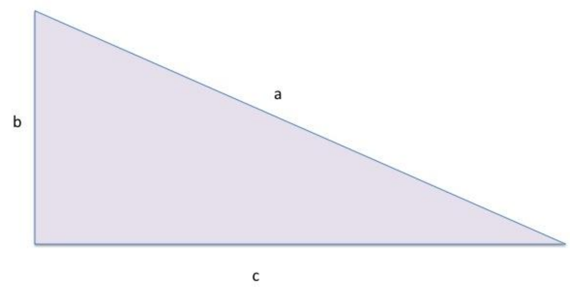
- **Il perimetro di un triangolo rettangolo è 12cm. Sapendo che l'ipotenusa è uguale ai 5/7 della somma dei cateti, calcola l'area del triangolo.**



Chiamiamo i tre lati del triangolo a,b,c, dove b e c sono i cateti, mentre a è l'ipotenusa. Sappiamo che:

$$P = 12cm \Rightarrow a + b + c = 12cm$$

$$a = \frac{5}{7}(b + c)$$

Possiamo impostare un sistema, così da trovare il valore di $(b + c)$, che per comodità indicheremo con k:

$$\begin{cases} a + (b + c) = 12 \\ a = \frac{5}{7}(b + c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + k = 12 \\ a = \frac{5}{7}k \end{cases}$$

Risolviamo con in metodo della sostituzione:

$$\begin{cases} \frac{5}{7}k + k = 12 \\ a = \frac{5}{7}k \end{cases} \quad \begin{cases} 5k + 7k = 12 \times 7 \\ a = \frac{5}{7}k \end{cases} \quad \begin{cases} 12k = 84 \\ a = \frac{5}{7}k \end{cases} \quad \begin{cases} k = \frac{84}{12} = 7 \\ a = \frac{5}{7}k \end{cases}$$

Sostituiamo ora all'altra equazione e troviamo il valore di a:

$$\begin{cases} k = \frac{84}{12} = 7 \\ a = \frac{5}{7} \times 7 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} k = 7 \\ a = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} b + c = 7 \\ a = 5 \end{cases}$$

A questo punto possiamo sfruttare il fatto che il triangolo sia rettangolo e impostare il teorema di Pitagora:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Tuttavia, questa scrittura non ci è utile, perché abbiamo trovato in precedenza il valore della somma di b+c, ma non il valore della somma dei loro quadrati. Possiamo però modificare l'equazione in questo modo:

$$a^2 = (b + c)^2 - 2bc$$

Se svolgessimo il quadrato avremmo infatti che:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc - 2bc = b^2 + c^2$$

Sostituiamo quindi i valori trovati in precedenza e ricaviamo dall'equazione il prodotto di b per c:

$$a^2 = (b + c)^2 - 2bc$$

$$5^2 = 7^2 - 2bc$$
$$25 = 49 - 2bc$$
$$25 - 49 = -2bc$$
$$2bc = 24 \Rightarrow bc = \frac{24}{2} = 12$$

Avendo il prodotto dei cateti possiamo facilmente determinare l'area del triangolo:

$$A = \frac{bc}{2} = \frac{12}{2} = 6cm^2$$