Strani calcoli ispirati dal racconto di J. L. Borges

"La biblioteca di Babele"

Marco Ripà

13/11/2010

L' articolo prende spunto dal labirintico universo nel quale è ambientato uno dei più affascinanti racconti di Borges. Nella prima sezione viene presentato un approccio originale e intuitivo, volto alla stima di un grande fattoriale; successivamente si sposta il focus sul calcolo "a mani nude" di 25^{656000} . Questo risultato viene sfruttato nell'ultima parte per giungere ad una conclusione per certi versi paradossale, circa uno dei temi centrali della storia: l'impossibilità di reperire il libro della Verità. Il tutto è corredato da un'appendice che chiarisce alcuni curiosi retroscena.

I numeri fattoriali sono importanti in matematica, soprattutto perché sono alla base del calcolo combinatorio; in particolare, esistono n! sequenze distinte di n elementi (ovvero n! "permutazioni"). La notazione "n!" (con il punto esclamativo finale) risale al 1808 ed è dovuta alla rapidissima crescita di questa serie numerica:

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k \qquad\qquad n \in \aleph$$

Per fare un confronto, $e^x < n!$ per ogni $n \geq 6$, mentre $10^x < n!$ a partire da $n \leq 25$.
In un famoso racconto [Jorge Luis Borges, *La biblioteca di Babele*, in *Finzioni*, 1941. Arnoldo Mondadori Editore**,** traduzione di Franco Lucentini, 1955, Milano], lo scrittore argentino Borges descrive un mondo fantastico nel quale gli esseri umani vivono all'interno di una biblioteca infinita. In questa storia, la stragrande maggioranza dei volumi della biblioteca non ha alcun senso e tutti i libri sono formati da 410 pagine. Ognuna di esse è una sequenza aleatoria delle 25 lettere tipografiche che si alternano nelle 40 righe di ogni facciata. Le righe contengono, a loro volta, 40 caratteri ciascuna, per un totale di 25^{656000} combinazioni possibili[1].

E' banale mostrare (basta una calcolatrice tascabile) che $25^n < n!$ solo se $n > 65$ (infatti $25^{64} > 64!$ e $25^{65} < 65!$). Prendendo spunto da ciò, possiamo provare a cimentarci in un problema di calcolo leggermente più impegnativo[2].
Se pensiamo a un libro con le stesse caratteristiche di quelli poc'anzi menzionati (410 pagine, 40 righe e 40 caratteri per ogni riga), ma con 656000 simboli differenti (lo stesso simbolo non può apparire due volte nell'intero libro), quante possibili permutazioni abbiamo?
Già sappiamo che ce ne sono 656000!, così questo sarà il problema con cui ci confronteremo nella pagina successiva.
Non trovando una calcolatrice o un programma abbastanza potente, ho scovato - girovagando per la rete - una tabella che riporta quante cifre contengono 650000! e 700000! (tra 500000! e 900000! la griglia procede a salti di k=50000!)[3]. E' allo stesso modo evidente che la crescita è quasi lineare (per "n" in quell'intervallo) e un particolare incremento "k" è solo un po' più grande rispetto al precedente. Quindi ho concepito un metodo per individuare un ristretto intervallo di cifre che include al 100% il reale valore di 656000!

La progressione del fattoriale (anche se è discreta) può essere immaginata come una funzione convessa (in maniera similare, ad esempio, a $f(x)=x^2$, con $x > 0$), cosicché possiamo essere sicuri che il numero da stimare possiede meno di $3496106+5.829193*(656000-650000) < 3531082$ cifre (ho ricavato i coefficienti – arrotondati per eccesso – per mezzo di un'interpolazione lineare, ponendo la variabile "numero di cifre" sull'asse delle ordinate).
Questo sarà il *sup* (il "tetto") del nostro intervallo.

