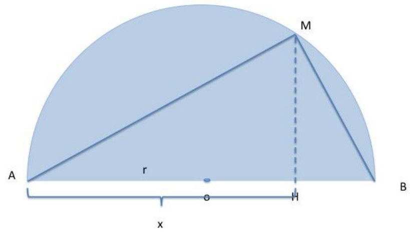
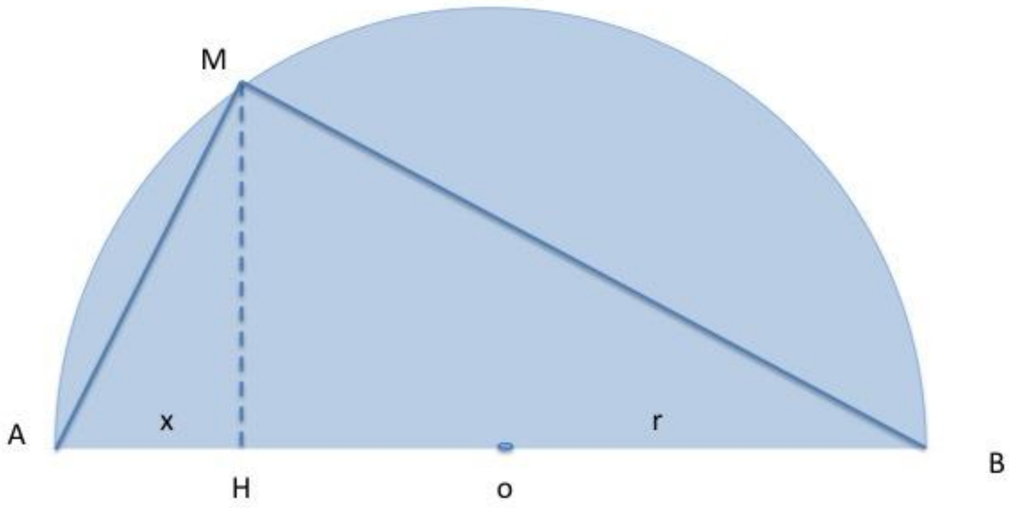
- **Disegna una semicirconferenza di diametro AB che misura 2r. Sia M un punto della semicirconferenza, indica con H il piede della perpendicolare condotta per M ad AB. Determina la posizione di M in modo che si abbia $\overline{BM}=\sqrt{2}\cdot\overline{AH}$ . Poni AH=x e determina il valore di x.**

Se M fosse situato nella metà destra della Semicirconferenza, $\overline{AH}$ sarebbe maggiore del raggio. Di conseguenza, $\overline{BM}$, che vale $\sqrt{2}\cdot\overline{AH}$, sarebbe più grande del raggio e più grande di $\overline{AH}$. Dalla figura a fianco si può notare che ciò non è possibile; quindi M sarà situato per forza nella parte sinistra della semicirconferenza.




Per trovare il valore di x sfruttiamo le proprietà dei triangoli rettangoli, ai quali applicheremo il teorema di Euclide.

Prendiamo in considerazione il triangolo $\overset{\Delta}{AMB}$, rettangolo poiché inscritto in una semicirconferenza. Di esso conosciamo l'ipotenusa, che coincide con il diametro e quindi vale 2r; il lato $\overline{MB}$, che per ipotesi vale $\sqrt{2}\cdot\overline{AH}$, cioè $\sqrt{2}\cdot x$. Possiamo quindi trovare la misura di $\overline{HB}$ sfruttando il primo teorema di Euclide:

$$\overline{AB}:\overline{MB}=\overline{MB}:\overline{HB}$$

$$\overline{HB}=\frac{\overline{MB}^2}{\overline{HB}}=\frac{\left(\sqrt{2}x\right)^2}{2r}=\frac{2x^2}{2r}=\frac{x^2}{r}$$

Sapendo ora che il diametro vale 2r e che esso è dato dalla somma di $\overline{HB}$ più $\overline{AH}$ , impostiamo l'equazione:

$$\overline{AB} = \overline{AH} + \overline{HB}$$

$$2r = x + \frac{x^2}{r}$$

Risolviamo l'equazione, senza porre le condizioni di esistenza, perché sappiamo già che r, essendo la misura di un segmento, non può essere nullo.

$$2r - x - \frac{x^2}{r} = 0$$

$$\frac{2r \times r - x \times r - x^2}{r} = 0$$

$$2r^2 - rx - x^2 = 0$$

Cambiamo segno e ordiniamo, poi troviamo le soluzioni con la formula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x^2 + rx - 2r^2 = 0$$

$$x = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - 4 \times \left(-2r^2\right)}}{2} = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 + 8r^2}}{2} = \frac{-r \pm \sqrt{9r^2}}{2}$$

Possiamo tranquillamente portare $9r^2$ fuori dalla radice, perché sappiamo che r è sicuramente positivo:

$$x = \frac{-r \pm \sqrt{9r^2}}{2} = \frac{-r \pm 3r}{2} \Rightarrow x = \frac{-r + 3r}{2} = \frac{2r}{2} = r$$

$$x = \frac{-r - 3r}{2} = \frac{-4r}{2} = -2r$$

Abbiamo trovato due risultati, dei quali però solo uno è accettabile. Sappiamo infatti che, poiché r è positivo, -2r è sicuramente negativo, cosa che per la misura di un segmento non è possibile. Di conseguenza possiamo accettare come valore della x solo r