



IL CALCOLO DELLE PROBABILITA'

«Nella misura in cui le leggi della matematica si riferiscono alla realtà, esse non sono certe; e nella misura in cui sono certe, esse non si riferiscono alla realtà.»

ALBERT EINSTEIN-1922

Prof.ssa Laura Todisco
Liceo Ginnasio Statale «Aristosseno» -
TARANTO

INTRODUZIONE

- Già 3000 anni fa gli Egizi praticavano un antenato del gioco dei dadi, che si svolgeva lanciando una pietra. Il gioco dei dadi era diffuso anche nell'antica Roma, tanto che sono stati ritrovati alcuni studi su tale gioco risalenti all'età di Cicerone.

INTRODUZIONE

- Ma la nascita dello studio sistematico del **calcolo delle probabilità** si fa risalire al 1654, quando il matematico e filosofo *Blaise Pascal*, per soddisfare una richiesta del cavaliere *De Meré*, accanito giocatore di dadi, cominciò a dedicarsi allo studio dei meccanismi che regolano i giochi d'azzardo, intrattenendo a tale scopo anche un'interessante corrispondenza con il matematico *Pierre de Fermat*.

EVENTI E PROBABILITA'

- Definiamo **evento** una qualsiasi affermazione a cui, a seguito di un esperimento o di un'osservazione, si possa assegnare univocamente un grado di *verità* ben definito.
- Esempio: nel lancio di un dado, consideriamo l'evento:
 $E = \text{"esce un numero pari"}$.

EVENTI E PROBABILITA'

Un evento può essere:

- **Certo**: se accade con certezza (ad esempio, nel lancio di un dado, è un evento certo E ="esce un numero minore di 7");
- **Impossibile**: se non può mai accadere (nell'esempio precedente, è impossibile l'evento E ="esce un numero maggiore di 6")
- **Casuale (o aleatorio)**: se può accadere oppure no (nell'esempio precedente, è casuale l'evento E ="esce un numero minore di 3").

LA PROBABILITA' CLASSICA

- La probabilità $p(E)$ di un evento casuale E è il rapporto tra il numero f dei casi favorevoli e il numero u dei casi possibili, considerati tutti *equiprobabili*:

$$p(E) = \frac{f}{u}$$

ESEMPIO

- Estrai una carta da un mazzo di 40 e considera l'evento:

$E = \text{"si estrae una figura"}$.

I casi possibili sono $u=40$, quelli favorevoli sono $f=12$; la probabilità che si verifichi l'evento E è dunque:

$$p(E) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$$

OSSERVAZIONI

- La probabilità di un **evento impossibile** è 0;
- La probabilità di un **evento certo** è 1;
- La probabilità di un **evento casuale** (o aleatorio) è compresa tra 0 e 1:

$$0 \leq p(E) \leq 1$$

ESEMPIO

- Consideriamo 3 lanci successivi di una moneta. Qual è la probabilità di ottenere 2 volte testa (T) e 1 volta croce (C)?

I casi possibili sono:

TTT – TTC – TCT – TCC – CTT – CTC – CCT
– CCC

cioè 8; di questi, soltanto 3 sono favorevoli;
quindi la probabilità richiesta è:

$$p = \frac{3}{8}$$

LA PROBABILITA' DELL'EVENTO CONTRARIO

■ Evento contrario:

Dato un evento casuale E , si definisce evento contrario di E , e si indica con \bar{E} , l'evento che si verifica quando non si verifica E .

Ad esempio, nel lancio di un dado, consideriamo l'evento:

E ="esce un numero multiplo di 3";

l'evento contrario sarà:

\bar{E} ="non esce un numero multiplo di 3", cioè la sua negazione.