---

[1] Nella traduzione in italiano del racconto che ho io, c'è un piccolo errore; è infatti riportato che ogni riga consta di 40 elementi (spazi inclusi) anziché 80. Pertanto, pensando a un ipotetico bibliotecario italiano, mi accingo a procedere nei calcoli partendo da questo assunto: ci saranno meno libri rispetto a quelli che affollano il testo originale di Borges, ma il significato intrinseco di quanto dirò resterà immutato.

[2] In ogni caso, nella seconda parte del presente articolo, mostrerò un semplice metodo per giungere ad una stima relativamente precisa di quel numero, usando solamente una calcolatrice a 10 cifre.

[3] 656000! è formato da 3496106 cifre, mentre 700000! ne possiede 3787566.

Per fissare l'*inf* (l'estremo inferiore), calcoliamo alcuni dei termini più piccoli della progressione, a partire dal valore che già conosciamo:

$$\prod_{i=650001}^{650010} i = 1.346 * 10^{58}$$

A questo punto è sufficiente tagliare il coefficiente (1.346) e poi dividere l'esponente 58 per la numerosità degli elementi che abbiamo preso in considerazione. E' una sorta di "media rispetto al prodotto", arrotondata chiaramente per difetto[4].
E' quindi assodato che il valore 3496105+5.8*(656000-650000) = 3530905 sosterà al di sotto di 656000!
Adesso siamo sicuri che:

$$\mathbf{656000! \in \left(10^{3530905}\,;\,10^{3531082}\right)}$$

$$\text{Il mio valore atteso è pertanto } 10^{\frac{3530905+3531082}{2}} \approx \mathbf{10^{3530994}}$$

Rifacendoci alle note proprietà dei numeri fattoriali, possiamo affermare con assoluta certezza che la somma di tutte le cifre di questo numero enorme è un multiplo di 9 e siamo anche in grado di calcolare quanti zeri finali possiede: le ultime 163996 cifre sono tutti zeri consecutivi. In questo caso, si ricorre alla seguente formula (in cui "int[x]" sta per "parte intera" dell'argomento):

$$\sum_{i=1}^{8} int\left[\frac{656000}{5^i}\right]$$

Che è pari a 131200+26240+5248+1049+209+41+8+1=**163996**.

Ricordate quando avevo affermato che sarebbe stato abbastanza semplice calcolare (con discreta accuratezza) quanto grande fosse realmente 25^{656000}?
Bene, è arrivato il momento di tener fede alla promessa e di illustrare un metodo che è possibile utilizzare.
Sono necessari soltanto un foglio, una penna, una calcolatrice tascabile e un quarto d'ora libero.

Prima di tutto ci serve determinare, iterando lo stesso procedimento varie volte, il coefficiente in virgola mobile "a(i)" relativo alle potenze del 10 (esprimeremo il numero incognito nella forma $a(i)*10^{b(i)}$).
Nell'effettuare tale passaggio, occorrerà prestare attenzione agli aggiustamenti necessari per correggere lo slittamento del punto decimale del coefficiente "a".
Andremo poi a calcolare il quadrato del numero successivo a partire da quello corrente.
Questi dati ci serviranno nella seconda fase, perché sfrutteremo la proprietà:

$$(a_1 * 10^{b_1}) * (a_2 * 10^{b_2}) * \dots * (a_k * 10^{b_k}) = (a_1 * a_2 * \dots * a_k) * 10^{b_1+b_2+\dots+b_k}$$

---

[4] La formula che ho usato per la stima,

$$inf(656000!) = 3496105 + \frac{int\left[log\left(\frac{k!}{650000!}\right)\right]}{k-650000} * 6000$$

(dove $int\left[log\left(\frac{k!}{656000!}\right)\right]$ rappresenta il numero delle cifre di $\prod_{i=6560001}^{k} i$),

diventa progressivamente più precisa man mano che cresce k, finché quasi raggiunge il vero valore di 656000! per k=656000.

