pesi adiacenti (wa=1 e dw =1). In tutte le altre situazioni P assume un valore $1 \leq P < 2$, in funzione delle dimensioni di wa e dw.

Fisseremo quale valore *critico* St = 0.8, così calcolato assumendo che si verifichi un 40% di variazioni nella graduatoria delle decisioni (ovvero s = 0.4) nelle condizioni di una perturbazione di piccola entità, ovvero per un fattore $P \approx 2$, ciò che conduce ad un incremento (esaltazione) di s di circa il 100%, ovvero $St = 0.4*P \cong 0.8$. Qualsiasi valore di $St \geq 0.8$ verrà considerato una condizione che indica instabilità, ovvero alta sensibilità a piccola perturbazione. Tale valore di soglia di St potrà essere superato da più combinazioni di wa e dw, che daranno luogo alle varie configurazioni dei pesi che conducono alla instabilità.

Si noti che fissato un wa, lo stesso valore di P si ottiene scambiando *sequenze diverse* di pesi di stesse dimensioni wa a stessa distanza dw tra di loro. Ad esempio dati n pesi ordinati $w_1, w_2, w_3 \ldots w_n$, fissato quale wa = 1, per il valore di distanza dw = 1 si ottiene lo stesso valore di $P \approx 2$ sia scambiando di posizione i pesi w_1 e w_2, che scambiando di posizione i pesi w_2 e w_3, e ciò in quanto P pesa proprio l'entità della perturbazione, che è definita in funzione dei soli parametri wa e dw.

Noto un valore di St ed i parametri s, wa e dw da cui è stato ottenuto, rimane il problema di voler individuare quali sono le due sequenze di pesi che hanno generato tale valore di St, ovvero le due sequenze di pesi che scambiandosi di posto hanno generato la perturbazione che ha condotto a quel valore di St. Per fare ciò occorre innanzitutto osservare che la (2) oltre ad indicare la distanza massima ammissibile per un dato wa, ha anche il conseguente significato di indicare il numero massimo di scambi tra sequenze di wa. Basterà quindi introdurre un ulteriore parametro che riporti a quale numero di scambio è relativo ogni St, ovvero un parametro do tale che $1 \leq do \leq n-2wa+1$, che andrà ad aggiungersi a quelli noti per ogni valore di St. Il parametro do indicherà quindi l'indice del primo peso della sequenza di pesi lunga wa che andrà a cambiarsi di posto con una analoga sequenza di pesi posta a distanza dw. In definitiva per ogni St, una volta noti i valori di wa, dw e do da cui deriva, è possibile immediatamente determinare le due sequenze di pesi che hanno generato quel valore di St. In particolare operando sui *pesi iniziali ordinati*, gli indici iniziale e finale delle prima sequenza (quella che si scambierà di posto con la seconda) saranno dati da wa11=do e wa12=do+wa-1, mentre gli indici iniziale e finale delle seconda sequenza (quella che prenderà il posto della prima) saranno dati da wa21=do+wa+dw-1 e wa22=do+2wa+dw-2.

La fig. 3 riporta graficamente un vettore di n pesi, in cui nelle condizioni di wa = 2, distanza dw = 4 e passo do = 2, la coppia di pesi w_2 e w_3 si scambierà di posto con la coppia di pesi w_7 e w_8 ; in tale situazione gli indici iniziale-finale delle due sequenze di pesi di lunghezza wa che andranno a scambiarsi di posto saranno wa11= do = 2, wa12= do+wa-1 = 3 e wa21=do+wa+dw-1 = 7, wa22=do+2wa+dw-2 = 8.

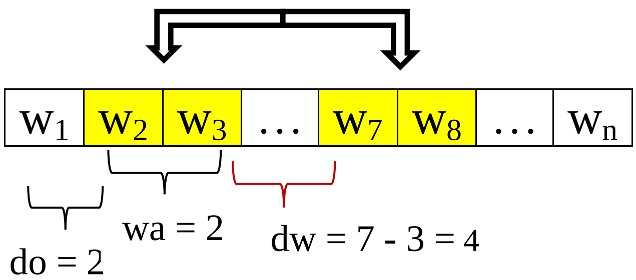

Fig. 3 - wa=2, dw=4, do=2 $\Rightarrow$ wa11=2, wa21= 3; wa21 = 7, wa22 = 8

Quindi nota la sequenza ordinata dei n pesi e la iniziale graduatoria delle k decisioni, ottenuta da un algoritmo quale ad es. il SAW o il Topsis, siamo ora in grado di generare specifiche perturbazioni nell'ordine dei pesi e valutarne gli effetti in termini di variazioni indotte nella graduatoria delle decisioni pesate in funzione dell'entità delle perturbazioni che hanno generato tali variazioni. In appendice è proposto un algoritmo in pseudo-linguaggio che illustra, in modo non ottimizzato, l'intero processo.

