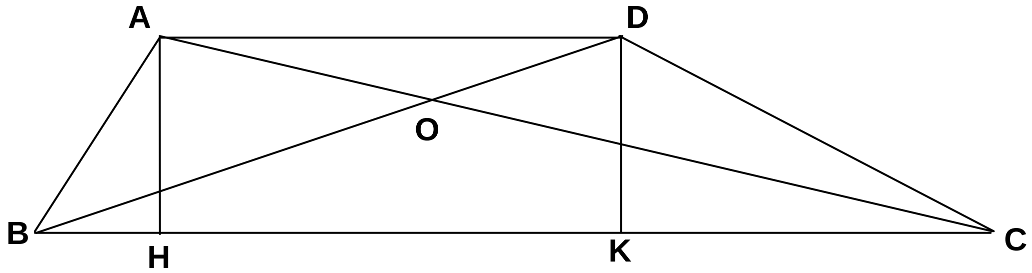
1. Si dimostri che le diagonali di un trapezio dividono il trapezio in quattro triangoli due dei quali sono equiestesi.

Svolgimento a cura di Francesca Ricci



Dobbiamo dimostrare che due di questi quattro triangoli $\left(\overset{\Delta}{AOB};\overset{\Delta}{AOD};\overset{\Delta}{BOC};\overset{\Delta}{DOC}\right)$ sono equiestesi, cioè che hanno la stessa estensione, ovvero la stessa area.

I triangoli $\overset{\Delta}{AOD}$ e $\overset{\Delta}{BOC}$ sono troppo diversi dagli altri per poter essere equiestesi, uno è troppo grande, l'altro troppo piccolo; prendiamo quindi in considerazione gli altri due, $\overset{\Delta}{AOB}$ e $\overset{\Delta}{DOC}$.

Per dimostrare la loro equiestensione dobbiamo dimostrare che hanno la stessa area, cioè che il prodotto della base per l'altezza diviso due dell'uno sia uguale a quello dell'altro.

Poiché, però non abbiamo elementi a sufficienza per farlo, dobbiamo avvalerci di altri triangoli, dei quali i due in questione fanno parte, per poi utilizzare la proprietà di equivalenza per differenza.

Consideriamo i triangoli $\overset{\Delta}{ACB}$ e $\overset{\Delta}{DBC}$. Questi triangoli sono equiestesi, poiché hanno la stessa base BC e altezze congruenti, AH = DK. Di conseguenza, hanno la stessa area.

Notiamo che ciascuno di questi due triangoli può essere scomposto in altri due: $\overset{\Delta}{ACB}$ è composto da $\overset{\Delta}{AOB}+\overset{\Delta}{BOC}$; $\overset{\Delta}{DBC}$ è composto da $\overset{\Delta}{DOC}+\overset{\Delta}{BOC}$. Vediamo quindi che vi è un triangolo in comune ($\overset{\Delta}{BOC}$).

Per questo motivo, essendo $\overset{\Delta}{ACB} \approx \overset{\Delta}{DBC}$, deve per forza essere che $\overset{\Delta}{AOB} \approx \overset{\Delta}{DOC}$.

Abbiamo quindi dimostrato la tesi del problema.