

## Il pallone di Luca

di Marcello Falco

Usando un pennarello, Luca sta cercando di tracciare un circuito chiuso sulla superficie del pallone di cuoio regalatogli dai genitori. Le regole che Luca si è imposto di seguire sono semplici e consistono nel muovere la punta del pennarello esclusivamente sulle cuciture del pallone. Durante il tracciamento del circuito chiuso, inoltre, la punta del pennarello non deve essere né staccata dalla superficie del pallone, né può percorrere più di una volta la stessa cucitura. Considerando che le cuciture del pallone di Luca riproducono la struttura di un icosaedro tronco (il ben noto solido semiregolare composto da 20 esagoni e 12 pentagoni regolari avente lati della stessa misura) e che la lunghezza di ogni tratto di cucitura è pari a  $5\text{ cm}$ , si vuole sapere qual è la massima lunghezza del circuito chiuso che Luca potrà tracciare (Darne una giustificazione e proporre un circuito chiuso di lunghezza massima).

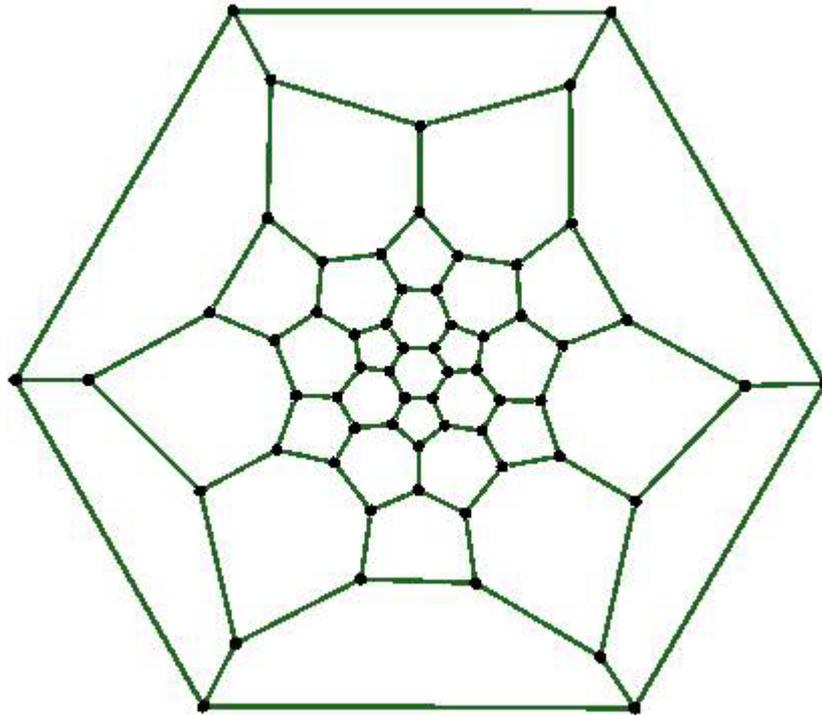


### Soluzione di M. Falco

La massima lunghezza del circuito chiuso che Luca potrà tracciare sul suo pallone nel rispetto delle regole che si è auto-imposto è pari a  $300\text{ cm}$

#### **Motivazione:**

Il problema di Luca consiste nel ricercare un percorso chiuso in un grafo avente la stessa struttura degli spigoli di un icosaedro tronco. Tale grafo è costituito da 60 nodi (corrispondenti ai punti in cui si incontrano più di due cuciture), reciprocamente connessi da un totale di 90 rami (corrispondenti alle cuciture stesse). La struttura tridimensionale di tale grafo può facilmente essere convertita in una equivalente struttura bidimensionale. Per far ciò è sufficiente pensare al pallone come se fosse fatto di un materiale gommoso, bucare una delle sue facce, e aprire il foro finché tutta la superficie esterna giaccia su di un piano. Avendo effettuato ciò la struttura bidimensionale del grafo si presenta come nella seguente figura 1.



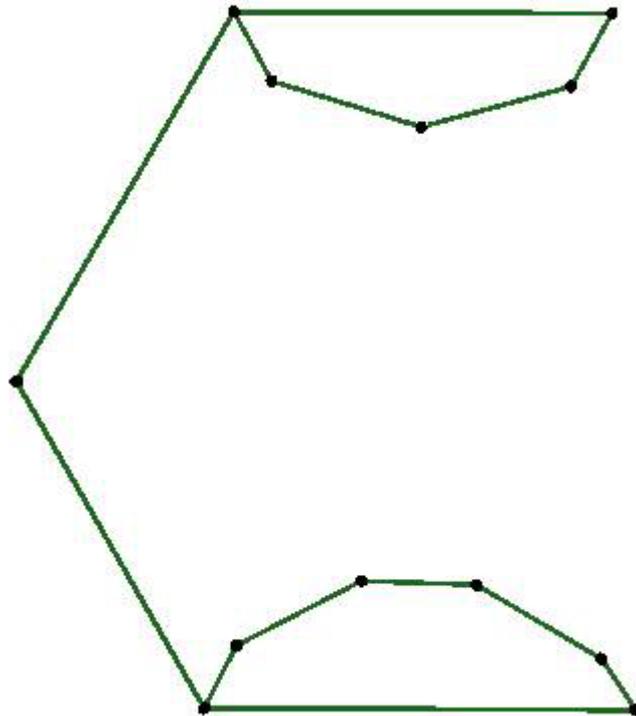
**Figura 1:** Grafo bidimensionale definito dai vertici dell'icosaedro tronco