LA PROBABILITA' DELL'EVENTO CONTRARIO

- Per l'evento E , i casi favorevoli sono 2, cioè se escono o il 3 o il 6;
- Per l'evento \bar{E} , i casi favorevoli sono 4, cioè tutti i rimanenti (1, 2, 4, 5).
- Quindi le probabilità sono:

$$p(E) = \frac{2}{6}$$

$$p(\bar{E}) = \frac{4}{6}$$

LA PROBABILITA' DELL'EVENTO CONTRARIO

- Si osserva facilmente che:

$$p(E) + p(\bar{E}) = 1$$

che equivale a:

$$p(\bar{E}) = 1 - p(E)$$

LA PROBABILITA' DELL'EVENTO CONTRARIO

■ Esempio:

Lanciando 3 volte una moneta, qual è la probabilità di ottenere almeno una testa (T)?

E = "ottenere almeno una testa"

L'evento contrario sarà:

\bar{E} = "ottenere 3 croci".

Seguendo quest'ultima strada, è sufficiente calcolare la probabilità dell'evento \bar{E} , che è $1/8$ e ottenere immediatamente:

$$p(E) = 1 - p(\bar{E}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

LA CONCEZIONE FREQUENTISTICA DELLA PROBABILITA'

- La definizione **classica** della probabilità non è però applicabile a tutte le situazioni; inoltre la stessa definizione è oggetto di critiche che partono dalla considerazione che: “*affermare che tutti i casi sono equiprobabili significa fare a priori una supposizione sulla loro probabilità di verificarsi, utilizzando così nella definizione lo stesso concetto che si vuol definire*”!

LA FREQUENZA RELATIVA

- La frequenza relativa $f(E)$ di un evento sottoposto a n esperimenti, effettuati tutti nelle stesse condizioni, è il rapporto tra il numero v delle volte in cui si è verificato l'evento e il numero n delle prove effettuate:

$$f(E) = \frac{v}{n}$$

ESEMPIO

- Se consideriamo il lancio di una moneta e l'evento:
E="esce testa",
la probabilità classica ci dà il valore: $p(E) = \frac{1}{2}$

Se eseguiamo un *numero elevato* di lanci, possiamo notare che il numero di volte che esce testa è quasi uguale al numero di volte in cui si presenta croce. Cioè la *frequenza relativa* dell'evento E si avvicina al valore teorico:

$$p(E) = \frac{1}{2}$$

LEGGE EMPIRICA DEL CASO

- Dato un evento casuale E , sottoposto a n prove eseguite tutte nelle stesse condizioni, il valore della frequenza relativa $f(E) = \frac{v}{n}$ tende al valore della probabilità $p(E)$ all'aumentare del numero delle prove effettuate.

DEFINIZIONE STATISTICA DI PROBABILITA'

- DEF: *La probabilità di un evento ripetibile coincide con la frequenza relativa del suo verificarsi quando il numero delle prove effettuate è sufficientemente elevato.*

OSSERVAZIONE

- Notiamo che nella definizione “classica” la probabilità è valutata *a priori*, mentre la “frequenza” è un valore valutato *a posteriori*.
- Si utilizza il secondo approccio ad esempio nel campo delle assicurazioni, per valutare la durata media della vita di un individuo, la probabilità dei furti, di incidenti; o ancora nel campo della medicina, per valutare la probabilità di contrarre una certa malattia, oppure la probabilità che un farmaco sia efficace. In tutti questi eventi il calcolo si basa su quanto è avvenuto in passato, valutando la probabilità attraverso il calcolo delle frequenze relative.

L'IMPOSTAZIONE ASSIOMATICA DELLA PROBABILITÀ

- L'impostazione assiomatica della probabilità venne proposta da **Kolmogorov** nel 1933 in "*Concetti fondamentali del calcolo delle probabilità*", sviluppando la ricerca che era ormai cristallizzata sul dibattito fra quanti consideravano la probabilità come limiti di frequenze relative e quanti cercavano un fondamento logico della stessa.
- Va notato che la definizione assiomatica non è una *definizione operativa* e non fornisce indicazioni su *come* calcolare la probabilità. È quindi una definizione utilizzabile sia nell'ambito di un approccio oggettivista che nell'ambito di un approccio soggettivista.
- Il nome deriva dal procedimento per "assiomatizzazione" quindi nell'individuare i concetti primitivi, da questi nell'individuare i postulati (o assiomi) da cui poi si passava a definire i teoremi.

