Quesito

23. Biliardo tridimensionale

Il biliardo tridimensionale sarà il gioco del futuro. Durante le lunghe traversate, in assenza di gravità, i crocieristi spaziali giocheranno lanciando piccole sfere in camere a forma di parallelepipedo, le sfere rimbalzeranno sulle pareti del biliardo senza perdere molta energia e riflettendo perfettamente come raggi luminosi, ossia l'angolo di incidenza sarà uguale a quello di riflessione e la retta normale alla parete nel punto dell'urto sarà bisettrice all'angolo formato dalla traiettoria della biglia.

In un biliardo a forma di parallelepipedo di dimensioni 3, 4, 5, sarà possibile costruire una traiettoria chiusa che colpendo una dopo l'altra tutte le pareti, senza colpire due volte la stessa parete, ritorni esattamente nel punto di partenza? Descriverne la traiettoria.

Soluzione

Riferiamo il parallelepipedo ad un sistema di riferimento con origine in uno dei vertici del parallelepipedo come riportato in figura 1.

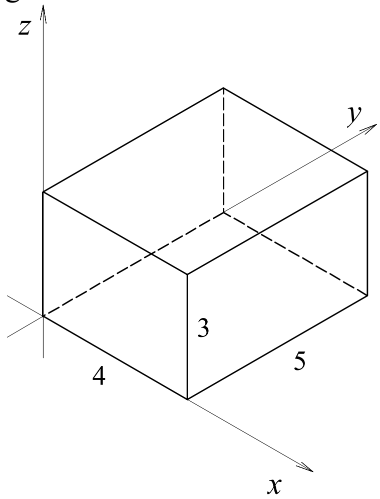

Figura 1.

Le sfere rimbalzano sulle pareti del biliardo in modo che l'angolo di incidenza sia uguale a quello di riflessione e la retta normale alla parete nel punto dell'urto è la bisettrice dell'angolo formato dalla traiettoria della biglia. Proiettando la traiettoria su un piano, si ottiene una traiettoria che rispetta ancora tali condizioni pur essendo diversi gli angoli.

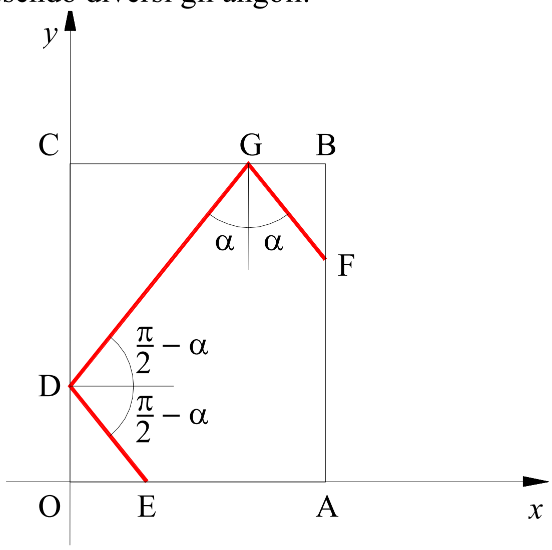

Figura 2.

Supponiamo che il punto di partenza della biglia sia il punto G_1 (Figura 3) e che la biglia segua una traiettoria la cui proiezione sul piano *xy* è retta di equazione

$$y = mx + q$$

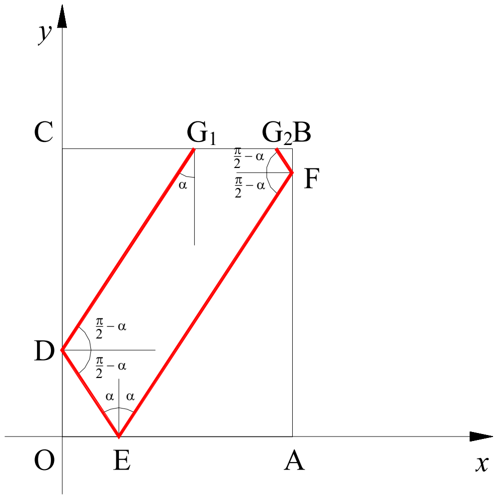

Figura 3.

