Jeckyll

Il biliardo tridimensionale sarà il gioco del futuro. Durante le lunghe traversate, in assenza di gravità, i crocieristi spaziali giocheranno lanciando piccole sfere in camere a forma di parallelepipedo, le sfere rimbalzeranno sulle pareti del biliardo senza perdere molta energia e riflettendo perfettamente come raggi luminosi, ossia l'angolo di incidenza sarà uguale a quello di riflessione e la retta normale alla parete nel punto dell'urto sarà bisettrice all'angolo formato dalla traiettoria della biglia. In un biliardo a forma di parallelepipedo di dimensioni 3, 4, 5, sarà possibile costruire una traiettoria chiusa che colpendo una dopo l'altra tutte le pareti, senza colpire due volte la stessa parete, ritorni esattamente nel punto di partenza? Descriverne la traiettoria.

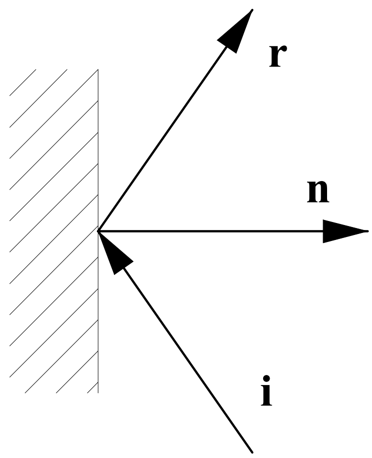
Soluzione: Nel procedimento di seguito riportato ho dimostrato che esistono infinite traiettorie che permettono alla pallina di colpire tutte le pareti del biliardo 3D, senza colpire due volte la stessa parete, e di tornare al punto di partenza. E' sufficiente che la traiettoria di partenza abbia la stessa direzione di una delle diagonali del parallelepipedo (biliardo). Allego alla presente un'applet grafica tridimensionale interattiva che disegna la traiettoria della sfera (la prospettiva cambia trascinando con il mouse l'immagine al centro dello schermo) e calcola le coordinate dei punti di impatto sulle pareti del biliardo al variare del punto di partenza della traiettoria (le coordinate del punto di partenza cambiano trascinando con il mouse il punto giallo nel triangolo rosso in alto a destra nello schermo). N.B. Nell'applet le misure 3, 4 e 5 fornite nel testo del problema le ho considerate come se fossero metri.

Procedimento:

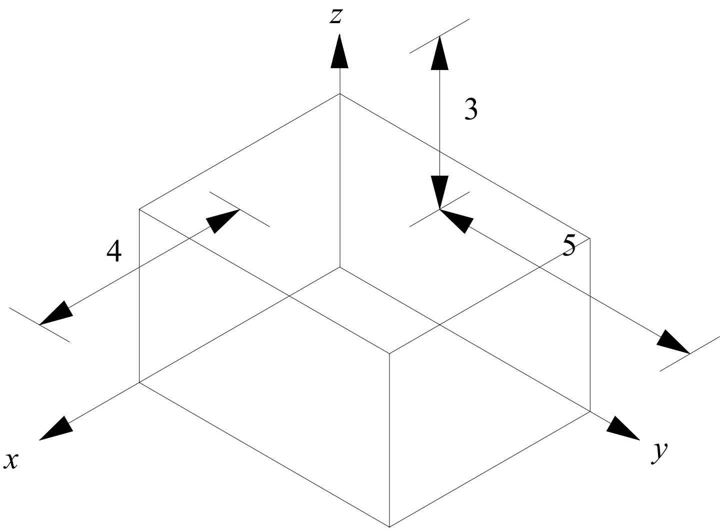
Detto **i** il versore (vettore di modulo unitario) che individua la traiettoria della sfera che si accinge ad *incidere* sulla parete di normale **n** (altro vettore di modulo unitario), la direzione della traiettoria *riflessa* sarà individuata dal vettore **r** definito dalla relazione:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} - 2(\mathbf{i} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \qquad (1)$$

dove con il simbolo $(\cdot)$ si è indicato il ben noto prodotto scalare tra due vettori. La validità della precedente formula risulta evidente se si osserva la seguente figura:



