23-Biliardo tridimensionale

Saccardi Elena

Risposta:

Una delle traiettorie richieste è composta dai seguenti segmenti:

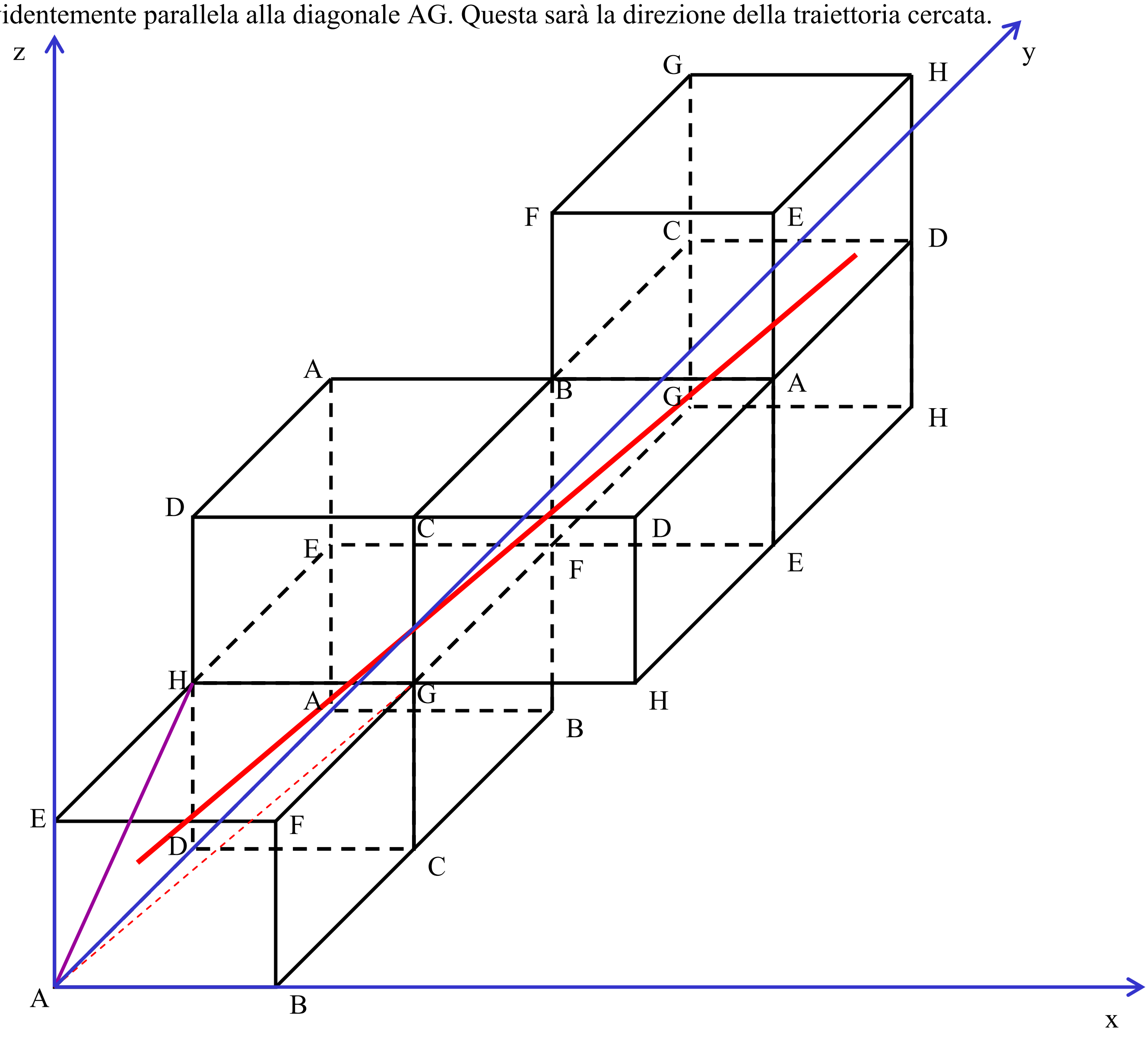
$$\begin{cases} x = 4t \\ y = 2+5t \\ z = 1+3t \\ 0 \le t \le \frac{3}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{12}{5}+4t \\ y = 5-5t \\ z = \frac{14}{5}+3t \\ 0 \le t \le \frac{1}{15} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{8}{3}+4t \\ y = \frac{14}{3}-5t \\ z = 3-3t \\ 0 \le t \le \frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4-4t \\ y = 3-5t \\ z = 2-3t \\ 0 \le t \le \frac{3}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{8}{5}-4t \\ y = 5t \\ z = \frac{1}{5}-3t \\ 0 \le t \le \frac{1}{15} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{4}{3}-4t \\ y = \frac{1}{3}+5t \\ z = 3t \\ 0 \le t \le \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Ma si può dire di più: "Partendo da un qualsiasi punto interno ad una faccia, escluso il suo centro, si può ottenere una traiettoria chiusa (come richiesto) purché la direzione del lancio sia parallela ad una opportuna diagonale del parallelepipedo".

