Calcolo dei Logaritmi

Veriano.Veracini@inwind.it

Lo scopo di queste pagine è quello di descrivere alcuni metodi per il calcolo dei logaritmi. I più interessati, nell'appendice in fondo a queste pagine, possono trovare notizie e curiosità di varia natura.

1. Definizioni, storia, proprietà

Definizione
Il calcolo dei logaritmi è, insieme con quello delle radici, un'operazione inversa dell'elevamento a potenza ($a^x = b$). Si definisce logaritmo di un numero reale positivo, in una base positiva e diversa da 1, l'esponente a cui bisogna elevare tale base per ottenere il numero dato. *Questo numero esiste sempre, ed è unico.*
In pratica $\log_a b = x$ con $\{a,b\} > 0$ e $a \neq 1$ dove a si chiama base del logaritmo. Una cosa importante da puntualizzare è che *non esistono i logaritmi dei numeri negativi e del numero zero.*

Un pizzico di storia
Già in un'opera di Archimede (nel libro "Arenaria") è presente, in embrione, il concetto di logaritmo. Archimede si rese conto della relazione esistente tra una progressione geometrica, formata dalle successive potenze di un numero naturale e i relativi esponenti che sono in progressione aritmetica.
Ovvero i valori 1 – 5 – 25 – 125 – 625 – ecc. sono in progressione geometrica di ragione 5. Questi valori sono equivalenti a 5^0 – 5^1 – 5^2 – 5^3 – 5^4 ecc. e i valori degli esponenti (0 – 1 – 2 – 3 – 4 – ecc.) sono in progressione aritmetica di ragione 1.
Molti anni dopo altri matematici, tra cui Luca Pacioli, Nicolas Chuquet e Michael Stifel ripresero il medesimo concetto, ma fu solo grazie a Joost Burgi e a John Napier che il concetto di logaritmo si poté sviluppare appieno. Loro ebbero la grande idea di infittire i termini delle due progressioni in modo che, per ogni numero nella progressione geometrica, ci fosse un numero nella corrispondente progressione aritmetica.
Il primo matematico a pubblicare delle tabelle con calcolati i logaritmi dove la base scelta era il numero 10 fu Henry Briggs e fu il matematico Leonard Euler ad introdurre i logaritmi dove la base scelta era il numero irrazionale "e".
Anche altri matematici, tra cui Edmund Gunter, ne studiarono le proprietà e ne suggerirono alcuni utilizzi pratici.

Proprietà fondamentali dei logaritmi
Le proprietà fondamentali dei logaritmi sono quattro, vediamole in dettaglio.

1) *Il logaritmo di 1, in una qualunque base, è 0.*
Cioè il $\log_a 1 = 0$.
Questo dipende dal fatto che 0 (zero) è l'esponente a cui bisogna elevare un qualunque numero per ottenere, come risultato, 1. Infatti, vale sempre la relazione $a^0 = 1$.

2) *Il logaritmo di un numero uguale alla base è 1.*
Cioè il $\log_a a = 1$.
Questo dipende dal fatto che 1 è l'esponente a cui bisogna elevare un qualunque numero per ottenere, come risultato, il medesimo numero. Infatti, vale sempre la relazione $a^1 = a$.

3) *Se la base è maggiore di 1 il logaritmo cresce al crescere del numero.*
Cioè se $a > 1$ abbiamo che il $\log_a n_1 < \log_a n_2$ se abbiamo $n_1 < n_2$.
Visto la prima proprietà fondamentale dei logaritmi possiamo anche dedurre che:
Per $n < 1$ il $\log_a n$ è negativo.
Per $n = 1$ il $\log_a n$ è zero.
Per $n > 1$ il $\log_a n$ è positivo.

4) *Se la base è minore di 1 il logaritmo decresce al crescere del numero.*
Cioè se $a < 1$ abbiamo che il $\log_a n_1 > \log_a n_2$ se abbiamo $n_1 < n_2$.
Visto la prima proprietà fondamentale dei logaritmi possiamo anche dedurre che:
Per $n < 1$ il $\log_a n$ è positivo.
Per $n = 1$ il $\log_a n$ è zero.
Per $n > 1$ il $\log_a n$ è negativo.

Teoremi fondamentali dei logaritmi
I teoremi fondamentali dei logaritmi sono quattro, vediamoli in dettaglio.

1) *Il logaritmo di un prodotto, rispetto a una base, è uguale alla somma dei logaritmi dei singoli fattori del prodotto, nella medesima base.*

Cioè
$$\log_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$$

Dimostrazione
Se indichiamo con x il $\log_a m$ (cioè $\log_a m = x$) e con y il $\log_a n$ (cioè $\log_a n = y$) allora abbiamo, per la definizione di logaritmo, che $a^x = m$ e, in modo analogo, anche che $a^y = n$.
Allora $a^x \cdot a^y = m \cdot n$ e questa espressione è equivalente all'espressione $a^{(x+y)} = m \cdot n$.
Per la definizione di logaritmo abbiamo che $\log_a (m \cdot n) = (x + y)$.
Poiché $x = \log_a m$ e che $y = \log_a n$ allora abbiamo che $\log_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$.
C.V.D.

Osservazione
Il logaritmo di un prodotto di molti fattori, rispetto a una base, è uguale alla somma dei logaritmi dei singoli fattori del prodotto, nella medesima base.

Cioè
$$\log_a (m \cdot n \cdot q) = \log_a m + \log_a n + \log_a q$$

Dimostrazione
La dimostrazione è talmente tanto semplice che, a mio parere, non necessita di alcun commento.
$$\log_a (m \cdot n \cdot q) = \log_a ((m \cdot n) \cdot q) = \log_a (m \cdot n) + \log_a q = \log_a m + \log_a n + \log_a q$$
C.V.D.

2) *Il logaritmo di un quoziente, rispetto a una base, è uguale alla differenza tra il logaritmo del dividendo e il logaritmo del divisore, nella medesima base.*

Cioè
$$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$$

Dimostrazione
Se indichiamo con x il $\log_a m$ (cioè $\log_a m = x$) e con y il $\log_a n$ (cioè $\log_a n = y$) allora abbiamo, per la definizione di logaritmo, che $a^x = m$ e, in modo analogo, abbiamo che $a^y = n$.
Allora $\dfrac{a^x}{a^y} = \dfrac{m}{n}$ e questa espressione è equivalente all'espressione $a^{(x-y)} = \dfrac{m}{n}$.
Per la definizione di logaritmo abbiamo che $\log_a \dfrac{m}{n} = (x - y)$.
Poiché $x = \log_a m$ e che $y = \log_a n$ allora abbiamo che $\log_a \dfrac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$.
C.V.D.

3) *Il logaritmo di un numero elevato a una certa potenza, rispetto a una base, è uguale al prodotto dell'esponente per il logaritmo del medesimo numero, nella medesima base.*

Cioè
$$\log_a m^n = n \cdot \log_a m$$

Dimostrazione
Se indichiamo con x il $\log_a m$ (cioè $\log_a m = x$) abbiamo, per la stessa definizione di logaritmo $a^x = m$. Se entrambi i termini vengono elevati alla potenza $n-esima$ otteniamo $(a^x)^n = m^n$ e cioè $a^{x \cdot n} = m^n$ e per la stessa definizione di logaritmo abbiamo che il $\log_a m^n = n \cdot x$. Poiché $x = \log_a m$ allora abbiamo che $\log_a m^n = n \cdot \log_a m$.
C.V.D.

4) *Il logaritmo di una radice, rispetto a una base, è uguale al prodotto dell'inverso dell'indice della radice per il logaritmo del radicando, nella medesima base.*

Cioè
$$\log_a \sqrt[n]{m} = \frac{1}{n} \cdot \log_a m$$

Dimostrazione
Poiché $\sqrt[n]{m}$ è equivalente a $m^{\frac{1}{n}}$ allora, $\log_a \sqrt[n]{m} = \log_a m^{\frac{1}{n}}$ e utilizzando il teorema precedente otteniamo che $\log_a m^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n} \cdot \log_a m$ da cui ricaviamo che il $\log_a \sqrt[n]{m} = \dfrac{1}{n} \cdot \log_a m$.
C.V.D.

Espressioni calcolabili attraverso l'uso dei logaritmi
Esistono alcune espressioni che sono facilmente calcolabili grazie ai quattro teoremi fondamentali che abbiamo appena enunciato. Possiamo esprimere il logaritmo di un'espressione monomia (cioè che contiene solamente operazioni di moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza ed estrazione di radice) come somma e/o sottrazione (eventualmente moltiplicati o divisi per dei numeri interi) dei logaritmi dei vari termini presenti.

Esempio
$$\log_a \left(\frac{b^3 \cdot \sqrt[5]{c^2}}{\sqrt{d} \cdot e^4}\right) = \log_a (b^3 \cdot \sqrt[5]{c^2}) - \log_a (\sqrt{d} \cdot e^4) = 3 \cdot \log_a b + \frac{2}{5} \cdot \log_a c - \left(\frac{1}{2} \cdot \log_a d + 4 \cdot \log_a e\right).$$

Perciò, riassumendo, abbiamo che:

$$\log_a\left(\frac{b^3 \cdot \sqrt[5]{c^2}}{\sqrt{d} \cdot e^4}\right) = 3\log_a b + \frac{2}{5}\log_a c - \frac{1}{2}\log_a d - 4\log_a e.$$

<u>Osservazione 1</u>
L'applicazione del logaritmo, a un'espressione monomia, trasforma le varie operazioni nel seguente modo.
A) La moltiplicazione si trasforma in somma.
B) La divisione si trasforma in sottrazione.
C) L'elevamento a potenza si trasforma in moltiplicazione.
D) L'estrazione di radice si trasforma in divisione.
Come possiamo vedere le operazioni si semplificano notevolmente rendendo semplici anche calcoli notevolmente complessi come abbiamo visto nell'esempio precedente.

<u>Osservazione 2</u>
Non esiste nessuna relazione in grado di esprimere il logaritmo di un'espressione polinomia (cioè che contiene anche somme, e/o sottrazioni) per mezzo dei logaritmi dei vari termini. Cioè non esiste nessuna relazione tra il $\log_a(b+c)$ o il $\log_a(b-c)$ e i logaritmi dei termini $\log_a b$ e $\log_a c$.

Trasformazione di un logaritmo da una base a un'altra base
Poiché la base dei logaritmi può essere scelta a piacere (comunque deve essere sempre maggiore di 0 (zero) e diversa da 1) può essere utile eseguire il cambiamento di base. Cioè se abbiamo il logaritmo di un numero in una certa base può essere necessario calcolare il logaritmo, del medesimo numero, in un'altra base.
Il logaritmo del numero n nella base a è uguale al logaritmo del medesimo numero n nella base b moltiplicato per una costante.

Cioè $$\log_b n \cdot K = \log_a n$$

Dimostrazione
Se indichiamo con x il $\log_b n$ (cioè $\log_b n = x$) allora abbiamo, per la definizione di logaritmo, che $b^x = n$. Calcolando il logaritmo in base a dei due termini dell'espressione precedente, otteniamo che il $\log_a b^x = \log_a n$ e, per il terzo teorema fondamentale dei logaritmi, possiamo ricavare che $x \cdot \log_a b = \log_a n$. Poiché $x = \log_b n$ l'espressione precedente si trasforma nella seguente espressione $\log_b n \cdot \log_a b = \log_a n$.
Il numero $\log_a b$ che trasforma il $\log_b n$ nel $\log_a n$ non dipende da n, ma dipende solamente dal valore delle basi, a e b, coinvolte nella trasformazione. Ora possiamo dire che, fissate le basi dei logaritmi coinvolti nella trasformazione, il $\log_a b$ è una costante (cioè $\log_a b = K$) perciò ora abbiamo che l'espressione precedente si trasforma nella $\log_b n \cdot K = \log_a n$.
C.V.D.

<u>Osservazione 1</u>
Se nell'espressione $\log_b n \cdot \log_a b = \log_a n$, vista in precedenza, impostiamo $n = a$ otteniamo che il $\log_b a \cdot \log_a b = \log_a a$ e poiché $\log_a a$ è uguale a 1, come abbiamo visto nella seconda proprietà fondamentale dei logaritmi, risulta che il $\log_b a \cdot \log_a b = 1$.

Da ciò si ricava che il $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ dimostrando che il $\log_a b$ è l'inverso del $\log_b a$.

Qui potrete vedere un'altra dimostrazione di questa importantissima proprietà.

Dimostrazione
Se indichiamo con x il $\log_b a$ (cioè $\log_b a = x$) allora abbiamo, per la definizione di logaritmo, che $b^x = a$ e questa espressione è equivalente all'espressione $b = a^{\frac{1}{x}}$.
Per la definizione di logaritmo abbiamo che $\log_a b = \dfrac{1}{x}$. Perciò, sostituendo a "x" l'espressione $\log_b a = x$, otteniamo che il $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ dimostrando che il $\log_a b$ è l'inverso del $\log_b a$.
C.V.D.

<u>Osservazione 2</u>
Dopo quello che abbiamo dimostrato risulta ovvio anche che il $\log_a n = \dfrac{\log_b n}{\log_b a}$.

Cologaritmo
Si definisce cologaritmo di un numero, l'opposto del logaritmo del medesimo numero. Cioè il cologaritmo è il logaritmo moltiplicato per -1.

Cioè $$\log_a n = -\mathrm{colog}_a n$$

In genere si usano i cologaritmi per evitare di eseguire le sottrazioni.

<u>Esempio</u>
Se il $\log_a b = 5{,}42356$ il suo cologaritmo sarà uguale a -5,42356, cioè $\mathrm{colog}_a b = -5{,}42356$.
Da quello che abbiamo appena detto, è ovvio che $\log_a \dfrac{m}{n} = \log_a m - \log_a n = \log_a m + \mathrm{colog}_a n$.

Antilogaritmo
Si chiama antilogaritmo una delle due operazioni inverse del calcolo logaritmico (l'altra operazione inversa si chiama "calcolo delle radici"). Perciò, nell'equazione $\log_a b = x$, abbiamo il valore del logaritmo (x) e della base (a) e l'antilogaritmo è quell'operazione che permette di trovare il valore di b. Quest'operazione si scrive $b = \mathrm{antilog}_a x$ che, per la definizione di logaritmo, la possiamo calcolare tenendo conto che $b = a^x$.

<u>Osservazione</u>
Possiamo calcolare una qualunque equazione esponenziale con base b se siamo in grado di calcolare una qualunque equazione esponenziale con base a.

Cioè $$b^x = a^{x\cdot(\log_a b)}$$

Dimostrazione

Se indichiamo con y il $\log_a b$ (cioè $\log_a b = y$) allora abbiamo, per la definizione di logaritmo, che $a^y = b$ e sostituendo a y l'espressione $y = \log_a b$ otteniamo $b = a^{\log_a b}$ ed elevando, alla x, entrambi i termini otteniamo $b^x = (a^{\log_a b})^x = a^{x \cdot (\log_a b)}$.
C.V.D.

Altre proprietà dei logaritmi
Qui potrete vedere altre cinque proprietà dei logaritmi che, in qualche caso, potrebbero essere utili.

1) *Il logaritmo dell'inverso della base è uguale a -1.*

Cioè $$\log_a \frac{1}{a} = -1$$

Dimostrazione
Poiché $a^{-1} = \frac{1}{a}$ allora, per la definizione di logaritmo, abbiamo che il $\log_a \frac{1}{a} = -1$.
C.V.D.

2) *Il logaritmo con base uguale all'inverso del numero è uguale a -1.*

Cioè $$\log_{\frac{1}{a}} a = -1$$

Dimostrazione
Poiché $a = (\frac{1}{a})^{-1}$ allora, per la definizione di logaritmo, abbiamo che il $\log_{\frac{1}{a}} a = -1$.
C.V.D.

3) *Il logaritmo in base "a" di "n" è uguale all'opposto del logaritmo in base "a" dell'inverso di "n" oppure è uguale al cologaritmo in base "a" dell'inverso di "n".*

Cioè $$\log_a n = -\log_a \frac{1}{n} = \operatorname{colog}_a \frac{1}{n}$$

Dimostrazione
La dimostrazione è talmente tanto semplice che, a mio parere, non necessita di alcun commento.
$$\log_a n = -\log_a n^{-1} = -\log_a \frac{1}{n^1} = -\log_a \frac{1}{n} = \operatorname{colog}_a \frac{1}{n}$$
C.V.D.

4) *Il logaritmo in base "a" di "n" è uguale all'opposto del logaritmo in base "$1/a$" di "n" oppure è uguale al cologaritmo in base "$1/a$" di "n".*

Cioè $$\log_a n = -\log_{\frac{1}{a}} n = \operatorname{colog}_{\frac{1}{a}} n$$

Dimostrazione

Se indichiamo con x il $\log_a n$ (cioè $\log_a n = x$) allora abbiamo, per la definizione di logaritmo, che $a^x = n$. Perciò $\frac{1}{a^x} = \frac{1}{n}$ che equivale a $(\frac{1}{a})^x = n^{-1}$ e per la definizione di logaritmo abbiamo che $\log_{\frac{1}{a}} n^{-1} = x$ e, per il terzo teorema fondamentale dei logaritmi, abbiamo $-\log_{\frac{1}{a}} n = x$. Poiché $x = \log_a n$ otteniamo che il $\log_a n = -\log_{\frac{1}{a}} n$.

C.V.D.

5) *Il logaritmo in base "a" di "n" è uguale al logaritmo in base l'inverso di "a" dell'inverso di "n".*

Cioè
$$\log_a n = \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{n}$$

Dimostrazione

Se indichiamo con x il $\log_a n$ (cioè $\log_a n = x$) allora abbiamo, per la definizione di logaritmo, che $a^x = n$, perciò $\frac{1}{a^x} = \frac{1}{n}$. Questa espressione equivale a $(\frac{1}{a})^x = \frac{1}{n}$ e per la definizione di logaritmo abbiamo che $\log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{n} = x$, e poiché $\log_a n = x$ otteniamo l'espressione $\log_a n = \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{n}$.

C.V.D.

Basi dei logaritmi

Ogni numero, se maggiore di 0 (zero) e diverso da 1, può essere utilizzato come base dei logaritmi. Nella stragrande maggioranza dei casi le basi utilizzate sono ristrette a soltanto due numeri, il numero 10 ed il numero trascendente "e" che vale 2,71828182845904523536…

Il numero 10 si giustifica da alcune proprietà, che saranno illustrate successivamente, e dalla semplicità dei vari calcoli che ne derivano. Normalmente tali logaritmi si designano con "log" ma, per evitare possibili errori o fraintendimenti, saranno designati con "$\log_{10}$". Cioè saranno sempre scritti con la base del logaritmo. I logaritmi in base 10 si chiamano anche *logaritmi di Briggs*.
Questa tipologia di logaritmi è utilizzata soprattutto per l'effettuazione dei calcoli.

Il numero "e" si giustifica dalle proprietà medesime di questo straordinario numero trascendente che, almeno in parte, potrete trovare nell'appendice. Normalmente tali logaritmi si designano con "ln" ma, per evitare possibili errori o fraintendimenti, saranno designati con "$\log_e$". Cioè saranno sempre scritti con la base del logaritmo. I logaritmi in base "e" si chiamano anche *logaritmi naturali* o *logaritmi di Napier*.
Questa tipologia di logaritmi è utilizzata soprattutto in analisi matematica.

Logaritmi decimali - logaritmi di Briggs

I logaritmi in base 10 (o *logaritmi di Briggs*) hanno, oltre alle proprietà già viste per i logaritmi di una qualunque base, una nuova semplice proprietà che ne giustifica, da sola, il loro utilizzo.

Il logaritmo decimale di una potenza di 10 è uguale all'esponente medesimo.

Cioè
$$\log_{10} 10^n = n$$

La dimostrazione è talmente tanto semplice che sono certo non sia necessaria.

Teorema
Il logaritmo in base 10 di un numero razionale (positivo), che non sia una potenza di 10 ad esponente intero, è un numero irrazionale.

$\log_{10} a = x$

Dove:
a = numero razionale (positivo) che non sia una potenza di 10 ad esponente intero
x = numero irrazionale

Dimostreremo questo teorema per assurdo. Poiché un numero può essere solamente razionale o irrazionale (vedi schema in appendice), se riusciremo a dimostrare che il numero "x" non può essere un numero razionale dovrà essere, obbligatoriamente, un numero irrazionale.

Dimostrazione
Se "x" è un numero razionale allora $x = \frac{p}{q}$ dove "p" e "q" sono numeri interi positivi.

Se $\log_{10} a = x$ allora $\log_{10} a = \frac{p}{q}$ e, per la definizione di logaritmo, abbiamo che $10^{\frac{p}{q}} = a$.
Semplificando otteniamo che $10^p = a^q$. Quest'uguaglianza può essere vera, solo nell'ipotesi che "a" sia uguale a una potenza di 10. Poiché abbiamo ipotizzato che "a" fosse un numero razionale diverso da una potenza di 10, questa uguaglianza non può essere mai vera.
Questa contraddizione esiste perché abbiamo ipotizzato che il numero "x" sia un numero razionale, perciò, per eliminare questa contraddizione, si deve dedurre che il numero "x" è un numero irrazionale.
C.V.D.

Facciamo un semplice esempio per chiarire il teorema.
Se il $\log_{10} 2 = x$ e se $x = \frac{p}{q}$ con "p" e "q" numeri interi positivi allora abbiamo che $10^p = 2^q$ e questo non è possibile. Ovvero non è possibile che 2^q, con Q numero intero, sia uguale a 10^p, con P numero intero, poiché 10^p sarà sempre un numero che, come cifra delle unità (ultima cifra) avrà il numero 0 (zero) ma 2^q non avrà mai, come cifra delle unità, il numero 0 (zero). Questo vale per tutti gli altri numeri razionali diversi da una potenza di 10 ad esponente intero.

<u>Osservazione 1</u>
Il teorema precedente non deve, però, trarre in inganno. Il logaritmo in base 10 di un numero irrazionale può anche essere un numero razionale.

<u>Esempio</u>
Il logaritmo decimale del numero irrazionale 4,64158883… è uguale a $\frac{2}{3}$. Questo dipende dal fatto che il numero irrazionale 4,64158883… è uguale alla $\sqrt[3]{100}$. Perciò abbiamo:

$$\log_{10} 4{,}64158883... = \log_{10} \sqrt[3]{100} = \log_{10} 10^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log_{10} 10 = \frac{2}{3}$$

Osservazione 2
Abbiamo appena dimostrato che la stragrande maggioranza dei logaritmi decimali dei numeri razionali sono numeri irrazionali. Questo comporta che i calcoli effettuati, attraverso il loro uso, sono calcoli approssimati e il grado di approssimazione del risultato dipenderà dal numero dei decimali utilizzati. Nell'uso pratico si usa approssimare i logaritmi alla quinta o settima cifra decimale, difficilmente si supera la settima cifra decimale.

Forma mista
Come abbiamo visto nelle "*Proprietà fondamentali dei logaritmi*", i logaritmi decimali dei numeri (positivi) maggiori di 1 sono numeri positivi ed i logaritmi decimali dei numeri (positivi) minori di 1 sono numeri negativi. Vediamo alcuni esempi.

Esempi
$\log_{10} 300 = 2{,}4771212...$ $\quad \log_{10} 30 = 1{,}4771212...$ $\quad \log_{10} 3 = 0{,}4771212...$
$\log_{10} 0{,}3 = -0{,}5228787...$ $\quad \log_{10} 0{,}03 = -1{,}5228787...$ $\quad \log_{10} 0{,}003 = -2{,}5228787...$

Com'è possibile vedere, dagli esempi proposti, se un numero viene moltiplicato (o diviso) per il numero 10 (o per un suo multiplo) la parte decimale del logaritmo non cambia e la parte intera del logaritmo si incrementa (o decrementa) di un numero intero. Questa proprietà (lascio al lettore la facile dimostrazione) vale solo se il numero è maggiore di 1 e rimane maggiore di 1 oppure, se il numero è minore di 1 e rimane minore di 1. Per fare in modo che la proprietà, appena enunciata, rimanga sempre valida (per ogni numero positivo) i logaritmi devono essere scritti in "*forma mista*". Per convenzione, nella forma mista, la parte decimale del logaritmo è sempre positiva (e in questo caso si chiama *mantissa*). Perciò i logaritmi dei secondi tre numeri, proposti nell'esempio precedente, si trasformano in quelli successivi.

$\log_{10} 0{,}3 = \bar{1}{,}4771212...$ $\quad \log_{10} 0{,}03 = \bar{2}{,}4771212...$ $\quad \log_{10} 0{,}003 = \bar{3}{,}4771212...$

Come si può intuire quando i logaritmi sono scritti in forma mista e la *caratteristica* (cioè la parte intera del logaritmo) è negativa tale numero è sovrascritto da un segno meno. Questo significa che per il $\log_{10} 0{,}03 = \bar{2}{,}4771212...$ il numero 2 (*caratteristica*) è negativo e il numero $0{,}4771212...$ (*mantissa*) è positivo.
Questa convenzione, di scrivere i logaritmi decimali negativi in forma mista, aveva la sua utilità quando non esistevano le calcolatrici e, per eseguire i calcoli dei logaritmi e degli antilogaritmi, si usavano le "*tavole logaritmiche*".

Trasformazione dei logaritmi dalla forma negativa alla forma mista
Quando il valore del logaritmo decimale è negativo, significa che tutto il numero è negativo, cioè che è negativa sia la parte intera, sia la parte decimale. Se a questo numero sommiamo e sottraiamo un'unità, ovviamente il valore complessivo non si modifica. Perciò se alla parte intera sottraiamo un'unità e alla parte decimale sommiamo un'unità, il valore del logaritmo non si altera. La parte intera era negativa e rimarrà negativa la parte decimale, che era negativa, diventerà positiva. In questo caso la parte decimale prenderà il nome di *mantissa* e la parte intera prenderà il nome di *caratteristica*. Facciamo tre esempi.

Esempi
$$\log_{10} 0{,}003 = -2{,}5228787... = -2 - 1 + (-0{,}5228787... + 1) = -3 + 0{,}4771212... = \bar{3}{,}4771212...$$
$$\log_{10} 0{,}21 = -0{,}6777807... = -0 - 1 + (-0{,}6777807... + 1) = -1 + 0{,}3222192... = \bar{1}{,}3222192...$$

$$\log_{10} 0{,}00011 = -3{,}9586073... = -3 - 1 + (-0{,}9586073... + 1) = -4 + 0{,}0413926... = \overline{4}{,}0413926...$$

Trasformazione dei logaritmi dalla forma mista alla forma negativa

Quando il valore del logaritmo decimale è scritto in forma mista significa che la parte intera (*caratteristica*) è negativa e la parte decimale (*mantissa*) è positiva. Se svolgiamo il calcolo otteniamo immediatamente il valore del logaritmo in forma negativa. Facciamo tre esempi.

Esempi

$$\log_{10} 0{,}15 = \overline{1}{,}1760912... = -1 + 0{,}1760912... = -0{,}8239087...$$

$$\log_{10} 0{,}003 = \overline{3}{,}4771212... = -3 + 0{,}4771212... = -2{,}5228787...$$

$$\log_{10} 0{,}034 = \overline{2}{,}5314789... = -2 + 0{,}5314789... = -1{,}4685210...$$

Operazioni sui logaritmi espressi in forma mista

Nella pratica capita spesso di dover eseguire delle operazioni sui logaritmi e, nell'ipotesi che siano positivi o negativi, si procede come di consueto. Nell'ipotesi che i logaritmi negativi siano espressi in forma mista, ci sono delle semplici regole che permettono di eseguire tali calcoli senza essere costretti a trasformarli in logaritmi negativi. Vediamo queste semplici regole.

Somma

Per eseguire la somma di più logaritmi, dove alcuni di essi sono espressi in forma mista, si esegue la somma di tutte le mantisse e poi l'eventuale riporto (che è sempre positivo) si addiziona alla somma algebrica delle caratteristiche.

Cioè $\overline{2}{,}583 + \overline{1}{,}722 + 0{,}830 = \overline{1}{,}135$

Sottrazione

Per eseguire la sottrazione di due logaritmi si esegue la sottrazione delle mantisse nel modo consueto e, se necessario, si prende in prestito un'unità (che sarà positiva) dalla caratteristica, poi si esegue la sottrazione algebrica delle caratteristiche ricordandoci che eventualmente avevamo preso in prestito un'unità e che ora quell'unità è, da considerarsi, negativa.

Cioè $0{,}17099 - 3{,}24927 = \overline{4}{,}92172$ $\quad$ $0{,}17099 - \overline{4}{,}92172 = 3{,}24927$

Prodotto

Per eseguire il prodotto di un logaritmo espresso in forma mista per un numero naturale (intero positivo) si moltiplica la mantissa per il numero naturale e poi si somma algebricamente l'eventuale riporto (che è sempre positivo) al prodotto della caratteristica per il numero intero.

Cioè $\overline{1}{,}4325 \times 3 = \overline{2}{,}2975$

Divisione

Per eseguire la divisione di un logaritmo espresso in forma mista per un numero naturale (intero positivo) si deve fare in modo che la caratteristica sia divisibile per il numero naturale. Se lo è già si procede normalmente; se non lo è si sommano, alla caratteristica, tante unità negative quante ne servono perché la caratteristica sia divisibile per il numero naturale. Poi si sommano, alla mantissa, le medesime unità positive che eventualmente si sono sommate alla caratteristica. Dopo si esegue la divisione di tale numero come di consueto.

Cioè $\overline{3}{,}15321 : 3 = \overline{1}{,}05107$ $\quad$ $\overline{4}{,}153208 : 3 = \overline{2}{,}717736$

Logaritmi naturali - logaritmi in base "e" - logaritmi di Napier
I logaritmi in base "e" (o *logaritmi naturali* o anche *logaritmi di Napier*) sono tanto importanti perché tale numero possiede delle straordinarie proprietà e inoltre moltissimi fenomeni sono legati a questo numero. I più curiosi, in appendice, potranno trovare alcune delle sue inusali proprietà. Per i logaritmi naturali non è di nessuna utilità pratica introdurre la forma mista, come abbiamo visto per i logaritmi decimali. Lascio al lettore la giustificazione di quest'affermazione.

Trasformazione dei logaritmi naturali nei corrispondenti logaritmi decimali e viceversa
Una tale trasformazione può essere molto utile poiché i logaritmi naturali e i logaritmi decimali sono molto utilizzati e può essere necessario eseguire questa trasformazione.
Abbiamo visto in "*Trasformazione di un logaritmo da una base a un'altra base*" che per eseguire questa trasformazione è necessario moltiplicare/dividere per una costante e che tale costante dipende solamente dalle basi dei logaritmi coinvolti nella trasformazione.
I valori delle due costanti di trasformazione sono:

$$\log_{10} e = 0{,}43429448...$$

$$\log_e 10 = 2{,}302585093...$$

Abbiamo anche dimostrato che il $\log_{10} e = \dfrac{1}{\log_e 10}$.

Generalmente si usa abbreviare con M il $\log_{10} e$ perciò abbiamo che $M = 0{,}43429448...$.
Vediamo ora le formule per eseguire le relative trasformazioni.

$$\log_{10} x = \log_{10} e \cdot \log_e x = \frac{\log_e x}{\log_e 10} = M \cdot \log_e x$$

$$\log_e x = \log_e 10 \cdot \log_{10} x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e} = \frac{\log_{10} x}{M}$$

<u>Esempio</u>
Ammettiamo di sapere che il $\log_e 7 = 1{,}9459101$.
Allora il $\log_{10} 7 = M \cdot \log_e 7 = 0{,}4342945 \cdot 1{,}9459101 = 0{,}8450981$.

<u>Esempio</u>
Ammettiamo di sapere che il $\log_{10} 2 = 0{,}30103$.
Allora il $\log_e 2 = \dfrac{\log_{10} 2}{M} = \dfrac{0{,}30103}{0{,}4342945} = 0{,}6931472$.

Metodi non analizzati
Nelle prossime pagine non analizzerò la possibilità di eseguire il calcolo dei logaritmi, attraverso il "*Regolo Calcolatore*", le "*Tavole Aritmetico-logaritmiche*" e i tasti della calcolatrice ln ($\log_e$) e log ($\log_{10}$) che lo eseguono in modo automatico.

2. Metodi di calcolo dell'antilogaritmo

Prima di illustrare i metodi di calcolo del logaritmo illustrerò i metodi di calcolo dell'antilogaritmo poiché questa tipologia di calcolo mi è necessaria, nel prossimo capitolo, per illustrare un metodo di calcolo del logaritmo.
In questo capitolo illustrerò due metodi per eseguire questa tipologia di calcolo, altri due metodi li potrete trovare nell'appendice ai paragrafi "*Metodo delle tangenti – iterazione di Newton*" e "*Funzioni iperboliche*". Esistono anche altri metodi che, però, non illustrerò.
Quest'operazione si scrive $b = \text{antilog}_a x$ che, per la definizione di logaritmo, è equivalente a $b = a^x$. Come si può vedere il calcolo dell'antilogaritmo è, in realtà, un calcolo esponenziale. Una cosa importante da evidenziare è che vale sempre la seguente espressione $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.
Voglio ricordare che il calcolo esponenziale è un calcolo approssimato, perciò nel caso di una leggera differenza tra il valore vero e il valore calcolato, questo dipenderà dalle approssimazioni effettuate nei vari passaggi.

Metodo che deriva dalla stessa definizione di antilogaritmo
Qui illustrerò un metodo ovvio, anche se non molto efficiente, per eseguire il calcolo dell'antilogaritmo, questo metodo consiste nell'utilizzare il calcolo delle radici. Facciamo alcuni esempi per chiarirne il metodo.

Esempio
Ammettiamo di voler calcolare l'antilogaritmo in base 8 di 3,5 che equivale a $\text{antilog}_8 3{,}5$.
Premetto immediatamente che $\text{antilog}_8 3{,}5 = 8^{3,5} \approx 1448{,}1547$.

$$\text{antilog}_8 3{,}5 = 8^{3,5} = 8^3 \cdot 8^{0,5} = 512 \cdot \sqrt{8} \approx 512 \cdot 2{,}8284271 \approx 1448{,}1547$$

In questo esempio il calcolo dell'antilogaritmo si riduce all'effettuazione di alcune moltiplicazioni e al calcolo di una radice quadrata. Queste operazioni sono eseguibili, senza grossi problemi, anche utilizzando soltanto le quattro operazioni fondamentali.

Esempio
Ammettiamo di voler calcolare l'antilogaritmo in base 8 di 3,7 che equivale a $\text{antilog}_8 3{,}7$.
Premetto immediatamente che $\text{antilog}_8 3{,}7 = 8^{3,7} \approx 2194{,}9921$.

$$\text{antilog}_8 3{,}7 = 8^{3,7} = 8^3 \cdot 8^{0,7} = 512 \cdot \sqrt[10]{8^7} \approx 512 \cdot 4{,}2870939 \approx 2194{,}9921$$

In questo esempio il calcolo dell'antilogaritmo si riduce all'effettuazione di alcune moltiplicazioni e al calcolo di una radice decima. Quest'ultima operazione incomincia a essere piuttosto laboriosa se si utilizzano soltanto le quattro operazioni fondamentali.

Esempio
Ammettiamo di voler calcolare l'antilogaritmo in base 10 di 3,778 che equivale a $\text{antilog}_{10} 3{,}778$.
Premetto immediatamente che $\text{antilog}_{10} 3{,}778 = 10^{3,778} \approx 5997{,}9108$.

$$\text{antilog}_{10} 3{,}778 = 10^{3,778} = 10^3 \cdot 10^{0,7} \cdot 10^{0,07} \cdot 10^{0,008} = 1000 \cdot \sqrt[10]{10^7} \cdot \sqrt[100]{10^7} \cdot \sqrt[1000]{10^8} \approx$$
$$\approx 1000 \cdot 5{,}0118723 \cdot 1{,}1748976 \cdot 1{,}0185914 \approx 5997{,}9110$$

In questo esempio il calcolo dell'antilogaritmo incomincia a essere veramente complesso per la reale difficoltà, dovuta alla laboriosità nel calcolare le varie radici ($\sqrt[10]{\ }$, $\sqrt[100]{\ }$ e $\sqrt[1000]{\ }$), se si utilizzano soltanto le quattro operazioni fondamentali.

Commento sul metodo
Com'è facile vedere, da questi pochi esempi, questo metodo è utilizzabile praticamente solo in pochi e limitati casi, visto la reale complessità nell'effettuazione di alcune tipologie di operazioni.

Metodo generale per il calcolo dell'antilogaritmo
Tralasciando la teoria, che almeno in parte potrete trovare in appendice, vediamo ora il metodo generale per eseguire il calcolo dell'antilogaritmo. Questo metodo prevede l'utilizzo della formula $b^x = a^{x \cdot (\log_a b)}$, impostando "$a = e$", e dello sviluppo in serie di Taylor della funzione $f(x) = e^x$.
Lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $f(x) = e^x$ è:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Nonostante che lo sviluppo in serie converga per ogni valore di "x", è ovvio che più il $|x|$ (valore assoluto di "x") sarà piccolo e meno termini saranno necessari per arrivare a una determinata precisione della funzione $f(x) = e^x$. Per questo motivo sono stati elaborati alcuni metodi per limitare il $|x|$ in modo da ridurre il numero dei termini da calcolare ottenendo, ugualmente, una buona approssimazione della funzione $f(x) = e^x$.
Nel prossimo esempio vedremo come utilizzare lo sviluppo in serie di Taylor per calcolare l'antilogaritmo, poi illustrerò tre metodi per ridurre il $|x|$ in modo da semplificarne il relativo calcolo.