DEFINIZIONI

- SPAZIO DEGLI EVENTI:

Per ogni esperimento si può costruire un insieme U detto **universo** o **spazio degli eventi**, formato da tutti i possibili esiti. Un **evento casuale** (o **aleatorio**) E si identifica con un sottoinsieme di U .

Esempio:

Nel lancio di un dado, consideriamo l'evento E ="esce un numero maggiore di 4"; in questo caso avremo che:

$$U = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$E = \{5,6\}$$

DEFINIZIONI

- EVENTO COMPLEMENTARE (O CONTRARIO):

Dato un evento E , sottoinsieme di U , si dice evento contrario l'insieme complementare di E rispetto ad U e si indica con \bar{E} .

Esempio:

Nell'esempio precedente si avrà dunque:

$$U = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$E = \{5,6\}$$

$$\bar{E} = \{1,2,3,4\}$$

DEFINIZIONI

- SOMMA LOGICA (O EVENTO UNIONE):

Dati due eventi elementari E_1 ed E_2 , entrambi sottoinsiemi di U , si dice somma logica l'insieme unione $E_1 \cup E_2$.

Esempio:

Nel lancio di un dado, si considerino gli eventi elementari E_1 = "esce un numero pari" = $\{2, 4, 6\}$

ed E_2 = "esce un multiplo di 3" = $\{3, 6\}$

La somma logica sarà l'evento:

$E_1 \cup E_2$ = "esce un numero pari o un multiplo di 3" = $\{2, 3, 4, 6\}$.

Riconosciamo la somma logica quando nella descrizione dell'evento compare il connettivo "o".

DEFINIZIONI

- **PRODOTTO LOGICO (O EVENTO INTERSEZIONE):**

Dati due eventi elementari E_1 ed E_2 , entrambi sottoinsiemi di U , si dice prodotto logico l'insieme intersezione $E_1 \cap E_2$.

Esempio:

Nel lancio di un dado, si considerino gli eventi elementari E_1 ="esce un numero pari" = $\{2,4,6\}$

ed E_2 ="esce un multiplo di 3" = $\{3,6\}$

Il prodotto logico sarà l'evento:

$E_1 \cap E_2$ ="esce un numero pari **e** multiplo di 3" = $\{6\}$.

Riconosciamo la somma logica quando nella descrizione dell'evento compare il connettivo "e".

DEFINIZIONI

- EVENTI INCOMPATIBILI E EVENTI COMPATIBILI:

Due eventi E_1 ed E_2 si dicono **incompatibili** se non possono verificarsi contemporaneamente, cioè se $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Viceversa, se $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ allora sono **compatibili**.

Esempio:

Nell'estrazione di una carta da un mazzo di 40, sono **incompatibili** gli eventi:

E_1 = "esce una figura"

E_2 = "esce un 7"

DEFINIZIONE DI PROBABILITA'

- Definiamo probabilità $p(E)$ di un evento E una **funzione** che ad ogni evento dell'universo U associa un numero¹ in modo che siano verificati i seguenti 3 **assiomi**:
 1. Per ogni evento si ha $p(E) \geq 0$
 2. L'universo U rappresenta l'evento certo: $p(U) = 1$
 3. Dati n eventi E_1, E_2, \dots, E_n a due a due incompatibili, si ha: $p(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = p(E_1) + p(E_2) + \dots + p(E_n)$.

Nota 1: Tale numero, come conseguenza degli assiomi 1 e 2, sarà necessariamente compreso tra 0 e 1.

TEOREMI SULLA PROBABILITA'

- TEOREMA DELL'EVENTO COMPLEMENTARE:

Dato un evento E , la probabilità dell'evento complementare è: $p(\bar{E}) = 1 - p(E)$

- PROBABILITA' DELL'EVENTO IMPOSSIBILE:

L'evento impossibile ha probabilità 0.