Motivazione:

(Premetto che, data la stanchezza di questo periodo, sarà difficile che riesca a spiegarmi con chiarezza. Mi scuso per questo.)

Ho pensato di "uscire" dal parallelepipedo principale, costruendo una figura formata da 6 parallelepipedi, ciascuno simmetrico al precedente, in modo che ognuno sia attraversato da una stessa retta. In riferimento alla figura seguente, l'unica traiettoria rettilinea che può portare un punto della faccia ADHE del primo parallelepipedo nel punto corrispondente dell'ultimo risulta evidentemente parallela alla diagonale AG. Questa sarà la direzione della traiettoria cercata.



Introdotto un riferimento nello spazio come nella figura precedente, e preso $P_0 = (0; y_0; z_0)$,

la diagonale AG ha eq. $\begin{cases} y = \frac{5}{4}x \\ z = \frac{3}{4}x \end{cases}$, quindi la retta (in rosso) parallela alla diagonale AG per P_0 ha eq.

$$\begin{cases} y - y_0 = \frac{5}{4}x \\ z - z_0 = \frac{3}{4}x \end{cases}.$$

Per le simmetrie in gioco, posso determinare le intersezioni di questa retta con i sei parallelepipedi e poi da queste, sempre tenendo conto delle simmetrie, risalire ai punti di rimbalzo dalla traiettoria sulle sei facce del parallelepipedo principale.

Ho indicato con:

P_1 il punto di intersezione con la faccia CDHG, sul piano di eq. y=5

P_2 il punto di intersezione con la faccia HGEF, sul piano di eq. z=3

P_3 il punto di intersezione con la faccia FGCB, sul piano di eq. x=4

P_4 il punto di intersezione con la faccia FBEA, sul piano di eq. y=10

P_5 il punto di intersezione con la faccia ABCD, sul piano di eq. z=6

P_6 il punto di intersezione con la faccia ADEH, sul piano di eq. x=8.

$$P_1 \begin{cases} y - y_0 = \frac{5}{4}x \\ z - z_0 = \frac{3}{4}x \\ y = 5 \end{cases} \qquad \text{cioè } P_1 = \left(4 - \frac{4}{5}y_0; 5; 3 + z_0 - \frac{3}{5}y_0\right).$$

Perché P_1 risulti interno alla faccia CDHG, bisogna che $\begin{cases} 0 < 4 - \frac{4}{5}y_0 < 4 \\ 0 < 3 + z_0 - \frac{3}{5}y_0 < 3 \end{cases}$ cioè deve essere:

$\begin{cases} 0 < y_0 < 5 \\ 0 < z_0 < \frac{3}{5}y_0 \end{cases}$ ovvero il punto P_0 deve essere interno al triangolo ADH.

Allo stesso modo:

$$P_2 \begin{cases} y - y_0 = \frac{5}{4}x \\ z - z_0 = \frac{3}{4}x \\ z = 3 \end{cases} \qquad \text{cioè } P_2 = \left(4 - \frac{4}{3}z_0; 5 + y_0 - \frac{5}{3}z_0; 3\right)$$

$$P_3 \begin{cases} y - y_0 = \frac{5}{4}x \\ z - z_0 = \frac{3}{4}x \\ x = 4 \end{cases} \qquad \text{cioè } P_3 = (4; y_0 + 5; z_0 + 3)$$

$$P_4\begin{cases} y-y_0=\frac{5}{4}x \\ z-z_0=\frac{3}{4}x \\ y=10 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad P_4=\left(8-\frac{4}{5}y_0;10;6+z_0-\frac{3}{5}y_0\right)$$

$$P_5\begin{cases} y-y_0=\frac{5}{4}x \\ z-z_0=\frac{3}{4}x \\ y=6 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad P_5=\left(8-\frac{4}{3}z_0;10+y_0-\frac{5}{3}z_0;6\right)$$

$$P_6\begin{cases} y-y_0=\frac{5}{4}x \\ z-z_0=\frac{3}{4}x \\ x=8 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad P_6=(8;y_0+10;z_0+6).$$

