Francesco Vinciprova

La superficie totale di un parallelepipedo di spigoli a, b e c è pari a

$$S = 2ab + 2ac + 2bc$$

mentre il volume è dato da

$$V = abc$$

Sia A la superficie del cartone che si ha a disposizione. Bisogna massimizzare la funzione V sotto la condizione che la superficie totale non superi A.

$$\max V = \max(abc) \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} 2ab + 2ac + 2bc \leq A \\ a > 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \end{cases}$$

Supponendo di utilizzare tutta la superficie A a disposizione si ha $A = 2ab + 2ac + 2bc$ ovvero $ab + ac + bc = \frac{A}{2}$. Si può osservare che il volume si può scrivere come

$$V = abc = \sqrt{a^2b^2c^2} = \sqrt{ab \cdot bc \cdot ca}$$

Poniamo adesso

$$ab = u$$
$$bc = v$$
$$ca = w$$

La funzione allora diventa

$$f(u, v, w) = \sqrt{uvw}$$

con la condizione che $u + v + w = \frac{A}{2}$ ovvero $\varphi(x, y, z) = u + v + w - \frac{A}{2}$. Costruiamo la funzione

$$H(u, v, w, \lambda) = f(u, v, w) + \lambda\varphi(u, v, w)$$

Utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} H_u = \dfrac{\partial H}{\partial u} = 0 \\ H_v = \dfrac{\partial H}{\partial v} = 0 \\ H_w = \dfrac{\partial H}{\partial w} = 0 \\ H_\lambda = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{vw}{2\sqrt{uvw}} + \lambda = 0 \\ \dfrac{uw}{2\sqrt{uvw}} + \lambda = 0 \\ \dfrac{uv}{2\sqrt{uvw}} + \lambda = 0 \\ u + v + w - \dfrac{A}{2} = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} vw = uw = uv \\ u + v + w - \dfrac{A}{2} = 0 \end{cases}$$

ovvero $u = v = w = \frac{A}{6}$ cioè

$$ab = bc = ca = \frac{A}{6}.$$

Dall'uguaglianza $ab = bc = ca$ si ha

$$a = b = c$$

quindi

$$a = \sqrt{\frac{A}{6}}\ .$$

Pertanto il parallelepipedo di volume massimo che si può ricavare che ha una data superficie A è il cubo di lato $a = \sqrt{\frac{A}{6}}$. Nel caso in esame risulta

$$a = \sqrt{\frac{A}{6}} = \sqrt{\frac{100^2\ cm^2}{6}} = \frac{100\,cm}{\sqrt{6}} = 40.82\,cm$$

cui corrisponde un volume pari a

$$V = a^3 = \sqrt{\left(\frac{A}{6}\right)^3} = \sqrt{\frac{100^6\ cm^6}{6^3}} = \frac{100^3\ cm^3}{6\sqrt{6}} = 68041.38\,cm^3$$

<u>II metodo</u>

La superficie totale di un parallelepipedo di spigoli a, b e c è pari a

$$S = 2ab + 2ac + 2bc$$

mentre il volume è dato da

$$V = abc$$

Sia A la superficie del cartone che si ha a disposizione. Bisogna massimizzare la funzione V sotto la condizione che la superficie totale non superi A.

$$\max V = \max(abc) \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} 2ab + 2ac + 2bc \le A \\ a > 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \end{cases}$$

