Il problema proposto ha creato sicuramente più di una preplessità soprattutto sull'esatta interpretazione del testo del problema. Un esempio di soluzione che considera tutte le possibili combinazioni di costruzione del quadrato è quello fornito da Elena Saccardi e da Marco Faini.

Armando Aran dà la seguente costruzione con riga e compasso nel caso in cui la misura del lato sia sqrt(2+1) m:

1) con riga e squadra o con una costruzione eseguita con riga e compasso, tracciamo due rette perpendicolari (vi sono vari metodi per tracciare due rette perpendicolari con riga e compasso)

2) indichiamo con A l'incrocio di esse

3) centriamo con il compasso in A e con apertura AB= 1 metro (secondo una certa scala) descriviamo un arco maggiore di 90° gradi intersecando le due rette perpendicolari

4) chiamiamo B e C i punti di intersezione

5) il segmento BC misura Sqr(2) metri

6) prolunghiamo il segmento BC di 1 m (usando la riga graduata o riga e compasso)

7) avremo un segmento BD = BC +1 = Sqr(2) +1

8) con riga e squadra o con una costruzione analoga al punto a) tracciamo la perpendicolare al segmento BD nel suo estremo B

9) centriamo con il compasso in B e con apertura BD descriviamo un arco maggiore di 90° partendo da D, che interseca nel punto E la perpendicolare suddetta

10) i segmenti BD e BE sono due lati del quadrato cercato

11) con l'aiuto del compasso di apertura BD completiamo il quadrato centrando nei punti D e E ottenendo il punto F

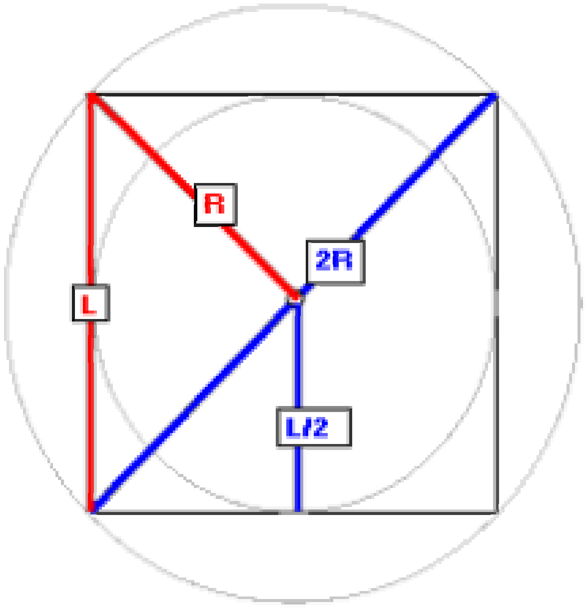
12) il quadrato finale sarà BDEF

Maurizio Morandi propone una costruzione con riga e compasso analoga a quella vista.

Paolo Malinconico fa una costruzione con riga e compasso contemplando tutti i quattro i casi usando una sola figura.

La soluzione di Marcello Falco è sicuramente quella più dettagliata.

La soluzione di Nora Morosi mette in risalto il fatto che, certe volte, la ricerca di una soluzione di un problema può essere dettata da certe circostanze che possono mettere il risolutore sulla giusta strada. Questa è la sua soluzione



Durante la costruzione della figura ho assegnato, inconsapevolmente, il valore di 2 metri al lato ***L*** *del quadrato (che è uguale al diametro del cerchio inscritto). Quando, appena dopo, ho disegnato il raggio del cerchio inscritto non ho fatto altro che appurare che il suo valore doveva essere di* ***L/2*** *(1 metro) e cioè* ***1 metro di differenza*** *tra un elemento dell'insieme primario e un elemento dell'insieme secondario.*

Soluzione di Elena Saccardi

I quadrati ai quali si arriva sono 2 o 4 a seconda che: "la differenza tra un elemento dell'insieme primario e dell'insieme secondario" sia da considerarsi:

- in senso assoluto (si possono costruire quadrati con lato di 2 m o di $2(\sqrt{2}+1)$ m)
- in senso relativo (si possono costruire quadrati con lato di 2 m, di $2(\sqrt{2}+1)$ m, di $(\sqrt{2}+1)$ m o di $\sqrt{2}$ m).

