12. Calcolo letterale

1. Espressioni letterali

Un'**espressione letterale** o espressione algebrica è uno schema di calcolo in cui compaiono numeri e lettere legati dai simboli delle operazioni.
Il **valore numerico di un'espressione letterale** è il risultato numerico che si ottiene eseguendo le operazioni indicate dallo schema di calcolo quando alle lettere si sostituiscono numeri.

Esempio: l'espressione $-8ab^2$, quando $a=2$ e $b=-3$, vale $-8(2)(-3)^2=-8\cdot 2\cdot 9=-144$, quando $a=-3$ e $b=+1$, vale $-8(-3)(+1)^2=+24$.

Monomio: un'espressione letterale nella quale numeri e lettere sono legati dalla sola operazione di moltiplicazione si chiama monomio.
Un monomio si dice **ridotto in forma normale** quando è scritto come prodotto di un solo fattore numerico e di potenze letterali con basi diverse.
Per ridurre in forma normale un monomio occorre moltiplicare tra loro i fattori numerici e moltiplicare le potenze con la stessa base.

Esempio: $-\frac{1}{2}x^2y3ax(-6)a^2$ ridotto a forma normale diventa $+9a^3x^3y$

La parte numerica del monomio ridotto a forma normale si chiama **coefficiente**, se il coefficiente è 1 può essere omesso, se il coefficiente è 0 il monomio si dice nullo.
Il complesso delle lettere che compaiono nel monomio ridotto a forma normale si dice **parte letterale**.
Monomi simili: due o più monomi che hanno la parte letterale identica si dicono simili.
Monomi opposti: si dicono opposti due monomi che sono simili e hanno coefficienti numeri opposti.
Grado di un monomio: il grado complessivo di un monomio è la somma degli esponenti della parte letterale.

Esempio: $-2a^3b^4c$ ha grado 3+4+1=8

Addizione di monomi: la somma di due monomi simili è un monomio simile agli addendi e avente come coefficiente la somma dei coefficienti.
Esempio: $3xy^2-5xy^2=-2xy^2$

Polinomio: un polinomio è un'espressione algebrica letterale formata da una somma algebrica di monomi.

Esempi: x+y 2a+3xy $-\frac{2}{3}xy^2+3a^2y$

Principio di identità dei polinomi: due polinomi sono uguali se e solo se hanno gli stessi coefficienti nei termini simili.
Grado di un polinomio: il grado complessivo di un polinomio è il massimo dei gradi dei suoi monomi.

Esempio: il grado di $-\frac{2}{3}xy^2+3a^2y^3-\frac{1}{2}x$ è 5, infatti il mononio $+3a^2y^3$ è di 5° grado.

Prodotto di un monomio per un polinomio $x\cdot(a+b+c)=xa+xb+xc$

Prodotto tra polinomi $(x+y)(a+b+c)=xa+xb+xc+ya+yb+yc$.

Divisione di polinomi: dati $A(x)$ e $B(x)$ due polinomi in una sola variabile, esistono e sono unici due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$, con grado di $R(x)$ minore o uguale al grado di $B(x)$, tali che $A(x)=Q(x)\cdot B(x)+R(x)$.

Algoritmo per la divisione di due polinomi
Dopo aver disposto in ordine crescente rispetto alle potenze della variabile e messo coefficienti 0 agli eventuali monomi non le potenze mancanti la divisione si esegue come nell'esempio.

$$\left(3x^5-7x^3+3x^2-1\right):\left(x^2-2x+3\right)$$

$$\begin{array}{r|l}
3x^5+0x^4-7x^3+3x^2+0x-1 & x^2-2x+3 \\ \cline{2-2}
\underline{-3x^5+6x^4-9x^3\qquad\qquad\qquad} & 3x^3+6x^2-4x-23 \\
+6x^4-16x^3+3x^2+0x-1 & \\
\underline{-6x^4+12x^3-18x^2\qquad\quad} & \\
-4x^3-15x^2+0x-1 & \\
\underline{+4x^3-8x^2+12x\quad} & \\
-23x^2+12x-1 & \\
\underline{+23x^2-46x+69} & \\
-34x+68 &
\end{array}$$

$\left(3x^5-7x^3+3x^2-1\right):\left(x^2-2x+3\right)=3x^3+6x^2-4x-23$ con resto $-34x+68$

Si può scrivere anche

$$3x^5-7x^3+3x^2-1=\left(3x^3+6x^2-4x-23\right)\cdot\left(x^2-2x+3\right)+\frac{-34x+68}{x^2-2x+3}$$

E ancora

$$\frac{\left(3x^5-7x^3+3x^2-1\right)}{\left(x^2-2x+3\right)}=3x^3+6x^2-4x-23+\frac{-34x+68}{x^2-2x+3}$$

Teorema del resto: il resto della divisione di un polinomio $A(x)$ per un binomio del tipo $(x-a)$ è dato dal valore di $A(x)$ quando alla x si sostituisce il valore a, $R=A(a)$.

