Onda verde

di Flavio Cimolin

Costanza, come tutti gli abitanti di Constown, ogni mattina va a lavorare e, quando prende la macchina, segue la seguente regola: calcola attentamente la situazione di partenza in modo da poter poi arrivare fino a destinazione mantenendo sempre la stessa velocità. La sua abitazione dista 5 km dal suo posto di lavoro e la strada è interrotta da 4 incroci con semaforo alla distanza di 1 km l'uno dall'altro. I semafori di Constown sono estremamente regolari e possono essere solo verdi oppure rossi, anche se caratterizzati da durate diverse. Non spaventatevi però, perché nel paese non si verificano mai incidenti, dato che tutti gli abitanti sono estremamente meticolosi nel calcolare le velocità a cui procedere, ovviamente facendo in modo da non attraversare mai un incrocio nel preciso istante in cui il semaforo cambia di colore. Sulla strada che Costanza deve percorrere, il primo semaforo ha un ciclo di 40 s (rispettivamente 20 s di verde, 20 s di rosso, e così via…), il secondo ha un ciclo di 60 s, il terzo ha un ciclo di 80 s e il quarto ha un ciclo di 100 s. Nell'istante in cui parte da casa, Costanza vede che il primo e il terzo semaforo sono appena diventati rossi, mentre il secondo e il quarto sono appena diventati verdi. Supponendo di trascurare il tempo di accelerazione iniziale della macchina (ovvero immaginando che essa parta già alla velocità desiderata), a quale velocità suggerireste a Costanza di procedere per raggiungere il prima possibile il suo posto di lavoro

<u>Soluzione di Andrea Battistoni</u>

Considero che la distanza dal primo semaforo alla casa di Costanza sia di 1 Km.

Per descrivere il funzionamento dei semafori utilizzo la funzione coseno, intendendo che quando è positiva il semaforo è verde, altrimenti è rosso.

Per il primo semaforo ho:

$S1=\cos(\omega t+\varphi 1)$

Dove $\omega=2\pi/T1=2\pi/40$.

Per calcolare $\varphi 1$ impongo le condizioni iniziali, cioè che all'istante t=0, il semaforo, e quindi la sinusoide, sia appena diventato rosso, cioè stia appena entrando nella parte negativa.

Quindi $\varphi 1= \pi/2$.

Analogamente per tutti gli altri semafori. Si trovano le relazioni:

$S1=\cos(2\pi/40*t+ \pi/2)$

$S2=\cos(2\pi/60*t+ 3\pi/2)$

$S3=\cos(2\pi/80*t+ \pi/2)$

$S4=\cos(2\pi/100*t+ 3\pi/2)$

A questo punto non resta che scrivere le "funzioni semaforiche" in funzione della velocità costante.

