TAVOLE E FORMULARI DI MATEMATICA

PER LE SCUOLE MEDIE E SUPERIORI DI OGNI ORDINE E GRADO

Carlo Sintini

www.matematicamente.it

INDICE

Formule di addizione e sottrazione
Formule di duplicazione
Formule di bisezione
Formule dell'arco metà
Formule di prostaferesi
Formule di Werner
Soluzione dei triangoli rettangoli
Teorema della corda
Teorema dei seni
Area di un triangolo qualsiasi conoscendo due lati ed un angolo
Area di un parallelogramma
Area di un quadrilatero
Teorema delle proiezioni
Teorema del coseno o di Carnot o di Pitagora generalizzato
Formule di Briggs
Teorema delle tangenti o di Nepero
Area di un triangolo qualsiasi conoscendo un solo lato e gli angoli interni
Raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo
Raggio della circonferenza inscritta in un triangolo
Raggi delle tre circonferenze ex-inscritte ad un triangolo
Significato trigonometrico del coefficiente angolare di una retta
Angolo fra due rette

FORMULARIO DI GEOMETRIA ANALITICA PIANA

Distanza fra due punti
Coordinate del punto medio fra due punti dati
Equazioni della retta generica
Equazioni di rette particolari
Coefficiente angolare di una retta
Equazione della retta passante per due punti dati
Equazione del fascio di rette passanti per un punto dato
Condizione di parallelismo fra due rette
Condizione di perpendicolarità fra due rette
Distanza di un punto da una retta (in forma implicita) Distanza di un punto da una retta (in forma esplicita)
Equazione di una conica generica
Equazioni generiche di una circonferenza
Circonferenze particolari
Equazioni generiche di una parabola con asse parallelo agli assi cartesiani
Coordinate del fuoco di una parabola
Coordinate del vertice di una parabola
Equazione della retta direttrice di una parabola
Equazioni di parabole particolari
Equazione generica di un'ellisse con assi paralleli agli assi cartesiani
Equazione generica di un'ellisse con assi coincidenti con gli assi cartesiani
Equazione generica di una iperbole con asse focale parallelo ad uno degli assi cartesiani

Coordinate del centro di una generica ellisse con assi paralleli agli assi cartesiani
Equazione generica di una iperbole con asse focale coincidente con l'asse X e centro nell'origine
Equazione generica di una iperbole con asse focale coincidente con l'asse Y e centro nell'origine
Equazioni degli asintoti di una iperbole con caratteristiche corrispondenti ai due tipi precedenti
Equazione generica dell'iperbole equilatera con centro nell'origine ed asintoti coincidenti con le bisettrici degli assi cartesiani
Equazione dell'iperbole equilatera con centro nell'origine ed asintoti coincidenti con gli assi cartesiani
Formule per la traslazione degli assi cartesiani
Formule per la rotazione degli assi cartesiani
Formule per la rototraslazione degli assi cartesiani
Formule di trasformazione da un sistema cartesiano ad uno polare
Formule di trasformazione da un sistema polare ad uno cartesiano

FORMULARIO DI ANALISI

Tabella delle derivate immediate
Elenco degli integrali immediati
Equazioni differenziali più comuni
Cenni di calcolo vettoriale:
Modulo di un vettore
Prodotto di un vettore per un numero
Prodotto scalare fra due vettori
Prodotto vettoriale fra due vettori
Operatore gradiente
Operatore divergenza
Operatore rotazione
Operatore nabla

FATTORIALI DA 1 A 20

1! = 1
2! = 2
3! = 6
4! = 24
5! = 120
6! = 720
7! = 5'040
8! = 40'320
9! = 362'880
10! = 3'628'800
11! = 39'916'800
12! = 479'001'600
13! = 6'227'020'800
14! = 87'178'291'200
15! = 1'307'674'368'000
16! = 20'922'789'888'000
17! = 355'687'428'096'000
18! = 6'402'373'705'728'000
19! = 121'645'100'408'832'000
20! = 2'432'902'008'176'640'000

FATTORIALI APPROSSIMATI

Per calcolare in modo approssimato il fatto-riale di un qualsiasi numero intero n, si può applicare la seguente formula

$$n! \cong n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n}$$

detta formula di Stirling.

Per valori di n molto alti può essere utile il ricorso ai logaritmi per effettuare il calcolo.

PESI SPECIFICI

acqua (distillata) = 1 g/cm^3

acqua di mare ≅ 1,027 g/cm^3

ghiaccio = 0,939 g/cm^3

vapor d'acqua = 0,810 g/cm^3

aria (in cond. standard) = 1,293 g/cm^3

idrogeno = 0,089 g/cm^3

ossigeno = 1,430 g/cm^3

azoto = 1,256 g/cm^3

cloro = 3,180 g/cm^3

calcio = 1,58 g/cm^3

alluminio = 2,67 g/cm^3

stagno = 7,3 g/cm^3

zinco = 6,9 g/cm^3

sodio = 0,97 g/cm^3

zolfo = 1,95 g/cm^3

fosforo = 1,77 g/cm^3

arsenico (cristallino) = 5,70 g/cm^3

rame = 8,90 g/cm^3

Piombo = 11,31 g/cm^3

Nichel = 8,52 g/cm^3

Platino = 20,75 g/cm^3

Iridio = 22,43 g/cm^3

oro = 19,5 g/cm^3

magnesio = 1,75 g/cm^3

mercurio = 13,59 g/cm^3

ferro = 7,86 g/cm^3

argento = 10,5 g/cm^3

ghisa = 7,2 ÷ 7,5 g/cm^3

acciaio = 7,5 ÷ 8,1 g/cm^3

bronzo = 8,5 ÷ 9,[illegible] g/cm^3

ottone = 7,[illegible] ÷ [illegible],0 g/cm^3

alcool [illegible]co = 0,79 g/cm^3

acido carbonico = 1,977 g/cm^3

ammoniaca = 0,761 g/cm^3

acido solforico concentrato = 0,184 g/cm^3

acido cloridrico = 1,211 g/cm^3

acido nitrico = 1,522 g/cm^3

zucchero (di barbabietola) = 1,612 g/cm^3

anilina = 1,034 g/cm^3

benzina ≅ 0,739 g/cm^3

nafta = 0,759 g/cm^3

essenza di trementina (acqua ragia) = 0,872 g/cm^3

carbonato di calcio (roccia calcarea) ≅ 2,4 g/cm^3

calcestruzzo ≅ 2,3 g/cm^3

carbone ≅ 0,7 g/cm^3

carta ≅ 0,8 g/cm^3

argilla ≅ 1,8 g/cm^3

sabbia (silicea) ≅ 2,1 g/cm^3

sughero = 0,3 g/cm^3

oli minerali ≅ 0,95 g/cm^3

oli vegetali ≅ 0,92 g/cm^3

marmo di carrara = 2,73 g/cm^3

lava vulcanica ≅ 2,7 g/cm^3

granito = 2,65 g/cm^3

travertino = 2,79 g/cm^3

gomma naturale ≅ 0,9 g/cm^3

pietra pomice = 0,63 g/cm^3

calce viva = 1,17 g/cm^3

cemento (Portland) = 3,05 ÷ 3,15 g/cm^3

asfalto = 1,12 ÷ 1,35 g/cm^3

sapone = 0,96 ÷ 1,89 g/cm^3

amido ≅ 1,6 g/cm^3

legno di abete = 0,47 ÷ 0,58 g/cm^3

legno di acero = 0,63 ÷ 0,81 g/cm^3

legno di cipresso = 0,71 ÷ 0,79 g/cm^3

legno di faggio = 0,73 ÷ 0,82 g/cm^3

legno di frassino = 0,77 ÷ 0,86 g/cm^3

legno di larice = 0,72 ÷ 0,78 g/cm^3

legno di mogano = 1,03 ÷ 1,09 g/cm^3

legno di noce = 0,65 ÷ 0,71 g/cm^3

legno di pino = $0,65 \div 0,70$ g/cm^3

legno di pioppo = $0,39 \div 0,47$ g/cm^3

legno di tiglio = $0,54 \div 0,59$ g/cm^3

vetro $\cong 2,5$ g/cm^3

cristallo $\cong 3,3$ g/cm^3

latte di vacca = $1,02$ g/cm^3

latte di capra = $1,03$ g/cm^3

burro = $0,94$ g/cm^3

olio di oliva = $0,93$ g/cm^3

vino comune = $0,99$ g/cm^3

PESI ATOMICI

ELEMENTO	SIMB.	P. A.	ELEMENTO	SIMB.	P. A.
Afnio	Hf	178,3	Ferro	Fe	55,84
Alluminio	Al	26,97	Fluoro	F	19,0
Antimonio	Sb	121,8	Fosforo	P	31,04
Argento	Ag	107,9	Gadolinio	Gd	157,3
Argo	Ar	39,88	Gallio	Ga	69,72
Arsenico	As	74,96	Germanio	Ge	72,60
Azoto	N	14,01	Idrogeno	H	1,008
Bario	Ba	137,4	Indio	In	114,8
Berillio	Be	9,02	Iridio	Ir	193,1
Bismuto	Bi	209,0	Itterbio	Yb	173,5
Boro	B	10,82	Iridio	Y	89,0
Bromo	Br	79,92	Jodio	J	126,9
Cadmio	Cd	112,4	Kripton	Kr	82,9
Calcio	Ca	40,07	Lantanio	La	138,9
Carbonio	C	12,00	Litio	Li	6,94
Cerio	Ce	140,2	Magnesio	Mg	24,32
Cesio	Cs	132,8	Manganese	Mn	54,93
Cloro	Cl	35,46	Mercurio	Hg	200,6
Cobalto	Co	58,97	Molibdeno	Mo	96,0
Cromo	Cr	52,01	Neon	Ne	20,2
Elio	He	4,0	Nichelio	Ni	58,68
Erbio	Er	167,7	Niobio	Nb	93,5
Europio	Eu	152,0	Oro	Au	197,2

