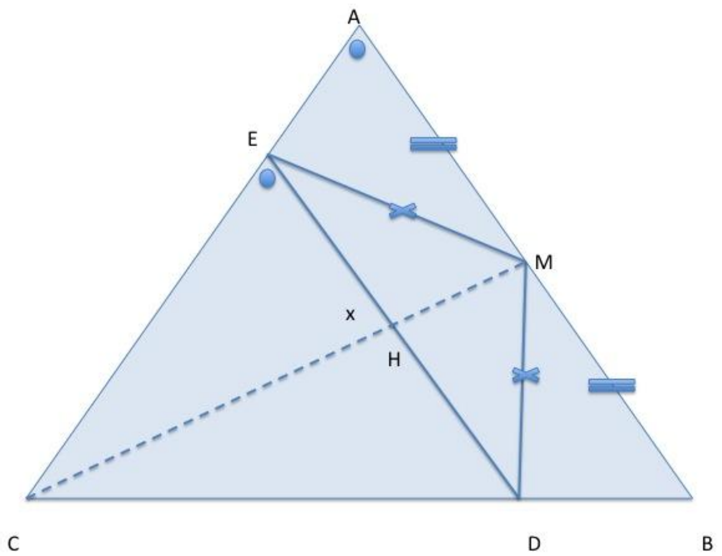
- **In un triangolo equilatero ABC di lato *l* conduci un segmento di lunghezza *x* parallelo ad AB e con gli estremi sugli altri due lati, in modo che il triangolo isoscele che ha per vertice il punto medio di AB e per base il segmento x sia i 4/25 del triangolo dato. Determina il valore di x.**



Per ipotesi sappiamo che $A_{\overset{\Delta}{EMD}} = \frac{4}{25} A_{\overset{\Delta}{ABC}}$. Cerchiamo quindi di determinare le aree di questi due triangoli.

Prendiamo in considerazione il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$: essendo equilatero, la sua altezza CM cade perpendicolare nel punto medio del lato opposto. Sappiamo quindi che

$$\overline{MB} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{l}{2}$$

$$\overline{CB} = l$$

Con il teorema di Pitagora possiamo quindi determinare l'altezza del triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\overline{CM} = \sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{MB}^2} = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{4l^2 - l^2}{4}} = \sqrt{\frac{3l^2}{4}}$$

Possiamo portare fuori radice, tenendo conto che in ogni caso il valore di l, essendo il lato di un triangolo, è sempre positivo:

$$\overline{CM} = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}l}{2}$$

Ora consideriamo il triangolo $\overset{\Delta}{EDC}$: possiamo affermare che esso è simile al triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$, in quanto si ha che $C\hat{E}D = C\hat{A}B$, poiché angoli corrispondenti generati dalle parallele ED e AB tagliate dalla trasversale AC.

Quindi anche il triangolo $\overset{\Delta}{EDC}$ è equilatero, di lato x. Possiamo quindi determinare la sua altezza CH come abbiamo fatto in precedenza:

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{CD}^2 - \overline{DH}^2} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{4x^2 - x^2}{4}} = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}x}{2}$$

Troviamo ora l'altezza HM del triangolo $\overset{\Delta}{EDM}$ come differenza fra l'altezza del triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ e quella del triangolo $\overset{\Delta}{EDC}$:

$$\overline{MH} = \overline{CM} - \overline{CH} = \frac{\sqrt{3}l}{2} - \frac{\sqrt{3}x}{2} = \frac{\sqrt{3}l - \sqrt{3}x}{2}$$

A questo punto, abbiamo sia la base che l'altezza del triangolo $\overset{\Delta}{EDM}$ e possiamo calcolare la sua area:

$$A_{\overset{\Delta}{EDM}} = \frac{\overline{ED} \times \overline{HM}}{2} = \frac{x \times \left(\frac{\sqrt{3}l - \sqrt{3}x}{2}\right)}{2} = \frac{x\left(\sqrt{3}l - \sqrt{3}x\right)}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{x\left(\sqrt{3}l - \sqrt{3}x\right)}{4}$$

Determiniamo anche l'area del triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$A_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{\overline{AB} \times \overline{CM}}{2} = \frac{l \times \left(\frac{\sqrt{3}l}{2}\right)}{2} = \frac{\sqrt{3}l^2}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}l^2}{4}$$

Sapendo che $A_{\overset{\Delta}{EMD}} = \frac{4}{25} A_{\overset{\Delta}{ABC}}$, sostituiamo alle aree i rispettivi valori e risolviamo l'equazione, trovando il valore di x in funzione di l:

$$\frac{x\left(\sqrt{3}l - \sqrt{3}x\right)}{4} = \frac{4}{25} \times \frac{\sqrt{3}l^2}{4}$$

$$\frac{x\left(\sqrt{3}l - \sqrt{3}x\right)}{4} = \frac{\sqrt{3}l^2}{25}$$

$$25 \times x\left(\sqrt{3}l - \sqrt{3}x\right) = 4 \times \sqrt{3}l^2$$

$$25\sqrt{3}lx - 25\sqrt{3}x^2 = 4\sqrt{3}l^2$$

$$25\sqrt{3}lx - 25\sqrt{3}x^2 - 4\sqrt{3}l^2 = 0$$

$$25\sqrt{3}x^2 - 25\sqrt{3}lx + 4\sqrt{3}l^2 = 0$$

Risolviamo con la formula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

$$x = \frac{25\sqrt{3}l \pm \sqrt{\left(25\sqrt{3}l\right)^2 - 4 \times 25\sqrt{3} \times 4\sqrt{3}l^2}}{2 \times 25\sqrt{3}} = \frac{25\sqrt{3}l \pm \sqrt{1875l^2 - 1200l^2}}{50\sqrt{3}} = \frac{25\sqrt{3}l \pm \sqrt{675l^2}}{50\sqrt{3}} =$$

Possiamo scomporre 675 come 225*3, cioè come $15^2 \times 3$ e portare fuori dalla radice 15:

$$\frac{25\sqrt{3}l \pm 15\sqrt{3}l}{50\sqrt{3}} =$$

$$x = \frac{25\sqrt{3}l + 15\sqrt{3}l}{50\sqrt{3}} =$$

$$x = \frac{40\sqrt{3}l}{50\sqrt{3}} = \frac{4}{5}l$$

$$x = \frac{25\sqrt{3}l - 15\sqrt{3}l}{50\sqrt{3}} =$$

$$x = \frac{10\sqrt{3}l}{50\sqrt{3}} = \frac{1}{5}l$$