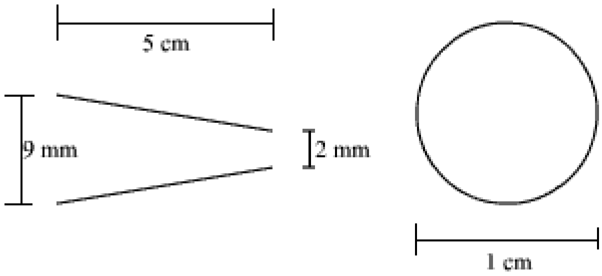
SOLUZIONE AL PROBLEMA DELLE BIGLIE ROTANTI
Jeckyll

Antonio ha costruito una pista per le biglie. Questo percorso prevede anche il passaggio su una guida formata da due binari non paralleli come in figura (vista dall'alto). Mentre la biglia percorre questa guida Antonio è in grado di dire quanti giri la biglia compie su se stessa. Lo sapreste dire anche voi?



Soluzione: Per percorrere la guida la biglia compirà esattamente 2.1037 giri su se stessa (1 giro corrisponde ad una rotazione di 2π radianti). La soluzione esatta al problema è data dalla relazione:

$$ng = \frac{\sqrt{10049}}{14\pi}\left[\arcsin\left(\frac{9\sqrt{10049}}{1000}\right) - \arcsin\left(\frac{\sqrt{10049}}{500}\right)\right] \cong 2.1037 \ \ giri$$

Procedimento:

Esporrò di seguito il procedimento rigoroso che mi ha condotto al risultato sopra indicato che, ritengo, possa considerarsi esatto.

Per descrivere il cinematismo della biglia sulla guida (d'ora in avanti mi riferirò alla biglia definendola sfera), è utile fissare un sistema di riferimento cartesiano (vedi fig. 1). Indicando con le lettere A, B, C e D le estremità dei due binari rettilinei, assumerò l'origine O del sistema di riferimento in corrispondenza della mezzeria del segmento AC che unisce le estremità più distanti dei binari. Assumerò inoltre che il piano cartesiano xy sia complanare alla guida e tale che l'asse delle x risulti la bisettrice delle rette contenenti i binari. Assumerò infine che l'asse z sia tale che la terna di assi cartesiani x, y e z sia destra (in fig. 1 l'asse z è uscente dal foglio).

Si assume di seguito che durante il rotolamento, binari e sfera siano sempre tangenti. Conseguentemente la sfera avrà percorso per intero la guida quando i punti di tangenza tra la sfera e i binari si saranno spostati su di essi percorrendo per intero la loro lunghezza. Si assume infine che il moto della sfera sulla guida sia di puro rotolamento; in tal modo l'asse di istantanea rotazione della sfera è sempre individuato dalla retta, ortogonale all'asse delle x, che unisce i punti di tangenza tra sfera e binari.

