Determinare massimi e minimi liberi della funzione

$$f(x, y) = x^2 - xy^2 + 2y^2.$$

SOLUZIONE. $\nabla f = 0$ porta al sistema

$$\begin{cases} 2x - y^2 = 0 \\ -2xy + 4y = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni

$$O = (0, 0) \quad P_1 = (2, 2) \quad P_2 = (2, -2).$$

L'Hessiano di f è dato da

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -2y \\ -2y & -2x + 4 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che

$$H(O) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

che ha due autovalori positivi: O è dunque un punto di mimimo.

$$H(P_1) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha determinante negativo, e dunque autovalori di segno opposto: P_1 è un punto di sella.

$$H(P_2) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha ancora determinante negativo, per cui anche P_2 è punto di sella.