$25^{1} = 2.5*10^{1}$
$25^{2} = 6.25*10^{2}$
$25^{4} = 3.90625*10^{5}$
$25^{8} = 1.525878906*10^{11}$
$25^{16} = 2.328306437*10^{22}$
$25^{32} = 5.421010862*10^{44}$
$25^{64} = 2.938735877*10^{89}$
$\mathbf{25^{128} = 8.636168555*10^{178}}$
$25^{256} = 7.458340731*10^{357}$

Gli errori di approssimazione, da qui in poi, sono una conseguenza della "scarsa precisione" di una calcolatrice a 10 cifre.

$\mathbf{25^{512} = 5.562684646*10^{715}}$
$25^{1024} = 3.094346047*10^{1431}$
$25^{2048} = 9.574977461*10^{2862}$
$25^{4096} = 9.168019338*10^{5725}$
$25^{8192} = 8.405257858*10^{11451}$
$25^{16384} = 7.064835966*10^{22903}$
$25^{32768} = 4.991190722*10^{45807}$
$25^{65536} = 2.491198483*10^{91615}$
$\mathbf{25^{131072} = 6.206069879*10^{183230}}$
$25^{262144} = 3.851530335*10^{366461}$
$\mathbf{25^{524288} = 1.483428592*10^{732923}}$

Se $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + a_k$ possiamo affermare che $x^n = x^{a_1} * x^{a_2} * \ldots * x^{a_{k-1}} * x^{a_k}$.

Di conseguenza abbiamo:

$$25^{656000} = 25^{(524288+131072+512+128)} = 25^{524288} * 25^{131072} * 25^{512} * 25^{128}.$$

Pertanto possiamo scrivere sul nostro pezzo di carta la seguente espressione (il risultato finale rappresenta un'accurata stima della quantità dei possibili tipi di libro che sono presenti nella biblioteca di Babele):

$1.483428592 *10^{732923} * 6.206069879 *10^{183230} * 5.56268469 *10^{715} * 8.636168555 *10^{178} =$
$= 442.2714043 *10^{(732913+183288+715+178)} \approx$
$\approx 442.2714 *10^{917046} =$
$= \mathbf{4.422714 *10^{917048}}$

Ciò conferma che 25^{656000} è notevolmente minore di 656000!; infatti è "lungo" soltanto 917049 cifre.
Risulta altrettanto facile indovinare quali sono le cifre finali: l'esponente (656000) è divisibile per 16, dunque il nostro gigantesco numero dovrà per forza terminare con le medesime cifre di 25^{16}=…**2890625** (a causa della struttura ciclica delle potenze applicate alle basi terminanti per 5).

Precedentemente, abbiamo visto che il numero degli ipotetici libri differenti presenti nella fantomatica "biblioteca di Babele" è $4.22714\ldots*10^{912048}$ (evitando di prendere in considerazione le lettere dei titoli scritti sulla costola dei volumi). Questo risultato ci permette di dedurre una verità importante circa i testi in essa contenuti: nessuno di loro ha abbastanza spazio per ospitare tutte le cifre del numero dei libri stessi (oltretutto i caratteri numerici non fanno parte dei 25 utilizzati), comunque una possibilità, molto ma molto remota, ci sarebbe ancora.

Evitando di addentrarci in dispute legate al tipo di alfabeto adottato, fingiamo che la lingua parlata dal nostro bibliotecario sia l'italiano[5].
Una tipologia di libro inizierà e terminerà esattamente così[6]:

"nella biblioteca di babele ci sono circa quattro punto due due sette quattro zero (…) per dieci alla novecentodiciassettemilaquarantotto libri diversi."

