

Biliardo tridimensionale

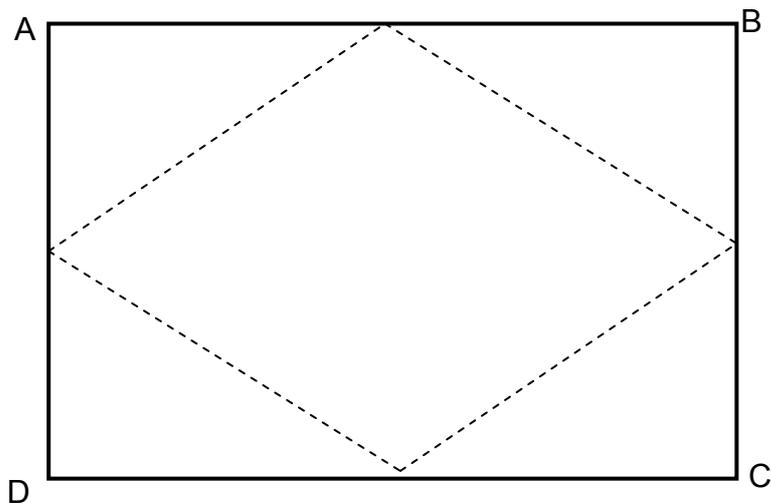
Risposta

Vedi ultima figura a pag. 5

Motivazione

Se la traiettoria dev'essere chiusa, dovranno apparire tali anche le sue proiezioni. In particolare dovrà essere chiusa sia la sua proiezione sulla faccia 4x5 del parallelepipedo sia quella sulla faccia 3x5.

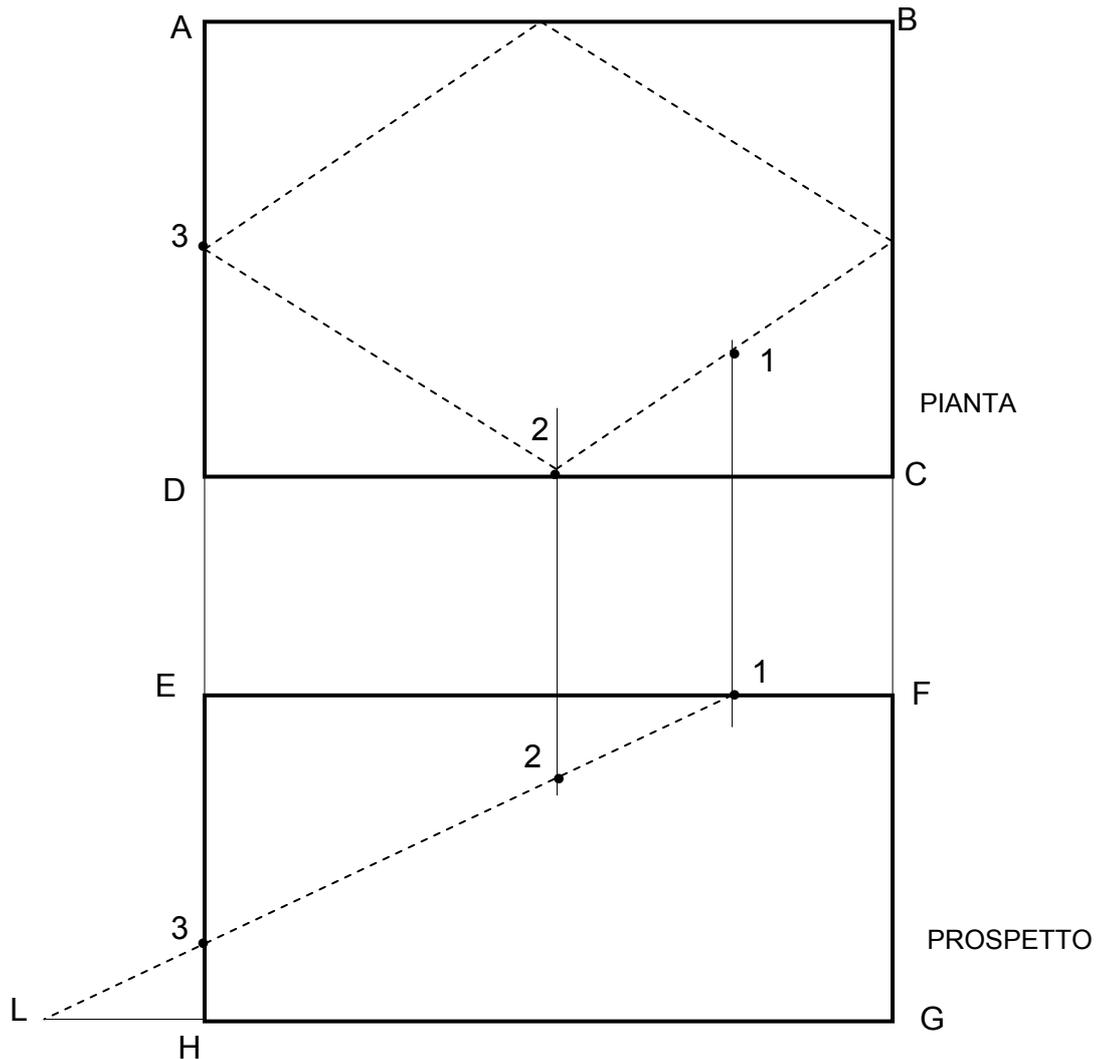
Per fissare le idee consideriamo la faccia 4x5 come base del parallelepipedo, e ipotizziamo che la proiezione in pianta della traiettoria cercata sia un rombo regolare con i vertici (proiezioni dei punti di rimbalzo) nei punti medi dei lati del rettangolo 4x5. Con questa scelta, la condizione angolo di incidenza = angolo di riflessione è rispettata per simmetria.