<u>Esempio</u>
Ammettiamo di voler calcolare l'antilogaritmo in base 8 di 3,5 che equivale a $\mathrm{antilog}_8 3{,}5$.
Premetto immediatamente che $\mathrm{antilog}_8 3{,}5 = 8^{3{,}5} \approx 1448{,}1547$.
Ovvero:

$$\mathrm{antilog}_8 3{,}5 = 8^{3{,}5} = 8^3 \cdot 8^{0{,}5} = 8^3 \cdot e^{0{,}5 \cdot \log_e 8}$$

Ora ammettiamo di sapere che il $\log_e 8 \approx 2{,}0794415$ (vedremo nel prossimo capitolo come eseguire questa tipologia di calcoli in modo semplice ed efficace).
Perciò il precedente calcolo si trasforma in:

$$\mathrm{antilog}_8 3{,}5 = 8^{3{,}5} = 8^3 \cdot 8^{0{,}5} = 8^3 \cdot e^{0{,}5 \cdot \log_e 8} \approx 512 \cdot e^{0{,}5 \cdot 2{,}0794415} \approx 512 \cdot e^{1{,}0397208}$$

A un occhio inesperto questo calcolo potrà sembrare più complesso di quello di partenza, ma se teniamo presente che è sempre possibile eseguire il calcolo della funzione $f(x) = e^x$ in modo semplice e veloce, sarà facile intuire il motivo della trasformazione appena eseguita.
Eseguendo il calcolo di $e^{1{,}0397208}$ otteniamo:

$$e^{1{,}0397208} = 1 + 1{,}0397208 + \frac{1{,}0397208^2}{2!} + \frac{1{,}0397208^3}{3!} + \frac{1{,}0397208^4}{4!} + \frac{1{,}0397208^5}{5!} +$$
$$+ \frac{1{,}0397208^6}{6!} + \frac{1{,}0397208^7}{7!} + \frac{1{,}0397208^8}{8!} + \frac{1{,}0397208^9}{9!} + \frac{1{,}0397208^{10}}{10!} + \ldots$$
$$e^{1{,}0397208} \approx 1 + 1{,}0397208 + 0{,}5405097 + 0{,}1873264 + 0{,}0486918 + 0{,}0101252 +$$
$$+ 0{,}0017546 + 0{,}0002606 + 0{,}0000339 + 0{,}0000039 + 0{,}0000004 = 2{,}828427$$

Il primo termine non considerato è $\dfrac{x^{11}}{11!}=\dfrac{1{,}0397208^{11}}{39916800}\approx 3{,}84\cdot 10^{-8}$.
Dopo tutti questi passaggi il calcolo finale diviene:
$\text{antilog}_8 3{,}5 = 8^{3{,}5} \approx 512\cdot e^{1{,}0397208} \approx 512\cdot 2{,}8284273 = 1448{,}1548$

Commento
All'aumentare del valore dell'esponente sarà necessario, per avere un buon risultato, aumentare il numero dei termini (dello sviluppo in serie di Taylor) da sommare, in modo che il primo termine, non considerato, sia veramente trascurabile.

Ottimizzazione del calcolo esponenziale
Dopo aver visto come eseguire il calcolo della funzione esponenziale, utilizzando lo sviluppo in serie di Taylor, vediamo ora tre semplici metodi per ridurre il $|x|$ in modo da semplificare e velocizzare il relativo calcolo esponenziale. Ovviamente niente vieterà di utilizzare i vari metodi contemporaneamente.

Primo metodo di ottimizzazione
Per $x>1$ possiamo separare la parte intera di "x" da quella decimale.
Ovvero $e^{1{,}791}=e^{1+0{,}791}=e^{1}\cdot e^{0{,}791}$ e invece di calcolare $e^{1{,}791}$ (ponendo $x=1{,}791$) basterà calcolare $e^{0{,}791}$ (ponendo $x=0{,}791$). In appendice è possibile vedere il calcolo che porta al risultato di $e^{1}=e\approx 2{,}718281828...$. Facciamo tre esempi per chiarire il metodo.

Esempio
Ammettiamo di voler calcolare l'antilogaritmo in base 8 di 3,5 che equivale a $\text{antilog}_8 3{,}5$
Premetto immediatamente che $\text{antilog}_8 3{,}5 = 8^{3{,}5}\approx 1448{,}1547$.
Ovvero:
$\text{antilog}_8 3{,}5 = 8^{3{,}5} = 8^{3}\cdot 8^{0{,}5} = 8^{3}\cdot e^{0{,}5\cdot\log_e 8}$
Ora ammettiamo di sapere che il $\log_e 8\approx 2{,}0794415$.
Perciò il precedente calcolo si trasforma in:
$\text{antilog}_8 3{,}5 = 8^{3{,}5} = 8^{3}\cdot 8^{0{,}5} = 8^{3}\cdot e^{0{,}5\cdot\log_e 8}\approx 512\cdot e^{0{,}5\cdot 2{,}0794415}\approx 512\cdot e^{1{,}0397208}\approx 512\cdot e^{1}\cdot e^{0{,}0397208}$
Eseguendo il calcolo di $e^{0{,}0397208}$ otteniamo:
$$e^{0{,}0397208}=1+0{,}0397208+\frac{0{,}0397208^{2}}{2!}+\frac{0{,}0397208^{3}}{3!}+\frac{0{,}0397208^{4}}{4!}+...$$
$$e^{0{,}0397208}\approx 1+0{,}0397208+0{,}0007889+0{,}0000104+0{,}0000001=1{,}0405202$$
Il primo termine non considerato è $\dfrac{x^{5}}{5!}=\dfrac{0{,}0397208^{5}}{120}\approx 8{,}24\cdot 10^{-10}$.
Dopo tutti questi passaggi il calcolo finale diviene:
$\text{antilog}_8 3{,}5 = 8^{3{,}5}\approx 512\cdot e^{1}\cdot e^{0{,}0397208}\approx 512\cdot e\cdot 1{,}0405202 = 1448{,}1547$

Esempio
Ammettiamo di voler calcolare l'antilogaritmo in base 8 di 3,7 che equivale a $\text{antilog}_8 3{,}7$
Premetto immediatamente che $\text{antilog}_8 3{,}7 = 8^{3{,}7}\approx 2194{,}9921$.
Ammettiamo, come abbiamo fatto prima, di saper che il $\log_e 8\approx 2{,}0794415$.
Ovvero:

$\text{antilog}_8 3{,}7 = 8^{3{,}7} = 8^3 \cdot 8^{0{,}7} = 8^3 \cdot e^{0{,}7 \cdot \log_e 8} \approx 512 \cdot e^{1{,}4556091} \approx 512 \cdot e^1 \cdot e^{0{,}4556091}$

Eseguendo il calcolo di $e^{0{,}4556091}$ otteniamo:

$$e^{0{,}4556091} = 1 + 0{,}4556091 + \frac{0{,}4556091^2}{2!} + \frac{0{,}4556091^3}{3!} + \frac{0{,}4556091^4}{4!} + \frac{0{,}4556091^5}{5!} +$$
$$+ \frac{0{,}4556091^6}{6!} + \frac{0{,}4556091^7}{7!} + \ldots$$

$$e^{0{,}4556091} \approx 1 + 0{,}4556091 + 0{,}1037898 + 0{,}0157625 + 0{,}0017954 + 0{,}0001636 +$$
$$+ 0{,}0000124 + 0{,}0000008 = 1{,}5771336$$

Il primo termine non considerato è $\frac{x^8}{8!} = \frac{0{,}4556091^8}{40320} \approx 4{,}60 \cdot 10^{-8}$.

Dopo tutti questi passaggi il calcolo finale diviene:

$\text{antilog}_8 3{,}7 = 8^{3{,}7} \approx 512 \cdot e^{1{,}4556091} \approx 512 \cdot e^1 \cdot e^{0{,}4556091} \approx 512 \cdot e \cdot 1{,}5771336 = 2194{,}9919$

<u>Esempio</u>

Ammettiamo di voler calcolare l'antilogaritmo in base 10 di 3,778 che equivale a $\text{antilog}_{10} 3{,}778$.

Premetto immediatamente che $\text{antilog}_{10} 3{,}778 = 10^{3{,}778} \approx 5997{,}9108$.

Ammettiamo, come abbiamo fatto prima, di saper che il $\log_e 10 \approx 2{,}3025851$.

Ovvero:

$\text{antilog}_{10} 3{,}778 = 10^{3{,}778} = 10^3 \cdot 10^{0{,}778} = 1000 \cdot e^{0{,}778 \log_e 10} \approx 1000 \cdot e^{1{,}7914112} = 1000 \cdot e^1 \cdot e^{0{,}7914112}$

Eseguire ora il calcolo di $e^{0{,}7914112}$.

$$e^{0{,}7914112} = 1 + 0{,}7914112 + \frac{0{,}7914112^2}{2!} + \frac{0{,}7914112^3}{3!} + \frac{0{,}7914112^4}{4!} + \frac{0{,}7914112^5}{5!} +$$
$$+ \frac{0{,}7914112^6}{6!} + \frac{0{,}7914112^7}{7!} + \frac{0{,}7914112^8}{8!} + \frac{0{,}7914112^9}{9!} + \ldots$$

$$e^{0{,}7914112} \approx 1 + 0{,}7914112 + 0{,}3131658 + 0{,}0826143 + 0{,}0163455 + 0{,}0025872 +$$
$$+ 0{,}0003413 + 0{,}0000386 + 0{,}0000038 + 0{,}0000003 \approx 2{,}2065080$$

Il primo termine non considerato è $\frac{x^{10}}{10!} = \frac{0{,}7914112^{10}}{3628800} \approx 2{,}66 \cdot 10^{-8}$.

Dopo questo calcolo intermedio otteniamo:

$\text{antilog}_{10} 3{,}778 = 10^{3{,}778} \approx 1000 \cdot e^{1{,}7914112} \approx 1000 \cdot e^1 \cdot 2{,}2065080 \approx 5997{,}9106$

Commento

Com'è possibile vedere, dagli esempi proposti, con questo metodo di ottimizzazione si riduce notevolmente il numero dei termini (dello sviluppo in serie di Taylor) da calcolare. All'aumentare dell'esponente di "e", ovviamente, i termini dello sviluppo in serie tendono nuovamente a crescere.

<u>Secondo metodo di ottimizzazione</u>

Per $1 > x > 0{,}5$ possiamo eseguire questa equivalenza $x' = (1 - x)$.

Ovvero $e^{0{,}791} = e^1 \cdot e^{-0{,}209}$ e invece di calcolare $e^{0{,}791}$ (ponendo $x = 0{,}791$) basterà calcolare $e^{-0{,}209}$ (ponendo $x = -0{,}209$). Oppure $e^{0{,}791} = e^1 \cdot e^{-0{,}209} = \frac{e}{e^{0{,}209}}$ e invece di calcolare $e^{0{,}791}$ (ponendo $x = 0{,}791$) basterà calcolare $e^{0{,}209}$ (ponendo $x = 0{,}209$).

<u>Esempio</u>
Ammettiamo di voler calcolare l'antilogaritmo in base 10 di 3,778 che equivale a $\text{antilog}_{10} 3{,}778$.
Premetto immediatamente che $\text{antilog}_{10} 3{,}778 = 10^{3{,}778} \approx 5997{,}9108$.
Ammettiamo di saper che il $\log_e 10 \approx 2{,}3025851$.
Ovvero:
$$\text{antilog}_{10} 3{,}778 = 10^{3{,}778} = 10^3 \cdot 10^{0{,}778} = 1000 \cdot e^{0{,}778 \log_e 10} \approx 1000 \cdot e^{1{,}7914112} \approx 1000 \cdot e^2 \cdot e^{-0{,}2085888}$$
Eseguire ora il calcolo di $e^{-0{,}2085888}$.
$$e^{-0{,}2085888} = 1 - 0{,}2085888 + \frac{0{,}2085888^2}{2!} - \frac{0{,}2085888^3}{3!} + \frac{0{,}2085888^4}{4!} - \frac{0{,}2085888^5}{5!} +$$
$$+ \frac{0{,}2085888^6}{6!} - \ldots$$
$$e^{-0{,}2085888} \approx 1 - 0{,}2085888 + 0{,}0217546 - 0{,}0015126 + 0{,}0000789 - 0{,}0000033 +$$
$$+ 0{,}0000001 = 0{,}8117289$$
Il primo termine non considerato è $\frac{x^7}{7!} = \frac{0{,}2085888^7}{5040} \approx 3{,}41 \cdot 10^{-9}$.
Dopo questo calcolo intermedio otteniamo:
$$\text{antilog}_{10} 3{,}778 = 10^{3{,}778} \approx 1000 \cdot e^2 \cdot e^{-0{,}2085888} \approx 1000 \cdot e^2 \cdot 0{,}8117289 \approx 5997{,}9104$$

<u>Esempio</u>
Ammettiamo di voler calcolare l'antilogaritmo in base 10 di 3,778 che equivale a $\text{antilog}_{10} 3{,}778$.
Premetto immediatamente che $\text{antilog}_{10} 3{,}778 = 10^{3{,}778} \approx 5997{,}9108$.
Ammettiamo di saper che il $\log_e 10 \approx 2{,}3025851$.
Ovvero:
$$\text{antilog}_{10} 3{,}778 = 10^{3{,}778} = 10^3 \cdot 10^{0{,}778} = 1000 \cdot e^{0{,}778 \log_e 10} \approx 1000 \cdot e^2 \cdot e^{-0{,}2085888} = 1000 \cdot \frac{e^2}{e^{0{,}2085888}}$$
Eseguiamo ora il calcolo di $e^{0{,}2085888}$.
$$e^{0{,}2085888} = 1 + 0{,}2085888 + \frac{0{,}2085888^2}{2!} + \frac{0{,}2085888^3}{3!} + \frac{0{,}2085888^4}{4!} + \frac{0{,}2085888^5}{5!} +$$
$$+ \frac{0{,}2085888^6}{6!} + \ldots$$
$$e^{0{,}2085888} \approx 1 + 0{,}2085888 + 0{,}0217546 + 0{,}0015126 + 0{,}0000789 + 0{,}0000033 +$$
$$+ 0{,}0000001 = 1{,}2319383$$
Il primo termine non considerato è $\frac{x^7}{7!} = \frac{0{,}2085888^7}{5040} \approx 3{,}41 \cdot 10^{-9}$.
Dopo questo calcolo intermedio otteniamo:
$$\text{antilog}_{10} 3{,}778 = 10^{3{,}778} \approx 1000 \cdot e^2 \cdot e^{-0{,}2085888} = 1000 \cdot \frac{e^2}{e^{0{,}2085888}} \approx 1000 \cdot \frac{e^2}{1{,}2319383} \approx 5997{,}9109$$

Commento
Com'è possibile vedere, e immaginare, i risultati degli ultimi tre esempi si equivalgono e i termini calcolati dello sviluppo in serie si sono ulteriormente ridotti rispetto al metodo precedente.

Terzo metodo di ottimizzazione

Possiamo eseguire anche un'altra fondamentale equivalenza e cioè $e^x = e^{(\frac{x}{n})n} = (e^{\frac{x}{n}})^n$. Questa trasformazione è sempre vera, ma ha una sua logica se "n" è un numero intero.
Ovvero $e^{0,791} = (e^{0,3955})^2$ e invece di calcolare $e^{0,791}$ (ponendo $x = 0,791$) basterà calcolare $e^{0,3955}$ (ponendo $x = 0,3955$) e poi elevare al quadrato il risultato ottenuto. Oppure $e^{0,791} = (e^{0,113})^7$ e invece di calcolare $e^{0,791}$ (ponendo $x = 0,791$) basterà calcolare $e^{0,113}$ (ponendo $x = 0,113$) e poi elevare alla settima potenza il risultato ottenuto.

Esempio
Ammettiamo di voler calcolare l'antilogaritmo in base 10 di 3,778 che equivale a $\text{antilog}_{10} 3,778$.
Premetto immediatamente che $\text{antilog}_{10} 3,778 = 10^{3,778} \approx 5997,9108$.
Ammettiamo di saper che il $\log_e 10 \approx 2,3025851$.
Ovvero:
$$\text{antilog}_{10} 3,778 = 10^{3,778} = 10^3 \cdot 10^{0,778} \approx 1000 \cdot e^2 \cdot e^{-0,2085888} = 1000 \cdot e^2 \cdot (e^{-0,1042944})^2$$
Eseguiamo ora il calcolo di $e^{-0,1042944}$.
$$e^{-0,1042944} = 1 - 0,1042944 + \frac{0,1042944^2}{2!} - \frac{0,1042944^3}{3!} + \frac{0,1042944^4}{4!} - \frac{0,1042944^5}{5!} + \ldots$$
$$e^{-0,1042944} \approx 1 - 0,1042944 + 0,0054387 - 0,0001891 + 0,0000049 - 0,0000001 = 0,900096$$
Il primo termine non considerato è $\frac{x^6}{6!} = \frac{0,1042944^6}{720} \approx 1,79 \cdot 10^{-9}$.
Dopo questo calcolo intermedio otteniamo:
$$\text{antilog}_{10} 3,778 = 10^{3,778} \approx 1000 \cdot e^2 \cdot (e^{-0,1042944})^2 = 1000 \cdot e^2 \cdot (0,900096)^2 \approx 5997,9105$$

Esempio
Ammettiamo di voler calcolare l'antilogaritmo in base 10 di 3,778 che equivale a $\text{antilog}_{10} 3,778$.
Premetto immediatamente che $\text{antilog}_{10} 3,778 = 10^{3,778} \approx 5997,9108$.
Ammettiamo di saper che il $\log_e 10 \approx 2,3025851$.
Ovvero:
$$\text{antilog}_{10} 3,778 = 10^{3,778} = 10^3 \cdot 10^{0,778} \approx 1000 \cdot e^2 \cdot e^{-0,2085888} = 1000 \cdot e^2 \cdot (e^{-0,0521472})^4$$
Eseguiamo ora il calcolo di $e^{-0,0521472}$.
$$e^{-0,0521472} = 1 - 0,0521472 + \frac{0,0521472^2}{2!} - \frac{0,0521472^3}{3!} + \frac{0,0521472^4}{4!} - \ldots$$
$$e^{-0,0521472} \approx 1 - 0,0521472 + 0,0013597 - 0,0000236 + 0,0000003 = 0,9491892$$
Il primo termine non considerato è $\frac{x^5}{5!} = \frac{0,0521472^5}{120} \approx 3,21 \cdot 10^{-9}$.
Dopo questo calcolo intermedio otteniamo:
$$\text{antilog}_{10} 3,778 = 10^{3,778} \approx 1000 \cdot e^2 \cdot (e^{-0,0521472})^4 = 1000 \cdot e^2 \cdot (0,9491892)^4 \approx 5997,9124$$

Commento
Com'è possibile vedere, dai due esempi proposti, se si riduce eccessivamente il valore dell'esponente, si riducono i termini da calcolare, ma si può perdere nella precisione del risultato.

3. Metodi di calcolo del logaritmo

In questo capitolo illustrerò alcuni semplici metodi per il calcolo del logaritmo. Vedremo che questo calcolo è un poco più complesso del calcolo dell'antilogaritmo (o calcolo esponenziale) visto al capitolo precedente. Un altro metodo lo potrete trovare in appendice al paragrafo "*Calcolo dei logaritmi attraverso un'equazione di grado N*".
Esiste un metodo per calcolare i logaritmi dove è necessario conoscere, preventivamente, il valore della base ed esistono anche altri metodi, dove non è necessario conoscerne, preventivamente, il suo valore. In appendice potrete trovare il calcolo del valore del numero trascendente "e".
Voglio ricordare che anche il calcolo logaritmico è, spesso e volentieri, un calcolo approssimato e nel caso di una leggera differenza, tra il valore vero e quello calcolato, questo dipenderà dalle approssimazioni effettuate nei vari passaggi altrimenti, nel caso di differenze sostanziali, ne giustificherò i motivi.

Metodo che deriva dalla stessa definizione
Qui illustrerò un metodo generale che deriva dalla stessa definizione di logaritmo, ma prima di fare degli esempi numerici andiamo a dimostrarlo.
Ovviamente abbiamo che:

$$\log_a b = x$$

Il valore di x può essere scritto anche come $x = p_1 + \frac{p_2}{10} + \frac{p_3}{100} + \frac{p_4}{1.000} + ...$ dove $p_1, p_2, p_3, p_4,...$ rappresentano dei numeri naturali compresi tra 0 e 9.
Per la definizione di logaritmo vale l'espressione $a^x = b$ e, sostituendo a "x", il valore $x = p_1 + \frac{p_2}{10} + \frac{p_3}{100} + \frac{p_4}{1.000} + ...$ otteniamo l'espressione $a^{p_1 + \frac{p_2}{10} + \frac{p_3}{100} + \frac{p_4}{1.000} + ...} = b$ e questa equivale all'espressione $a^{p_1} \cdot a^{\frac{p_2}{10}} \cdot a^{\frac{p_3}{100}} \cdot a^{\frac{p_4}{1.000}} \cdot ... = b$.
Ora calcoliamo il logaritmo di "b" nella base "a", approssimato alla prima cifra intera. Questo valore è "p_1". Eseguiamo il calcolo di "a^{p_1}" e poi dividiamo entrambi i termini, dell'espressione precedente, per il valore di "a^{p_1}".
Ora abbiamo $a^{\frac{p_2}{10}} \cdot a^{\frac{p_3}{100}} \cdot a^{\frac{p_4}{1.000}} \cdot ... = \frac{b}{a^{p_1}}$ e se eleviamo alla decima potenza, entrambi i termini dell'uguaglianza precedente, otteniamo $(a^{\frac{p_2}{10}} \cdot a^{\frac{p_3}{100}} \cdot a^{\frac{p_4}{1.000}} \cdot ...)^{10} = (\frac{b}{a^{p_1}})^{10}$ ed eseguendo i calcoli abbiamo che $a^{p_2} \cdot a^{\frac{p_3}{10}} \cdot a^{\frac{p_4}{100}} \cdot ... = b_1$ dove "b_1" rappresenta l'espressione $(\frac{b}{a^{p_1}})^{10}$.
L'espressione $a^{p_2} \cdot a^{\frac{p_3}{10}} \cdot a^{\frac{p_4}{100}} \cdot ... = b_1$ è del tutto simile all'espressione $a^{p_1} \cdot a^{\frac{p_2}{10}} \cdot a^{\frac{p_3}{100}} \cdot a^{\frac{p_4}{1.000}} \cdot ... = b$ vista precedentemente. Perciò sarà sufficiente reiterare il calcolo appena visto per ottenere tutte le cifre decimali che vogliamo. Facciamo immediatamente due esempi per meglio chiarire questo straordinario metodo.

<u>Esempio</u>
Calcoliamo il $\log_{10} 2$.

Il $\log_{10} 2 = x$ dove $x = p_1 + \frac{p_2}{10} + \frac{p_3}{100} + \frac{p_4}{1.000} + \frac{p_5}{10.000} + \frac{p_6}{100.000} + ...$

Calcolo del valore di p_1.
Poiché il $\log_{10} 1 = 0$ e il $\log_{10} 10 = 1$ possiamo dedurre che la prima cifra del $\log_{10} 2$ è 0 (zero). Cioè abbiamo stabilito che p_1 è uguale a **0** (zero).

Calcolo del valore di p_2.
Calcoliamo la prima cifra del logaritmo di $(\frac{2}{10^0})^{10} = 2^{10} = 1.024$. Poiché il $\log_{10} 1.000 = 3$ e il $\log_{10} 10.000 = 4$ possiamo dedurre che la prima cifra del $\log_{10} 1.024$ è 3. Cioè abbiamo stabilito che p_2 è uguale a **3**.

Calcolo del valore di p_3.
Calcoliamo la prima cifra del logaritmo di $(\frac{1.024}{10^3})^{10} = 1{,}024^{10} = 1{,}2676506...$. Poiché il $\log_{10} 1 = 0$ e il $\log_{10} 10 = 1$ possiamo dedurre che la prima cifra del $\log_{10} 1{,}2676506...$ è 0 (zero). Cioè abbiamo stabilito che p_3 è uguale a **0** (zero).

Calcolo del valore di p_4.
Calcoliamo la prima cifra del logaritmo di $(\frac{1{,}2676506}{10^0})^{10} = 1{,}2676506^{10} = 10{,}71508607...$. Poiché il $\log_{10} 10 = 1$ e il $\log_{10} 100 = 2$ possiamo dedurre che la prima cifra del $\log_{10} 10{,}71508607...$ è 1. Cioè abbiamo stabilito che p_4 è uguale a **1**.

Calcolo del valore di p_5.
Calcoliamo la prima cifra del logaritmo di $(\frac{10{,}71508607}{10^1})^{10} = 1{,}071508607^{10} = 1{,}995063117...$. Poiché il $\log_{10} 1 = 0$ e il $\log_{10} 10 = 1$ possiamo dedurre che la prima cifra del $\log_{10} 1{,}995063117...$ è 0 (zero). Cioè abbiamo stabilito che p_5 è uguale a **0** (zero).

Calcolo del valore di p_6.
Calcoliamo la prima cifra del logaritmo di $(\frac{1{,}995063117}{10^0})^{10} = 1{,}995063117^{10} = 999{,}002093...$. Poiché il $\log_{10} 100 = 2$ e il $\log_{10} 1.000 = 3$ possiamo dedurre che la prima cifra del $\log_{10} 999{,}002093...$ è 2. Cioè abbiamo stabilito che p_6 è uguale a **2**.

Calcolo del valore di p_7.
Calcoliamo la prima cifra del logaritmo di $(\frac{999{,}002093}{10^2})^{10} = 9{,}99002093^{10} = 9.900.656.229...$. Poiché il $\log_{10} 1.000.000.000 = 9$ e il $\log_{10} 10.000.000.000 = 10$ possiamo dedurre che la prima cifra del $\log_{10} 9.900.656.229,...$ è 9. Cioè abbiamo stabilito che p_7 è uguale a **9**.

Calcolo del valore di p_8.

Calcoliamo la prima cifra del logaritmo di $(\frac{9.900.656.229}{10^9})^{10} = 9{,}900656229^{10} = 9.049.817.306...$.
Poiché il $\log_{10} 1.000.000.000 = 9$ e il $\log_{10} 10.000.000.000 = 10$ possiamo dedurre che la prima cifra del $\log_{10} 9.049.817.306{,}...$ è 9. Cioè abbiamo stabilito che p_8 è uguale a **9**.

Calcolo del valore di p_9.
Calcoliamo la prima cifra del logaritmo di $(\frac{9.049.817.306}{10^9})^{10} = 9{,}049817306^{10} = 3.684.665.937...$.
Poiché il $\log_{10} 1.000.000.000 = 9$ e il $\log_{10} 10.000.000.000 = 10$ possiamo dedurre che la prima cifra del $\log_{10} 3.684.665.937{,}...$ è 9. Cioè abbiamo stabilito che p_9 è uguale a **9**.

Calcolo del valore di p_{10}.
Calcoliamo la prima cifra del logaritmo di $(\frac{3.684.665.937}{10^9})^{10} = 3{,}684665937^{10} = 461.297{,}5998...$.
Poiché il $\log_{10} 100.000 = 5$ e il $\log_{10} 1.000.000 = 6$ possiamo dedurre che la prima cifra del $\log_{10} 461.297{,}5998...$ è 5. Cioè abbiamo stabilito che p_{10} è uguale a **5**.

Ecc.

Poiché $x = p_1 + \frac{p_2}{10} + \frac{p_3}{100} + \frac{p_4}{1.000} + \frac{p_5}{10.000} + \frac{p_6}{100.000} + ...$, allora $x = 0{,}301029995...$
Perciò il $\log_{10} 2 = 0{,}301029995...$.

Osservazioni
Abbiamo appena visto come eseguire il calcolo del $\log_{10} 2$ e, in modo del tutto equivalente, possiamo calcolare il valore del logaritmo di qualunque numero reale. Ovviamente possiamo calcolare il logaritmo di un numero composto sommando i logaritmi dei numeri che lo compongono, piuttosto che calcolare il logaritmo in modo diretto. Eseguire il calcolo del logaritmo decimale, con questo metodo, è molto semplice perché è molto semplice eseguire il calcolo di 10^x (per "x" numero intero) ed è molto semplice eseguire la divisione $\frac{p}{10^x}$ con la dovuta precisione.
Vediamo ora alcuni valori dei logaritmi che possiamo ottenere, da quello appena calcolato, utilizzando i quattro teoremi fondamentali.

$\log_{10} 1.024 = \log_{10} 2^{10} = 10 \cdot \log_{10} 2 = 3{,}01029995...$
$\log_{10} 20 = \log_{10}(10 \cdot 2) = \log_{10} 10 + \log_{10} 2 = 1 + \log_{10} 2 = 1{,}301029995...$
$\log_{10} 4 = \log_{10}(2 \cdot 2) = \log_{10} 2 + \log_{10} 2 = 2 \cdot \log_{10} 2 = 0{,}602059991...$
$\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - \log_{10} 2 = 0{,}698970004...$
Ecc.

<u>Esempio</u>
Calcoliamo il $\log_e 2.013$.

Per calcolare i logaritmi naturali è prima necessario conoscere le potenze intere del numero "e".

$e^0 = 1$	$e^1 \approx 2{,}7182818$	$e^2 \approx 7{,}3890561$
$e^3 \approx 20{,}085537$	$e^4 \approx 54{,}59815$	$e^5 \approx 148{,}41316$
$e^6 \approx 403{,}42879$	$e^7 \approx 1.096{,}6332$	$e^8 \approx 2.980{,}958$
$e^9 \approx 8.103{,}0839$	$e^{10} \approx 22.026{,}466$	

Il $\log_e 2.013 = x$ dove $x = p_1 + \frac{p_2}{10} + \frac{p_3}{100} + \frac{p_4}{1.000} + \frac{p_5}{10.000} + \frac{p_6}{100.000} + ...$

Calcolo del valore di p_1.
Poiché il $\log_e 1.096{,}6332 = 7$ e il $\log_e 2.980{,}958 = 8$ possiamo dedurre che la prima cifra del $\log_e 2013$ è 7. Cioè abbiamo stabilito che p_1 è uguale a **7**.

Calcolo del valore di p_2.
Calcoliamo la prima cifra del logaritmo di $(\frac{2.013}{e^7})^{10} = 1{,}8356184^{10} = 434{,}33419...$. Poiché il $\log_e 403{,}42879 = 6$ e il $\log_e 1.096{,}6332 = 7$ possiamo dedurre che la prima cifra del $\log_e 434{,}33419$ è 6. Cioè abbiamo stabilito che p_2 è uguale a **6**.

Calcolo del valore di p_3.
Calcoliamo la prima cifra del logaritmo di $(\frac{434{,}33419}{e^6})^{10} = 1{,}0766068^{10} = 2{,}0920460...$. Poiché il $\log_e 1 = 0$ e il $\log_e 2{,}7182818 = 1$ possiamo dedurre che la prima cifra del $\log_e 2{,}0920460$ è 0. Cioè abbiamo stabilito che p_3 è uguale a **0** (zero).

Calcolo del valore di p_4.
Calcoliamo la prima cifra del logaritmo di $(\frac{2{,}0920460}{e^0})^{10} = 2{,}0920460^{10} = 1.605{,}8775...$. Poiché il $\log_e 1.096{,}6332 = 7$ e il $\log_e 2.980{,}958 = 8$ possiamo dedurre che la prima cifra del $\log_e 1.605{,}8775$ è 7. Cioè abbiamo stabilito che p_4 è uguale a **7**.

Calcolo del valore di p_5.
Calcoliamo la prima cifra del logaritmo di $(\frac{1.605{,}8775}{e^7})^{10} = 1{,}4643707^{10} = 45{,}343018...$. Poiché il $\log_e 20{,}085537 = 3$ e il $\log_e 54{,}59815 = 4$ possiamo dedurre che la prima cifra del $\log_e 45{,}343018$ è 3. Cioè abbiamo stabilito che p_5 è uguale a **3**.

Calcolo del valore di p_6.
Calcoliamo la prima cifra del logaritmo di $(\frac{45{,}343018}{e^3})^{10} = 2{,}257496^{10} = 3.437{,}7147...$. Poiché Visto che il $\log_e 2.980{,}958 = 8$ e il $\log_e 8.103{,}0839 = 9$ possiamo dedurre che la prima cifra del $\log_e 3.437{,}7147$ è 8. Cioè abbiamo stabilito che p_6 è uguale a **8**.

Calcolo del valore di p_7.

Calcoliamo la prima cifra del logaritmo di $(\frac{3.437,7147}{e^8})^{10} = 1{,}1532248^{10} = 4{,}1604447...$. Poiché il $\log_e 2{,}7182818 = 1$ e il $\log_e 7{,}3890561 = 2$ possiamo dedurre che la prima cifra del $\log_e 4{,}1604447$ è 1. Cioè abbiamo stabilito che p_7 è uguale a **1**.

Calcolo del valore di p_8.

Calcoliamo la prima cifra del logaritmo di $(\frac{4{,}1604447}{e^1})^{10} = 1{,}5305421^{10} = 70{,}542816...$. Poiché il $\log_e 54{,}59815 = 4$ e il $\log_e 148{,}41316 = 5$ possiamo dedurre che la prima cifra del $\log_e 70{,}542816$ è 4. Cioè abbiamo stabilito che p_8 è uguale a **4**.

Calcolo del valore di p_9.

Calcoliamo la prima cifra del logaritmo di $(\frac{70{,}542816}{e^4})^{10} = 1{,}2920367^{10} = 12{,}964287...$. Poiché il $\log_e 7{,}3890561 = 2$ e il $\log_e 20{,}085537 = 3$ possiamo dedurre che la prima cifra del $\log_e 12{,}964287$ è 2. Cioè abbiamo stabilito che p_9 è uguale a **2**.

Calcolo del valore di p_{10}.

Calcoliamo la prima cifra del logaritmo di $(\frac{12{,}964287}{e^2})^{10} = 1{,}7545255^{10} = 276{,}43736...$. Poiché il $\log_e 148{,}42316 = 5$ e il $\log_e 403{,}42879 = 6$ possiamo dedurre che la prima cifra del $\log_e 276{,}43736$ è 5. Cioè abbiamo stabilito che p_{10} è uguale a **5**.

Ecc.

Poiché $x = p_1 + \frac{p_2}{10} + \frac{p_3}{100} + \frac{p_4}{1.000} + \frac{p_5}{10.000} + \frac{p_6}{100.000} + ...$, allora $x = 7{,}607381425...$
Perciò il $\log_e 2.013 = 7{,}607381425...$.

Osservazioni
Abbiamo appena visto come eseguire il calcolo del $\log_e 2013$ e, in modo del tutto equivalente, possiamo calcolare il valore del logaritmo di qualunque numero reale. Ovviamente possiamo calcolare il logaritmo di un numero composto sommando i logaritmi dei numeri che lo compongono, piuttosto che calcolare il logaritmo in modo diretto. Comunque, eseguire il calcolo dei logaritmi naturali con questo metodo non è molto semplice (a differenza dei logaritmi decimali), perché non è molto semplice eseguire il calcolo di e^x (per "x" numero intero) e non è molto semplice eseguire la divisione $\frac{n}{e^x}$ con la dovuta precisione.

Metodo dell'aumento finito - Teorema di Taylor
Tralasciando la teoria che, almeno in parte, potrete trovare in appendice, vediamo come sia possibile utilizzare il teorema di Taylor per eseguire il calcolo dei logaritmi naturali (in base "e"), dei numeri reali. Grazie al teorema di Taylor illustrerò diversi metodi per eseguire il calcolo del logaritmo naturale illustrandone i pregi e i difetti.

Per ottenere gli equivalenti logaritmi decimali si deve usare la relazione vista precedentemente e cioè $\log_{10} x = \log_{10} e \cdot \log_e x = \dfrac{\log_e x}{\log_e 10} = M \cdot \log_e x$.

Primo metodo

Il metodo più ovvio è quello di utilizzare lo sviluppo in serie della funzione $\log_e(1+x)$ che è:

$$\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{10}}{10} + \frac{x^{11}}{11} - ...$$

Ovviamente il valore di "x" deve verificare la seguente disuguaglianza $-1 < x \le +1$ e le motivazioni le potrete trovare in appendice. Osservando il suo intervallo di utilizzo, possiamo dedurre che la precedente formula non è utilizzabile per calcolare i logaritmi dei numeri maggiori di 2. Questo, però, non significa che questa formula sia inutile anzi, vedremo nei prossimi metodi come utilizzarla al meglio per ottenere un metodo molto efficace. Ora facciamo immediatamente alcuni esempi per rendere chiaro il suo utilizzo.

Esempio

Calcoliamo il logaritmo del numero 1,4 cioè il $\log_e 1{,}4$

Premetto immediatamente che il $\log_e 1{,}4$ = 0,33647223…

$\log_e 1{,}4 = \log_e(1+x)$ con "$x = 0{,}4$"

$$\log_e 1{,}4 = \log_e(1+0{,}4) = \frac{4}{10} - \frac{4^2}{2 \cdot 10^2} + \frac{4^3}{3 \cdot 10^3} - \frac{4^4}{4 \cdot 10^4} + \frac{4^5}{5 \cdot 10^5} - \frac{4^6}{6 \cdot 10^6} + \frac{4^7}{7 \cdot 10^7} - ...$$

Eseguendo i relativi calcoli otteniamo:

$$\log_e 1{,}4 \approx 0{,}4 - 0{,}08 + 0{,}021\overline{3} - 0{,}0064 + 0{,}002048 - 0{,}0006827 + 0{,}0002341 = 0{,}3365327$$

In un confronto è significativo l'errore assoluto ($Vc - Vv$), ma ancora più significativo è l'errore relativo ($\dfrac{Vc - Vv}{Vv}$) dove con Vc designo il "valore calcolato" e con Vv designo il "valore vero".

Calcolo del valore assoluto dell'errore relativo ($\left|\dfrac{Vc - Vv}{Vv}\right|$).

In questo esempio abbiamo $\left|\dfrac{Vc - Vv}{Vv}\right| = \left|\dfrac{0{,}3365327 - 0{,}33647223}{0{,}33647223}\right| \approx 1{,}80 \cdot 10^{-4}$ e il primo termine non considerato vale $-\dfrac{4^8}{8 \cdot 10^8} \approx -8{,}19 \cdot 10^{-5}$.