Tuttavia permane il problema di fondo: non esisterà mai un singolo testo contenente l'elenco completo delle cifre che quantificano la varietà dei libri presenti nella Biblioteca stessa; potrebbero però essercene alcuni che affiancati (ovvero letti in sequenza) diano la lista completa, anzi, ci saranno sicuramente.
Trovarli sarebbe praticamente impossibile; le combinazioni dipendono da quanti volumi sono necessari per scrivere un tale numero nella lingua del bibliotecario che si illude di poterli reperire[7]:
Combinazioni totali = $25^{(917049*k)}$ * incipit * "punto" * numero degli spazi intermedi * epilogo[8] = $25^{(917049*k)}*25^{35}*25^{5}*(25^{917049+1})*25^{65} = 25^{(917049*k)}*25^{917050}*25^{105} = 25^{(917049*k+917155)}$.
Dove k è, per definizione, pari alla "media ponderata" dei caratteri necessari per scrivere – nella particolare lingua - le cifre (dallo zero al nove) del numero 25^n espresso in virgola mobile. I coefficienti di ponderazione ($a_1, a_2, .., a_{10}$) non sono altro che le frequenze relative con le quali una data cifra si ripete all'interno del numero in questione:
$k_{(italiano)} := 4*a_1+3*a_2+3*a_3+3*a_4+7*a_5+6*a_6+3*a_7+5*a_8+4*a_9+4*a_{10}$

(per esempio, nel caso limite in cui $a_1 = a_2 = … = a_{10} = 0.1$ si avrebbe che k = 42 * 0.1 = **4.2**)[9]
Mi pare sensato pretendere che l'agognato libro della Verità (di tutte le verità) non possa essere meno che "perfetto"; a maggior ragione, ritengo che la semplice enumerazione della quantità dei tomi possibili debba essere "pienamente coerente" con la lingua del bibliotecario che se lo trova tra le mani. Pertanto penso sia lecito assumere che essa non presenti errori morfosintattici o grammaticali e non differisca di un solo carattere da quanto ho ipotizzato in questo articolo. Se k fosse pari 4.2, si avrebbe una sola possibilità su $25^{4768761}$ (vale a dire una chance ogni $6.22*10^{6666441}$) di estrarre 8 libri a caso (in sequenza) e di prendere proprio quelli che soddisfano la precedente richiesta. Come si può facilmente intuire, anche la ricerca della più banale delle verità (quanti libri differenti sono presenti nel bizzarro universo della storia) si rivelerebbe pura utopia.
Detto questo, non ho alcuna intenzione di sprecare la vita nel tentativo di perfezionare tale calcolo e spero che la maggior parte dei bibliotecari sia del mio stesso avviso: "Carpe diem!"[10]

---

[5] L'alfabeto usato nei libri potrebbe essere quello ebraico, ma non è detto. Ciò nonostante, se il bibliotecario parla italiano, il <u>suo</u> libro della Verità sarà costretto ad esprimersi in quella stessa favella.
[6] Nessun libro della Biblioteca contiene lettere maiuscole.
[7] Si spera che il libro della Verità consti al più di 656000 caratteri!
[8] Ad esempio il nostro incipit ("nella biblioteca di babele ci sono ") sarà formato da 35 caratteri, compreso lo spazio finale, e contribuirà con 25^{35} combinazioni. In chiusura, invece, si leggerà qualcosa (la costante che ho chiamato epilogo) del tipo "per dieci alla novecentodiciassettemilaquarantotto libri diversi." (per un totale di altri 65 caratteri). Questo se ci si disinteressa di ciò che segue il punto posto al termine dell'ultima parola della stringa "epilogo" (diversi), altrimenti il numero dei casi da considerare salirebbe ancora.
[9] In italiano si ha: zero→4, uno→3, due→3, tre→3, quattro→7, cinque→6, sei→3, sette→5, otto→4, nove→4. Inserendo k = 4.2 nella formula esposta in precedenza (caso semplificato), si ricava che dovranno essere letti 8 libri in maniera sequenziale (int[(917049*<u>4.2</u>+917155)/656000] = int[4768760.8/656000] = <u>8</u>), per poter sperare di trovare il numero (scritto in virgola mobile) nella sua interezza.
[10] L'unica certezza è che nessun libro conterrà il numero esatto dei volumi dissimili che ci sono nella Biblioteca e quindi non potrà esistere un blocco cartaceo con 656000 caratteri, depositario di <u>tutte</u> le verità del mondo. Anche volendo abbandonare le richieste che il "libro perfetto" si esprima in una lingua nota o si avvalga del sistema numerico decimale (conseguenza del fatto che il DNA del bibliotecario gli ha fornito 5 dita per mano) ed assumendo che ogni simbolo identifichi un numero, ci troveremmo in un sistema "base 25" e 656000 caratteri si rivelerebbero comunque insufficienti. Infatti, non ne rimarrebbe nemmeno uno libero per spiegare che "nella biblioteca di babele ci sono n libri diversi", occupando "n" ben 656001 caratteri.