TEOREMI SULLA PROBABILITA'

- **PROBABILITA' TOTALE (SOMMA LOGICA):**
Dati due eventi E_1 ed E_2 (compatibili o incompatibili), vale la seguente relazione sulla probabilità totale, cioè della somma logica:
$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2).$$

OSSERVAZIONE:

Se gli eventi sono incompatibili, il terzo termine sarà 0 e ciò è in accordo con il terzo assioma.

ESEMPI

- Lanciando un dado, qual è la probabilità che esca un 6 o un numero dispari?

Svolgimento:

Il connettivo “o” ci fa pensare alla **somma logica**, quindi all’operazione di **unione** di eventi. Inoltre i due eventi sono **incompatibili**, dato che 6 è un numero pari. Quindi la probabilità della somma logica degli eventi è data dalla somma delle probabilità dei singoli eventi elementari, cioè:

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

ESEMPI

- Estrahendo una carta da un mazzo di 40, qual è la probabilità che sia un re o una carta di fiori?

Svolgimento:

Il connettivo “o” ci fa pensare alla **somma logica**, quindi all’operazione di **unione** di eventi. Ma in questo caso i due eventi sono **compatibili**, giacché può uscire un re di fiori. Quindi utilizziamo il teorema della probabilità totale:

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2) = \frac{4}{40} + \frac{10}{40} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}$$

ESEMPI

- In un sacchetto ci sono palline rosse, bianche e blu. La probabilità di estrarre una pallina rossa è $1/3$ e quella di estrarre una pallina blu è $1/5$. Qual è la probabilità di estrarre una pallina bianca?

Svolgimento:

La probabilità richiesta si calcola facilmente come probabilità **contraria** della probabilità di “estrarre una pallina rossa o blu”. Quest’ultima si calcola come probabilità totale di due eventi incompatibili, giacchè una pallina non può essere contemporaneamente rossa e blu, quindi:

$$p = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) = 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15}$$

TEOREMI SULLA PROBABILITA'

■ PROBABILITA' COMPOSTA (PRODOTTO LOGICO)

Consideriamo ora due eventi E_1 ed E_2 e vogliamo calcolare la probabilità $p(E_1 \cap E_2)$ che si verifichino **entrambi**. Possono presentarsi due casi:

- E_1 ed E_2 sono stocasticamente **indipendenti**
- E_1 ed E_2 sono stocasticamente **dipendenti**

CURIOSITA' STORICA...

- Il concetto di **indipendenza stocastica** tra eventi casuali fu definito per la prima volta nel 1718 da Abraham de Moivre, purtroppo noto al grosso pubblico solo per aver correttamente predetto il giorno della propria morte servendosi di una formula matematica, nel suo libro “The Doctrine of Chance”.

EVENTI DIPENDENTI E INDIPENDENTI

- Due eventi E_1 ed E_2 sono stocasticamente **indipendenti** se non si influenzano a vicenda, cioè se il verificarsi di uno dei due non modifica la probabilità che si verifichi il secondo.
- Viceversa, due eventi E_1 ed E_2 sono stocasticamente **dipendenti** se il verificarsi di uno dei due modifica la probabilità che si verifichi il secondo.

■ Esempio:

Si estrae una carta da un mazzo di 40. Qual è la probabilità che sia una figura e che sia di cuori?

Svolgimento:

La presenza del connettivo “e” ci fa pensare alla probabilità **composta**, quindi dobbiamo chiederci se i due eventi sono **dipendenti** o **indipendenti**.

La probabilità del primo evento è $12/40$, cioè $3/10$. La probabilità che la carta sia di cuori non è influenzata dal verificarsi dell'evento che la carta sia una figura, quindi vale $10/40$ cioè $1/4$. La probabilità composta sarà allora $3/40$.

Pertanto questo è un caso di eventi **indipendenti**. La probabilità composta è data dal prodotto delle probabilità dei singoli eventi: $p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) * p(E_2)$

■ Esempio:

Si estrae una carta da un mazzo di 40 e, senza reinserirla nel mazzo, se ne estrae una seconda. Qual è la probabilità che siano due regine?