4. Un esempio numerico

L'esempio è relativo ad una ipotesi di gara in cui 10 fornitori (d_1,..,d_{10}) vengono valutati sulla base di 6 criteri (c_1,..,c_6). L'ultimo di tali criteri (c_6) rappresenta un costo, quindi nella elaborazione con il metodo SAW verrà trattato attribuendo al valore minimo di tale criterio presente nella matrice decisioni/criteri la performance massima, ed al valore massimo la performance minima. Al di sotto viene proposta la matrice decisione/criteri ed il vettore dei pesi, già ordinati per valore non crescente, attribuiti dal decisore ai vari criteri, oltre alla graduatoria tra i fornitori ottenuta dal metodo SAW attivato su tali dati.

Pesi	50	40	30	20	10	5

decisioni /criteri	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6
d_1	0	4.166667	33.33333	50	1.960784	1480700
d_2	100	58.33333	66.66667	50	9.803922	1454500
d_3	100	79.16667	100	100	69.01961	1326346
d_4	75	83.33333	100	100	68.62745	1334400
d_5	75	58.33333	66.66667	50	6.27451	1265160
d_6	50	37.5	33.33333	50	14.70588	1307645
d_7	50	66.66667	100	50	53.52941	1270560
d_8	50	75	100	100	54.90196	1207600
d_9	100	100	100	100	58.43137	1190895
d_{10}	100	87.5	66.66667	100	56.27451	1424600

Nella figura 4 seguente è riportata la graduatoria iniziale tra i 10 fornitori ($d_9 > d_3 > d_{10} > d_4 > d_8 > d_2 > d_7 > d_5 > d_6 > d_1$), ottenuta tramite il metodo SAW attivato sui dati iniziali. Rispetto a tale graduatoria iniziale verranno confrontate tutte le varie ulteriori graduatorie che verranno calcolate dopo gli scambi di posto tra sequenze di pesi.