Appendice

Tutti coloro i quali si stanno ancora chiedendo come mai non abbia considerato che, nella versione originale de “La biblioteca de Babel”, le lettere per ogni riga di testo sono 80 anziché 40 (e pertanto ogni libro contiene 656000*2 = 1312000 caratteri totali), possono scegliere almeno una delle seguenti argomentazioni.

Per prima cosa la traduzione in italiano, su cui mi sono basato, presenta la suddetta imprecisione numerica (*cfr. nota 1*); inoltre, in questo modo, le stime effettuate sono risultate nuove, più precise e meno ingombranti di quanto sarebbero state se avessi utilizzato come riferimento, rispettivamente, 1312000! e $25^{1312000}$. Tutto questo non inficia in alcun modo la sostanza del presente articolo e le considerazioni fatte restano perfettamente valide.

Volendo essere esageratamente pignoli, i numeri che ho disseminato in queste pagine si presterebbero bene a descrivere i libri presenti in una dimensione parallela, rispetto a quella in cui si muovono i personaggi della breve storia datata 1941. In tale sottoinsieme del multiverso, tutto è identico a quanto descritto nel racconto autografo, salvo per il fatto che ogni foglio è inchiostrato solo sulla prima facciata.

Infine ho evitato di scrivere quello che penso circa le dimensioni della Biblioteca stessa. Sarà pur vero che alcuni la chiamano Universo e che è sconfinata, ma resta il fatto che i bibliotecari sono persone e deambulano senza problemi al suo interno; quindi, se ci rapportassimo alle leggi del nostro mondo, saremmo portati a credere che la Biblioteca abbia un rapporto M/r^2 non molto differente da quello terrestre[11]. Conseguentemente, potrebbe ospitare solo una minima parte dei libri ipotizzati in precedenza. In realtà la mia idea è che la Biblioteca non possa essere molto alta (in termini relativi), ma avvolge interamente lo strato esterno di una enorme sfera (dalla superficie rigidissima e senza protuberanze, però avente un interno a bassissima densità). Sfortunatamente ciò contrasta pesantemente con la scienza dei materiali (oltre che con una miriade di altre valutazioni). Si tratta dell’ennesima conferma di quello che si può intuire considerando che, per quanti sforzi possiamo fare, la Biblioteca non rientrerà mai nel volume del nostro universo e dunque non potrà che trovarsi in un’altra dimensione. In definitiva, credo proprio che il modo più coerente di intendere tutta la questione, sia quello di leggere attentamente il titolo della raccolta nella quale il presente racconto è stato inserito nel 1944: “Finzioni”.

Per come la vedo io, la Biblioteca non è unica e non ha una sola collocazione spazio-temporale: le biblioteche sono tantissime, perché ogni lettore ha la propria (qui sta la grandezza di Borges). Saranno molto simili tra loro, ma mai uguali; come se l’iperuranica Biblioteca della storia lasciasse dentro noi lettori un seme, che matura poco a poco, espandendosi fino a creare un cosmo sconfinato all’interno della nostra piccola scatola cranica.

Marco Ripà
13.11.2010

[11] Con “r” indico alla distanza tra il centro dell’ipotetica sfera e un generico abitante della Biblioteca.