Verifica di matematica, classe II liceo scientifico

Equazioni di secondo grado, equazioni frazionarie, equazioni con moduli, disequazioni, sistemi di disequazioni, disequazioni frazionarie, discussione di equazioni parametriche, applicazioni dei teoremi di Pitagora e Euclide, problemi risolvibili con equazioni di 2° grado.

1. $x^2+49=0$; $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})=13$; $x^2-2\sqrt{3}x-4=0$; $25x-x^2=0$
2. $\frac{x+9}{x-3}=2-\frac{x-3}{x+9}$
3. $\frac{x-ax+2a^2}{x^2-a^2}-\frac{2}{x+a}=\frac{x-2a}{a-x}$
4. $|2x^2-x|=2x^2+x-8$
5. $\frac{1}{2}x^2-3x+4>0$ $x^2-4\leq 0$ $4x^2-4x+1\geq 0$ $3x^2-2x<0$
6. $\begin{cases}\frac{x^2+x+1}{x^3-x}\geq 0\\ 3-4x^2<0\end{cases}$
7. I coefficienti a e b di un'equazione di secondo grado $ax^2+bx+c=0$ sono a=3 e b=5 e una soluzione è $x_1=\frac{1}{3}$. Determina l'altra soluzione e il coefficiente c.
8. Per quali valori di k l'equazione $kx^2-(2k+1)x+k-5=0$ ha:
   a. soluzioni reali;
   b. la somma delle radici è 2
   c. la somma dei reciproci delle radici è 1;
   d. Una soluzione è 0
   e. la somma delle radici sia uguale al loro prodotto.
9. Disegna una semicirconferenza di diametro AB che misura 2r (r è una misura assegnata). Sia M un punto della semicirconferenza, indica con H il piede della perpendicolare condotta per M ad AB. Determina la posizione di M (per esempio calcola AH) in modo che si abbia $\overline{BM}=\sqrt{2}\cdot\overline{AH}$.
10. In un triangolo equilatero ABC di lato *l* conduci un segmento di lunghezza *x* parallelo ad AB e con gli estremi sugli altri due lati, in modo che il triangolo isoscele che ha per vertice il punto medio di AB e per base il segmento di lunghezza x sia i 4/25 del triangolo dato. Determina il valore di x.
11. Il perimetro di un triangolo rettangolo è 12cm. Sapendo che l'ipotenusa è uguale ai 5/7 della somma dei cateti, calcola l'area del triangolo.
12. Un capitale di 12000 € è depositato in banca a un certo tasso di interesse annuale. Alla scadenza del primo anno gli interessi maturati vengono reinvestiti sullo stesso conto allo stesso tasso. Alla scadenza del secondo anno si ritira la somma di 12854,70 euro. Qual è stato il tasso di interesse?

1. $x^2+49=0$; $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})=13$; $x^2-2\sqrt{3}x-4=0$; $25x-x^2=0$

a) $x^2+49=0$

$x^2=-49$

Poiché sappiamo che un numero elevato al quadrato sarà sempre positivo, questa equazione è impossibile, non ha soluzioni.

$x^2=-49 \rightarrow impossibile$

b) $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=13$

Moltiplichiamo: poiché abbiamo una somma per un prodotto, calcoleremo direttamente il quadrato del primo meno il quadrato del secondo applicando il prodotto notevole somma per differenza:

$x^2-3=13$

$x^2=13+3$

$x^2=16$

$x=\pm 4$

c) $x^2-2\sqrt{3}x-4=0$

Risolviamo con la formula ridotta:

$$x=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}$$

$$x=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+4}}{1}=\sqrt{3}\pm\sqrt{3+4}=\sqrt{3}\pm\sqrt{7}$$

d) $25x-x^2=0$

Raccogliamo la x:

$x(25-x)=0$

Risolviamo con la legge dell'annullamento del prodotto:

$x=0$

$25-x=0 \Rightarrow x=25$

2. $\frac{x+9}{x-3} = 2 - \frac{x-3}{x+9}$

Impostiamo le condizioni di esistenza:

C.E.
$x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$

$x+9 \neq 0 \Rightarrow x \neq -9$

Portiamo tutto a sinistra e calcoliamo il minimo comune multiplo, togliendo poi il denominatore.

$$\frac{x+9}{x-3} - 2 + \frac{x-3}{x+9} = 0$$

$$\frac{(x+9)(x+9) - 2(x-3)(x+9) + (x-3)(x-3)}{(x-3)(x+9)} = 0$$

$$\frac{(x+9)^2 - 2(x-3)(x+9) + (x-3)^2}{(x-3)(x+9)} = 0$$

$$\frac{x^2 + 81 + 18x - 2x^2 - 18x + 6x + 54 + x^2 + 9 - 6x}{(x-3)(x+9)} = 0$$

$$81 + 54 + 9 = 0$$

$$144 = 0 \rightarrow \textit{impossibile}$$

3. $\frac{x-ax+2a^2}{x^2-a^2}-\frac{2}{x+a}=\frac{x-2a}{a-x}$

Scomponiamo in fattori:

$$\frac{x-ax+2a^2}{(x+a)(x-a)}-\frac{2}{x+a}=\frac{x-2a}{a-x}$$

Cambiamo segno all'ultima frazione, affinché il minimo comune multiplo sia uguale:

$$\frac{x-ax+2a^2}{(x+a)(x-a)}-\frac{2}{x+a}=-\frac{x-2a}{-a+x}$$

$$\frac{x-ax+2a^2}{(x+a)(x-a)}-\frac{2}{x+a}+\frac{x-2a}{-a+x}=0$$

Impostiamo le condizioni di esistenza:

C.E.