Chiamo: Q_0, …, Q_6 i punti di rimbalzo della traiettoria con le pareti del parallelepipedo principale. Per le simmetrie si ha:

$Q_0 = P_0$, quindi $Q_0=(0;y_0;z_0)$ $\qquad$ $Q_1 = P_1$, quindi $Q_1=\left(4-\frac{4}{5}y_0;5;3+z_0-\frac{3}{5}y_0\right)$

Q_2 ha le stesse x e z di P_2, mentre vale: $y_{Q_2}=10-y_{P_2}$, quindi $Q_2=\left(4-\frac{4}{3}z_0;5-y_0+\frac{5}{3}z_0;3\right)$

Q_3 ha la stessa x di P_3, mentre vale: $y_{Q_3}=10-y_{P_3}$ e $z_{Q_3}=6-z_{P_3}$, quindi $Q_3=(4;5-y_0;3-z_0)$

per Q_4 vale: $x_{Q_4}=8-x_{P_4}$, $y_{Q_4}=10-y_{P_4}$ e $z_{Q_4}=6-z_{P_4}$, quindi $Q_4=\left(\frac{4}{5}y_0;0;\frac{3}{5}y_0-z_0\right)$

per Q_5 vale: $x_{Q_5}=8-x_{P_5}$, $y_{Q_5}=y_{P_5}-10$ e $z_{Q_5}=z_{P_5}-6$, quindi $Q_5=\left(\frac{4}{3}z_0;y_0-\frac{5}{3}z_0;0\right)$

infine per Q_6 vale: $x_{Q_6}=x_{P_6}-8$, $y_{Q_6}=y_{P_6}-10$ e $z_{Q_6}=z_{P_6}-6$, quindi $Q_6=(0;y_0;z_0)$.

Preso ad esempio: $Q_0=(0;2;1)$, che soddisfa $\begin{cases} 0<y_0<5 \\ 0<z_0<\frac{3}{5}y_0 \end{cases}$, si ha:

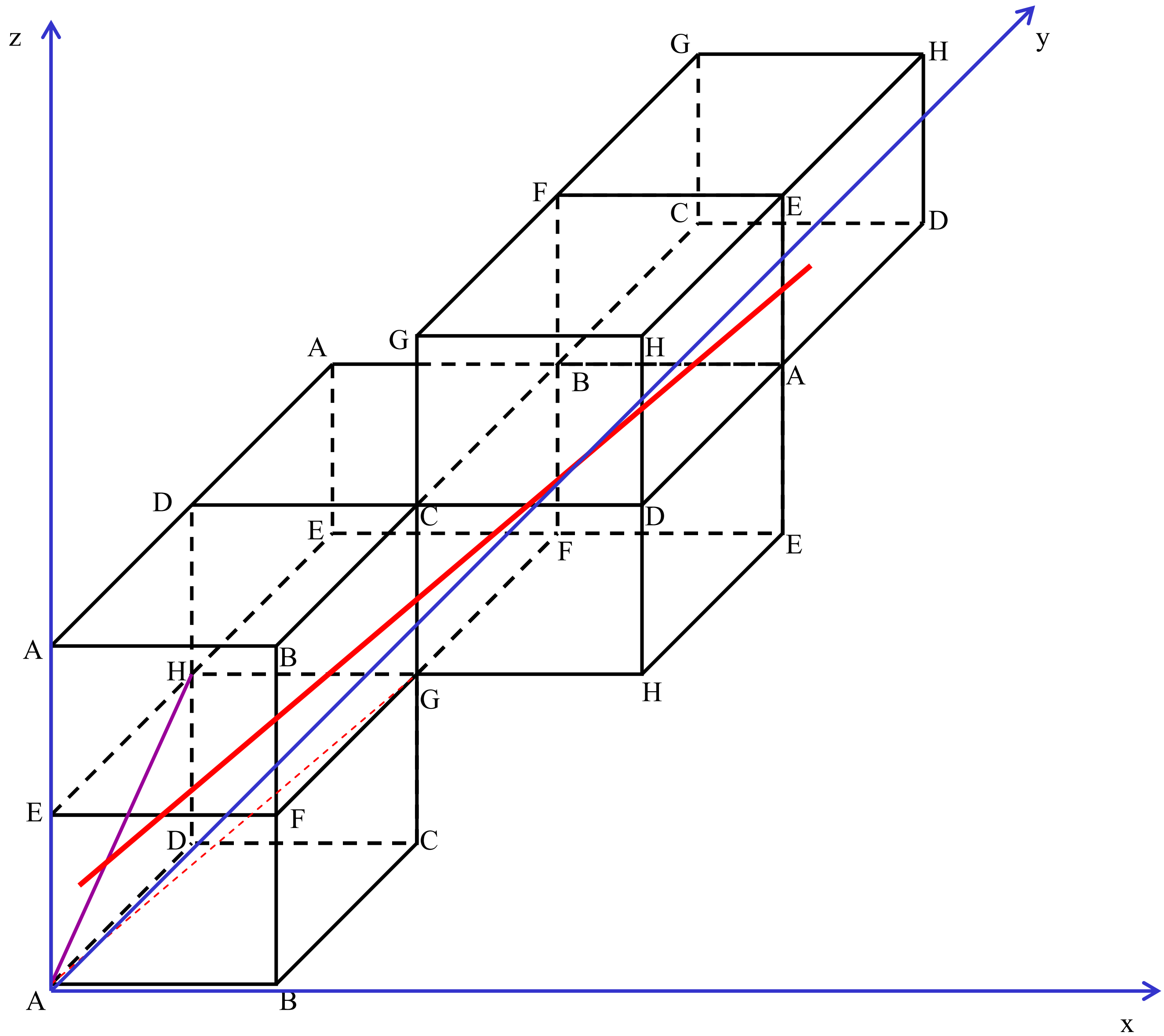
$Q_1=\left(\frac{12}{5};5;\frac{14}{5}\right)$ $\quad$ $Q_2=\left(\frac{8}{3};\frac{14}{3};3\right)$ $\quad$ $Q_3=(4;3;2)$ $\quad$ $Q_4=\left(\frac{8}{5};0;\frac{1}{5}\right)$ $\quad$ $Q_5=\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3};0\right)$
$Q_6=(0;2;1)$.