Occorre ora determinare una proiezione laterale chiusa della traiettoria che sia compatibile sia con questa proiezione in pianta sia con le altre condizioni poste dal problema, e cioè:

- un solo rimbalzo su ogni faccia
- angolo di incidenza = angolo di riflessione

Per fare questo risulta utile allineare le due proiezioni una sull'altra, come nella figura che segue:

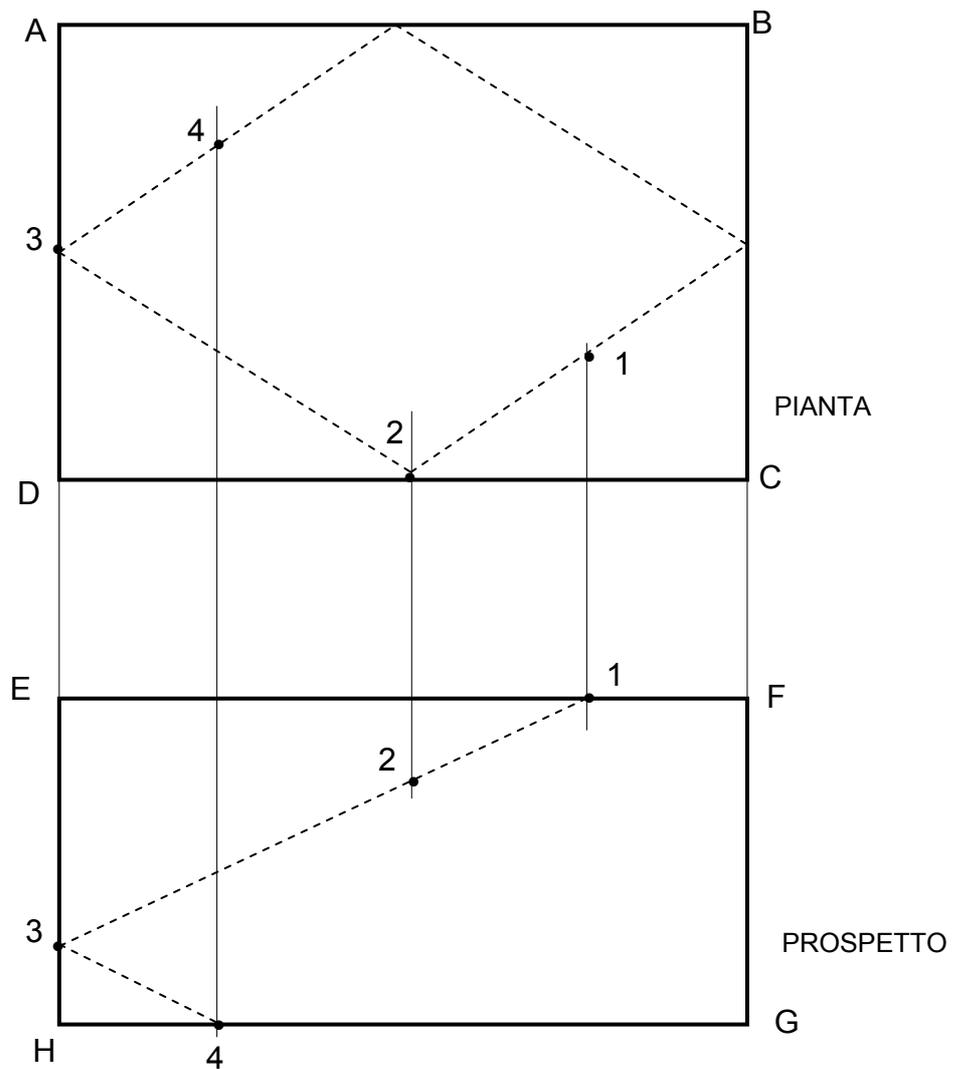


Consideriamo come origine della traiettoria il punto di rimbalzo 1 situato sulla faccia 4x5 superiore, e la cui proiezione cade all'interno di un punto qualsiasi di uno dei lati del rombo. La sua posizione sulla faccia superiore del parallelepipedo si determina proiettando ortogonalmente il punto 1 sul segmento EF.