$x+a\neq 0 \Rightarrow x\neq -a$
$x-a\neq 0 \Rightarrow x\neq a$

Procediamo con il minimo comune multiplo, eliminando poi il denominatore:

$$\frac{x-ax+2a^2-2(x-a)+(x-2a)(x+a)}{(x+a)(x-a)}=0$$

$x-ax+2a^2-2x+2a+x^2-2ax+ax-2a^2=0$
$-x+2a+x^2-2ax=0$
$x^2-x-2ax+2a=0$
$x^2+(1+2a)x+2a=0$

Notiamo che il trinomio è un trinomio notevole, cioè della forma $x^2-sx+p=0$. Il coefficiente della x di primo grado è formato dalla somma di due valori, il cui prodotto costituisce il termine noto:
$(x-1)(x-2a)=0$

Eseguiamo la legge dell'annullamento del prodotto:

$x-1=0 \Rightarrow x=1$
$x-2a=0 \Rightarrow x=2a$

4. $\left|2x^2-x\right|=2x^2+x-8$

Per risolvere questa equazione, dobbiamo studiare il caso in cui l'argomento del valore assoluto è minore di zero e quello in cui non è minore di zero:

$$\begin{cases} 2x^2-x\geq 0 \\ 2x^2-x=2x^2+x-8 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} 2x^2-x<0 \\ -(2x^2-x)=2x^2+x-8 \end{cases}$$

Partiamo dal primo sistema:

$$\begin{cases} 2x^2-x\geq 0 \\ 2x^2-x=2x^2+x-8 \end{cases}$$

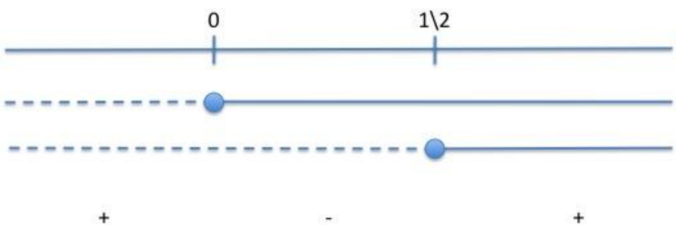
$$2x^2-x\geq 0$$

$$x(2x-1)\geq 0$$

Studiamo il segno:

$x\geq 0$

$2x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq \frac{1}{2}$



$$x\leq 0 \vee x\geq \frac{1}{2}$$

Risolviamo l'equazione:

$2x^2-x=2x^2+x-8$

$2x^2-x-2x^2-x+8=0$

$-2x+8=0 \Rightarrow x=4$

Il primo sistema sarà quindi

$$\begin{cases} x\leq 0 \vee x\geq \frac{1}{2} \\ x=4 \end{cases} \qquad S: x=4$$

Passiamo ora al secondo sistema:

$$\begin{cases} 2x^2 - x < 0 \\ -(2x^2 - x) = 2x^2 + x - 8 \end{cases}$$

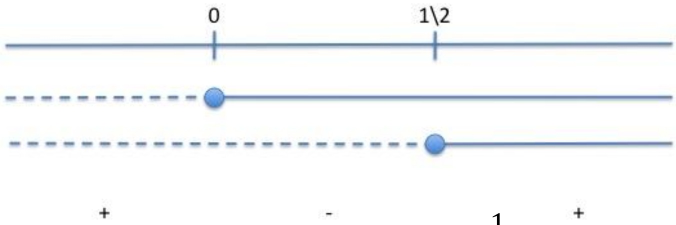
$2x^2 - x < 0$

$x(2x - 1) < 0$

Studiamo il segno:

$x \geq 0$

$2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \dfrac{1}{2}$



Prendiamo l'intervallo in cui è negativo: $0 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$

Risolviamo l'equazione:

$-2x^2 + x = 2x^2 + x - 8$

$2x^2 - x + 2x^2 + x - 8 = 0$

$4x^2 - 8 = 0$

$x^2 = \dfrac{8}{4} = 2$

$x = \pm\sqrt{2}$

Il secondo sistema sarà quindi

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Poiché $\sqrt{2}$ vale circa 1,41 il sistema è impossibile.

I due sistemi erano legati dall'unione, quindi le soluzioni che soddisfano l'equazione di partenza saranno solo quelle del primo sistema, cioè x=4.