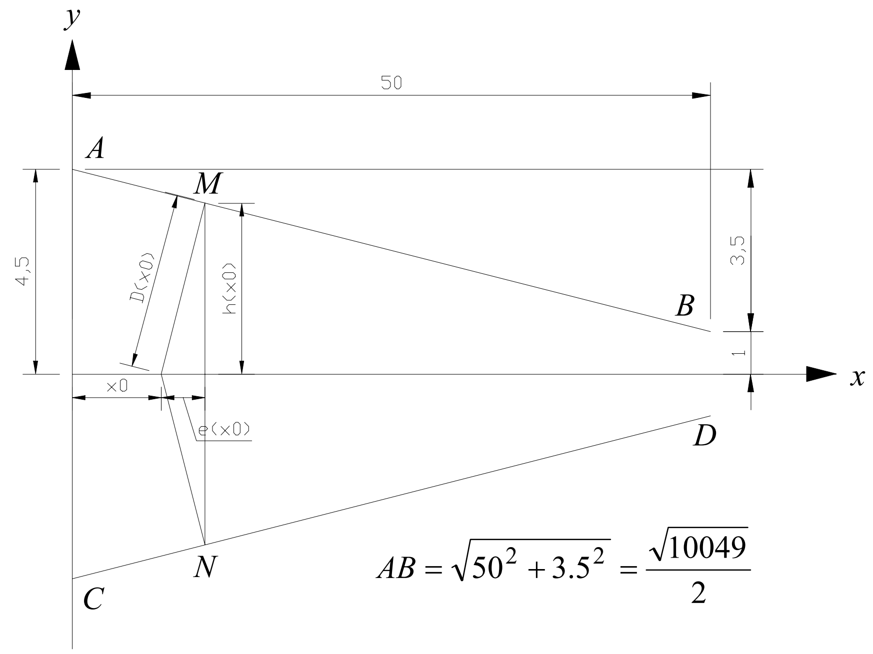


Figura 1

La descrizione del moto della sfera avverrà facendo riferimento al suo centro. Pertanto, indicando con x_0, y_0 e z_0 le coordinate del centro della sfera, e considerando che il sistema sfera-guida ha un solo grado di libertà (considerazione che deriva dall'ipotesi di puro rotolamento), occorrerà trovare delle relazioni che legano le succitate coordinate ad un parametro lagrangiano adatto a definire in maniera univoca la posizione della sfera sui binari. Tale parametro lagrangiano si assume coincidente proprio con la coordinata x_0 del centro della sfera. Conseguentemente il primo passo che dovrà compiersi sarà quello di trovare le relazioni matematiche che legano le coordinate y_0 e z_0 del centro della sfera alla coordinata x_0.

Per ragioni legate alla simmetria del cinematismo studiato e al particolare sistema di riferimento scelto, il centro della sfera si troverà sempre sul piano *xz* ($y=0$), sicché la coordinata *y* del centro della sfera risulterà costantemente uguale a zero $y_0=0$.

Per ottenere la relazione matematica che lega la coordinata z_0 alla coordinata x_0 è sufficiente tenere presente che il raggio della sfera è pari a 5 *mm* (tutte le misure verranno in seguito indicate in *mm*) e che le rette che uniscono il centro della sfera con i punti di tangenza sfera-binari sono ortogonali agli stessi binari (se ciò non accadesse i binari secherebbero la sfera). A tal proposito, facendo riferimento alla figura 1, è utile definire le seguenti grandezze:

MN	il segmento sull'asse di istantanea rotazione compreso tra i due binari;
$D(x_0)$	la distanza tra la proiezione del centro della sfera sul piano *xy* $(x_0;0;0)$ e i binari;

$e(x_0)$	la distanza tra la proiezione del centro della sfera sul piano *xy* e l'asse di istantanea rotazione;
$h(x_0)$	la metà della lunghezza del segmento MN.

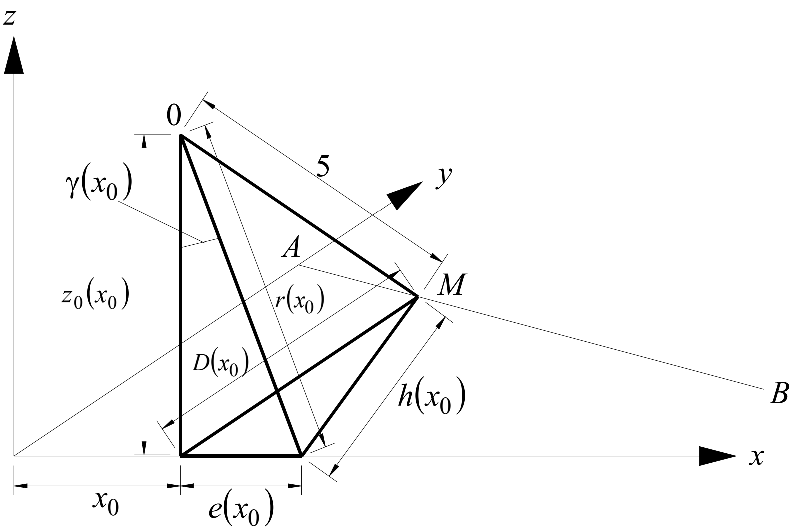


Figura 2

Facendo invece riferimento alla figura 2 si indica con:

$r(x_0)$	la distanza tra il centro della sfera e l'asse di istantanea rotazione;
$\gamma(x_0)$	l'angolo formato dalla verticale passante per il centro della sfera e la retta ortogonale all'asse di istantanea rotazione passante anch'essa per il centro della sfera.