$t1=1000/v$

$t2=2000/v$

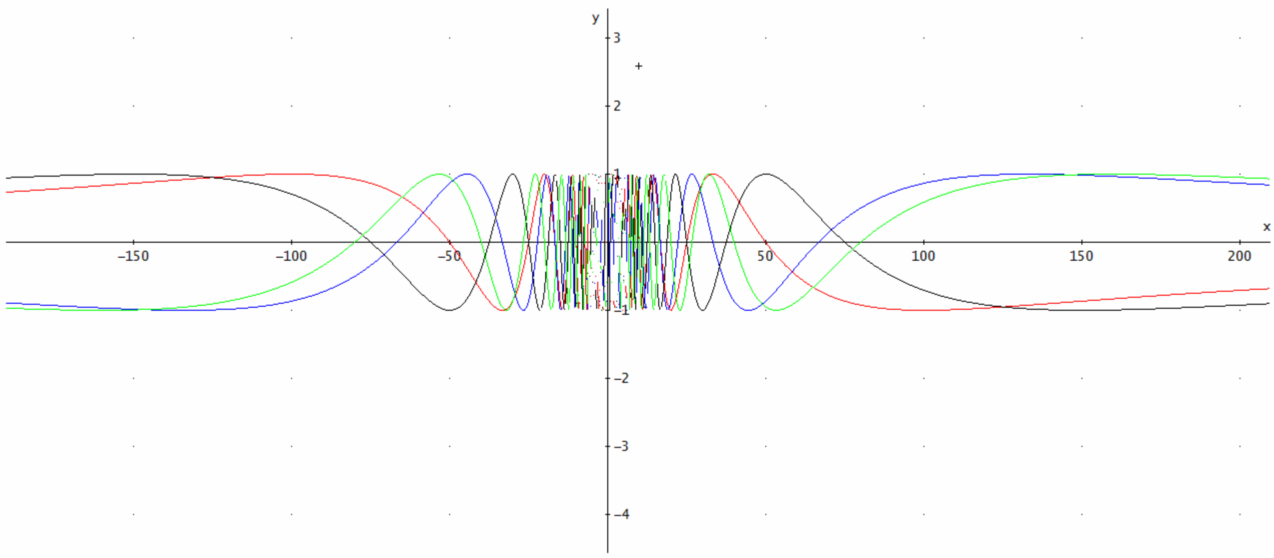
$t3=3000/v$

$t4=4000/v$

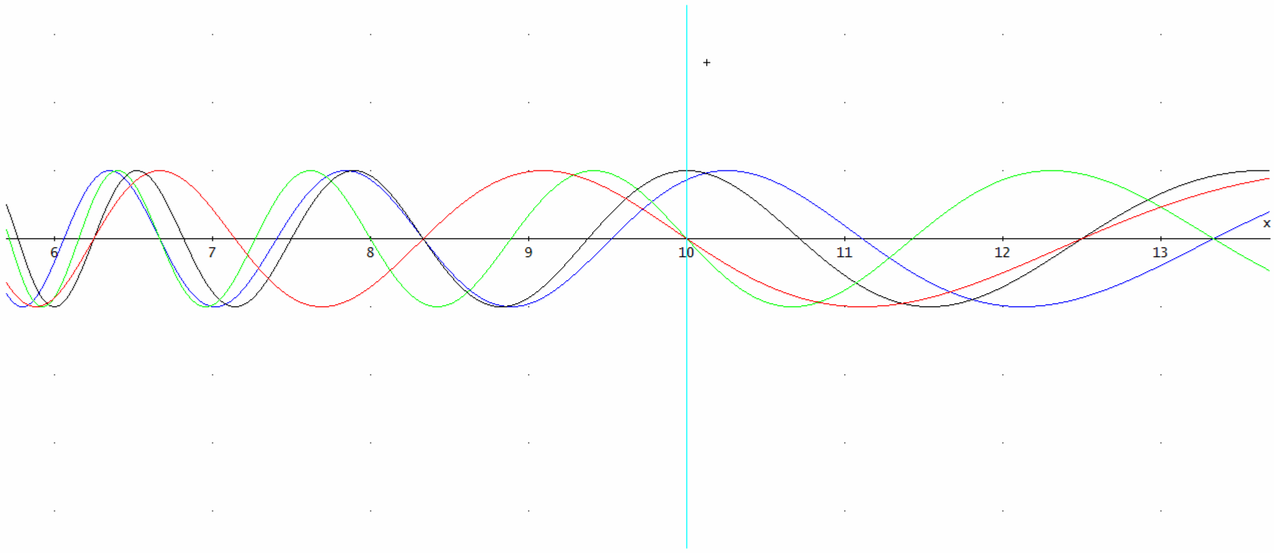
quindi:

S1= - sin(50 π/v)
S2= sin(200 π/(3v))
S3= - sin(75 π/v)
S4=sin (80 π/v)

Non resta che graficare le Quattro “funzioni semaforo” e vedere per quale v sono tutte positive.
Questo è il gafico complessivo.



Si vede subito il comportamento asinotico ad infinito. Ci occupiamo solo della parte positiva, in quanto supponiamo che Costanza non proceda a retromarcia!
Facendo uno zoom del grafico, si vede subito che la prima zona utile, procedendo da destra verso sinistra, nella quale le funzioni sono tutte contemporaneamente positive è per v<10 m/s.
Zoom:



Considerando dunque che Costanza è molto attenta a non attraversare gli incroci proprio nel momento in cui il semaforo cambia colore, consiglio a Costanza di andare ad una velocità di poco inferiore ai 10 m/s=36 Km/h.