5. $\frac{1}{2}x^2-3x+4>0$ $\quad x^2-4\leq 0 \quad 4x^2-4x+1\geq 0 \quad 3x^2-2x<0$

a) $\frac{1}{2}x^2-3x+4>0$

Calcoliamo il minimo comune multiplo, togliendo poi il denominatore, poiché è un numero positivo e diverso da zero:

$$\frac{x^2-3x\times 2+4\times 2}{2}>0$$

$$x^2-6x+8>0$$

Passiamo all'equazione associata:

$$x^2-6x+8=0$$

Troviamo le soluzioni con la formula $x=\dfrac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}$

$$x=\frac{-\frac{-6}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2-8}}{1}=3\pm\sqrt{3^2-8}=3\pm\sqrt{9-8}=3\pm 1 \Rightarrow x=4\vee x=2$$

Poiché la disequazione è maggiore di zero, sarà risolta per valori esterni all'intervallo delle radici:

$$S: x<2\vee x>4$$

b) $x^2-4\leq 0$

Passiamo all'equazione associata e troviamo le soluzioni:

$$x^2-4=0$$
$$x^2=4$$
$$x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$$

Poiché la disequazione è minore di zero, sarà risolta per valori interni all'intervallo delle radici:

$$S: -2\leq x\leq 2$$

c) $4x^2 - 4x + 1 \geq 0$

Notiamo che il polinomio è il quadrato di un binomio:

$(2x-1)^2 \geq 0 \qquad \forall x \in \Re$

Qualsiasi numero elevato al quadrato è sempre positivo, cioè sempre maggiore o uguale a zero.

d) $3x^2 - 2x < 0$

Passiamo all'equazione associata, poi procediamo con il raccoglimento della x:

$$3x^2 - 2x = 0$$
$$x(3x-2) = 0$$

Risolviamo con la legge dell'annullamento del prodotto:

$$x = 0$$
$$3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

Poiché la disequazione è minore di zero, sarà risolta per valori interni all'intervallo delle radici:

$$S: 0 < x < \frac{2}{3}$$

6. $\begin{cases} \dfrac{x^2+x+1}{x^3-x} \geq 0 \\ 3-4x^2 < 0 \end{cases}$

Cominciamo dalla prima disequazione, ponendo numeratore maggiore o uguale a zero e denominatore maggiore di zero, poi studiamo il segno:

$$\frac{x^2+x+1}{x^3-x} \geq 0$$

$N \geq 0$

$x^2+x+1 \geq 0$

Passiamo all'equazione associata e troviamo le soluzioni:

$x^2+x+1=0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

L'equazione è impossibile, poiché $\Delta < 0$.
La disequazione corrispondente, quindi, sarà risolta $\forall x \in \Re$.

$D > 0$

$x^3 - x > 0$

Raccogliamo la x:

$x(x^2-1) > 0$

Studiamo il segno:

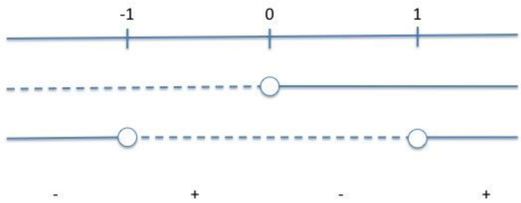
$x > 0$

$x^2 - 1 > 0$

$x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

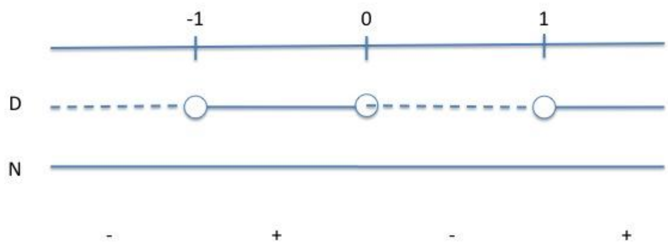
$x < -1 \vee x > 1$



Poiché la disequazione è maggiore di zero, prendiamo gli intervalli positivi:

$-1 < x < 0 \vee x > 1$

Studiamo ora il segno fra numeratore e denominatore:



Ecco quindi le soluzioni della prima disequazione:

$$S: -1 < x < 0 \vee x > 1$$

Passiamo ora alla seconda:

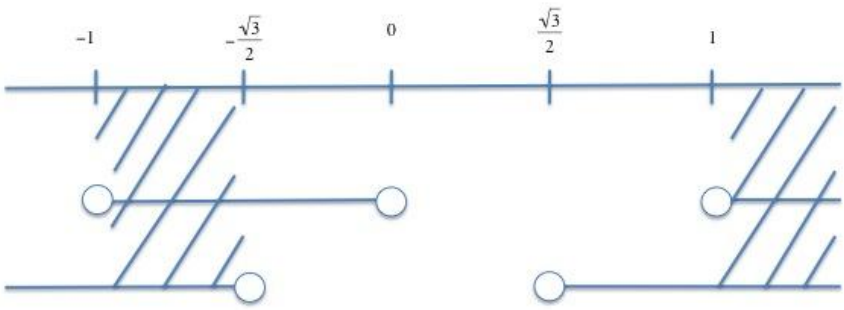
$$3 - 4x^2 < 0$$
$$-3 + 4x^2 > 0$$

Equazione associata:

$$-3 + 4x^2 = 0$$
$$4x^2 = 3$$
$$x^2 = \frac{3}{4} \qquad x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Poiché la disequazione è maggiore di zero, sarà risolta per valori esterni all'intervallo delle radici:

$$S: x < -\frac{\sqrt{3}}{2} \vee x > \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Ecco quindi il sistema:

$$\begin{cases} -1 < x < 0 \vee x > 1 \\ x < -\frac{\sqrt{3}}{2} \vee x > \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Troviamo le soluzioni:

$$S: -1 < x < -\frac{\sqrt{3}}{2} \vee x > 1$$

7. I coefficienti a e b di un'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ sono a=3 e b=5 e una soluzione è $x_1 = \frac{1}{3}$. Determina l'altra soluzione e il coefficiente c.