Supponendo di utilizzare tutta la superficie A a disposizione si ha $A = 2ab + 2ac + 2bc$ ovvero $ab + ac + bc = \frac{A}{2}$. Da questa relazione si ottiene

$$a = \frac{\frac{A}{2} - bc}{b + c}$$

quindi il volume è

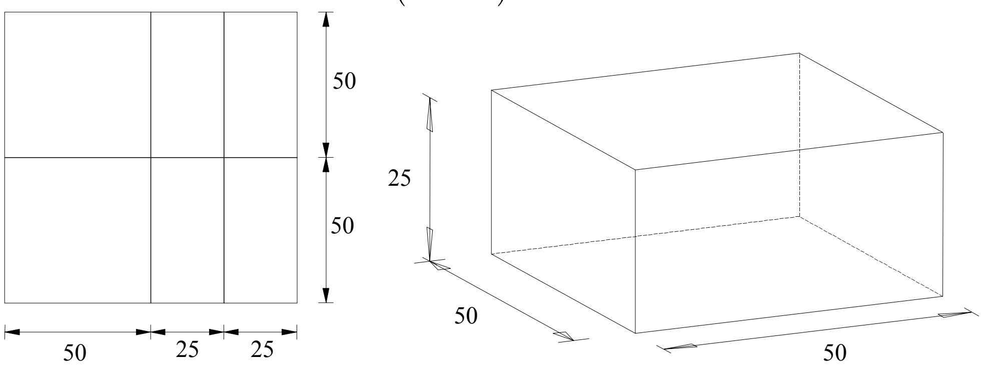
$$V = abc = \frac{\frac{A}{2} - bc}{b + c}bc = \frac{\frac{A}{2}bc - b^2c^2}{b + c}$$

Affinché il volume sia massimo devono essere verificate le condizioni di stazionarietà cioè

$$\frac{\partial V}{\partial b} = 0 \qquad \frac{\left(\frac{A}{2}c - 2bc^2\right)(b + c) - \frac{A}{2}bc + b^2c^2}{(b + c)^2} = \frac{c^2\left(\frac{A}{2} - b^2 - 2bc\right)}{(b + c)^2} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial c} = 0 \qquad \frac{\left(\frac{A}{2}b - 2b^2c\right)(b + c) - \frac{A}{2}bc + b^2c^2}{(b + c)^2} = \frac{b^2\left(\frac{A}{2} - c^2 - 2bc\right)}{(b + c)^2} = 0$$

quindi

$$\frac{A}{2} - b^2 - 2bc = 0$$
$$\frac{A}{2} - c^2 - 2bc = 0$$
da cui si ricava
$$b = c$$
Se vale la relazione $b = c$ si può ricavare a
$$a = \frac{\frac{A}{2} - b^2}{2b}$$
Il volume quindi è
$$V = abc = \frac{\frac{A}{2} - b^2}{2b} b^2 = \frac{\frac{A}{2} b - b^3}{2} = \frac{b}{2}\left(\frac{A}{2} - b^2\right)$$
Derivando rispetto a b otteniamo
$$\frac{\partial V}{\partial b} = \frac{A}{4} - \frac{3}{2} b^2$$
che si annulla per
$$\frac{\partial V}{\partial b} = 0 \qquad \frac{A}{4} - \frac{3}{2} b^2 = 0 \qquad b = \sqrt{\frac{A}{6}}$$
da cui ricaviamo
$$c = b = \sqrt{\frac{A}{6}} \qquad a = \frac{\frac{A}{2} - b^2}{2b} = \sqrt{\frac{A}{6}}$$
ottenendo lo stesso risultato ottenuto con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.
Si è ottenuto quindi un limite superiore del volume realizzabile con la superficie di cartone a disposizione $V \le 68041.38\, cm^3$. La limitazione data per la forma del cartone non permette di realizzare il massimo volume possibile.
Poiché il parallelepipedo rettangolo ha le facce opposte congruenti è necessario che il disegno delle facce sul cartone abbia un asse di simmetria, cioè tre facce su metà e le altre tre sull'altra metà. Ritagliando le facce come in figura si utilizza tutto il cartone e si ottiene un parallelepipedo di spigoli $a = b = 50\, cm$ e $c = 25\, cm$ e quindi un volume pari a
$$V = abc = \left(50^2 \cdot 25\right) cm^3 = 62500\, cm^3$$


che differisce dal volume massimo per il
$$\frac{68041.38 - 62500}{68041.38} = 8.14\%$$