Le rette che costituiscono la traiettoria sono allora: $Q_0Q_1\begin{cases} y-2=\frac{5}{4}x \\ z-1=\frac{3}{4}x \end{cases}$ ovvero, con le eq.

parametriche: $Q_0Q_1\begin{cases} x=4t \\ y=2+5t \\ z=1+3t \end{cases}$ $\quad$ $Q_1Q_2\begin{cases} x=\frac{12}{5}+4t \\ y=5-5t \\ z=\frac{14}{5}+3t \end{cases}$ $\quad$ $Q_2Q_3\begin{cases} x=\frac{8}{3}+4t \\ y=\frac{14}{3}-5t \\ z=3-3t \end{cases}$ $\quad$ $Q_3Q_4\begin{cases} x=4-4t \\ y=3-5t \\ z=2-3t \end{cases}$

$$Q_4Q_5\begin{cases} x = \dfrac{8}{5} - 4t \\ y = 5t \\ z = \dfrac{1}{5} - 3t \end{cases} \qquad Q_5Q_6\begin{cases} x = \dfrac{4}{3} - 4t \\ y = \dfrac{1}{3} + 5t \\ z = 3t \end{cases}.$$

Naturalmente il punto di partenza può anche essere interno al triangolo AHE. In questo caso bisogna cambiare la costruzione (vedi figura seguente).
I punti P_1, … P_6, si trovano intersecando la retta (rossa) parallela ad AG per P_0, rispettivamente con i piani: z=3, y=5, x=4, z=6, y=10 e x=8.
Anche in questo caso va esclusa la diagonale AH (le palle nei suoi punti, muovendosi con direzione parallela ad AG, finirebbero in uno spigolo). Per il resto, procedendo come prima, e tenendo conto delle simmetrie, si determinano le coordinate dei punti di rimbalzo sulle sei pareti del parallelepipedo iniziale, che costituiscono una traiettoria chiusa.
Ma non è necessario escludere tutti i punti della diagonale AH dalla soluzione. Infatti, prendendo come direzione del lancio una parallela alla diagonale DF (anziché alla AG) si trova che è possibile partire da tutti i punti della faccia ad esclusione della diagonale ED. Di conseguenza l'unico punto da cui non è possibile partire verificando le richieste è il centro delle due diagonali AH e ED, cioè il centro della faccia ADHE.



Riepilogando, per ogni punto interno alla faccia (escluse le sue due diagonali) sono 2 le possibili traiettorie: quella parallela ad AG e quella parallela a DF, mentre per ogni punto di una delle due diagonali (escluso il centro) c'è solo una possibile traiettoria.

Per mancanza di tempo non riesco a determinarle tutte, però posso provare a vedere come procedere in un caso "limite".

Sia $Q_0 = (0; y_0; z_0)$ sulla diagonale AH. E sia $z_0 < 3 - \frac{3}{5}y_0$. (cioè Q_0 è interno al triangolo AED).