Sapendo che a=3 e b=5, possiamo scrivere l'equazione in questo modo:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$3x^2 + 5x + c = 0$$

Inoltre, poiché una delle soluzioni è $x = \frac{1}{3}$, possiamo sostituire $\frac{1}{3}$ alla x, per poter trovare il valore del termine noto:

$$3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 5 \times \frac{1}{3} + c = 0$$

$$3 \times \frac{1}{9} + 5 \times \frac{1}{3} + c = 0$$

$$\frac{1}{3} + \frac{5}{3} + c = 0$$

$$\frac{1+5+3c}{3} = 0$$

$$6 + 3c = 0$$

$$3c = -6$$

$$c = -2$$

L'equazione diventa quindi così:

$$3x^2 + 5x - 2 = 0$$

Troviamo le sue soluzioni:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times (-2) \times 3}}{3 \times 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6}$$

$$x = -2 \vee x = \frac{1}{3}$$

8. Per quali valori di k l'equazione $kx^2-(2k+1)x+k-5=0$ ha:
a. soluzioni reali;
b. la somma delle radici è 2
c. la somma dei reciproci delle radici è 1;
d. La somma dei quadrati delle radici è 0
e. la somma delle radici sia maggiore del loro prodotto.

$$kx^2-(2k+1)x+k-5=0$$
$$(ax^2+bx+c=0)$$

Per prima cosa, troviamo il delta dell'equazione:

$$\Delta=b^2-4ac=$$
$$(2k+1)^2-4\times k\times(k-5)=$$
$$4k^2+1+4k-4k^2+20k=$$
$$1+24k$$

a. Affinché l'equazione abbia soluzioni reali, è necessario che il suo Δ sia maggiore o uguale a zero. Imponiamo quindi che

$$\Delta\geq 0\Rightarrow b^2-4ac\geq 0$$
$$(2k+1)^2-4\times k\times(k-5)\geq 0$$
$$4k^2+1+4k-4k^2+20k\geq 0$$
$$1+24k\geq 0$$
$$k\geq -\frac{1}{24}$$

b. Per far sì che la somma delle radici sia 2, è necessario porre che

$$x_1+x_2=2\Rightarrow -\frac{b}{a}=2$$
$$-\frac{-(2k+1)}{k}=2$$

Poniamo $k\neq 0$.
Risolviamo l'equazione:

$$\frac{(2k+1)}{k}=2$$

$$\frac{2k+1}{k}-2=0$$

$$\frac{2k+1-2k}{k}=0$$

$1=0$ IMPOSSIBILE

Non esistono quindi valori di k affinché la somma delle radici dell'equazione sia 2.

c. Poiché il reciproco di un numero x è $\frac{1}{x}$, la somma dei reciproci delle radici sarà $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

Abbiamo quindi che: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=1$

Minimo comune multiplo: $\frac{x_2+x_1}{x_1 \cdot x_2}=\frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 \cdot x_2}$

Togliamo il denominatore:
$x_1+x_2=x_1x_2$

la somma delle radici è data da $-\frac{b}{a}$, mentre il loro prodotto da $\frac{c}{a}$, quindi:

$$-\frac{b}{a}=\frac{c}{a}$$

$$-\frac{-(2k+1)}{k}=\frac{k-5}{k}$$

Poniamo k$\neq 0$

$$2k+1=k-5$$
$$k=-6$$

Considerando il segno del discriminante, non possiamo accettare le soluzioni che siano minori di $-\frac{1}{24}$.

Di conseguenza, la soluzione $k=-6$ non è accettabile.

d. $x_1^{\,2}+x_2^{\,2}=0$

Per poter calcolare questa somma di quadrati, passiamo per il quadrato del binomio costituito dalla somma delle radici, al quale sottrarremo il doppio prodotto del primo per il secondo termine:

$$x_1^{\,2}+x_2^{\,2}=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$$

Se svolgessimo il quadrato avremmo infatti:

$$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+2x_1x_2-2x_1x_2=x_1^{\,2}+x_2^{\,2}$$