Sul piano *xy* l'equazione della retta a cui appartiene il binario *AB* è:

$$7x + 100y - 450 = 0 \tag{1}$$

da cui segue immediatamente che la distanza $D(x_0)$ che c'è tra la proiezione del centro della sfera sul piano *xy* ed il binario *AB* è pari a (distanza tra un punto ed una retta):

$$D(x_0) = \frac{|7x_0 - 450|}{\sqrt{7^2 + 100^2}} = \frac{450 - 7x_0}{\sqrt{10049}} \tag{2}$$

Inoltre, da semplici considerazioni sulla similitudine sui triangoli in figura 1, si ottiene che le distanze $e(x_0)$ e $h(x_0)$ risultano:

$$\begin{cases} e(x_0) = \dfrac{7(450 - 7x_0)}{10049} \\ h(x_0) = \dfrac{100(450 - 7x_0)}{10049} \end{cases} \tag{3}$$

Infine, osservando la figura 2 e considerando che il raggio della sfera è pari a 5, si ottengono le relazioni:

$$\begin{cases} z_0(x_0) = \sqrt{25 - D^2(x_0)} = \sqrt{25 - \dfrac{(450 - 7x_0)^2}{10049}} \\ r(x_0) = \sqrt{z_0^2(x_0) + e^2(x_0)} = \sqrt{25 - \dfrac{10000(450 - 7x_0)^2}{100982401}} \\ \gamma(x_0) = \arcsin\dfrac{e(x_0)}{r(x_0)} = \arcsin\dfrac{7(450 - 7x_0)}{5\sqrt{19982401 + 2520000x_0 - 19600x_0^2}} \end{cases} \tag{4}$$

Quando la sfera sarà tangente ai binari in corrispondenza delle estremità *A* e *C*, la coordinata x_0 del centro della sfera assumerà il valore più piccolo e sarà negativa. Quando invece la sfera sarà tangente ai binari in corrispondenza delle estremità *B* e *D*, la coordinata x_0 del centro della sfera assumerà il valore più grande. Tenendo presente il significato geometrico della funzione $e(x_0)$ riportata nelle (3), si comprende facilmente che tali valori minimo e massimo della coordinata x_0 si otterranno dalla risoluzione delle seguenti due equazioni di primo grado:

$$\begin{cases} x_0^{\min} + e\left(x_0^{\min}\right) = 0 \\ x_0^{\max} + e\left(x_0^{\max}\right) = 50 \end{cases} \tag{5}$$

dalle quali seguono:

$$\begin{cases} x_0^{\min} = -\dfrac{63}{200} \\ x_0^{\max} = \dfrac{4993}{100} \end{cases} \tag{6}$$

Considerando che è stata scelta proprio x_0 come variabile indipendente del problema, i valori riportati nelle (6) sono particolarmente importanti poiché rappresentano gli estremi tra cui dovrà essere compresa tale variabile nelle operazioni che in seguito forniranno la soluzione del problema.
A questo punto è necessario mettere in relazione d'avanzamento dx_0 del centro della sfera, e la rotazione $d\omega$ subita dalla sfera per effetto di tale avanzamento. In virtù dell'ipotesi di puro rotolamento si può assumere che la traccia di lunghezza infinitesima lasciata dai binari sulla sfera per effetto della rotazione di quest'ultima, abbia la stessa lunghezza del tratto dl di cui si sono spostati i punti di tangenza sfera-binari per effetto dell'avanzamento dx_0 del centro della sfera.