Svolgimento:

La probabilità del primo evento è $4/40$, cioè $1/10$. Ma alla seconda estrazione le carte sono diventate 39 e, se vogliamo che la prima sia già una regina, le regine rimaste sono soltanto 3; quindi la probabilità che la seconda carta sia ancora una regina sarà diventata $3/39$ cioè $1/13$. Pertanto la probabilità composta (o prodotto logico) sarà data dal **prodotto** tra la probabilità che la prima carta sia una regina per la probabilità che la seconda sia **ancora** una regina, cioè $1/130$.

Pertanto questo è un caso di eventi **dipendenti**. Cioè la probabilità del secondo evento è **condizionata** al verificarsi del primo evento. (Analogamente si considerano dipendenti i due eventi se le due carte vengono estratte simultaneamente, cioè quando non c'è il reinserimento).

PROBABILITA' CONDIZIONATA

- Quando la probabilità di un evento E_2 dipende dal verificarsi dell'evento E_1 , si parla di probabilità condizionata e si indica con $p(E_2|E_1)$ e si legge “probabilità di E_2 condizionata ad E_1 ”. In questo caso, cioè quando i due eventi sono **stocasticamente dipendenti**, la probabilità composta è data da:

$$P(E_1 \cap E_2) = p(E_1) * p(E_2|E_1)$$

che equivale alla seguente:

$$p(E_2 | E_1) = \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_1)}$$

DIAGRAMMI AD ALBERO

- Spesso si può usare un *diagramma ad albero* per rappresentare i casi possibili. Questo ci permette di avere un'elencazione grafica di tutti gli elementi dello spazio campione. Se poi si scrive su ciascun ramo la probabilità dell'evento rappresentato nel nodo seguente, la probabilità di uno qualsiasi degli eventi sui rami terminali è data dal **prodotto** delle probabilità scritte sull'intero percorso, in quanto si tratta di un'applicazione diretta della formula delle probabilità **composte**. In pratica:
 - Lungo i rami si moltiplicano le probabilità
 - Ai margini si addizionano

