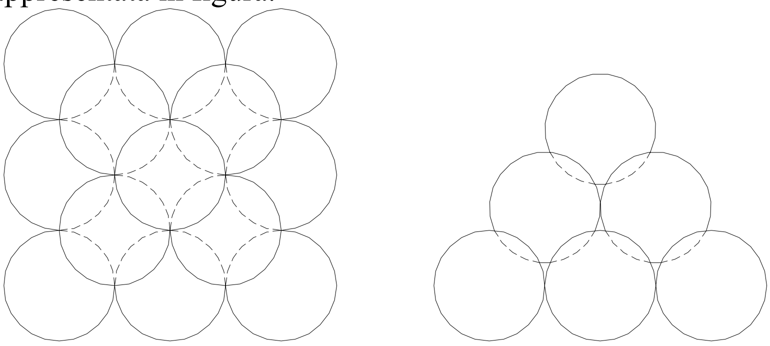
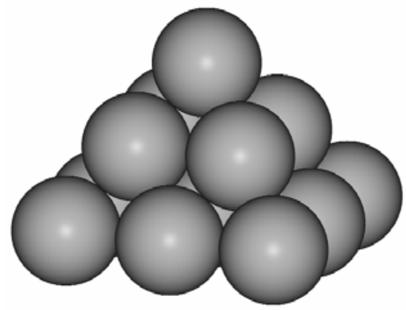
Il quesito presenta, sostanzialmente, due ordini di difficoltà. Dapprima calcolare la distanza tra uno strato e il successivo, quindi verificare le condizioni per collocare la palla di vertice.
Vediamo come sono state affrontate dai concorrenti.

La soluzione di **Francesco Vinciprova** (650 palle).

Se si devono formare piramidi a base quadrata, accostando le sfere l'una all'altra e appoggiando quelle degli strati superiori negli interstizi creati da quelle sottostanti, la disposizione è rappresentata in figura.



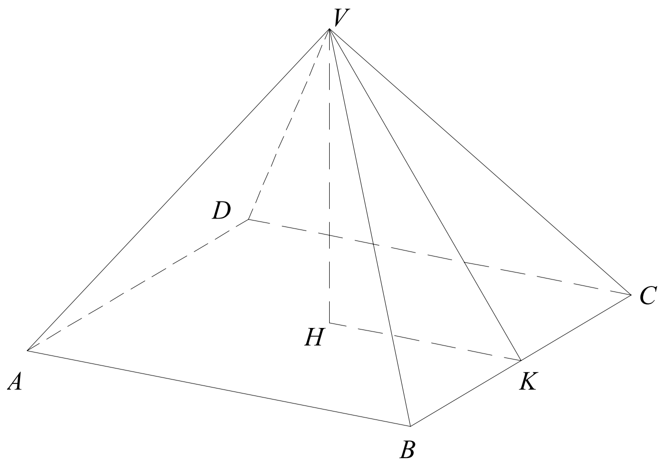


Consideriamo quattro palle contigue appartenenti ad uno strato e la palla dello strato superiore appoggiata nell'interstizio formato dalle quattro. Le palle di cannone si trovano ai vertici di una piramide a base quadrata di lato $2R$ (distanza tra i centri delle palle dello strato inferiore) e spigolo $2R$ (distanza tra i centri delle palle dello strato inferiore e il centro della palla che sta sopra) (in quanto in entrambi i casi le sfere sono tangenti).
Si ha

$$AB = BC = CD = DA = AV = BV = CV = DV = 2R$$

Quindi il triangolo BCV è un triangolo equilatero di lato $2R$. L'altezza VK vale

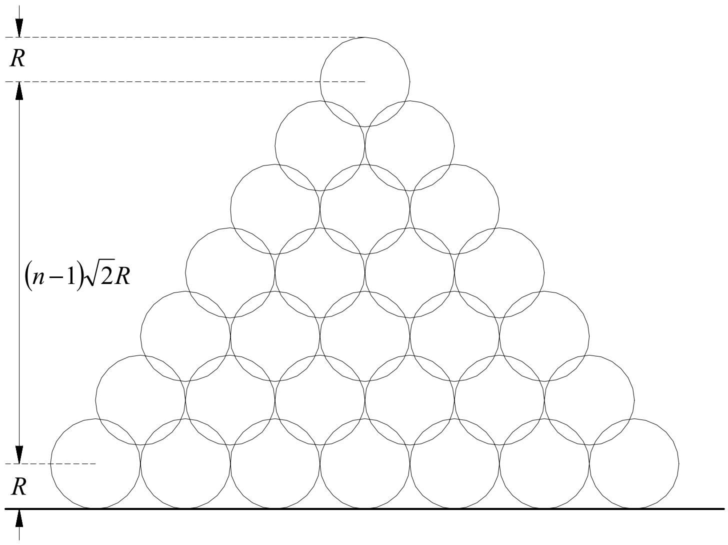
$$VK = \frac{\sqrt{3}}{2} l = \frac{\sqrt{3}}{2} 2R = \sqrt{3}R$$