Tra G_1 e D la biglia colpirà la faccia inferiore (o superiore) quindi in D colpirà una parete verticale, in E un'altra parete, tra E e F colpirà la faccia superiore (o inferiore), in F l'ultima parete verticale. A questo punto colpirà la parete da cui era partita in G_2. Affinché la biglia colpendo una dopo l'altra tutte le pareti, senza colpire due volte la stessa parete, ritorni esattamente nel punto di partenza, il punto G_1 deve coincidere con G_2, cioè deve aversi la situazione rappresentata in figura 4.

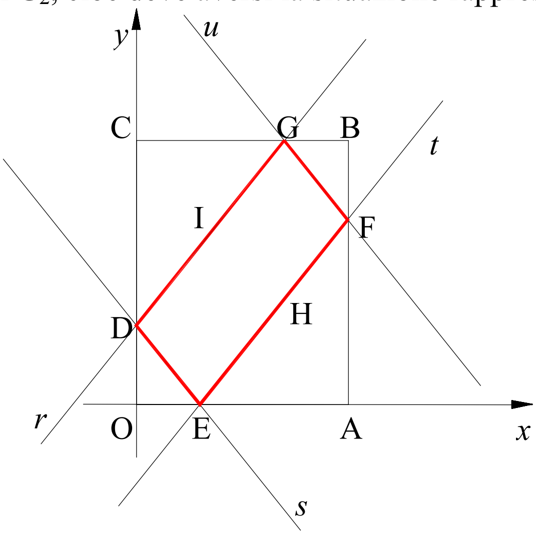

Figura 4.

L'equazione della retta *r* è

$$r: \quad y = mx + q$$

Essa interseca il lato OC nel punto $D(0, q)$, mentre interseca il lato CB nel punto che si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = mx + q \\ y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5 = mx + q \\ y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{5-q}{m} \\ y = 5 \end{cases}$$

cioè $G_1\left(\dfrac{5-q}{m}, 5\right)$.

La retta *s* è la retta simmetrica della retta *r* rispetto alla retta *y*=*q*. La sua equazione è

$$s: \quad y = -mx + q$$

La retta *s* interseca l'asse *x* nel punto

$$\begin{cases} y = -mx + q \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = -mx + q \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{q}{m} \\ y = 0 \end{cases}$$

cioè $E\left(\dfrac{q}{m}, 0\right)$.

La retta *t* è la retta parallela alla retta *r* passante per E. La sua equazione sarà

$$t: \quad y - 0 = m\left(x - \frac{q}{m}\right)$$

cioè

$$t: \quad y = mx - q$$

Per ricavare le coordinate del punto in cui la retta *t* interseca la retta di equazione x=4 bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = mx - q \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 \\ y = 4m - q \end{cases}$$

quindi $F(4, 4m - q)$.

La retta parallela a *s* passante per F ha equazione

$$u: \quad y - (4m - q) = -m(x - 4)$$

cioè

$$u: \quad y = -mx + 8m - q$$

Le coordinate del punto in cui la retta *u* interseca la retta di equazione y=5 bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = -mx + 8m - q \\ y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5 = -mx + 8m - q \\ y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} mx = 8m - q - 5 \\ y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 8 - \dfrac{q+5}{m} \\ y = 5 \end{cases}$$

quindi $G_2\left(8 - \dfrac{q+5}{m}, 5\right)$.

Deve risultare

$$x_{G_1} = x_{G_2}$$

cioè

$$\frac{5-q}{m} = 8 - \frac{q+5}{m}$$

da cui

$$5 - q = 8m - q - 5$$
$$8m = 10$$

Pertanto

$$m = \frac{5}{4}$$

Quindi la retta *r* deve avere un coefficiente angolare pari a $\dfrac{5}{4}$ cioè il rapporto tra le dimensioni del rettangolo.