Procediamo ora sostituendo alla somma $-\frac{b}{a}$ e al prodotto $\frac{c}{a}$:

$$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=0$$

$$\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\times\frac{c}{a}=0$$

$$\frac{b^{\,2}}{a^2}-\frac{2c}{a}=0$$

$$\frac{[-(2k+1)]^2}{k^2}-\frac{2(k-5)}{k}=0$$

Poniamo le condizioni di esistenza e risolviamo l'equazione:
C.E. $k\neq 0$

$$\frac{(2k+1)^2}{k^2}-\frac{2k-10}{k}=0$$

$$\frac{4k^2+1+4k}{k^2}-\frac{2k-10}{k}=0$$

Calcoliamo il minimo comune multiplo e togliamo il denominatore:

$$\frac{\left(4k^2+1+4k\right)-k\times(2k-10)}{k^2}=0$$

$$\frac{4k^2+1+4k-\left(2k^2-10k\right)}{k(k-5)^2}=0$$

$$\frac{4k^2+1+4k-2k^2+10k}{k(k-5)^2}=0$$

$$2k^2+14k+1=0$$

Troviamo le soluzioni con la formula $k=\dfrac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}$:

$$k=\frac{-\frac{14}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{14}{2}\right)^2-2\times 1}}{2}=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-2}}{2}=\frac{-7\pm\sqrt{47}}{2}$$

Considerando il segno del discriminante, non possiamo accettare le soluzioni che siano minori di $-\frac{1}{24}$.

La soluzione $k=\dfrac{-7+\sqrt{47}}{2}$, che corrisponde a circa -0,07, non è accettabile, poiché $-\frac{1}{24}=-0{,}04$.

Dobbiamo scartare anche la soluzione $k=\dfrac{-7-\sqrt{47}}{2}=-6{,}92$.

e. $x_1+x_2>x_1x_2$

La somma delle radici è data da $-\frac{b}{a}$, mentre il loro prodotto da $\frac{c}{a}$, quindi:

$$-\frac{b}{a}>\frac{c}{a}$$

$$-\frac{-(2k+1)}{k}>\frac{k-5}{k}$$

Risolviamo la disequazione:

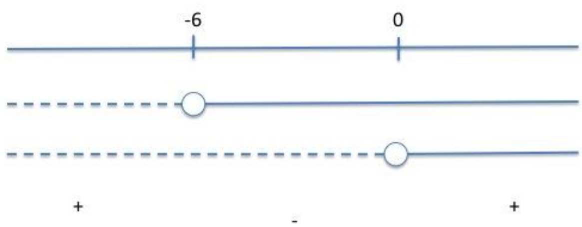
$$\frac{2k+1}{k}-\frac{k-5}{k}>0$$

$$\frac{2k+1-k+5}{k}>0$$

$$\frac{k+6}{k}>0$$

$N>0$ $\qquad$ $D>0$

$k+6>0\Rightarrow k>-6$ $\qquad$ $k>0$



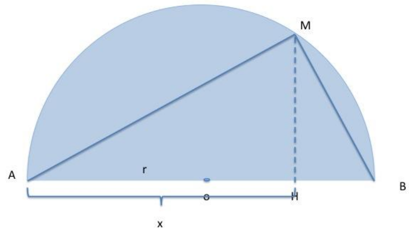
Dal grafico stabiliamo il segno:

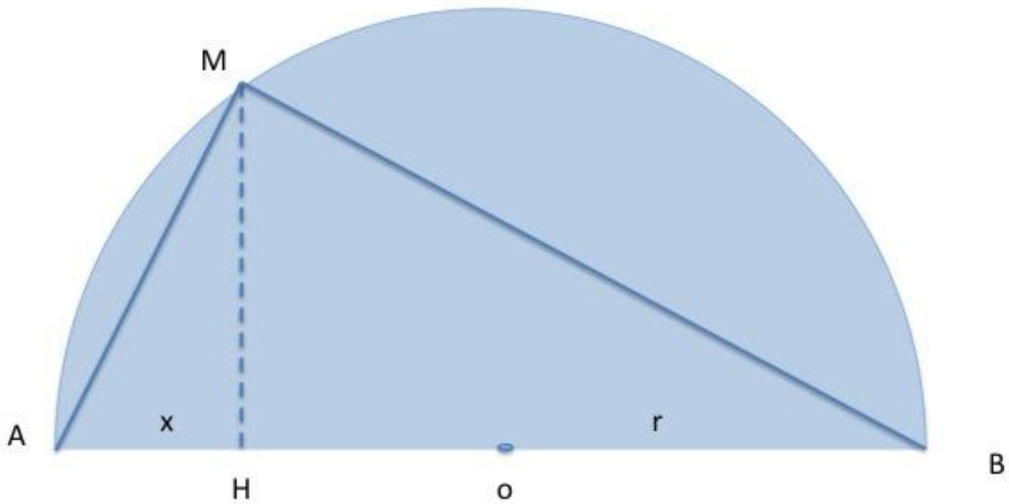
Dato che la disequazione è maggiore di zero, prendiamo gli intervalli positivi:

$k<-6\vee k>0$

9. Disegna una semicirconferenza di diametro AB che misura 2r. Sia M un punto della semicirconferenza, indica con H il piede della perpendicolare condotta per M ad AB. Determina la posizione di M in modo che si abbia $\overline{BM} = \sqrt{2} \cdot \overline{AH}$. Poni AH=x e determina il valore di x.