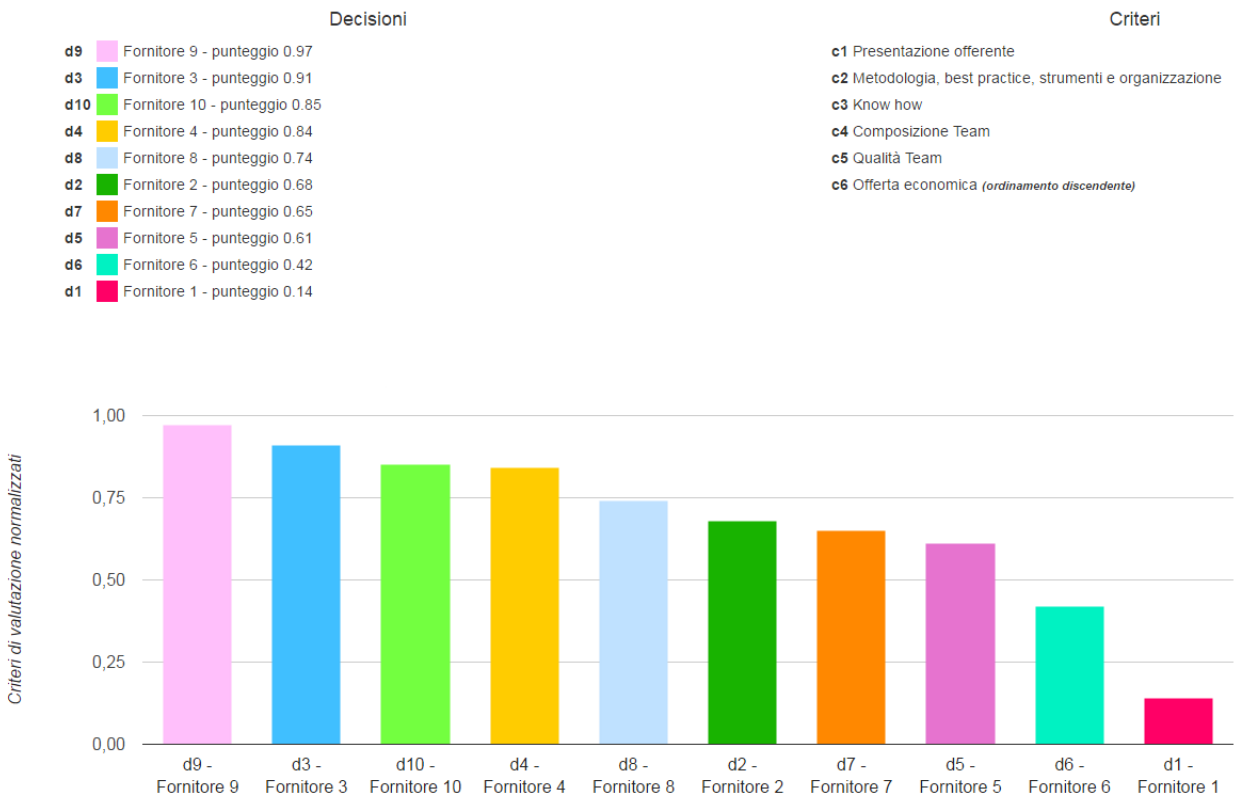

Fig. 4 La graduatoria tra i vari fornitori generata dal metodo SAW

Si procederà ora allo scambio di sequenze di pesi, calcolo delle graduatorie e valutazione della sensitività, percorrendo tutti i vari passi del processo, ed osservando preliminarmente che essendo i pesi pari a n = 6 ne conseguirà che wa varierà nel range $1 \leq wa \leq 3$. La tabella sottostante illustra tutti i passi ed i risultati.

wa-dw_m	dw-P	do – waxx	Pesi	Graduatoria	v - s – St
wa = 1 $dw_m = 5$	dw = 1 P = 1,99	do = 1 wa11 = 1 wa12 = 1 wa21 = 2 wa22 = 2	40 50 30 20 10 5	$d_9 > d_3 > d_{10} > d_4 > d_8 > d_2 > d_7 > d_5 > d_6 > d_1$	v = 4; s = 0.4 St ≈ 0.8
		do = 2 wa11 = 2 wa12 = 2 wa21 = 3 wa22 = 3	50 30 40 20 10 5	$d_9 > d_3 > d_4 > d_{10} > d_8 > d_2 > d_7 > d_5 > d_6 > d_1$	v = 2 s = 0.2 St ≈ 0.4
		do = 3	50 40 20 30 10 5	$d_9 > d_3 > d_{10} > d_4 > d_8$	v = 0

		wa11 = 3 wa12 = 3 wa21 = 4 wa22 = 4		$> d_2 > d_7 > d_5 > d_6$ $> d_1$	s = 0 St = 0
		do = 4 wa11 = 4 wa12 = 4 wa21 = 5 wa22 = 5	50 40 30 10 20 5	$d_9 > d_3 > d_{10} > d_4 > d_8$ $> d_7 > d_2 > d_5 > d_6$ $> d_1$	v = 2 s = 0.2 St ≈ 0.4
		do = 5 wa11 = 5 wa12 = 5 wa21 = 6 wa22 = 6	50 40 30 20 5 10	$d_9 > d_3 > d_{10} > d_4 > d_8$ $> d_2 > d_7 > d_5 > d_6$ $> d_1$	v = 0 s = 0 St = 0
	dw = 2 P = 1,87	do = 1 wa11 = 1 wa12 = 1 wa21 = 3 wa22 = 3	30 40 50 20 10 5	$d_9 > d_3 > d_4 > d_8 > d_{10}$ $> d_7 > d_2 > d_5 > d_6$ $> d_1$	v = 5 s = 0.5 St ≈ 0.87
		do = 2 wa11 = 2 wa12 = 2 wa21 = 4 wa22 = 4	50 20 30 40 10 5	$d_9 > d_3 > d_{10} > d_4 > d_8$ $> d_2 > d_7 > d_5 > d_6$ $> d_1$	v = 0 s = 0 St = 0
		do = 3 wa11 = 3 wa12 = 3 wa21 = 5 wa22 = 5	50 40 10 20 30 5	$d_9 > d_3 > d_{10} > d_4 > d_8$ $> d_2 > d_7 > d_5 > d_6$ $> d_1$	v = 0 s = 0 St = 0
		do = 4 wa11 = 4 wa12 = 4 wa21 = 6 wa22 = 6	50 40 30 5 10 20	$d_9 > d_3 > d_4 > d_{10} > d_8$ $> d_7 > d_5 > d_2 > d_6$ $> d_1$	v = 5 s = 0.5 St ≈ 0.87
	dw = 3 P = 1,75	do = 1 wa11 = 1 wa12 = 1 wa21 = 4 wa22 = 4	20 40 30 50 10 5	$d_9 > d_3 > d_4 > d_{10} > d_8$ $> d_7 > d_2 > d_5 > d_6$ $> d_1$	v = 4 s = 0.4 St ≈ 0.7