ELEMENTO	SIMB.	P. A.	ELEMENTO	SIMB.	P. A.
Osmio	Os	190,9	Stagno	Sn	118,7
Ossigeno	O	16,000	Stronzio	Sr	87,6
Palladio	Pd	106,7	Tallio	Tl	204,4
Piombo	Pb	207,2	Tantalio	Ta	181,5
Platino	Pt	195,2	Tellurio	Te	127,5
Potassio	K	39,1	Titanio	Ti	48,1
Radio	Ra	226,0	Torio	Th	232,1
Rame	Cu	63,57	Tungsteno	W	184,0
Rodio	Rh	102,9	Uranio	U	238,2
Rubidio	Rb	85,5	Vanadio	V	51,0
Rutenio	Ru	101,7	Xeno	X	130,2
Scandio	Sc	45,1	Zinco	Zn	65,37
Selenio	Se	79,2	Zirconio	Zr	91,2
Silicio	Si	28,06	Zolfo	S	32,07
Sodio	Na	23,0			

UNITA' DI MISURA

LUNGHEZZA

metro (m) = unità del sistema M.K.S.

micron (μ) = $\frac{1}{1\,000\,000}$ m = 0,000001 m = 10^{-6} m

angstrom (Å) = 0,0000000001 m = 10^{-10} m

miglio terrestre (G.B. e U.S.A.) = 1609 m

miglio marino (internazionale) = 1852 m

pollice (inch) = 0,0254 m = $2{,}54 \cdot 10^{-2}$ m

piede (foot) = 0,3048 m

iarda (yard) = 0,9144 m

anno luce = $9{,}4637 \cdot 10^{15}$ m

parsec = 3,262 a.l. = $3{,}0857 \cdot 10^{16}$ m

Per i multipli e sottomultipli di una qualsiasi unità di misura valgono i seguenti prefissi approvati nel congresso internazionale del 1948 tenutosi ad Amsterdam:

tera (T) = 1'000'000'000'000 = 10^{12},

giga (G) = 1'000'000'000 = 10^9

mega (M) = 1'000'000 = 10^6

chilo (K) = 1'000 = 10^3

milli (m) = 0,001 = 10^{-3}

micro (μ) = 0,000001 = 10^{-6}

nano (n) = 0,000000001 = 10^{-9}

pico (p) = 0,000000000001 = 10^{-12}

FORZA O PESO

Kilogrammo (Kg o Kg_p) = unità nel sistema M.K.S.

newton (N) = 0,102 Kg

dina (d) = $1,02 \cdot 10^{-6}$ Kg

libbra o pound = 0,4356 Kg

oncia (ounce avoirdupois) = 28,25 g

secondo (sec) = unità del sistema M.K.S.

giorno siderale = 86 164 sec

giorno solare = 86 400 sec

ciclo lunare = 27 g 7 h 43 min 11,5 sec

anno terrestre tropico (intervallo fra due ritorni consecutivi al medesimo punto equinoziale) = 365 g 5 h 48 m 46,98 s

anno terrestre siderale (tempo necessario a compiere una rivoluzione completa intorno al sole) = 365 g 6 h 9 m 9,54 s

tempo necessario alla luce del sole per giungere sulla terra = 8 m 19 s

L'anno tropico fornisce 365,2422 giorni solari. Ogni anno esiste dunque un eccesso frazionario pari a circa un quarto di giorno. È per assorbire tale eccesso che sono stati istituiti gli anni bisestili.

Poichè la frazione suddetta non rappresenta un quarto esatto di giorno, con la riforma gregoriana si stabilì di considerare bisestili tutti gli anni corrispondenti ad un multiplo di quattro con esclusione però di quegli anni che sono inizio di secolo e le cui prime due cifre non sono multiple di quattro.
Per esempio il 1600 fu bisestile, mentre il 1700, il 1800 e il 1900 non lo furono. Il 2000 sarà invece bisestile.

CAPACITA'

1 litro = 1 dm^3

gallone inglese = 4,5459 l

gallone U.S.A. = 3,7853 l

pinta (ingl.) = 0,5682 l

VELOCITA'

metri/secondo (m/s) = unità M.K.S.

Kilometri/ora (Km/h) = 0,277 m/s

nodo (miglia marine per ora) = 0,5148 m/s =

= 1,853 Km/h

Velocità luce nel vuoto = 299793,0 Km/sec

Velocità media del suono nell'aria (a 18 °C alla press. di 1 atm. e con umidità nulla) = 331,4 m/s

Velocità media del suono nei liquidi = 1000 ÷ 2000 m/s (1500 m/s nell'acqua marina)

Velocità media del suono nei solidi = 1000 ÷ 5000 m/s

La velocità del suono aumenta di 60 cm/sec nell'aria per ogni aumento di temperatura pari a 1 °C. Nei liquidi e nei solidi invece all'aumento di 1 °C corrispondono diminuizioni di velocità rispettivamente pari allo 0,1 % e allo 0,01 %.

PRESSIONE

Atmosfera (Atm) = pressione esercitata da una colonna di mercurio alta 76 cm

Bar = 0,98692 Atm

$Kg/m^2 = 9,6784 \cdot 10^{-5}$ Atm

metri di acqua $= 9,6784 \cdot 10^{-2}$ Atm

$N/m^2 = 9,869 \cdot 10^{-6}$ Atm

Pound / square inch (libbra per pollice quadrato) $= 6,804 \cdot 10^{-2}$ Atm

1 tor = 1 mm di Hg

1 Baria = 10^{-6} Bar

LAVORO ED ENERGIA

Kilogrammetro (Kgm) = lavoro necessario per alzare il peso di un Kg all'altezza di un metro.

erg (unità c.g.s.) $= 1,0197 \cdot 10^{-8}$ Kgm

Joule (unità M.K.S.) = 0,10197 Kgm
grande caloria (o Caloria) = 0,4265 Kgm
piccola caloria (o caloria) = $0{,}4265 \cdot 10^{-3}$ Kgm
Kilowattora (Kwh) = $3{,}671 \cdot 10^{5}$ Kgm
elettronvolt (eV) = $1{,}6021 \cdot 10^{-12}$ erg

POTENZA

Watt (W) = potenza esplicata da un motore che compie il lavoro di un Joule in un secondo = 0,10197 Kgm/s
cavallo vapore (C.V. oppure H.P. dall'inglese horse power) = 75 Kgm/s
chilogrammetro al secondo (Kgm/s) = 9,8066 W
Caloria/sec = 4,186 W
lumen = $1{,}496 \cdot 10^{-3}$ W

ALTRE COSTANTI UTILI

$\pi = 3,141592654 \ldots$

$e = 2,718281828 \ldots$

radiante $= 57° \, 17' \, 44,81''$

accel. di gravità terrestre (valore medio all'equatore e al livello del mare) $= 9,80618 \ m/sec^2$

costante di gravitaz. universale $(G) = 6,668 \cdot 10^{-8}$ unità c.g.s.

numero di Avogadro $(N) = 6,0250 \cdot 10^{23}$ (num. puro)

equivalente meccanico della Caloria $(J) = 4,1855 \ J/Cal$

costante dei gas perfetti o di Reynolds $(R) = 8,3144 \ \frac{\text{Joule}}{°K \cdot \text{mole}}$

costante di Boltzmann $(K) = 1,38024 \cdot 10^{-16} \ erg/°K$

costante di Planck $(h) = 6,6252 \cdot 10^{-27} \ erg \cdot sec$

$\hbar = h/2\pi = 1,05 \cdot 10^{-27} \ erg \cdot sec$

$\hbar^2 = 1,1 \cdot 10^{-54} \ erg^2 \cdot sec^2$

carica dell'elettrone = $1,6 \cdot 10^{-19}$ coulomb

lunghezza d'onda della riga rossa del cadmio = 6438,4696 Å

raggio elettrone = $2,82 \cdot 10^{-13}$ cm

raggio protone = $1,4 \cdot 10^{-13}$ cm

diametro medio della terra = 6367,65 Km

diametro medio dell'orbita terrestre = $1,495 \cdot 10^{11}$ Km

inclinazione media dell'eclittica = 23° 27' 8,26"

distanza media terra-luna = 384'400 Km

distanza media terra-sole = 149'598'000 Km

massa della terra = $5,98 \cdot 10^{27}$ gr

massa del sole = $1,989 \cdot 10^{33}$ gr

massa elettrone (in quiete) = $9,1083 \cdot 10^{-28}$ gr

massa protone = $1,67239 \cdot 10^{-24}$ gr

raggio atomo idrogeno (non ecc.) = 0,528 Å

costante di Rydberg = 109737,42 cm^{-1}

costante calore solare in arrivo sulla terra = = 1,90 piccole calorie per cm^2 e per minuto primo.

CALENDARIO PERPETUO

Ne esistono diversi, ma il più semplice è il seguente elaborato da Edoardo Lucas

DATA					D	GIORNO
1	8	15	22	29	1	domenica
2	9	16	23	30	2	lunedì
3	10	17	24	31	3	martedì
4	11	18	25		4	mercoldì
5	12	19	26		5	giovedì
6	13	20	27		6	venerdì
7	14	21	28		0	sabato

MESE	M	MESE	M
marzo	3	settembre	5
aprile	6	ottobre	0
maggio	1	novembre	3
giugno	4	dicembre	5
luglio	6	gennaio	1
agosto	2	febbraio	4

SECOLO					S
15	19	23	27	31	1
16	20	24	28	32	0
17	21	25	29	33	5
18	22	26	30	34	3

ANNO				A	ANNO				A
00	28	56	84	0	14	42	70	98	3
01	29	57	85	1	15	43	71	99	4
02	30	58	86	2	16	44	72		6
03	31	59	87	3	17	45	73		0
04	32	60	88	5	18	46	74		1
05	33	61	89	6	19	47	75		2
06	34	62	90	0	20	48	76		4
07	35	63	91	1	21	49	77		5
08	36	64	92	3	22	50	78		6
09	37	65	93	4	23	51	79		0
10	38	66	94	5	24	52	80		2
11	39	67	95	6	25	53	81		3
12	40	68	96	1	26	54	82		4
13	41	69	97	2	27	55	83		5

Per ricavare il giorno della settimana corrispondente ad una data qualsiasi passata o futura, si sommano i 4 numeri D, M, S, A forniti dalle tabelle.