Esempio

Calcoliamo il logaritmo del numero 0,6 cioè il $\log_e 0{,}6$

Premetto immediatamente che il $\log_e 0{,}6$ = -0,51082562…

$\log_e 0{,}6 = \log_e(1+x)$ con "$x = -0{,}4$"

Nell'ipotesi che il valore di x sia negativo, lo sviluppo della precedente serie diviene:

$$\log_e(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^7}{7} - ...$$

Con questo sviluppo bisogna considerare il valore di "x" positivo, cioè "$x = 0{,}4$"

$$\log_e 0{,}6 = \log_e(1-0{,}4) = -\frac{4}{10} - \frac{4^2}{2 \cdot 10^2} - \frac{4^3}{3 \cdot 10^3} - \frac{4^4}{4 \cdot 10^4} - \frac{4^5}{5 \cdot 10^5} - \frac{4^6}{6 \cdot 10^6} - \frac{4^7}{7 \cdot 10^7} - ...$$

Eseguendo i relativi calcoli otteniamo:

$\log_e 0{,}6 \approx -0{,}4 - 0{,}08 - 0{,}021\overline{3} - 0{,}0064 - 0{,}002048 - 0{,}0006827 - 0{,}0002341 = -0{,}5106981$

Calcolo del valore assoluto dell'errore relativo.

In questo esempio abbiamo $\left|\frac{Vc - Vv}{Vv}\right| = \left|\frac{-0{,}5106981 + 0{,}51082562}{-0{,}51082562}\right| \approx 2{,}50 \cdot 10^{-4}$ e il primo termine non considerato vale $-\frac{4^8}{8 \cdot 10^8} \approx -8{,}19 \cdot 10^{-5}$.

<u>Esempio</u>

Calcoliamo il logaritmo del numero 2 cioè il $\log_e 2$

Premetto immediatamente che il $\log_e 2 = 0{,}69314718\ldots$

$\log_e 2 = \log_e(1 + x)$ con "$x = 1$"

$$\log_e(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + \frac{x^9}{9} - \ldots$$

$$\log_e 2 = 1 - \frac{1^2}{2} + \frac{1^3}{3} - \frac{1^4}{4} + \frac{1^5}{5} - \frac{1^6}{6} + \frac{1^7}{7} - \frac{1^8}{8} + \frac{1^9}{9} - \ldots = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \ldots$$

Aggiungendo alcuni termini ed eseguendo i relativi calcoli otteniamo:

$$\log_e 2 \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \frac{1}{15} - \frac{1}{16} + \frac{1}{17} - \frac{1}{18} + \frac{1}{19} - \frac{1}{20} =$$
$$= 0{,}6687714$$

Calcolo del valore assoluto dell'errore relativo.

In questo esempio abbiamo $\left|\frac{Vc - Vv}{Vv}\right| = \left|\frac{0{,}6687714 - 0{,}69314718}{0{,}69314718}\right| \approx 3{,}52 \cdot 10^{-2}$ e il primo termine non considerato vale $\frac{1}{21} \approx 4{,}76 \cdot 10^{-2}$. In questo esempio l'errore è ancora piuttosto grande nonostante si sia considerato ben 20 termini. Per rimediare a questo inconveniente possiamo aggiungere altri termini al calcolo rendendolo, però, ancora più complesso, oppure possiamo utilizzare altri metodi più efficienti che vedremo tra poco.

Commento sul metodo

Da questi pochi esempi possiamo dedurre che più $|x|$ (valore assoluto di "x") è piccolo, a parità di termini considerati nella serie, più il valore calcolato di $\log_e(1 + x)$ si avvicinerà al valore vero. Oppure (che è equivalente) più $|x|$ è piccolo meno termini dovranno essere calcolati per ottenere un valore accettabile di $\log_e(1 + x)$.

Osservazione

Abbiamo appena visto che:

$$\log_e 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \ldots$$

Da questa espressione possiamo, con estrema facilità, ricavarne anche altre due.

$$\log_e 2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{9 \cdot 10} + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{56} + \frac{1}{90} + \ldots$$

$$\log_e 2 = 1 - \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{4 \cdot 5} - \frac{1}{6 \cdot 7} - \frac{1}{8 \cdot 9} - \frac{1}{10 \cdot 11} - \ldots = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{20} - \frac{1}{42} - \frac{1}{72} - \frac{1}{110} - \ldots$$

Anche queste due nuove espressioni sono molto semplici da ricordare ma, come l'espressione da cui sono state dedotte, non sono adatte al calcolo pratico del $\log_e 2$.

Secondo metodo

Come abbiamo precedentemente dimostrato il $\log_a n = -\log_a \frac{1}{n}$ e grazie a questa uguaglianza possiamo calcolare, almeno teoricamente, i logaritmi dei numeri maggiori di 2. Vediamo alcuni esempi.

Esempio

Calcoliamo il logaritmo del numero 2 cioè il $\log_e 2$

Premetto immediatamente che il $\log_e 2 = 0{,}69314718\ldots$

Per calcolare il $\log_e 2$ è sufficiente calcolare il $\log_e \frac{1}{2}$ ovvero il $\log_e 0{,}5$.

Perciò abbiamo:

$\log_e 0{,}5 = \log_e (1 - x)$ con "$x = 0{,}5$"

$$\log_e 0{,}5 = \log_e (1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^7}{7} - \ldots$$

$$\log_e 0{,}5 = \log_e (1-0{,}5) = -(0{,}5) - \frac{(0{,}5)^2}{2} - \frac{(0{,}5)^3}{3} - \frac{(0{,}5)^4}{4} - \frac{(0{,}5)^5}{5} - \frac{(0{,}5)^6}{6} - \frac{(0{,}5)^7}{7} - \ldots$$

Eseguendo i relativi calcoli otteniamo:

$$\log_e 0{,}5 \approx -0{,}5 - 0{,}125 - 0{,}041\overline{6} - 0{,}015625 - 0{,}00625 - 0{,}0026042 - 0{,}0011161 = -0{,}6922619$$

Da cui si deduce che:

$$\log_e 2 = -\log_e 0{,}5 \approx 0{,}6922619$$

Calcolo del valore assoluto dell'errore relativo.

In questo esempio abbiamo $\left|\frac{Vc - Vv}{Vv}\right| = \left|\frac{0{,}6922619 - 0{,}69314718}{0{,}69314718}\right| \approx 1{,}28 \cdot 10^{-3}$ e il primo termine non considerato vale $\frac{0{,}5^8}{8} \approx 4{,}88 \cdot 10^{-4}$.

Esempio

Calcoliamo il logaritmo del numero 3 cioè il $\log_e 3$

Premetto immediatamente che il $\log_e 3 = 1{,}0986123\ldots$

Per calcolare il $\log_e 3$ è sufficiente calcolare il $\log_e \frac{1}{3}$ ovvero il $\log_e 0{,}\overline{3}$.

Perciò abbiamo:

$\log_e 0{,}\overline{3} = \log_e (1 - x)$ con "$x = 0{,}\overline{6}$"

$$\log_e 0{,}\overline{3} = \log_e (1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^7}{7} - \ldots$$

$$\log_e 0{,}\overline{3} = \log_e (1-0{,}\overline{6}) = -(0{,}\overline{6}) - \frac{(0{,}\overline{6})^2}{2} - \frac{(0{,}\overline{6})^3}{3} - \frac{(0{,}\overline{6})^4}{4} - \frac{(0{,}\overline{6})^5}{5} - \frac{(0{,}\overline{6})^6}{6} - \frac{(0{,}\overline{6})^7}{7} - \ldots$$

Eseguendo i relativi calcoli otteniamo:

$\log_e 0,\overline{3} \approx -0,\overline{6} - 0,\overline{2} - 0,0987654 - 0,0493827 - 0,0263374 - 0,0146319 - 0,0083611 =$
$= -1,0863673$
Da cui si deduce che:
$\log_e 3 = -\log_e 0,\overline{3} \approx 1,0863673$

Calcolo del valore assoluto dell'errore relativo.
In questo esempio abbiamo $\left|\frac{Vc - Vv}{Vv}\right| = \left|\frac{1,0863673 - 1,0986123}{1,0986123}\right| \approx 1,11 \cdot 10^{-2}$ e il primo termine non considerato vale $\frac{(0,\overline{6})^8}{7} \approx 4,88 \cdot 10^{-3}$.

<u>Esempio</u>
Calcoliamo il logaritmo del numero 5 cioè il $\log_e 5$
Premetto immediatamente che il $\log_e 5 = 1,60943791\ldots$
Per calcolare il $\log_e 5$ è sufficiente calcolare il $\log_e \frac{1}{5}$ ovvero il $\log_e 0,2$.
Perciò abbiamo:
$\log_e 0,2 = \log_e (1 - x)$ con "$x = 0,8$"
$\log_e 0,2 = \log_e (1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^7}{7} - ...$
$\log_e 0,2 = \log_e (1 - 0,8) = -0,8 - \frac{0,8^2}{2} - \frac{0,8^3}{3} - \frac{0,8^4}{4} - \frac{0,8^5}{5} - \frac{0,8^6}{6} - \frac{0,8^7}{7} - ...$
Eseguendo i relativi calcoli otteniamo:
$\log_e 0,2 \approx -0,8 - 0,32 - 0,170\overline{6} - 0,1024 - 0,065536 - 0,0436907 - 0,0299593 = 1,5322526$
Da cui si deduce che:
$\log_e 5 = -\log_e 0,2 \approx 1,5322526$

Calcolo del valore assoluto dell'errore relativo.
In questo esempio abbiamo $\left|\frac{Vc - Vv}{Vv}\right| = \left|\frac{1,5322526 - 1,60943791}{1,60943791}\right| \approx 4,80 \cdot 10^{-2}$ e il primo termine non considerato vale $\frac{0,8^8}{8} \approx 2,10 \cdot 10^{-2}$.

Commento sul metodo
Da questi pochi esempi possiamo dedurre che con questo metodo è, almeno teoricamente, fattibile eseguire il calcolo dei logaritmi dei numeri maggiori di 2. E' facilmente dimostrabile che, utilizzando questo metodo, il valore dei logaritmi dei numeri maggiori di 2 sono sempre inferiori al valore vero. Raffrontando il calcolo del $\log_e 2$ effettuato con i due metodi appena visti, possiamo notare un deciso miglioramento.
Nonostante tutto questo metodo richiede molti termini per ottenere un risultato veramente accettabile e, poiché esistono metodi più efficienti, non è mai utilizzato.

<u>Terzo metodo</u>
Per ottenere un nuovo e più efficiente metodo, rispetto ai precedenti metodi, dobbiamo riscrivere le due serie che abbiamo visto nel "Primo metodo".

$\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - ...$

$\log_e(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - ...$

Se sottraiamo alla prima serie, la seconda serie otteniamo:

$\log_e(1+x) - \log_e(1-x) \ = \ (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - ...) - (-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - ...)$

Semplificando abbiamo:

$\log_e \frac{1+x}{1-x} = (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - ...) + (x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + ...)$

$\log_e \frac{1+x}{1-x} = (2x + 2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{5} + 2\frac{x^7}{7} + 2\frac{x^9}{9} + 2\frac{x^{11}}{11} + ...)$

$\log_e \frac{1+x}{1-x} = 2(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{11}}{11} + ...)$

E' facile vedere che per $x = \frac{1}{3}$ abbiamo $\frac{1+x}{1-x} = 2$ e per $x > \frac{1}{3}$ otteniamo che $\frac{1+x}{1-x} > 2$. Perciò, anche con questo metodo, è possibile calcolare, almeno teoricamente, i logaritmi naturali per numeri maggiori di 2.

<u>Esempio</u>

Calcoliamo il logaritmo del numero 2 cioè il $\log_e 2$

Premetto immediatamente che il $\log_e 2$ = 0,69314718…

$\log_e 2 = \log_e \frac{1+x}{1-x}$ con "$x = \frac{1}{3}$"

$\log_e 2 = \log_e \frac{1+x}{1-x} = 2 \cdot (\frac{1}{3} + \frac{1^3}{3^3 \cdot 3} + \frac{1^5}{3^5 \cdot 5} + \frac{1^7}{3^7 \cdot 7} + \frac{1^9}{3^9 \cdot 9} + \frac{1^{11}}{3^{11} \cdot 11} + ...)$

$\log_e 2 = 2 \cdot (\frac{1}{3} + \frac{1}{3^3 \cdot 3} + \frac{1}{3^5 \cdot 5} + \frac{1}{3^7 \cdot 7} + \frac{1}{3^9 \cdot 9} + \frac{1}{3^{11} \cdot 11} + ...) \approx$

$\approx 2 \cdot (0,\overline{3} + 0,0123457 + 0,000823 + 0,0000653 + 0,0000056 + 0,0000005) = 0,6931468$

Calcolo del valore assoluto dell'errore relativo.

In questo esempio abbiamo $\left|\frac{Vc - Vv}{Vv}\right| = \left|\frac{0,6931468 - 0,69314718}{0,69314718}\right| \approx 5,48 \cdot 10^{-7}$ e il primo termine non considerato vale $\frac{1}{3^{13} \cdot 13} \approx 4,8 \cdot 10^{-8}$.

<u>Esempio</u>

Calcoliamo il logaritmo del numero 3 cioè il $\log_e 3$

Premetto immediatamente che il $\log_e 3$ = 1,0986123…

Per rendere maggiormente fruibile questo metodo conviene impostare $\frac{1+x}{1-x} = z$ per poi risolverla rispetto a "x". Con semplici passaggi ricaviamo che $x = \frac{z-1}{z+1}$.

Andiamo ora a calcolare il valore di "x" sapendo che $z = 3$.

Perciò facendo le dovute sostituzioni, otteniamo che $x = \frac{3-1}{3+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

$$\log_e 3 = 2 \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1^3}{2^3 \cdot 3} + \frac{1^5}{2^5 \cdot 5} + \frac{1^7}{2^7 \cdot 7} + \frac{1^9}{2^9 \cdot 9} + \frac{1^{11}}{2^{11} \cdot 11} + ...) \approx$$
$$\approx 2 \cdot (0{,}5 + 0{,}041\overline{6} + 0{,}00625 + 0{,}0011161 + 0{,}000217 + 0{,}0000444) = 2 \cdot (0{,}5492941) = 1{,}0985882$$

Calcolo del valore assoluto dell'errore relativo.

In questo esempio abbiamo $\left|\frac{Vc - Vv}{Vv}\right| = \left|\frac{1{,}0985882 - 1{,}0986123}{1{,}0986123}\right| \approx 2{,}19 \cdot 10^{-5}$ e il primo termine non considerato vale $\frac{1}{2^{13} \cdot 13} \approx 9{,}39 \cdot 10^{-6}$.

<u>Esempio</u>

Calcoliamo il logaritmo del numero 31 cioè il $\log_e 31$

Premetto immediatamente che il $\log_e 31$ = 3,4339872…

Andiamo ora a calcolare il valore di "x" sapendo che $z = 31$.

Perciò abbiamo $x = \frac{z-1}{z+1}$ e facendo le dovute sostituzioni, otteniamo che $x = \frac{31-1}{31+1} = \frac{30}{32} = \frac{15}{16}$.

$$\log_e 31 = 2 \cdot (\frac{15}{16} + \frac{15^3}{16^3 \cdot 3} + \frac{15^5}{16^5 \cdot 5} + \frac{15^7}{16^7 \cdot 7} + \frac{15^9}{16^9 \cdot 9} + \frac{15^{11}}{16^{11} \cdot 11} + ...) \approx$$
$$\approx 2 \cdot (0{,}9375 + 0{,}2746582 + 0{,}1448393 + 0{,}0909287 + 0{,}0621583 + 0{,}0446983) = 3{,}1095656$$

Calcolo del valore assoluto dell'errore relativo.

In questo esempio abbiamo $\left|\frac{Vc - Vv}{Vv}\right| = \left|\frac{3{,}1095656 - 3{,}4339872}{3{,}4339872}\right| \approx 9{,}45 \cdot 10^{-2}$ e il primo termine non considerato vale $\frac{15^{13}}{16^{13} \cdot 13} \approx 3{,}32 \cdot 10^{-2}$.

Commento sul metodo

Con questo metodo il valore calcolato sarà sempre inferiore a quello vero, poiché tutti i termini dello sviluppo in serie sono positivi. Almeno in linea di principio è possibile calcolare il logaritmo naturale di un qualunque numero reale, perché il valore di "x" sarà sempre minore di 1 indipendentemente dal valore di "z".

Questo metodo ha, però, un grande difetto. All'aumentare del valore di "z" aumenta il valore di "x" (che sarà, comunque, sempre minore di 1) e, di conseguenza, sarà necessario calcolare un numero maggiore di termini, dello sviluppo in serie, prima di poter ottenere un risultato accettabile.

Nei tre esempi precedenti è possibile vedere questo fenomeno che rende praticamente inutilizzabile questo metodo anche per valori di "z" relativamente piccoli.

Cioè per il calcolo del $\log_e 2$ abbiamo eseguito la somma di 6 termini per ottenere una precisione di $5{,}48 \cdot 10^{-7}$. Per il calcolo del $\log_e 3$ abbiamo eseguito la somma di 6 termini per ottenere una precisione di $2{,}19 \cdot 10^{-5}$. Per il calcolo del $\log_e 31$ abbiamo eseguito la somma di 6 termini per ottenere una precisione di $9{,}45 \cdot 10^{-2}$.

Per rendere maggiormente palese questo fenomeno dirò che per ottenere, nel calcolo del $\log_e 31$, un valore con una precisione di $\approx 10^{-5}$ sarebbe stato necessario calcolare circa 60 termini (con 60 termini l'errore è $\approx 1{,}46 \cdot 10^{-5}$) ottenendo, come risultato, per il valore $\log_e 31 = 3{,}43393717$.

Quarto metodo

Ora vedremo un nuovo e più efficiente metodo per rendere praticamente utilizzabile il metodo precedentemente illustrato. Questo metodo è il *vero* metodo per il calcolo dei valori dei logaritmi permettendo una precisione sufficiente senza essere costretti a dover calcolare centinaia di termini.
Qui riporto il notevole risultato che abbiamo visto nel metodo precedente.

$$\log_e \frac{1+x}{1-x} = 2\cdot(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}+\frac{x^{11}}{11}+...)$$

Ora impostiamo $\frac{1+x}{1-x}=\frac{a+n}{a}$ e poi la risolviamo rispetto a "x". Con semplici passaggi ricaviamo che $x=\frac{n}{2a+n}$.

Perciò abbiamo che:

$$\log_e \frac{1+x}{1-x}=\log_e \frac{a+n}{a}=2\cdot(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}+\frac{x^{11}}{11}+...)$$

Oppure, che è uguale:

$$\log_e \frac{a+n}{a}=2\cdot(\frac{n}{2a+n}+\frac{1}{3}\cdot(\frac{n}{2a+n})^3+\frac{1}{5}\cdot(\frac{n}{2a+n})^5+\frac{1}{7}\cdot(\frac{n}{2a+n})^7+\frac{1}{9}\cdot(\frac{n}{2a+n})^9+...)$$

O, in modo ancor più chiaro:

$$\log_e(a+n)=\log_e a+2\cdot(\frac{n}{2a+n}+\frac{n^3}{3\cdot(2a+n)^3}+\frac{n^5}{5\cdot(2a+n)^5}+\frac{n^7}{7\cdot(2a+n)^7}+\frac{n^9}{9\cdot(2a+n)^9}+...)$$

Questa formula è sempre valida per tutti i valori positivi di "a" e di "n" poiché per questi valori, "x" ($x=\frac{n}{2a+n}$) è sempre compreso tra il valore di 0 (zero) e 1 ($0<x<1$). Questa formula è tanto più comoda, per il calcolo dei logaritmi, quanto più è piccola la frazione $\frac{n}{2a+n}$ o, che è identico, quanto è più piccolo "n" rispetto a "a".
Com'è possibile vedere questa formula non permette il calcolo del logaritmo di un numero (come invece avviene con i precedenti metodi), ma permette di calcolare l'incremento, da sommare al logaritmo di un numero conosciuto, per ottenere il logaritmo del nuovo numero cercato.

Esempio

Calcoliamo il logaritmo del numero 2 cioè il $\log_e 2$

Premetto immediatamente che il $\log_e 2 = 0{,}69314718\ldots$

Poiché vogliamo calcolare il $\log_e 2$ significa che $(a+n)=2$. Abbiamo detto che "n" deve essere il più piccolo possibile e, per questo motivo, lo impostiamo al valore di 1 ($n=1$). Ovviamente ora è possibile calcolare che $a=1$ e poi che $x=\frac{1}{3}$ ($x=\frac{n}{2a+n}=\frac{1}{2\cdot 1+1}=\frac{1}{3}$). Perciò:

$$\log_e 2=\log_e 1+2\cdot(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}+\frac{1}{9\cdot 3^9}+\frac{1}{11\cdot 3^{11}}+\frac{1}{13\cdot 3^{13}}+...)$$

Poiché $\log_e 1=0$ la precedente formula si trasforma in:

$$\log_e 2\approx 2\cdot(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}+\frac{1}{9\cdot 3^9}+\frac{1}{11\cdot 3^{11}}+\frac{1}{13\cdot 3^{13}})$$

Questa formula è identica alla formula che abbiamo visto nel precedente metodo. Ovviamente è necessario eseguire i vari calcoli in modo da minimizzare l'errore poiché una piccola imprecisione, in questo calcolo, si ripercuoterebbe inevitabilmente nei calcoli dei successivi logaritmi.

$\log_e 2 \approx 2 \cdot (0,\bar{3} + 0,01234568 + 0,00082305 + 0,00006532 + 0,00000564 + 0,00000051 + 0,00000005) =$
$= 2 \cdot (0,34657358) = 0,69314716$

Da cui si ricava che $\log_e 2 = 0,69314716$.

Esempio

Calcoliamo il logaritmo del numero 3 cioè il $\log_e 3$

Premetto immediatamente che il $\log_e 3 = 1,09861228\ldots$

Poiché vogliamo calcolare il $\log_e 3$ significa che $(a+n) = 3$. Abbiamo detto che "n" deve essere il più piccolo possibile e, per questo motivo, lo impostiamo al valore di 1 ($n = 1$). Ovviamente ora è possibile calcolare che $a = 2$ e poi che $x = \frac{1}{5}$ ($x = \frac{n}{2a+n} = \frac{1}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{1}{5}$). Perciò:

$$\log_e 3 = \log_e 2 + 2 \cdot (\frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \frac{1}{9 \cdot 5^9} + ...)$$

$$\log_e 3 \approx \log_e 2 + 2 \cdot (0,2 + 0,002\bar{6} + 0,000064 + 0,000001828 + 0,000000057)$$

$$\log_e 3 \approx 0,69314716 + 2 \cdot 0,20273255 = 0,69314716 + 0,40546510 = 1,09861226$$

Esempio

Calcoliamo il logaritmo del numero 5 cioè il $\log_e 5$

Premetto immediatamente che il $\log_e 5 = 1,60943791\ldots$

Poiché vogliamo calcolare il $\log_e 5$ significa che $(a+n) = 5$. Abbiamo detto che "n" deve essere il più piccolo possibile e, per questo motivo, lo impostiamo al valore di 1 ($n = 1$). Ovviamente ora è possibile calcolare che $a = 4$ e poi che $x = \frac{1}{9}$ ($x = \frac{n}{2a+n} = \frac{1}{2 \cdot 4 + 1} = \frac{1}{9}$). Perciò:

$$\log_e 5 = \log_e 4 + 2 \cdot (\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \frac{1}{5 \cdot 9^5} + \frac{1}{7 \cdot 9^7} + ...)$$

$$\log_e 5 \approx \log_e 4 + 2 \cdot (0,\bar{1} + 0,0004572 + 0,0000034)$$

Poiché $\log_e 4 = \log_e 2^2 = 2 \cdot \log_e 2 = 2 \cdot 0,6931472 = 1,3862944$ possiamo ricavare che:

$$\log_e 5 \approx 1,3862944 + 2 \cdot (0,1115717) = 1,3862944 + 0,2231434 = 1,6094378$$

Esempio

Calcoliamo il logaritmo del numero 31 cioè il $\log_e 31$

Premetto immediatamente che il $\log_e 31 = 3,43398720\ldots$

Poiché vogliamo calcolare il $\log_e 31$ significa che $(a+n) = 31$. Abbiamo detto che "n" deve essere il più piccolo possibile e, per questo motivo, lo impostiamo al valore di 1 ($n = 1$). Ovviamente ora è possibile calcolare che $a = 30$ e poi che $x = \frac{1}{61}$ ($x = \frac{n}{2a+n} = \frac{1}{2 \cdot 30 + 1} = \frac{1}{61}$). Perciò:

$$\log_e 31 = \log_e 30 + 2 \cdot (\frac{1}{61} + \frac{1}{3 \cdot 61^3} + ...)$$

$$\log_e 31 \approx \log_e 30 + 2 \cdot (0,0163934 + 0,0000015) = \log_e 30 + 2 \cdot (0,0163949)$$

Poiché $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ allora $\log_e 30 = \log_e 2 + \log_e 3 + \log_e 5$

Grazie agli esempi precedenti sappiamo che:

$\log_e 2 \approx 0,6931472$

$\log_e 3 \approx 1,0986123$

$\log_e 5 \approx 1{,}6094378$

Perciò, possiamo calcolare che il $\log_e 30 \approx 0{,}6931472 + 1{,}0986123 + 1{,}6094378 = 3{,}4011973$.

Ora possiamo ricavare che:

$\log_e 31 \approx 3{,}4011973 + 2 \cdot (0{,}0163949) = 3{,}4011973 + 0{,}0327898 = 3{,}4339871$

<u>Esempio</u>

Calcoliamo il logaritmo del numero 29 cioè il $\log_e 29$

Premetto immediatamente che il $\log_e 29 = 3{,}3672958\ldots$

Se $(a+n) = 30$ e "$n = 1$" allora "$a = 29$". Con questi dati possiamo calcolare il valore di "x" ($x = \dfrac{n}{2a+n} = \dfrac{1}{2 \cdot 29 + 1} = \dfrac{1}{59}$). Perciò:

$\log_e 30 = \log_e 29 + 2 \cdot (\dfrac{1}{59} + \dfrac{1}{3 \cdot 59^3} + \ldots)$

$\log_e 30 \approx \log_e 29 + 2 \cdot (0{,}0169492 + 0{,}0000016) = \log_e 29 + 2 \cdot (0{,}0169508)$

Abbiamo visto, nell'esempio precedente, che:

$\log_e 30 \approx 3{,}4011973$

Ora possiamo ricavare che:

$\log_e 29 \approx 3{,}4011973 - 2 \cdot (0{,}0169508) = 3{,}4011973 - 0{,}0339016 = 3{,}3672957$

<u>Esempio</u>

Calcoliamo il logaritmo del numero 41 cioè il $\log_e 41$

Premetto immediatamente che il $\log_e 41 = 3{,}71357206\ldots$

Per calcolare il $\log_e 41$ possiamo impostare $n = 1$ e $a = 40$ (con $x = \dfrac{n}{2a+n} = \dfrac{1}{2 \cdot 40 + 1} = \dfrac{1}{81}$) e calcolare il $\log_e 40$ è molto semplice, come abbiamo visto negli esempi precedenti.

Ovviamente niente vieta di eseguire il calcolo in modo diverso e cioè possiamo, per esempio, impostare $n = 10$, $a = 31$ e con $x = \dfrac{n}{2a+n} = \dfrac{10}{2 \cdot 31 + 10} = \dfrac{10}{72} = \dfrac{5}{36}$ sfruttando il risultato del $\log_e 31$ visto precedentemente. Vediamo questo secondo metodo.

Impostando $n = 10$, $a = 31$ e $x = \dfrac{5}{36}$ abbiamo:

$\log_e 41 = \log_e 31 + 2 \cdot (\dfrac{5}{36} + \dfrac{5^3}{3 \cdot 36^3} + \dfrac{5^5}{5 \cdot 36^5} + \dfrac{5^7}{5 \cdot 36^7} + \ldots)$

$\log_e 41 \approx 3{,}4339871 + 2 \cdot (0{,}13\overline{8} + 0{,}0008931 + 0{,}0000103 + 0{,}0000001)$

$\log_e 41 \approx 3{,}4339871 + 2 \cdot (0{,}1397924) = 3{,}7135719$

Commento sul metodo

Voglio far notare che con questo metodo siamo riusciti a calcolare il $\log_e 31$ con pochi calcoli, rispetto a quelli che sarebbero stati necessari con il metodo precedentemente illustrato.

Abbiamo visto, grazie agli esempi proposti, che per calcolare i logaritmi di numeri "piccoli" è necessario impostare $n = 1$ ma per valori crescenti possiamo impostare "n" anche a valori maggiori ottenendo comunque, con pochi calcoli, un ottimo risultato.

Quinto metodo

Adesso vediamo un altro metodo per calcolare i logaritmi dei numeri primi. Dopo tutto quello che è stato detto, dovrebbe essere facile vedere che:

$$\begin{cases} \log_e 16 = \log_e 15 + 2(\frac{1}{31} + \frac{1}{3\cdot 31^3} + \frac{1}{5\cdot 31^5} + ...) = \log_e 15 + 2R \\ \log_e 25 = \log_e 24 + 2(\frac{1}{49} + \frac{1}{3\cdot 49^3} + \frac{1}{5\cdot 49^5} + ...) = \log_e 24 + 2S \\ \log_e 81 = \log_e 80 + 2(\frac{1}{161} + \frac{1}{3\cdot 161^3} + \frac{1}{5\cdot 31^5} + ...) = \log_e 80 + 2T \end{cases}$$

Queste espressioni non sono state prese casualmente perché semplificandole si ottiene:

$$\begin{cases} \log_e 2^4 - \log_e(3\cdot 5) = 2R \\ \log_e 5^2 - \log_e(2^3\cdot 3) = 2S \\ \log_e 3^4 - \log_e(2^4\cdot 5) = 2T \end{cases} \qquad \begin{cases} 4\cdot\log_e 2 - \log_e 3 - \log_e 5 = 2R \\ 2\cdot\log_e 5 - 3\cdot\log_e 2 - \log_e 3 = 2S \\ 4\cdot\log_e 3 - 4\cdot\log_e 2 - \log_e 5 = 2T \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\cdot\log_e 2 - \log_e 3 - \log_e 5 = 2R \\ -3\log_e 2 - \log_e 3 + 2\cdot\log_e 5 = 2S \\ -4\cdot\log_e 2 + 4\cdot\log_e 3 - \log_e 5 = 2T \end{cases}$$

Ora bisogna risolvere questo sistema di tre equazioni in tre incognite dove sono presenti i logaritmi dei primi tre numeri primi. Non è difficile risolvere questo sistema ma è piuttosto tedioso perciò do immediatamente le tre soluzioni lasciando al lettore volenteroso il facile compito di eseguire la sua verifica.

$$\begin{cases} \log_e 2 = 14R + 10S + 6T \\ \log_e 3 = 22R + 10S + 10T \\ \log_e 5 = 32R + 24S + 14T \end{cases}$$

Perciò dopo aver calcolato R S e T, con molta precisione, è facile calcolare il $\log_e 2$, $\log_e 3$ e il $\log_e 5$. Ora non rimane che calcolare gli altri numeri primi.

Per esempio per calcolare il $\log_e 7$ possiamo fare così.

$$\log_e 50 = \log_e 49 + 2(\frac{1}{99} + \frac{1}{3\cdot 99^3} + \frac{1}{5\cdot 99^5} + ...) = \log_e 49 + 2U$$

Da cui si ricava:

$$2\log_e 5 + \log_e 2 = 2\cdot\log_e 7 + 2U$$

$$\log_e 7 = \frac{2\log_e 5 + \log_e 2 - 2U}{2} = \log_e 5 + 0{,}5\cdot\log_e 2 - U$$

Per esempio per calcolare il $\log_e 11$ possiamo fare così.

$$\log_e 121 = \log_e 120 + 2(\frac{1}{241} + \frac{1}{3\cdot 241^3} + \frac{1}{5\cdot 241^5} + ...) = \log_e 120 + 2U$$

Da cui si ricava:

$$2\log_e 11 = \log_e 5 + \log_e 3 + 3\log_e 2 + 2U$$

$$\log_e 11 = \frac{\log_e 5 + \log_e 3 + 3\log_e 2 + 2U}{2}$$

In modo analogo si possono ricavare i logaritmi di “tutti” gli altri numeri primi.

Metodo delle tangenti - iterazione di Newton
Tralasciando la teoria che, almeno in parte, potrete trovare in appendice vediamo come sia possibile utilizzare questo metodo per effettuare il calcolo dei logaritmi naturali (in base "e"), dei numeri reali. Per ottenere gli equivalenti logaritmi decimali si deve usare la relazione vista precedentemente e cioè $\log_{10} x = \log_{10} e \cdot \log_e x = \dfrac{\log_e x}{\log_e 10} = M \cdot \log_e x$.

Questo metodo può essere utilizzato sempre e comunque ma, da il meglio di se, quando il valore iniziale è abbastanza vicino al valore del logaritmo del numero cercato, altrimenti possono essere necessarie molte iterazioni per arrivare ad un valore accettabile. In genere, questo metodo, viene utilizzato per affinare un valore trovato utilizzando altri metodi.
E' possibile dimostrare che reiterando questo calcolo ci si avvicina, sempre di più, al valore del logaritmo del numero cercato. Non dobbiamo dimenticare una proprietà importante di questo metodo e cioè che questo è un metodo che si autocorregge. Questo significa che, nel caso venga introdotto un piccolo errore durante una fase del calcolo, le iterazioni successive faranno ugualmente convergere il risultato al valore del logaritmo del numero cercato.

<u>Formula da utilizzare per il calcolo dei logaritmi dei numeri</u>

$$x_1 = x_0 - \frac{e^{x_0} - y}{e^{x_0}}$$

Questa formula può essere trasformata, con semplici passaggi, in:

$$x_1 = x_0 - 1 + \frac{y}{e^{x_0}}$$

o anche in:

$$x_1 = x_0 - 1 + y \cdot e^{-x_0}$$

Dove con:
x_0 = valore approssimato di partenza della nostra funzione.
x_1 = valore approssimato, un poco migliore rispetto a x_0, della nostra funzione.
y = valore del numero di cui cerchiamo il logaritmo naturale.
e = base dei logaritmi naturali (2,71828182845904523536…).

Ovviamente tutte e tre le formule sono equivalenti ma, nel caso sia necessario calcolare migliaia (se non anche milioni) di cifre decimali, la formula che permette di ridurre al minimo il tempo di esecuzione dei vari calcoli è la $x_1 = x_0 - 1 + y \cdot e^{-x_0}$. Non spiegherò il motivo di questa affermazione perché questo argomento esula da questo scritto.
Facciamo immediatamente alcuni esempi in modo da chiarire come si deve procedere per utilizzare questo metodo.

<u>Esempio</u>
Calcoliamo il logaritmo in base "e" del numero 5 cioè il $\log_e 5$
Premetto immediatamente che il $\log_e 5$ = 1,60943791…
Il valore del $\log_e 5$ è sicuramente compreso tra 1 ($e^1 \approx 2{,}72$) e 2 ($e^2 \approx 7{,}39$) e utilizzeremo, come valore iniziale, il valore di 2 cioè $x_0 = 2$

Per questo esempio utilizzero la formula $x_1 = x_0 - 1 + \dfrac{y}{e^{x_0}}$.

$$x_1 = 2 - 1 + \frac{5}{e^2} \approx 1 + \frac{5}{7{,}39} \approx 1{,}67$$

$x_2 = 1{,}67 - 1 + \frac{5}{e^{1{,}67}} \approx 0{,}67 + \frac{5}{5{,}31} \approx 1{,}6116$

$x_3 = 1{,}6116 - 1 + \frac{5}{e^{1{,}6116}} \approx 0{,}6116 + \frac{5}{5{,}0108221} \approx 1{,}6094403$

$x_4 = 1{,}6094403 - 1 + \frac{5}{e^{1{,}6094403}} \approx 0{,}6094403 + \frac{5}{5{,}0000119} \approx 1{,}6094379$

$x_5 = 1{,}6094379 - 1 + \frac{5}{e^{1{,}6094379}} \approx 0{,}6094379 + \frac{5}{5} = 1{,}6094379$

Poiché i valori di x_4 e di x_5 coincidono, questo è il valore cercato. Com'è possibile vedere con cinque iterazioni siamo pervenuti a un valore corretto sino al 7° decimale.

<u>Esempio</u>
Calcoliamo il logaritmo in base "e" del numero 31 cioè il $\log_e 31$

Premetto immediatamente che il $\log_e 31 = 3{,}43398720\ldots$

Il valore del $\log_e 31$ è sicuramente compreso tra 3 ($e^3 \approx 20{,}08$) e 4 ($e^4 \approx 54{,}60$) e utilizzeremo, come valore iniziale, il valore di 3 cioè $x_0 = 3$

Per questo esempio utilizzero la formula $x_1 = x_0 - 1 + y \cdot e^{-x_0}$.

$x_1 = 3 - 1 + 31 \cdot e^{-3} \approx 2 + 31 \cdot 0{,}045 \approx 3{,}395$

$x_2 = 3{,}395 - 1 + 31 \cdot e^{-3{,}395} \approx 2{,}395 + 31 \cdot 0{,}03354 \approx 3{,}43474$

$x_3 = 3{,}43474 - 1 + 31 \cdot e^{-3{,}43474} \approx 2{,}43474 + 31 \cdot 0{,}0322338 \approx 3{,}4339875$

$x_4 = 3{,}4339875 - 1 + 31 \cdot e^{-3{,}4339875} \approx 2{,}4339875 + 31 \cdot 0{,}0322581 \approx 3{,}4339872$

Poiché i valori di x_3 e di x_4 praticamente coincidono, questo è il valore cercato. Com'è possibile vedere con quattro iterazioni siamo pervenuti a un valore corretto sino al 7° decimale.