		do = 2 wa11 = 2 wa12 = 2 wa21 = 5 wa22 = 5	50 10 30 20 40 5	$d_9 > d_3 > d_4 > d_{10} > d_8 > d_7 > d_2 > d_5 > d_6 > d_1$	v = 4 s = 0.4 St ≈ 0.7
		do = 3 wa11 = 3 wa12 = 3 wa21 = 6 wa22 = 6	50 40 5 20 10 30	$d_9 > d_3 > d_{10} > d_4 > d_8 > d_5 > d_7 > d_2 > d_6 > d_1$	v = 2 s = 0.2 St ≈ 0.35
	dw = 4 P = 1,62	do = 1 wa11 = 1 wa12 = 1 wa21 = 5 wa22 = 5	10 40 30 20 50 5	$d_9 > d_3 > d_4 > d_8 > d_{10} > d_7 > d_2 > d_5 > d_6 > d_1$	v = 5 s = 0.5 St ≈ 0.8
		do = 2 wa11 = 2 wa12 = 2 wa21 = 6 wa22 = 6	50 5 30 20 10 40	$d_9 > d_3 > d_8 > d_4 > d_{10} > d_7 > d_5 > d_2 > d_6 > d_1$	v = 5 s = 0.5 St ≈ 0.8
	dw = 5 P = 1,5	do = 1 wa11 = 1 wa12 = 1 wa21 = 6 wa22 = 6	5 40 30 20 10 50	$d_9 > d_8 > d_3 > d_4 > d_7 > d_{10} > d_5 > d_6 > d_2 > d_1$	v = 7 s = 0.7 St ≈ 1.05
wa = 2 $dw_m = 3$	dw = 1 P = 1,74	do = 1 wa11 = 1 wa12 = 2 wa21 = 3 wa22 = 4	30 20 50 40 10 5	$d_9 > d_3 > d_4 > d_8 > d_{10} > d_7 > d_2 > d_5 > d_6 > d_1$	v = 5 s = 0.5 St ≈ 0.87
		do = 2 wa11 = 2 wa12 = 3 wa21 = 4 wa22 = 5	50 20 10 40 30 5	$d_9 > d_3 > d_{10} > d_4 > d_8 > d_2 > d_7 > d_5 > d_6 > d_1$	v = 0 s = 0 St = 0
		do = 3 wa11 = 3 wa12 = 4 wa21 = 5 wa22 = 6	50 40 10 5 30 20	$d_9 > d_3 > d_{10} > d_4 > d_8 > d_7 > d_2 > d_5 > d_6 > d_1$	v = 2 s = 0.2 St ≈ 0.34

	dw = 2 P = 1,49	do = 1 wa11 = 1 wa12 = 2 wa21 = 4 wa22 = 5	20 10 30 50 40 5	$d_9 > d_3 > d_4 > d_8 > d_{10} > d_7 > d_2 > d_5 > d_6 > d_1$	v = 5 s = 0.5 St ≈ 0.75
		do = 2 wa11 = 2 wa12 = 3 wa21 = 5 wa22 = 6	50 10 5 20 40 30	$d_9 > d_3 > d_4 > d_{10} > d_8 > d_7 > d_5 > d_2 > d_6 > d_1$	v = 5 s = 0.5 St ≈ 0.75
	dw = 3 P = 1,25	do = 1 wa11 = 1 wa12 = 2 wa21 = 5 wa22 = 6	10 5 30 20 50 40	$d_9 > d_8 > d_3 > d_4 > d_7 > d_{10} > d_5 > d_6 > d_2 > d_1$	v = 6 s = 0.6 St ≈ 0.75
wa = 3 dw_m = 1	dw = 1 P = 1	do = 1 wa11 = 1 wa12 = 3 wa21 = 4 wa22 = 6	20 10 5 50 40 30	$d_9 > d_3 > d_8 > d_4 > d_{10} > d_7 > d_5 > d_6 > d_2 > d_1$	v = 6 s = 0.6 St ≈ 0.6

