LABORATORIO
Costruzione di un ipertesto

Studio delle varie specie di numeri dai numeri naturali ai numeri reali

Ideato dal corsista prof. Gerardo Mazzeo
Nocera Inferiore - 27/04/2002

SCHEMA DI LAVORO

PREMESSA

NUMERI NATURALI

- LO ZERO

NUMERI INTERI RELATIVI

- INTERI RELATIVI NON NEGATIVI
- INTERI RELATIVI ASSOLUTI
- INTERI RELATIVI NON POSITIVI
- OPERAZIONI CON GLI INTERI RELATIVI

NUMERI RAZIONALI RELATIVI

- FRAZIONI E NUMERI DECIMALI
- INTERO RELATIVO ASSOLUTO

NUMERI REALI

RAPPRESENTAZIONE FINALE

DESCRIZIONE E FINALITÀ

Partendo dallo studio dei numeri naturali fino ai numeri reali, ho elaborato un ipertesto nel quale ho descritto i vari percorsi del numero.

Vari sono gli argomenti trattati, partendo dallo zero, alla necessità impellente di sviluppare e creare sempre nuovi numeri, per arrivare alla soluzione di tutti i problemi.

I NUMERI NATURALI

I numeri naturali si indicano col simbolo “N” e sono disposti nel seguente ordine, detto naturale:

$$N = \{0,1,2,3,4, \dots\}$$

I numeri naturali ammettono come primo elemento lo zero, ma non ammettono l’ultimo, nel senso che, pensato uno di essi, esiste sempre il successivo. Quindi possiamo dire che “N” costituisce un insieme illimitato (non finito) di elementi.

Ad ogni numero naturale si può associare una lettera minuscola dell’alfabeto a, b, c, ... x, y, z.

Le operazioni che si possono eseguire in “N” sono due: l’addizione e la moltiplicazione, mentre la sottrazione e la divisione non sono sempre possibili.

L’addizione e la moltiplicazione sono sempre possibili, in quanto presi dei numeri qualsiasi in “N” si ottiene sempre un numero appartenente all’insieme.

Esempi: $5 + 8 = 13$; $6 \times 2 = 12$

Ciò si esprime dicendo che l’addizione e la moltiplicazione sono leggi di composizione interna (cioè che il risultato delle due operazione è contenuto sempre in “N”).

La sottrazione è l’operazione inversa dell’addizione; quando è possibile è a risultato unico:

$$l - m = n \quad \text{se} \quad n + m = l \quad \text{e} \quad l \geq m$$

Esempio: $7 - 4 = 3$ perché $3 + 4 = 7$

La sottrazione è possibile se il sottraendo è minore del minuendo. Se ciò non si verifica, non esiste un numero naturale che addizionato al sottraendo, dà come risultato il minuendo.

Esempio: 7 - 10 non è possibile.

La divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione.

Allo stesso modo il quoziente fra numeri naturali non esiste sempre.

Esempio: 19 : 6 non esiste in "N" perché nessun numero naturale moltiplicato per 6, dà per risultato 19.

FUNZIONE DELLO ZERO

Lo zero è un elemento appartenente all'insieme dei numeri naturali "N" che gode di alcune proprietà:

- Nell'addizione è l'elemento neutro perché sommato ad ogni altro numero naturale lo lascia invariato. **Esempio**: 5 + 0 = 5.
- Nella moltiplicazione è l'elemento di annullamento. **Esempio**: 7 x 0 = 0.
- Nella divisione, lo zero come divisore, rende l'operazione impossibile.

  Esempio: 12 : 0 = impossibile (in quanto non esiste nessun numero naturale che moltiplicato per o dà come risultato 12).
- La divisione 0 : 0 è indeterminata (cioè vi sono infiniti numeri naturali che moltiplicati per 0 danno per risultato 0).

I NUMERI INTERI RELATIVI

Abbiamo visto che nelll'insieme dei numeri naturali N = {0,1,2,3,4, ...} non è sempre definita la sottrazione.

Per esempio, se vogliamo misurare l'altitudine di una località terrestre dobbiamo prendere un punto di riferimento, che in genere è il livello del mare, e dire di quanto quella località si trova al di sopra o al di sotto del punto di riferimento.

Così diremo che la cima del monte Rosa è a 4.633 m. sopra il livello del mare e cha la superficie del mar Caspio è a 28 m. sotto il detto livello. I segni adottati per indicare questa doppia scelta sono i segni "+" e "-".

Si dice allora numero relativo, un numero che può essere espresso come la somma, o la differenza, di due numeri naturali; è un elemento dell'insieme $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ e si indica con "Z".

Se da questo insieme escludiamo lo zero otterremo i numeri interi relativi escluso lo zero che indicheremo con "Z_o".