<u>Esempio</u>
Calcoliamo il logaritmo in base "e" del numero 103,3 cioè il $\log_e 103{,}3$

Premetto immediatamente che il $\log_e 103{,}3 = 4{,}63763737\ldots$

Il valore del $\log_e 103{,}3$ è sicuramente compreso tra 4 ($e^4 \approx 54{,}60$) e 5 ($e^5 \approx 148{,}41$) e utilizzeremo, come valore iniziale, il valore di 4 cioè $x_0 = 4$

Per questo esempio utilizzero la formula $x_1 = x_0 - 1 + y \cdot e^{-x_0}$.

$x_1 = 4 - 1 + 103{,}3 \cdot e^{-4} \approx 3 + 103{,}3 \cdot 0{,}0183 \approx 4{,}89039$

$x_2 = 4{,}89039 - 1 + 103{,}3 \cdot e^{-4{,}89039} \approx 3{,}89039 + 103{,}3 \cdot 0{,}00752 \approx 4{,}6672$

$x_3 = 4{,}6672 - 1 + 103{,}3 \cdot e^{-4{,}6672} \approx 3{,}6672 + 103{,}3 \cdot 0{,}0093985 \approx 4{,}6380701$

$x_4 = 4{,}6380701 - 1 + 103{,}3 \cdot e^{-4{,}6380701} \approx 3{,}6380701 + 103{,}3 \cdot 0{,}0093985 \approx 4{,}6376375$

$x_5 = 4{,}6376375 - 1 + 103{,}3 \cdot e^{-4{,}6376375} \approx 3{,}6376375 + 103{,}3 \cdot 0{,}0096805 \approx 4{,}6376374$

Poiché i valori di x_4 e di x_5 praticamente coincidono, questo è il valore cercato. Com'è possibile vedere con cinque iterazioni siamo pervenuti a un valore corretto sino al 7° decimale.

Commento sul metodo
Com'è possibile vedere questo metodo è veramente potente, però ha un difetto, poiché è necessario eseguire il calcolo esponenziale con molta precisione. Comunque, come abbiamo visto nel capitolo precedente, il calcolo esponenziale non è un calcolo eccessivamente complesso.

Metodi di calcolo dei logaritmi sui numeri decimali
Per utilizzare i logaritmi nei calcoli pratici è necessario saperli calcolare anche sui numeri decimali e non solo sui numeri naturali. Ovviamente tutti i metodi precedentemente illustrati si possono applicare anche a questa tipologia di calcolo. Indipendentemente da questo fatto sono stati elaborati alcuni metodi specifici per eseguire questa tipologia di calcolo. Tutti questi nuovi metodi sono utilizzabili indipendentemente dalla base del logaritmo.
Vediamo ora quattro metodi specifici per questa tipologia di calcolo.

1) *Metodo attraverso i numeri interi*
Questo metodo è il più ovvio e consiste nel rendere intero il numero decimale moltiplicandolo per 10^n poi, di questo nuovo numero, è necessario calcolare il logaritmo e, come ultimo passaggio, bisogna sottrarre, al logaritmo calcolato precedentemente, il logaritmo di 10^n. L'esattezza del risultato dipenderà, ovviamente, dalla precisione del logaritmo calcolato. Facciamo due esempi.

<u>Esempio</u>
Calcoliamo il logaritmo naturale del numero 31,3 cioè il $\log_e 31{,}3$.
Premetto immediatamente che il $\log_e 31{,}3$ = 3,4436181.
Poiché $31{,}3 = \dfrac{313}{10}$ allora il $\log_e 31{,}3 = \log_e 313 - \log_e 10 = 5{,}7462032 - 2{,}3025851 = 3{,}4436181$.

<u>Esempio</u>
Calcoliamo il logaritmo decimale del numero 3,13 cioè il $\log_{10} 3{,}13$.
Premetto immediatamente che il $\log_{10} 3{,}13$ = 0,4955443.
Poiché $3{,}13 = \dfrac{313}{100}$ allora il $\log_{10} 3{,}13 = \log_{10} 313 - \log_{10} 100 = 2{,}4955443 - 2 = 0{,}4955443$.

2) *Metodo d'interpolazione lineare – Principio di proporzionalità*
Questo metodo era utilizzato quando erano in uso le "*Tavole logaritmiche*" ed era necessario calcolare il logaritmo di un numero decimale che non era presente in esse. Questo metodo parte da un assunto che "*l'incremento del valore del logaritmo è proporzionale all'incremento del numero*" ma quest'assunto è falso. Il risultato che si ottiene è un valore sempre inferiore a quello vero, comunque più il numero è grande e più il risultato si avvicinerà al valore vero. Facciamo tre esempi.

<u>Esempio</u>
Calcoliamo il logaritmo naturale del numero 31,3 cioè il $\log_e 31{,}3$.
Premetto immediatamente che il $\log_e 31{,}3$ = 3,4436181.
Nelle "Tavole logaritmiche" potevamo leggere che il $\log_e 31 = 3{,}4339872$.
Nelle "Tavole logaritmiche" potevamo leggere che il $\log_e 32 = 3{,}4657359$.
La formula da utilizzare è: $\log_e (a+n) = \log_e a + \dfrac{(\log_e (a+1) - \log_e a)}{(a+1) - a} n$.
A questo punto abbiamo tutti gli elementi per eseguire il calcolo.
$\log_e (31 + 0{,}3) \approx \log_e 31 + (\log_e 32 - \log_e 31) \cdot 0{,}3$
$\log_e 31{,}3 \approx \log_e 31 + (3{,}4657359 - 3{,}4339872) \cdot 0{,}3 = 3{,}4339872 + 0{,}0095246 = 3{,}4435118$
Calcolo del valore assoluto dell'errore relativo.
In questo esempio abbiamo $\left| \dfrac{Vc - Vv}{Vv} \right| = \left| \dfrac{3{,}4435118 - 3{,}4436181}{3{,}4436181} \right| \approx 3{,}09 \cdot 10^{-5}$.

<u>Esempio</u>
Calcoliamo il logaritmo decimale del numero 31,3 cioè il $\log_{10} 31{,}3$.
Premetto immediatamente che il $\log_{10} 31{,}3$ = 1,4955443.
Nelle “Tavole logaritmiche” potevamo leggere che il $\log_{10} 31 = 1{,}4913617$.
Nelle “Tavole logaritmiche” potevamo leggere che il $\log_{10} 32 = 1{,}5051500$.
La formula da utilizzare è: $\log_{10}(a+n) = \log_{10} a + \dfrac{(\log_{10}(a+1) - \log_{10} a)}{(a+1)-a} n$.
A questo punto abbiamo tutti gli elementi per eseguire il calcolo.
$\log_{10}(31+0{,}3) \approx \log_{10} 31 + (\log_{10} 32 - \log_{10} 31)\cdot 0{,}3$
$\log_{10} 31{,}3 \approx \log_{10} 31 + (1{,}50515 - 1{,}4913617)\cdot 0{,}3 = 1{,}4913617 + 0{,}0041365 = 1{,}4954982$
Calcolo del valore assoluto dell’errore relativo.
In questo esempio abbiamo $\left|\dfrac{Vc - Vv}{Vv}\right| = \left|\dfrac{1{,}4954982 \text{ - } 1{,}4955443}{1{,}4955443}\right| \approx 3{,}09 \cdot 10^{-5}$.

<u>Esempio</u>
Calcoliamo il logaritmo decimale del numero 200,5 cioè il $\log_{10} 200{,}5$.
Premetto immediatamente che il $\log_{10} 200{,}5 = 2{,}3021144$.
Nelle “Tavole logaritmiche” potevamo leggere che il $\log_{10} 200 = 2{,}30103$.
Nelle “Tavole logaritmiche” potevamo leggere che il $\log_{10} 201 = 2{,}3031961$.
La formula da utilizzare è: $\log_{10}(a+n) = \log_{10} a + \dfrac{(\log_{e}(a+1) - \log_{e} a)}{(a+1)-a} n$.
A questo punto abbiamo tutti gli elementi per eseguire il calcolo.
$\log_{10}(200+0{,}5) \approx \log_{10} 200 + (\log_{10} 201 - \log_{10} 200)\cdot 0{,}5$
$\log_{10} 200{,}5 \approx \log_{10} 200 + (2{,}3031961 - 2{,}30103)\cdot 0{,}5 = 2{,}30103 + 0{,}0010831 = 2{,}3021131$
Calcolo del valore assoluto dell’errore relativo.
In questo esempio abbiamo $\left|\dfrac{Vc - Vv}{Vv}\right| = \left|\dfrac{2{,}3021131 \text{ - } 2{,}3021144}{2{,}3021144}\right| \approx 5{,}65 \cdot 10^{-7}$.

Commento sul metodo
Sicuramente avrete notato che, nei primi due esempi, il valore assoluto dell’errore relativo è identico e questa non è una coincidenza. Lascio al lettore la facile ricerca della sua giustificazione.

3) *Metodo della derivata*
Questo metodo da, come risultato, un valore sempre maggiore di quello vero e più il valore del numero è grande e più il risultato si avvicinerà al valore vero. Questo è un metodo molto utilizzato, visto la sua estrema semplicità. Facciamo due esempi.

<u>Esempio</u>
Calcoliamo il logaritmo naturale del numero 31,3 cioè il $\log_e 31{,}3$.
Premetto immediatamente che il $\log_e 31{,}3 = 3{,}4436181$.
Sappiamo che il $\log_e 31 = 3{,}4339872$.
La formula da utilizzare è: $\log_e(a+n) \approx \log_e a + (D\log_e a)\cdot n = \log_e a + \dfrac{1}{a}\cdot n = \log_e a + \dfrac{n}{a}$.
A questo punto abbiamo tutti gli elementi per eseguire il calcolo.

$$\log_e 31{,}3 = \log_e(31+0{,}3) \approx \log_e 31 + (D\log_e 31)\cdot 0{,}3$$

$$\log_e 31{,}3 \approx \log_e 31 + \frac{0{,}3}{31} = 3{,}4339872 + 0{,}0096774 = 3{,}4436646$$

Calcolo del valore assoluto dell'errore relativo

In questo esempio abbiamo $\left|\frac{Vc - Vv}{Vv}\right| = \left|\frac{3{,}4436646 - 3{,}4436181}{3{,}4436181}\right| \approx 1{,}35\cdot 10^{-5}$.

<u>Esempio</u>

Calcoliamo il logaritmo decimale del numero 200,5 cioè il $\log_{10} 200{,}5$.

Premetto immediatamente che il $\log_{10} 200{,}5 = 2{,}3021144$.

Sappiamo che il $\log_{10} 200 = 2{,}30103$.

La formula da utilizzare è: $\log_{10}(a+n) \approx \log_{10} a + (D\log_{10} a)\cdot n = \log_{10} a + \frac{\log_{10} e}{a} n$.

A questo punto abbiamo tutti gli elementi per eseguire il calcolo.

$$\log_{10} 200{,}5 = \log_{10}(200+0{,}5) \approx \log_{10} 200 + (D\log_{10} 200)\cdot 0{,}5 = \log_{10} 200 + \frac{M}{200}\cdot 0{,}5$$

$$\log_{10} 200{,}5 \approx \log_{10} 200 + \frac{0{,}4342945}{200}\cdot 0{,}5 = 2{,}30103 + 0{,}0010857 = 2{,}3021157$$

Calcolo del valore assoluto dell'errore relativo

In questo esempio abbiamo $\left|\frac{Vc - Vv}{Vv}\right| = \left|\frac{2{,}3021157 - 2{,}3021144}{2{,}3021144}\right| \approx 5{,}80\cdot 10^{-7}$.

Osservazione 1

Voglio far notare che esiste uno stretto legame tra il "*Metodo utilizzando la derivata*" e il "*Metodo dell'aumento finito – Teorema di Taylor*". Riportiamo ora l'espressione di questo secondo metodo.

$$\log_e(a+n) = \log_e a + 2\cdot\left(\frac{n}{2a+n} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{n}{2a+n}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{n}{2a+n}\right)^5 + ...\right)$$

Se ipotizziamo che il valore di "n" sia trascurabile rispetto al valore di "$2a$" possiamo scrivere le seguenti equivalenze approssimate:

$$2a+n \approx 2a \qquad \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{n}{2a+n}\right)^3 \approx 0 \qquad \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{n}{2a+n}\right)^5 \approx 0$$

Eseguendo, nell'espressione precedente, le sostituzioni otteniamo:

$$\log_e(a+n) \approx \log_e a + 2\cdot\left(\frac{n}{2a}\right) = \log_e a + \frac{n}{a}$$

Il risultato appena ottenuto è proprio identico al "*Metodo utilizzando la derivata*".

Osservazione 2

Voglio far notare che esiste anche un legame strettissimo tra il "*Metodo utilizzando la derivata*" e il "*Metodo delle tangenti - iterazione di Newton*". Riportiamo ora l'espressione di questo secondo metodo.

Come abbiamo visto precedentemente la formula da utilizzare è $x_1 = x_0 - 1 + \frac{y}{e^{x_0}}$ che in questo contesto diviene $\log_e(a+n) = \log_e a - 1 + \frac{a+n}{a}$. Con semplici passaggi otteniamo:

$$\log_e(a+n) = \log_e a - 1 + \left(1+\frac{n}{a}\right) = \log_e a + \frac{n}{a}$$

Il risultato appena ottenuto è proprio identico al "*Metodo utilizzando la derivata*".

4) *Metodo della derivata nel punto intermedio*
Poiché il "*Metodo della derivata*" da, come risultato, un valore sempre maggiore di quello vero possiamo pensare di migliorarlo diminuendo leggermente il valore della derivata e cioè andandola a calcolare in un punto di valore leggermente maggiore. Questo punto è il punto intermedio tra "a" e "$a+n$" e con questa ipotesi otteniamo la seguente espressione:

$$\log_e(a+n) \approx \log_e a + (D\log_e(\frac{a+(a+n)}{2}))\cdot n = \log_e a + (D\log_e \frac{2a+n}{2})\cdot n = \log_e a + 2\cdot\frac{n}{2a+n}$$

Il valore calcolato, con questa espressione, è sempre inferiore al valore vero. Facciamo due esempi.

<u>Esempio</u>
Calcoliamo il logaritmo naturale del numero 31,3 cioè il $\log_e 31{,}3$.
Premetto immediatamente che il $\log_e 31{,}3 = 3{,}4436181$.
Sappiamo che il $\log_e 31 = 3{,}4339872$.
La formula da utilizzare è: $\log_e(a+n) \approx \log_e a + (D\log_e \frac{2a+n}{2})n = \log_e a + 2\frac{n}{2a+n}$.
A questo punto abbiamo tutti gli elementi per eseguire il calcolo.

$$\log_e 31{,}3 = \log_e(31+0{,}3) \approx \log_e 31 + (D\log_e 31{,}15)\cdot 0{,}3$$

$$\log_e 31{,}3 \approx \log_e 31 + \frac{0{,}3}{31{,}15} = 3{,}4339872 + 0{,}0096308 = 3{,}4436180$$

Com'è possibile vedere il risultato ottenuto è veramente ottimo.

<u>Esempio</u>
Calcoliamo il logaritmo decimale del numero 200,5 cioè il $\log_{10} 200{,}5$.
Premetto immediatamente che il $\log_{10} 200{,}5 = 2{,}3021144$.
Sappiamo che il $\log_{10} 200 = 2{,}30103$.
La formula da utilizzare è: $\log_{10}(a+n) \approx \log_{10} a + (D\log_{10}\frac{2a+n}{2})n = \log_{10} a + \frac{2\log_{10} e}{2a+n} n$.
A questo punto abbiamo tutti gli elementi per eseguire il calcolo.

$$\log_{10} 200{,}5 = \log_{10}(200+0{,}5) \approx \log_{10} 200 + (D\log_{10} 200{,}25)\cdot 0{,}5 = \log_{10} 200 + \frac{M}{200{,}25}\cdot 0{,}5$$

$$\log_{10} 200{,}5 \approx \log_{10} 200 + \frac{0{,}4342945}{200{,}25}\cdot 0{,}5 = 2{,}30103 + 0{,}0010844 = 2{,}3021144$$

Com'è possibile vedere il risultato ottenuto è veramente ottimo.

Osservazione
Voglio far notare che esiste anche un legame strettissimo tra il "*Metodo della derivata nel punto intermedio*" e il "*Metodo dell'aumento finito – Teorema di Taylor*". Riportiamo ora l'espressione di questo secondo metodo.

$$\log_e(a+n) = \log_e a + 2\cdot(\frac{n}{2a+n} + \frac{1}{3}\cdot(\frac{n}{2a+n})^3 + \frac{1}{5}\cdot(\frac{n}{2a+n})^5 + \ldots)$$

Se ipotizziamo che il valore di $(\frac{n}{2a+n})^3 \approx 0$ allora abbiamo che:

$\frac{1}{3}\cdot(\frac{n}{2a+n})^3 \approx 0$ $\qquad$ $\frac{1}{5}\cdot(\frac{n}{2a+n})^5 \approx 0$ $\qquad$ $\frac{1}{5}\cdot(\frac{n}{2a+n})^7 \approx 0$

Eseguendo, nell'espressione precedente, le sostituzioni otteniamo:

$\log_e(a+n) \approx \log_e a + 2 \cdot (\frac{n}{2a+n})$

Il risultato appena ottenuto è proprio identico al "*Metodo della derivata nel punto intermedio*".

Metodo utilizzando gli integrali

In appendice troverete la dimostrazione che la derivata della funzione logaritmica, in base "e", è uguale all'inverso della variabile. Cioè $D\log_e x = \frac{1}{x}$ perciò, grazie alla funzione integrale, è possibile calcolare il logaritmo in base "e" di "x".

Cioè vale la seguente espressione $\int_a^b \frac{1}{x}dx = [\log_e x]_a^b = \log_e b - \log_e a = \log_e \frac{b}{a}$. Se impostiamo $a = 1$ otteniamo ciò che stavamo cercando e cioè $\int_1^b \frac{1}{x}dx = [\log_e x]_1^b = \log_e b - \log_e 1 = \log_e \frac{b}{1} = \log_e b$.

Perciò, per calcolare $\log_e b$, basta saper calcolare $\int_1^b \frac{1}{x}dx$ in modo diretto. Per calcolare questo integrale, in modo diretto, esistono molti metodi approssimati e qui ne illustrerò alcuni.

Per chiarire i metodi credo sia più semplice fare un esempio numerico e poi applicare alcuni di questi metodi al nostro esempio numerico.

<u>Esempio</u>

Ammettiamo di voler calcolare il logaritmo in base e di 2 e cioè il $\log_e 2$

Premetto immediatamente che il $\log_e 2$ = 0,69314718…

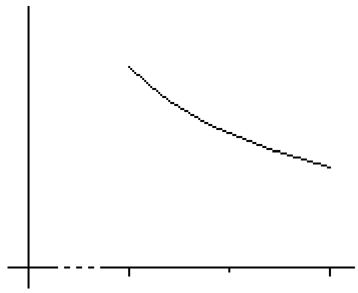
Abbiamo appena detto che:

$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = [\log_e x]_1^2 = \log_e 2 - \log_e 1 = \log_e 2$. Cioè, per calcolare il $\log_e 2$ basta saper calcolare, in modo diretto, l'integrale $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$. Vediamo ora come si può eseguire questo calcolo.

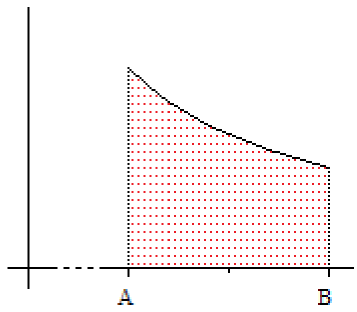
Facciamo una tabella dividendo, l'intervallo tra il valore di 2 e il valore di 1, in 10 parti uguali e calcoliamo la funzione $\frac{1}{x}$ in tutti i punti.

x	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{1}{x}$	x	$\frac{1}{x}$
1,0	1,0	1,1	$0,\overline{90}$	1,2	$0,8\overline{3}$
1,3	0,7692308	1,4	$0,\overline{714285}$	1,5	$0,\overline{6}$
1,6	0,625	1,7	0,5882353	1,8	$0,\overline{5}$
1,9	0,5263158	2,0	0,5		

Riportiamo in un grafico tutti i punti. In ascissa (orizzontale) i valori di "x" e in ordinata (verticale) i corrispondenti valori di "$\frac{1}{x}$", poi uniamo tutti i punti ottenuti con una linea continua.

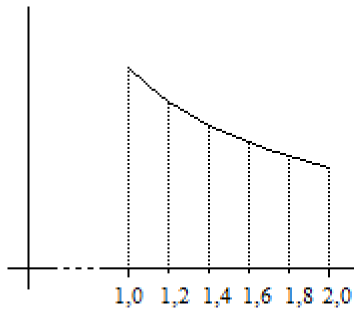


L'area punteggiata di rosso è proporzionale (in base alle scale utilizzate) al valore del logaritmo in base "*e*" di 2.

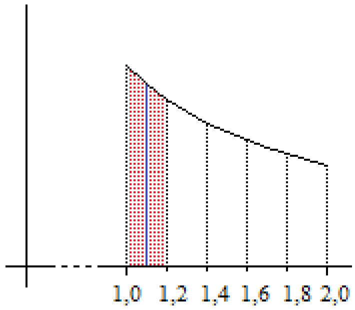


Per calcolare tale area in modo diretto esistono tre procedimenti distinti e cioè il "**Metodo di integrazione grafico**" i "**Metodi di integrazione numerici**" e i "**Metodi di integrazione meccanici**". Vediamoli tutti e tre.

Metodo di integrazione grafico
Almeno in teoria può essere utile conoscere il "Metodo di integrazione grafico". Il metodo consiste nel dedurre, con le modalità che tra poco illustrerò, la funzione integrale conoscendo il grafico della funzione da integrare. Vediamo ora di illustrare questo metodo tenendo presente che il risultato che possiamo ottenere è, ovviamente, approssimato.
La prima cosa è tracciare il grafico della funzione relativa all'intervallo che si vuole calcolare. Poi bisogna suddividere questo intervallo in un numero "*n*" di parti uguali. E' da tener presente che più il numero "*n*" è grande, e più preciso sarà il risultato che otteremo ma, parimenti, anche la complessità aumenterà. Nel nostro esempio suddividerò l'intervallo in cinque parti uguali.



Possiamo dire che, approssimativamente, la figura punteggiata di rosso (che è un trapezio approssimato) ha un'area uguale all'ordinata del punto medio ($y_{1,1}$) moltiplicato per l'ascissa corrispondente ($x_{1,2} - x_{1,0}$ che, per il nostro esempio è uguale a $\frac{2,0-1,0}{5} = 1,2 - 1,0 = 0,2$).



Cioè, per essere chiari, con questo metodo eseguiamo questo tipo di sostituzione:

$$\int_{1,0}^{1,2} \frac{1}{x} dx = f_{1,1} \cdot (x_{1,2} - x_{1,0})$$

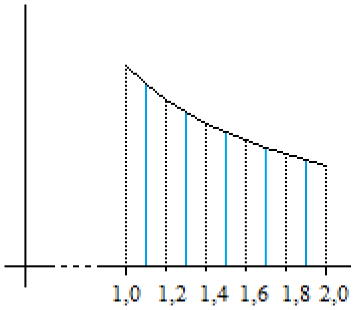
$$\int_{1,2}^{1,4} \frac{1}{x} dx = f_{1,3} \cdot (x_{1,4} - x_{1,2})$$

$$\int_{1,4}^{1,6} \frac{1}{x} dx = f_{1,5} \cdot (x_{1,6} - x_{1,4})$$

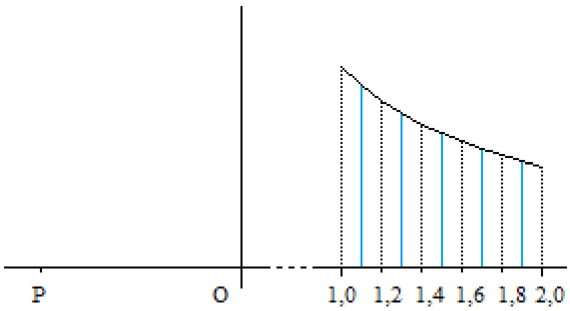
$$\int_{1,6}^{1,8} \frac{1}{x} dx = f_{1,7} \cdot (x_{1,8} - x_{1,6})$$

$$\int_{1,8}^{2,0} \frac{1}{x} dx = f_{1,9} \cdot (x_{2,0} - x_{1,8})$$

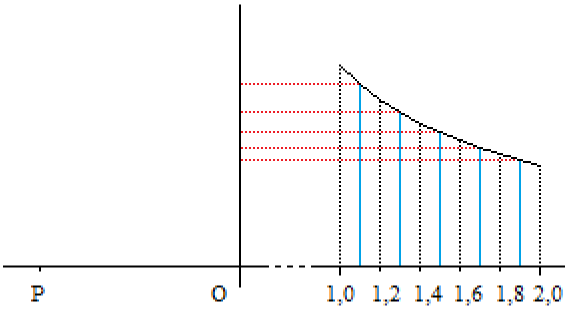
Ovviamente queste uguaglianze sono approssimate.
Riportiamo, sul nostro grafico, tutte le ordinate intermedie dei punti presi in considerazione.



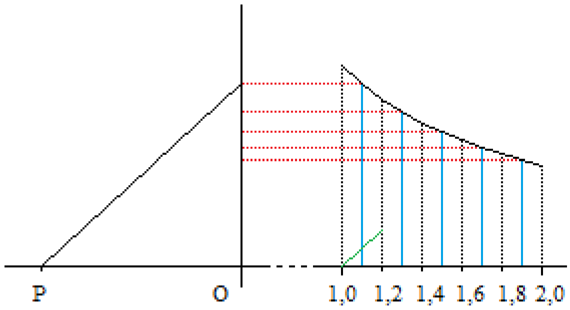
Sull'ascissa, a sinistra dell'origine degli assi, segnamo il punto "P" in modo che la distanza " $\overline{PO}$ " sia uguale all'unità di misura dell'ascissa medesima.



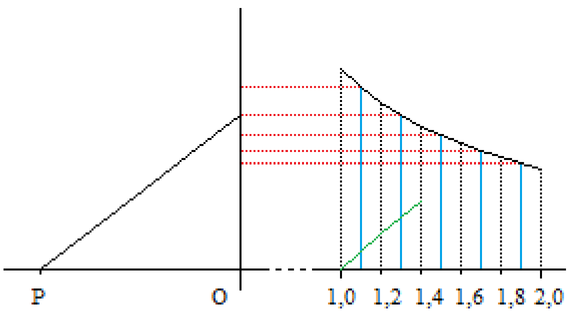
Riportiamo sull'ordinata di origine le ordinate dei punti medi. Cioè riportiamo sull'asse delle " y " le ordinate dei punti $x_{1,1}$, $x_{1,3}$, $x_{1,5}$, $x_{1,7}$ e $x_{1,9}$ che sono rispettivamente $y_{1,1}$, $y_{1,3}$, $y_{1,5}$, $y_{1,7}$ e $y_{1,9}$.



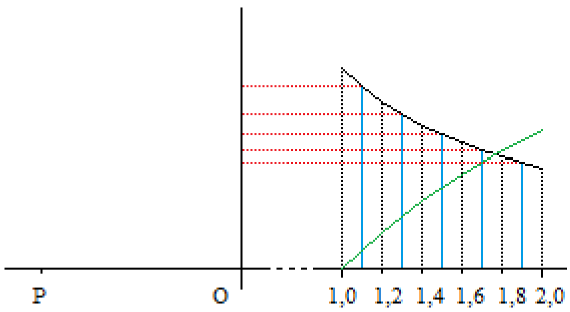
Dopo bisogna unire il punto che riporta l'ordinata media del primo trapezio ($y'_{1,1}$) al punto "P". Poi bisogna disegnare un segmento nel primo trapezio parallelo al segmento $\overline{Py'_{1,1}}$ con inizio nel punto di origine.



A questo punto è sufficiente ripetere la procedura per tutti gli altri punti. Cioè bisogna unire il punto che riporta l'ordinata media del secondo trapezio ($y'_{1,3}$) al punto "P", poi bisogna disegnare un segmento nel secondo trapezio parallelo al segmento $\overline{Py'_{1,3}}$ con inizio nella fine del segmento precedente (vedi figura).



Proseguendo in questo modo otteniamo il seguente grafico:



Questa nuova curva (curva di colore verde) rappresenta, con una certa approssimazione, la funzione integrale (la curva di colore verde è la funzione logaritmica). Ovviamente andando a misurare l'ordinata di questa nuova curva riferita al punto $2{,}0$ si ottiene il valore del logaritmo in base "e" di 2,0 (cioè $\log_e 2{,}0$). Andando a misurare l'ordinata nel punto 1,4 si ottiene il $\log_e 1{,}4$ e andando a misurare l'ordinata nel punto 1,5 si ottiene il $\log_e 1{,}5$.
I più curiosi troveranno, in appendice, la giustificazione di questo metodo.

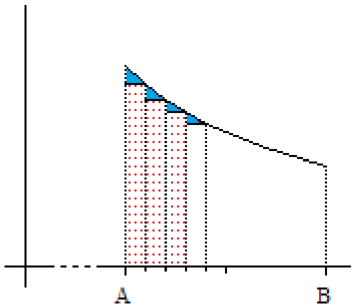
Metodi di integrazioni numerici
Ho scritto "metodi di integrazione numerici" perché ne esistono diversi, tutti variamente approssimati, per poter effettuare questo calcolo. Per utilizzare questi metodi non serve nessun grafico ma io, per poter meglio chiarirne alcuni meccanismi, ne utilizzerò alcuni.
Tutti questi metodi hanno alcune particolarità in comune. E' necessario suddividere l'intervallo di integrazione in un numero congruo di parti uguali (nel mio esempio l'ho suddiviso in 10 parti uguali visto che ho calcolato la funzione $f = \frac{1}{x}$ in 9 punti supplementari). Poi dobbiamo calcolare la funzione in questi nuovi punti.
Ovviamente maggiore è il numero "n" d'intervalli uguali, con cui il segmento $a - b$ viene suddiviso (e cioè quanto più piccolo è l'intervallo $\frac{b-a}{n}$), tanto più esatti saranno i risultati delle formule che andremo a vedere. Perciò per $n \to \infty$ (cioè per $\frac{b-a}{n} \to 0$) tutte le formule daranno il medesimo risultato che sarà anche il valore esatto dell'integrale definito che stiamo cercando.
Qui illustrerò solamente tre metodi e cioè il "Metodo dei rettangoli" (che si suddivide in due metodi distinti), il "Metodo dei trapezzi" e il "Metodo delle parabole – Metodo di Cavalieri-Simpson". Esistono anche altri metodi di calcolo (tra cui il "Metodo delle tangenti", il "Metodo di Poncelet", ecc.) ma esulano da questo scritto.

1) Metodo dei rettangoli
Dopo aver calcolato la funzione in tutti i punti, dobbiamo sommare i vari rettangoli per ottenere il valore approssimato dell'area punteggiata, che equivale al valore approssimato del logaritmo naturale di 2.
In realtà sarebbe più corretto dire "Metodi dei rettangoli", poiché sono due i metodi che andremo a vedere. Con il primo metodo andremo a calcolare l'integrale per difetto e con il secondo metodo andremo a calcolare l'integrale per eccesso.

1a) Metodo dei rettangoli per difetto
Andiamo a vedere immediatamente la formula da utilizzare.

$$\log_e b - \log_e a = \log_e \frac{b}{a} = \int_a^b \frac{1}{x} dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + \ldots + y_b)$$

Questo metodo darà un valore sempre minore rispetto al valore vero perché la funzione $\frac{1}{x}$ è una funzione decrescente. Nell'ipotesi di utilizzare la precedente espressione su una funzione crescente il risultato sarà maggiore rispetto al valore vero.



Esempio
Premetto immediatamente che il $\log_e 2 = 0{,}69314718...$.

$$\log_e 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx \frac{2-1}{10}\cdot(y_{1,1} + y_{1,2} + y_{1,3} + y_{1,4} + y_{1,5} + ... + y_{1,9} + y_{2,0})$$

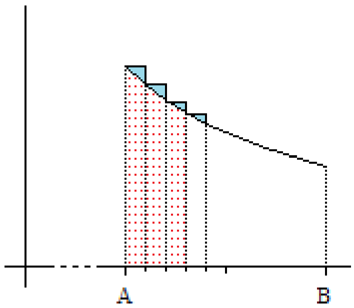
$$\log_e 2 \approx 0{,}1\cdot(0{,}\overline{90} + 0{,}8\overline{3} + 0{,}76923 + 0{,}71428 + 0{,}\overline{6} + 0{,}625 + 0{,}58823 + 0{,}\overline{5} + 0{,}52631 + 0{,}5) =$$
$$= 0{,}6687714$$

Calcolo del valore assoluto dell'errore relativo.
In questo esempio abbiamo $\left|\frac{Vc - Vv}{Vv}\right| = \left|\frac{0{,}6687714 - 0{,}6931472}{0{,}6931472}\right| \approx 3{,}52\cdot 10^{-2}$.

1b) Metodo dei rettangoli per eccesso
Andiamo a vedere immediatamente la formula da utilizzare.

$$\log_e b - \log_e a = \log_e \frac{b}{a} = \int_a^b \frac{1}{x}dx \approx \frac{b-a}{n}\cdot(y_a + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + ... + y_{b-1})$$

Questo metodo darà un valore sempre maggiore rispetto al valore vero perché la funzione $\frac{1}{x}$ è una funzione decrescente. Nell'ipotesi di utilizzare la precedente espressione su una funzione crescente il risultato sarà minore rispetto al valore vero.



Esempio
Premetto immediatamente che il $\log_e 2 = 0{,}69314718\ldots$

$$\log_e 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx \frac{2-1}{10} \cdot (y_{1,0} + y_{1,1} + y_{1,2} + y_{1,3} + y_{1,4} + ... + y_{1,8} + y_{1,9})$$

$$\log_e 2 \approx 0{,}1 \cdot (1{,}0 + 0{,}\overline{90} + 0{,}8\overline{3} + 0{,}76923 + 0{,}71428 + 0{,}\overline{6} + 0{,}625 + 0{,}58823 + 0{,}\overline{5} + 0{,}52631) =$$
$$= 0{,}7187714$$

Calcolo del valore assoluto dell'errore relativo.

In questo esempio abbiamo $\left|\frac{Vc - Vv}{Vv}\right| = \left|\frac{0{,}7187714 - 0{,}6931472}{0{,}6931472}\right| \approx 3{,}70 \cdot 10^{-2}$.

2) Metodo dei trapezi

Sostituendo ai rettangoli (visti nei due precedenti metodi) dei trapezi si ottiene un valore decisamente migliore.

$$\log_e b - \log_e a = \log_e \frac{b}{a} = \int_a^b \frac{1}{x}dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot (\frac{y_a + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_2 + y_3}{2} + ... + \frac{y_{b-1} + y_b}{2})$$

Svolgendo i relativi calcoli otteniamo:

$$\log_e b - \log_e a = \log_e \frac{b}{a} = \int_a^b \frac{1}{x}dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot (\frac{y_a}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + ... + \frac{y_b}{2})$$

Rispetto ai metodi visti precedentemente questo metodo darà un valore sempre maggiore o sempre minore, rispetto al valore vero, in base alla concavità della funzione in esame. Nell'ipotesi di una funzione con concavità verso l'alto il valore calcolato sarà sempre maggiore rispetto al valore vero, viceversa nell'ipotesi di una funzione con concavità verso il basso. Perciò, nell'ipotesi di utilizzare questo metodo sulla funzione $\frac{1}{x}$, il valore calcolato sarà sempre maggiore del valore vero.

<u>Esempio</u>

Premetto immediatamente che il $\log_e 2 = 0{,}69314718\ldots$

$$\log_e 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx \frac{2-1}{10} \cdot (\frac{y_{1,0}}{2} + y_{1,1} + y_{1,2} + y_{1,3} + y_{1,4} + ... + y_{1,9} + \frac{y_{2,0}}{2})$$

$$\log_e 2 \approx 0{,}1 \cdot (0{,}5 + 0{,}\overline{90} + 0{,}8\overline{3} + 0{,}76923 + 0{,}71428 + 0{,}\overline{6} + 0{,}625 + 0{,}58823 + 0{,}\overline{5} + 0{,}52631 + 0{,}25) =$$
$$= 0{,}6937714$$

Calcolo del valore assoluto dell'errore relativo.

In questo esempio abbiamo $\left|\frac{Vc - Vv}{Vv}\right| = \left|\frac{0{,}6937714 - 0{,}6931472}{0{,}6931472}\right| \approx 9{,}01 \cdot 10^{-4}$.

Osservazione

Si può ottenere il medesimo risultato anche eseguendo la media aritmetica tra il "Metodo dei rettangoli per difetto" e il "Metodo dei rettangoli per eccesso".

$$\log_e 2 \approx \frac{0{,}6687714 + 0{,}7187714}{2} = \frac{1{,}3875428}{2} = 0{,}6937714$$

3) Metodo delle parabole - Metodo di Cavalieri-Simpson

Questo metodo consiste nel sostituire alla funzione originaria (cioè alla $f(x) = \frac{1}{x}$) una nuova funzione che si approssimi ancor meglio (almeno in un piccolo intervallo) rispetto a una linea retta,

come abbiamo visto nel metodo precedente. La funzione che si utilizza è l'arco di parabola di secondo grado.
Cerchiamo di chiarire questo punto. Nel metodo precedente abbiamo sostituito alla funzione $f(x)=\frac{1}{x}$, una spezzata (cioè una serie di segmenti conseguitivi) e con questo nuovo metodo sostituiamo alla funzione $f(x)=\frac{1}{x}$ una serie di archi di parabole passanti per tre punti. Cioè il primo arco di parabola passerà per i primi tre punti ($y_a;y_1;y_2$); il secondo arco di parabola passerà per il terzo, il quarto e il quinto punto ($y_2;y_3;y_4$); il terzo arco di parabola passerà per il quinto, il sesto e il settimo punto ($y_4;y_5;y_6$); ecc.
Per utilizzare questo metodo è necessario suddividere l'intervallo in un numero **pari** di parti uguali.
Perciò possiamo calcolare il valore approssimato dell'integale facendo questa sostituzione.

$$\log_e b-\log_e a=\log_e\frac{b}{a}=\int_a^b\frac{1}{x}dx\approx\frac{b-a}{3n}(y_a+y_b+2(y_2+y_4+y_6+...)+4(y_1+y_3+y_5+...))$$

I più curiosi troveranno, in appendice, la dimostrazione di questa formula.