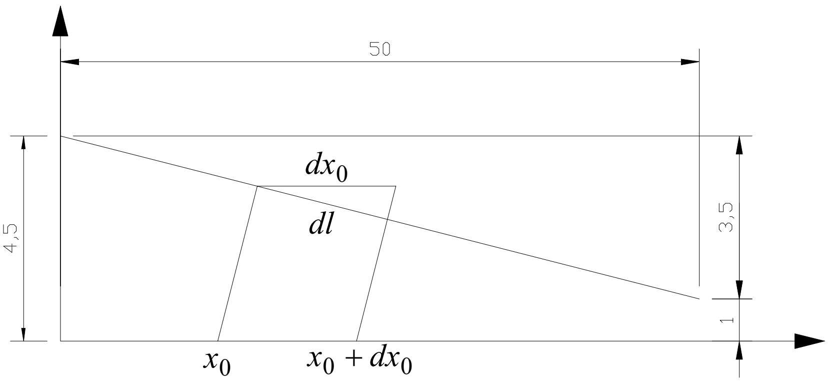


Figura 3

Osservando la figura 3 è facile constatare che l'avanzamento dl dei punti di tangenza sui binari è legato all'avanzamento dx_0 del centro della sfera dalla relazione:

$$dl = \frac{100}{\sqrt{10049}} dx_0 \tag{7}$$

pertanto, affinché l'ipotesi di puro rotolamento sia soddisfatta, è necessario che la traccia segnata dai binari sulla superficie della sfera per effetto di un avanzamento infinitesimo del centro della sfera pari a dx_0 sia esattamente pari a dl.

Osservando la seguente figura 4 si vede che in un sistema di riferimento solidale alla sfera la traccia segnata dai binari sulla superficie sferica è una curva che può essere descritta dalle funzioni $r(x_0)$, $h(x_0)$, il cui significato geometrico è stato precedentemente chiarito, e dalla funzione incognita $\alpha(x_0)$ il cui significato geometrico è quello di angolo formato dal segmento $r(x_0)$ rispetto ad una qualsiasi linea di riferimento sul piano di rotolamento della sfera ed a quest'ultimo solidale. In pratica $r(x_0)$, $h(x_0)$ ed $\alpha(x_0)$ definiscono un sistema di coordinate cilindriche solidale alla sfera.

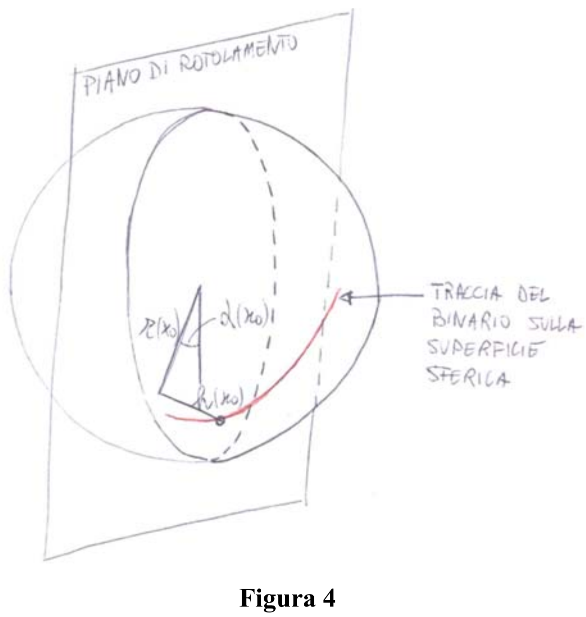


Figura 4

Per ottenere l'espressione della funzione $\alpha(x_0)$ si imporrà che la distanza sulla superficie sferica tra i due punti infinitamente vicini di coordinate:

$$\begin{cases} r(x_0) \\ h(x_0) \\ \alpha(x_0) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} r(x_0+dx_0)=r(x_0)+dr(x_0) \\ h(x_0+dx_0)=h(x_0)+dh(x_0) \\ \alpha(x_0+dx_0)=\alpha(x_0)+d\alpha(x_0) \end{cases}$$

sia esattamente pari a dl. Si impone cioè:

$$[dr]^2+[dh]^2+[r\,d\alpha]^2=[dl]^2$$

da cui segue immediatamente che:

$$d\alpha=\frac{\sqrt{[dl]^2-[dr]^2-[dh]^2}}{r} \tag{8}$$

Calcolando il differenziale delle funzioni $r(x_0)$ e $h(x_0)$:

$$\begin{cases} dr(x_0)=r'(x_0)dx_0 \\ dh(x_0)=h'(x_0)dx_0 \end{cases}$$

e ricordando l'espressione (7) ottenuta per dl, si ha che la (8) può anche scriversi nella forma:

$$d\alpha=\frac{\sqrt{\frac{10000}{10049}-[r'(x_0)]^2-[h'(x_0)]^2}}{r(x_0)}dx_0 \tag{9}$$

dalla cui integrazione si ottiene la funzione $\alpha(x_0)$ cercata.

Integrando ambo i membri della (9) tra gli estremi di integrazione indicati nella (6) si ottiene lo sviluppo angolare che la traccia lasciata dai binari sulla superficie sferica della biglia ha rispetto al piano di rotolamento della sfera. Sostituendo nella (9) le espressioni di $r(x_0)$ e $h(x_0)$ riportate nelle (3) e (4), ed integrandone ambo i membri rispetto alla variabile x_0 tra gli estremi di integrazione indicati nella (6), si ottiene lo sviluppo angolare (integrazione eseguita numericamente):

$$\alpha=\int_{x_0^{\min}}^{x_0^{\max}}\frac{\sqrt{\frac{10000}{10049}-[r'(x_0)]^2-[h'(x_0)]^2}}{r(x_0)}dx_0=13.08710256\ rad \qquad \text{(pari a 2.0829 giri)} \tag{10}$$

Tale sviluppo angolare non corrisponde tuttavia all'angolo di cui deve ruotare la sfera per percorrere per intero i binari. Infatti ciò di cui tale angolo non tiene conto è della piccola rotazione aggiuntiva subita dalla sfera durante l'intero percorso sui binari dovuta al fatto che l'angolo $\gamma(x_0)$ definito dalla terza delle (4) tende a diminuire quando x_0 varia da $x_0^{\min}$ a $x_0^{\max}$ (vedi fig. 5)

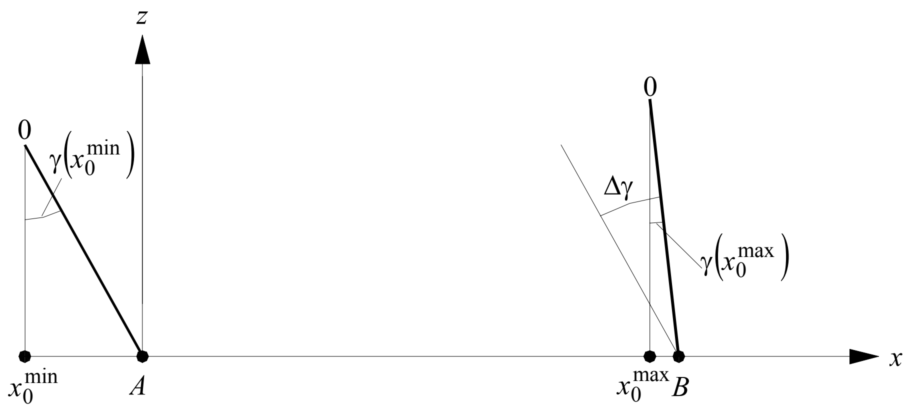


Figura 5

Ciò vuol dire che per avere l'esatta entità della rotazione subita dalla sfera durante l'intero percorso sulle guide occorrerà aggiungere all'angolo α l'angolo:

$$\Delta\gamma = \gamma\left(x_0^{\min}\right) - \gamma\left(x_0^{\max}\right) = 0.130750725 \ rad$$

Ne segue che l'angolo ω di cui dovrà ruotare la sfera su se stessa per percorrere le guide sarà pari a:

$\omega = \alpha + \Delta\gamma = 13.21785329 \ rad$ pari a **2.1037 giri**

che è il risultato numerico che ho fornito nella soluzione.