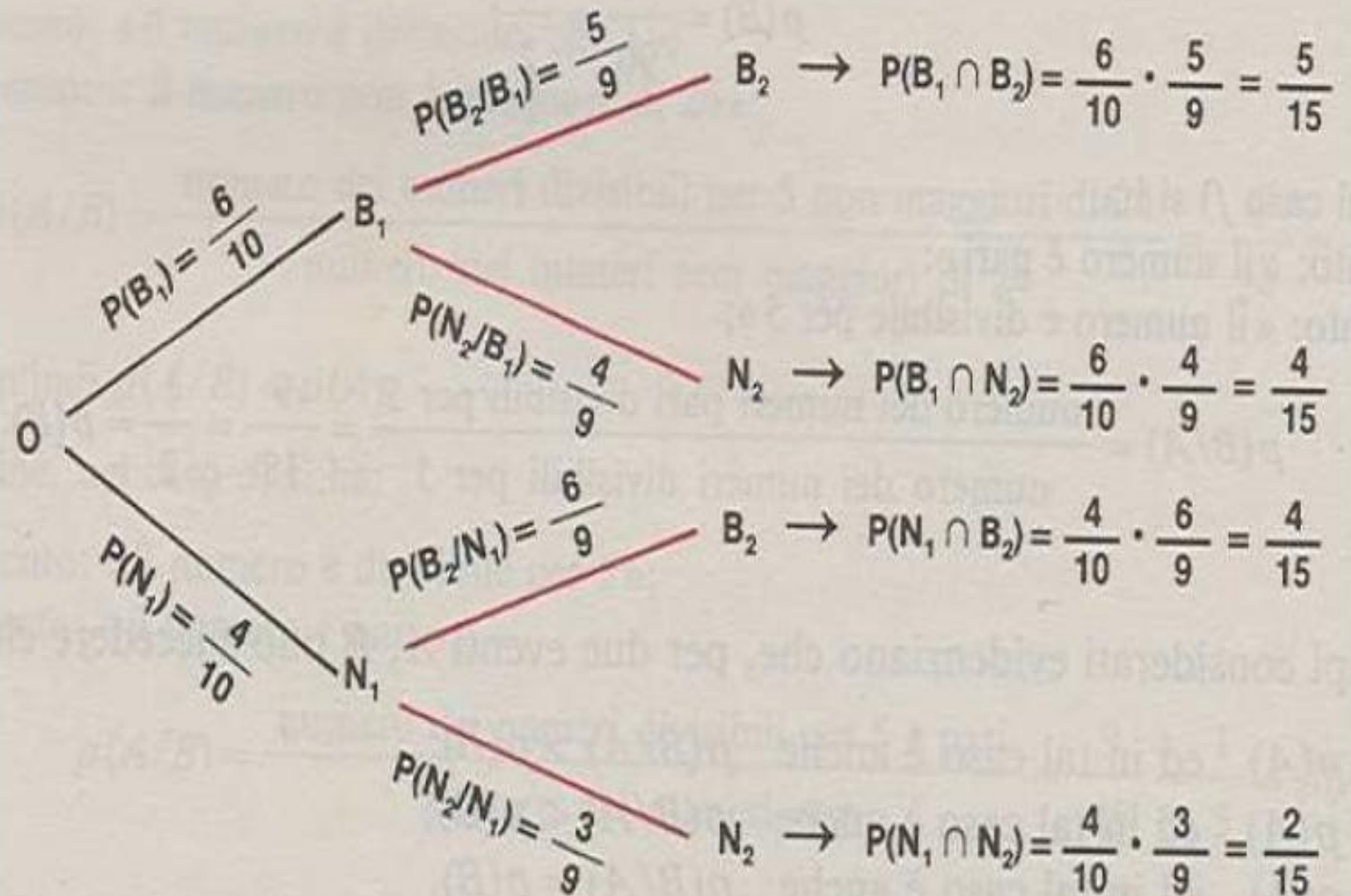
ESEMPIO


Da un'urna contenente 6 palline bianche (B) e 4 nere (N) se ne estraggono due a caso, una di seguito all'altra senza reimbussolamento.

Si vuole determinare qual è la probabilità:

- $p(B_1 \cap B_2)$ = che la prima pallina sia bianca e la seconda bianca
- $p(B_1 \cap N_2)$ = che la prima pallina sia bianca e la seconda nera
- $p(N_1 \cap B_2)$ = che la prima pallina sia nera e la seconda bianca
- $p(N_1 \cap N_2)$ = che la prima pallina sia nera e la seconda nera


Questo esempio di probabilità composta di eventi non indipendenti può venir visualizzata mediante il seguente diagramma ad albero:



- 
- Ci chiediamo ora qual è la probabilità che la seconda pallina sia bianca, indipendentemente dal colore della prima pallina.
 - Per rispondere, ci basterà sommare i valori **marginali** relativi a B_2 , cioè $5/15$ e $4/15$.

TEOREMA DI BAYES

- Il **teorema di Bayes** (conosciuto anche come formula di Bayes o **teorema della probabilità delle cause**), deriva da due teoremi fondamentali delle probabilità: il teorema della **probabilità composta** e il teorema della **probabilità totale**.
- Viene impiegato per calcolare la probabilità di una **causa** che ha scatenato l'evento verificato.

- 
- Nel Teorema di Bayes la situazione è “rivoltata”. Si conosce il risultato dell’esperimento e si vuole calcolare la probabilità che sia dovuto ad una certa causa.
 - Per esempio si può calcolare la probabilità che una certa persona soffra della malattia per cui ha eseguito il test diagnostico (nel caso in cui questo sia risultato negativo) o viceversa non sia affetta da tale malattia (nel caso in cui il test sia risultato positivo), conoscendo la **frequenza** con cui si presenta la malattia e la **percentuale di efficacia** del test diagnostico.