Nella tabella sono stati marcati in rosso i valori di St ≥ 0.8, ovvero quelli che indicano un valore critico, e sono state sottolineate le situazione in cui St=0.

Cominciamo con l'analizzare le situazioni in cui St=0, ovvero quando gli scambi di sequenze di pesi si sono rilevati ininfluenti ai fini dell'ordinamento tra le decisioni. Tale risultato si verifica per gli scambi di posto tra singoli pesi di indici 3 e 4, 5 e 6 a distanza dw = 1 tra di loro; per i singoli pesi 2 e 4, 3 e 5 a distanza dw=2 tra di loro e per la coppia di pesi 2,3 che si scambia di posto con la coppia 4,5 a distanza dw=1. Tali scambi di valori dei pesi associati ai criteri potrebbero quindi essere effettuati dal decisore senza che il risultato ne risenta, ovvero senza che venga alterato l'ordinamento tra le decisioni.
Viceversa la massima sensibilità (St = 1.05) si riscontra nella situazione in cui si scambiano due sequenze composte da un singolo peso (wa = 1) che si trovano alla massima distanza per un tale wa (dw = 5), ed in particolare i due pesi che si scambiano di posto sono quelli di indici 1 e 6 (wa11 = 1, wa12 = 1; wa21 = 6, wa22 = 6). Tale elevato valore di St è dovuto essenzialmente all'elevata percentuale di variazioni nella graduatoria delle decisioni rispetto alla graduatoria iniziale (7 variazioni sulle 10 possibili, ovvero s = 0.7), in quanto tale valore

percentuale viene poi moltiplicato per un valore del parametro P non eccessivamente elevato (P =1.5), valore di P ottenuto dal mix di un piccolo valore di wa (wa = 1) ed un massimo valore di dw per quel wa (dw = 5 = dw_m). Tale risultato indica anche che per alterare notevolmente l'ordine delle decisioni volendo operare sui soli pesi associati ai criteri 1 e 6 bisogna effettuare forti variazioni nei loro rispettivi valori.
La condizione di alta sensibilità ($St \geq 0.8$) si riscontra (vedi tabella) anche in molte altre condizioni, che coinvolgono lo scambio dei pesi di indici 1 e 2; 1 e 3; 4 e 6; 1 e 5; 2 e 6; 1 e 6; 1,2 e 2,4; ciò che induce a concludere che, rispetto ai dati forniti dai fornitori, i valori dei pesi utilizzati e la loro specifica associazione ai diversi criteri sono entrambi fattori che influenzano molto il risultato del SAW. Quindi la sensibilità del sistema sotto analisi appare molto elevata, ovvero molto dipendente dall'insieme dei valori scelti per i pesi e dalla loro associazione ai vari criteri. Scelta dei pesi e loro associazione ai vari criteri che sono entrambe prerogative del decisore umano.

5. Conclusioni

Si è presentato un metodo che permette una analisi di sensitività basata sullo scambio di posto tra sequenze di valori di pesi secondo una opportuna tecnica. Il metodo proposto quindi non opera variazioni dei valori dei pesi, come spesso fanno altri metodi di analisi di sensitività, ma procede a via via assegnare in modo diverso, secondo una precisa tecnica, i valori dei pesi ai vari criteri, ed ad analizzare come ciò alteri la graduatoria tra le decisioni rispetto alla graduatoria iniziale. Il parametro di sensitività St ottenuto è stato derivato tenendo conto di tre fattori: la dimensione **wa** della sequenza dei pesi adiacenti (ovvero il numero dei pesi di tali sequenza) che si scambierà di posto con una analoga sequenza di tutti diversi pesi adiacenti; la distanza **dw** tra le due sequenze di pesi che si scambieranno di posto; ed infine il numero di variazioni nella graduatoria delle decisioni (rispetto alla graduatoria iniziale) ottenute in seguito ad agni scambio. Si è quindi definito un valore critico di St, al di sopra del quale il sistema sotto esame presenta una elevata sensitività.
Le graduatorie delle decisioni, sia quella iniziale che quelle ottenute dopo ciascuno scambio tra sequenze di pesi, possono essere ottenute tramite i metodi propri dell'Analisi Multicriteri, quali il SAW o il Topsis, che le generano operando sulla matrice decisione/criteri ed i pesi associati ai criteri.