Osservando il grafo definito dall'icosaedro tronco si constata che da ogni suo nodo si dipartono tre percorsi: ogni nodo è cioè connesso con altri tre nodi del grafo. Questo è un fatto molto importante poiché permette di fare la seguente considerazione: *un circuito chiuso su tale grafo non potrà essere costituito da più di 60 tratti*. Vediamo il perché.

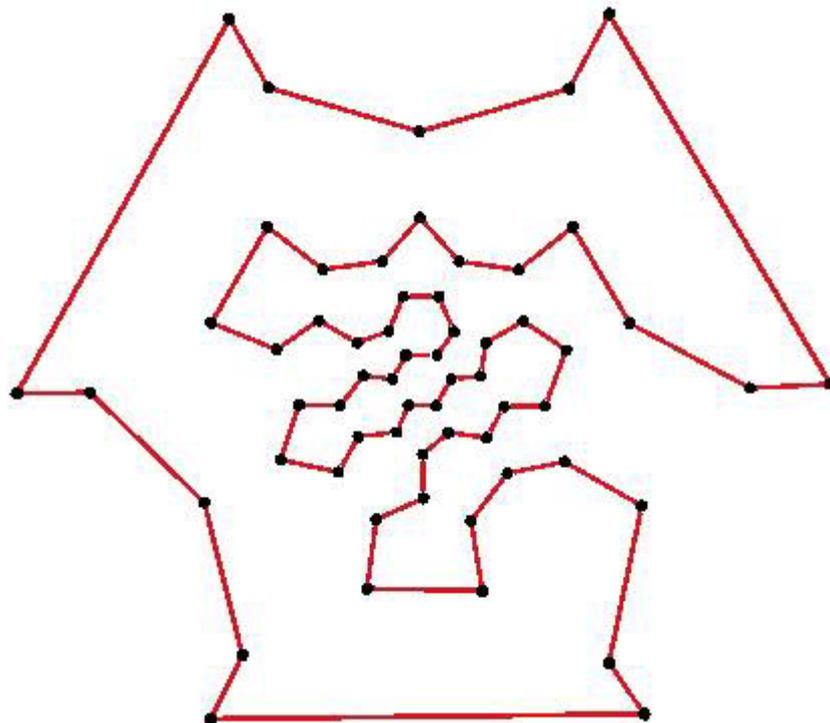
E' facile comprendere che un qualunque circuito chiuso costruito sul grafo della precedente figura, dovrà necessariamente passare una ed una sola volta per ognuno dei vertici "visitati" dal percorso. In caso contrario, considerando che da ogni nodo si dipartono tre rami, potrebbe al massimo aversi un circuito aperto con due occhielli in corrispondenza dei soli due nodi che vengono "visitati" due volte (vedi figura 2). Conseguentemente, avendo il grafo un massimo di 60 nodi, e non potendosi visitare ogni nodo per più di una volta, un circuito chiuso non potrà essere costituito da più di 60 tratti.

E' bene precisare che fin qui non si è dimostrato che esiste un circuito chiuso fatto da 60 tratti, ma soltanto che un circuito chiuso costruito sul grafo di figura 1 non potrà avere più di 60 tratti. Ciò vuol dire che se su tale grafo si trova un circuito chiuso fatto da 60 tratti (cioè che passa una sola volta per tutti e 60 i nodi del grafo), allora si può essere sicuri che tale circuito è il più lungo (si ricordi che tutti i rami del grafo hanno in realtà la stessa lunghezza) che si possa realizzare.

Ora si dà il caso che di circuiti chiusi che soddisfano il requisito di passare da ogni nodo del grafo ne esistono svariati. A titolo di esempio se ne riporta uno in figura 3.



**Figura 2:** se un nodo del grafo (o al massimo 2) viene visitato più di una volta dal percorso allora non potrà aversi un circuito chiuso



**Figura 3:** Percorso chiuso di 60 tratti che “visita” tutti e 60 i nodi del grafo

A questo punto è immediato comprendere che la massima lunghezza del circuito chiuso che Luca potrà tracciare sul suo pallone nel rispetto delle regole che si è auto-imposto è pari a  $60 \times 5 \text{ cm} = 300 \text{ cm}$ .