Denis Ferrato
Campagna Lupia (VE)
Nickname: Shoden

Secondo quesito - Onda verde
Costanza, come tutti gli abitanti di Constown, ogni mattina va a lavorare e, quando prende la macchina, segue la seguente regola: calcola attentamente la situazione di partenza in modo da poter poi arrivare fino a destinazione mantenendo sempre la stessa velocità. La sua abitazione dista 5 km dal suo posto di lavoro e la strada è interrotta da 4 incroci con semaforo alla distanza di 1 km l'uno dall'altro. I semafori di Constown sono estremamente regolari e possono essere solo verdi oppure rossi, anche se caratterizzati da durate diverse. Non spaventatevi però, perché nel paese non si verificano mai incidenti, dato che tutti gli abitanti sono estremamente meticolosi nel calcolare le velocità a cui procedere, ovviamente facendo in modo da non attraversare mai un incrocio nel preciso istante in cui il semaforo cambia di colore. Sulla strada che Costanza deve percorrere, il primo semaforo ha un ciclo di 40 s (rispettivamente 20 s di verde, 20 s di rosso, e così via…), il secondo ha un ciclo di 60 s, il terzo ha un ciclo di 80 s e il quarto ha un ciclo di 100 s. Nell'istante in cui parte da casa, Costanza vede che il primo e il terzo semaforo sono appena diventati rossi, mentre il secondo e il quarto sono appena diventati verdi. Supponendo di trascurare il tempo di accelerazione iniziale della macchina (ovvero immaginando che essa parta già alla velocità desiderata), a quale velocità suggerireste a Costanza di procedere per raggiungere il prima possibile il suo posto di lavoro

Risposta:

Sia v la velocità alla quale Costanza ipotizza di partire. Il tempo (espresso in secondi) impiegato per arrivare a ciascun semaforo si ottiene dal rapporto tra la distanza e la velocità (espressa in Km/s) ed è rispettivamente:

$$t_1 \quad \frac{1Km}{v}; t_2 \quad \frac{2Km}{v}; t_3 \quad \frac{3Km}{v}; t_4 \quad \frac{4Km}{v}.$$

Affinchè Costanza possa passare con verde ad ogni semaforo devono essere verifica le condizioni:

$$\begin{array}{l} 20 \quad 40k_1 \quad t_1 \quad 40 \quad 40k_1 \\ \quad 60k_2 \quad t_2 \quad 30 \quad 60k_2 \\ 40 \quad 80k_3 \quad t_3 \quad 80 \quad 80k_3 \\ \quad 100k_4 \quad t_4 \quad 50 \quad 100k_4 \end{array}$$

ove $k_1, k_2, k_3, k_4 \quad 0,1,2,\ldots$ indicano il numero progressivo del ciclo verde/rosso dei rispettivi semafori, ad iniziare con zero dal primo verde successivo al momento della partenza.
Esprimendo tali relazioni in termini della velocità si ottiene:

$$\begin{array}{l} 20 \quad 40k_1 \quad \frac{1}{v} \quad 40 \quad 40k_1 \\ \quad 60k_2 \quad \frac{2}{v} \quad 30 \quad 60k_2 \\ 40 \quad 80k_3 \quad \frac{3}{v} \quad 80 \quad 80k_3 \\ \quad 100k_4 \quad \frac{4}{v} \quad 50 \quad 100k_4 \end{array}$$

La risoluzione del problema si ottiene trovando la massima velocità v che soddisfa tutte e quattro le relazioni data la quaterna k_1, k_2, k_3, k_4 che consenta un intervallo di intersezione non nullo.