NUMERI INTERI RELATIVI NON NEGATIVI

I numeri interi relativi non negativi sono gli elementi dell'insieme

{0, 1, 2, 3, ..., n, ...} che vengono indicati con Z^+ .

Ogni numero di questo insieme Z^+ non deve confondersi con L'insieme "N", dei numeri naturali.

Ogni numero di Z^+, ad esempio $\frac{4}{1}$, oppure l'equivalente $\frac{8}{2}$, non è lo stesso del numero naturale 4.

Infatti, l'intero 4 esprime un quoziente, mentre il naturale 4 esprime una qualsiasi collezione (insieme) di quattro oggetti del tipo {a, b, c, d} .

NUMERI INTERI RELATIVI ASSOLUTI

Ogni coppia del tipo (m,1) ad esempio $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1} \dots \frac{m}{1}$ si dice numero intero relativo assoluto e si indica con

$Z_a = \{0,1,2,3,4, \dots, n, \dots\}$

NUMERI INTERI RELATIVI NON POSITIVI

Gli elementi dell'insieme {... -3, -2, -1, 0} vengono chiamati interi relativi non positivi e indicati con "Z^-".

Per avere un'idea consideriamo il seguente problema.

Nel seguente prospetto i numeri positivi indicano i crediti (in euro) ed i negativi i debiti (in euro) di tre diverse amministrazioni, esprimendola con un numero relativo:

1° Caso	- 20.000	- 35.000	due debiti
2° Caso	+ 42.000	- 53.000	un debito maggiore del credito
3° Caso	+ 12.450	- 12.450	un debito e credito uguali

OPERAZIONI CON GLI INTERI RELATIVI

Le operazioni che si possono eseguire con i numeri interi relativi sono:

- somma
- differenza
- moltiplicazione
- divisione
- elevazione alla potenza.

LA SOMMA

La somma di due o più numeri interi relativi aventi lo stesso segno (concordi) è un numero intero relativo con essi concorde, avente per valore assoluto (numero privato del segno) la somma dei valori assoluti degli addendi.

La somma di due numeri interi relativi discordi è un numero intero relativo concorde con l'addendo di valore assoluto maggiore, ed avente per valore assoluto la differenza tra il maggiore ed il minore dei valori assoluti degli addendi.

In particolare, la somma di due numeri interi relativi opposti è sempre "0".

Esempi:

1. $(+5) + (+18) = +23$; $(-7) + (-4) = -11$
2. $(+2) + (+7) + (-8) = (+9) + (-8) = +1$
3. $(+8) + (-8) = 0$

Lo zero è l'elemento neutro rispetto all'addizione.

Esempi:

1. $+5 + 0= +5$
2. $0 + 3 = +3$

LA DIFFERENZA

La differenza tra due numeri interi relativi è quel numero relativo che addizionato al secondo dà il primo.

La differenza tra due numeri interi relativi si ottiene addizionanado al primo l'opposto del secondo.

Esempi:

1. $(+11) - (+7) = (+11) + (-7) = +4$

2 $(+110) - (-55) = (+110) + (+55) = +165$

LA MOLTIPLICAZIONE

Il prodotto di due numeri interi relativi non nulli è il numero intero relativo che ha per valore assoluto (numero privato del segno) il prodotto dei valori assoluti di due fattori, per segno "+" se i fattori sono concordi, il segno "-" se i fattori sono discordi.

Se uno o entrambi i fattori sono uguali a zero il prodotto è zero.

Esempi:

1. $(+5) \times (+3) = +15$
2. $(-2) \times (+4) = -8$
3. $(+7) \times 0 = 0$
4. $0 \times 25 = 0$
5. $0 \times 0 = 0$

LA DIVISIONE

La divisione di due numeri interi relativi (il secondo dei quali diverso da zero) è il numero che moltiplicato per il secondo dà il primo.

La divisione tra due numeri interi relativi si ottiene moltiplicando il primo per l'inverso del secondo.

Esempi:

1. $(+5) : (+3) = (+5) \times (+\frac{1}{3}) = +\frac{5}{3}$
2. $(+4) : (-2) = (+4) \times (-\frac{1}{2}) = -\frac{4}{2} = -2$

ELEVAMENTO ALLA POTENZA DEI NUMERI INTERI RELATIVI

La potenza di un numero intero positivo è un numero intero positivo il cui valore assoluto è la potenza ennesima del valore assoluto della base; la potenza ennesima di un numero intero relativo negativo è un numero intero positivo se l'esponente è pari, negativo se l'esponente è dispari, di valore assoluto uguale alla potenza ennesima del valore assoluto della base.

Una potenza con esponente 1 è convenzionalmente uguale alla base; una potenza con esponente "0" è convenzionalmente uguale a 1.