### Soluzione di P. Salemme

L'icosaedro tronco è un solido semiregolare composto da 32 facce di cui 20 esagoni regolari e 12 pentagoni regolari. Inoltre ha 90 spigoli tutti uguali fra loro e 60 vertici.

Anche per questo solido vale la nota formula di Eulero

$$V - S + F = 2$$

Dove:

V = numero dei vertici

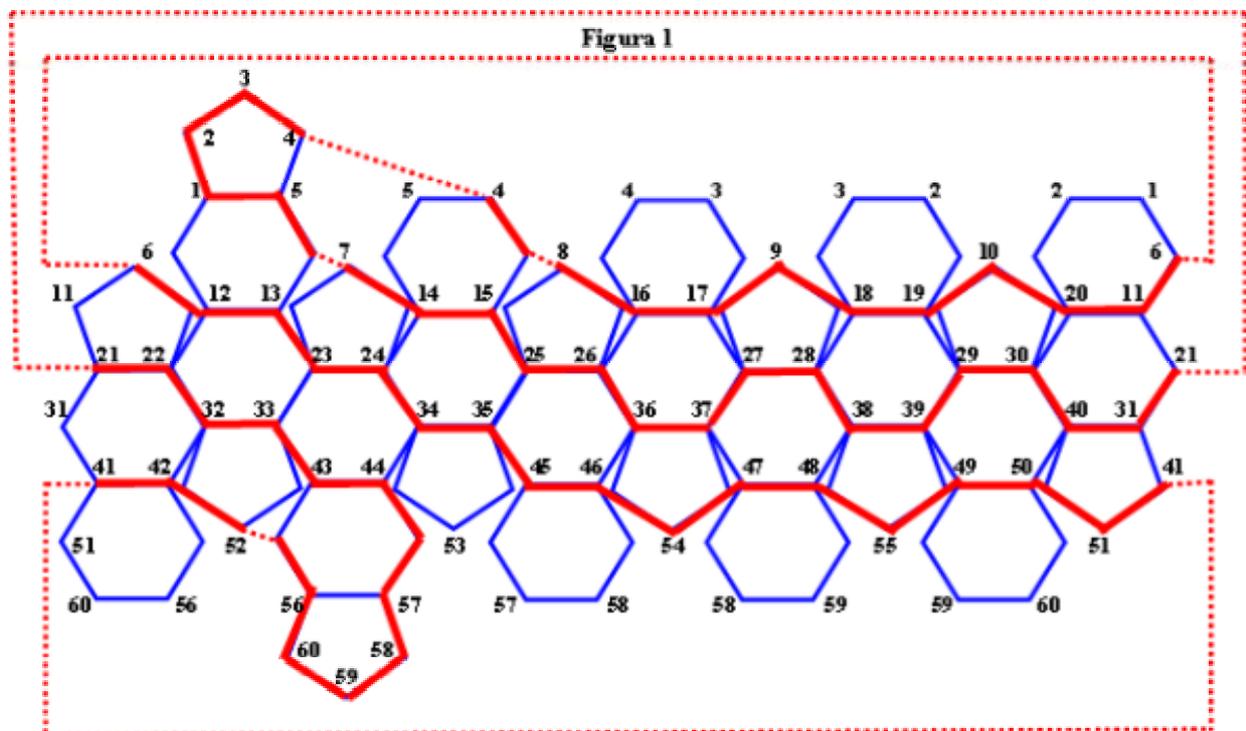
F = numero delle facce

S = numero degli spigoli

Poiché ad ogni vertice fanno capo tre spigoli, il circuito chiuso che Luca vuole tracciare potrà passare una sola volta per un vertice e, per essere di massima lunghezza, dovrà passare per tutti i 60 vertici. Per cui la lunghezza totale di essa sarà  $60 \cdot 5 = 300$  cm.

Un esempio di circuito chiuso è riportato nella figura 1 nella quale la superficie del poliedro viene rappresentata nel piano e il circuito chiuso di 60 segmenti è disegnato in rosso. I vertici del poliedro sono numerati da 1 a 60. Il circuito chiuso passa per i 60 vertici secondo il seguente ordine:

1-2-3-4-8-16-17-9-18-19-10-20-11-6-12-13-23-24-34-35-45-46-54-47-48-55-49-50-51-41-42-52-56-60-59-58-57-53-44-43-33-32-22-21-31-40-30-29-39-38-28-27-37-36-26-25-15-14-7-5-1



Nella Figura 2 le facce vengono presentate rettangolizzate con segmenti verticali e orizzontali per una migliore presentazione del percorso e una più chiara lettura dei 60 vertici.

Figura 2