Nella prima tabella si ottiene il giorno cercato, in corrispondenza della somma precedente.

Per esempio si voglia sapere in quale giorno della settimana si ebbe la presa della Bastiglia, avvenuta il 14 luglio del 1789.

data :	14	→	D = 0
mese :	luglio	→	M = 6
secolo :	17	→	S = 5
anno :	89	→	A = 6

somma = 17

Nella prima tabella in corrispondenza di 17 si trova martedì.

Quindi la presa della Bastiglia avvenne di martedì.

Si tenga però presente che per i mesi di <u>gennaio</u> e <u>febbraio</u>, il numero A deve essere diminuito di uno.

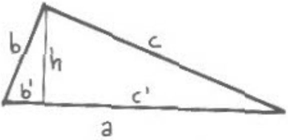
FORMULARIO DI GEOMETRIA ELEMENTARE

GEOMETRIA

TRIANGOLO

Nel triangolo rettangolo è

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$
$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$
$$b^2 = a \cdot b'$$
$$h^2 = b' \cdot c'$$
$$h = \frac{b \cdot c}{a}$$



$$\text{Superf.} = \frac{\text{base} \cdot \text{altezza}}{2}$$

Nel triangolo qualsiasi è

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

dove a, b e c sono i lati e p è il semiperimetro.

$$h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$$

altezza relativa al lato a.

$$m_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$$

mediana relativa al lato a -

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

raggio del cerchio circoscritto al triangolo.

$$r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$$

raggio del cerchio inscritto al triangolo -

$$r_a = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p-a}$$

raggio del cerchio ex-inscritto, relativo al lato a -

CIRCONFERENZA

lunghezza dell'arco (minore) $\widehat{CD}$

$$\widehat{CD} = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180} \qquad \text{essendo } r = OC$$

Superficie del settore circolare OCD

$$S = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360}$$

Perimetro circonferenza

$$2p = 2\pi r$$

(in geometria il perimetro si indica sempre con il simbolo 2p).

Superficie cerchio

$$S = \pi \cdot r^2$$

Lato del triangolo equilatero inscritto in una circonferenza

$$l = r \cdot \sqrt{3}$$

Lato del quadrato inscritto in una circonfe-
renza

$$\ell = r \cdot \sqrt{2}$$

Superficie corona circolare

$$S = \pi \left(R^2 - r^2 \right)$$

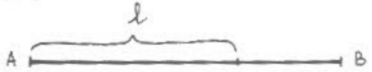
dove R e r sono i raggi delle due circonferenze.

SEZIONE AUREA DI UN SEGMENTO

Dato un segmento $\overline{AB}$, la sua sezione aurea ℓ è

$$\ell = \overline{AB} \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

essa coincide anche con il lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio $\overline{AB}$.



Vale infatti la proporzione

$$\overline{AB} : \ell = \ell : \left(\overline{AB} - \ell \right)$$

TRAPEZIO

$$S = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$$ dove B e b sono le basi.

oppure, se non si conosce l'altezza,

$$S = \frac{B+b}{B-b}\cdot\sqrt{(p-B)(p-b)(p-b-c)(p-b-d)}$$

dove c e d sono i lati obliqui.

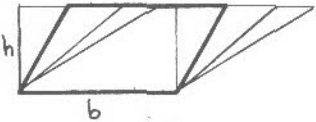
QUADRILATERO

$$S = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{(2d_1d_2)^2-(a^2-b^2+c^2-d^2)^2}$$

dove d_1 e d_2 sono le diagonali ed a, b, c, d sono i lati. Tale formula è valida solo per i quadrilateri convessi.

PARALLELOGRAMMA

$$S = b\cdot h$$ dove b è la base e h l'altezza.

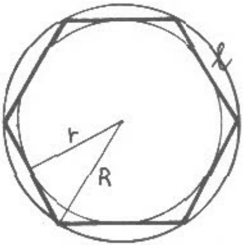


Ne deriva che tutti i parallelogrammi in figura (rettangolo compreso) hanno la stessa area.

Se i quattro lati di un parallelogramma sono uguali si ha il <u>rombo</u>.
Indicando con d_1 e d_2 le diagonali del rombo, la sua area può anche essere calcolata con la formula seguente

$$S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

POLIGONI REGOLARI



l = lato del poligono.

R = raggio cerchio circoscritto.

r = raggio cerchio inscritto o apotema.

S = superficie poligono

triangolo (equilatero)
$$\begin{cases} R = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{3} \\ r = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{6} \\ \ell = R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3} \\ S = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3}{4}R^2\sqrt{3} = 3r^2\sqrt{3} \end{cases}$$

quadrato
$$\begin{cases} R = \dfrac{\ell\sqrt{2}}{2} \\ r = \dfrac{\ell}{2} \\ \ell = R\sqrt{2} = 2r \\ S = \ell^2 = 2R^2 = 4r^2 \end{cases}$$

pentagono
$$\begin{cases} R = \dfrac{\ell}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}} \\ r = \dfrac{\ell}{10}\sqrt{25+10\sqrt{5}} \\ \ell = \dfrac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 2r\sqrt{5-2\sqrt{5}} \\ S = \dfrac{\ell^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}} = \dfrac{5R^2}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 5r^2\sqrt{5-2\sqrt{5}} \end{cases}$$

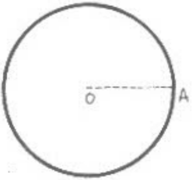
esagono
$$\begin{cases} R = \ell \\ r = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

esagono
$$\begin{cases} \ell = R = \dfrac{2r\sqrt{3}}{3} \\[2ex] S = \dfrac{5\ell^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2} = 2r^2\sqrt{3} \end{cases}$$

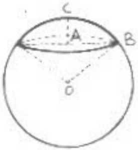
ottagono
$$\begin{cases} R = \dfrac{\ell}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}} \\[2ex] r = \dfrac{\ell}{2}\left(\sqrt{2}+1\right) \\[2ex] \ell = R\sqrt{2-\sqrt{2}} = 2r\left(\sqrt{2}-1\right) \\[2ex] S = 2\ell^2\left(\sqrt{2}+1\right) = 2R^2\sqrt{2} = 8r^2\left(\sqrt{2}-1\right) \end{cases}$$

decagono
$$\begin{cases} R = \dfrac{\ell}{2}\left(\sqrt{5}+1\right) \\[2ex] r = \dfrac{\ell}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \dfrac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \\[2ex] \ell = \dfrac{R}{2}\left(\sqrt{5}-1\right) = 2r\sqrt{1-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}} \\[2ex] S = \dfrac{5\ell^2}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \dfrac{5R^2}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 10r^2\sqrt{1-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}} \end{cases}$$

FORMULE DI GEOMETRIA SOLIDA

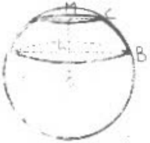


Sfera
$$\begin{cases} S = 4\pi \cdot \overline{OA}^2 \\ V = \frac{4}{3}\pi \cdot \overline{OA}^3 \end{cases}$$



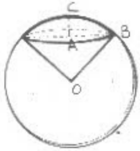
calotta $\quad S = 2\pi \cdot \overline{OB} \cdot \overline{AC}$

segmento sferico ad una base $\quad V = \frac{\pi \cdot \overline{AC}^2}{3}\left(3 \cdot \overline{OB} - \overline{AC}\right)$

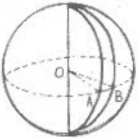


zona sferica $\quad S = 2\pi \cdot \overline{OB} \cdot \overline{LM}$

segmento sferico a due basi $\quad V = \frac{\pi}{2} \cdot \overline{LM}\left(\overline{LB}^2 + \overline{MC}^2 + \frac{\overline{LM}^2}{3}\right)$

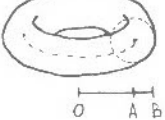


settore
$$\begin{cases} S_t = \pi \cdot \overline{OB}\left(\overline{AB} + 2 \cdot \overline{AC}\right) \\ V = \frac{2}{3}\pi \cdot \overline{OB}^2 \cdot \overline{AC} \end{cases}$$



fuso sferico $\quad S = \widehat{AB} \cdot 2 \cdot \overline{OA}$

spicchio sferico o unghia $\quad V = \widehat{AB} \cdot \frac{2}{3} \cdot \overline{OA}^2$

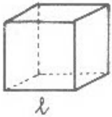


toro

OA = raggio della circonferenza descritta dal centro del cerchio generatore.