Ciò premesso consideriamo adesso un sistema di riferimento definito da una terna di assi cartesiani che rispetto al biliardo tridimensionale sia posizionato come nella seguente ulteriore figura:



Consideriamo dunque la traiettoria di una sferetta, la cui direzione è individuata dal versore $\mathbf{I}_0$, che, dopo aver urtato la parete $z = 0$, si diriga verso la parete $x = 4$. Tale traiettoria sia individuata dal versore $\mathbf{I}_0$. Detti **i**, **j** e **k** rispettivamente i versori degli assi cartesiani *x*, *y* e *z*, si vede facilmente che il versore normale alla parete $x = 4$ del biliardo sarà $-\mathbf{i}$. Pertanto, applicando la (1), la direzione della traiettoria della sfera dopo aver urtato il piano $x = 4$ sarà individuata dal versore:

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_0 - 2(\mathbf{I}_0 \cdot \mathbf{i})\,\mathbf{i} \tag{2}$$

Mettiamo adesso il caso che, successivamente, la pallina si diriga verso la parete $y = 5$ del biliardo la cui normale è $-\mathbf{j}$. Applicando la (1) si otterrà il versore $\mathbf{I}_2$ che individua la direzione della traiettoria della sfera dopo aver urtato la parete $y = 5$. Tale versore sarà dato dalla relazione:

$$\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_1 - 2(\mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{j})\,\mathbf{j} \tag{3}$$

Mettiamo infine il caso che, successivamente, la pallina si diriga verso il piano $z = 3$, parallelo al piano $z = 0$ da cui ha avuto inizio il viaggio della sfera, e che qui rimbalzi cambiando una volta ancora la propria traiettoria. Ragionando in maniera analoga ai casi precedenti si ha che dopo l'urto la sfera avrà una traiettoria la cui direzione sarà individuata dal versore:

$$\mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_2 - 2(\mathbf{I}_2 \cdot \mathbf{k})\mathbf{k} \tag{4}$$

Andando a sostituire la (2) e la (3) nella (4), e ricordando che i versori **i**, **j** e **k** sono a due a due ortogonali (e quindi i loro prodotti scalari sono nulli), si ottiene che:

$$\mathbf{I}_3 = -\mathbf{I}_0 \tag{5}$$

Questo risultato ci dice che se si trova una traiettoria della sfera tale che vengano colpiti in sequenza i piani $z = 0$, $x = 4$, $y = 5$ e $z = 3$, le traiettorie della pallina immediatamente dopo aver urtato i due piani paralleli $z = 0$ e $z = 3$ saranno parallele ma percorse in senso contrario. C'è dunque una condizione di simmetria tra i due piani paralleli anzidetti che può aiutarci a risolvere il problema. Infatti se si trova il versore $\mathbf{I}_0$ in maniera tale che la sferetta, partendo dal piano $z = 0$ nel punto di coordinate (x_0, y_0) con traiettoria avente direzione $\mathbf{I}_0$, colpisca piano $z = 3$ nel punto di coordinate (x_3, y_3) tali che:

$$\begin{cases} 4 - x_3 = x_0 \\ 5 - y_3 = y_0 \end{cases} \tag{6}$$

allora si sarà realizzata una traiettoria perfettamente simmetrica per inversione degli assi e traslazione dell'origine nello spigolo opposto (da $0,0,0$ a $4,5,3$) che, conseguentemente, si chiuderà perfettamente replicandosi più volte fino al completo esaurimento dell'energia cinetica posseduta inizialmente dalla pallina. Vediamo dunque di determinate le coordinate (x_3, y_3) in funzione delle coordinate (x_0, y_0). A tal proposito si indichino con I_{0x}, I_{0y} e I_{0z} le componenti del versore incognito $\mathbf{I}_0$. Tenendo presenti le (2) e (3) si ottiene che le componenti dei versori $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ saranno:

$$\begin{cases} I_{1x} = -I_{0x} \\ I_{1y} = I_{0y} \\ I_{1z} = I_{0z} \end{cases} \qquad \begin{cases} I_{2x} = -I_{0x} \\ I_{2y} = -I_{0y} \\ I_{2z} = I_{0z} \end{cases} \tag{7}$$