Motivazione:

Insieme primario = $I_p = \{l,R\}$ con $R = d/2$

Insieme secondario = $I_s = \{d,r\}$ con $r = l/2$

Esprimendo tutto rispetto al lato l:

$$I_p = \left\{l, \frac{l\sqrt{2}}{2}\right\} \qquad \text{e} \qquad I_s = \left\{l\sqrt{2}, \frac{l}{2}\right\}.$$

I quattro elementi dei due insiemi sono ordinati come segue: $l\sqrt{2} > l > \frac{l\sqrt{2}}{2} > \frac{l}{2}$.

Quindi le differenze (assolute) *tra un elemento dell'insieme primario e uno dell'insieme secondario* che possono valere 1 metro sono due:

- $l - \frac{l}{2} = 1$ metro, da cui $l = 2$ metri
- $\frac{l\sqrt{2}}{2} - \frac{l}{2} = 1$ metro, da cui $l = 2(\sqrt{2}+1)$ metri

A queste si possono aggiungere altre due differenze (relative, o “in modulo”) *tra un elemento dell’insieme primario e uno dell’insieme secondario* di valore uguale a 1 metro, e precisamente:

- $\left|1 - 1\sqrt{2}\right| = 1\sqrt{2} - 1 = 1$ metro, da cui $1 = \sqrt{2} + 1$ metri
- $\left|\frac{1\sqrt{2}}{2} - 1\sqrt{2}\right| = 1\sqrt{2} - \frac{1\sqrt{2}}{2} = 1$ metro, da cui $1 = \sqrt{2}$ metri.

Soluzione di Marco Faini

Soluzione algebrica.

I due insiemi definiti nel testo contengono ciascuno 2 elementi.

Primario:

L lato del quadrato (incognita del problema)

$R = \frac{L}{\sqrt{2}}$ raggio della circonferenza circoscritta

Secondario:

$D = \sqrt{2} * L$ diagonale del quadrato

$r = \frac{L}{2}$ raggio del circonferenza inscritta

Le possibili differenze fra un elemento dell'insieme primario e uno dell'insieme secondario sono:

L - D, L - r, R - D e R - r.

caso a)

$L - D = L - \sqrt{2} * L = L * (1 - \sqrt{2}) \prec 0$ quindi non può essere uguale a 1

caso b)

$L - r = L - \frac{L}{2} = L * (1 - \frac{1}{2}) = \frac{L}{2}$ questo è uguale a 1 quando L = 2

caso c)

$R - D = \frac{L}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} * L = L * (\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}) \prec 0$ quindi non può essere uguale a 1

caso d)

$R - r = \frac{L}{\sqrt{2}} - \frac{L}{2} = L * (\frac{\sqrt{2} - 1}{2}) = 1$ quando $L = \left(\frac{2}{\sqrt{2} - 1}\right) \cong 4.83$

trovare un quadrato sapendo che la differenza tra la misura un qualsiasi elemento del primo insieme e la misura di un qualsiasi elemento del secondo insieme è 1 metro.

1. a) e b) e c) e d) -> non ci sono soluzioni
2. a) e b) -> non ci sono soluzioni
3. c) e d) -> non ci sono soluzioni
4. a) -> non ci sono soluzioni
5. b) -> La soluzione è un quadrato di lato 2 mt.
6. c) -> non ci sono soluzioni
7. d) -> La soluzione è un quadrato di lato 4.83 mt.

8. a) o b) -> La soluzione è un quadrato di lato 2 mt.
9. c) o d) -> La soluzione è un quadrato di lato 4.83 mt.
10. a) o b) o c) o d) -> Ci sono due soluzioni che sono quelle dei punti 5 e 7.

Soluzione di Maurizio Morandi

Indichiamo con x il lato del quadrato. Da semplici considerazioni geometriche si ha:

Il raggio del cerchio circoscritto al quadrato è $R = \frac{\sqrt{2}}{2}x$. La diagonale del quadrato è $d = \sqrt{2}\,x$.