Ripetendo lo stesso ragionamento sui piani *xz* e *yz* si trova che i coefficienti angolari delle proiezioni delle analoghe della retta *r* sono

$$n = \frac{3}{4} \qquad l = \frac{3}{5}$$

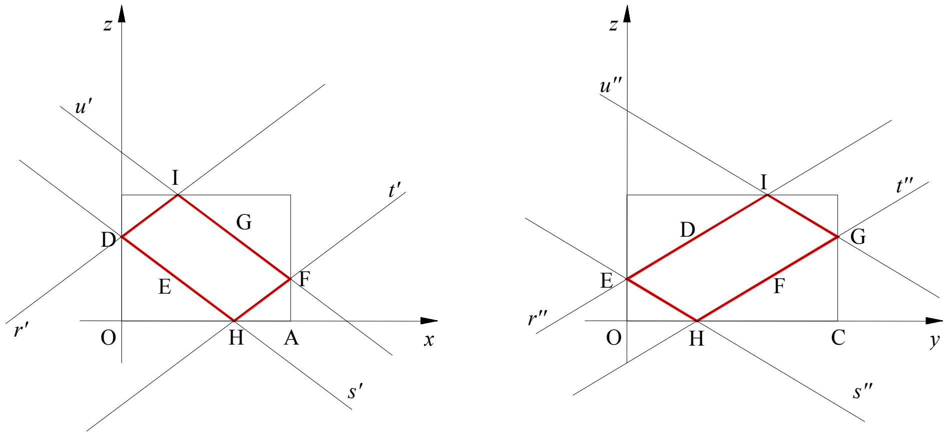

Figura 5.

È quindi necessario che la direzione delle rette sia quella di una delle 4 diagonali del parallelepipedo.

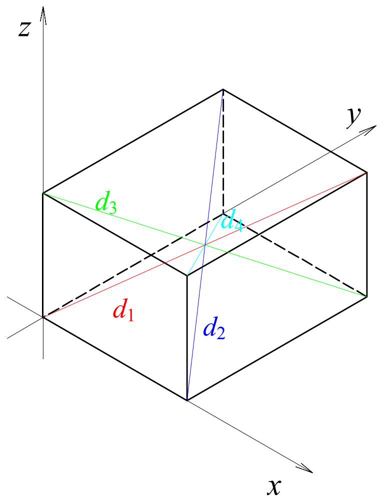

Figura 6.

Una retta si può scrivere in forma parametrica come

$$x = x_0 + \alpha t$$
$$y = y_0 + \beta t$$
$$z = z_0 + \gamma t$$

dove α, β, γ sono i numeri direttori.

Le equazioni delle quattro diagonali sono

$$d_1 : \begin{cases} x = 4t \\ y = 5t \\ z = 3t \end{cases} \qquad d_2 : \begin{cases} x = 4 - 4t \\ y = 5t \\ z = 3t \end{cases} \qquad d_3 : \begin{cases} x = 4t \\ y = 5t \\ z = 3 - 3t \end{cases} \qquad d_4 : \begin{cases} x = 4 - 4t \\ y = 5t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$$

Supponiamo che il punto di partenza appartenga alla zona colorata di Figura 7; cioè

$$\begin{cases} 0 < x < 4 \\ 0 < y < 5 \\ 5x - 4y > 0 \end{cases}$$

Sia $P_0(x_0, y_0, 0)$ il punto di partenza. La retta passante per P_0 e parallela alla diagonale d_1 ha equazione

$$r_1 : \begin{cases} x = x_0 + 4t \\ y = y_0 + 5t \\ z = 3t \end{cases}$$

essa interseca la faccia x=4. In tal caso si deve avere

$$4 = x_0 + 4t$$

da cui

$$t = \frac{4 - x_0}{4} = 1 - \frac{x_0}{4}$$

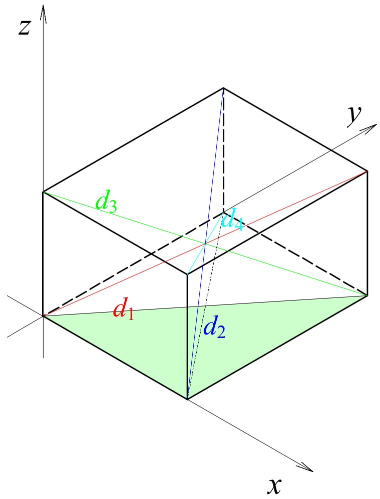

Figura 7.

