Verificare che la seguente equazione

$$F(x,y) = e^x y + (x-1)^2 \cos y + 2x - 1 = 0$$

definisce una funzione $y = f(x)$ in un intorno di $(0,0)$. Mostrare che tale funzione ha, in $(0,0)$, un punto critico.

SOLUZIONE. Si ha

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = e^x - (x-1)^2 \sin y,$$

da cui

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 1.$$

Essendo $F(0,0) = 0$ si ha, per il Teorema delle funzioni implicite, che esiste una funzione regolare $f\colon U \to \mathbb{R}$, con U intorno di 0, tale per cui $F(x,y) = 0$ se e solo se $y = f(x)$ per ogni $x \in U$. Dunque $F(x, f(x)) = 0$ per ogni $x \in U$, da cui deriva

$$\frac{d}{dx} F(x, f(x)) = 0, \quad \forall x \in U.$$

Ora $F(x, f(x)) = e^x f(x) + (x-1)^2 \cos(f(x)) + 2x - 1$, per cui derivando si ha

$$e^x f(x) + e^x f'(x) + 2(x-1)\cos(f(x)) - (x-1)^2 \sin(f(x)) f'(x) + 2 = 0.$$

Essendo $f(0) = 0$ si ha $f'(0) = 0$, ossia $x = 0$ punto critico per f.