Il raggio del cerchio inscritto nel quadrato è $r = \frac{x}{2}$.

L'insieme primario A e l'insieme secondario B sono perciò:

$$A = \left(x\,, \frac{\sqrt{2}}{2}x \right) \qquad B = \left(\sqrt{2}\,x\,, \frac{x}{2} \right)$$

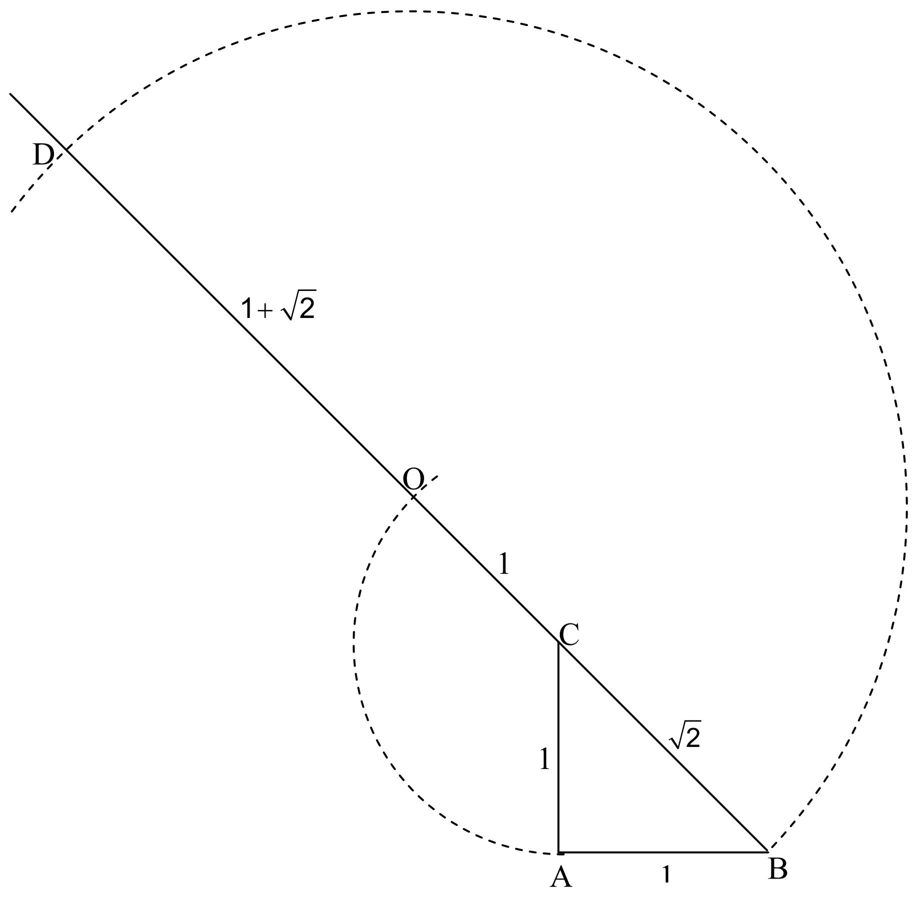
La differenza tra un elemento dell'insieme A e uno dell'insieme B, essendo x > 0, è uguale a 1 m quando:

$$x - \frac{x}{2} = 1 \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{x}{2} = 1$$

Risolvendo queste due equazioni di primo grado si ottengono le seguenti misure in metri del lato del quadrato:

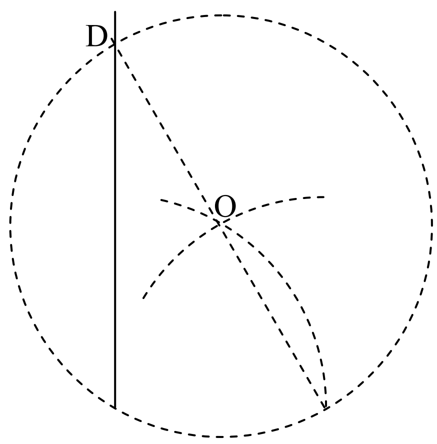
$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 2\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

Prima di tutto rappresentiamo graficamente le lunghezze dei lati dei due quadrati.
Per rappresentare il lato del primo quadrato, essendo un numero intero, basta utilizzare la riga graduata.
Per rappresentare il lato del secondo quadrato utilizziamo il seguente procedimento grafico (vedi figura)



– costruiamo il triangolo rettangolo isoscele ABC di cateti 1 m
– prolunghiamo l'ipotenusa BC di un segmento CO di lunghezza 1 m
– sul prolungamento del segmento OB riportiamo il segmento OD uguale ad OB
– il segmento BD è il lato del secondo quadrato.