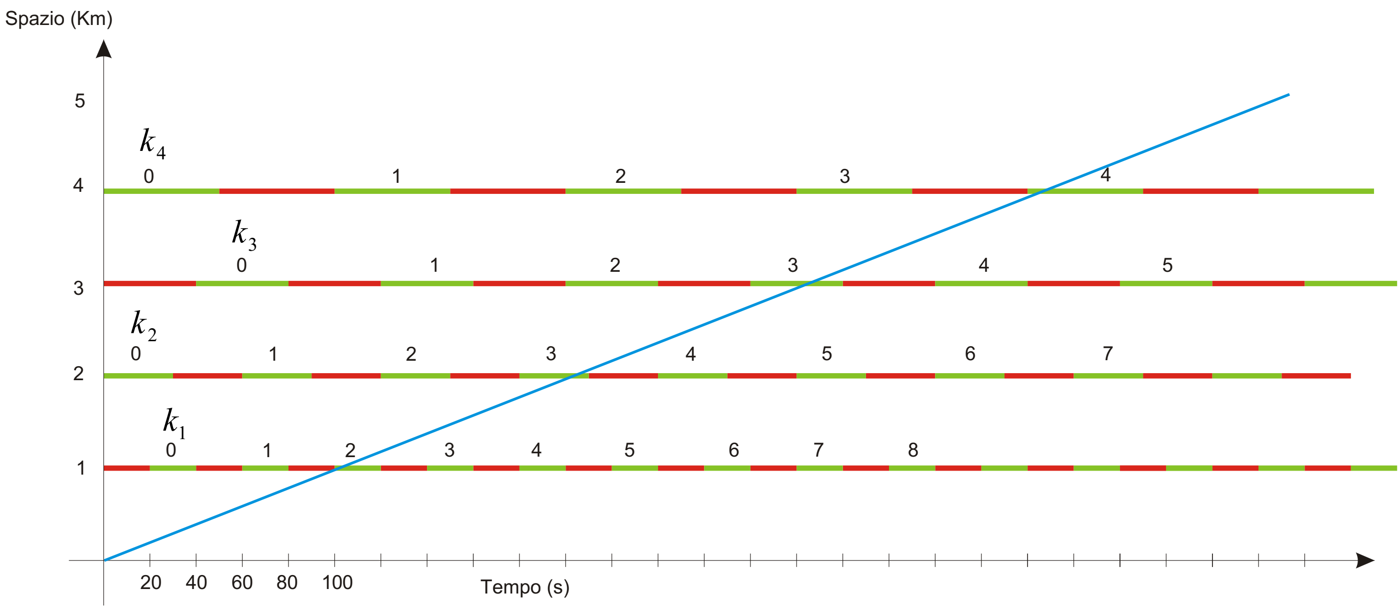
Sistemando le disequazioni in modo da esprimere delle relazioni dirette in v si ottiene:

$$\frac{1}{40 \quad 40k_1} \quad v \quad \frac{1}{20 \quad 40k_1}$$
$$\frac{2}{30 \quad 60k_2} \quad v \quad \frac{2}{60k_2}$$
$$\frac{3}{80 \quad 80k_3} \quad v \quad \frac{3}{40 \quad 80k_3}$$
$$\frac{4}{50 \quad 100k_4} \quad v \quad \frac{4}{100k_4}$$

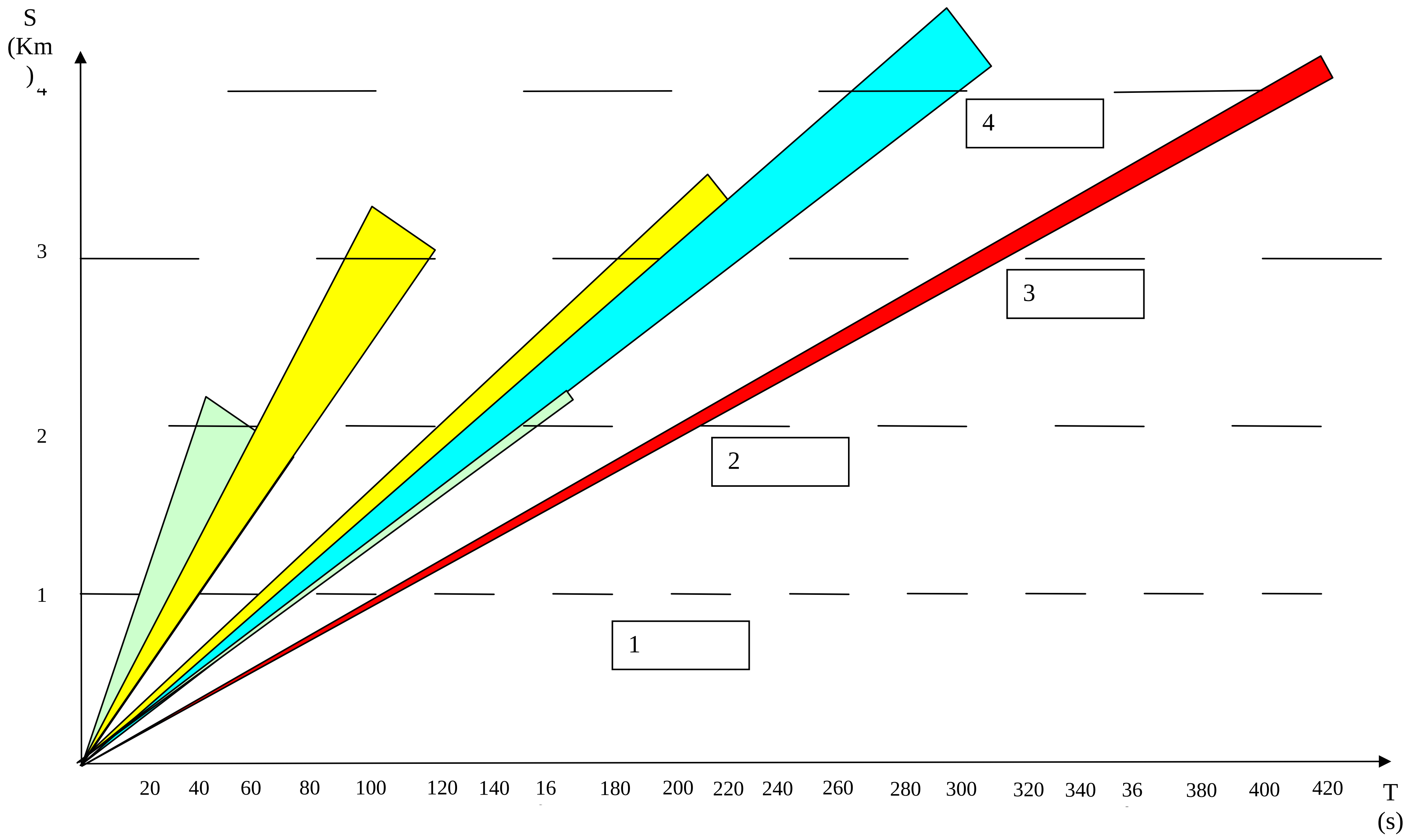
Risulta semplice ora sostituire a k_1, k_2, k_3, k_4 dei valori via via crescenti e verificare se gli intervalli individuati dalle relazioni hanno intersezione non nulla.
Dopo vari tentativi si ottiene che per i valori $k_1 \quad 2, k_2 \quad 3, k_3 \quad 3, k_4 \quad 4$ si ottiene:

$$\frac{1}{120} \quad v \quad \frac{1}{100}$$
$$\frac{1}{105} \quad v \quad \frac{1}{90}$$
$$\frac{1}{106,\overline{6}} \quad v \quad \frac{1}{93,\overline{3}}$$
$$\frac{1}{112,5} \quad v \quad \frac{1}{100}$$

Che individuano l'intervallo di intersezione: $\frac{1}{105} \quad v \quad \frac{1}{100}$
In tale intervallo di velocità Costanza riesce a passare col verde a tutti i semafori. Il tempo minimo si ottiene per $v_{\max} \quad \frac{1}{100} \quad 0{,}01 km/s \quad 36 km/h$, alla quale Costanza arriverà a lavoro nel tempo minimo $t_{\min} \quad \frac{5km}{v_{\max}} \quad 0{,}138h \quad 8m20s$.
Verifica grafica della soluzione:



Soluzione di Silvio Villa



Considerando il tempo (in secondi) nell'asse delle ascisse e lo spazio sull'asse delle ordinate, possiamo rappresentare le funzioni continue a tratti dei semafori.

Dove la funzione è tracciata, il semaforo è rosso, negli altri punti è verde.
Possiamo vedere i triangoli colorati come lo spazio in cui è possibile passare.
Notiamo che la velocità è il coefficiente angolare della retta (necessariamente passante per l'origine) presa in considerazione come tragitto.
Prendiamo in considerazione solo gli spazi di piano per cui passano linee rette che non intersechino la funzione del primo semaforo.
I triangoli verdi sono l'insieme delle rette passanti per l'origine che non intersecano la funzione primo semaforo, ma intersecano la funzione secondo semaforo.
I triangoli gialli sono l'insieme delle rette passanti per l'origine che non intersecano le funzioni primo e secondi semaforo, ma intersecano la funzione terzo semaforo.
I triangoli celeste sono l'insieme delle rette passanti per l'origine che non intersecano le funzioni primo, secondo e terzo semaforo, ma intersecano la funzione quarto semaforo.
Il triangolo rosso è la prima porzione di piano possibile su cui giacciono rette che passino per l'origine e non intersechino nessuna delle funzioni semaforo.
Notiamo che la retta limite (con il coefficiente angolare maggiore) è quella che passa per il punto (100, 1) cioè che al secondo 100 arriva al primo semaforo.
Quindi, procedendo ad una velocità di 0,01 km al secondo, giungerebbe ai semafori 1 e 4 nel preciso istante in cui questi diventano verdi.
Poiché questo non è ammesso, la velocità dovrà essere $\lim_{x \to 0{,}01^-} x \cdot 60^2$ km/h.

Cioè, quasi 36 km/h.