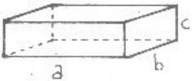
AB = raggio del cerchio generatore.

$$\begin{cases} S = 4\pi^2 \cdot \overline{OA} \cdot \overline{AB} \\ V = 2\pi^2 \cdot \overline{OA} \cdot \overline{AB}^2 \end{cases}$$



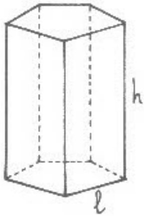
cubo

$$\begin{cases} S_\ell = 4\ell^2 & \text{(sup. laterale)} \\ S_t = 6\ell^2 & \text{(superf. totale)} \\ V = \ell^3 \end{cases}$$



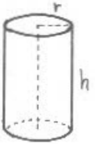
parallelepipedo

$$\begin{cases} S_\ell = 2ac + 2bc \\ S_t = 2ac + 2bc + 2ab \\ V = abc \end{cases}$$



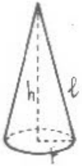
prisma retto
(avente per base un qualsiasi poligono regolare con n lati)

$$\begin{cases} S_\ell = n\ell h \\ S_t = S_\ell + 2S_b \\ V = S_b \cdot h \end{cases}$$



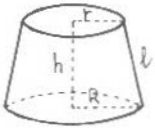
cilindro retto

$$\begin{cases} S_l = 2\pi r h \\ S_t = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r(h+r) \\ V = S_b \cdot h = \pi r^2 h \end{cases}$$



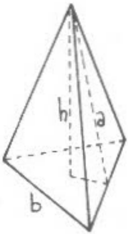
cono retto

$$\begin{cases} S_l = \pi r l \\ S_t = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l+r) \\ V = \dfrac{\pi r^2 h}{3} \end{cases}$$



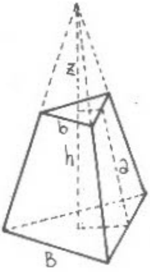
tronco di cono retto

$$\begin{cases} S_l = \pi l (R+r) \\ S_t = \pi\left[R(l+R) + r(l+r)\right] \\ V = \dfrac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right) \end{cases}$$



piramide retta (avente per base un qualsiasi poligono regolare con n lati)

$$\begin{cases} S_l = \dfrac{nab}{2} \\ S_t = \dfrac{nab}{2} + S_b \\ V = \dfrac{S_b \cdot h}{3} \end{cases}$$



tronco di piramide retta

$$\begin{cases} S_l = \dfrac{n\,a\,(b+B)}{2} \\ S_t = S_l + S_B + S_b \\ V = \dfrac{S_B \cdot (h+z)}{3} - \dfrac{S_b \cdot z}{3} \end{cases}$$

h = altezza tronco di piramide

FORMULARIO DI ALGEBRA ELEMENTARE

FORMULARIO DI ALGEBRA

PROPRIETA' DELLE POTENZE

1) $$a^{l} \cdot a^{m} = a^{l+m}$$

2) $$\frac{a^{l}}{a^{m}} = a^{l-m}$$

3) $$\left(a^{l}\right)^{m} = a^{l \cdot m}$$

4) $$\sqrt[l]{a^{m}} = \left(\sqrt[l]{a}\right)^{m} = a^{\frac{m}{l}}$$

5) $$a^{-k} = \left(\frac{1}{a}\right)^{k} = \frac{1}{a^{k}}$$

6) $$a^{0} = 1$$

PRODOTTI NOTEVOLI

1) Quadrato di un binomio

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

si ricordi che è sempre

$$(a-b)^2 = (b-a)^2$$

2) Cubo di un binomio

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$$

si ricordi che è sempre

$$(a-b)^3 = -(b-a)^3$$

3) Quadrato di un trinomio

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a+b+c)^2$$

4) Cubo di un trinomio

$$a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+3ac^2+3b^2c+3bc^2+$$
$$+6abc=(a+b+c)^3$$

5) Differenza fra due quadrati

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

6) Differenza fra due cubi

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

7) Somma fra due cubi

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

PROPRIETA' DEI RADICALI

1) $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$ $\left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \right]$

2) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$

3) $\sqrt[n]{a^m \cdot b} = a^{m/n} \cdot \sqrt[n]{b}$

4) $a^m \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^{m \cdot n} \cdot b}$

5) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

6) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

7) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

RADICALI DOPPI

Vale la formula

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

che, nel caso (fortunato) in cui avvenga che

$$a^2 - b = c^2$$

si riduce nella forma

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}$$

RAZIONALIZZAZIONE DEL DENOMINATORE DI UNA FRAZIONE

Consiste nel trasformare una frazione contenente dei radicali a denominatore, in un'altra equivalente alla precedente ma senza radicali nel denominatore.

Si possono presentare i seguenti casi:

1) Il denominatore della frazione è della forma

$$\sqrt[n]{a}$$

Si moltiplicano numeratore e denominatore della frazione per

$$\sqrt[n]{a^{n-1}}$$

2) Il denominatore è somma o differenza di due termini di cui uno almeno è radicale quadratico.

In tal caso si moltiplicano numeratore e denominatore della frazione rispettivamente per la differenza o la somma degli stessi termini.

Si ottiene così nel denominatore il prodotto notevole 5) (differenza fra due quadrati) e si elimina il radicale o i radicali.

Può accadere di dover applicare successivamente entrambi i punti precedenti:

$$\frac{7}{\sqrt{3+\sqrt{2}}} = \frac{7\sqrt{3+\sqrt{2}}}{3+\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{3+\sqrt{2}}\,(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{7\sqrt{3+\sqrt{2}}\,(3-\sqrt{2})}{9-2} = \sqrt{3+\sqrt{2}}\,(3-\sqrt{2})$$

3) Il denominatore è la somma algebrica di tre o quattro termini di cui alcuni sotto forma di radicali quadratici.

Si deve applicare due volte successivamente il metodo del punto 2). Per esempio

$$\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+1} = \frac{2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})+1} = \frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2-1} =$$

$$= \frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2}-1)}{3-2\sqrt{6}+2-1} = \frac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2}-1)}{4-2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2}-1)(2+\sqrt{6})}{(2-\sqrt{6})(2+\sqrt{6})} = \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2}-1)(2+\sqrt{6})}{4-6} = \ldots\ldots$$

4) Il denominatore è del tipo

$$a\sqrt[3]{b} \pm c\sqrt[3]{d}$$

Si moltiplicano numeratore e denominatore della frazione per l'espressione

$$a^2\sqrt[3]{b^2} \mp ac\sqrt[3]{bd} + c^2\sqrt[3]{d^2}$$

EQUAZIONI DI PRIMO GRADO

Si riduce l'equazione in forma normale:

$$a x = b$$

La soluzione è

$$x = \frac{b}{a}$$

a seconda dei valori assunti dai parametri a e b si possono distinguere quattro casi diversi:

1) $\left.\begin{matrix} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{matrix}\right\}$ la soluzione è un num. razion.

2) $\left.\begin{matrix} a = 0 \\ b \neq 0 \end{matrix}\right\}$ la soluzione è $x = 0$

3) $\left.\begin{matrix} a \neq 0 \\ b = 0 \end{matrix}\right\}$ l'equazione è impossibile

4) $\left.\begin{matrix} a = 0 \\ b = 0 \end{matrix}\right\}$ l'uguaglianza è una identità

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Si riduce l'equazione nella forma normale

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Le soluzioni sono fornite dalla formula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

dove

$$\Delta = b^2 - 4ac = \text{discriminante}$$

Se il parametro b è pari le soluzioni possono anche essere ottenute applicando la formula ridotta

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - ac}}{a}$$

A seconda del valore assunto dal discriminante Δ dell'equazione, si possono distinguere tre casi diversi:

1) $\Delta > 0$ l'equazione ha due soluzioni

reali e distinte.

2) $\Delta = 0$ l'equazione ha due soluzioni reali coincidenti.

3) $\Delta < 0$ l'equazione ha due soluzioni complesse coniugate.

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO INCOMPLETE

Possono essere suddivise in due categorie

1) $$a x^2 + c = 0$$

le cui soluzioni sono $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

2) $$a x^2 + b x = 0$$

le cui soluzioni sono $\begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{b}{a} \end{cases}$

PROGRESSIONI ARITMETICHE

Si chiama progressione aritmetica (e si indica talvolta con il simbolo $\div$) una successione di numeri tale che sia costante la differenza fra un termine generico a_k e il precedente a_{k-1} -

Tale differenza viene detta ragione e si indica con d -

$$\div \quad a_1 \, ; \, a_2 \, ; \, \cdots\cdots \, ; \, a_n$$

Una progressione è limitata o illimitata a seconda che contenga un numero finito o infinito di termini -

Vale la proprietà:
in una progressione aritmetica limitata è costante la somma dei termini equidistanti dagli estremi

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots\cdots$$

In una progressione aritmetica limitata, il primo termine a_1, l'ultimo termine a_n, il numero complessivo n di termini e la ragione d, sono legati fra loro dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} a_n = a_1 + d(n-1) \\ a_1 = a_n - d(n-1) \\ d = \dfrac{a_n - a_1}{n-1} \\ n = \dfrac{a_n - 1}{d} + 1 \end{cases}$$

La somma dei termini di una progressione aritmetica limitata è data dalla formula

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Inserire n medi aritmetici fra due numeri dati (a, b) significa costruire una progressione aritmetica di $n+2$ termini di cui a e b siano i termini estremi.

PROGRESSIONI GEOMETRICHE

Si chiama progressione geometrica (e si indica talvolta con il simbolo $\div\!\!\div$) una successione di numeri tale che sia costante il quoziente fra un termine generico a_k e il precedente a_{k-1}.

Tale quoziente viene detto ragione e si indica con q.

$$\div\!\!\div \quad a_1 ; a_2 ; \cdots\cdots a_n$$

Una progressione è limitata o illimitata a seconda che contenga un numero finito o infinito di termini.