Per disegnare il triangolo rettangolo ABC e i due quadrati con riga e compasso utilizziamo la seguente costruzione che ci permette di tracciare la perpendicolare ad un segmento dato per un suo estremo (vedi figura)



Dato il segmento AB la costruzione della retta perpendicolare ad AB per A segue le seguenti fasi:

– centro in A, con raggio arbitrario, si tracci una circonferenza che interseca il segmento AB in C

– centro in C, con raggio AC, si tracci la circonferenza che interseca la prima circonferenza in O

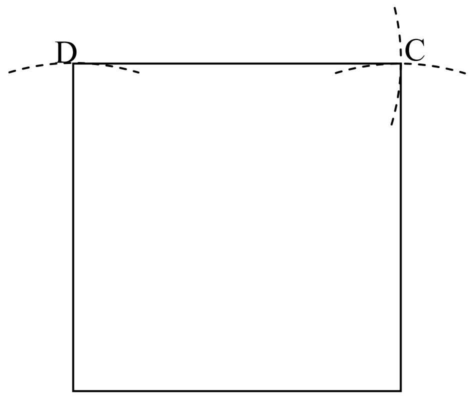
– centro in O, con raggio OC, si tracci la circonferenza che interseca il prolungamento di CO in D

– unendo A con D si trova la retta cercata in quanto l'angolo DAC è retto poiché

A C B

inscritto in una semicirconferenza

Siamo ora in grado di costruire i due quadrati di lato noto (vedi figura)



– utilizzando la costruzione precedente conduciamo per A la perpendicolare al segmento AB di lunghezza uguale
  al lato del quadrato

– su tale perpendicolare si porti il segmento AD di lunghezza uguale al lato del quadrato

– centro nei punti B e D si traccino due circonferenze di raggio uguale al lato del quadrato che si intersecano in C

– il quadrilatero ABCD è il quadrato richiesto

A B

Utilizzando le lunghezze dei lati precedentemente costruite siamo in grado di disegnare i due quadrati richiesti.

Soluzione di Marcello Falco

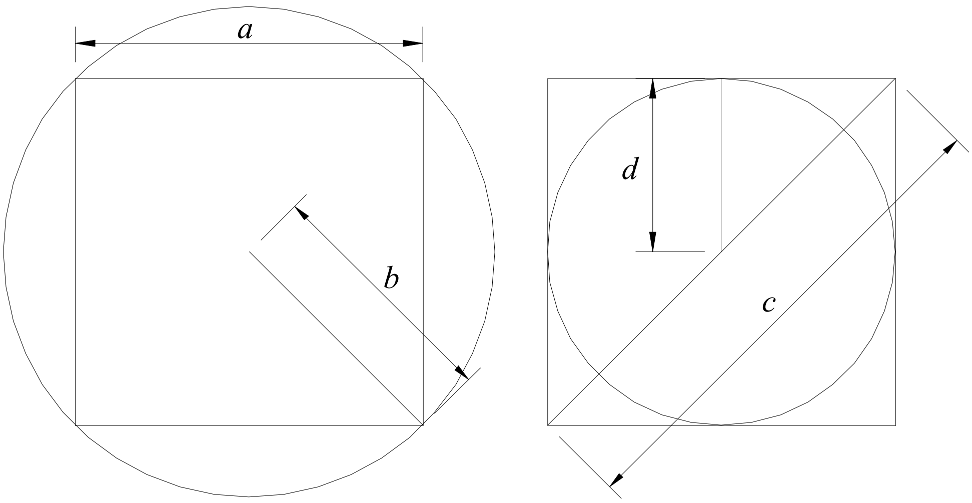
Si consideri un quadrato, il suo insieme primario definito come quello avente per elementi la misura del suo lato e del raggio del cerchio ad esso circoscritto ed il suo insieme secondario avente per elementi la misura della sua diagonale e del raggio del cerchio inscritto.
Costruire il quadrato sapendo che vale 1 metro la differenza tra un elemento dell'insieme primario e dell'insieme secondario.