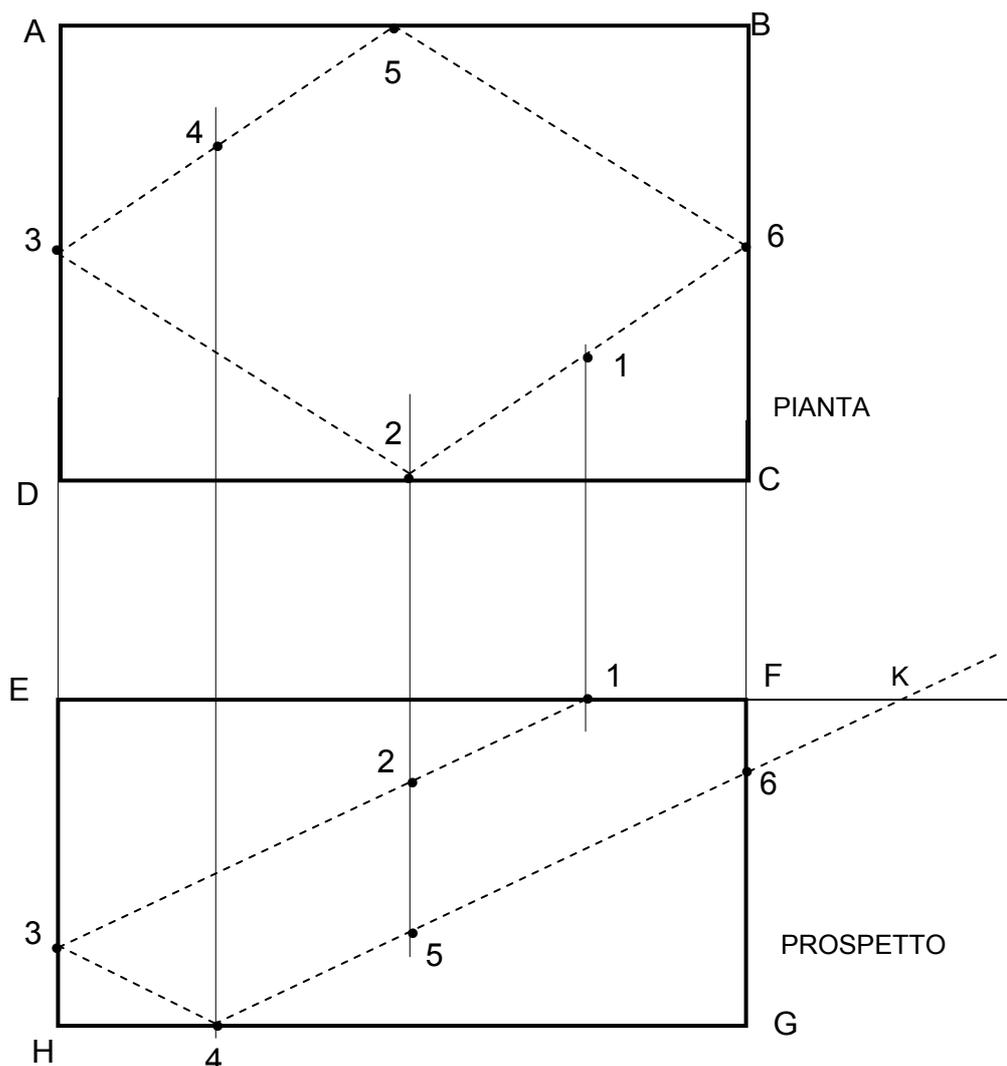
Prolunghiamo ora il segmento GH di una quantità pari alla lunghezza 1-F determinando il punto L. Conguiamo L con 1 determinando così la posizione nello spazio dei punti di rimbalzo 2 e 3.

Osserviamo che il segmento 1-3 risulta parallelo alla diagonale FH per costruzione.

Ribaltando ora il triangolo LH3 intorno al lato H3 otteniamo il prolungamento della (proiezione verticale della) traiettoria rispettando la condizione: angolo di incidenza = angolo di riflessione. Si determina il punto di rimbalzo 4 (nello spazio – v. fig. seguente).



Per continuare il prolungamento della (proiezione verticale della) traiettoria sempre rispettando la condizione angolo di incidenza = angolo di riflessione ribaltiamo ora il triangolo 3H4 intorno alla verticale passante per il punto 4. Il ribaltamento del lato 3-4 fornirà la direzione di rimbalzo. Vengono così individuate le posizioni nello spazio dei punti di rimbalzo 5 e 6 (v. fig. seguente).