Affinché non sussistano dubbi sul fatto che la rotazione $\Delta\gamma$ debba mettersi in conto nel computo totale dei giri della sfera provvederò ad ottenere lo stesso risultato seguendo un altro ragionamento.

Si considerino due punti P e Q sulla superficie della sfera appartenenti alla traccia lasciata da un binario sulla superficie sferica. Tali punti siano infinitamente vicini in modo da formare sul piano di rotolamento della sfera uno sviluppo angolare infinitesimo pari a $d\alpha$. Tali punti siano anche disposti in modo tale da essere tangenti alla guida durante la rotazione della sfera secondo l'ordine temporale: prima P ed in seguito Q. Si considerino quindi separatamente i due istanti di tempo in cui tali punti risultano tangenti ai binari. Sia x_0 la coordinata del centro della sfera nell'istante di tempo in cui P è tangente alla guida, e sia $x_0 + dx_0$ la coordinata del centro della sfera nell'istante di tempo in cui è invece Q ad essere tangente alla guida.

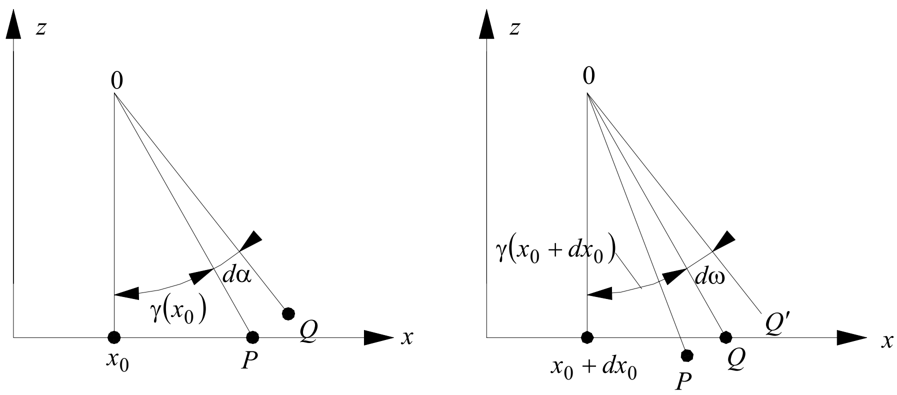


Figura 6

Come si vede chiaramente nella figura 6, nell'intervallo di tempo che il centro della sfera si è spostato da x_0 a $x_0 + dx_0$ il segmento *0Q* ha ruotato di un angolo $d\omega$ pari a:

$$d\omega = \gamma(x_0) + d\alpha - \gamma(x_0 + dx_0) = d\alpha - \gamma'(x_0)dx_0 \tag{11}$$

Pertanto, tenendo presente l'espressione di $\gamma(x_0)$ riportata nelle (4) e l'espressione di $d\alpha$ riportata nella (9), e sostituendo il tutto nella (11), dopo qualche passaggio si ottiene:

$$d\omega = \sqrt{\frac{10049}{48725 + 7(900 - 7x_0)x_0}}dx_0 \tag{12}$$

Sicché l'angolo di cui dovrà ruotare la sfera per percorrere per intero le guide rettilinee sarà:

$$\omega = \int_{-\frac{63}{200}}^{\frac{4993}{100}} \sqrt{\frac{10049}{48725 + 7(900 - 7x_0)x_0}}dx_0 = \frac{\sqrt{10049}}{7}\left[\arcsin\left(\frac{9\sqrt{10049}}{1000}\right) - \arcsin\left(\frac{\sqrt{10049}}{500}\right)\right]$$

cioè:

$$\omega = 13.21785329 \ \mathit{rad}$$

Conseguentemente il numero di giri compiuti dalla sfera si otterranno dalla relazione:

$$ng = \frac{\sqrt{10049}}{14\pi}\left[\arcsin\left(\frac{9\sqrt{10049}}{1000}\right) - \arcsin\left(\frac{\sqrt{10049}}{500}\right)\right] \cong 2.1037 \ \mathit{giri}$$