Allora la direzione del lancio potrà essere di un solo tipo: parallelo alla diagonale DF.

$Q_0Q_1 \begin{cases} x = 4t \\ y = y_0 - 5t \\ z = z_0 + 3t \end{cases}$, questa retta rimbalza in Q_1 sul piano y=0. Quindi il 1° segmento è:

$\overline{Q_0Q_1} = \begin{cases} x = 4t \\ y = y_0 - 5t \\ z = z_0 + 3t \\ 0 \le t \le \frac{1}{5}y_0 \end{cases}$. Per $t = \frac{1}{5}y_0$ si ottiene $Q_1 = \left(\frac{4}{5}y_0; 0; z_0 + \frac{3}{5}y_0\right)$.

$Q_1Q_2 \begin{cases} x = \frac{4}{5}y_0 + 4t \\ y = 5t \\ z = z_0 + \frac{3}{5}y_0 + 3t \end{cases}$, questa retta rimbalza in Q_2 sul piano z=3. Quindi il 2° segmento è:

$\overline{Q_1Q_2} = \begin{cases} x = \frac{4}{5}y_0 + 4t \\ y = 5t \\ z = z_0 + \frac{3}{5}y_0 + 3t \\ 0 \le t \le 1 - \frac{1}{3}z_0 - \frac{1}{5}y_0 \end{cases}$. Per $t = 1 - \frac{1}{3}z_0 - \frac{1}{5}y_0$ si ottiene $Q_2 = \left(4 - \frac{4}{3}z_0; 5 - \frac{5}{3}z_0 - y_0; 3\right)$.

$Q_2Q_3 \begin{cases} x = 4 - \frac{4}{3}z_0 + 4t \\ y = 5 - \frac{5}{3}z_0 - y_0 + 5t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$, questa retta rimbalza in Q_3 sul piano x=4. Quindi il 3° segmento è:

$\overline{Q_2Q_3} = \begin{cases} x = 4 - \frac{4}{3}z_0 + 4t \\ y = 5 - \frac{5}{3}z_0 - y_0 + 5t \\ z = 3 - 3t \\ 0 \le t \le \frac{1}{3}z_0 \end{cases}$. Per $t = \frac{1}{3}z_0$ si ottiene $Q_3 = (4; 5 - y_0; 3 - z_0)$.

$Q_3Q_4 \begin{cases} x = 4 - 4t \\ y = 5 - y_0 + 5t \\ z = 3 - z_0 - 3t \end{cases}$, questa retta rimbalza in Q_4 sul piano y=5. Quindi il 4° segmento è:

$$\overline{Q_3Q_4} = \begin{cases} x = 4 - 4t \\ y = 5 - y_0 + 5t \\ z = 3 - z_0 - 3t \\ 0 \le t \le \frac{1}{5} y_0 \end{cases}$$. Per $t = \frac{1}{5} y_0$ si ottiene $Q_4 = \left(4 - \frac{4}{5} y_0 ;5;3 - z_0 - \frac{3}{5} y_0\right)$.

$$Q_4Q_5 \begin{cases} x = 4 - \frac{4}{5} y_0 - 4t \\ y = 5 - 5t \\ z = 3 - z_0 - \frac{3}{5} y_0 - 3t \end{cases}$$, questa retta rimbalza in Q_5 sul piano z=0. Quindi il 5° segmento è:

$$\overline{Q_4Q_5} = \begin{cases} x = 4 - \frac{4}{5} y_0 - 4t \\ y = 5 - 5t \\ z = 3 - z_0 - \frac{3}{5} y_0 - 3t \\ 0 \le t \le 1 - \frac{1}{3} z_0 - \frac{1}{5} y_0 \end{cases}$$. Per $t = 1 - \frac{1}{3} z_0 - \frac{1}{5} y_0$ si ottiene $Q_5 = \left(\frac{4}{3} z_0 ; \frac{5}{3} z_0 + y_0 ;0\right)$.

$$Q_5Q_6 \begin{cases} x = \frac{4}{3} z_0 - 4t \\ y = \frac{5}{3} z_0 + y_0 - 5t \\ z = 3t \end{cases}$$, questa retta rimbalza in Q_6 sul piano x=0. Quindi il 5° segmento è:

$$\overline{Q_5Q_6} = \begin{cases} x = \frac{4}{3} z_0 - 4t \\ y = \frac{5}{3} z_0 + y_0 - 5t \\ z = 3t \\ 0 \le t \le \frac{1}{3} z_0 \end{cases}$$. Per $t = \frac{1}{3} z_0$ si ottiene $Q_6 = (0; y_0 ; z_0) = Q_0$.