Il nuovo prolungamento della traiettoria si ottiene ora ribaltando il triangolo FK6 intorno al lato F6, in modo che l'angolo di incidenza in 6 sia uguale a quello di riflessione. Poiché si dimostra che $FK = F1$, il punto K a seguito del ribaltamento viene a coincidere con il punto 1 e quindi la traiettoria risulta **chiusa**, come ricercato.

L'uguaglianza $FK = F1$ si dimostra osservando che:

per costruzione $F1 = H4$, perciò $E1 = G4$;

poiché i triangoli 3E1 e 4G6 hanno gli angoli ed un lato uguali (i lati E4 e G1) allora sono uguali

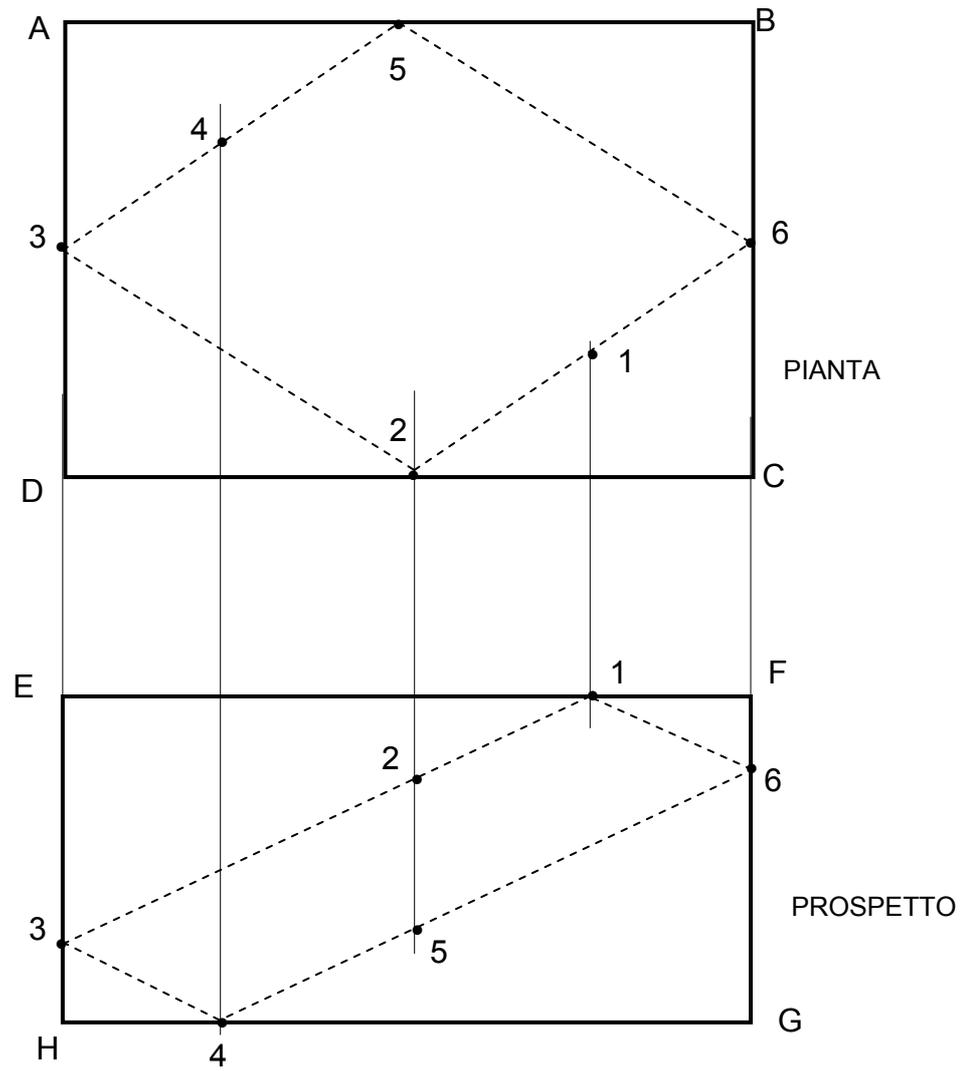
in particolare $G6 = E3$, perciò anche $H3 = F6$

poiché i triangoli 3H4 e FK6 hanno gli angoli ed un lato uguali (i lati H3 e F6) allora sono uguali

in particolare $FK = H4$

ma per costruzione $H4 = F1$, quindi è anche $FK = F1$

OSSERVAZIONE: le condizioni poste dal problema sono soddisfatte da qualunque traiettoria le cui proiezioni sulle facce del parallelepipedo hanno i lati paralleli alle diagonali delle facce.



UNA SOLUZIONE

Danilo Mascheroni