Soluzione: Affinché la differenza tra due elementi degli insiemi primario e secondario di un quadrato risulti pari ad 1 metro il lato del quadrato deve avere una misura pari ad uno dei seguenti quattro valori:

$$l = 1+\sqrt{2}\,; \quad l=\sqrt{2}\,; \quad l=2\,; \quad l=2\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Procedimento:

Nella seguente figura sono indicate le misure (al momento incognite) che rappresentano gli elementi dell'insieme primario e secondario di un quadrato.



Sulla sinistra sono evidenziate le misure *a* e *b* che rappresentano rispettivamente la misura del lato del quadrato e la misura del raggio del cerchio ad esso circoscritto. Sulla destra, invece, sono evidenziate le misure *c* e *d* che rappresentano rispettivamente la misura della diagonale del quadrato e la misura del raggio del cerchio ad esso inscritto. Gli insiemi primario e secondario di un quadrato verranno di seguito indicati rispettivamente con I_1 e I_2 sicché, secondo l'usuale notazione degli insiemi, saranno:

$$\begin{cases} I_1 = \{a,\, b\} \\ I_2 = \{c,\, d\} \end{cases} \tag{1}$$

I valori degli elementi dei due insiemi del quadrato si possono facilmente esprimere in funzione del lato l del quadrato. Si ha quindi:

$$\begin{cases} a = l \\ b = \dfrac{\sqrt{2}}{2} l \\ c = \sqrt{2}\, l \\ d = \dfrac{l}{2} \end{cases} \tag{2}$$

Gli elementi dei due insiemi I_1 e I_2 possono dunque ordinarsi dal maggiore al minore nel seguente modo:

$$c = \sqrt{2}\, l \left(\in I_2\right) > a = l \left(\in I_1\right) > b = \frac{\sqrt{2}}{2} l \left(\in I_1\right) > d = \frac{l}{2} \left(\in I_2\right)$$

Tenendo presente quanto richiesto dal testo del problema, le possibili differenze tra gli elementi dei due insiemi (scritte in modo tale che il risultato sia comunque positivo) sono le seguenti quattro:

1. $c - a = 1$
2. $c - b = 1$
3. $a - d = 1$
4. $b - d = 1$

E' forse superfluo osservare che le quattro condizioni sopra riportate potranno essere soddisfatte solo una alla volta e mai tutte e quattro insieme. Per questo motivo di seguito saranno fornite quattro soluzioni differenti ognuna tale da soddisfare solo una delle precedenti condizioni.

Tenendo presenti le relazioni (2) che legano i valori delle costanti *a*, *b*, *c* e *d* al lato *l* del quadrato, da ognuna delle precedenti quattro condizioni vengono fuori le seguenti quattro equazioni di primo grado nell'incognita *l*:

1. $\sqrt{2}\, l - l = 1$
2. $\sqrt{2}\, l - \dfrac{\sqrt{2}}{2} l = 1$
3. $l - \dfrac{l}{2} = 1$
4. $\dfrac{\sqrt{2}}{2} l - \dfrac{l}{2} = 1$

le cui soluzioni sono:

1. $l = \dfrac{1}{\sqrt{2} - 1} = 1 + \sqrt{2}$
2. $l = \sqrt{2}$

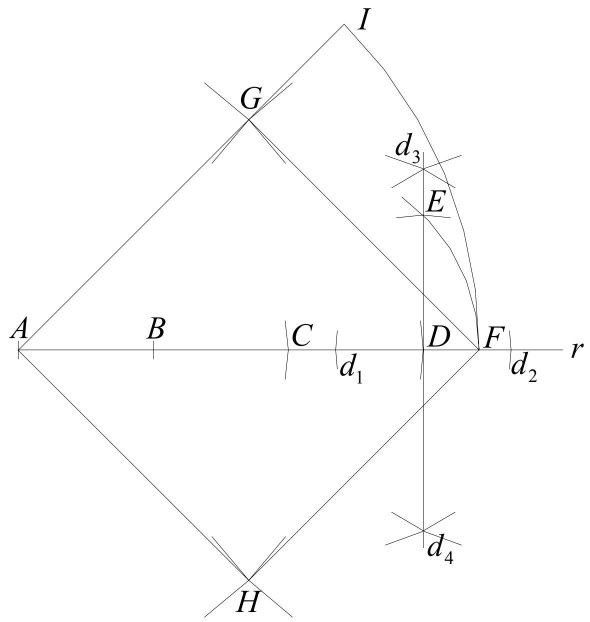
3. $l = 2$

4. $l = \dfrac{2}{\sqrt{2}-1} = 2\left(1+\sqrt{2}\right)$

Ne consegue che, ad esempio, se si vuole che la differenza tra la diagonale del quadrato ($c \in I_2$) ed il lato del quadrato ($a \in I_1$) sia pari ad 1, allora il lato del quadrato dovrà misurare $l = 1+\sqrt{2}$. Se invece si vuole che la differenza tra la diagonale del quadrato ($c \in I_2$) e il raggio del cerchio circoscritto al quadrato ($b \in I_1$) sia pari ad 1, allora il lato del quadrato dovrà misurare $l = \sqrt{2}$. E così via per i rimanenti ulteriori due casi.

Di seguito si riporta la costruzione geometrica del quadrato nel rispetto della prima condizione ($c - a = 1$) nell'ipotesi che gli unici strumenti a disposizione siano una riga (graduata per individuare un segmento unitario: 1 metro) ed un compasso (che riesca ad avere un'apertura adeguata a tracciare circonferenze con raggi dell'ordine del metro!). Niente squadrette per tracciare rette ortogonali che saranno quindi realizzate solo utilizzando riga e compasso.

Costruzione 1 ($c - a = 1$):



Tracciata la retta r su di un foglio di carta si stacchi su di essa il segmento unitario $\overline{AB}$ (1 m). Con apertura pari a $\overline{AB}$ si centri il compasso in B e si determini su r il punto C. Sempre con la stessa apertura si centri ora il compasso in C e si determini sempre su r il punto D. Si stringa ora un po', a piacere, l'apertura del compasso quindi, centrando quest'ultimo in D, si determinino su r i due punti d_1 e d_2 equidistanti da D. Allargando ora un po', sempre a piacere, l'apertura del compasso, si centri quest'ultimo prima in d_1 e poi in d_2 e si traccino gli archi di circonferenza che individuano i punti d_3 e d_4. Unendo con la riga i punti d_3 e d_4 si ottiene un segmento di retta ortogonale ad *r*. Con apertura pari a $\overline{AB}$ si centri ora il compasso in *D* e si determini il punto *E* sul segmento di retta ortogonale ad *r*. Con centro in *C* e apertura del compasso pari a $\overline{CE}$ si tracci un arco di circonferenza fino ad incontrare la retta *r* in *F*. Infine, con apertura pari a $\overline{BF}$, si centri il compasso prima in *A* e poi in *F* e si traccino gli archi di circonferenza che individuano i punti *G* e *H*. Il quadrato che rispetta la condizione ($c-a=1$), e cioè tale che la differenza tra la sua diagonale ed il suo lato sia pari ad uno, si otterrà tracciando con la riga i quattro segmenti $\overline{AG}$, $\overline{GF}$, $\overline{FH}$ e $\overline{HA}$.