Vale la proprietà:
in una progressione geometrica limitata è costante il prodotto dei termini equidistanti dagli estremi

$$a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = \cdots\cdots$$

In una progressione geometrica limitata, il primo termine a_1, l'ultimo termine a_n, il numero complessivo n di termini e la ragione q, sono legati fra loro dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \\ a_1 = a_n \cdot q^{1-n} \\ q = \sqrt[n-1]{\dfrac{a_n}{a_1}} \\ n = \log_q \dfrac{a_n \cdot q}{a_1} \end{cases}$$

La somma dei termini di una progressione geometrica limitata è data dalla formula

$$S = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Se la progressione è illimitata, per la somma si possono distinguere tre casi diversi:

1) $\boxed{q < 1} \longrightarrow S_\infty = \dfrac{a_1}{1-q}$

Cioè la somma è finita pur essendo infinito il numero dei termini_

2) $\boxed{q = 1}$ $\longrightarrow$ $S_\infty = \infty$

La progressione ha tutti i termini ugua= li fra loro.

3) $\boxed{q > 1}$ $\longrightarrow$ $S_\infty = \infty$

Per le progressioni aritmetiche invece si ha sempre

$$S_\infty = \infty$$

Inserire n medi geometrici fra due numeri dati (a, b) significa costruire una progres= sione geometrica limitata di $n+2$ termini di cui a e b siano i termini estremi.

FORMULARIO DI FINANZIARIA

CAPITALIZZAZIONE SEMPLICE

$$I = i \cdot C \cdot t$$ interesse

$$M = C_t = C \cdot (1 + it)$$ montante

$$C = \frac{M}{1 + it}$$ attualizzazione

$$D_r = \frac{Mit}{1 + it}$$ sconto razionale

$$D_c = Mit$$ sconto commerciale

$$i_h = \frac{i}{h}$$ tasso equivalente

CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$ montante

$$C = \frac{M}{(1+i)^n} = M \cdot v^n$$ attualizzazione

$$M = C \cdot (1+i)^n \cdot \left(1 + i\frac{h}{k}\right)$$ formula approssimata del montante per un num. di anni non intero ma pari a $n + \frac{h}{k}$

$$i = (1+i_k)^k - 1 = \left(1 + \frac{J_k}{k}\right)^k - 1$$ tasso annuo effettivo

$$J_k = k\left[(1+i)^{1/k} - 1\right]$$ tasso convertibile

$$y = y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(y_2 - y_1)$$ interpolaz. diretta

$$x = x_1 + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}(x_2 - x_1)$$ interpolaz. inversa

$$D = M\left[1 - (1+i)^{-n}\right]$$ sconto composto

RENDITE CERTE COSTANTI

$$M = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} = R \cdot s_{\overline{n}|i}$$ Montante di una ren=dita posticipata.

$$M = (1+i) \cdot R \cdot s_{\overline{n}|i}$$ montante di una ren=dita anticipata.

$$A = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = R \cdot a_{\overline{n}|i}$$ valore attuale di una

rendita posticipata.

$A = (1+i) \cdot R \cdot a_{\overline{n}|i}$ Valore attuale di una rendita anticipata.

${}_{m/n}A = R \cdot \left(a_{\overline{m+n}|i} - a_{\overline{m}|i} \right)$ attualizzazione (in capitalizzaz. composta) di una rendita differita.

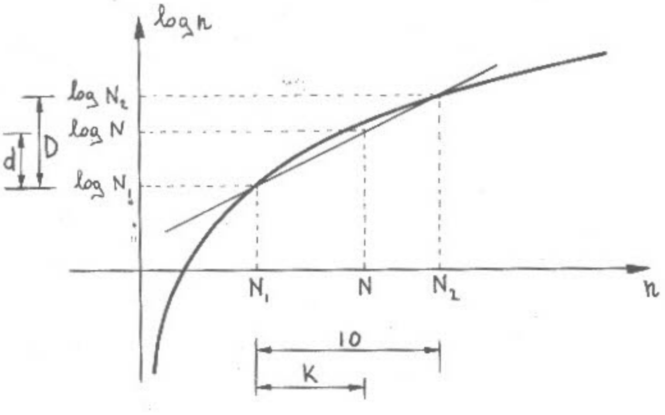
$A = \frac{R}{i}$ Valore attuale di una rendita perpetua posticipata.

$A = R \cdot \left(1 + \frac{1}{i}\right)$ Valore attuale di una rendita perpetua anticipata.

INTERPOLAZIONE

È il criterio secondo il quale conoscendo i logaritmi di due numeri N_1 ed N_2 sufficientemente vicini fra loro, sostituendo l'arco di curva logaritmica con una retta, con una semplice proporzione si rende possibile il calcolo del logaritmo di un numero N compreso fra N_1 e N_2.

Questo criterio viene anche detto metodo di interpolazione lineare e viene adoperato per apprezzare una cifra significativa in più nell'uso delle tavole.



RICERCA DEL LOGARITMO DI UN NUMERO DI 4 CIFRE

Si voglia calcolare il logaritmo del numero N di 4 cifre. N_1 rappresenta il numero di 3 cifre che si ottiene da N sopprimendo l'ultima cifra.

Indichiamo con:

D = la differenza tabulare fra il numero N_1 ed il successivo.
K = la quarta cifra significativa.

Si calcola il termine correttivo con la formula

$$\frac{D \cdot K}{10}$$

tale termine (che spesso è decimale ma la virgola ha un significato convenzionale e serve solo per un corretto incolonnamento) va aggiunto al $\log N_1$ per ottenere il $\log N$.

Per esempio si desideri calcolare il

$$\log 53,26 =$$

essendo

$$\left| \begin{array}{l} N_1 = 53,2 \\ N = 53,26 \\ \log N_1 = 1,72591 \\ D = 82 \\ K = 6 \end{array} \right.$$

il termine correttivo è

$$\frac{D \cdot K}{10} = \frac{82 \cdot 6}{10} = 49,2$$

che aggiunto al $\log N_1$ fornisce

$$\begin{array}{r} 1,72591 \quad + \\ 49,2 \quad = \\ \hline 1,726402 \quad \end{array}$$

quindi è

$$\log 53,26 = 1,726402$$

RICERCA DELL'ANTILOGARITMO DI UN NUMERO QUANDO LA MANTISSA NON COINCIDE CON QUELLE FORNITE DALLE TAVOLE

Questa volta conosciamo $\log N$ e ci proponiamo di calcolare N con il maggior numero possibile di cifre.

Indichiamo con:

D = la differenza tabulare fra le due mantisse immediatamente più grande e più piccola di quella in oggetto.

d = differenza fra la mantissa in oggetto e quella immediatamente più piccola.

N_1 = antilogaritmo (di 3 cifre) corrispondente alla mantissa più piccola.

Il termine correttivo è stavolta

$$\frac{d \cdot 10}{D}$$

che va scritto di seguito ad N_1 per ottenere N.
Anche in questo caso l'eventuale virgola ha

significato convenzionale (l'unità del termine suddetto deve corrispondere alla quarta cifra di N).

Per esempio si desideri calcolare l'antilogaritmo di 1,90652. Dalle tavole si ricava

$$\left|\begin{array}{l} N_1 = 80{,}6 \\ D = 54 \\ d = 18 \end{array}\right.$$

e quindi il termine correttivo è

$$\frac{d \cdot 10}{D} = \frac{18 \cdot 10}{54} = 3{,}\bar{3}$$

possiamo allora concludere che

$$N = 80{,}6|33$$

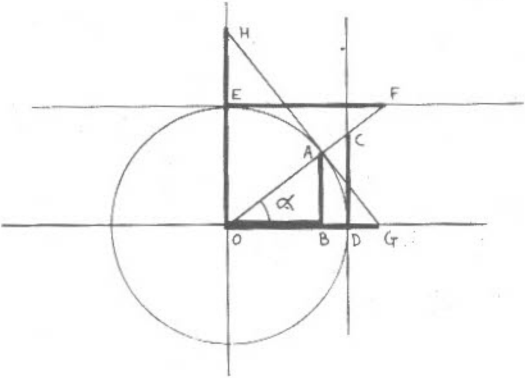
o, anche

$$\text{antilog}\, 1{,}90652 = 80{,}633$$

TRIGONOMETRIA PIANA

DEFINIZIONE

DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE



Chiamando con r il raggio della circonferenza si ha:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{AB}{r} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{EF}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{OB}{r} \qquad \sec\alpha = \frac{OG}{r}$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{CD}{r} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{OH}{r}$$

FUNZ. TRIGON. PER ARCHI NOTEVOLI

GRADI	SENO	COSENO	TANGENTE	COTANGENTE
0	0	1	0	∞
15	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
18	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
30	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
36	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$
45	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
54	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$
60	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
72	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$
75	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
90	1	0	∞	0

FORMULARIO DI TRIGONOMETRIA PIANA

1) PRIMA RELAZIONE FONDAMENTALE.

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

da cui derivano

$$\operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$$

2) SECONDA RELAZIONE FONDAMENTALE.

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

3) TERZA RELAZIONE FONDAMENTALE.

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{1}{\text{ctg}\,\alpha}$$

4) SECANTE E COSECANTE.

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha}$$

5) RELAZIONI FRA ANGOLI COMPLEMENTARI.