Esempio
Premetto immediatamente che il $\log_e 2=0{,}69314718\ldots$

$$\log_e 2=\int_1^2\frac{1}{x}dx\approx\frac{2-1}{3\cdot 10}\cdot(y_{1,0}+y_{2,0}+2\cdot(y_{1,2}+y_{1,4}+y_{1,6}+y_{1,8})+4\cdot(y_{1,1}+y_{1,3}+y_{1,5}+y_{1,7}+y_{1,9}))$$

$$\log_e 2\approx\frac{1}{30}\cdot(1+0{,}5+2\cdot(0{,}8\overline{3}+0{,}\overline{714285}+0{,}625+0{,}\overline{5})+4\cdot(0{,}\overline{90}+0{,}7692308+0{,}\overline{6}+$$

$$+0{,}5882353+0{,}5263158))=\frac{1}{30}\cdot(1{,}5+2\cdot(2{,}7281745)+4\cdot(3{,}4595394))=\frac{1}{30}\cdot(1{,}5+5{,}456349+$$

$$+13{,}838158)=0{,}6931502$$

Calcolo del valore assoluto dell'errore relativo.
In questo esempio abbiamo $\left|\frac{Vc-Vv}{Vv}\right|=\left|\frac{0{,}6931502-0{,}6931472}{0{,}6931472}\right|\approx 4{,}33\cdot 10^{-6}$.

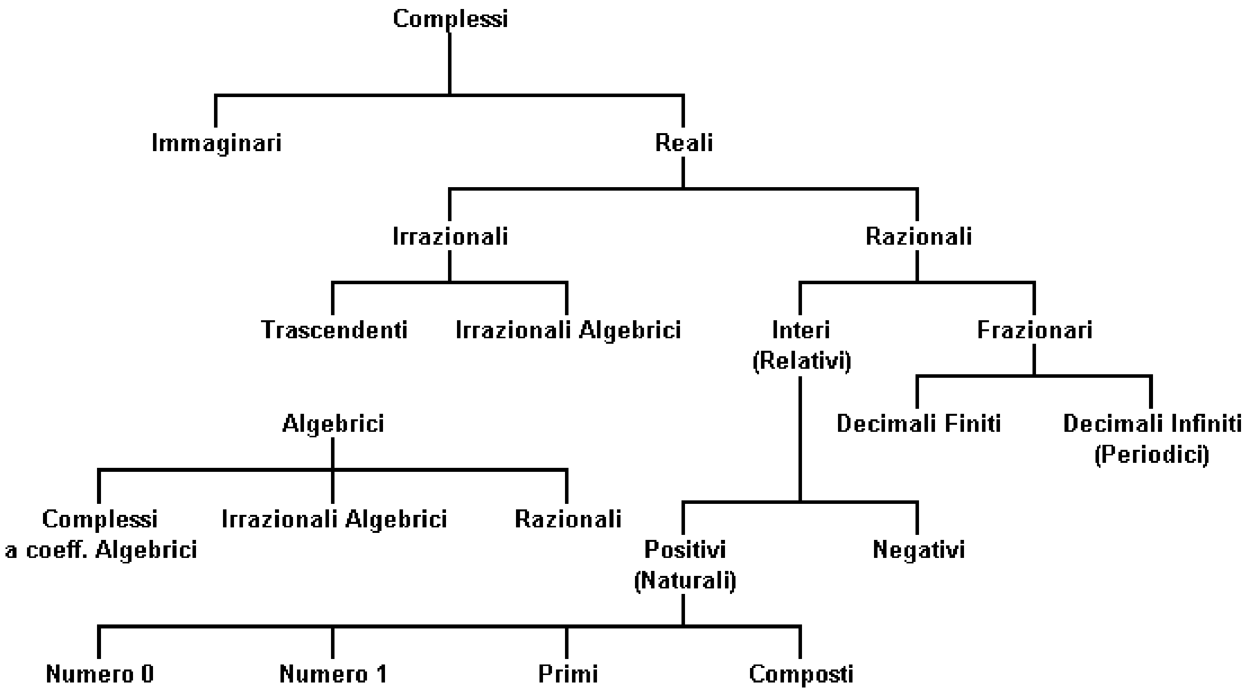
Commento sul metodo
Questo metodo è, di gran lunga, il più utilizzato nella pratica per due buoni motivi. Il primo motivo è l'ottimo risultato cui si perviene e il secondo motivo è l'estrema semplicità nel suo utilizzo.

Metodi di integrazioni meccanici
Sui "*Metodi di integrazione meccanici*" dirò soltanto che quando l'intervallo (di integrazione) è molto grande i procedimenti precedenti possono risultare piuttosto laboriosi, perciò sono stati messi a punto due differenti apparecchi meccanici chiamati **integrafi** e **planimetri**.
Gli **integrafi** sono degli apparecchi meccanici che permettono di disegnare direttamente il grafico della funzione integrale quando sia stato disegnato il grafico della funzione da integrare.
I **planimetri** sono degli apparecchi meccanici che danno direttamente l'area della superficie piana delimitata da linee. Si segue con una particolare punta il contorno della figura, precedentemente disegnata su un piano cartesiano, e poi, grazie a particolari formule, si deduce (con una certa approssimazione) l'area cercata.

4. Appendice

Classificazione dei numeri

I numeri si possono classificare come nello schema seguente.



Vediamo di spiegare questo articolato, e piuttosto complesso, schema.

Numero 0
Il numero 0 è un numero speciale che fa parte dei numeri naturali. Il numero 0 è l'elemento neutro della somma.

Numero 1
Il numero 1 è un altro numero speciale che fa parte dei numeri naturali. Il numero 1 è l'elemento neutro della moltiplicazione.

Numeri Primi
I numeri primi sono i numeri naturali, maggiori di 1, che sono divisibili solo per se stessi e per 1.
Es. 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; ecc.
Tra i numeri primi esiste un solo numero pari che è il numero 2, tutti gli altri numeri primi sono numeri dispari.

Numeri Composti
I numeri composti sono i numeri naturali che non sono né primi, né 0 e nemmeno 1.
Es. $4 = 2^2$; $6 = 2x3$; $8 = 2^3$; $9 = 3^2$; $10 = 2x5$; $12 = 3x2^2$; $14 = 2x7$; $15 = 3x5$; ecc.
Tutti i numeri composti si possono ottenere moltiplicando, tra loro, i numeri primi. Ovviamente i numeri composti si possono anche scomporre in numeri primi (scomposizione in fattori). I numeri composti possono essere sia pari sia dispari.

Numeri Interi Positivi (Naturali)
L'insieme dei numeri interi positivi (o numeri naturali) ha questo simbolo **N**.

Sono l'unione del numero 0, del numero 1, dei numeri primi e dei numeri composti.
Es. 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8, 9, 10, 11, ecc.
Questo insieme di numeri si può anche suddivide in "numeri pari" e in "numeri dispari".
I numeri pari sono i numeri naturali che divisi per 2 danno, come resto, 0. Es. 0; 2; 4; 6; 8; 10; ecc.
I numeri dispari sono i numeri naturali che divisi per 2 danno, come resto, 1. Es. 1; 3; 5; 7; 9; ecc.

Numeri Interi Negativi
I numeri interi negativi sono tutti i numeri interi positivi (numeri naturali), diversi da 0, preceduti dal segno meno. Perciò sono tutti numeri minori di 0.
Es. -1; -2; -3; -4; -5; -6; -7; ecc.

Numeri Interi (Relativi)
L'insieme dei numeri interi (o numeri relativi) ha questo simbolo **Z**.
Sono l'unione dei numeri interi positivi e dei numeri interi negativi.
Es. -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; ecc.

Numeri Decimali Finiti
I numeri decimali finiti sono i numeri che hanno una quantità finita di cifre decimali. Possono essere sia positivi sia negativi.
Es. -2,3; 0,25; 2,2; ecc.

Numeri Decimali Infiniti (Periodici)
I numeri decimali infiniti (o numeri periodici) sono i numeri che hanno una quantità infinita di cifre decimali che si ripetono periodicamente. Possono essere sia positivi sia negativi.
Es. $-0,8\overline{3}$ = -0,8333….; $0,\overline{25}$ = 0,2525….; $0,\overline{3}$ = 0,3333….; $0,\overline{714285}$ = 0,714285714285…; ecc.

Numeri Frazionari
I numeri frazionari sono l'unione dei numeri decimali finiti e dei numeri decimali infiniti (o numeri periodici).
Es. -8,71; 0,32; $5,\overline{43}$ = 5,434343…; ecc.
PS. Non bisogna confondere i numeri frazionari con le frazioni. I numeri frazionari si suddividono come da schema, le frazioni si suddividono in "frazioni proprie" e "frazioni improprie"; le cui "frazioni improprie" hanno un sottoinsieme chiamato "frazioni apparenti".

Numeri Razionali
L'insieme dei numeri razionali ha questo simbolo **Q**.
I numeri razionali sono l'unione dei numeri interi (o numeri relativi) e dei numeri frazionari. Sono tutti della forma $\frac{a}{b}$ con a e b numeri interi (**Z**) e $b \neq$ da 0.
Es. -8,71; -4; 0; 3; 3,58; ecc.
PS. Tutti i numeri razionali sono anche numeri algebrici (vedi oltre).

Numeri Trascendenti
I numeri decimali infiniti non periodici, che non sono numeri algebrici (vedi oltre), si chiamano numeri trascendenti.
Es. $-sen37°$ = -0,601815….; $\log_{10}15$ = 1,1760913….; $e = 2{,}7182818...$; $\pi = 3{,}141592654....$; ecc.
PS. Bisogna fare subito una precisazione per evitare fraintendimenti. Le funzioni trigonometriche (seno, coseno, ecc.) di angoli multipli interi di 3° sessagesimali sono numeri algebrici (vedi oltre).

Numeri Irrazionali
L'insieme dei numeri irrazionali ha questo simbolo **J**.
I numeri irrazionali sono l'unione dei numeri trascendenti e dei numeri irrazionali algebrici (vedi oltre). Non sono della forma $\frac{a}{b}$ con a e b numeri Interi (**Z**) e $b \neq$ da 0.
Es. $\sqrt[5]{23} = 1{,}872171...$; $\sqrt{5} = 2{,}23606797...$; $\pi = 3{,}141592654....$; ecc.

Numeri Reali
L'insieme dei numeri reali ha questo simbolo **R**.
I numeri reali sono l'unione dei numeri razionali e dei numeri irrazionali.

Numeri Immaginari
I numeri immaginari sono tutti i numeri reali, diversi da 0, moltiplicati per l'unità immaginaria j. Dove $j = \sqrt{-1}$.

Numeri Complessi
L'insieme dei numeri complessi ha questo simbolo **C**.
I numeri complessi sono una composizione tra i numeri reali e i numeri immaginari.
Es. $5 + j\sqrt{3}$; $-5\pi + j\sqrt{\log_{10} 2}$; $5 + j\pi^2$; ecc.
PS. Ovviamente se la parte reale è uguale a 0 abbiamo un numero immaginario, se invece è la parte immaginaria ad essere uguale a 0 abbiamo un numero reale.

Numeri Algebrici
I numeri algebrici sono tutti i numeri che sono soluzione di un'equazione algebrica a coefficienti razionali. Cioè sono soluzioni di un'equazione del tipo $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ... + z = 0$ dove i coefficienti $a, b, c, ..., z$ sono numeri razionali (**Q**).
Es. $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{5+\sqrt{8}}$; 5; -8; 0; $0,\bar{3}$; 0,25; $\sqrt{5} - j\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$; ecc.
PS. I numeri algebrici possono essere numeri razionali (5; -8; $0,\bar{3}$; ecc.), numeri irrazionali ($\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{5+\sqrt{8}}$; ecc.), e numeri complessi a coefficienti algebrici ($\sqrt{5} - j\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$; ecc.).

I numeri algebrici possiedono alcune particolarità interessanti.

A) Somme ($a+b$), sottrazioni ($a-b$), moltiplicazioni ($a \times b$) o divisioni ($\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$) di numeri algebrici danno sempre, come risultato, dei numeri algebrici.

B) Le soluzioni di un polinomio i cui coefficienti sono numeri algebrici, sono numeri algebrici.

C) Se a e b sono numeri algebrici con $a \neq$ da $\{0,1\}$, e con b numero irrazionale, allora il numero a^b è trascendente. Cioè $2^{\sqrt{2}}$ è un numero trascendente.

Da quello che abbiamo appena visto, risulta la seguente successione di inclusioni fra gli insiemi numerici $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$ ed inoltre risulta anche che $Q \cup J = R$.

Il simbolo $\subset$ significa "è contenuto in" oppure "è incluso in" o anche "è un sottoinsieme di".
Il simbolo $\cup$ significa "unione".

Paradossi
Qui vi farò vedere due dimostrazioni errate, con lo scopo di palesare la necessità di porre sempre la massima attenzione quando si manipolano i logaritmi. Ovviamente partirò da un'affermazione vera e, attraverso una serie di passaggi corretti meno uno, arriverò a un'affermazione palesemente falsa. Starà alla vostra bravura capire in quale punto, della dimostrazione, c'è l'errore e qual è questo errore che crea il paradosso. Nell'ultima pagina dell'appendice, troverete le soluzioni.

Paradosso 1
Dimostreremo che $2 = 1$

L'affermazione seguente è vera.
$1^2 = 1$
Calcolando il logaritmo di entrambi i termini otteniamo:
$\log_a 1^2 = \log_a 1$
Semplificando otteniamo:
$2 \cdot \log_a 1 = \log_a 1$
Dividendo entrambi i termini per l'espressione $\log_a 1$ abbiamo:
$\frac{2 \cdot \log_a 1}{\log_a 1} = \frac{\log_a 1}{\log_a 1}$
E poiché $\frac{\log_a 1}{\log_a 1} = 1$ otteniamo che $2 = 1$ e quest'affermazione è palesemente falsa.
Dov'è l'errore che ha creato questo paradosso?

Paradosso 2
Dimostreremo che $1 = -1$

L'affermazione seguente è vera.
$(-1)^2 = 1$
Calcolando il logaritmo di entrambi i termini otteniamo:
$\log_a (-1)^2 = \log_a 1$
Semplificando otteniamo:
$2\log_a (-1) = \log_a 1$
Perciò abbiamo che:
$2\log_a (-1) = 0$
Dividendo entrambi i termini per 2 abbiamo:
$\log_a (-1) = 0$
Per la definizione di logaritmo, abbiamo:
$a^0 = -1$
Ovviamente $a^0 = 1$ per cui abbiamo ottenuto che $1 = -1$ e quest'affermazione è palesemente falsa.
Dov'è l'errore che ha creato questo paradosso?

Formula che rappresenta il numero "e"
La più conosciuta, ma non l'unica, formula che rappresenta il numero trascendente "e" è sicuramente l'espressione $e = \lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x$. Questa formula è semplice ma non è adatta per calcolarne il relativo valore.

Il valore del numero “e” è compreso tra i valori di 2 e di 3

Teorema

Per “$x \to \infty$” il valore della funzione $(1+\frac{1}{x})^x$ cresce ed è compreso tra il valore di 2 e di 3. Questo fatto è sufficiente per dimostrare che la funzione $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ è limitata e il suo limite è convenzionalmente indicato con la lettera “e”. Cioè vale la seguente disuguaglianza $2 < \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e < 3$. Poiché la dimostrazione è piuttosto articolata, dimostrerò questo teorema suddividendolo in tre parti distinte.

Parte prima

Dimostriamo che la funzione $(1+\frac{1}{x})^x$ ha un limite inferiore.

Dimostrazione

Per “$x = 1$” il valore della funzione $(1+\frac{1}{x})^x$ è uguale a 2 e questo è il limite inferiore.

C.V.D.

Parte seconda

Dimostriamo che la funzione $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, al crescere di “$x$”, cresce.

Dimostrazione

Prima di tutto vediamo lo sviluppo alla potenza n-esima di un binomio. Questo sviluppo in serie si chiama “*binomio di Newton*”.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + ... + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Eseguendo le sostituzioni otteniamo:

$$(1+\frac{1}{x})^x = 1 + x\frac{1}{x} + \frac{x(x-1)}{2!}\frac{1}{x^2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}\frac{1}{x^3} + ... + \frac{x(x-1)(x-2)...2}{(x-1)!}\frac{1}{x^{x-1}} + \frac{1}{x^x}$$

Cioè:

$$(1+\frac{1}{x})^x = 1+1+\frac{(x-1)}{2!}\frac{1}{x} + \frac{(x-1)(x-2)}{3!}\frac{1}{x^2} + ... + \frac{1}{x^{x-2}} + \frac{1}{x^x}$$

La prima cosa da dire è che questa somma è composta da “$x+1$” termini *tutti* positivi. Perciò al crescere di “x” il numero dei termini cresce e cresce anche il valore di tutti i termini oltre i primi due. In pratica quando il numero passa da “x” a “$x+1$” tutti i termini, dal terzo termine compreso in poi, crescono in valore e in più si va a sommare, ai precedenti termini, un nuovo termine.

C.V.D.

Parte terza

Dimostriamo che la funzione $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, per $x \to \infty$ ha un limite superiore.

Dimostrazione

Abbiamo appena visto che:

$$(1+\frac{1}{x})^x = 1+1+\frac{(x-1)}{2!}\frac{1}{x} + \frac{(x-1)(x-2)}{3!}\frac{1}{x^2} + ... + \frac{1}{x^{x-2}} + \frac{1}{x^x}$$

Aggiungendo altri termini otteniamo:

$$(1+\frac{1}{x})^x = 1+1+\frac{(x-1)}{2!}\frac{1}{x}+\frac{(x-1)(x-2)}{3!}\frac{1}{x^2}+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}\frac{1}{x^3}+$$

$$+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{5!}\frac{1}{x^4}+...$$

Perciò:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = 1+1+\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)}{2!}\frac{1}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x-2)}{3!}\frac{1}{x^2}+\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{4!}\frac{1}{x^3}+$$

$$+\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{5!}\frac{1}{x^4}+...$$

Considerando che:

il $\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)}{x}=1$

il $\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x-2)}{x^2}=1$

il $\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{x^3}=1$

il $\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{x^4}=1$

ecc.

Ora, eseguendo tutte le semplificazioni, otteniamo la seguente bella, oltre che facile da ricordare, espressione.

$$e=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}+...$$

Con questa formula è possibile calcolare il valore di "e" in modo semplice e veloce come vedremo tra poco. Ora sostituiamo, nella precedente serie, alcuni denominatori con numeri più piccoli.

$3! > 2^2$ $\quad$ $4! > 2^3$ $\quad$ $n! > 2^{n-1}$

Questa sostituzione provoca un aumento del valore dei vari addendi.

$\frac{1}{3!} < \frac{1}{2^2}$ $\quad$ $\frac{1}{4!} < \frac{1}{2^3}$ $\quad$ $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$

Perciò abbiamo:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+... < 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...$$

La serie appena ottenuta la possiamo separare in due parti, il primo termine e tutti gli altri termini. Andiamo ora ad analizzare tutti i termini che rimangono dopo aver accantonato il primo termine.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+...$$

Questa serie è una progressione geometrica dove tutti i termini hanno il medesimo segno (+), la sua ragione è $q=\frac{1}{2}$ e il primo termine è $a_1=1$.

La somma dei vari termini di una progressione geometrica la possiamo calcolare con la seguente formula $S_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q}$ dove con "n" indico il numero dei vari termini della medesima progressione. Ora, eseguendo le varie sostituzioni, otteniamo:

$S_n = 1 \cdot \dfrac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}$ $\qquad S_n = \dfrac{1-(\frac{1}{2})^n}{\frac{1}{2}}$ $\qquad S_n = 2\cdot(1-(\frac{1}{2})^n)$

$S_n = 2-(\frac{1}{2})^{n-1}$ $\qquad S_n = 2-\dfrac{1}{2^{n-1}}$

Perciò, riassumendo, abbiamo:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+... < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+... = 1+(2-\frac{1}{2^{x-1}}) = 3-\frac{1}{2^{x-1}} = 3$$

Ovvero:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x < 3$$

C.V.D.

Calcolo del valore di $(1+\frac{1}{x})^x$ per x che tende a meno infinito

Per "$x\to\infty$" l'espressione $(1+\frac{1}{x})^x$ tende al numero trascendente "e", ma che succede all'espressione $(1+\frac{1}{x})^x$ nell'ipotesi che "$x\to-\infty$"? Qui dimostreremo che, anche in questo caso, l'espressione $(1+\frac{1}{x})^x$ tende al numero trascendente "e". Cioè $\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.

Dimostrazione

Se poniamo $x=-y-1$ allora risulta che $y=-x-1$ ed eseguendo, nell'espressione precedente, il cambio di variabile abbiamo:

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} -x-1 = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{y\to\infty}(1+\frac{1}{-y-1})^{(-y-1)}$$

Ora, eseguendo semplici passaggi, otteniamo:

$\lim_{y\to\infty}(1+\dfrac{1}{-y-1})^{(-y-1)}$ $\qquad \lim_{y\to\infty}(\dfrac{-y-1+1}{-y-1})^{(-y-1)}$ $\qquad \lim_{y\to\infty}(\dfrac{-y}{-y-1})^{(-y-1)}$

$\lim_{y\to\infty}(\dfrac{y}{y+1})^{(-y-1)}$ $\qquad \lim_{y\to\infty}(\dfrac{y}{y+1})^{-(y+1)}$ $\qquad \lim_{y\to\infty}(\dfrac{y+1}{y})^{(y+1)}$

$\lim_{y\to\infty}[(\dfrac{y+1}{y})^y \cdot (\dfrac{y+1}{y})^1]$ $\qquad \lim_{y\to\infty}[(1+\dfrac{1}{y})^y \cdot (1+\dfrac{1}{y})^1] = e\cdot 1 = e$

C.V.D.

Rappresentazione grafica della funzione $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Prima di riportare la rappresentazione grafica della funzione $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ bisogna studiarne l'intervallo di esistenza. Poiché deve risultare che $\left(1+\frac{1}{x}\right)\geq 0$ è piuttosto semplice vedere che esistono soltanto 2 casi e cioè:

Per $x > 0$ la funzione $(1+\frac{1}{x})$ è sempre maggiore o uguale a 0 (zero).

Per $x < 0$ la funzione $(1+\frac{1}{x})$ è maggiore o uguale a 0 (zero) per $x \le -1$.

Abbiamo appena dimostrato che:

A) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

B) $\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

E’ facile vedere che:

C) $\lim_{x\to-1-}(1+\frac{1}{x})^x = +\infty$

Andiamo ora a calcolare il valore del $\lim_{x\to 0}(1+\frac{1}{x})^x$.

Per determinare questo valore siamo obbligati a utilizzare i logaritmi, perciò il limite precedente si modifica così $\lim_{x\to 0+}(1+\frac{1}{x})^x$.

$$\lim_{x\to 0+}(1+\frac{1}{x})^x = \lim_{x\to 0+}(\text{antilog}_e(\log_e(1+\frac{1}{x})^x)) = \text{antilog}_e(\lim_{x\to 0+}(x\cdot\log_e(1+\frac{1}{x}))) =$$

$$= \text{antilog}_e(\lim_{x\to 0+}(\frac{\log_e(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}})) =$$

Qui abbiamo la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ e la possiamo risolvere grazie alla Regola De L’Hospital.

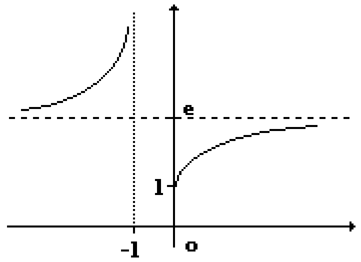
$$= \text{antilog}_e(\lim_{x\to 0+}(\frac{\log_e(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}})) = \text{antilog}_e(\lim_{x\to 0+}(\frac{D(\log_e(1+\frac{1}{x}))}{D(\frac{1}{x})})) = \text{antilog}_e(\lim_{x\to 0+}(\frac{\frac{-x^{-2}}{1+\frac{1}{x}}}{-x^{-2}})) =$$

$$= \text{antilog}_e(\lim_{x\to 0+}(\frac{1}{1+\frac{1}{x}})) = \text{antilog}_e 0 = 1$$

Riassumendo abbiamo che:

D) $\lim_{x\to -0+}(1+\frac{1}{x})^x = 1$

Rappresentazione grafica della funzione $(1+\frac{1}{x})^x$



Calcolo di alcune funzioni particolari

Vediamo ora come risolvere funzioni simili a $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ che potremmo trovare.

A) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x+a}$

$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x+a}$ $\quad \lim_{x\to\infty}((1+\frac{1}{x})^x\cdot(1+\frac{1}{x})^a)$ $\quad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x\cdot\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^a$

$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x\cdot 1^a$ $\quad e\cdot 1=e$

Perciò abbiamo che il $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x+a}=e$.

B) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{ax}$

$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{ax}$ $\quad \lim_{x\to\infty}((1+\frac{1}{x})^x)^a$ $\quad (\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x)^a$

e^a

Perciò abbiamo che il $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{ax}=e^a$.

C) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x$

$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x$ $\quad y=\frac{x}{a}$ $\quad \lim_{y\to\infty}(1+\frac{a}{a\cdot y})^{ay}$

$\lim_{y\to\infty}(1+\frac{1}{y})^{ay}$ $\quad e^a$

Perciò abbiamo che il $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x=e^a$.

D) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^{bx}$

$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^{bx}$ $\quad \lim_{x\to\infty}((1+\frac{a}{x})^x)^b$ $\quad (\lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x)^b$

$(e^a)^b$ $\quad e^{ab}$

Perciò abbiamo che il $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^{bx}=e^{ab}$.

E) $\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x$

$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x$ $\quad \lim_{x\to\infty}(\frac{x-1}{x})^x$ $\quad y=x-1$

$\lim_{y\to\infty}(\frac{y}{y+1})^{y+1}$ $\quad \lim_{y\to\infty}(\frac{1}{\frac{y+1}{y}})^{y+1}$ $\quad \lim_{y\to\infty}(\frac{1}{1+\frac{1}{y}})^{y+1}$

$\frac{1}{\lim_{y\to\infty}(1+\frac{1}{y})^{y+1}}$ $\quad \frac{1}{e}$

Perciò abbiamo che il $\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x=\frac{1}{e}$.

F) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{x+a}$

$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{x+a}$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{a}$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{x}\cdot 1^{a}$

$\frac{1}{e}\cdot 1$ $\qquad \frac{1}{e}$

Perciò abbiamo che il $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{x+a}=\frac{1}{e}$.

G) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{ax}$

$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{ax}$ $\qquad (\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{x})^{a}$ $\qquad (\frac{1}{e})^{a}$

$\frac{1}{e^{a}}$

Perciò abbiamo che il $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{ax}=\frac{1}{e^{a}}$.

H) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{a}{x})^{x}$

$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{a}{x})^{x}$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x-a}{x})^{x}$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{\frac{x}{x-a}})^{x}$

$y=x-a$ $\qquad \lim\limits_{y\to\infty}(\frac{1}{\frac{y+a}{y}})^{y+a}$ $\qquad \frac{1}{\lim\limits_{y\to\infty}(\frac{y+a}{y})^{y+a}}$

$\frac{1}{\lim\limits_{y\to\infty}(1+\frac{a}{y})^{y+a}}$ $\qquad \frac{1}{\lim\limits_{y\to\infty}(1+\frac{a}{y})^{y}\cdot\lim\limits_{y\to\infty}(1+\frac{a}{y})^{a}}$ $\qquad \frac{1}{e^{a}}$

Perciò abbiamo che il $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{a}{x})^{x}=\frac{1}{e^{a}}$.

I) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x}{x+1})^{x}$

$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x}{x+1})^{x}$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{1}{\frac{x+1}{x}})^{x}$ $\qquad \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+1}{x})^{x}}$

$\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}}$ $\qquad \frac{1}{e}$

Perciò abbiamo che il $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x}{x+1})^{x}=\frac{1}{e}$.

Altre formule che rappresentano il numero trascendente "e"

Ora vedremo alcune altre formule che rappresentano il numero trascendente "e".

1) Un'espressione è la $e=[2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,...]$. Questa è una frazione continua illimitata con aspetti di regolarità.

2) Una seconda espressione è la $e=[2,\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},...]$. Questa è una frazione continua illimitata generalizzata.

3) Una terza espressione è la $e=2+\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+...}{5}}{4}}{3}}{2}$. Questa è una frazione continua illimitata ascendente.

Calcolo del numero trascendente "*e*"

Per questo calcolo utilizzeremo l'espressione $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+...$ che abbiamo visto precedentemente e che, grazie ad essa, permette di effettuarne il calcolo in modo semplice e veloce.

1 = 1

$\frac{1}{1!}$ = 1

$\frac{1}{2!}$ = 0,5

$\frac{1}{3!}$ = 0,1666666667

$\frac{1}{4!}$ = 0,0416666667

$\frac{1}{5!}$ = 0,0083333333

$\frac{1}{6!}$ = 0,0013888889

$\frac{1}{7!}$ = 0,0001984127

$\frac{1}{8!}$ = 0,0000248016

$\frac{1}{9!}$ = 0,0000027557

$\frac{1}{10!}$ = 0,0000002756

$\frac{1}{11!}$ = 0,0000000251

La somma dei primi dodici termini è uguale a 2,7182818263 ottenendo un valore di "*e*" che è un'ottima approssimazione, poiché il suo valore vero è 2,71828182845904523536…

Metodi per ricordarsi le cifre del numero trascendente "*e*"

Esistono molte frasi mnemoniche per poter facilmente ricordare alcune, delle infinite cifre, del numero trascendente "*e*". In queste frasi a ogni parola corrisponde una cifra del numero "*e*" e il numero delle lettere della parola equivale al valore della cifra medesima (esempio Io = 2, ricordo =

7, ecc.). Qui riporto due di queste frasi e con esse si possono ricordare, molto agevolmente, le prime 13 cifre del numero trascendente "e" ovvero 2,718281828459.

1) Io ricordo a menadito la costante "e" mediante la tiritera data quale riepilogo.
2) Ai modesti o vanitosi, ai violenti o timorosi, do cantando gaio ritmo, logaritmo.

Normalmente non è necessario ricordarsi così tante cifre decimali e, in questo caso, possiamo utilizzare un altro metodo. Con quest'altro metodo basterà ricordarsi le prime due cifre (2,7) e poi un numero come se fosse una data (1828). Con questo metodo si possono ricordare le prime 10 cifre decimali (2,7 1828 1828 = 2,718281828) del numero trascendente "e".

Proprietà fondamentali del numero "e"

Il numero trascendente "e" ha due proprietà fondamentali. Vediamole entrambe.

1) *Derivata della funzione logaritmica.*
La funzione logaritmica è $y = \log_a x$.
Il suo rapporto incrementale è uguale a $\dfrac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h}$.
Con semplici passaggi otteniamo:
$$\frac{1}{h}\cdot[\log_a(x+h) - \log_a x] = \frac{1}{h}\cdot[\log_a \frac{x+h}{x}] = \frac{1}{h}\cdot[\log_a(1+\frac{h}{x})] = \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{h}\cdot[\log_a(1+\frac{h}{x})] =$$
$$= \frac{1}{x}\cdot\log_a(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$
Se poniamo $\dfrac{x}{h} = z$ ed eseguiamo la sostituzione nell'espressione precedente otteniamo:
$$\frac{1}{x}\cdot\log_a(1+\frac{1}{z})^z$$
Per ottenere la derivata della funzione logaritmica è necessario far tendere a 0 (zero) il valore di "h". Ovviamente se "h" tende a 0 (zero) il valore di "z" tende a infinito. Perciò abbiamo:
$$y' = \lim_{h\to 0}[\frac{1}{x}\cdot\log_a(1+\frac{1}{z})^z] \qquad y' = \lim_{z\to\infty}[\frac{1}{x}\cdot\log_a(1+\frac{1}{z})^z] \qquad y' = \frac{1}{x}\cdot\lim_{z\to\infty}[\log_a(1+\frac{1}{z})^z]$$
$y' = \dfrac{1}{x}\cdot\log_a[\lim_{z\to\infty}(1+\dfrac{1}{z})^z]$ e poiché $e = \lim_{z\to\infty}(1+\dfrac{1}{z})^z$ abbiamo che $y' = \dfrac{1}{x}\cdot\log_a e$.
Dopo tutti questi passaggi abbiamo ottenuto che:
$$D(\log_a x) = \frac{1}{x}\cdot\log_a e$$
Ora, nell'ipotesi che la base dei logaritmi sia il numero trascendente "e" (cioè $a = e$), abbiamo:
$$D(\log_e x) = \frac{1}{x} \qquad \text{poiché} \qquad \log_e e = 1.$$
La semplicità di questo risultato giustifica perché, in analisi, è opportuno adottare il numero trascendente "e" come base dei logaritmi.
C.V.D.

2) *Derivata della funzione esponenziale.*
Abbiamo appena visto, nel punto precedente, l'importanza di utilizzare il numero trascendente "e" come base dei logaritmi. Questo implica che, anche per il calcolo della funzione esponenziale, impostando come base il numero trascendente "e", si debba ottenere una notevole semplificazione,

poiché la funzione esponenziale è l'inverso della funzione logaritmica. Comunque dimostriamo, anche in questo caso, la sua derivata che è di fondamentale importanza.

La funzione esponenziale è $y = a^x$.
Calcolando il logaritmo in base "b", di entrambi i termini, otteniamo:
$\log_b y = \log_b a^x$
Che equivale a:
$\log_b y = x \cdot \log_b a$
Se calcoliamo le derivate di entrambi i termini, otteniamo:
$$D(\log_b y) = \frac{1}{y} \cdot \log_b e \cdot y'$$
$$D(x \cdot \log_b a) = 1 \cdot \log_b a = \log_b a$$
Ovviamente entrambe le derivate devono essere uguali, perciò abbiamo che:
$$\frac{1}{y} \cdot \log_b e \cdot y' = \log_b a$$
Ovvero:
$$y' = y \cdot \frac{\log_b a}{\log_b e}$$
Sostituendo a y il suo valore ($y = a^x$) abbiamo che:
$$y' = \frac{a^x \cdot \log_b a}{\log_b e}$$
Come abbiamo visto in "Trasformazione di un logaritmo da una base a un'altra base" risulta che:
$$\frac{\log_b a}{\log_b e} = \log_e a$$
Sostituendo questo risultato nell'espressione precedente otteniamo:
$$D(a^x) = a^x \cdot \log_e a$$
Ora, nell'ipotesi che la base della funzione esponenziale sia il numero trascendente "e" (cioè $a = e$), abbiamo:
$D(e^x) = e^x$ Cioè la derivata di e^x è la stessa funzione e^x.
C.V.D.

Un piccolo ma simpatico problema

Tra "e^π" e "π^e" qual è il numero più grande?
Se si eseguono i calcoli abbiamo:

$e^\pi = 23{,}14069263...$ $\pi^e = 22{,}45915772...$

Esistono diversi metodi per dimostrare che e^π è maggiore di π^e, senza eseguire nessun tipo di calcolo, ed io illustrerò un metodo generale.

Dimostrazione

Invece di eseguire il confronto tra "e^π e π^e" facciamo un confronto più generale. Il confronto che vedremo è:
"e^x confrontato con x^e".
Calcolando il logaritmo in base "e" di entrambi i termini, il confronto diventa:
"$\log_e e^x$ confrontato con $\log_e x^e$".

Semplificando otteniamo:
"$x\log_e e$ confrontato con $e\log_e x$".
Possiamo semplificare ancora ottenendo:
"x confrontato con $e\log_e x$" poiché il "$\log_e e = 1$".
Come abbiamo visto nelle *proprietà fondamentali dei logaritmi* se la base del logaritmo è maggiore di 1 allora il risultato cresce al crescere del numero. Poiché abbiamo utilizzato, nelle nostre trasformazioni, il logaritmo in base e, che è maggiore di 1, possiamo scrivere che:
Se $e^x < x^e$ allora $x < e\log_e x$
Se $e^x = x^e$ allora $x = e\log_e x$
Se $e^x > x^e$ allora $x > e\log_e x$.
Voglio ricordare che il "$\log_e x$" non si può calcolare per $x \le 0$, poiché la funzione logaritmo non esiste per i numeri negativi o uguali a zero.
Per stabilire quale delle tre precedenti ipotesi corrisponde al vero, è necessario calcolare la derivata prima e seconda della funzione $f(x) = x - e\log_e x$.

Funzione	$f(x) = x - e\log_e x$
Derivata prima	$f'(x) = 1 - \frac{e}{x} = 1 - ex^{-1}$
Derivata seconda	$f''(x) = 0 - (-1)ex^{-2} = ex^{-2}$

Per $x > 0$ "x^{-2}" è sempre positivo allora anche "ex^{-2}" è sempre positivo e questo significa che la funzione "$f(x) = x - e\log_e x$" rivolge verso l'alto la sua concavità. Questo significa che la funzione "$f(x) = x - e\log_e x$" ha un minimo. Calcoliamo ora questo minimo impostando a 0 (zero) la derivata prima "$f'(x) = 1 - ex^{-1} = 0$". Risolvendo questo semplice calcolo otteniamo "$x = e$" e per questo valore la funzione "$f(x) = x - e\log_e x$" vale 0 (zero). Poiché il valore più piccolo della funzione "$f(x) = x - e\log_e x$" è 0 (zero) (per il punto "$x = e$") è ovvio che per "$x \ne e$" deve risultare "$f(x) = x - e\log_e x > 0$" ovvero "$x > e\log_e x$". Da questo risultato possiamo dedurre, andando a ritroso, che "$e^x > x^e$" per ogni "$x \ne e$". Per questo motivo, poiché "$\pi \ne e$", sarà "$e^\pi > \pi^e$".
C.V.D.