Le equazioni parametriche della traiettoria della sfera nel suo tragitto dal piano $z = 0$ al piano $x = 4$ sarà:

$$\begin{cases} x(t) = I_{0x}\,t + x_0 \\ y(t) = I_{0y}\,t + y_0 \\ z(t) = I_{0z}\,t \end{cases} \tag{8}$$

Da queste, ponendo $x = 4$ ed eliminando il parametro *t*, si ottengono le coordinate (x_1, y_1, z_1) del punto in cui la sfera colpisce il piano $x = 4$. Risultano:

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = \dfrac{I_{0y}}{I_{0x}}(4 - x_0) + y_0 \\ z_1 = \dfrac{I_{0z}}{I_{0x}}(4 - x_0) \end{cases} \tag{9}$$

Partendo ora da queste coordinate si trovano le equazioni parametriche della traiettoria della pallina durante il suo tragitto dal piano $x = 4$ al piano $y = 5$. Tali equazioni sono [si sono tenute in conto le (7)]:

$$\begin{cases} x(t) = I_{1x}\, t + x_1 = -I_{0x}\, t + x_1 \\ y(t) = I_{1y}\, t + y_1 = I_{0y}\, t + y_1 \\ z(t) = I_{1z}\, t + z_1 = I_{0z}\, t + z_1 \end{cases} \tag{10}$$

Imponendo $y = 5$ ed eliminando il parametro *t* si ottengono le coordinate del punto di impatto tra la sfera ed il piano $y = 5$:

$$\begin{cases} x_2 = -\dfrac{I_{0x}}{I_{0y}}(5 - y_1) + x_1 \\ y_2 = 5 \\ z_2 = \dfrac{I_{0z}}{I_{0y}}(5 - y_1) + z_1 \end{cases} \tag{11}$$

Partendo infine da queste coordinate si trovano le equazioni parametriche della traiettoria della pallina durante il suo tragitto dal piano $y = 5$ al piano $z = 3$. Tali equazioni sono:

$$\begin{cases} x(t) = I_{2x}\, t + x_2 = -I_{0x}\, t + x_1 \\ y(t) = I_{2y}\, t + y_2 = -I_{0y}\, t + y_1 \\ z(t) = I_{2z}\, t + z_2 = I_{0z}\, t + z_1 \end{cases} \tag{12}$$

Imponendo $z = 3$ ed eliminando il parametro *t* si ottengono le coordinate del punto di impatto tra la sfera ed il piano $z = 3$:

$$\begin{cases} x_3 = -\dfrac{I_{0x}}{I_{0z}}(3 - z_2) + x_2 \\ y_3 = -\dfrac{I_{0y}}{I_{0z}}(3 - z_2) + y_2 \\ z_3 = 3 \end{cases} \tag{13}$$

A questo punto, andando a fare le debite sostituzioni ed imponendo le condizioni di simmetria (6), si ottengono le seguenti due condizioni sulle componenti del versore $\mathbf{I}_0$:

$$\begin{cases} 3I_{0x} = 4I_{0z} \\ 3I_{0y} = 5I_{0z} \end{cases} \tag{14}$$

Aggiungendo a queste due la condizione che il versore $\mathbf{I}_0$ ha modulo unitario ($I_{0x}^2 + I_{0y}^2 + I_{0z}^2 = 1$) si ottiene che:

$$\begin{cases} I_{0x} = \dfrac{4}{5\sqrt{2}} \\ I_{0y} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ I_{0z} = \dfrac{3}{5\sqrt{2}} \end{cases} \tag{15}$$

Si verifica facilmente che il versore $\mathbf{I}_0$ è parallelo alla diagonale che unisce gli spigoli del biliardo aventi coordinate $(0,0,0)$ e $(4,5,3)$.

Poiché nell'imposizione delle condizioni di simmetria le coordinate (x_0, y_0, z_0) del punto di partenza della pallina si sono semplificate, si deduce che si tali coordinate non esistono restrizioni. E' cioè sufficiente che la pallina parta da un qualunque punto del piano $z = 0$ con direzione individuata dal versore $\mathbf{I}_0$ le cui componenti sono date dalle (15), per avere una traiettoria che si chiude perfettamente replicandosi fino al completo esaurimento dell'energia cinetica posseduta dalla pallina.