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{sen}\,\alpha$$

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{ctg}\,\alpha$$

$$\text{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{tg}\,\alpha$$

6. RELAZIONI FRA ANGOLI CHE DIFFERISCONO DI 90 GRADI.

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\operatorname{sen}\alpha$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha$$

7. RELAZIONI FRA ANGOLI SUPPLEMENTARI.

$$\operatorname{sen}(\pi-\alpha) = \operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(\pi-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

8. RELAZIONI FRA ANGOLI CHE DIFFERISCONO DI 180 GRADI.

$$\text{sen}\,(\pi + \alpha) = -\,\text{sen}\,\alpha$$

$$\cos\,(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\text{tg}\,(\pi + \alpha) = \text{tg}\,\alpha$$

$$\text{ctg}\,(\pi + \alpha) = \text{ctg}\,\alpha\,.$$

9) RELAZIONI FRA ANGOLI ESPLEMENTARI.

$$\text{sen}\,(2\pi - \alpha) = -\,\text{sen}\,\alpha$$

$$\cos\,(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\text{tg}\,(2\pi - \alpha) = -\,\text{tg}\,\alpha$$

$$\text{ctg}\,(2\pi - \alpha) = -\,\text{ctg}\,\alpha$$

10) FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE.

$$\text{sen}\,(\alpha \pm \beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\cos\,(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\text{tang}\,(\alpha \pm \beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha \pm \text{tg}\,\beta}{1 \mp \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta}$$

$$\text{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\text{ctg}\,\alpha \cdot \text{ctg}\,\beta \mp 1}{\text{ctg}\,\beta \pm \text{ctg}\,\alpha}$$

11) FORMULE DI DUPLICAZIONE.

$$\text{sen}\,2\alpha = 2 \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha = $$
$$= 2\cos^2\alpha - 1 =$$
$$= 1 - 2\,\text{sen}^2\alpha$$

$$\text{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha}$$

$$\text{ctg}\,2\alpha = \frac{\text{ctg}^2\alpha - 1}{2\,\text{ctg}\,\alpha}$$

12) FORMULE DI BISEZIONE.

$$\text{sen}\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

(13) FORMULE DELL'ARCO META'.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

(14) FORMULE DI PROSTAFERESI.

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \cos\frac{p+q}{2} \operatorname{sen}\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\frac{p+q}{2} \cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen}\frac{p+q}{2} \operatorname{sen}\frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{tang} p \pm \operatorname{tang} q = \frac{\operatorname{sen}(p \pm q)}{\cos p \cdot \cos q}$$

$$\operatorname{ctg} p \pm \operatorname{ctg} q = \frac{\operatorname{sen}(q \pm p)}{\operatorname{sen} p \cdot \operatorname{sen} q}$$

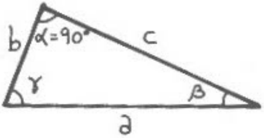
15 FORMULE DI WERNER.

$$\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta = -\frac{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)}{2}$$

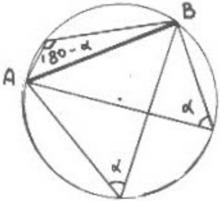
16) SOLUZIONE DEI TRIANGOLI RETTANGOLI.



$$b = a \cdot \text{sen}\beta = a \cdot \cos\gamma = c \cdot \text{tg}\beta = c \cdot \text{ctg}\gamma$$

$$c = a \cdot \text{sen}\gamma = a \cdot \cos\beta = b \cdot \text{tg}\gamma = b \cdot \text{ctg}\beta$$

17) TEOREMA DELLA CORDA.



$$AB = 2r \cdot \text{sen}\,\alpha$$

18) TEOREMA DEI SENI.

$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta} = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma} = 2r$$

Tale teorema è valido per triangoli qualsiasi e r è il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo.

(19) AREA DI UN TRIANGOLO QUALSIASI.

$$S = \frac{bc \operatorname{sen} \alpha}{2} = \frac{ac \operatorname{sen} \beta}{2} = \frac{ab \operatorname{sen} \gamma}{2}$$

(20) AREA DI UN PARALLELOGRAMMA.

$$S = ab \operatorname{sen} \gamma$$

dove a e b sono le lunghezze di due lati consecutivi e γ è l'angolo fra essi compreso.

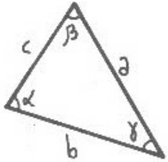
(21) AREA DI UN QUADRILATERO.

$$S = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot \operatorname{sen} \alpha}{2}$$

dove d_1 e d_2 sono le lunghezze delle diagonali ed α uno qualsiasi dei quattro angoli da esse formati.

(22) TEOREMA DELLE PROIEZIONI.

In un triangolo qualsiasi



$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta$$

$$b = a\cos\gamma + c\cos\alpha$$

$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$$

(23) TEOREMA DEL COSENO O DI CARNOT O DI PITAGORA GENERALIZZATO.

In un triangolo qualsiasi

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

con riferimento alla figura precedente.

(24) FORMULE DI BRIGGS.

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \quad ; \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \quad ; \quad \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \quad ; \quad \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

dove a, b e c sono i lati di un triangolo qualsiasi e p è il <u>semiperimetro</u>.

Da queste formule si ricava anche la formula di <u>ERONE</u> che consente di calcolare l'area di un triangolo conoscendo solo le lunghezze dei tre lati:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(25) TEOREMA DELLE TANGENTI O DI NEPERO.

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

(26) AREA DI UN TRIANGOLO QUALSIASI.

$$S = \frac{a^2 \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma}{2 \cdot \operatorname{sen}\alpha} =$$

$$= \frac{b^2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\gamma}{2 \cdot \operatorname{sen}\beta} =$$

$$= \frac{c^2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta}{2 \cdot \operatorname{sen}\gamma}$$

(27) RAGGIO DELLA CIRCONFERENZA CIRCOSCRITTA

AD UN TRIANGOLO.

$$r = \frac{a}{2\,\mathrm{sen}\,\alpha} = \frac{b}{2\,\mathrm{sen}\,\beta} = \frac{c}{2\,\mathrm{sen}\,\gamma}$$

(28) RAGGIO DELLA CIRCONFERENZA INSCRITTA IN UN TRIANGOLO.

$$r = (p-a)\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = (p-b)\,\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2} = (p-c)\,\mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2}$$

dove p è il semiperimetro del triangolo.

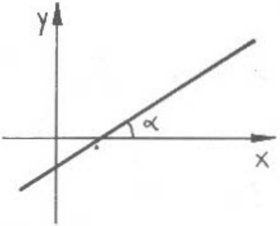
(29) RAGGI DELLE TRE CIRCONFERENZE EX-INSCRITTE AD UN TRIANGOLO.

$$r_a = p \cdot \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$$

$$r_b = p \cdot \mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}$$

$$r_c = p \cdot \mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2}$$

30 SIGNIFICATO TRIGONOMETRICO DEL COEFFICIENTE ANGOLARE DI UNA RETTA.



$$m = \operatorname{tg} \alpha$$

31 ANGOLO FRA DUE RETTE.

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

dove m_1 e m_2 sono i coefficienti angolari delle due rette e γ è l'angolo da esse formato.
Se avviene che:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \gamma > 0 \longrightarrow \text{l'angolo } \gamma \text{ è acuto} \\ \operatorname{tg} \gamma < 0 \longrightarrow \text{l'angolo } \gamma \text{ è ottuso} \end{cases}$$

FORMULARIO DI GEOMETRIA ANALITICA PIANA

FORMULARIO DI GEOMETRIA ANALITICA PIANA

1) DISTANZA FRA DUE PUNTI $A \equiv (x_1; y_1)$ E $B \equiv (x_2; y_2)$.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

2) DETERMINAZIONE DELLE COORDINATE DEL PUN= TO MEDIO M FRA I DUE PRECEDENTI PUNTI A E B.

$$M \equiv \left(\frac{x_1 + x_2}{2} ; \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

3) EQUAZIONI DELLA RETTA GENERICA.

$$ax + by + c = 0 \qquad \text{(forma implicita)}$$

$$y = mx + q \qquad \text{(forma esplicita)}$$

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \qquad \text{(forma segmentaria)}$$

(4) EQUAZIONI DI RETTE PARTICOLARI.

$x = K$	retta parallela all'asse y e a distanza K da esso.
$y = K$	retta parallela all'asse x e a distanza K da esso.
$x = 0$	retta coincidente con l'asse y.
$y = 0$	retta coincidente con l'asse x.
$x = Ky$	retta passante per l'origine
$x = y$	retta bisettrice del 1° e 3° quadrante.
$x = -y$	retta bisettrice del 2° e 4° quadrante.

(5) COEFFICIENTE ANGOLARE DI UNA RETTA.

$$m = -\frac{a}{b}$$

(6) EQUAZIONE DELLA RETTA PASSANTE PER DUE PUNTI AVENTI COORDINATE $A \equiv (x_1; y_1)$ E $B \equiv (x_2; y_2)$.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

(7) EQUAZIONE DEL FASCIO DI RETTE PASSANTI PER UN PUNTO DI COORDINATE $C\equiv(x_0;y_0)$ -

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

(8) CONDIZIONE DI PARALLELISMO FRA DUE RET= TE -

$$m_1=m_2$$

(9) CONDIZIONE DI PERPENDICOLARITÀ FRA DUE RETTE -

$$m_1=-\frac{1}{m_2}$$

(10) DISTANZA DEL PUNTO $C\equiv(x_0;y_0)$ DALLA RETTA DI EQUAZIONE $ax+by+c=0$ -

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(11) DISTANZA DEL PUNTO $C \equiv (x_0; y_0)$ DALLA RETTA DI EQUAZIONE $y = mx + q$ -

$$d = \frac{|y_0 - mx_0 - q|}{\sqrt{1+m^2}}$$

(12) EQUAZIONE DI UNA CONICA GENERICA.

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Si chiama discriminante della conica l'espressione

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Circa il carattere della conica, si ha

$\Delta > 0 \longrightarrow$ la conica è una iperbole

$\Delta = 0 \longrightarrow$ la conica è una parabola

$\Delta < 0 \ (a \neq c) \longrightarrow$ la conica è un'ellisse

$\Delta < 0 \ (a = c) \longrightarrow$ la conica è una cir= conferenza.

(13) EQUAZIONI GENERICHE DI UNA CIRCONFEREN= ZA CON CENTRO NEL PUNTO $C \equiv (\alpha ; \beta)$ E RAGGIO r.

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

o anche, ponendo

$$\begin{cases} -2\alpha = a \\ -2\beta = b \\ \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = c \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

(14) CIRCONFERENZE PARTICOLARI.