Consideriamo il triangolo VHK. Si ha $VK = \sqrt{3}R$ e $HK = R$ quindi

$$VH = \sqrt{VK^2 - HK^2} = \sqrt{3R^2 - R^2} = \sqrt{2R^2} = \sqrt{2}R$$

La distanza tra il piano passante per il centro delle palle di uno stato e il piano passante per il centro delle palle dello stato precedente (o successivo) è dunque $\sqrt{2}R$.



Per n strati, come si può vedere dalla figura, si ha un'altezza $(n-1)\sqrt{2}R$ a cui bisogna aggiungere il raggio dello strato di base e il raggio dell'ultima palla. L'altezza della piramide è

$$(n-1)\sqrt{2}R + R + R = (n-1)\sqrt{2}R + 2R = \left(n\sqrt{2} - \sqrt{2} + 2\right)R$$

Per trovare il numero di stati che si possono realizzare data una certa altezza h bisogna risolvere l'equazione

$$\left(2 + n\sqrt{2} - \sqrt{2}\right)R = h$$

cioè

$$2 + n\sqrt{2} - \sqrt{2} = \frac{h}{R} \qquad n\sqrt{2} = \frac{h}{R} - 2 + \sqrt{2} \qquad n = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{h}{R} - 2 + \sqrt{2}\right)$$

quindi

$$n = \text{int}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{h}{R} - 2 + \sqrt{2}\right)\right]$$

Per $h = 220\ cm$ e $R = \frac{25}{2}\ cm$ si ha

$$n = \text{int}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{h}{R} - 2 + \sqrt{2}\right)\right] = \text{int}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2 \cdot 220}{25} - 2 + \sqrt{2}\right)\right] = \text{int}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{440 - 50 + 25\sqrt{2}}{25}\right)\right] =$$

$$= \text{int}\left[\frac{390\sqrt{2} + 50}{50}\right] = \text{int}\left[\frac{39\sqrt{2}}{5} + 1\right] = \text{int}\left[\frac{39\sqrt{2}}{5}\right] + 1 = \text{int}[11.0308658] + 1 = 12$$

Poiché le piramidi sono a base quadrata, il numero di palle presenti sullo strato i è i^2.
Il numero di palle che si può collocare in ogni piramide è

$$N = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

dove n è il numero di strati, cioè 12

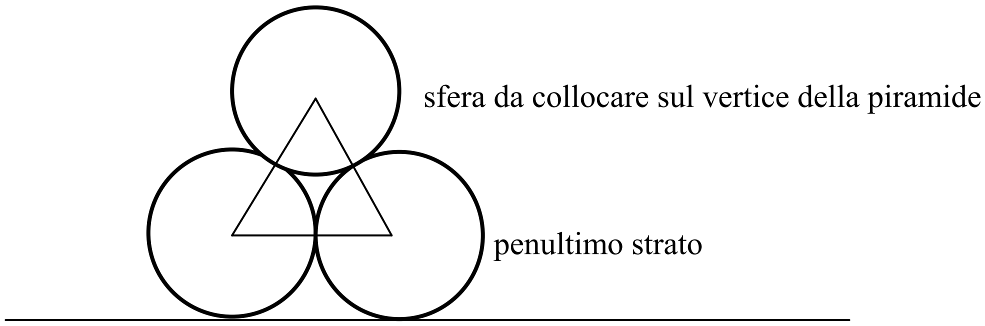
$$N = \sum_{i=1}^{12} i^2 = \frac{2 \cdot 12^3 + 3 \cdot 12^2 + 12}{6} = 650$$

L'obiezione di **Emanuela Schianchi** (506 palle) . . .

Tale piramide sarebbe alta 219,45437 cm quindi rientrerebbe come altezza in un soffitto alto 220, ci sarebbe però una difficoltà di costruzione perche' per appoggiare l'ultima palla (sempre che il soldato sia abbastanza alto e dotato di braccia lunghe e possenti!) si dovrebbe scavalcare il piano inferiore.
Nel momento dello scavalcamento i centri dell'ultima palla con quelle inferiori posti sullo stesso piano verticale formano un triangolo equilatero di lato 25 e altezza 25xsqrt(3)/2 = 21.65 cm, quasi 4 cm in più della posizione finale mentre il soffitto permette una tolleranza di poco superiore al mezzo cm.
I piani possibili sarebbero allora 11 e formati da 506 palle.