Esempio. Il resto della divisione $\left(-5x^3+2x^2-1\right):(x+2)$ si ottiene sostituendo -2 alla x nel polinomio dividendo, cioè $R=-5(-2)^3+2(-2)^2-1=+40+8-1=47$

Teorema di Ruffini: condizioni necessaria è sufficiente affinché un polinomio $A(x)$ sia divisibile per un binomio del tipo $(x-a)$ è che $A(a)=0$.

Divisione con la regola di Ruffini: la divisione tra un polinomio in una sola variabile $A(x)$ per un binomio del tipo $(x-a)$ si può eseguire come nell'esempio, dopo aver ordinato il polinomio rispetto alle potenze decrescenti della variabile e aver rimpiazzato eventuali potenze mancanti con monomi di coefficiente 0.

$$\left(2x^3-3x-10\right):(x-2)$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & 0 & -3 & -10 \\ 2 & & 4 & 8 & +10 \\ \hline & 2 & 4 & +5 & \end{array}$$

$\left(2x^3-3x-10\right):\left(x-2\right)=2x^2+4x+5$

2. Prodotti notevoli

I prodotti notevoli sono alcuni casi particolari di prodotti fra polinomi:

Somma per differenza $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

Quadrato di un binomio $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

Quadrato di un trinomio $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

Cubo di un binomio $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Somma di cubi $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$

Differenza di cubi $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$

Potenza n-esima di un binomio

La potenza n-esima ($n\in\mathbb{N}$) di un binomio può essere calcolata con la formula del binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k = \binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

dove $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, ricordiamo anche che 0! = 1.

Esempio $\binom{7}{4}=\dfrac{7!}{4!\left(7-4\right)!}=\dfrac{7!}{4!3!}=\dfrac{7\cdot\cancel{6}\cdot5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot1\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}=35$

Triangolo di Tartaglia-Pascal

I coefficienti binomiali per lo sviluppo del binomio di Newton si possono ottenere anche dal triangolo di Tartaglia-Pascal.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 1+4 & & 4+6 & & 6+4 & & 4+1 & & 1 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \end{array}$$

Ogni elemento interno al triangolo è dato dalla somma dei due numeri sovrastanti. Il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ è il k-esimo numero della n-esima riga; la riga iniziale, quella contenente il solo numero 1, è la riga numero zero, mentre quella sottostante è la riga numero uno, e così via. La somma dei numeri che compaiono nella riga *n* sono 2^n.

3. Scomposizione in fattori

Raccoglimento a fattor comune $a^2+ab+ac+ad=a(a+b+c+d)$

Raccoglimento parziale $ax+bx+ay+by=x(a+b)+y(a+b)=(a+b)(x+y)$

Quadrato di binomio $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

Cubo di binomio $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

Differenza di quadrati $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

Differenza di cubi $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Somma di cubi $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

Differenza di potenze di uguale esponente

$$a^n-b^n=\begin{cases}\text{se } n \text{ è pari è divisibile sia per } (a-b) \text{ sia per } (\text{a+b})\\ \text{se } n \text{ è dispari è divisibile per } (a-b)\end{cases}$$

Si ha $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+...+ab^{n-2}+b^{n-1})$

$$a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-...+ab^{n-2}-b^{n-1})$$

Somma di potenze di uguale esponente

$$a^n+b^n=\begin{cases}\text{se } n \text{ è pari NON è scomponibile}\\ \text{se } n \text{ è dispari è divisibile per } (a+b)\end{cases}$$

Se n è dispari si ha $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-...+ab^{n-2}-b^{n-1})$

Esempi

$$a^7+b^7=(a+b)(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6)$$

$$a^8-b^8=(a^4+b^4)(a^4-b^4)=(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a^2-b^2)=(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a-b)(a+b)$$

Trinomio caratterestico $x^2+bx+c=(x+x_1)(x+x_2)$, dove $x_1+x_2=b$ e $x_1\cdot x_2=c$

$ax^2+bx+c=a(x+x_1)(x+x_2)$, dove $x_1+x_2=b$ e $x_1\cdot x_2=a\cdot c$

Esempi

Per scomporre x^2+5x+6 si cercano due numeri la cui somma è +5, il prodotto +6; i due numeri sono +3; +2, infatti $3+2=5$ e $3\cdot 2=6$, quindi $x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$

Per scomporre $3x^2-7x+2$, si cercano due numeri la cui somma è -7 e il prodotto è $3\cdot(+2)=+6$; i due numeri sono -6 e -1, infatti $(-6)+(-1)=-7$ e $(-6)(-1)=3\cdot 2$, quindi $3x^2-7x+2=(3x-1)(x-2)$.