Se M fosse situato nella metà destra della Semicirconferenza, $\overline{AH}$ sarebbe maggiore del raggio. Di conseguenza, $\overline{BM}$, che vale $\sqrt{2} \cdot \overline{AH}$, sarebbe più grande del raggio e più grande di $\overline{AH}$. Dalla figura a fianco si può notare che ciò non è possibile; quindi M sarà situato per forza nella parte sinistra della semicirconferenza.





Per trovare il valore di x sfruttiamo le proprietà dei triangoli rettangoli, ai quali applicheremo il teorema di Euclide.

Prendiamo in considerazione il triangolo $\overset{\Delta}{AMB}$, rettangolo poiché inscritto in una semicirconferenza. Di esso conosciamo l'ipotenusa, che coincide con il diametro e quindi vale 2r; il lato $\overline{MB}$, che per ipotesi vale $\sqrt{2} \cdot \overline{AH}$, cioè $\sqrt{2} \cdot x$. Possiamo quindi trovare la misura di $\overline{HB}$ sfruttando il primo teorema di Euclide:

$$\overline{AB} : \overline{MB} = \overline{MB} : \overline{HB}$$

$$\overline{HB} = \frac{\overline{MB}^2}{\overline{HB}} = \frac{\left(\sqrt{2}x\right)^2}{2r} = \frac{2x^2}{2r} = \frac{x^2}{r}$$

Sapendo ora che il diametro vale 2r e che esso è dato dalla somma di $\overline{HB}$ più $\overline{AH}$, impostiamo l'equazione:

$$\overline{AB} = \overline{AH} + \overline{HB}$$

$$2r = x + \frac{x^2}{r}$$

Risolviamo l'equazione, senza porre le condizioni di esistenza, perché sappiamo già che r, essendo la misura di un segmento, non può essere nullo.

$$2r - x - \frac{x^2}{r} = 0$$

$$\frac{2r \times r - x \times r - x^2}{r} = 0$$

$$2r^2 - rx - x^2 = 0$$

Cambiamo segno e ordiniamo, poi troviamo le soluzioni con la formula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x^2 + rx - 2r^2 = 0$$

$$x = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - 4 \times \left(-2r^2\right)}}{2} = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 + 8r^2}}{2} = \frac{-r \pm \sqrt{9r^2}}{2}$$

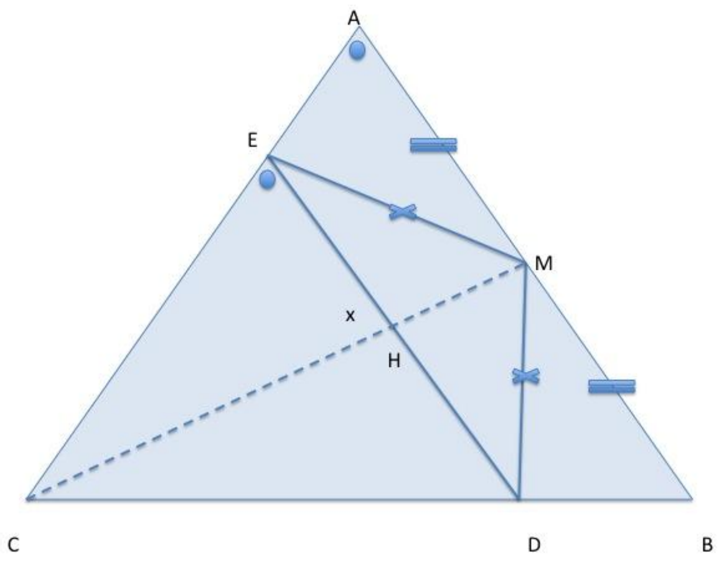
Possiamo tranquillamente portare $9r^2$ fuori dalla radice, perché sappiamo che r è sicuramente positivo:

$$x = \frac{-r \pm \sqrt{9r^2}}{2} = \frac{-r \pm 3r}{2} \Rightarrow x = \frac{-r + 3r}{2} = \frac{2r}{2} = r$$

$$x = \frac{-r - 3r}{2} = \frac{-4r}{2} = -2r$$

Abbiamo trovato due risultati, dei quali però solo uno è accettabile. Sappiamo infatti che, poiché r è positivo, -2r è sicuramente negativo, cosa che per la misura di un segmento non è possibile. Di conseguenza possiamo accettare come valore della x solo r

10. In un triangolo equilatero ABC di lato *l* conduci un segmento di lunghezza *x* parallelo ad AB e con gli estremi sugli altri due lati, in modo che il triangolo isoscele che ha per vertice il punto medio di AB e per base il segmento x sia i 4/25 del triangolo dato. Determina il valore di x.



Per ipotesi sappiamo che $A_{\overset{\Delta}{EMD}} = \frac{4}{25} A_{\overset{\Delta}{ABC}}$. Cerchiamo quindi di determinare le aree di questi due triangoli.