Alcune situazioni dove è presente il numero trascendente "e"

Il numero trascendente "e" lo possiamo trovare in molte situazioni e fenomeni differenti. Poiché non è possibile, per ovvie ragioni, mostrarli tutti io ne illustrerò alcuni.

A) Matematica
1) *Studio di una funzione particolare*
Qual'è il valore di x che rende massimo il valore della funzione $y = \sqrt[x]{x}$?
Intanto possiamo vedere che:
$\sqrt{2} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12]{64}$
$\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}$
$\sqrt[4]{4} = \sqrt[12]{4^3} = \sqrt[12]{64}$
Da qui possiamo dedurre che il valore della $\sqrt[3]{3}$ è maggiore del valore della $\sqrt{2}$ e del valore $\sqrt[4]{4}$ (per essere precisi il valore della $\sqrt{2}$ e uguale al valore $\sqrt[4]{4}$). Perciò, in un intorno di $x = 3$,

abbiamo sicuramente un massimo relativo. Comunque, per rispondere alla nostra domanda iniziale, bisogna prima rispondere a un'altra domanda e cioè:

Qual'è la derivata della funzione $y = f_x^{g_x}$? Eseguiamo questo calcolo.

$y = f_x^{g_x}$ $\qquad \log_e y = \log_e f_x^{g_x}$ $\qquad \log_e y = g_x \cdot \log_e f_x$

$\frac{1}{y} \cdot y' = g'_x \cdot \log_e f_x + g_x \cdot \frac{1}{f_x} \cdot f'_x$ $\qquad y' = y \cdot (g'_x \cdot \log_e f_x + g_x \cdot \frac{f'_x}{f_x})$

Perciò la derivata della funzione $y = f_x^{g_x}$ è la funzione $y' = f_x^{g_x} \cdot (g'_x \cdot \log_e f_x + g_x \cdot \frac{f'_x}{f_x})$.

Ora abbiamo tutti gli strumenti per rispondere alla nostra domanda iniziale.

La funzione $y = \sqrt[x]{x}$ può essere scritta anche come $y = x^{\frac{1}{x}}$ e utilizzando la formula di derivazione appena vista, otteniamo:

$y' = \sqrt[x]{x} \cdot (-\frac{1}{x^2} \cdot \log_e x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x})$ $\qquad y' = \sqrt[x]{x} \cdot (-\frac{1}{x^2} \cdot \log_e x + \frac{1}{x^2})$

$y' = \sqrt[x]{x} \cdot (\frac{1}{x^2} \cdot (1 - \log_e x))$ $\qquad y' = \frac{\sqrt[x]{x}}{x^2} \cdot (1 - \log_e x)$

Il valore dei minimi/massimi relativi si trovano impostando $y' = 0$ cioè:

$\frac{\sqrt[x]{x}}{x^2} \cdot (1 - \log_e x) = 0$

Questa funzione è uguale a 0 (zero) quando:

$(1 - \log_e x) = 0$

Che risolta da:

$x = e$

Per questo valore abbiamo l'unico minimo/massimo relativo. Pioché abbiamo già stabilito che in un intorno del numero 3 deve esiste un massimo relativo possiamo dedurre che il valore trovato deve essere il massimo relativo. Cerchiamo ora il massimo assoluto.

In genere bisognerebbe calcolare la funzione anche ai due estremi (in questo caso gli estremi sono $x = 0+$ e $x = +\infty$) e confrontare i tre valori per stabilire il massimo assoluto, ma la funzione $y' = \frac{\sqrt[x]{x}}{x^2} \cdot (1 - \log_e x)$ si annulla una sola volta, perciò il valore del massimo relativo è anche il valore del massimo assoluto. Da ciò si deduce che la funzione $y = \sqrt[x]{x}$ ha il massimo assoluto nel punto $x = e$.

Per pura curiosità il valore del massimo assoluto è $y = \sqrt[e]{e} = 1{,}44466786...$.

Solo come controprova calcoliamo la funzione anche ai due estremi.

Calcolo del valore della funzione per $x \to 0^+$

$$\lim_{x\to 0+} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to 0+} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} (\text{antilog}_e (\log_e x^{\frac{1}{x}})) = \text{antilog}_e (\lim_{x\to 0+} (\log_e x^{\frac{1}{x}})) = \text{antilog}_e (\lim_{x\to 0+} (\frac{1}{x} \cdot \log_e x)) =$$

$$= \text{antilog}_e (-\infty) = 0$$

Calcolo del valore della funzione per $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} (\text{antilog}_e (\log_e x^{\frac{1}{x}})) = \text{antilog}_e (\lim_{x\to\infty} (\log_e x^{\frac{1}{x}})) = \text{antilog}_e (\lim_{x\to\infty} (\frac{1}{x} \cdot \log_e x)) =$$

$$= \text{antilog}_e (\lim_{x\to\infty} (\frac{\log_e x}{x})) =$$

Qui abbiamo la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ e la possiamo risolvere grazie alla Regola De L'Hospital.

$$= \text{antilog}_e(\lim_{x\to\infty}(\frac{\log_e x}{x})) = \text{antilog}_e(\lim_{x\to\infty}(\frac{D(\log_e x)}{D(x)})) = \text{antilog}_e(\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{x})) = \text{antilog}_e(0) = 1$$

2) *Studio di un'altra funzione particolare*
Proviamo a studiare la funzione $y = x^x$.
Calcoliamone la derivata con la formula che abbiamo visto nell'esempio precedente.

$y' = x^x \cdot (1 \cdot \log_e x + x \cdot \frac{1}{x})$ $\qquad\qquad$ $y' = x^x \cdot (\log_e x + 1)$

Il valore dei minimi/massimi relativi si trovano impostando $y' = 0$ cioè:
$x^x \cdot (\log_e x + 1) = 0$
Questa funzione è uguale a 0 (zero) quando:
$(\log_e x + 1) = 0$
Che risolta da:
$x = \frac{1}{e}$
Per questo valore abbiamo il minimo/massimo relativo.Poiché la derivata si annulla una sola volta nel punto $x = \frac{1}{e}$ questo valore deve essere anche il punto di massimo o di minimo assoluto. Considerando che la funzione, per valori crescenti di x, tende a crescere indefinitivamente, nel punto $x = \frac{1}{e}$ deve essere localizzato il minimo relativo e questo valore è anche il minimo assoluto.

Per pura curiosità questo valore di minimo assoluto è $y = (\frac{1}{e})^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{\sqrt[e]{e}} = 0{,}69220062...$.
Solo come controprova calcoliamo la funzione anche ai due estremi.
Calcolo del valore della funzione per $x \to 0^+$

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+}(\text{antilog}_e(\log_e x^x)) = \text{antilog}_e(\lim_{x\to 0+}(\log_e x^x)) = \text{antilog}_e(\lim_{x\to 0+}(x \cdot \log_e x)) =$$

$$= \text{antilog}_e(\lim_{x\to 0+}(\frac{\log_e x}{\frac{1}{x}})) =$$

Qui abbiamo la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ e la possiamo risolvere grazie alla Regola De L'Hospital.

$$= \text{antilog}_e(\lim_{x\to 0+}(\frac{\log_e x}{\frac{1}{x}})) = \text{antilog}_e(\lim_{x\to 0+}(\frac{D(\log_e x)}{D(\frac{1}{x})})) = \text{antilog}_e(\lim_{x\to 0+}(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}})) =$$

$$= \text{antilog}_e(\lim_{x\to 0+}(\frac{1}{x} \cdot -x^2)) = \text{antilog}_e(\lim_{x\to 0+}(-x)) = \text{antilog}_e(0) = 1$$

Calcolo del valore della funzione per $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} x^x = \infty$$

B) Tecnologia
1) *Capacità di un condensatore cilindrico*
Non è semplicissimo dimostrare che la capacità di un condensatore cilindrico è uguale a:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 l}{\log_e \frac{r_e}{r_i}}$$

Dove indico con:
C = capacità del condensatore cilindrico
ε_r = permettività (o costante dielettrica) relativa
ε_0 = permettività (o costante dielettrica) assoluta. Questa costante vale $8{,}85419 \cdot 10^{-12}$F/m
l = lunghezza del condensatore cilindrico
r_e = raggio interno del cilindro esterno
r_i = raggio esterno del cilindro interno
Questa formula trova applicazione nei conduttori coassiali, nei cavi unipolari, negli isolatori passanti, ecc.

2) *Capacità di due conduttori paralleli filiformi di identico diametro*
Anche in questo caso non è semplicissimo dimostrare che la capacità di un condensatore formato da due conduttori paralleli filiformi, di identico diametro, è uguale a:

$$C = \frac{\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 l}{\log_e \frac{d-r}{r}}$$

Dove indico con:
C = capacità dei due conduttori paralleli filiformi di identico diametro
ε_r = permettività (o costante dielettrica) relativa
ε_0 = permettività (o costante dielettrica) assoluta. Questa costante vale $8{,}85419 \cdot 10^{-12}$F/m
l = lunghezza dei conduttori filiformi
r = raggio dei conduttori filiformi
d = distanza tra i centri dei due conduttori filiformi
Se, come avviene generalmente, $d >> r$ (d molto maggiore di r) allora la precedente formula può essere semplificata nella seguente formula approssimata:

$$C \approx \frac{\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 l}{\log_e \frac{d}{r}}$$

Queste formule trovano applicazione nelle linee aeree a conduttori nudi.

3) *Riscaldamento e raffreddamento di una macchina*
Le formule che andremo a vedere trovano la loro applicazione in tutte le macchine che, nel loro funzionamento, generano calore (trasformatori, motori elettrici, motori termici, ecc.). Ovviamente entrambe le formule sono valide nei limiti in cui si può ritenere la macchina un corpo omogeneo a temperatura uniforme immerso in un mezzo omogeneo a temperatura uniforme. Queste ipotesi rendono aleatori i risultati ottenuti attraverso l'utilizzo di queste formule anche se sono molto utili come valori orientativi.

3a) *Riscaldamento di una macchina*
Nel caso di una macchina funzionante a carico costante la sua temperatura varia in base alla seguente formula.

$$\Theta_t = \Theta_r \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}}) + \Theta_a \qquad \text{con } \Theta_r = \frac{p}{k \cdot S} = \frac{p}{K}$$

Dove indico con:

Θ_t = temperatura al tempo t
Θ_a = temperatura ambiente
Θ_r = sovratemperatura a regime
T = costante di tempo termica della macchina
t = durata del funzionamento della macchina
p = potenza trasformata in calore all'interno della macchina
k = coefficiente specifico medio di trasmissione del calore (per conduzione, per convenzione e per irraggiamento)
S = superficie disperdente della macchina
$K = k \cdot S$ = coefficiente globale di trasmissione del calore

3b) *Raffreddamento di una macchina*
In modo analogo al riscaldamento, avviene il raffreddamento di una macchina. Ovviamente la macchina si troverà a una temperatura superiore alla temperatura ambiente, a un certo punto viene disalimentata, e la sua temperatura varierà in base alla seguente formula.

$$\Theta_t = \Theta_s \cdot e^{-\frac{t}{T}} + \Theta_a$$

Dove indico con:
Θ_t = temperatura della macchina al tempo t
Θ_a = temperatura ambiente
Θ_s = sovratemperatura della macchina
t = tempo trascorso dalla cessazione del funzionamento della macchina
T = costante di tempo termica della macchina

Osservazione
La *costante di tempo termica* della macchina è il rapporto tra la *capacità termica* (*calore specifico* moltiplicato la *massa*) della macchina e il *coefficiente globale di trasmissione del calore*.

4) *Carica e scarica di un condensatore elettrico*
4a) *Carica*
In modo analogo alla formula per il riscaldamento di una macchina abbiamo la formula di carica di un condensatore elettrico, inizialmente scarico, attraverso un circuito avente una resistenza elettrica.

$$V_t = V \cdot (1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

Dove indico con:
V_t = tensione al tempo t
V = tensione di alimentazione
t = durata della carica
R = resistenza complessiva del circuito elettrico
C = capacità complessiva del circuito elettrico

4b) *Scarica*
In modo analogo alla formula per il raffreddamento di una macchina abbiamo la formula di scarica di un condensatore, inizialmente carico, attraverso un circuito avente una resistenza elettrica.

$$V_t = V \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Dove indico con:
V_t = tensione al tempo t
V = tensione iniziale del condensatore

t = durata della scarica
R = resistenza complessiva del circuito elettrico
C = capacità complessiva del circuito elettrico

5) *Catenaria*
La catenaria ordinaria (o *catenaria omogenea*) è una particolare curva descritta da un filo omogeneo flessibile e inestensibile sospeso ai due estremi e soggetto soltanto al proprio peso che lo fa flettere. Tale curva è molto simile a una parabola di secondo grado ma, come dimostrò Huygens che ne stabilì anche la relativa equazione in coordinate cartesiane ortogonali, la catenaria ha un'equazione diversa.
Un esempio concreto di una catenaria la possiamo vedere nei conduttori di tutte le linee elettriche aeree, poiché possiamo considerare il conduttore sufficientemente omogeneo, flessibile e inestendibile. Nonostante quello che ho appena detto, nella maggior parte dei casi si eseguono i calcoli ipotizzando che la curva descritta sia una parabola. Viene effettuata tale ipotesi per motivi di semplicità visto che la differenza è, usualmente, veramente trascurabile.
Nel caso delle funi di un ponte sospeso, dove il peso della fune è trascurabile rispetto al peso della pavimentazione da esse sorrette, si può dimostrare che la curva che si viene a creare è una parabola.
Vediamo ora l'equazione della catenaria.

$$y = \frac{k}{2}(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}})$$

In alcuni testi si trova quest'altra formula equivalente:

$$y = k \cosh \frac{x}{k}$$

Dove indico con:
k = costante appropriata.
$\cosh$ = coseno iperbolico
La costante k è direttamente proporzionale alla componente orizzontale della tensione del filo ed è inversamente proporzionale alla densità lineare del filo (cioè il peso del filo riferito all'unità di lunghezza).

C) Economia
Possiamo rintracciare il numero trascendente "e" anche in economia e più precisamente nel calcolo degli interessi composti. L'interesse composto è quell'interesse calcolato oltre che sul capitale, anche sugli interessi già maturati e che perciò sono diventati, a tutti gli effetti, parte integrale del capitale.

$$M = C \cdot (1+p)^n$$

Dove indico con:
M = montante
C = capitale iniziale
p = tasso d'interesse espresso in centesimi
n = tempo espresso in anni

Teorema
Dimostriamo la formula vista in precedenza.

Dimostrazione
Alla fine del primo anno il montante sarà uguale alla somma del capitale iniziale (C) e degli interessi ($C \cdot p$) che, grazie al capitale iniziale, sono maturati. Cioè:

$$M = C + C \cdot p = C \cdot (1+p)$$

Ovviamente il montante del primo anno è anche il capitale iniziale del secondo anno.

Alla fine del secondo anno il montante sarà uguale alla somma del capitale iniziale ($C \cdot (1+p)$) e degli interessi ($C \cdot (1+p) \cdot p$) che, grazie al capitale iniziale, sono maturati. Cioè:

$M = C \cdot (1+p) + C \cdot (1+p) \cdot p = C \cdot (1+p) \cdot (1+p) = C \cdot (1+p)^2$

Ovviamente il montante del secondo anno è anche il capitale iniziale del terzo anno.

Alla fine del terzo anno il montante sarà uguale alla somma del capitale iniziale ($C \cdot (1+p)^2$) e degli interessi ($C \cdot (1+p)^2 \cdot p$) che, grazie al capitale iniziale, sono maturati. Cioè:

$M = C \cdot (1+p)^2 + C \cdot (1+p)^2 \cdot p = C \cdot (1+p)^2 \cdot (1+p) = C \cdot (1+p)^3$

E così di seguito per tutti gli anni futuri.

C.V.D.

Vediamo ora di capire dove il numero "e" si nasconde nella formula appena dimostrata.

Nell'ipotesi che gli interessi siano sommati al capitale una volta l'anno, abbiamo:

$M = C \cdot (1+p)^n$

Nell'ipotesi che gli interessi siano sommati al capitale ogni 6 mesi (2 volte l'anno), abbiamo:

$M = C \cdot (1+\frac{p}{2})^{2n}$

Nell'ipotesi che gli interessi siano sommati al capitale ogni mese (12 volte l'anno), abbiamo:

$M = C \cdot (1+\frac{p}{12})^{12n}$

Nell'ipotesi che gli interessi siano sommati al capitale in modo continuo, abbiamo:

$M = \lim_{x \to \infty} C \cdot (1+\frac{p}{x})^{x \cdot n} = C \cdot \lim_{x \to \infty} (1+\frac{p}{x})^{x \cdot n} = C \cdot e^{p \cdot n}$

Si potrebbe pensare che, con quest'ultima ipotesi, il capitale cresca in modo impressionante rispetto alle altre ipotesi, ma questa è solo un'illusione. Per dimostrarlo facciamo un esempio.

Esempio

In questo esempio calcolerò il montante in alcune situazioni.

Indico con:

C = capitale iniziale di 1.000 euro

p = interesse del 4% annuo o più correttamente 0,04 annuo

n = periodo di 10 anni

M = montante (o capitale finale) dopo 10 anni

Calcolo del montante nell'ipotesi che gli interessi siano attribuiti una volta ogni anno.

$M = C \cdot (1+p)^n = 1.000 \cdot (1+0{,}04)^{10} = 1.480{,}24$ euro.

Calcolo del montante nell'ipotesi che gli interessi siano attribuiti due volte ogni anno.

$M = C \cdot (1+\frac{p}{2})^{2n} = 1.000 \cdot (1+\frac{0{,}04}{2})^{2 \cdot 10} = 1.000 \cdot (1+0{,}02)^{20} = 1485{,}95$ euro.

Calcolo del montante nell'ipotesi che gli interessi siano attribuiti 12 volte ogni anno.

$M = C \cdot (1+\frac{p}{12})^{12n} = 1.000 \cdot (1+\frac{0{,}04}{12})^{12 \cdot 10} = 1.000 \cdot (1+\frac{0{,}04}{12})^{120} = 1490{,}83$ euro.

Calcolo del montante nell'ipotesi che gli interessi siano attribuiti in modo continuo.

$M = C \cdot e^{p \cdot n} = 1.000 \cdot e^{0{,}04 \cdot 10} = 1.000 \cdot e^{0{,}4} = 1.491{,}82$ euro.

Come si può vedere la differenza, tra le due ipotesi estreme, è di solo 11,58 euro.

Metodo delle tangenti - iterazione di Newton

Tralasciando completamente tutta la teoria che c'è dietro, perché esula da questo scritto, diamo direttamente la formula definitiva, dove:

$f(x)$ = funzione da calcolare.

$f^{'}(x)$ = derivata della funzione da calcolare.

$f(x_0)$ = valore della funzione nel punto x_0.

$f'(x_0)$ = valore della derivata, della funzione, nel punto x_0.

x_0 = valore approssimato di partenza della nostra funzione.

x_1 = valore approssimato, un poco migliore rispetto a x_0, della nostra funzione.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Per essere chiari facciamo subito un esempio.

<u>Esempio</u>

$f(x) = x^5 + x - 1 = 0$

Vogliamo trovare il valore di x che soddisfi questa funzione.

La funzione, per $x_0 = 0$ vale $f(x_0) = -1$

La funzione, per $x_0 = 1$ vale $f(x_0) = 1$

Da questi due valori appena calcolati si vede che una delle 5 soluzioni, della nostra equazione, deve essere compresa tra 0 e 1. Utilizziamo la formula appena scritta per calcolare questo valore.

La derivata della funzione è $f'(x) = 5x^4 + 1$

Utilizziamo, in questo esempio, $x_0 = 1$ come primo valore approssimato della nostra funzione.

La funzione è $f(x) = x^5 + x - 1$ e sostituendo a "x" il valore di "x_0" abbiamo $f(x_0) = 1$

La derivata è $f'(x) = 5x^4 + 1$ e sostituendo a "x" il valore di "x_0" abbiamo $f'(x_0) = 6$

Siccome $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ allora $x_1 = 1 - \dfrac{1}{6} = 0{,}8\bar{3}$

Perciò $f(x_1) = 0{,}2352108$

Se reiteriamo questa metodo otteniamo:

$f(x_1) = x^5 + x - 1$ dove $x = 0{,}8\bar{3}$, perciò $f(x_1) = 0{,}2352108$

$f'(x_1) = 5x^4 + 1$ dove $x = 0{,}8\bar{3}$, perciò $f'(x_1) = 3{,}411265$

Siccome $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ allora $x_2 = 0{,}8\bar{3} - \dfrac{0{,}2352108}{3{,}411265}$ = 0,7643821

Perciò il valore di $f(x_2)$ è 0,0253292

Se reiteriamo questa funzione otteniamo:

$f(x_2) = x^5 + x - 1$ dove x = 0,7643821, perciò $f(x_2)$ = 0,0253292

$f'(x_2) = 5x^4 + 1$ dove x = 0,7643821, perciò $f'(x_2)$ = 2,7069156

Siccome $x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}$ allora $x_3 = 0{,}7643821 - \dfrac{0{,}0253292}{2{,}7069156}$ = 0,7550249

Perciò il valore di $f(x_3)$ è 0,0003864.

Com'è possibile vedere con sole 3 iterazioni abbiamo ottenuto una buona approssimazione, visto che la $f(x_3)$, per x_3 = 0,7550249, è molto vicino a 0 (vale 0,0003864).

A questo punto ci sarà sicuramente qualcuno che si domanderà "Bello, interessante, ma che c'entra con il calcolo dei logaritmi?". La risposta è semplice, anche il calcolo dei logaritmi è espressione di una funzione.

Calcolo della funzione logaritmica

La funzione $\log_e y = x$ equivale alla funzione $y = e^x$ e la soluzione di questa seconda funzione è soluzione anche della prima funzione.

Perciò abbiamo che $f(x) = e^x - y$ e la sua derivata è $f'(x) = e^x$.

Poiché $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, sostituendo si ottiene $x_1 = x_0 - \frac{e^{x_0} - y}{e^{x_0}}$.

Alcuni esempi le potrete trovare nel capitolo 3

Calcolo della funzione esponenziale

La funzione $x = e^y$ equivale alla funzione $\log_e x = y$ e la soluzione di questa seconda funzione è soluzione anche della prima funzione.

Perciò abbiamo che $f(x) = \log_e x - y$ e la sua derivata è $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Poiché $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, sostituendo si ottiene $x_1 = x_0 - \frac{\log_e x_0 - y}{\frac{1}{x_0}}$ che semplificando si ottiene:

$x_1 = x_0 - (\log_e x_0 - y) \cdot x_0$ $\qquad$ $x_1 = x_0 - x_0 \cdot \log_e x_0 + x_0 \cdot y$

$x_1 = x_0 \cdot (1 - \log_e x_0 + y)$

Vediamo ora alcuni esempi su come utilizzare questa formula.

Esempio

Calcoliamo la funzione esponenziale in base "e" del numero 3,56 cioè $e^{3,56}$.

Premetto immediatamente che $e^{3,56} = 35,1631971\ldots$

Il valore di $e^{3,56}$ è sicuramente compreso tra 20 ($e^3 \approx 20$) e 54,60 ($e^4 \approx 54,60$) e utilizzeremo, come valore iniziale il valore di 20.

$x_1 = 20 \cdot (1 - \log_e 20 + 3,56) = 20 \cdot (1 - 3 + 3,56) = 31,2$

$x_2 = 31,2 \cdot (1 - \log_e 31,2 + 3,56) \approx 31,2 \cdot (1 - 3,44 + 3,56) = 34,944$

$x_3 = 34,944 \cdot (1 - \log_e 34,944 + 3,56) \approx 34,944 \cdot (1 - 3,55 + 3,56) = 35,29344$

$x_4 = 35,29344 \cdot (1 - \log_e 35,29344 + 3,56) \approx 35,29344 \cdot (1 - 3,5637 + 3,56) \approx 35,162854$

$x_5 = 35,162854 \cdot (1 - \log_e 35,162854 + 3,56) \approx 35,162854 \cdot (1 - 3,55999 + 3,56) \approx 35,163206$

$x_6 = 35,163206 \cdot (1 - \log_e 35,163206 + 3,56) \approx 35,163206 \cdot (1 - 3,5600003 + 3,56) \approx 35,163197$

$x_7 = 35,163197 \cdot (1 - \log_e 35,163197 + 3,56) \approx 35,163197 \cdot (1 - 3,56 + 3,56) \approx 35,163197$

Poiché il valore di x_6 e di x_5 sono uguali, quest'ultimo è il valore cercato. Com'è possibile vedere con sette iterazioni siamo pervenuti a un valore corretto sino al 6° decimale.

Esempio

Calcoliamo la funzione esponenziale in base "e" del numero 2,156 cioè $e^{2,156}$.

Premetto immediatamente che $e^{2,156} = 8,63652238\ldots$

Il valore di $e^{2,156}$ è sicuramente compreso tra 7 ($e^2 \approx 7$) e 20 ($e^3 \approx 20,$) e utilizzeremo, come valore iniziale il valore di 20.

$x_1 = 20 \cdot (1 - \log_e 20 + 2{,}156) = 20 \cdot (1 - 3 + 2{,}156) = 3{,}12$
$x_2 = 3{,}12 \cdot (1 - \log_e 3{,}12 + 2{,}156) \approx 3{,}12 \cdot (1 - 1{,}14 + 2{,}156) \approx 6{,}29$
$x_3 = 6{,}29 \cdot (1 - \log_e 6{,}29 + 2{,}156) \approx 6{,}29 \cdot (1 - 1{,}84 + 2{,}156) \approx 8{,}28$
$x_4 = 8{,}28 \cdot (1 - \log_e 8{,}28 + 2{,}156) \approx 8{,}28 \cdot (1 - 2{,}11 + 2{,}156) \approx 8{,}66088$
$x_5 = 8{,}66088 \cdot (1 - \log_e 8{,}66088 + 2{,}156) \approx 8{,}66088 \cdot (1 - 2{,}1588 + 2{,}156) \approx 8{,}6366295$
$x_6 = 8{,}6366295 \cdot (1 - \log_e 8{,}6366295 + 2{,}156) \approx 8{,}6366295 \cdot (1 - 2{,}1560124 + 2{,}156) \approx 8{,}6365224$
$x_7 = 8{,}6365224 \cdot (1 - \log_e 8{,}6365224 + 2{,}156) \approx 8{,}6365224 \cdot (1 - 2{,}156 + 2{,}156) \approx 8{,}6365224$

Poiché il valore di x_6 e di x_7 sono uguali, questo è il valore cercato. Com'è possibile vedere con sette iterazioni siamo pervenuti a un valore corretto sino al 7° decimale.

Commento sul metodo
Com'è possibile vedere, per utilizzare questo metodo per il calcolo esponenziale, è necessario poter eseguire il calcolo logaritmico con molta precisione e, come abbiamo visto nel capitolo 3, il calcolo logaritmico è piuttosto complesso. Per questo motivo il "*Metodo delle tangenti - iterazione di Newton*" si utilizza solamente per calcolare i logaritmi poiché il calcolo esponenziale è relativamente molto più semplice.

Alcuni sviluppi in serie di Taylor

Lo sviluppo in serie di Taylor è d'importanza fondamentale perché sostituisce, a una funzione maneggiabile con difficoltà, con un polinomio che è sicuramente più facile da utilizzare. Voglio sottolineare, senza dimostrarlo, che non tutte le funzioni sono sviluppabili in serie di Taylor. Tralasciando la dimostrazione di questo importante teorema, perché esula da questo scritto, vediamo immediatamente il risultato finale e il suo utilizzo pratico.

$$f(x) = f(x_0) + f^{I}(x_0)\frac{(x-x_0)}{1!} + f^{II}(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + f^{III}(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3!} + f^{IV}(x_0)\frac{(x-x_0)^4}{4!} + \ldots$$

Diamo ora alcuni esempi su come utilizzare questo teorema.

<u>Esempio</u>
Sviluppiamo in serie di Taylor la funzione e^x cioè $f(x) = e^x$.
Calcoliamo le derivate della $f(x) = e^x$.

$f(x) = e^x$	$f^{I}(x) = e^x$	$f^{II}(x) = e^x$
$f^{III}(x) = e^x$	$f^{IV}(x) = e^x$	ecc.

Eseguendo le dovute sostituzioni abbiamo che:

$$e^x = e^{x_0} + e^{x_0}\frac{(x-x_0)}{1!} + e^{x_0}\frac{(x-x_0)^2}{2!} + e^{x_0}\frac{(x-x_0)^3}{3!} + e^{x_0}\frac{(x-x_0)^4}{4!} + e^{x_0}\frac{(x-x_0)^5}{5!} + \ldots$$

Ponendo $x_0 = 0$ abbiamo:

$$e^x = e^0 + e^0\frac{(x-0)}{1!} + e^0\frac{(x-0)^2}{2!} + e^0\frac{(x-0)^3}{3!} + e^0\frac{(x-0)^4}{4!} + e^0\frac{(x-0)^5}{5!} + \ldots$$

Eseguendo tutte le semplificazioni tenendo conto che $e^0 = 1$ otteniamo:

$$e^x = 1 + 1\frac{x}{1!} + 1\frac{x^2}{2!} + 1\frac{x^3}{3!} + 1\frac{x^4}{4!} + 1\frac{x^5}{5!} + \ldots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

Che per $x = 1$ si trasforma nella famosa formula:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + ...$$

Esempio

Sviluppiamo in serie di Taylor la funzione $(1+x)^n$ cioè $f(x) = (1+x)^n$.

Calcoliamo le derivate della $f(x) = (1+x)^n$.

$f(x) = (1+x)^n$ $\quad f^{I}(x) = n \cdot (1+x)^{n-1}$ $\quad f^{II}(x) = n \cdot (n-1) \cdot (1+x)^{n-2}$

$f^{III}(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (1+x)^{n-3}$ $\quad$ ecc.

Eseguendo le dovute sostituzioni abbiamo che:

$$(1+x)^n = (1+x_0)^n + n \cdot (1+x_0)^{n-1} \cdot \frac{(x-x_0)}{1!} + n \cdot (n-1) \cdot (1+x_0)^{n-2} \cdot \frac{(x-x_0)^2}{2!} + n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (1+x_0)^{n-3} \cdot \frac{(x-x_0)^3}{3!} + ...$$

Ponendo $x_0 = 0$ abbiamo:

$$(1+x)^n = (1+0)^n + n \cdot (1+0)^{n-1} \cdot \frac{(x-0)}{1!} + n \cdot (n-1) \cdot (1+0)^{n-2} \cdot \frac{(x-0)^2}{2!} + n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (1+0)^{n-3} \cdot \frac{(x-0)^3}{3!} + ...$$

Eseguendo tutte le semplificazioni otteniamo:

$$(1+x)^n = 1 + n \cdot \frac{x}{1!} + n \cdot (n-1) \cdot \frac{x^2}{2!} + n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \frac{x^3}{3!} + ...$$

Esempio

Sviluppiamo in serie di Taylor la funzione $\log_e(1+x)$ cioè $f(x) = \log_e(1+x)$.

Calcoliamo le derivate della $f(x) = \log_e(1+x)$.

$f(x) = \log_e(1+x)$ $\quad f^{I}(x) = \frac{1}{1+x}$ $\quad f^{II}(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$

$f^{III}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ $\quad f^{IV}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{(1+x)^4}$ $\quad f^{V}(x) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(1+x)^5}$

$f^{VI}(x) = -\frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{(1+x)^6}$ $\quad$ ecc.

Eseguendo le dovute sostituzioni abbiamo che:

$$\log_e(1+x) = \log_e(1+x_0) + \frac{1}{1+x_0} \cdot \frac{(x-x_0)}{1!} - \frac{1}{(1+x_0)^2} \cdot \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \frac{2}{(1+x_0)^3} \cdot \frac{(x-x_0)^3}{3!} -$$

$$- \frac{2 \cdot 3}{(1+x_0)^4} \cdot \frac{(x-x_0)^4}{4!} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(1+x_0)^5} \cdot \frac{(x-x_0)^5}{5!} - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{(1+x_0)^6} \cdot \frac{(x-x_0)^6}{6!} + ...$$

Ponendo $x_0 = 0$ abbiamo:

$$\log_e(1+x) = \log_e(1+0) + \frac{1}{1+0} \cdot \frac{(x-0)}{1!} - \frac{1}{(1+0)^2} \cdot \frac{(x-0)^2}{2!} + \frac{2}{(1+0)^3} \cdot \frac{(x-0)^3}{3!} -$$

$$- \frac{2 \cdot 3}{(1+0)^4} \cdot \frac{(x-0)^4}{4!} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(1+0)^5} \cdot \frac{(x-0)^5}{5!} - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{(1+0)^6} \cdot \frac{(x-0)^6}{6!} + ...$$

Eseguendo tutte le semplificazioni tenendo conto che $\log_e 1 = 0$ otteniamo:

$$\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + ...$$

Esempio

Sviluppiamo in serie di Taylor la funzione $\mathrm{sen}x$ cioè $f(x) = \mathrm{sen}x$.

Calcoliamo le derivate della $f(x)=\text{sen}x$.

$f(x)=\text{sen}x$ $\quad$ $f^{I}(x)=\cos x$ $\quad$ $f^{II}(x)=-\text{sen}x$

$f^{III}(x)=-\cos x$ $\quad$ $f^{IV}(x)=\text{sen}x$ $\quad$ ecc.

Eseguendo le dovute sostituzioni abbiamo che:

$$\text{sen}x=\text{sen}x_0+\cos x_0\frac{(x-x_0)}{1!}-\text{sen}x_0\frac{(x-x_0)^2}{2!}-\cos x_0\frac{(x-x_0)^3}{3!}+\text{sen}x_0\frac{(x-x_0)^4}{4!}+\ldots$$

Ponendo $x_0=0$ abbiamo:

$$\text{sen}x=\text{sen}0+\cos 0\frac{(x-0)}{1!}-\text{sen}0\frac{(x-0)^2}{2!}-\cos 0\frac{(x-0)^3}{3!}+\text{sen}0\frac{(x-0)^4}{4!}+\ldots$$

Eseguendo tutte le semplificazioni tenendo conto che $\text{sen}0=0$ e $\cos 0=1$ otteniamo:

$$\text{sen}x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$$

<u>Osservazione</u>

Le derivate delle funzioni goniometriche sopra riportate sono valide solo nel caso che l'angolo "x" sia misurato in radianti. Nell'ipotesi che l'angolo "x" sia misurato in gradi sessagesimali vanno moltiplicate per la costante $\frac{\pi}{180}$. Questo è il motivo per cui è opportuno, per avere la massima semplicità nei calcoli, misurare gli angoli in radianti e non in gradi sessagesimali.

<u>Esempio</u>

Sviluppiamo in serie di Taylor la funzione $\cos x$ cioè $f(x)=\cos x$.

Calcoliamo le derivate della $f(x)=\cos x$.

$f(x)=\cos x$ $\quad$ $f^{I}(x)=-\text{sen}x$ $\quad$ $f^{II}(x)=-\cos x$

$f^{III}(x)=\text{sen}x$ $\quad$ $f^{IV}(x)=\cos x$ $\quad$ ecc.

Eseguendo le dovute sostituzioni abbiamo che:

$$\cos x=\cos x_0-\text{sen}x_0\frac{(x-x_0)}{1!}-\cos x_0\frac{(x-x_0)^2}{2!}+\text{sen}x_0\frac{(x-x_0)^3}{3!}+\cos x_0\frac{(x-x_0)^4}{4!}-\ldots$$

Ponendo $x_0=0$ abbiamo:

$$\cos x=\cos 0-\text{sen}0\frac{(x-0)}{1!}-\cos 0\frac{(x-0)^2}{2!}+\text{sen}0\frac{(x-0)^3}{3!}+\cos 0\frac{(x-0)^4}{4!}-\ldots$$

Eseguendo tutte le semplificazioni tenendo conto che $\text{sen}0=0$ e $\cos 0=1$ otteniamo:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$$

<u>Osservazione</u>

Le derivate delle funzioni goniometriche sopra riportate sono valide solo nel caso che l'angolo "x" sia misurato in radianti. Nell'ipotesi che l'angolo "x" sia misurato in gradi sessagesimali vanno moltiplicate per la costante $\frac{\pi}{180}$. Questo è il motivo per cui è opportuno, per avere la massima semplicità nei calcoli, misurare gli angoli in radianti e non in gradi sessagesimali.

<u>Esempio</u>

Abbiamo appena visto lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $f(x)=\cos x$. Ora vedremo lo sviluppo della medesima funzione considerando di misurare l'angolo "x" in gradi sessagesimali e non in radianti.

Calcoliamo le derivate della $f(x) = \cos x$.

$f(x) = \cos x$ $\quad f^{I}(x) = -\frac{\pi}{180}\text{sen}x$ $\quad f^{II}(x) = -(\frac{\pi}{180})^2 \cos x$

$f^{III}(x) = (\frac{\pi}{180})^3 \text{sen}x$ $\quad f^{IV}(x) = (\frac{\pi}{180})^4 \cos x$ $\quad$ ecc.