Dimostrazione:

Come si è avuto modo di verificare in precedenza il lato del quadrato che rispetta la condizione 1 è pari a:

$$l = 1+\sqrt{2} \tag{3}$$

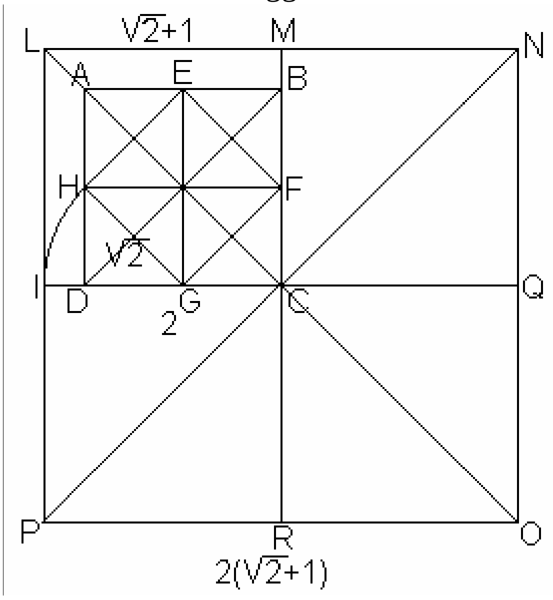
conseguentemente la diagonale di tale quadrato avrà una lunghezza pari a:

$$d = l\sqrt{2} = \left(1+\sqrt{2}\right)\sqrt{2} = 2+\sqrt{2} \tag{4}$$

Osservando la costruzione precedentemente riportata è immediato riconoscere che il segmento $\overline{CF}$ ha una lunghezza pari a $\sqrt{2}$ dato che la sua misura è la stessa della diagonale $\overline{CE}$ di un quadrato di lato 1. Tenuto conto di ciò è immediato riconoscere che il segmento $\overline{AF}$ ha una misura pari a $2+\sqrt{2}$ (cioè quella della diagonale del quadrato cercato) e che il segmento $\overline{BF}$ ha una misura pari a $1+\sqrt{2}$ (cioè quella del lato del quadrato). Si deduce immediatamente che il quadrilatero *AGFH* che ha i lati pari a $1+\sqrt{2}$ corrisponde al quadrato cercato. Come verifica grafica si può ottenere il punto *I* centrando il compasso in A con apertura $\overline{AF}$ e tracciando un arco di circonferenza fino ad incontrare il prolungamento del lato $\overline{AG}$. Misurando il segmento $\overline{GI}$ con la riga graduata questo risulterà lungo 1 *m*.

Soluzione di Paolo Malinconico

Innanzi tutto si evidenzia che il raggio del cerchio inscritto in un quadrato corrisponde alla metà del suo lato, mentre il raggio del cerchio ad esso circoscritto corrisponde alla metà della sua diagonale.



Si indicano con I l'insieme primario e con S l'insieme secondario. Gli elementi di I e di S si possono esprimere tutti in funzione della lunghezza del lato del quadrato ℓ, e si ha:

$$I=\left\{\ell;\ell\frac{\sqrt{2}}{2}\right\};S=\left\{\ell\sqrt{2};\frac{\ell}{2}\right\}$$

La condizione posta dalla traccia, ossia la differenza (intesa in valore assoluto) fra un elemento di I e un elemento di S è pari a 1, determina 4 ipotesi:

$$1)\ell\sqrt{2}-\ell\frac{\sqrt{2}}{2}=1\Rightarrow \ell=\sqrt{2};$$

$$2)\ell-\frac{\ell}{2}=1\Rightarrow \ell=2;$$

$$3)\ell\sqrt{2}-\ell=1\Rightarrow \ell=\sqrt{2}+1;$$

$$4)\ell\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\ell}{2}=1\Rightarrow \ell=2\left(\sqrt{2}+1\right)$$

Si comincia col costruire il quadrato di lato 2 (seconda ipotesi), nella figura corrispondente al quadrato ABCD.

Congiungendo i punti medi dei quattro lati EFGH si ottiene il quadrato della prima ipotesi.

Si prolunga il lato CD e si riporta su di esso la distanza GH =GI, si costruisce quindi il quadrato CILM, corrispondente alla 3^ ipotesi.

Si prolunga quindi il lato LM, si riporta sul prolungamento la stessa distanza LM=MN e si costruisce il quadrato LNOP, corrispondente all'ultima ipotesi.