$x^2 + y^2 + by + c = 0$ il centro della cir= conferenza giace sul= l'asse y.

$x^2 + y^2 + ax + c = 0$ il centro giace sull'as=

	se x.
$x^2+y^2+c=0$	il centro giace sull'origine.
$x^2+y^2+ax+by=0$	la circonferenza passa per l'origine.
$x^2+y^2+by=0$	il centro è sull'asse y e la circonferenza passa per l'origine.
$x^2+y^2+ax=0$	il centro è sull'asse x e la circonferenza passa per l'origine.

(15) EQUAZIONI GENERICHE DI UNA PARABOLA.

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$x = ay^2 + by + c$$

La prima equazione corrisponde ad una parabola con asse parallelo all'asse y e la seconda equazione corrisponde ad una parabola con asse parallelo all'asse x.

16 COORDINATE DEL FUOCO DI UNA PARABOLA.

$$F \equiv \left(-\frac{b}{2a} \, ; \, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$$ per parabole con asse parallelo all'asse y.

$$F \equiv \left(\frac{1-\Delta}{4a} \, ; \, -\frac{b}{2a}\right)$$ per parabole con asse parallelo all'asse x.

essendo $\Delta = b^2 - 4ac$

17 COORDINATE DEL VERTICE DI UNA PARABOLA.

$$V \equiv \left(-\frac{b}{2a} \, ; \, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$ per parabole con asse parallelo all'asse y.

$$V \equiv \left(-\frac{\Delta}{4a} \, ; \, -\frac{b}{2a}\right)$$ per parabole con asse parallelo all'asse x.

18 EQUAZIONE DELLA RETTA DIRETTRICE DI UNA PARABOLA.

$$y = -\frac{1+\Delta}{4a}$$ per parabole con asse

parallelo all'asse y o al=
l'asse x -

(19) EQUAZIONI DI PARABOLE PARTICOLARI -

$y = ax^2 + bx$
$x = ay^2 + by$

le parabole passano per l'origine -

$y = ax^2 + c$
$x = ay^2 + c$

l'asse delle parabole coincide con uno degli assi coordinati -

$y = ax^2$
$x = ay^2$

come il caso precedente ed inoltre le parabole passano per l'origine -

In ogni caso (anche per l'equazione completa della parabola) il parametro a caratte=rizza la maggiore o minore curvatura della stessa -
Piu' precisamente aumentando il valore del parametro a la parabola si assottiglia.
Infine se $a > 0$ la parabola volge la concavità nel verso crescente dell'asse coordinato

y o x, mentre accade il contrario se $a<0$.

(20) EQUAZIONE GENERICA DI UN'ELLISSE CON ASSI PARALLELI AGLI ASSI CARTESIANI.

$$ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

con i parametri a e c concordi.

(21) EQUAZIONE GENERICA DI UN'ELLISSE CON ASSI COINCIDENTI CON GLI ASSI COORDINATI.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dove a e b rappresentano le lunghezze dei due semiassi dell'ellisse giacenti rispettivamente sull'asse x e sull'asse y.
La semidistanza focale c è ottenibile dalla formula

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Viene definita "eccentricità" dell'ellisse il rapporto

$$e = \frac{c}{a}$$

il cui valore varia fra 0 e 1.
Per valori sempre più alti dell'eccentricità l'ellisse diviene sempre più schiacciata.

(22) EQUAZIONE GENERICA DI UNA IPERBOLE CON ASSE FOCALE PARALLELO AD UNO DEGLI ASSI CARTESIANI.

$$a x^2 + c y^2 + d x + e y + f = 0$$

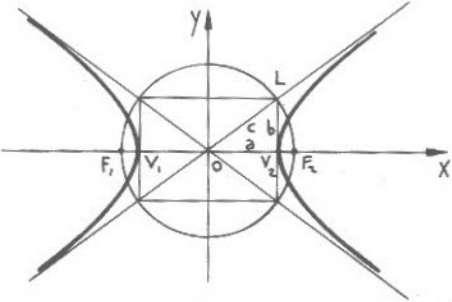
con i parametri a e C discordi.

(23) COORDINATE DEL CENTRO DI UNA GENERICA ELLISSE O IPERBOLE CON ASSI PARALLELI AGLI ASSI COORDINATI.

$$\alpha = -\frac{d}{2a} \qquad \beta = -\frac{e}{2c}$$

(24) EQUAZIONE GENERICA DI UNA IPERBOLE CON ASSE FOCALE COINCIDENTE CON L'ASSE X E CENTRO NELL'ORIGINE.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



in cui

$$OV_2 = a$$

$$OF_2 = OL = c$$

$$V_2L = b$$

e vale la relazione

$$a^2 + b^2 = c^2$$

(25) EQUAZIONE GENERICA DI UNA IPERBOLE CON ASSE FOCALE COINCIDENTE CON L'ASSE Y E CENTRO NELL'ORIGINE.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

(26) EQUAZIONI DEGLI ASINTOTI DI UN'IPERBOLE CON CARATTERISTICHE CORRISPONDENTI AI DUE TIPI PRECEDENTI.

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

(27) EQUAZIONE GENERICA DELL'IPERBOLE EQUILATERA CON CENTRO NELL'ORIGINE ED ASINTOTI COINCIDENTI CON LE BISETTRICI DEGLI ASSI COORDINATI.

$$x^2 - y^2 = \pm a^2$$

in tale iperbole equilatera è $a = b$.

28 EQUAZIONE DELL'IPERBOLE EQUILATERA CON CENTRO NELL'ORIGINE E ASINTOTI COINCIDENTI CON GLI ASSI COORDINATI.

$$xy = \pm K$$

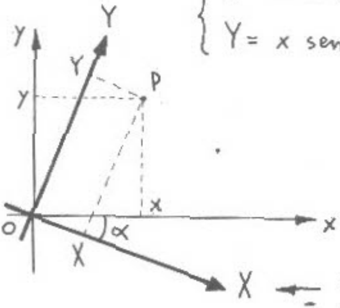
29 FORMULE PER LA TRASLAZIONE DEGLI ASSI COORDINATI.

$$\begin{cases} X = x + l \\ Y = y + m \end{cases}$$

dove x e y rappresentano le coordinate di un generico punto nel vecchio sistema di riferimento, X e Y sono invece le coordinate dello stesso punto nel nuovo sistema di riferimento, ed infine l e m sono le coordinate dell'origine del vecchio sistema di riferimento.

(30) FORMULE PER LA ROTAZIONE DEGLI ASSI COORDINATI.

$$\begin{cases} X = x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ Y = x\,\mathrm{sen}\,\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$



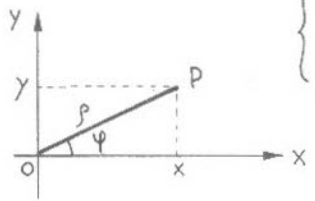
← vecchio sistema di riferimento.

← nuovo sistema di riferimento.

(31) FORMULE PER LA ROTOTRASLAZIONE DEGLI ASSI COORDINATI.

$$\begin{cases} X = \ell + x\cos\alpha - y\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ Y = m + x\,\mathrm{sen}\,\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

(32) FORMULE DI TRASFORMAZIONE DA UN SISTEMA CARTESIANO AD UNO POLARE.



$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \end{cases}$$

dove l'angolo φ viene detto "anomalia" e il segmento OP viene detto "modulo".

(33) FORMULE DI TRASFORMAZIONE DA UN SISTEMA POLARE AD UNO CARTESIANO.

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \operatorname{sen} \varphi \end{cases}$$

FORMULARIO DI ANALISI

TABELLA DELLE DERIVATE

FUNZIONE	DERIVATA
$y = x^n$	$y' = n x^{n-1}$
$y = K x^n$	$y' = K n x^{n-1} \quad (K = \text{cost.})$
$y = K$	$y' = 0$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\operatorname{sen} x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$

FUNZIONE	DERIVATA
$y = \operatorname{arcsen} x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
$y = \operatorname{arccotg} x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$
$y = f(x) + g(x)$	$y' = f'(x) + g'(x)$
$y = f(x) \cdot g(x)$	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
$y = \left[f(x)\right]^{\alpha}$	$y' = \alpha \cdot \left[f(x)\right]^{\alpha-1} \cdot f'(x)$
$y = \frac{1}{f(x)}$	$y' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$
$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y = \sqrt[n]{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{n \sqrt[n]{[f(x)]^{n-1}}}$

FUNZIONE	DERIVATA
$y = \log f(x)$	$y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$y = \operatorname{sen} f(x)$	$y' = \cos f(x) \cdot f'(x)$
$y = \cos f(x)$	$y' = -\operatorname{sen} f(x) \cdot f'(x)$
$y = \operatorname{tg} f(x)$	$y' = \dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$
$y = \operatorname{ctg} f(x)$	$y' = -\dfrac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)}$
$y = \operatorname{arcsen} f(x)$	$y' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
$y = \operatorname{arctg} f(x)$	$y' = \dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$
$y = \arccos f(x)$	$y' = -\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$
$y = \operatorname{arccotg} f(x)$	$y' = -\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$

ELENCO INTEGRALI

$$\int dx = x + c$$

$$\int K\,dx = K\int dx = Kx + c$$

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

$$\int K x^{\alpha}\,dx = K\int x^{\alpha}\,dx = K\,\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + c$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx = \ldots\ldots$$

$$\int e^{x}\,dx = e^{x} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + c$$

$$\int f^{n}(x)\cdot f'(x)\,dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c$$

$$\int e^{f(x)}\cdot f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int \frac{dx}{x^{2}-1} = \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1} + c$$

$$\int \frac{dx}{1-x^{2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + c$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + c$$

$$\int \sqrt[p]{x^q}\, dx = \int x^{q/p} dx = \frac{x^{q/p+1}}{q/p+1} + c$$

$$\int e^{nx}\, dx = \frac{e^{nx}}{n} + c$$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + c$$

$$\int (a+bx)^n dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b\,(n+1)} + c$$

