Determinare massimi e minimi liberi della funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^2 - xy^2 + 2y^3$$

SOLUZIONE. I punti critici sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x - y^2 = 0 \\ -2xy + 6y^2 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni

$$P_1 = (0, 0) \quad P_2 = (6, 2).$$

L'Hessiano è dato da

$$H = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -2y \\ -2y & -2x + 12y \end{pmatrix}.$$

Ora si ha

$$H(P_1) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che P_1 necessita di studio locale; intanto

$$f(x, y) - f(0, 0) = f(x, y).$$

Restringendoci alla retta $x = 0$, si ha che $f(x, y) = 2y^3$, che assume, in un qualsiasi intorno di $(0, 0)$ sia valori positivi sia valori negativi. Dunque P_1 è un punto di sella per f. Invece

$$H(P_2) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Volendo calcolare gli autovalori, si deve dunque risolvere

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3} - \lambda & -4 \\ -4 & 12 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

che diventa

$$3\lambda^2 - 38\lambda - 24 = 0$$

che ha una soluzione positiva ed una negativa; quindi P_2 è un punto di sella per f.