Prendiamo in considerazione il triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$: essendo equilatero, la sua altezza CM cade perpendicolare nel punto medio del lato opposto. Sappiamo quindi che

$$\overline{MB} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{l}{2}$$

$$\overline{CB} = l$$

Con il teorema di Pitagora possiamo quindi determinare l'altezza del triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\overline{CM} = \sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{MB}^2} = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{4l^2 - l^2}{4}} = \sqrt{\frac{3l^2}{4}}$$

Possiamo portare fuori radice, tenendo conto che in ogni caso il valore di l, essendo il lato di un triangolo, è sempre positivo:

$$\overline{CM} = \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}l}{2}$$

Ora consideriamo il triangolo $\overset{\Delta}{EDC}$: possiamo affermare che esso è simile al triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$, in quanto si ha che $C\hat{E}D = C\hat{A}B$, poiché angoli corrispondenti generati dalle parallele ED e AB tagliate dalla trasversale AC.

Quindi anche il triangolo $\overset{\Delta}{EDC}$ è equilatero, di lato x. Possiamo quindi determinare la sua altezza CH come abbiamo fatto in precedenza:

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{CD}^2 - \overline{DH}^2} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{4x^2 - x^2}{4}} = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}x}{2}$$

Troviamo ora l'altezza HM del triangolo $\overset{\Delta}{EDM}$ come differenza fra l'altezza del triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$ e quella del triangolo $\overset{\Delta}{EDC}$:

$$\overline{MH} = \overline{CM} - \overline{CH} = \frac{\sqrt{3}l}{2} - \frac{\sqrt{3}x}{2} = \frac{\sqrt{3}l - \sqrt{3}x}{2}$$

A questo punto, abbiamo sia la base che l'altezza del triangolo $\overset{\Delta}{EDM}$ e possiamo calcolare la sua area:

$$A_{\overset{\Delta}{EDM}} = \frac{\overline{ED} \times \overline{HM}}{2} = \frac{x \times \left(\frac{\sqrt{3}l - \sqrt{3}x}{2}\right)}{2} = \frac{x\left(\sqrt{3}l - \sqrt{3}x\right)}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{x\left(\sqrt{3}l - \sqrt{3}x\right)}{4}$$

Determiniamo anche l'area del triangolo $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$A_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{\overline{AB} \times \overline{CM}}{2} = \frac{l \times \left(\frac{\sqrt{3}l}{2}\right)}{2} = \frac{\sqrt{3}l^2}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}l^2}{4}$$

Sapendo che $A_{\overset{\Delta}{EMD}} = \frac{4}{25} A_{\overset{\Delta}{ABC}}$, sostituiamo alle aree i rispettivi valori e risolviamo l'equazione, trovando il valore di x in funzione di l:

$$\frac{x\left(\sqrt{3}l - \sqrt{3}x\right)}{4} = \frac{4}{25} \times \frac{\sqrt{3}l^2}{4}$$

$$\frac{x\left(\sqrt{3}l - \sqrt{3}x\right)}{4} = \frac{\sqrt{3}l^2}{25}$$

$25 \times x\left(\sqrt{3}l - \sqrt{3}x\right) = 4 \times \sqrt{3}l^2$

$25\sqrt{3}lx - 25\sqrt{3}x^2 = 4\sqrt{3}l^2$

$25\sqrt{3}lx - 25\sqrt{3}x^2 - 4\sqrt{3}l^2 = 0$

$25\sqrt{3}x^2 - 25\sqrt{3}lx + 4\sqrt{3}l^2 = 0$

Risolviamo con la formula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

$$x = \frac{25\sqrt{3}l \pm \sqrt{\left(25\sqrt{3}l\right)^2 - 4 \times 25\sqrt{3} \times 4\sqrt{3}l^2}}{2 \times 25\sqrt{3}} = \frac{25\sqrt{3}l \pm \sqrt{1875l^2 - 1200l^2}}{50\sqrt{3}} = \frac{25\sqrt{3}l \pm \sqrt{675l^2}}{50\sqrt{3}} =$$

Possiamo scomporre 675 come 225*3, cioè come $15^2 \times 3$ e portare fuori dalla radice 15:

$$\frac{25\sqrt{3}l \pm 15\sqrt{3}l}{50\sqrt{3}} =$$

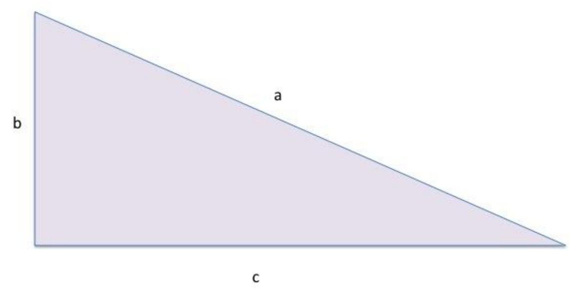
$$x = \frac{25\sqrt{3}l + 15\sqrt{3}l}{50\sqrt{3}} =$$

$$x = \frac{40\sqrt{3}l}{50\sqrt{3}} = \frac{4}{5}l$$

$$x = \frac{25\sqrt{3}l - 15\sqrt{3}l}{50\sqrt{3}} =$$

$$x = \frac{10\sqrt{3}l}{50\sqrt{3}} = \frac{1}{5}l$$

11. Il perimetro di un triangolo rettangolo è 12cm. Sapendo che l'ipotenusa è uguale ai 5/7 della somma dei cateti, calcola l'area del triangolo.