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \ln (a+bx) + c$$

$$\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b\,(a+bx)} + c$$

$$\int \frac{dx}{a-bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \frac{\ln \sqrt{ab}+bx}{\sqrt{ab}-bx} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln x + \sqrt{a^2+x^2} + c$$

$$\int \sqrt{a+bx} \cdot dx = \frac{2}{3b} \left(\sqrt{a+bx}\right)^3 + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b} \sqrt{a+bx} + c$$

$$\int \sqrt{a^2+x^2} \cdot dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + c$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\cdot dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+c$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + c$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\log\cos x + c$$

$$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \log\operatorname{sen} x + c$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen} x + c$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \log\operatorname{tg}\frac{x}{2} + c$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2}\log\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} + c$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \operatorname{sen} x\cdot\cos x\right) + c$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x \cdot \cos x) + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\, x\right) + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc sen} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{1 + \cos x} = \ln \frac{x}{2} + c$$

$$\int \frac{dx}{1 - \cos x} = -\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + c$$

$$\int \operatorname{arcsen} x \, dx = x \cdot \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1 - x^2} + c$$

$$\int \arccos x \, dx = x \cdot \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + c$$

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = x \cdot \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + c$$

$$\int \operatorname{arcotg} x \, dx = x \cdot \operatorname{arcotg} x + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + c$$

$$\int \operatorname{senh} x \cdot dx = \cosh x + c$$

$$\int \cosh x \cdot dx = \operatorname{senh} x + c$$

$$\int e^x \cdot x \cdot dx = x \cdot e^x - e^x + c$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{0}^{\infty} x^n e^{-x}\,dx = n!$$

$$\int_{0}^{\infty} x^3 e^{-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$

$$\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}x\right]_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

$$\int_{0}^{\infty} x e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-y}\,dy = -\frac{1}{2}\left[e^{-y}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\alpha^{-3/2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} e^{\beta x}\,dx = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} e^{\beta^2/4\alpha}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (a^2+x^2)^{-1} e^{-ipx}\,dx = \frac{\pi}{a}\cdot e^{-a\cdot|p|} \qquad (\text{con } a>0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{2n}\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$$

si rammenta che

$$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots\cdots 1$$

$$(2n)!! = (2n)(2n-2)(2n-4)\cdots 1$$

$$(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots\cdots 1$$

$$0!! = 1$$

$$1!! = (-1)!!$$

$$\int_0^\infty x^a e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1+a}{2}\right)$$

essendo Γ una funzione tale che

$$\begin{cases} \Gamma(n) = (n-1)! \\ \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = 2^{-n}\cdot\sqrt{\pi}\cdot(2n-1)!! \end{cases}$$

$$\int_0^\alpha e^{-x}x^n\,dx = \begin{cases} 1-e^{-\alpha}(\alpha-1) & \text{se } n=1 \\ 2-e^{-\alpha}(\alpha^2+2\alpha+2) & \text{se } n=2 \end{cases}$$

$$\int_0^\alpha x^m e^{-x}\,dx = -\alpha^m\cdot e^{-\alpha} + m\int_0^\alpha x^{m-1}e^{-x}\,dx$$

$$\int_0^\alpha e^{-x}\,dx = 1-e^{-\alpha}$$

$$\left.\begin{array}{l} \int_0^\pi \operatorname{sen} mx\cdot \operatorname{sen} nx\,dx = \\ \int_0^\pi \cos mx\cdot\cos nx\,dx = \end{array}\right\} = \delta_{m,n}\cdot\frac{\pi}{2}$$

dove $\delta_{m,n}$ rappresenta il simbolo di Kroneker

che è $=1$ se $m=n$ ed è invece $=0$ se $m\neq n$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} mx \cdot \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } (m+n) \text{ è pari} \\ \dfrac{2m}{m^2-n^2} & \text{se } (m+n) \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 mx \, dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 mx \, dx = \frac{\pi}{4} \qquad \text{con } m = 1, 2, \ldots\ldots$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 mx \, dx = \frac{\pi}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \cdot \operatorname{sen} nx \, dx = \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = \end{array}\right\} = \delta_{m,n} \cdot \pi$$

$$\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^{2n} \, dx = \frac{\pi}{2} \, \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

$$\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^{2n+1} \, dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{ix} \operatorname{sen} 3x \, dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-ix} \operatorname{sen} 3x \, dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} e^{ix} \, dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-ix}\,dx = 0$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

$$\frac{dx}{dt} + Kx = 0 \longrightarrow x(t) = A e^{-Kt}$$

$$\frac{dx}{dt} + Kx = B \longrightarrow x(t) = \frac{B}{K} + A e^{-Kt}$$

$$\frac{dx}{dt} + Kx = B \cdot f(t) \longrightarrow x(t) = A e^{-Kt} + B e^{-Kt} \cdot \int e^{Kt} \cdot f(t)\,dt$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + K^2 x = 0 \longrightarrow x(t) = A \operatorname{sen}(Kt + \alpha)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - K^2 x = 0 \longrightarrow x(t) = A \operatorname{senh}(Kt + \alpha)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2p\frac{dx}{dt} + q^2 x = 0 \quad \begin{cases} \begin{cases} x(t) = A e^{-pt} \operatorname{sen}(\omega t - \alpha) \\ \text{se } p < q \text{ ed essendo } \omega = \sqrt{q^2 - p^2} \end{cases} \\ \begin{cases} x(t) = A e^{-pt} \operatorname{senh}(\omega t + \alpha) \\ \text{se } p > q \text{ ed essendo } \omega = \sqrt{p^2 - q^2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2p\frac{dx}{dt} + q^2 = \lambda \cos \varphi t \longrightarrow$$

$$\longrightarrow x(t) = Ae^{-pt}\,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha) + x_0 \cos(\varphi t + \beta)$$

essendo
$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{\lambda}{\sqrt{(q^2-\varphi^2)^2 + 4p^2\varphi^2}} \\[2ex] \beta = \dfrac{2p\varphi}{\varphi^2 - q^2} \end{cases}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2p\frac{dx}{dt} + q^2x = \lambda e^{i\varphi t} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow x(t) = Ae^{-pt}\,\mathrm{sen}(\omega t - \alpha) + x_0 e^{i\varphi t}$$

essendo $\quad x_0 = \dfrac{\lambda}{(q^2-\varphi^2) + 2ip\varphi}$

ELEMENTI DI CALCOLO VETTORIALE

Dato un generico vettore $\vec{a}$ indichiamo con

$|a|$ il suo modulo

$\vec{a}_x$ il componente (vettoriale) rispetto all'asse x.

a_x la componente (scalare) lungo l'asse x.

indichiamo inoltre con $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ i tre versori (vettori unitari) diretti come gli assi coordinati.

MODULO DI UN VETTORE

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

PRODOTTO DI UN VETTORE PER UN NUMERO m

È un nuovo vettore avente stessa direzione del precedente, modulo m volte più grande e verso concorde o discorde a seconda che m sia positivo o negativo.

$$m \cdot \vec{a} \equiv (m a_x ; m a_y ; m a_z)$$

PRODOTTO SCALARE FRA DUE VETTORI

È una grandezza scalare corrispondente alla superficie del parallelogramma ottenibile dai due vettori

$$\vec{a} \times \vec{b} = |a| \cdot |b| \cdot \cos \theta$$

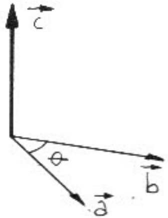
essendo θ l'angolo formato dai due vettori.
È anche

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

PRODOTTO VETTORIALE FRA DUE VETTORI

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c}$$

È un nuovo vettore $\vec{c}$ orientato perpendicolarmente al piano su cui giacciono $\vec{a}$ e $\vec{b}$, con verso tale che $\vec{c}$ personificato veda il primo fattore $\vec{a}$ alla destra



di $\vec{b}$, e con modulo

$$|c| = |a| \cdot |b| \cdot \operatorname{sen} \theta$$

Le tre componenti di $\vec{c}$ rispetto agli assi, sono anche ottenibili dai complementi algebrici rispetto alla prima riga della matrice quadrata

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{cases} c_x = a_y b_z - a_z b_y \\ c_y = a_z b_x - a_x b_z \\ c_z = a_x b_y - a_y b_x \end{cases}$$

GRADIENTE

E' un operatore che trasforma una funzione scalare $f(x, y, z)$ in un vettore $\vec{v}$ le cui componenti v_x, v_y, v_z coincidono con le derivate parziali della funzione $f(x, y, z)$.

$$\operatorname{grad} f = \vec{v}$$

in cui

$$v_x = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad v_y = \frac{\partial f}{\partial y} \qquad v_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

DIVERGENZA

E' un operatore che trasforma un vettore $\vec{v}$ in una funzione scalare ottenibile con la formula

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

che è la somma delle derivate parziali delle componenti del vettore.

ROTORE

E' un operatore che trasforma un vettore $\vec{v}$ in un altro vettore le cui componenti rispetto agli assi corrispondono ai complementi algebrici rispetto alla prima riga della matrice quadrata

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

e cioè

$$\operatorname{rot} \vec{v} \equiv \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} ; \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} ; \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

Operatore NABLA ($\vec{\nabla}$).

Può essere considerato un operatore-vettore di componenti

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} ; \frac{\partial}{\partial y} ; \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

che, applicato al gradiente, alla divergenza e al rotore, modifica il loro aspetto formale in modo che

$$\text{grad } f = \vec{\nabla} \cdot f$$

$$\text{div } \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$$

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$$