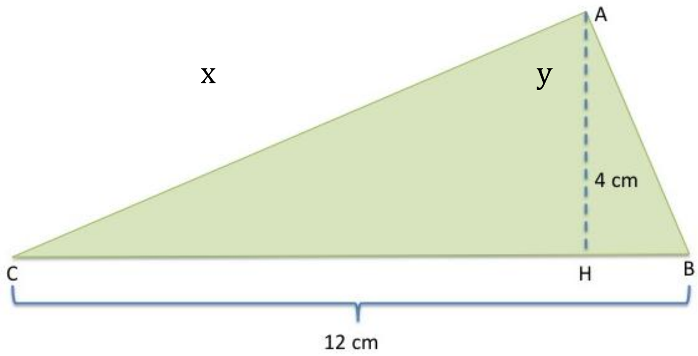
1. **Nel triangolo rettangolo ABC, l'altezza relativa all'ipotenusa è AH.**
   a) Se BC=12cm e AH= 4cm calcola il perimetro del triangolo ABC.
   b) Se AH= 12cm e il perimetro di ABH=36cm calcola l'area del triangolo ABC.

Svolgimento a cura di Francesca Ricci

a)



Il problema può essere risolto impostando un sistema a due incognite. Chiamiamo il lato CH con x e il lato HB con y. Impostiamo il secondo teorema di Euclide, secondo il quale l'altezza, in un triangolo rettangolo, è media proporzionale fra le due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa. Abbiamo, quindi, che:

$$CH : AH = AH : HB$$

$$x : AH = AH : y$$

$$x : 4 = 4 : y$$

Da cui $4 \times 4 = xy \to xy = 16$

Possiamo impostare la seconda equazione sapendo che l'ipotenusa, data dalla somma di CH e HB, è lunga 12 cm.

Quindi $\begin{aligned} CH + HB &= 12 \\ x + y &= 12 \end{aligned}$

Impostiamo quindi il sistema: $\begin{cases} xy = 16 \\ x + y = 12 \end{cases}$

Notiamo che il sistema è simmetrico e che possiamo ridurlo ad un'equazione del tipo

$$t^2 - st + p = 0$$

dove per s si intende la somma x+y, mentre per p il prodotto xy.

$$t^2 - (x+y)t + xy = 0 \to t^2 - 12t + 16 = 0$$

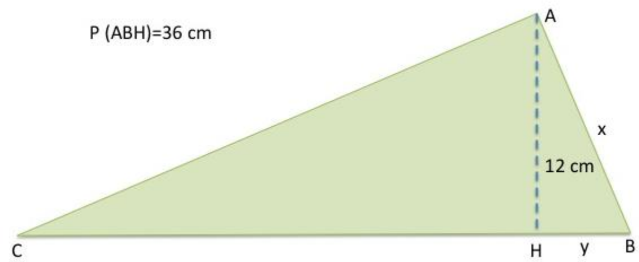
Risolviamo ora l'equazione:

$$t = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 16}}{1} = 6 \pm \sqrt{36 - 16} = 6 \pm \sqrt{20} = 6 \pm 2\sqrt{5}$$

Poiché in un sistema simmetrico le soluzioni sono simmetriche, i valori trovati valgono, alternativamente, sia per la x che per la y.

Quindi:

$$\begin{cases} x = 6 + 2\sqrt{5} \\ y = 6 - 2\sqrt{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 6 - 2\sqrt{5} \\ y = 6 + 2\sqrt{5} \end{cases}$$



b)

Chiamiamo con x il lato AB e con y il lato HB; anche in questo casa cerchiamo di impostare un sistema a due incognite.

Sappiamo che il perimetro del triangolo ABH è 36 cm, quindi

$$AB + BH + AH = 36$$

$$x + y + 12 = 36$$

$$x + y = 36 - 12$$

$$x + y = 24$$

Possiamo inoltre ricavare il lato AH con il teorema di Pitagora:

$$AH = \sqrt{AB^2 - HB^2}$$

$$AH^2 = AB^2 - HB^2$$

$$12^2 = x^2 - y^2$$

Abbiamo quindi due equazioni:

$$\begin{cases} x + y = 24 \\ x^2 - y^2 = 144 \end{cases}$$

Possiamo risolvere il sistema per sostituzione:

$$\begin{cases} x = 24 - y \\ x^2 - y^2 = 144 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 24 - y \\ (24 - y)^2 - y^2 = 144 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 24 - y \\ 576 + y^2 - 48y - y^2 = 144 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 24 - y \\ -48y = 144 - 576 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 24 - y \\ -48y = -432 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 24 - y \\ y = \dfrac{-432}{-48} = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 24 - 9 \\ y = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 15 \\ y = 9 \end{cases}$$

A questo punto, sapendo che in un triangolo rettangolo un cateto è medio proporzionale fra l'ipotenusa e la sua proiezione sell'ipotenusa, possiamo scrivere che

$$CB : AB = AB : HB$$

$$CB : x = x : y$$

$$CB : 15 = 15 : 9$$

$$CB = \frac{15 \times 15}{9} = 25$$

Sapendo quindi che l'ipotenusa è lunga 25 cm e che la sua altezza relativa misura 12 cm, possiamo calcolare l'area del triangolo.

$$A_{ABC} = \frac{CB \times AH}{2} = \frac{25 \times 12}{2} = 150cm^2$$