Pertanto il punto di intersezione con la faccia x=4 ha coordinate

$$P_1: \begin{cases} x = x_0 + 4\left(1 - \frac{x_0}{4}\right) = x_0 + 4 - x_0 = 4 \\ y = y_0 + 5\left(1 - \frac{x_0}{4}\right) = 5 - \frac{5}{4}x_0 + y_0 \\ z = 3\left(1 - \frac{x_0}{4}\right) = 3 - \frac{3}{4}x_0 \end{cases} \qquad P_1: \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 - \frac{5}{4}x_0 + y_0 \\ z = 3 - \frac{3}{4}x_0 \end{cases}$$

A questo punto la pallina devia e segue una traiettoria parallela alla diagonale d_2. L'equazione di tale traiettoria è

$$r_2: \begin{cases} x = x_1 - 4t \\ y = y_1 + 5t \\ z = z_1 + 3t \end{cases}$$

cioè

$$r_2: \begin{cases} x = 4 - 4t \\ y = 5 - \frac{5}{4}x_0 + y_0 + 5t \\ z = 3 - \frac{3}{4}x_0 + 3t \end{cases}$$

essa interseca la faccia y=5. In tal caso si deve avere

$$5 = 5 - \frac{5}{4}x_0 + y_0 + 5t$$

da cui

$$t = \frac{x_0}{4} - \frac{y_0}{5}$$

Pertanto il punto di intersezione con la faccia y=5 ha coordinate

$$P_2: \begin{cases} x = 4 - 4\left(\dfrac{x_0}{4} - \dfrac{y_0}{5}\right) = 4 - x_0 + \dfrac{4}{5}y_0 \\ y = 5 - \dfrac{5}{4}x_0 + y_0 + 5\left(\dfrac{x_0}{4} - \dfrac{y_0}{5}\right) = 5 \\ z = 3 - \dfrac{3}{4}x_0 + 3\left(\dfrac{x_0}{4} - \dfrac{y_0}{5}\right) = 3 - \dfrac{3}{5}y_0 \end{cases} \qquad P_2: \begin{cases} x = 4 - x_0 + \dfrac{4}{5}y_0 \\ y = 5 \\ z = 3 - \dfrac{3}{5}y_0 \end{cases}$$

A questo punto la pallina devia e segue una traiettoria parallela alla diagonale d_3. L'equazione di tale traiettoria è

$$r_3: \begin{cases} x = x_2 + 4t \\ y = y_2 + 5t \\ z = z_2 - 3t \end{cases}$$

cioè

$$r_3: \begin{cases} x = 4 - x_0 + \dfrac{4}{5}y_0 + 4t \\ y = 5 + 5t \\ z = 3 - \dfrac{3}{5}y_0 - 3t \end{cases}$$

La pallina intersecherà la faccia z=3. In tal caso si deve avere

$$3 = 3 - \frac{3}{5}y_0 - 3t$$

da cui

$$t = -\frac{y_0}{5}$$

Pertanto il punto di intersezione con la faccia z=3 ha coordinate

$$P_3: \begin{cases} x = 4 - x_0 + \dfrac{4}{5}y_0 + 4\left(-\dfrac{y_0}{5}\right) = 4 - x_0 \\ y = 5 + 5\left(-\dfrac{y_0}{5}\right) = 5 - y_0 \\ z = 3 - \dfrac{3}{5}x_0 - 3\left(-\dfrac{y_0}{5}\right) = 3 \end{cases} \qquad P_3: \begin{cases} x = 4 - x_0 \\ y = 5 - y_0 \\ z = 3 \end{cases}$$

La successiva traiettoria seguita dalla pallina è parallela alla diagonale d_1. L'equazione di tale traiettoria è

$$r_4: \begin{cases} x = x_3 + 4t \\ y = y_3 + 5t \\ z = z_3 + 3t \end{cases}$$

cioè

$$r_4: \begin{cases} x = 4 - x_0 + 4t \\ y = 5 - y_0 + 5t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$$

Seguendo tale traiettoria la pallina intersecherà la faccia x=0. Deve risultare

$$0 = 4 - x_0 + 4t$$

da cui

$$t=\frac{x_0-4}{4}$$

Pertanto il punto di intersezione con la faccia x=0 ha coordinate

$$P_4:\quad\begin{cases}x=4-x_0+4\dfrac{x_0-4}{4}=0\\ y=5-y_0+5\dfrac{x_0-4}{4}=-y_0+\dfrac{5}{4}x_0\\ z=3+3\dfrac{x_0-4}{4}=\dfrac{3}{4}x_0\end{cases}\qquad P_4:\quad\begin{cases}x=0\\ y=\dfrac{5}{4}x_0-y_0\\ z=\dfrac{3}{4}x_0\end{cases}$$