Esempi:

1.	$(-2)^3 = -8$	3.	$(-3)^3 = -27$
2.	$(-4)^2 = +16$	4.	$(-5)^2 = +25$
5.	$(9)^1 = 9$	6.	$(-7)^0 = 1$

I NUMERI RAZIONALI RELATIVI

Un qualsiasi numero che può essere espresso come il rapporto a/b con "a" e "b" $\in$ N e b $\neq 0$ di due numeri interi "a" e "b", con "b" diverso da zero costituisce l'insieme dei numeri razionali e si indica con "Q".

$\frac{a}{b}$ si dice **frazione**.

Dividendo il numeratore di una frazione per il suo denominatore si ottiene:

- un numero decimale razionale che può essere finito (che contiene una sequenza finita di cifre dopo la virgola):
- illimitato e periodico (che contiene una sequenza di cifre che si ripete all'infinito dopo la virgola);
- un numero intero.

Esempio:

1. $\frac{6}{3} = 2$
2. $\frac{-14}{35}$ (che è lo stesso numero razionale di -2/5 = -0,4)
3. $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$ numero decimale illimitato e periodico
4. $\frac{5}{6} = 0,8\overline{3}$ periodico misto.

Ogni coppia del tipo (m, 1) ad esempio $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1} \ldots \frac{m}{1}$ si dice **numero intero relativo assoluto** e si indica con

$Z_a = \{0,1,2,3,4, \ldots, n, \ldots\}$ costituisce un sottoinsieme di Q_a .

I NUMERI REALI

Un qualsiasi numero razionale o irrazionale viene denominato numero reale e indicato con IR.

Quindi i **numeri razionali** di cui abbiamo parlato fino ad ora, costituiscono tutti i numeri che vanno dai naturali ai frazionari, che a loro volta sono finiti e illimitati e periodici.

I **numeri irrazionali** sono tutti i numeri per i quali l'operazione non avrà mai termine.

Questi numeri si diranno illimitati e non periodici.

Esempi:

1. $\sqrt{2} = 1{,}4142135...$

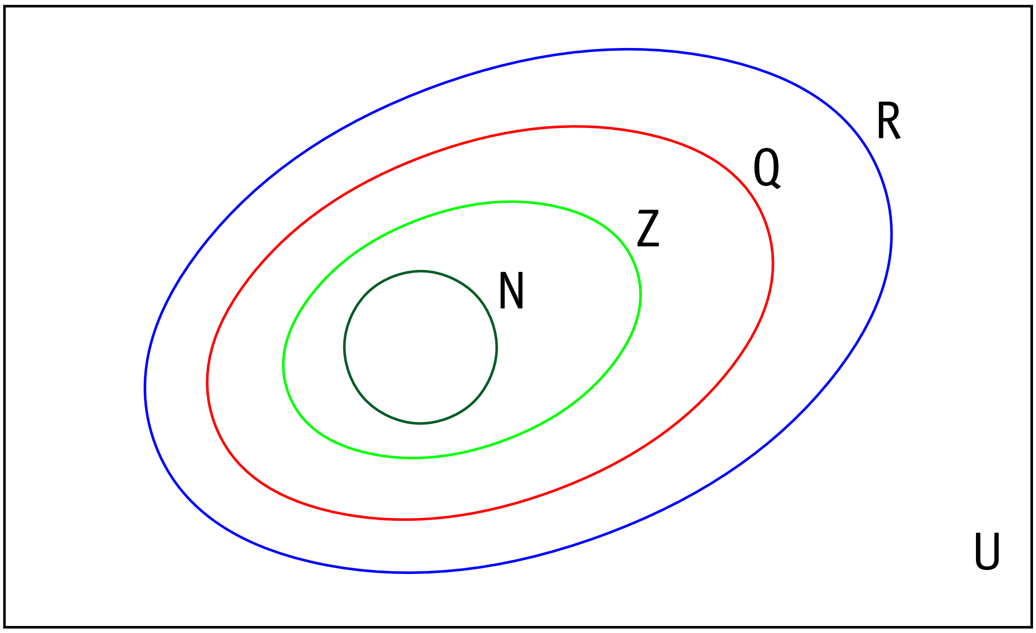
2. $\sqrt{5} = 2{,}2360679...$

RAPPRESENTAZIONE FINALE

Lo studio effettuato, può essere così riassunto:

- Numeri reali
  - Razionali
    - Naturali
    - Frazionari
      - Decimali finiti
      - Decimali illimitati e periodici
  - Irrazionali: decimali illimitati e non periodici

Graficamente:



$N \subset Z \subset Q \subset R \subset U$

"N" è sottoinsieme di "Z" che è sottoinsieme di "Q" che è sottoinsiemen di "R".

"U" è l'insieme universale.