. . . e quella di **Danilo Mascheroni** (506 palle)

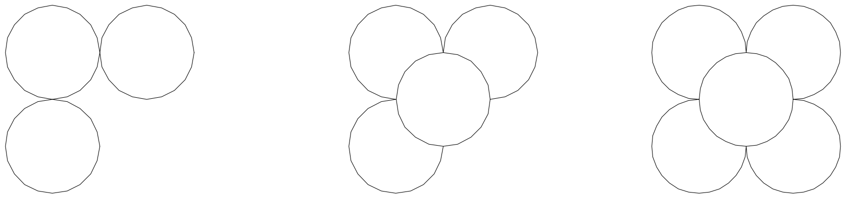
occorrerebbe sfondare il soffitto per collocare l'ultima sfera sul vertice, dovendo tale ultima sfera scavalcare quelle dell'ultimo strato secondo lo schema della figura seguente:



dove il triangolo che unisce i centri delle sfere questa volta è equilatero di lato 25 cm e di altezza $25\sqrt{3}/2$ cm.
Durante la costruzione di una piramide a 12 strati, dunque, la massima altezza raggiunta è almeno pari a:
$25 + 10*25/\sqrt{2} + 25\sqrt{3}/2 = 223{,}43$ cm > 220 cm
Nella stanza è perciò possibile costruire al massimo una piramide di 11 strati, che una volta terminata ha un'altezza di
$25 + 10*25/\sqrt{2} = 201{,}78$ cm
e che durante la posa dell'ultima sfera richiede di avere a disposizione un'altezza minima di
$25 + 9*25/\sqrt{2} + 25\sqrt{3}/2 = 205{,}75$ cm < 220 cm

La replica di **Marcello Falco** (650 palle)

Io ritengo che, nei ristretti limiti di operatività dell'armiere, una piramide avente dodici strati di palle di cannone possa ancora realizzarsi. Ecco come.
Fino al decimo strato non ci sono problemi sicché l'armiere può procedere alla realizzazione della piramide strato dopo strato aggiungendo, com'è necessario, una palla per volta. Arrivato all'undicesimo strato l'armiere metterà dapprima solo tre delle quattro palle di cannone. La configurazione che dovrebbe ottenere è quella della seguente figura *a* (vista dall'alto):



a *b* *c*

Fatto ciò l'armiere dovrebbe aggiungere la palla di cannone che rappresenterà il "vertice" della piramide. La configurazione che dovrebbe ottenere è quella della figura *b*. Stavolta lo spazio per posizionare tale palla di cannone c'è. Infine, nello spazio lasciato libero nell'undicesimo livello, l'armiere inserirà l'ultima palla di cannone fino a raggiungere la configurazione finale di figura *c*.
Prima di procedere al calcolo del numero di palle di cannone che ci sono in una piramide di 12 strati, occorre fare due importanti osservazioni.
La prima osservazione ha a che fare con l'equilibrio della palla "vertice della piramide" nella configurazione *b* della precedente figura. Non è difficile comprendere che anche se la palla in questione è poggiata su tre punti di appoggio, il suo baricentro ricade "esattamente" su di un lato del triangolo d'appoggio rendendo parzialmente instabile l'equilibrio del vertice della piramide. Ciò tuttavia sarebbe vero solo nel caso in cui la palla di cannone sia effettivamente una sfera perfetta costituita da materiale perfettamente omogeneo. Nella realtà, invece, la palla di cannone si discosterà, anche seppur di poco, dalla sua idealizzazione astratta. Pertanto, con un po' di pazienza, l'armiere riuscirà senz'altro a mettere in equilibrio il vertice della piramide in modo tale che il suo baricentro, anche se in misura microscopica, ricada "dentro" il triangolo d'appoggio (senza contare poi che in realtà i punti di appoggio non sono mai punti ma delle areole di dimensione finita).
La seconda osservazione ha a che fare con l'inserimento dell'ultima palla di cannone che completa la piramide. Si verifica facilmente che l'ultima palla di cannone potrà essere inserita al suo posto con un semplice gesto senza che nel corso dell'inserimento le palle circostanti abbiano a subire alcuno spostamento.

A margine, un'acuta osservazione di **Giacinto Iannicola**

A questo punto bisogna fare qualche considerazione sulla fattibilita' della costruzione, ogni palla pesera' piu' di 60 kg se di ferro, di piombo supererebbe i 90, quindi il povero soldato si ritrovera' probabilmente con la schiena rotta prima di finire l'opera e sempre che il pavimento regga una cinquantina di tonnellate su una superficie di circa 9mq.

Ai fini della gara, pertanto, sono state ritenute valide 2 risposte diverse. Quella con 506 palle, come soluzione 'naturale' e quella con 650 palle, come soluzione 'limite'.