Perciò eseguendo le dovute sostituzioni, abbiamo che:

$$\cos x = \cos x_0 - \frac{\pi}{180}\text{sen}x_0 \frac{(x-x_0)}{1!} - (\frac{\pi}{180})^2 \cos x_0 \frac{(x-x_0)^2}{2!} + (\frac{\pi}{180})^3 \text{sen}x_0 \frac{(x-x_0)^3}{3!} +$$
$$+ (\frac{\pi}{180})^4 \cos x_0 \frac{(x-x_0)^4}{4!} - ...$$

Ponendo $x_0 = 0$ abbiamo:

$$\cos x = \cos 0 - \frac{\pi}{180}\text{sen}0 \frac{(x-0)}{1!} - (\frac{\pi}{180})^2 \cos 0 \frac{(x-0)^2}{2!} + (\frac{\pi}{180})^3 \text{sen}0 \frac{(x-0)^3}{3!} + ...$$

Eseguendo tutte le semplificazioni tenendo conto che $\text{sen}0 = 0$ e $\cos 0 = 1$ otteniamo:

$$\cos x = 1 - (\frac{\pi}{180})^2 \cdot \frac{x^2}{2!} + (\frac{\pi}{180})^4 \cdot \frac{x^4}{4!} - (\frac{\pi}{180})^6 \cdot \frac{x^6}{6!} + ...$$

Ovvero:

$$\cos x = 1 - (\frac{\pi \cdot x}{180})^2 \cdot \frac{1}{2!} + (\frac{\pi \cdot x}{180})^4 \cdot \frac{1}{4!} - (\frac{\pi \cdot x}{180})^6 \cdot \frac{1}{6!} + ...$$

Precisiamo subito che $\frac{\pi}{180}$ è la costante che trasforma un angolo misurato in gradi sessagesimali nel medesimo angolo misurato in radianti. Dal raffronto tra questo sviluppo e quello dell'esempio precedente è facile capire perché si utilizzi misurare gli angoli in radianti invece che in gradi sessagesimali.

<u>Esempio</u>

Qualcuno si sarà domandato del motivo per cui si esegue lo sviluppo in serie della funzione $\log_e(1+x)$ invece del più ovvio sviluppo in serie della funzione $\log_e x$. Proviamo a eseguire questo sviluppo e vediamo cosa succede.

Calcoliamo le derivate della $f(x) = \log_e x$.

$f(x) = \log_e x$ $\quad f^{I}(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f^{II}(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f^{III}(x) = \frac{2}{x^3}$ $\quad f^{IV}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}$ $\quad f^{V}(x) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5}$

$f^{VI}(x) = -\frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{x^6}$ $\quad$ ecc.

Come possiamo vedere le derivate sono più semplici rispetto a quello della $f(x) = \log_e(1+x)$.

Ora eseguendo le dovute sostituzioni abbiamo:

$$\log_e x = \log_e x_0 + \frac{1}{x_0} \cdot \frac{(x-x_0)}{1!} - \frac{1}{x_0^{\ 2}} \cdot \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \frac{2}{x_0^{\ 3}} \cdot \frac{(x-x_0)^3}{3!} - \frac{2 \cdot 3}{x_0^{\ 4}} \cdot \frac{(x-x_0)^4}{4!} + ...$$

Guardando la formula appena scritta si capisce facilmente perché non possiamo porre $x_0 = 0$.

Proviamo a porre $x_0 = 1$ e vediamo cosa succede.

$$\log_e x = 0 + \frac{1}{1} \cdot \frac{(x-1)}{1!} - \frac{1}{1^2} \cdot \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{2}{1^3} \cdot \frac{(x-1)^3}{3!} - \frac{2 \cdot 3}{1^4} \cdot \frac{(x-1)^4}{4!} + ...$$

Semplificando otteniamo:
$$\log_e x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + ...$$
Se eseguiamo la sostituzione $x = 1 + y$ otteniamo:
$$\log_e (1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + ..$$
Questa espressione è identica, considerando il cambio di variabile, allo sviluppo in serie visto precedentemente e, ovviamente, non poteva essere diversamente.

Altri utilizzi degli sviluppi in serie

Vediamo ora un particolare utilizzo dello sviluppo in serie. Ovviamente lo sviluppo in serie di una certa funzione è equivalente alla funzione medesima, per cui eseguendo delle operazioni (operazioni aritmetiche, integrazioni, derivazioni, ecc.) sui termini dello sviluppo è come se si eseguissero, le identiche operazioni, sulle funzioni di partenza.
Vediamo ora due semplici esempi pratici.

<u>Esempio</u>
Sappiamo che la derivata della funzione e^x è la funzione medesima cioè la $De^x = e^x$. Proviamo a trovare questo risultato attraverso lo sviluppo in serie.
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + ...$$
Perciò:
$$De^x = D(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + ...) = D1 + Dx + D\frac{x^2}{2!} + D\frac{x^3}{3!} + D\frac{x^4}{4!} + D\frac{x^5}{5!} + ... =$$
$$= 0 + 1 + 2\frac{x}{2!} + 3\frac{x^2}{3!} + 4\frac{x^3}{4!} + 5\frac{x^4}{5!} + ... = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$$
Da cui:
$$De^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... = e^x$$

Esempio
Sappiamo che la derivata della funzione $\text{sen}x$ è la funzione $\cos x$ cioè la $D\text{sen}x = \cos x$. Proviamo a trovare questo risultato attraverso lo sviluppo in serie.
$$\text{sen}x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$
Perciò:
$$\text{Dsen}x = D(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...) = Dx - D\frac{x^3}{3!} + D\frac{x^5}{5!} - D\frac{x^7}{7!} + ... = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$$
Perciò:
$$\text{Dsen}x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$$
Sapendo che:
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$$
Risulta che:
$$D\text{sen}x = \cos x$$

Osservazione
Ovviamente queste non sono delle dimostrazioni valide visto che, per eseguire gli sviluppi in serie, abbiamo utilizzato i risultati che qui abbiamo riottenuto.

Alcuni commenti sullo sviluppo in serie della funzione logaritmica

Lo sviluppo in serie della funzione $f(x) = \log_e(1+x)$ è, come abbiamo visto:

$$\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + ...$$

Analiziamo il comportamento di questo sviluppo in serie al variare di “x”.

1) Per $x < -1$ l’ennesimo termine ($\frac{x^n}{n}$) non è un infinitesimo (cioè il $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n} \neq 0$) per cui lo sviluppo in serie non è utilizzabile e inoltre non esistono i logaritmi dei numeri negativi.

2) Per $x = -1$ l’ennesimo termine è un infinitesimo (cioè il $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n} = 0$) ma la somma di tutti i termini (che sono tutti negativi) è uguale a $-\infty$ (come dimostrerò tra poco).

3) Per $-1 < x < 1$ l’ennesimo termine è un infinitesimo e la somma di tutti i termini converge al valore della funzione $\log_e(1+x)$.

4) Per $x = 1$ l’ennesimo termine è un infinitesimo e la somma di tutti i termini (che sono per metà positivi e, per l’altra metà, negativi) converge al valore della funzione $\log_e(1+x)$ ovvero al valore del $\log_e(2)$.

5) Per $x > 1$ l’ennesimo termine non è un infinitesimo perciò lo sviluppo in serie non è utilizzabile.

Dopo aver analizzato tutti e cinque i casi si deduce che, per poter utilizzare lo sviluppo in serie, il valore di x deve verificare la seguente disuguaglianza $-1 < x \leq +1$.
Vedremo tra poco, con un esempio pratico, una cosa interessante. *L’ipotesi che l’ennesimo termine sia un infinitesimo è una condizione necessaria, ma non sufficiente, a garantire la convergenza di una qualunque serie.*

Alcuni commenti sullo sviluppo in serie della funzione esponenziale

Lo sviluppo in serie della funzione $f(x) = e^x$ è, come abbiamo visto:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + ...$$

Analiziamo il comportamento di questo sviluppo in serie al variare di “x”.

Indipendentemente dal valore di “x” l’ennesimo termine ($\frac{x^n}{n!}$) è un infinitesimo (cioè il $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$), lo sviluppo in serie è sempre utilizzabile e la somma converge sempre per qualunque valore finito di x.

Serie

Qui non tratterò questo interessante e vasto argomento perché esula da questo scritto, qui farò vedere solamente alcune cose che ritengo interessanti e attinenti.
La prima cosa da dire è che c’è completa equivalenza tra la nozione di *serie* e quella di *successione*.

Definizione
Si dice *successione di numeri* (o semplicemente *successione*), un insieme di infiniti numeri, che si dicono *termini* (o *elementi*) della succesione, disposti in un ordine determinato da una legge la quale

permette, a partire da uno di essi, che è il primo elemento, di determinare gli elementi successivi. Gli elementi di una successione si possono mettere in corrispondenza biunivoca con l'insieme ***N*** dei numeri naturali, cioè costituiscono un insieme numerabile.

Esempi di successione

$a_1, a_2, a_3, a_4, ... a_n, ...$ $\qquad$ $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ..., \frac{n}{n+1}$

Definizione
Si dice *serie associata alla successione* (o semplicemente *serie*), la successione delle *somme parziali*, (o semplicemente *ridotte*), di una successione. Se questa successione ammette limite finito, si dice che la serie *converge*, se questa successione ammette limite $+\infty$ o $-\infty$ si dice che la serie *diverge* a $+\infty$ o a $-\infty$ (rispettivamente). Se questa successione non ammette limite si dice che la serie è *indeterminata*.

Esempi di successione

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + ...$ $\qquad$ $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + ... + \frac{n}{n+1}$

Possiamo anche dire che:
A) *se l'ennesimo termine non è un infinitesimo la serie non converge.*
B) *se l'ennesimo termine è un infinitesimo la serie può convergere o divergere ma questa è una condizione necessaria (ma non sufficiente) per la sua convergenza.*

Esempio
In questo esempio abbiamo che l'ennesimo termine non è un infinitesimo e la serie diverge.
$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + ... = +\infty$

Esempio
In questo esempio abbiamo che l'ennesimo termine non è un infinitesimo e la serie è indeterminata.
$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$

Dopo aver visto due esempi dove l'ennesimo termine non è un infinitesimo vediamo, in questo terzo esempio, che l'ennesimo termine è un infinitesimo e la serie diverge.

Esempio
Consideriamo il classico esempio della serie armonica.
$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + ...$$

Dimostriamo che, nonostante l'ennesimo termine sia un infinitesimo, la serie diverge positivamente (cioè tende a $+\infty$).

Dimostrazione
Ora sostituiamo ad alcuni termini dei numeri leggermente inferiori e se riusciremo a dimostrare che questa nuova serie diverge positivamente anche la serie di partenza divergerà positivamente dimostrando l'affermazione di partenza.
Sostituiamo a $\frac{1}{3}$ il valore di $\frac{1}{4}$.

Sostituiamo a $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{7}$ i valori di $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{8}$.
Sostituiamo a $\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}$ i valori di $\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}$.
Ecc.

Eseguendo le sostituzioni otteniamo:

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\ldots$$

Ora raggruppando i termini identici otteniamo:

$$S>1+\frac{1}{2}+2(\frac{1}{4})+4(\frac{1}{8})+8(\frac{1}{16})+16(\frac{1}{32})+\ldots$$

Eseguendo le moltiplicazioni otteniamo:

$$S>1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\frac{8}{16}+\frac{16}{32}+\ldots$$

Ovvero:

$$S>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$$

Poiché questa nuova serie diverge positivamente (cioè tende a $+\infty$) anche la serie armonica $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\ldots$ deve divergere positivamente.
C.V.D.

Esistono alcuni metodi per cercare di stabilire se una serie converge o diverge, ma questo esula da questo scritto.

Valori approssimati della funzione logaritmica e antilogaritmica

Per valori di "x" molto piccoli (rispetto all'unità) si hanno queste equivalenze approssimate:

$$\log_e(1+x)\approx x$$

$$e^x\approx 1+x$$

La giustificazione di queste due formule è molto semplice e le lascio al lettore.

Funzioni iperboliche

Vediamo ora alcune nozioni di base sulle funzioni iperboliche perché tutto il resto esula da questo scritto.
Abbiamo visto che:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^8}{8!}+\frac{x^9}{9!}+\ldots$$

Da cui ricaviamo che:

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^8}{8!}-\frac{x^9}{9!}+\ldots$$

Perciò abbiamo che:

$$e^x+e^{-x}=(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\ldots)+(1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots)$$

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots$$

Questo sviluppo in serie si chiama "coseno iperbolico". Cioè:

$$\mathrm{ch}x = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Il motivo per cui questa funzione prende il nome di "coseno" è per la grande somiglianza tra questo sviluppo in serie e lo sviluppo in serie della funzione trigonometrica "coseno" ($\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$). Vedremo tra poco il motivo per cui si dice "iperbolico".

Utilizzando nuovamente gli sviluppi in serie di e^x e di e^{-x} possiamo calcolare anche:

$$e^x - e^{-x} = (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots) - (1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots)$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Questo sviluppo in serie si chiama "seno iperbolico".

$$\mathrm{sh}x = \mathrm{senh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Il motivo per cui questa funzione prende il nome di "seno" è per la grande somiglianza tra questo sviluppo in serie e lo sviluppo in serie della funzione trigonometrica "seno" ($\mathrm{sen}x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$). Vedremo tra poco il motivo per cui si dice "iperbolico".

Grazie a questi sviluppi possiamo ricavare che:

A) $\cosh x + \mathrm{senh}x = e^x$ $\qquad$ $\mathrm{ch}x + \mathrm{sh}x = e^x$

B) $\cosh x - \mathrm{senh}x = e^{-x}$ $\qquad$ $\mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x = e^{-x}$

C) $\cosh^2 x - \mathrm{senh}^2 x = 1$ $\qquad$ $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$

Da quest'ultima relazione possiamo dedurre che il "coseno iperbolico" ("$\cosh x$" o "$\mathrm{ch}x$") e il "seno iperbolico" ("$\mathrm{senh}x$" o "$\mathrm{sh}x$") si possono assumere come coordinate cartesiane di un punto variabile sull'iperbole equilatera di equazione $x^2 - y^2 = 1$, in modo analogo come il "coseno trigonometrico" ("$\cos x$") e il "seno trigonometrico" ("$\mathrm{sen}x$") si possono assumere come coordinate cartesiane di un punto variabile sulla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$. Questo è il motivo per cui queste funzioni si chiamano "funzioni iperboliche".

Le dimostrazioni delle precedenti tre identità le lascio al lettore volenteroso visto l'estrema semplicità.

Ovviamente anche per le funzioni iperboliche, come per le funzioni circolari, possiamo ricavare delle formule di somma/sottrazione, duplicazione, bisezione, ecc.

<u>Esempio</u>

$$\mathrm{senh}(x+y) = \mathrm{senh}(x) \cdot \cosh(y) + \cosh(x) \cdot \mathrm{senh}(y)$$

$$\cosh(x+y) = \cos\mathrm{h}(x) \cdot \cosh(y) + \mathrm{senh}(x) \cdot \mathrm{senh}(y)$$

Lascio al lettore la semplice verifica di queste formule e la ricerca delle altre formule.

Vediamo ora come poter utilizzare queste nuove funzioni per calcolare la funzione e^x.

Dalle tre identità precedenti possiamo ricavere:

$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$ $\qquad$ $\mathrm{ch}^2 x = 1 + \mathrm{sh}^2 x$ $\qquad$ $\mathrm{ch}x = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2 x}$

Perciò otteniamo:

$\mathrm{sh}x + \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2 x} = e^x$ $\qquad$ e in modo analogo possiamo ricavare $\qquad$ $\mathrm{ch}x + \sqrt{\mathrm{ch}^2 x - 1} = e^x$

Abbiamo visto che per calcolare la funzione e^x bisogna eseguire la somma di alcuni termini.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + \dots$$

Oppure possiamo calcolare il seno (o il coseno) iperbolico, e per eseguire questo calcolo è necessario calcolare metà termini, e poi utilizzare la prima (o la seconda) formula sopra riportata.

Esempio

Calcoliamo la funzione esponenziale in base "e" del numero 0,0397208 cioè $e^{0,0397208}$.

Premetto immediatamente che $e^{0,0397208} = 1{,}0405202$.

Come abbiamo visto nel 2° capitolo abbiamo:

$$e^{0,0397208} = 1 + 0{,}0397208 + \frac{1}{2!} \cdot 0{,}0397208^2 + \frac{1}{3!} \cdot 0{,}0397208^3 + \frac{1}{4!} \cdot 0{,}0397208^4 + \dots$$

$$e^{0,0397208} \approx 1 + 0{,}0397208 + 0{,}0007889 + 0{,}0000104 + 0{,}0000001 = 1{,}0405202$$

Utilizzando la funzione "seno iperbolico" otteniamo:

$$\mathrm{sh}x = 0{,}0397208 + \frac{1}{3!} \cdot 0{,}0397208^3 + \dots$$

$$\mathrm{sh}x \approx 0{,}0397208 + 0{,}0000104 = 0{,}0397312$$

$$e^{0,0397208} \approx \mathrm{sh}x + \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2 x} = 0{,}0397312 + \sqrt{1 + 0{,}0397312^2} = 0{,}0397312 + 1{,}000789 = 1{,}0405202$$

Utilizzando la funzione "coseno iperbolico" otteniamo:

$$\mathrm{ch}x = 1 + \frac{1}{2!} \cdot 0{,}0397208^2 + \frac{1}{4!} \cdot 0{,}0397208^4 + \dots$$

$$\mathrm{ch}x \approx 1 + 0{,}0007889 + 0{,}0000001 = 1{,}0007890$$

$$e^{0,0397208} \approx \mathrm{ch}x + \sqrt{\mathrm{ch}^2 x - 1} = 1{,}0007890 + \sqrt{1{,}000789^2 - 1} = 1{,}0007890 + 0{,}0397319 = 1{,}0405209$$

La lieve differenza è dovuta all'approssimazione dei relativi calcoli.

Calcolo dei logaritmi attraverso un'equazione di grado "N"

Qui vedremo un metodo che, almeno in linea di principio, permette di calcolare il logaritmo naturale di un numero "a" attraverso la risoluzione di un'equazione di grado N. Vediamo immediatamente come eseguire questo calcolo.

Se il $\log_e a = x$ allora, per la definizione di logaritmo, $e^x = a$ e sviluppando in serie l'espressione e^x otteniamo:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + \dots$$

Perciò $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + \dots = a$ e questa è un'equazione di grado N nell'incognita "x" che risolta da il valore del $\log_e a$. Ovviamente se si prendendo in considerazione un numero maggiore di termini, anche la precisione del risultato sarà maggiore, ma altrettanto maggiore sarà anche la sua complessità ed anche conseguentemente crescerà il numero delle soluzioni dell'equazione.

Se eseguiamo il troncamento al quinto termine, otteniamo:

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} = a$$

Svolgendo i calcoli otteniamo:

$24+24x+12x^2+4x^3+x^4=24\cdot a$
Ovvero:
$x^4+4x^3+12x^2+24x-24\cdot(a-1)=0$

<u>Esempio</u>
Calcoliamo il logaritmo naturale del numero 0,5 cioè il $\log_e 0{,}5$.
Premetto immediatamente che il $\log_e 0{,}5=-0{,}69314718...$.
Per quello che abbiamo visto precedentemente abbiamo:
$x^4+4x^3+12x^2+24x-24\cdot(0{,}5-1)=0$
Ovvero:
$x^4+4x^3+12x^2+24x+12=0$
Una volta risolta, nell'incognita x, otteniamo queste quattro soluzioni:
$x_1=-0{,}69557806$
$x_2=-2{,}32407099$
$x_3=-0{,}49017547+j2{,}680081977$
$x_4=-0{,}49017547-j2{,}680081977$

<u>Esempio</u>
Calcoliamo il logaritmo naturale del numero 2 cioè il $\log_e 2$.
Premetto immediatamente che il $\log_e 2=0{,}69314718...$.
Per quello che abbiamo visto precedentemente abbiamo:
$x^4+4x^3+12x^2+24x-24\cdot(2-1)=0$
Ovvero:
$x^4+4x^3+12x^2+24x-24=0$
Una volta risolta, nell'incognita x, otteniamo queste quattro soluzioni:
$x_1=0{,}693903146$
$x_2=-3{,}26529604$
$x_3=-0{,}71430355+j3{,}175225894$
$x_4=-0{,}71430355-j3{,}175225894$

<u>Esempio</u>
Calcoliamo il logaritmo naturale del numero 5 cioè il $\log_e 5$.
Premetto immediatamente che il $\log_e 5=1{,}6094379$.
Per quello che abbiamo visto precedentemente abbiamo:
$x^4+4x^3+12x^2+24x-24\cdot(5-1)=0$
Ovvero:
$x^4+4x^3+12x^2+24x-96=0$
Una volta risolta, nell'incognita x, otteniamo queste quattro soluzioni:
$x_1=1{,}635463348$
$x_2=-4$
$x_3=-0{,}81773167+j3{,}742466469$
$x_4=-0{,}81773167-j3{,}742466469$

<u>Esempio</u>
Calcoliamo il logaritmo naturale del numero 20 cioè $\log_e 20$
Premetto immediatamente che il $\log_e 20 = 2{,}9957323$.
Per quello che abbiamo visto precedentemente abbiamo:
$x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24x - 24 \cdot (20-1) = 0$
Ovvero:
$x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24x - 456 = 0$
Una volta risolta, nell'incognita x, otteniamo queste quattro soluzioni:
$x_1 = 3{,}256464224$
$x_2 = -5{,}43901935$
$x_3 = -0{,}90872244 + j4{,}991945694$
$x_4 = -0{,}90872244 - j4{,}991945694$

Osservazioni
In tutti e quattro gli esempi soltanto la prima soluzione (x_1) è la soluzione alla nostra domanda. Vediamo di giustificare questa affermazione. Ovviamente non possiamo considerare soluzioni accettabili le soluzioni complesse (x_3 e x_4). La soluzione cercata è quella il cui valore assoluto è minore perché minore è il valore del primo termine non considerato ($\frac{x^5}{5!}$), visto che noi, nella nostra semplificazione, lo abbiamo considerato uguale a 0 (zero). All'aumentare del valore del numero "a" l'errore aumenta e questo dipende dai pochi termini presi in considerazione.

Metodo alternativo per eseguire lo sviluppo in serie di alcune funzioni

Vediamo ora un metodo, alternativo al precedente, per eseguire lo sviluppo in serie di alcune funzioni particolari. Nonostante che questo metodo sia applicabile soltanto ad alcune funzioni particolari è, secondo il mio modesto parere, molto importante e interessante.

1) *Sviluppo in serie della funzione logaritmica*
La funzione è $f(x) = \log_e(1+x)$ e la sua derivata è $f^I(x) = \frac{1}{1+x}$.
Cambiando la variabile da "x" a "z" (per evitare fraintendimenti) abbiamo che:

$$\int_0^x \frac{1}{1+z}\,dz = \left[\log_e(1+z)\right]_0^x = \log_e(1+x) - \log_e(1+0) = \log_e(1+x)$$

Cioè: $\log_e(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+z}\,dz$.

Ora eseguiamo la seguente divisione $\frac{1}{1+z}$.

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1+z-z}{1+z} = 1 + \frac{-z}{1+z} = 1 + \frac{-z-z^2+z^2}{1+z} = 1 + \frac{-z(1+z)+z^2}{1+z} = 1 - z + \frac{z^2}{1+z} =$$

$$= 1 - z + \frac{z^2+z^3-z^3}{1+z} = 1 - z + \frac{z^2(1+z)-z^3}{1+z} = 1 - z + z^2 + \frac{-z^3}{1+z} = \text{ ecc.}$$

Perciò, proseguendo nella divisione, otteniamo:

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + z^6 - z^7 + \ldots$$

Da questa eguaglianza ricaviamo che:

$$\log_e(1+x)=\int_0^x \frac{1}{1+z}\,dz=\int_0^x (1-z+z^2-z^3+z^4-z^5+z^6-z^7+...)dz$$

Arrivati a questo punto basta risolvere l'ultimo integrale.

$$\int_0^x 1dz-\int_0^x zdz+\int_0^x z^2dz-\int_0^x z^3dz+\int_0^x z^4dz-\int_0^x z^5dz+...=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+...$$

Perciò lo sviluppo in serie della funzione logaritmo è:

$$\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^8}{8}+...$$

2) *Sviluppo in serie della funzione arcotangente*

Vediamo ora lo sviluppo in serie della funzione $y=\mathrm{arctg}x$. Questa funzione ha questo significato "y è uguale all'angolo la cui tangente è x".

La funzione è $f(x)=\mathrm{arctg}x$ e la sua derivata vale $f^{I}(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

Il valore della derivata appena vista vale nell'ipotesi che l'angolo "x" sia misurato in radianti.
Cambiando la variabile da "x" a "z" (per evitare fraintendimenti) otteniamo che:

$$\int_0^x \frac{1}{1+z^2}\,dz=\left[\mathrm{arctg}z\right]_0^x=\mathrm{arctg}x-\mathrm{arctg}0=\mathrm{arctg}x.$$

Cioè: $\mathrm{arctg}x=\int_0^x \frac{1}{1+z^2}\,dz$

Ora eseguiamo la seguente divisione $\frac{1}{1+z^2}$.

$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1+z^2-z^2}{1+z^2}=1+\frac{-z^2}{1+z^2}=1+\frac{-z^2-z^4+z^4}{1+z^2}=1+\frac{-z^2(1+z^2)+z^4}{1+z^2}=1-z^2+\frac{z^4}{1+z^2}=$$

$$=1-z^2+\frac{z^4+z^6-z^6}{1+z^2}=1-z^2+\frac{z^4(1+z^2)-z^6}{1+z^2}=1-z^2+z^4+\frac{-z^6}{1+z^2}=\text{ ecc.}$$

Perciò, proseguendo nella divisione, otteniamo:

$$\frac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^4-z^6+z^8-z^{10}+z^{12}-z^{14}+...$$

Da questa eguaglianza ricaviamo che:

$$\mathrm{arctg}x=\int_0^x \frac{1}{1+z^2}\,dz=\int_0^x (1-z^2+z^4-z^6+z^8-z^{10}+z^{12}-z^{14}+...)dz$$

Arrivati a questo punto basta risolvere l'ultimo integrale.

$$\int_0^x 1dz-\int_0^x z^2dz+\int_0^x z^4dz-\int_0^x z^6dz+\int_0^x z^8dz-\int_0^x z^{10}dz+...=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{11}}{11}+...$$

Perciò lo sviluppo in serie della funzione arcotangente è:

$$\mathrm{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{11}}{11}+...$$

Calcolo del numero trascendente “π”

Vediamo ora come utilizzare gli sviluppi in serie per calcolare il valore del numero trascendente π.
Poiché:

$$D\text{arcsen}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Utilizzando lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $\frac{1}{\sqrt{1+y}}$ possiamo scrivere che:

$$\frac{1}{\sqrt{1+y}} = (1+y)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}y + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}y^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}y^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4\cdot 4!}y^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2^5\cdot 5!}y^5 + ...$$

Questo sviluppo in serie può essere scritto anche in un altro interessante modo, vediamolo.

$$\frac{1}{\sqrt{1+y}} = 1 - \frac{1}{2}y + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}y^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}y^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}y^4 - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}y^5 + ...$$

Se, nello sviluppo in serie precedente, impostiamo $y = -x^2$ otteniamo:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^8 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}x^{10} + ...$$

Visto anche che:

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = [\text{arcsen}t]_0^x = \text{arcsen}x - \text{arcsen}0 = \text{arcsen}x - 0 = \text{arcsen}x$$

Ovvero:

$$\text{arcsen}x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

Utilizzando lo sviluppo in serie appena visto possiamo scrivere:

$$\text{arcsen}x = \int_0^x (1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}t^6 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}t^8 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}t^{10} + ...)dt$$

$$\text{arcsen}x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{x^9}{9} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\cdot\frac{x^{11}}{11} + ...$$

Dopo tutta questa fatica se impostiamo $x = 1$ ricaviamo:

$$\text{arcsen}1 = \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\cdot\frac{1}{11} + ...$$

Cioè:

$$\pi = 2\cdot(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\cdot\frac{1}{11} + ...)$$

Questa formula non è molto adatta perché converge piuttosto lentamente. Ma la prossima formula è decisamente migliore.

Impostando nella formula precedente $x = \frac{1}{2}$ otteniamo:

$$\text{arcsen}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5\cdot 2^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7\cdot 2^7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{1}{9\cdot 2^9} + ...$$

Cioè:

$$\pi = 6\cdot(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5\cdot 2^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7\cdot 2^7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{1}{9\cdot 2^9} + ...)$$

Eseguiamo il calcolo di π con questa espressione.

$$\frac{1}{2} = 0,5$$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\cdot 2^3}$ = 0,0208333333

$\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5\cdot 2^5}$ = 0,00234375

$\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7\cdot 2^7}$ = 0,0003487723

$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{1}{9\cdot 2^9}$ = 0,0000593397

$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}\cdot\frac{1}{11\cdot 2^{11}}$ = 0,0000109239

$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}\cdot\frac{1}{13\cdot 2^{13}}$ = 0,0000021182

$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\cdot 14}\cdot\frac{1}{15\cdot 2^{15}}$ = 0,0000004261

$\pi = 6\cdot(0{,}5235986635) = 3{,}1415919810$

Come possiamo vedere con soltanto 8 termini abbiamo ottenuto un buon risultato visto che il valore vero è 3,1415926535…

Conosco un'altra espressione, migliore di questa (cioè che converge ancor più velocemente), per calcolare il valore di π, ma questa non è la sede adatta per illustrarla poiché coinvolge alcune nozioni di trigonometria. Ora voglio solo mostrare altre tre serie facili da ricordare ma tutte inadatte al calcolo pratico di π.

Abbiamo visto che:

$$\mathrm{arctg}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \dots$$

Per $x = 1$ abbiamo:

$$\mathrm{arctg}1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1^3}{3} + \frac{1^5}{5} - \frac{1^7}{7} + \frac{1^9}{9} - \frac{1^{11}}{11} + \frac{1^{13}}{13} - \frac{1^{15}}{15} + \dots = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots$$

Da questa famosa formula possiamo ricavare l'altrettanto famosa formula:

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{9\cdot 11} + \frac{1}{13\cdot 15} + \frac{1}{17\cdot 19} + \dots$$

Dalle formule appene viste possiamo ricavare che:

$$\pi = 4\cdot(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots)$$

$$\pi = 8\cdot(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{9\cdot 11} + \frac{1}{13\cdot 15} + \frac{1}{17\cdot 19} + \dots)$$

Un'altra bella formula, è la *Formula di Wallis*.

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{14}{13}\dots$$

Anche questa terza formula, per rappresentare π, è piuttosto facile da ricordare.

Riflessioni e generalizzazioni della funzione esponenziale

A) Sviluppo in serie del numero e^x.
Lo sviluppo in serie del numero e^x, come visto precedentemente, è:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^9}{9!} + ...$$

Commento
La funzione $f(x) = e^x$ al variare di "x" nel campo dei numeri reali da, come risultato, un numero reale e i numeri reali possono essere rappresentati su una retta e, di conseguenza, possono essere ordinati in ordine crescente (o decrescente).
Per "x" che varia nell'intervallo dei numeri reali, e^x varia nell'intervallo dei numeri reali positivi escluso il numero 0 (zero). Riassumendo, per chiarezza, abbiamo:
Per "$-\infty < x < 0$" abbiamo "$0 < e^x < 1$".
Per "$x = 0$" abbiamo "$e^x = 1$".
Per "$0 < x < +\infty$" abbiamo "$1 < e^x < +\infty$".

B) Sviluppo in serie del numero e^{jy}.
Proviamo ora a generalizzare il precedente sviluppo in serie sostituendo a "x" il numero "jy" dove l'esponente è un numero immaginario ("j" è l'unità immaginaria e "y" è un numero reale).

$$e^{jy} = 1 + \frac{jy}{1!} + \frac{(jy)^2}{2!} + \frac{(jy)^3}{3!} + \frac{(jy)^4}{4!} + \frac{(jy)^5}{5!} + \frac{(jy)^6}{6!} + \frac{(jy)^7}{7!} + \frac{(jy)^8}{8!} + \frac{(jy)^9}{9!} + ...$$

Eseguendo i vari calcoli otteniamo:

$$e^{jy} = 1 + \frac{jy}{1!} + \frac{-y^2}{2!} + \frac{-jy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{jy^5}{5!} + \frac{-y^6}{6!} + \frac{-jy^7}{7!} + \frac{y^8}{8!} + \frac{jy^9}{9!} + ...$$

Ovvero:

$$e^{jy} = 1 + \frac{jy}{1!} - \frac{y^2}{2!} - \frac{jy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{jy^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - \frac{jy^7}{7!} + \frac{y^8}{8!} + \frac{jy^9}{9!} - ...$$

Ora, separando i termini reali dai termini immaginari, otteniamo:

$$e^{jy} = (1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \frac{y^8}{8!} - ...) + j(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \frac{y^9}{9!} - ...)$$

Abbiamo visto precedentemente (considerando il cambio di variabile da "x" a "y") che:

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \frac{y^8}{8!} - ... \qquad \text{seny} = \frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \frac{y^9}{9!} - ...$$

Perciò, incredibilmente e del tutto inaspettatamente, quasi magicamente, gli sviluppi in serie sono identici e questo significa che possiamo eseguire una fondamentale sostituzione e cioè:

$$e^{jy} = \cos y + j\text{sen}y$$

Commento
La funzione $f(y) = e^{jy}$, al variare di "y" nel campo dei numeri reali, produce, come risultato, un numero complesso che è rappresentabile sul piano Argand-Gauss. Su una coordinata (l'ascissa – asse orizzontale) viene riportata la parte reale del numero complesso e su l'altra coordinata, ortogonale alla precedente, (l'ordinata – asse verticale) viene riportata la parte immaginaria del numero complesso.
Al variare della variabile "y" i punti descrivono una circonferenza di raggio unitario e centro nel centro delle coordinate per cui l'operatore immaginario "j" trasforma il numero reale "y" in un

angolo misurato in radianti. Ovviamente la funzione $f(y) = \cos y + j\text{sen}y$ è una funzione circolare di periodo 2π per cui anche la funzione $f(y) = e^{jy}$ sarà periodica di periodo 2π .
Ovvero:
$e^{jy} = e^{j(y+2\pi)} = e^{j(y+4\pi)} = e^{j(y+2k\pi)}$ con " y " espresso in radianti.
Bisogna tener presente che l'uguaglianza $e^{jy} = \cos y + j\text{sen}y$ è soltanto un'uguaglianza formale e per questo motivo posso scrivere anche:
$e^{jy} = e^{j(y+360°)} = e^{j(y+720°)} = e^{j(y+k360°)}$ con " y " espresso in gradi sessagesimali.
In entrambe le eguaglianze " k " è uguale a un numero intero.

C) Sviluppo in serie del numero e^{x+jy} .
Ora vediamo cosa succede allo sviluppo in serie della funzione e^{x+jy} dove l'esponente è un numero complesso (dove " j " è l'operatore immaginario e i numeri, " x " e " y " sono numeri reali).
$e^{x+jy} = e^x \cdot e^{jy} = e^x \cdot (\cos y + j\text{sen}y)$

Commento
La funzione $f(z) = e^{x+jy}$ (dove $z = x + jy$) al variare di " x " e " y " nel campo dei numeri reali da, come risultato, un numero complesso rappresentabile sul piano Argand-Gauss.
Rispetto al caso precedente qui abbiamo due variabili da tener presente. Al variare della variabile " x " varia il modulo del vettore complesso e al variare della variabile " y " varia l'anomalia del vettore complesso. Anche in questo caso l'operatore immaginario " j " trasforma il numero reale " y " in un angolo e anche in questo caso l'uguaglianza è soltanto un'eguaglianza formale. Anche in questo caso abbiamo che la funzione $f(z) = e^x \cdot (\cos y + j\text{sen}y)$ (dove $z = x + jy$) è periodica di periodo 2π o 360° per cui anche la $f(z) = e^{x+jy}$ deve essere periodica di periodo 2π o 360°.
Anche in questo caso abbiamo che:
$e^{x+jy} = e^{x+j(y+2\pi)} = e^{x+j(y+4\pi)} = e^{x+j(y+2k\pi)}$ con " y " espresso in radianti.
Oppure anche a:
$e^{x+jy} = e^{x+j(y+360°)} = e^{x+j(y+720°)} = e^{x+j(y+k360°)}$ con " y " espresso in gradi sessagesimali.
In entrambe le eguaglianze " k " è uguale a un numero intero.

Facciamo ora alcuni esempi per mostrare le enormi potenzialità di questa rappresentazione.
<u>Esempio</u>
Calcoliamo la potenza n-esima del vettore unitario ($\cos x + j\text{sen}x$).
Sappiamo che $\cos x + j\text{sen}x = e^{jx}$
Perciò:
$(\cos x + j\text{sen}x)^n = (e^{jx})^n$
$(\cos x + j\text{sen}x)^n = e^{jnx}$
$(\cos x + j\text{sen}x)^n = (\cos nx + j\text{sen}nx)$

<u>Esempio</u>
Calcoliamo la radice n-esima del vettore unitario ($\cos x + j\text{sen}x$).
Grazie all'identità precedente possiamo scrivere che:

$$\sqrt[n]{(\cos nx + j\text{sen}nx)} = (\cos nx + j\text{sen}nx)^{\frac{1}{n}} = (\cos\frac{nx}{n} + j\text{sen}\frac{nx}{n}) = (\cos x + j\text{sen}x)$$

Tenendo presente che le funzioni trigonometriche sono periodiche di periodo 2π (o 360°) possiamo scrivere che:

$\sqrt[n]{(\cos(nx+2k\pi)+j\text{sen}(nx+2k\pi))}=(\cos\dfrac{nx+2k\pi}{n}+j\text{sen}\dfrac{nx+2k\pi}{n})$ con $k=0,1,2,...,(n-1)$.

Per $k \geq n$ otteniamo delle soluzioni che sono identiche a una delle soluzioni già ottenute.
Possiamo anche scrivere:

$\sqrt[n]{(\cos nx+j\text{sen}nx)}=(\cos\dfrac{nx+2k\pi}{n}+j\text{sen}\dfrac{nx+2k\pi}{n})$ con $k=0,1,2,...,(n-1)$.

Se poniamo $nx=\varphi$ otteniamo:

$\sqrt[n]{(\cos\varphi+j\text{sen}\varphi)}=(\cos\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}+j\text{sen}\dfrac{\varphi+2k\pi}{n})$ con $k=0,1,2,...,(n-1)$.

Quest'ultima formula è la famosa "Formula di Moivrè".