A questo punto la pallina segue una traiettoria, parallela alla diagonale d_2, di equazione

$$r_5:\quad\begin{cases}x=x_4-4t\\ y=y_4+5t\\ z=z_4+3t\end{cases}$$

cioè

$$r_5:\quad\begin{cases}x=-4t\\ y=\dfrac{5}{4}x_0-y_0+5t\\ z=\dfrac{3}{4}x_0+3t\end{cases}$$

Seguendo tale traiettoria la pallina intersecherà la faccia y=0 per cui deve risultare

$$0=\frac{5}{4}x_0-y_0+5t$$

da cui

$$t=\frac{y_0}{5}-\frac{x_0}{4}$$

Pertanto il punto di intersezione con la faccia x=0 ha coordinate

$$P_5:\quad\begin{cases}x=-4\left(\dfrac{y_0}{5}-\dfrac{x_0}{4}\right)=x_0-\dfrac{4}{5}y_0\\ y=\dfrac{5}{4}x_0-y_0+5\left(\dfrac{y_0}{5}-\dfrac{x_0}{4}\right)=0\\ z=\dfrac{3}{4}x_0+3\left(\dfrac{y_0}{5}-\dfrac{x_0}{4}\right)=\dfrac{3}{5}y_0\end{cases}\qquad P_5:\quad\begin{cases}x=x_0-\dfrac{4}{5}y_0\\ y=0\\ z=\dfrac{3}{5}y_0\end{cases}$$

A questo punto la pallina segue una traiettoria parallela alla diagonale d_3. L'equazione di tale traiettoria è

$$r_6:\quad\begin{cases}x=x_5+4t\\ y=y_5+5t\\ z=z_5-3t\end{cases}$$

cioè

$$r_6:\quad\begin{cases}x=x_0-\dfrac{4}{5}y_0+4t\\ y=5t\\ z=\dfrac{3}{5}y_0-3t\end{cases}$$

Proseguendo la pallina intersecherà la faccia z=0. In tal caso si deve avere

$$0 = \frac{3}{5}y_0 - 3t$$

da cui

$$t = \frac{y_0}{5}$$

Pertanto il punto di intersezione con la faccia z=0 ha coordinate

$$P_6 : \begin{cases} x = x_0 - \frac{4}{5}y_0 + 4\frac{y_0}{5} = x_0 \\ y = 5\frac{y_0}{5} = y_0 \\ z = \frac{3}{5}y_0 - 3\frac{y_0}{5} = 0 \end{cases} \qquad P_6 : \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Cioè la pallina ripassa per lo stesso punto da cui era partita. In figura 8 è riportata una delle infinite traiettorie seguita dalla pallina.

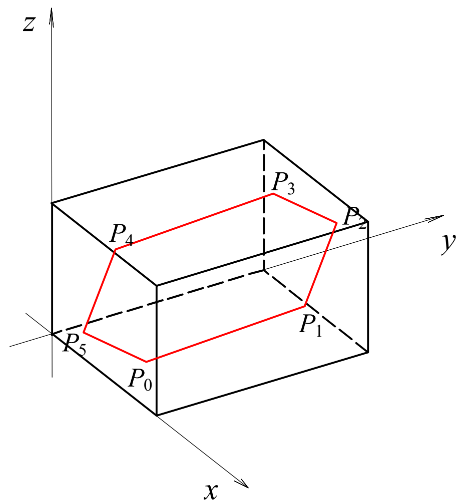

Figura 8.

Nello tabella seguente, inserendo le coordinate x_0 y_0 (che rispettino le condizioni $0 < x < 4; 0 < y < 5; 5x - 4y > 0$) si ottengono le coordinate dei punti di intersezione della pallina con le facce del parallelepipedo.

x_0	y_0	z_0 0
$x_1 = 4$	$y_1 = 5$	$z_1 = 3$
$x_2 = 4$	$y_2 = 5$	$z_2 = 3$
$x_3 = 4$	$y_3 = 5$	$z_3 = 3$
$x_4 = 0$	$y_4 = 0$	$z_4 = 0$
$x_5 = 0$	$y_5 = 0$	$z_5 = 0$

Francesco Vinciprova