Chiamiamo i tre lati del triangolo a,b,c, dove b e c sono i cateti, mentre a è l'ipotenusa. Sappiamo che:

$$P = 12cm \Rightarrow a + b + c = 12cm$$

$$a = \frac{5}{7}(b + c)$$

Possiamo impostare un sistema, così da trovare il valore di $(b+c)$, che per comodità indicheremo con k:

$$\begin{cases} a + (b + c) = 12 \\ a = \frac{5}{7}(b + c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + k = 12 \\ a = \frac{5}{7}k \end{cases}$$

Risolviamo con in metodo della sostituzione:

$$\begin{cases} \frac{5}{7}k + k = 12 \\ a = \frac{5}{7}k \end{cases} \quad \begin{cases} 5k + 7k = 12 \times 7 \\ a = \frac{5}{7}k \end{cases} \quad \begin{cases} 12k = 84 \\ a = \frac{5}{7}k \end{cases} \quad \begin{cases} k = \frac{84}{12} = 7 \\ a = \frac{5}{7}k \end{cases}$$

Sostituiamo ora all'altra equazione e troviamo il valore di a:

$$\begin{cases} k = \frac{84}{12} = 7 \\ a = \frac{5}{7} \times 7 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} k = 7 \\ a = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} b + c = 7 \\ a = 5 \end{cases}$$

A questo punto possiamo sfruttare il fatto che il triangolo sia rettangolo e impostare il teorema di Pitagora:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Tuttavia, questa scrittura non ci è utile, perché abbiamo trovato in precedenza il valore della somma di b+c, ma non il valore della somma dei loro quadrati. Possiamo però modificare l'equazione in questo modo:

$$a^2 = (b + c)^2 - 2bc$$

Se svolgessimo il quadrato avremmo infatti che:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc - 2bc = b^2 + c^2$$

Sostituiamo quindi i valori trovati in precedenza e ricaviamo dall'equazione il prodotto di b per c:

$$a^2 = (b + c)^2 - 2bc$$

$$5^2 = 7^2 - 2bc$$
$$25 = 49 - 2bc$$
$$25 - 49 = -2bc$$
$$2bc = 24 \Rightarrow bc = \frac{24}{2} = 12$$

Avendo il prodotto dei cateti possiamo facilmente determinare l'area del triangolo:

$$A = \frac{bc}{2} = \frac{12}{2} = 6cm^2$$

12. Un capitale di 12000 € è depositato in banca a un certo tasso di interesse annuale. Alla scadenza del primo anno gli interessi maturati vengono ridepositati sullo stesso conto. Alla scadenza del secondo anno si ritira la somma di 12854,70 euro. Qual è stato il tasso di interesse?

Chiamiamo con x il tasso di interesse annuale. Poiché si partiva da un capitale di 12000€, alla scadenza del primo anno, considerando gli interessi, si avrà sul conto un ammontare di

$$12000€ + x\% \cdot 12000€$$

cioè

$$12000 + \frac{x \cdot 12000}{100} = 12000 + 120x$$

Alla fine del secondo anno si avrà una soma che corrisponde a quella dell'anno precedente $(12000 + 120x)$ più gli interessi sulla stessa soma, quindi:

$$(12000 + 120x) + x\% \cdot (12000 + 120x)$$

$$(12000 + 120x) + \frac{x \cdot (12000 + 120x)}{100} = (12000 + 120x) + \frac{10x \cdot (1200 + 12x)}{100} =$$

$$(12000 + 120x) + \frac{x \cdot (1200 + 12x)}{10}$$

Ora, sapendo che questa soma, alla fine dei due anni, è uguale a 12854,70 euro, possiamo impostare l'equazione:

$$(12000 + 120x) + \frac{x \cdot (1200 + 12x)}{10} = 12854{,}70$$

$$(12000 + 120x) + \frac{x \cdot (1200 + 12x)}{10} = \frac{1285470}{100}$$

$$(12000 + 120x) + \frac{x \cdot (1200 + 12x)}{10} = \frac{128547}{10}$$

Calcoliamo il minimo comune multiplo:

$$\frac{10(12000 + 120x)}{10} + \frac{x \cdot (1200 + 12x)}{10} = \frac{128547}{10}$$

$$120000 + 1200x + 1200x + 12x^2 = 128547$$

$$12x^2 + 2400x - 8547 = 0$$

Risolviamo con la formula $x = \dfrac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$

$$x=\frac{-\frac{2400}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{2400}{2}\right)^2+12\times 8547}}{12}=\frac{-1200\pm\sqrt{(1200)^2+102564}}{12}=$$
$$\frac{-1200\pm\sqrt{1440000+102564}}{12}=\frac{-1200\pm\sqrt{1542564}}{12}=\frac{-1200\pm 1242}{12}$$

$$x=\frac{-1200+1242}{12}=\frac{42}{12}=\frac{21}{6}=3{,}5 \qquad \vee \qquad x=\frac{-1200-1242}{12}=-\frac{2442}{12}=-\frac{1221}{6}$$

Poiché il tasso di interesse è positivo, possiamo accettare solo il valore della x positivo; quindi il tasso di interesse sarà pari al 3,5 %.