Appendice

In questa appendice viene riportato in pseudo-linguaggio l'algoritmo, non ottimizzato, che descrive i vari passi con cui vengono operati gli scambi tra le sequenze di pesi ed i calcoli del valore critico. All'algoritmo supporremo nota la matrice decisione/criteri composta da n criteri $c_1, c_2, c_3 \ldots c_n$ e k decisioni $d_1, d_2, d_3 \ldots d_k$; noto il vettore di n pesi ordinati per valori non crescenti win = $[w_1, w_2, w_3 \ldots w_n]$ ovvero pesi tali che $w_1 \geq w_2 \geq w_3 \geq \ldots \geq w_n$ associati inizialmente ai vari criteri di pari indice, ed infine supporremo noto il ranking iniziale tra le decisioni, ottenuto applicando il metodo SAW alla matrice decisioni/criteri ed ai relativi pesi, valendo tale ranking iniziale $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \ldots \geq d_k$, sequenza ordinata di valori presente nel vettore din = $[d_1, d_2, d_3 \ldots d_k]$.

```
ε ≪ 0.1                          ' default valore epsilon
N = ⌊ n/2 ⌋                      ' calcolo massima dimensione wa
for wa = 1 to N                  ' per wa crescente
  dwm = nw - 2*wa + 1            ' distanza max tra pesi per quel wa
  step = dwm                     ' nro. passi uguali a dwm
  for dw = 1 to dwm              ' per distanza dw crescente da 1 a nw - 2*wa + 1
    for passo = 1 to step        ' per i vari passi
        wout = win               ' inizializzazione vettore pesi ad ogni scambio
      for lun = 1 to wa          ' per la lun(ghezza) di wa
        ' subroutine scambio di posto tra pesi
        call swapesi(wout, passo + lun - 1, passo + wa - 1 + dw - 1 + lun)
      next
      P = [½ ((N − wa)/(N−1) + 1) + ½ ((−dw+n−2wa+1)/(n−2wa+ε) + 1)]  ' calcolo parametro P
      Calcolo SAW e relativo s = v/k  tramite confronto con il vettore din
      St = s * P
      If St ≥ 0.8 then
        ' alta sensibilità alle perturbazioni, per i valori correnti di wa e dw
        ' con indici iniziale-finale dei due wa che si scambiano i pesi pari a
        wa11 = passo; wa12 = passo + wa - 1
        wa21 = passo + wa + dw -1; wa22 = passo + 2*wa + dw - 2
      end if
    next
      step = step -1
  next
next
```

Riferimenti

Azizollah Memariani, Abbas Amini, Alireza Alinezhad - *Sensitivity Analysis of Simple Additive Weighting Method (SAW): The Results of Change in the Weight of One Attribute on the Final Ranking of Alternatives* - Journal of Industrial Engineering 4, 2009 , pp. 13- 18;

Evangelos Triantaphyllou, Alfonso Sánchez – *A sensitivity analysis approach for some deterministic Multi-Criteria Decision Making Methods* - Decision Sciences, Vol. 28, No. 1, pp. 151-194, Winter 1997;

Wayne S. Goodridge - *Sensitivity Analysis Using Simple Additive Weighting Method* - I.J. Intelligent Systems and Applications, 2016, 5, 27-33;

Wolters, W.T.M.; Mareschal, B. - *Noveltypes of sensitivity analysis for additive MCDM Methods* - European Journal of Operational Research – 1995

Rūta Simanavičienė , Vaida Petraitytė – *Sensitivity Analysis of the Topsis Method in respect of initial data distributions* - Lithuanian Journal of Statistics 2016, vol. 55, No 1, pp. 45–51