Esempio

Calcoliamo le derivate prime delle funzioni trigonometriche $f_x=\cos x$ e $f_x=\text{sen}x$.

Usiamo l'equaglianza $e^{jx}=\cos x+j\text{sen}x$ che lega la funzione esponenziale a quelle circolari.

$De^{jx}=D(\cos x+j\text{sen}x)$

Ovvero:

$De^{jx}=je^{jx}=j(\cos x+j\text{sen}x)=j\cos x+j^2\text{sen}x=-\text{sen}x+j\cos x$

$D(\cos x+j\text{sen}x)=D\cos x+D(j\text{sen}x)=D\cos x+jD\text{sen}x$

Confrontando le parti reali e le parti immaginarie delle due uguaglianze otteniamo:

$D\cos x=-\text{sen}x$

$D\text{sen}x=\cos x$

Esempio

Calcoliamo le derivate seconde delle funzioni trigonometriche $f_x=\cos x$ e $f_x=\text{sen}x$.

Anche in questo esempio usiamo l'uguaglianza $e^{jx}=\cos x+j\text{sen}x$.

$D''e^{jx}=D''(\cos x+j\text{sen}x)$

Ovvero:

$D''e^{jx}=D(De^{jx})=D(je^{jx})=j(De^{jx})=j(je^{jx})=j^2\cdot e^{jx}=-1\cdot e^{jx}=-1\cdot(\cos x+j\text{sen}x)=$

$=-\cos x-j\text{sen}x=-\cos x+j(-\text{sen}x)$

$D''(\cos x+j\text{sen}x)=D''\cos x+D''(j\text{sen}x)=D''\cos x+jD''\text{sen}x$

Confrontando le parti reali e le parti immaginarie delle due uguaglianze otteniamo:

$D''\cos x=-\cos x$

$D''\text{sen}x=-\text{sen}x$

Esempio

Calcoliamo le equivalenze delle funzioni trigonometriche $f_x=\cos(2x)$ e $f_x=\text{sen}(2x)$.

Anche in questo esempio usiamo l'uguaglianza $e^{jx}=\cos x+j\text{sen}x$.

$(e^{jx})^2=(\cos x+j\text{sen}x)^2$

Ovvero:

$(e^{jx})^2=e^{j2x}=\cos 2x+j\text{sen}2x$

$(\cos x+j\text{sen}x)^2=\cos^2 x-\text{sen}^2 x+j2\cdot\cos x\cdot\text{sen}x$

Confrontando le parti reali e le parti immaginarie delle due uguaglianze otteniamo:
$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$
$\text{sen}2x = 2 \cdot \cos x \cdot \text{sen}x$

<u>Esempio</u>
Calcoliamo le equivalenze delle funzioni trigonometriche $f_x = \cos(3x)$ e $f_x = \text{sen}(3x)$.
Anche in questo esempio usiamo l'uguaglianza $e^{jx} = \cos x + j\text{sen}x$.
$(e^{jx})^3 = (\cos x + j\text{sen}x)^3$

Ovvero:
$(e^{jx})^3 = e^{j3x} = \cos 3x + j\text{sen}3x$
$(\cos x + j\text{sen}x)^3 = \cos^3 x + j3 \cdot \cos^2 x \cdot \text{sen}x + j^2 3 \cdot \cos x \cdot \text{sen}^2 x + j^3 \text{sen}^3 x =$
$= \cos^3 x + j3 \cdot \cos^2 x \cdot \text{sen}x - 3 \cdot \cos x \cdot \text{sen}^2 x - j\text{sen}^3 x$

Confrontando le parti reali e le parti immaginarie delle due uguaglianze otteniamo:
$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cdot \cos x \cdot \text{sen}^2 x$
$\text{sen}3x = 3 \cdot \cos^2 x \cdot \text{sen}x - \text{sen}^3 x$

<u>Esempio</u>
Calcoliamo le equivalenze delle funzioni trigonometriche $f_x = \cos(4x)$ e $f_x = \text{sen}(4x)$.
Anche in questo esempio usiamo l'uguaglianza $e^{jx} = \cos x + j\text{sen}x$.
$(e^{jx})^4 = (\cos x + j\text{sen}x)^4$

Ovvero:
$(e^{jx})^4 = e^{j4x} = \cos 4x + j\text{sen}4x$
$(\cos x + j\text{sen}x)^4 = \cos^4 x + j4 \cdot \cos^3 x \cdot \text{sen}x + j^2 6 \cdot \cos^2 x \cdot \text{sen}^2 x + j^3 4 \cdot \cos x \cdot \text{sen}^3 x + j^4 \text{sen}^4 x =$
$= \cos^4 x + j4 \cdot \cos^3 x \cdot \text{sen}x - 6 \cdot \cos^2 x \cdot \text{sen}^2 x - j4 \cdot \cos x \cdot \text{sen}^3 x + \text{sen}^4 x$

Confrontando le parti reali e le parti immaginarie delle due uguaglianze otteniamo:
$\cos 4x = \cos^4 x - 6 \cdot \text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x + \text{sen}^4 x$
$\text{sen}4x = 4 \cdot \cos x \cdot \text{sen}x \cdot (\cos^2 \text{x} - \text{sen}^2 x)$

Rappresentazioni dei numeri complessi

I numeri complessi si possono rappresentare attraverso varie tipologie di scritture.

Rapp. algebrica	*Rapp. trigonometrica*	*Rapp. esponenziale*
$a + jb$	$\rho \cdot (\cos \vartheta + j\text{sen}\vartheta)$	e^{x+jy}

La "Rappresentazione trigonometrica", viene chiamata anche "Rappresentazione vettoriale".

In presenza di grandezze alternate sinusoidali (tensioni elettriche, correnti elettriche, campi elettrici, campi magnetici, ecc.) i tecnici usano, oltre alla "*rappresentazione algebrica*" la "*rappresentazione trigonometrica*". Ovviamente, per semplicità, è usata una notazione ridotta all'essenziale e cioè $\rho\angle\vartheta$. Dove con " ρ " si designa, non il valore massimo, come ci si potrebbe aspettare, ma il valore efficace della grandezza alternata sinusoidale da descrivere e con " ϑ " si designa l'anomalia (cioè l'angolo di ritardo/anticipo) rispetto a un istante T scelto a convenientemente.

Il valore efficace di una grandezza alternata sinusoidale è il valore termicamente equivalente che avrebbe la medesima grandezza se fosse costante rispetto al tempo.
Esempio
Quando diciamo che la tensione alternata tra due fili elettrici è 230 volt significa che quella tensione provocherebbe, in un resistore, il medesimo riscaldamento che provocherebbe, nel medesimo resistore, una tensione continua di 230 volt. Significa anche che il valore massimo, della tensione esistente tra due fili, è uguale al valore efficace moltiplicato per $\sqrt{2}$. Cioè per tornare al nostro esempio numerico, se la tensione efficace è 230 volt la tensione massima è di (circa) 325 volt.
Tutti questi problemi (e le loro soluzioni) esulano da questo scritto, comunque credo sia opportuno precisare un punto che ritengo importante. Le grandezze alternate sinusoidali vengono rappresentate attraverso dei vettori rotanti, ma non sono grandezze vettoriali (come l'*accelerazione*, la *forza*, la *velocità*, ecc), ma sono grandezze scalari (come il *volume*, la *massa*, la *temperatura*, la *carica elettrica*, ecc.) ed è soltanto il loro valore che varia, nel tempo, con legge sinusoidale. La loro rappresentazione, attraverso dei vettori rotanti, è solo un comodo artificio per eseguito i vari calcoli con maggiore semplicità.

Formule di Eulero

Qui potrete vedere un altro semplice metodo per eseguire alcuni calcoli trigonometrici.
Abbiamo visto che:
$$e^{jx} = \cos x + j\text{sen}x$$
Sostituendo, nella precedente funzione, "x" con il valore di "$-x$" ricaviamo:
$$e^{-jx} = \cos(-x) + j\text{sen}(-x)$$
Poiché $\cos(-x) = \cos x$ e che $\text{sen}(-x) = -\text{sen}x$ abbiamo che:
$$e^{-jx} = \cos x - j\text{sen}x$$
Ora sappiamo che:
$$e^{jx} = \cos x + j\text{sen}x$$
$$e^{-jx} = \cos x - j\text{sen}x$$
Sommando e sottraendo queste due ultime espressioni otteniamo:
$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$
$$\text{sen}x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$
Queste due formule, denominate "Formule di Eulero", esprimono il coseno e il seno di un angolo (espresso da un numero reale) attraverso due esponenziali immaginari. Sicuramente qualcuno si chiederà a cosa possono servire queste due formule poiché non è possibile effettuare calcoli numerici su esponenziali immaginari. Dobbiamo ammettere che questo è vero, ma eseguire un calcolo letterale sulla parte esponenziale immaginaria equivale a eseguirlo sulla parte reale trigonometrica visto che sono, formalmente, identiche. Facciamo ora alcuni esempi per chiarire quest'insolito, ma potente, metodo per trovare delle uguaglianze sulle funzioni trigonometriche.

Esempio
Calcoliamo $(\cos x)^2$ che è uguale a $\cos^2 x$.
Poiché $\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$ allora $\cos^2 x = (\frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2})^2$ da cui, con semplici passaggi otteniamo:
$$\cos^2 x = (\frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2})^2 \qquad \cos^2 x = \frac{(e^{jx} + e^{-jx})^2}{4} \qquad \cos^2 x = \frac{e^{j2x} + 2e^{jx}e^{-jx} + e^{-j2x}}{4}$$

$\cos^2 x = \dfrac{e^{j2x}+2+e^{-j2x}}{4}$ $\quad \cos^2 x = \dfrac{e^{j2x}+e^{-j2x}}{4}+\dfrac{2}{4}$ $\quad \cos^2 x = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{e^{j2x}+e^{-j2x}}{2}+\dfrac{1}{2}$

$\cos^2 x = \dfrac{1}{2}\cdot\cos(2x)+\dfrac{1}{2}$ $\quad \cos^2 x = \dfrac{1}{2}+\dfrac{\cos(2x)}{2}$ $\quad \cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$

Esempio

Calcoliamo $(\text{sen}x)^2$ che è uguale a $\text{sen}^2 x$.

Poiché $\text{sen}x = \dfrac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$ allora $\text{sen}^2 x = (\dfrac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j})^2$ da cui, con semplici passaggi otteniamo:

$\text{sen}^2 x = (\dfrac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j})^2$ $\quad \text{sen}^2 x = \dfrac{(e^{jx}-e^{-jx})^2}{-4}$ $\quad \text{sen}^2 x = \dfrac{e^{j2x}-2e^{j2x}e^{-j2x}+e^{-j2x}}{-4}$

$\text{sen}^2 x = \dfrac{e^{j2x}-2+e^{-j2x}}{-4}$ $\quad \text{sen}^2 x = \dfrac{e^{j2x}+e^{-j2x}}{-4}+\dfrac{-2}{-4}$ $\quad \text{sen}^2 x = \dfrac{1}{-2}\cdot\dfrac{e^{j2x}+e^{-j2x}}{2}+\dfrac{2}{4}$

$\text{sen}^2 x = \dfrac{1}{-2}\cdot\cos(2x)+\dfrac{1}{2}$ $\quad \text{sen}^2 x = \dfrac{1}{2}-\dfrac{\cos(2x)}{2}$ $\quad \text{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$

Esempio

Calcoliamo $\text{sen}^2 x+\cos^2 x$.

Tutti sanno che $\text{sen}^2 x+\cos^2 x$ è uguale a 1. Ora vedremo questo risultato sfruttando i precedenti due risultati.

$\text{sen}^2 x+\cos^2 x = \dfrac{1}{2}-\dfrac{\cos(2x)}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\cos(2x)}{2}$ $\quad \text{sen}^2 x+\cos^2 x = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$

Esempio

Calcoliamo il $\cos^3 x$.

$\cos^3 x = (\dfrac{e^{jx}+e^{-jx}}{2})^3$ $\quad \cos^3 x = \dfrac{(e^{jx}+e^{-jx})^3}{8}$

$\cos^3 x = \dfrac{e^{j3x}+3e^{j2x}e^{-jx}+3e^{jx}e^{-j2x}+e^{-j3x}}{8}$ $\quad \cos^3 x = \dfrac{e^{j3x}+3e^{jx}+3e^{-jx}+e^{-j3x}}{8}$

$\cos^3 x = \dfrac{e^{j3x}+e^{-j3x}}{8}+\dfrac{3e^{jx}+3e^{-jx}}{8}$ $\quad \cos^3 x = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{e^{j3x}+e^{-j3x}}{2}+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{3e^{jx}+3e^{-jx}}{2}$

$\cos^3 x = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{e^{j3x}+e^{-j3x}}{2}+\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$ $\quad \cos^3 x = \dfrac{1}{4}\cdot\cos(3x)+\dfrac{3}{4}\cdot\cos x$

Esempio

Calcoliamo il $\text{sen}^3 x$.

$\text{sen}^3 x = (\dfrac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j})^3$ $\quad \text{sen}^3 x = \dfrac{(e^{jx}-e^{-jx})^3}{(2j)^3}$

$\text{sen}^3 x = \dfrac{e^{j3x}-3e^{j2x}e^{-jx}+3e^{jx}e^{-j2x}-e^{-j3x}}{-8j}$ $\quad \text{sen}^3 x = \dfrac{e^{j3x}-3e^{jx}+3e^{-jx}-e^{-j3x}}{-8j}$

$\text{sen}^3 x = \dfrac{e^{j3x}-e^{-j3x}}{-8j}+\dfrac{-3e^{jx}+3e^{-jx}}{-8j}$ $\quad \text{sen}^3 x = \dfrac{1}{-4}\cdot\dfrac{e^{j3x}-e^{-j3x}}{2j}+\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$

$\text{sen}^3 x = \dfrac{1}{-4}\cdot\text{sen}(3x)+\dfrac{3}{4}\cdot\text{sen}x$ $\quad \text{sen}^3 x = \dfrac{3\text{sen}x-\text{sen}(3x)}{4}$

Esempio

Calcoliamo il $\text{sen}^4 x$.

$$\text{sen}^4 x = (\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j})^4$$

$$\text{sen}^4 x = \frac{e^{j4x} - 4e^{j3x}e^{-jx} + 6e^{j2x}e^{-j2x} - 4e^{jx}e^{-j3x} + e^{-j4x}}{16}$$

$$\text{sen}^4 x = \frac{e^{j4x} - 4e^{j2x} + 6 - 4e^{-j2x} + e^{-j4x}}{16}$$

$$\text{sen}^4 x = \frac{6}{16} + \frac{e^{j4x} + e^{-j4x}}{16} - \frac{4e^{j2x} + 4e^{-j2x}}{16}$$

$$\text{sen}^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$\text{sen}^4 x = \frac{3}{8} + \frac{\cos(4x)}{8} - \frac{\cos(2x)}{2}$$

Esempio

Calcoliamo il $(\cos^2 x)(\text{sen}x)$.

Da uno degli esempi precedenti possiamo vedere che $\cos^2 x = \frac{e^{j2x} + 2 + e^{-j2x}}{4}$.

$$(\cos^2 x)(\text{sen}x) = \frac{e^{j2x} + e^{-j2x} + 2}{4} \cdot \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

$$(\cos^2 x)(\text{sen}x) = \frac{e^{j3x} - e^{jx} + e^{-jx} - e^{-j3x} + 2e^{jx} - 2e^{-jx}}{8j}$$

$$(\cos^2 x)(\text{sen}x) = \frac{e^{j3x} - e^{-j3x} + e^{jx} - e^{-jx}}{8j}$$

$$(\cos^2 x)(\text{sen}x) = \frac{1}{4} \cdot (\frac{e^{j3x} - e^{-j3x}}{2j} + \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j})$$

$$(\cos^2 x)(\text{sen}x) = \frac{1}{4} \cdot (\text{sen}(3x) + \text{sen}x)$$

Esempio

Calcoliamo il $(\cos^2 x)(\text{sen}^2 x)$.

$$(\cos^2 x)(\text{sen}^2 x) = (\frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2})^2 \cdot (\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j})^2$$

$$(\cos^2 x)(\text{sen}^2 x) = (\frac{e^{j2x} + e^{-j2x} + 2}{4})(\frac{e^{j2x} + e^{-j2x} - 2}{-4})$$

$$(\cos^2 x)(\text{sen}^2 x) = (\frac{e^{j4x} + 1 - 2e^{j2x} + 1 + e^{-j4x} - 2e^{-j2x} + 2e^{j2x} + 2e^{-j2x} - 4}{-16})$$

$$(\cos^2 x)(\text{sen}^2 x) = (\frac{e^{j4x} + e^{-j4x} - 2}{-16})$$

$$(\cos^2 x)(\text{sen}^2 x) = -\frac{1}{8} \cdot (\frac{e^{j4x} + e^{-j4x} - 2}{2})$$

$$(\cos^2 x)(\text{sen}^2 x) = -\frac{1}{8} \cdot (\frac{e^{j4x} + e^{-j4x}}{2} + \frac{-2}{2})$$

$$(\cos^2 x)(\text{sen}^2 x) = -\frac{1}{8} \cdot (-1 + \cos(4x))$$

$$(\cos^2 x)(\text{sen}^2 x) = \frac{1}{8} - \frac{\cos(4x)}{8}$$

Identità di Eulero

Dopo tutti questi esempi vediamo un'identità che, sono convinto, già conoscete.

Prendiamo la funzione $f(y) = e^{jy}$. Il suo sviluppo è:

$$e^{jy} = \cos y + j\text{sen}y$$

Ora se impostiamo $y = \pi$ (angolo piatto misurato in radianti) otteniamo:

$$e^{j\pi} = \cos \pi + j\text{sen}\pi$$

Ovviamente:
$\cos\pi = -1$
$\mathrm{sen}\pi = 0$
Sostituendo nell'espressione precedente abbiamo:
$e^{j\pi} = -1 + j0$ $\qquad e^{j\pi} = -1$
O, ancor meglio:

$e^{j\pi} + 1 = 0$

Quella che abbiamo appena visto è la famosa "Identità di Eulero" che lega tra loro alcune entità matematiche fondamentali. Tali entità sono:

La costante di John Napier	"e"
L'inità immaginaria	$j = \sqrt{-1}$
La costante PI GRECO	"π"
L'elemento neutro della moltiplicazione	1
L'elemento neutro della somma	0

Vediamo ora la medesima identità sotto altri aspetti.

Prendiamo la funzione $f(y) = e^{jy}$ e impostiamo:
$y = \pi + 2k\pi$ con "k" numero intero.
Se sostituiamo, otteniamo:
$e^{jy} = \cos y + j\mathrm{sen}y$ $\qquad e^{j(\pi+2k\pi)} = \cos(\pi + 2k\pi) + j\mathrm{sen}(\pi + 2k\pi)$
Ricordando che:
$\cos(\pi + 2k\pi) = -1$ $\qquad \mathrm{sen}(\pi + 2k\pi) = 0$
Sostituendo abbiamo:
$e^{j(\pi+2k\pi)} = -1 + j0$ $\qquad e^{j(\pi+2k\pi)} = -1$ $\qquad e^{j(\pi+2k\pi)} + 1 = 0$

Ovvero:

Prendiamo la funzione $f(y) = e^{jy}$ e impostiamo:
$y = 180° + k360°$ con "k" numero intero.
Se sostituiamo, otteniamo:
$e^{jy} = \cos y + j\mathrm{sen}y$ $\qquad e^{j(180°+k360°)} = \cos(180° + k360°) + j\mathrm{sen}(180° + k360°)$
Ricordo che:
$\cos(180° + k360°) = -1$ $\qquad \mathrm{sen}(180° + k360°) = 0$
Sostituendo abbiamo:
$e^{j(180°+k360°)} = -1 + j0$ $\qquad e^{j(180°+k360°)} = -1$ $\qquad e^{j(180°+k360°)} + 1 = 0$

Logaritmi dei numeri complessi

Abbiamo dimostrato che $e^{x+jy} = e^x(\cos y + j\mathrm{sen}y)$.
Perciò possiamo scrivere $e^{x+jy} = r(\cos\varphi + j\mathrm{sen}\varphi)$ dove abbiamo posto "$r = e^x$" e "$\varphi = y$".
Niente vieta di definire il logaritmo naturale (cioè in base "e") di un numero complesso similmente a com'è stato definito il logaritmo naturale di un numero naturale e cioè:
Il logaritmo naturale di un numero complesso "$r(\cos\varphi + j\mathrm{sen}\varphi)$" è l'esponente cui bisogna elevare il numero "e" per ottenere il numero complesso dato. Cioè:

$\log_e[r(\cos\varphi + j\text{sen}\varphi)] = x + jy$

Questa eguaglianza è vera perché $e^{x+jy} = r(\cos\varphi + j\text{sen}\varphi)$, ma quest'argomento esula totalmente da questo scritto.

Piccola riflessione sul "Metodo di interpolazione lineare"

Nel calcolo dei logaritmi sui numeri decimali abbiamo potuto vedere il "*Metodo di interpolazione lineare – Principio di proporzionalità*" che sostituisce alla curva logaritmica, passante per i punti "a" e "$a+1$", una retta anch'essa passante per i punti "a" e "$a+1$".

Il valore esatto è dato, ovviamente, dalla seguente espressione:

$\log_e(a+x)$

Il valore approssimato, che sostituisce quello esatto, è dato dalla seguente espressione:

$\log_e a + (\log_e(a+1) - \log_e a) \cdot x$

La differenza, tra il valore esatto e quello approssimato, è:

$\log_e(a+x) - [\log_e a + (\log_e(a+1) - \log_e a) \cdot x]$

Ora facciamoci due interessanti domande.

Domanda Per quale valore di "x", compreso tra il valore di 0 (zero) e il valore di 1, tenendo il valore di "a" costante, il valore della differenza è minimo?

Risposta Il valore della differenza è minimo per $x = 0$ e per $x = 1$. Lascio al lettore le facili verifiche.

Domanda Per quale valore di "x", compreso tra il valore di 0 (zero) e il valore di 1, tenendo il valore di "a" costante, il valore della differenza è massimo?

Risposta La risposta più ovvia è $x = 0{,}5$ ma questa risposta è errata. Vediamo di calcolare la risposta corretta.

Ovviamente il punto dove la derivata, del valore della differenza, vale 0 (zero) è il valore cercato. Riporto l'espressione della differenza.

$y = \log_e(a+x) - [\log_e a + (\log_e(a+1) - \log_e a) \cdot x]$

La derivata dell'espressione precedente è:

$$y' = \frac{1}{a+x} \cdot 1 - [0 + (\log_e(a+1) - \log_e a)]$$

$$y' = \frac{1}{a+x} - (\log_e(a+1) - \log_e a)$$

Impostando a 0 (zero) il valore dell'espressione precedente otteniamo:

$$\frac{1}{a+x} - (\log_e(a+1) - \log_e a) = 0$$

Risolvendola rispetto a "x" otteniamo la seguente espressione:

$$x = \frac{1}{\log_e(a+1) - \log_e a} - a$$

Com'è possibile vedere il valore di "x" varia al variare del valore di "a".

Vediamo tre esempi:

$a = 10$

$$x = \frac{1}{\log_e(a+1) - \log_e a} - a = \frac{1}{2{,}3978953 - 2{,}3025851} - 10 = 0{,}4920587$$

$a = 30$

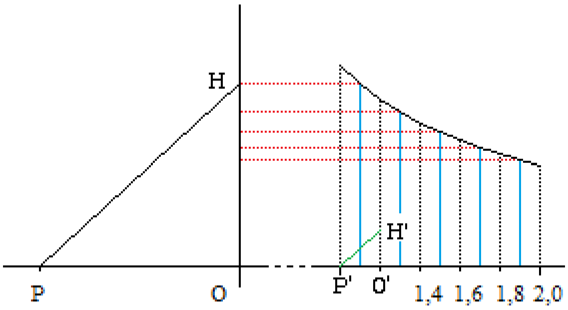
$$x = \frac{1}{\log_e(a+1) - \log_e a} - a = \frac{1}{3{,}4339872 - 3{,}4011974} - 30 = 0{,}4972676$$

$$a = 1000$$

$$x = \frac{1}{\log_e(a+1) - \log_e a} - a = \frac{1}{6{,}9087548 - 6{,}9077553} - 1000 = 0{,}4999167$$

Giustificazione del metodo di integrazione grafico

Vediamo ora di giustificare il metodo di integrazione grafico che abbiamo visto precedentemente.



Ovviamente i triangoli $P\hat{O}H$ e $P'\hat{O}'H'$ sono simili per cui si può scrivere:

$$\overline{PO} : \overline{OH} = \overline{P'O'} : \overline{O'H'}$$

Da ciò si deduce che:

$$\overline{PO} * \overline{O'H'} = \overline{P'O'} * \overline{OH}$$

Ossia:

$$\overline{PO} * \overline{O'H'} = h * y$$

Poiché:

$$\int_{1,0}^{1,2} \frac{1}{x} dx = f_{1,1} \cdot (x_{1,2} - x_{1,0}) = y \cdot h$$

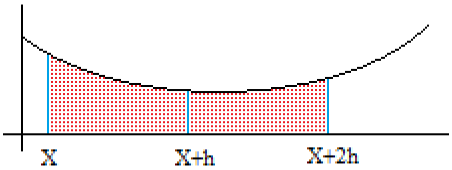
E poiché il segmento $\overline{PO}$ è uguale all'unità possiamo dedurre che:

$$\overline{O'H'} = \int_{1,0}^{1,2} \frac{1}{x} dx$$

In modo del tutto analogo possiamo ricavare la giustificazione della costruzione degli altri segmenti.

Dimostrazione del "Metodo di Cavalieri-Simpson"

Disegnamo, su un piano cartesiano, una parabola e punteggiamo l'area interessata dal calcolo.



Calcolo dell'area punteggiata

$$\int_{x}^{x+2h} (Az^2 + Bz + C) dz = \left[A\frac{z^3}{3} + B\frac{z^2}{2} + Cz \right]_{x}^{x+2h} =$$

$$= \frac{A}{3} \cdot [(x+2h)^3 - x^3] + \frac{B}{2} \cdot [(x+2h)^2 - x^2] + C \cdot [(x+2h) - x]$$

Tralasciando tutti i semplici calcoli otteniamo:

$$\int_x^{x+2h} (Az^2 + Bz + c)dz = \frac{2h}{6} \cdot [2A(3x^2 + 6hx + 4h^2) + 3B(2x+2h) + 6C]$$

Ovvero:

$$\int_x^{x+2h} (Az^2 + Bz + c)dz = \frac{h}{3} \cdot [2A(3x^2 + 6hx + 4h^2) + 3B(2x+2h) + 6C]$$

Ora proviamo a eseguire un calcolo alternativo, ovvero calcoliamo il valore dell'ordinata nei punti "x", "$x+h$" e "$x+2h$".

$$y_x = Ax^2 + Bx + C$$

$$y_{x+h} = A(x+h)^2 + B(x+h) + C = A(x^2 + 2hx + h^2) + B(x+h) + C$$

$$y_{x+2h} = A(x+2h)^2 + B(x+2h) + C = A(x^2 + 4hx + 4h^2) + B(x+2h) + C$$

Ora eseguiamo la seguente somma:

$$y_x + 4 \cdot y_{x+h} + y_{x+2h}$$

$$y_x + 4 \cdot y_{x+h} + y_{x+2h} = [Ax^2 + Bx + C] + 4 \cdot [A(x^2 + 2hx + h^2) + B(x+h) + C] +$$
$$+ [A(x^2 + 4hx + 4h^2) + B(x+2h) + C]$$

Tralasciando tutti i semplici calcoli otteniamo:

$$y_x + 4 \cdot y_{x+h} + y_{x+2h} = A(6x^2 + 12hx + 8h^2) + B(6x + 6h) + C(6) =$$
$$= 2A(3x^2 + 6hx + 4h^2) + 3B(2x + 2h) + 6C$$

Da questo risultato si deduce che:

$$\int_x^{x+2h} (Az^2 + Bz + c)dz = \frac{h}{3}(y_x + 4 \cdot y_{x+h} + y_{x+2h})$$

Questo risultato è veramente spettacolare e permette di calcolare l'area, delimitata da una parabola di secondo grado, solo attraverso il valore delle ordinate estreme della parabola (y_x e y_{x+2h}), dell'ordinata equidistante da quelle estreme (y_{x+h}) e dal valore h che separe le ordinate.

Dopo aver dimostrato questa formula è facile riuscire a dimostrare la formula vista nel "*Metodo di Cavalieri-Simpson*" ed è altrettanto facile capire perché "*per poter utilizzare questo metodo è necessario suddividere l'intervallo in un numero* **pari** *di parti uguali*".

Soluzione dei due paradossi

Soluzione del paradosso 1

In un punto della dimostrazione abbiamo diviso, entrambi i termini, per $\log_a 1$ ma il $\log_a 1$ è uguale a 0 (zero) e di conseguenza, poiché non possiamo dividere per 0 (zero), il paradosso è risolto.

Soluzione del paradosso 2

Abbiamo detto che "*non esistono i logaritmi dei numeri negativi e del numero zero*" per cui $\log_a(-1)$ non esiste e di conseguenza, non potendo eseguire i vari passaggi, il paradosso non sussiste.

5. Profili biografici

In questi brevissimi profili il lettore troverà alcuni cenni sui matematici citati.

Archimede – Matematico e fisico italiano, nato a Siracusa nel 287 a.C., morto a Siracusa nel 212 a.C. Di lui ci sono rimaste molte opere che ne fanno uno dei matematici e dei fisici più grandi di sempre. Di lui è famosa l'esclamazione "Eureka" (ho trovato) quando riuscì a trovare un metodo per confrontare il peso specifico dei solidi. Altrettanto famosa è la sua frase "Datemi un punto di appoggio che vi solleverò il mondo" quando riuscì a stabilire i principi delle leve. I suoi risultati sono molteplici in tutti i campi. Riuscì a calcolare l'area del segmento parabolico; riuscì a calcolare il volume e la superficie del cilindro, della sfera e delle sue porzioni; riuscì a calcolare l'area dell'arbello e del salinon; fu il precursore del "calcolo infinitesimale"; ecc. Il suo nome è legato indissolubilmente al "principio di Archimede" (principio di idrostatica), alla "spirale di Archimede" e ad una pompa dal nome di "vite di Archimede". Fu sempre Archimede a calcolare che il rapporto tra circonferenza e diametro (π), era compreso tra $\frac{223}{71}$ ($\frac{223}{71}$ = 3,1408) e $\frac{220}{70}$ ($\frac{22}{7} = 3,\overline{142857}$).

Argand Jean-Robert – Matematico svizzero, nato a Ginevra nel 1768, morto a Parigi nel 1822. Di professione era libraio con una grande passione per la matematica. Il suo più grande contributo è stato quello di aver ideato un metodo per rappresentare i numeri complessi (piano Argand-Gauss).

Briggs Henry – Matematico inglese, nato a Warley Wood nel 1556, morto a Oxford nel 1631. Insegnò a Cambridge, Londra e Oxford. E' famoso per aver introdotto l'uso dei logaritmi decimali e per alcune formule trigonometriche.

Burgi Joost – Matematico e astronomo svizzero, nato a Lichtensteig nel 1552, morto a Kassel nel 1632. Fu assistente di Keplero e compose, indipendentemente dal Napier, le prime tavole logaritmiche. E' considerato, insieme al Napier, uno degli inventore dei logaritmi.

Cavalieri Bonaventura – Matematico italiano, nato a Milano nel (circa) 1598, morto a Bologna nel 1647. Fin da giovane dimostrò grande attitudine per la matematica. Dopo essere entrato nell'ordine dei gesuiti si trasferì a Pisa per studiare con Benedetto "Antonio" Castelli (discepolo di Galileo Galilei). Grazie alla sua bravura papa Urbano VIII lo nominò priore perpetuo di S. Maria della Mascarella in Bologna per permettergli di dedicarsi ai suoi studi con la dovuta tranquillità.

Chuquet Nicolas – Matematico francese, vissuto nel XV secolo. E' autore di un trattato di aritmetica e di algebra contenente alcuni concetti sugli esponenti.

De L'Hospital Guillaume François Antoine de Sainte Mesme – Matematico francese, nato a Parigi nel 1661, morto a Parigi nel 1704. Studioso di calcolo infinitesimale. Il suo nome è legato soprattutto alla formula per la soluzione del limite di una funzione indeterminata nella forma $F(x)/G(x)$ deve le funzioni tendono entrambe a 0 (zero) o entrambe a infinito.

Euler Leonard – Matematico tedesco, nato a Basilea nel 1707, morto a Pietroburgo nel 1783. Allievo di Johann Bernulli, si trasferisce in Russia insieme a Daniel Bernulli e Nikolaus Bernulli. E' stato uno dei più grandi matematici, insieme a Giuseppe Luigi Lagrange, del XVIII secolo. Ha fatto innumerevoli scoperte in tutti i campi della matematica. Il suo nome è legato a molti risultati da lui raggiunti e tra essi c'è la scoperta di molte proprietà del numero "e", base dei logaritmi naturali ed anche denominato "Numero di Euler".

Gauss Karl Friedrich – Matematico, astronomo e fisico tedesco, nato a Brunswick nel 1777, morto a Gottinga nel 1855. I suoi contributi sono tanti e in molti campi diversi tra cui la “Teoria dei numeri”, “Statistica”, “Astronomia”, “Magnetismo”, ecc. A differenza di altri scienziati si dedicò allo studio delle discipline che lo interessavano per periodi temporali dedicandosi quasi completamente a una disciplina per volta. Tra il 1794 e il 1801 si dedicò soprattutto allo studio dell’algebra e il suo più grande contributo fu la prima dimostrazione del teorema fondamentale dell’algebra. Tra il 1801 e il 1816 si dedicò soprattutto all’astronomia dando un contributo importante nell’effettuazione del calcolo delle orbite di alcuni corpi celesti. Tra il 1816 e il 1828 si dedicò soprattutto alla geodesia e alla geometria. Tra il 1828 e il 1841 si dedicò soprattutto alla fisica matematica, al magnetismo, all’elettrostatica, ecc. Tra il 1841 e il 1855 si dedicò soprattutto (nuovamente) alla matematica. Nonostante i suoi straordinari contributi in “tutte” le scienze il suo più grande contributo è, universalmente riconosciuto, quello che gli ha permesso di enunciare la “Teoria degli errori accidentali” conosciuta anche con il nome di “Curva di Gauss”.

Gunter Edmund - Matematico inglese, nato a Hertfordshire nel 1581, morto a Londra nel 1626. Insegnò astronomia a Londra e i suoi più importanti contributi sono nella trigonometria e nell’invenzione di alcuni strumenti per la navigazione.

Huygens Christiaan – Matematico, astronomo e fisico olandese, nato ad Aia nel 1629, morto ad Aia nel 1685. I suoi contributi più significativi sono in campo astronomico, con la scoperta di Titano (satellite di Saturno) ed in campo matematico con i primi rudimenti del calcolo delle probabilità e del calcolo infinitesimale.

Moivrè Abraham de – Matematico francese, nato a Vitry nel 1667, morto a Londra nel 1754. Il suo nome è legato alla formula per il calcolo delle radici di un numero complesso e al calcolo delle probabilità.

Napier John – Matematico inglese, nato a Edimburgo nel 1550, morto a Edimburgo nel 1617. Il suoi contributi sono tanti ed importanti. Il suo nome è legato indissolubilmente all’uso dei logaritmi naturali (detti anche “Logaritmi di Napier”) e, in trigonometria, al “Teorema di Napier”.

Newton Isaac – Matematico inglese, nato a Woolsthorpe nel 1642, morto a Kensington nel 1727. Ancora studente espose, in una lettera a Gottfried Wilhelm von Leibniz, il teorema del binomio che porta il suo nome. Nel 1696 divenne direttore della Zecca di Londra. Le sue scoperte sono state innumerevoli in tutti i campi, ma il suo nome è universalmente legato alla “legge di gravitazione universale” o “legge di Newton” ($F = G \cdot \frac{M \cdot m}{d^2}$).

Pacioli Luca – Matematico e frate francescano italiano, nato a Borgo San Sepolcro nel 1445, morto dopo il 1509. Insegnò matematica in varie città tra cui Bologna, Milano, Napoli, Roma, ecc. e compose moltissime opere di aritmetica e algebra. Nel suo più famoso trattato dal titolo “Summa de Arithmetica, geometria proportioni et proportionalità” si trovano esposti, per la prima volta, il metodo contabile della “partita doppia”, accenni sul calcolo delle probabilità oltre ad un esempio di logaritmo neperiano prima di che fosse esposto dal Napier. In un altro suo trattato si trovano esposti i principi di alcuni giochi matematici, tra cui un manuale sul gioco degli scacchi.

Poncelet Jean-Victor – Matematico francese, nato a Metz nel 1788, morto a Parigi nel 1867. Fu ufficiale del genio nell’esercito napoleonico durante la guerra di Russia. Venne catturato e nei due anni di prigionia si dedicò alla matematica. E’ considerato il fondatore della geometria proiettiva.

Simpson Thomas – Matematico inglese, nato a Market Bosworth nel 1710, morto a Market Bosworth nel 1761. Si occupò particolarmente di trigonometria. Viene accreditato della scoperta della formula per il calcolo delle aree di superfici piane delimitate da funzioni nonostante che questa formula sia stata enunciata dal Cavalieri circa cento anni prima.

Stifel Michael – Matematico tedesco, nato a Esslingen nel 1487, morto a Jena nel 1567. La sua opera più famosa è intitolata “Arithmetica Integra” dove espone con grande chiarezza concetti di aritmetica e di algebra.

Taylor Brook – Matematico inglese, nato a Edmonton nel 1685, morto a Somerset House nel 1731. Studiò a Cambridge dove si laureò, divenendo dottore in legge, ma si dedicò allo studio della matematico. Il suo nome è conosciuto per la formula dell’aumento finito.

Wallis John – Matematico inglese, nato ad Ashford nel 1616, morto a Oxford nel 1703. I suoi più importanti contributi sono in campo matematico.