TEOREMA DI BAYES

- Dati due eventi dipendenti E_1 e E_2 , si ha che:

$$p(E_1 | E_2) = \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_2)} = \frac{p(E_1) \cdot p(E_2 | E_1)}{p(E_1) \cdot p(E_2 | E_1) + p(\overline{E_1}) \cdot p(E_2 | \overline{E_1})}$$

ESEMPIO

- Uno studio medico sulla tubercolosi (TBC) effettuato su una certa popolazione di individui, ha dato i seguenti risultati:

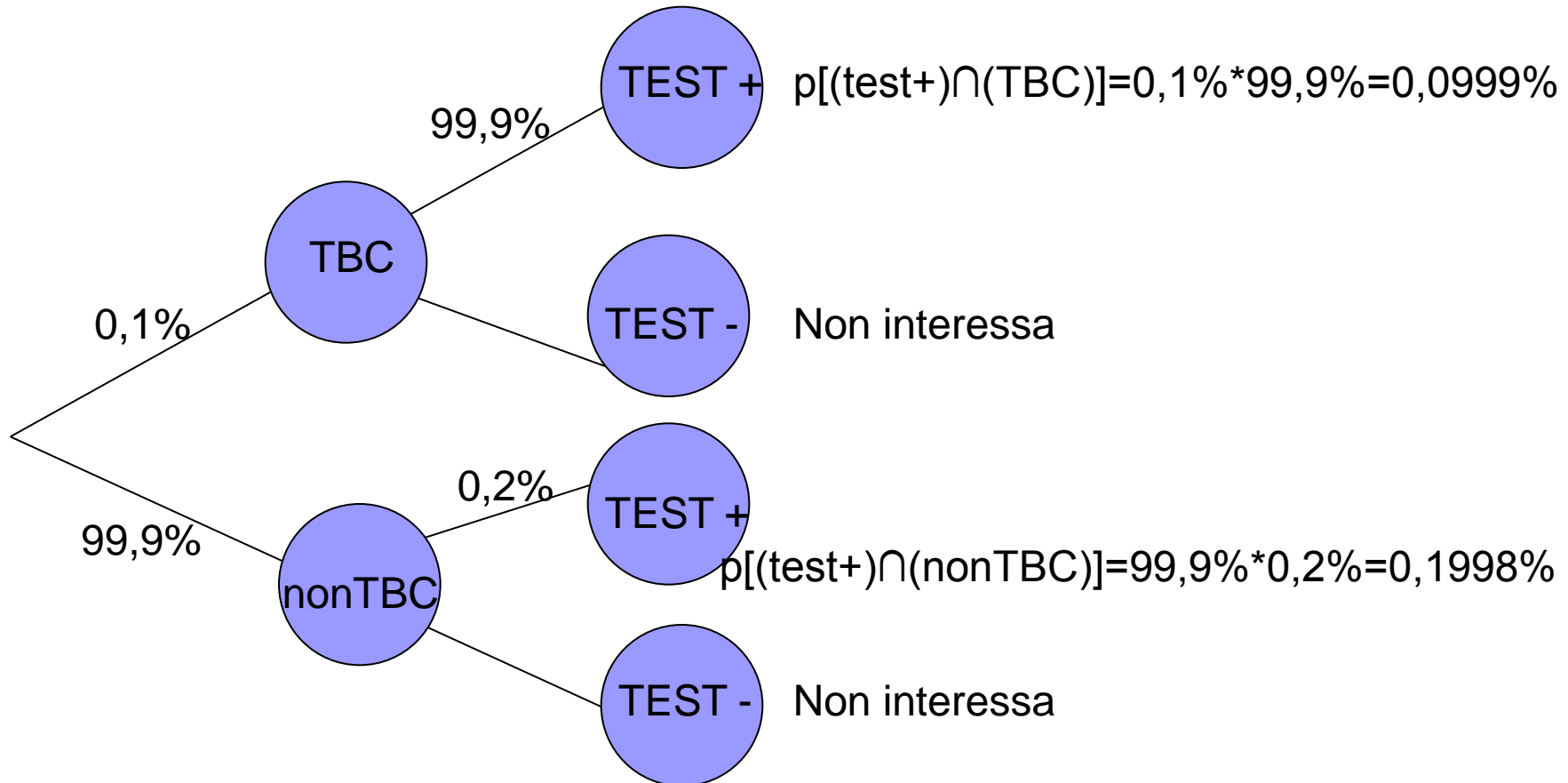
$$p(\text{TBC}) = 0,1\%$$

$$p(\text{test positivo}|\text{TBC}) = 99,9\%$$

$$p(\text{test positivo}|\text{nonTBC}) = 0,2\%$$

Determinare la probabilità che un individuo risultato positivo al test, abbia effettivamente la TBC.

■ Svolgimento:



- I valori marginali sono stati calcolati con la probabilità composta, moltiplicando le probabilità presenti sullo stesso ramo.
- La probabilità totale che il test sia positivo, sarà dato dalla somma delle due probabilità marginali, quindi:
$$p(\text{test}+) = 0,0999\% + 0,1998\% = 0,2997\%$$
- Applichiamo il teorema di Bayes per calcolare la probabilità che un individuo risultato positivo al test sia affetto da TBC:

$$p(TBC | test +) = \frac{p(TBC \cap test +)}{p(test +)} = \frac{0,0999\%}{0,2997\%} = 33,3\%$$

- Quindi, nonostante il test abbia una percentuale di falso allarme (**falso positivo**) pari allo 0,2% e restituisca un mancato allarme (**falso negativo**) solo nello 0,1% dei casi, la probabilità di avere la tubercolosi se il test è risultato positivo è “solo” del 33,3%, un numero non così elevato!

E per concludere... un paradosso della probabilità.

- Il paradosso dei due bambini:

Viene detto **paradosso dei due bambini** un celebre quesito della teoria della probabilità, apparentemente semplice ma in realtà ambiguo e il cui studio porta ad una risposta controintuitiva. Esso è spesso citato per mettere in evidenza la facilità con la quale nell'ambito della probabilità può nascere confusione anche in contesti che a prima vista sembrano nient'affatto complicati da analizzare.

- I quesito in questione è, in una delle prime formulazioni (proposta da Martin Gardner sulle pagine del Scientific American): *"Il signor Smith ha due bambini. Almeno uno dei due è un maschio. Qual è la probabilità che entrambi i bambini siano maschi?"*

La risposta intuitiva è che se, poniamo, è maschio il primo bambino, la probabilità che anche l'altro lo sia è $1/2=50\%$.

In realtà, come riconosciuto da Gardner stesso, la domanda è posta in modo ambiguo (è facile pensare che con "almeno uno" si intenda "sicuramente uno che ho chiaramente individuato - ed eventualmente anche l'altro").

Una possibile riformulazione - intuitivamente equivalente - che non dia adito ad ambiguità è la seguente:

"Il signor Smith ha due bambini. Non sono due femmine. Qual è la probabilità che entrambi i bambini siano maschi?"

- Non è difficile, utilizzando semplici strumenti di probabilità classica, scoprire che la risposta è allora $1/3=33,3\%$. Di seguito le possibili combinazioni dei figli che rispettano le condizioni date:

Figlio 1	Figlio 2
Femmina	Femmina
Femmina	Maschio
Maschio	Femmina
Maschio	Maschio

BIBLIOGRAFIA

- Canepa-Gerace: “Corso di Matematica per il Liceo Scientifico” – Paravia
- <http://matematica-old.unibocconi.it>
- <http://it.wikipedia.org>
- <http://progettomatematica.dm.unibo.it>
- <http://www.ripmat.it>
- <http://www.alberghierabormio.it/>
- <http://www.mimmocorrado.it/mat/pro/probabilita.pdf>
- <http://wwwcdf.pd.infn.it/labo/twoup2.pdf>