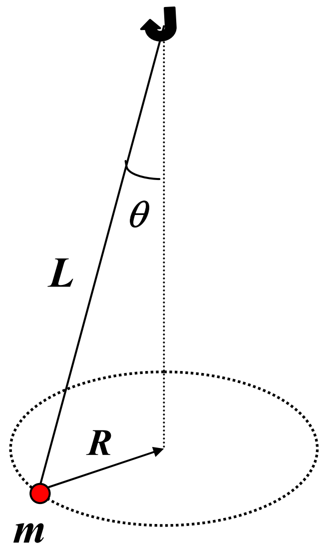
Il pendolo conico

Pasquale Salemme



Un piccolo corpo di massa ***m*** gira su di un cerchio orizzontale con velocità costante ***v*** all'estremità di una fune di lunghezza ***L*** = 80 cm.
Mentre il corpo gira, la fune descrive una superficie conica.
Se la fune forma un angolo θ = 30° con la verticale, si calcoli il tempo richiesto per una completa rivoluzione del corpo.

<u>SOLUZIONE di P. Salemme</u>
Detti:
$P = m\,g$ = il vettore peso del corpo di massa ***m***
T = il vettore tensione della fune
$R = L \text{ sen } \theta$ = il raggio del cerchio orizzontale
τ = il tempo necessario a compiere un giro completo

La somma dei vettori $T + P$ è diversa da zero ed è la forza che mantiene il corpo in moto con velocità costante su una traiettoria circolare.
Ad ogni istante si può decomporre il vettore T in una componente radiale T_r e una verticale T_z

$$T_r = T \text{ sen } \theta$$
$$T_z = T \cos \theta$$

Poiché il corpo non ha accelerazione verticale si ha: $T_z = P$
Per cui si può scrivere: $T_z = T \cos \theta = m\,g$
L'accelerazione radiale vale v^2 / R ed è impressa dalla componente radiale T_r che è la forza centripeta agente su ***m***.
Quindi $T_r = T \text{ sen } \theta = m\,v^2 / R$
Dividendo questa espressione per quella precedente si ha: $tg\ \theta = v^2 / (R \cdot g)$

$$v = \sqrt{(R \cdot g \cdot tg\ \theta)}$$

che fornisce la velocità costante del corpo.
Per cui: $v = 2\,\pi R / \tau = \sqrt{(R\ g\ tg\ \theta)}$
Da questa si ottiene $\tau = 2\,\pi \sqrt{(R / (g\ tg\ \theta))}$
sostituendo $R = L \text{ sen } \theta$ si ottiene:

$$\tau = 2\ \pi\ \sqrt{((L \cos \theta) / g)}$$

Si nota che τ non dipende **da *m*.**
Sostituendo i valori di ***L***, θ e dell'accelerazione di gravità = 9,81 m/s^2
si ottiene:

$$\tau = \mathbf{1{,}6697\ secondi}$$

SOLUZIONE di A. Fuortes

sul corpo agiscono

- la forza peso (verticale) $f_p = m \cdot g$
- la forza centrifuga (orizzontale) $f_c = m \cdot R \cdot \omega^2$, dove $R = L \cdot \sin\theta$
- la trazione della fune (orientata come la fune)

per l'equilibrio la loro somma deve essere nulla, quindi (parallelogramma) la risultante delle prime due deve essere allineata con la fune

$f_c/f_p = \mathrm{tg}\theta$

da cui $\omega^2 \cdot L \cdot \sin\theta / g = \mathrm{tg}\theta$

poiché il periodo $T = 2 \cdot \pi / \omega$ si ricava

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{(L \cdot \cos\theta / g)}$$

e, con i nostri dati,

$$T \cong 1{,}67 \text{ s}$$

Soluzione di M. Falco

il tempo richiesto per una completa rivoluzione del corpo si ottiene dalla formula:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}$$

Assumendo per la costante di accelerazione gravitazionale terrestre g il valore $g = 9.8\ m/s^2$, si ottiene:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0.8\cos 30°}{9.8}} \cong 1.67\ s$$

Motivazione: Affinché un corpo si muova di moto circolare uniforme, come in effetti succede alla massa m del quesito, esso deve essere soggetto ad una forza centripeta $\mathbf{F}_C$ avente direzione e verso coincidenti alla direzione e verso del vettore avente la coda in corrispondenza della massa e la punta in corrispondenza del centro della traiettoria circolare. Il modulo di detta forza centrifuga, invece, si otterrà dalla ben nota relazione:

$$|\mathbf{F}_C| = F_C = m\frac{v^2}{r} \tag{1}$$

nella quale con v si è indicato il modulo costante della velocità con cui la massa m percorre la traiettoria circolare di raggio r.
Essendo il modulo della velocità costante (moto circolare uniforme) esso può esprimersi nella forma:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \tag{2}$$

essendo T il tempo che impiega la massa m a compiere una intera rivoluzione. Sostituendo la (2) nella (1) si ottiene:

$$F_C = m\frac{4\pi^2 r}{T^2} \tag{3}$$

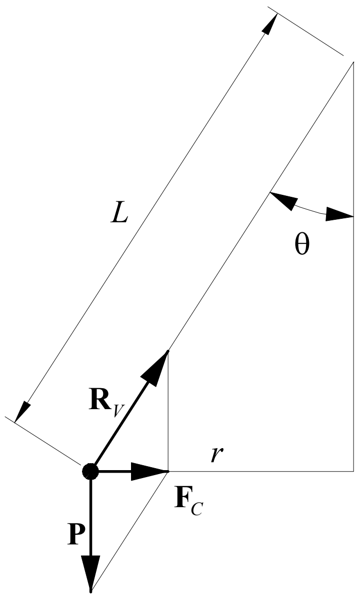


Figura 1: Disegno schematico del pendolo conico

Dalla Figura 1 si ha che il raggio r della traiettoria della circonferenza si può esprimere in funzione della lunghezza L del "filo" del pendolo e dell'angolo θ nel seguente modo:

$$r = L\sin\theta \tag{4}$$

sicché la (3) può anche scriversi nella forma:

$$T^2 = m\frac{4\pi^2 L\sin\theta}{F_C} \tag{5}$$

ovvero nella forma:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m\,L\sin\theta}{F_C}} \tag{6}$$

Osservando la Figura 1 si vede anche che la forza centripeta $\mathbf{F}_C$ che permette il mantenimento del moto circolare uniforme della massa m è data dal risultante delle due forze a cui è soggetta detta massa: la forza peso $\mathbf{P}$ e la reazione vincolare $\mathbf{R}_V$ del filo. Essendo il modulo della forza peso $\mathbf{P}$ uguale a:

$$P = m\,g \tag{7}$$

dove g è la nota costante di accelerazione gravitazionale terrestre, si ha che il modulo della forza centripeta risulta pari a:

$$F_C = P\tan\theta = m\,g\tan\theta \tag{8}$$

Sostituendo infine la (8) nella (6) si ottiene:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}$$

da cui segue il risultato ottenuto.