Le 6 circonferenze

quesito di Marcello Falco

Determinare il raggio R della circonferenza più grande che può ottenersi in modo che la sua superficie sia ricoperta per intero da 6 circonferenze di raggio 100 *cm.* Esprimendo il raggio R in centimetri dovranno essere indicate almeno 4 cifre dopo la virgola e dovrà essere descritta la configurazione delle 6 circonferenze, vince chi troverà la soluzione migliore.

Soluzione di Marcello Falco: il valore più grande del raggio R, ottenuto nel rispetto delle condizioni imposte, è pari a $R = 179.88678\, cm$. La relativa configurazione delle 6 circonferenza di raggio 100 *cm* è quella indicata nella motivazione in corrispondenza del settimo tentativo.

Motivazione:

L'approccio che ho seguito per ottenere la mia soluzione è stato quello di ipotizzare delle particolari disposizioni delle 6 circonferenze in dipendenza di determinati parametri, e di massimizzare il valore del raggio R della circonferenza "coperta" al variare di tali parametri.

TENTATIVO N° 1

Il primo tentativo effettuato è stato un tentativo "statico"; cioè è stato un tentativo in cui ho assunto una ben determinata disposizione per le 6 circonferenze di raggio 100 *cm* ed ho determinato direttamente il raggio R della circonferenza che poteva essere coperta. Questa configurazione è a simmetria pentagonale ed è realizzata ponendo una circonferenza al centro e disponendo le rimanenti 5 circonferenze in maniera tale che queste intersechino la circonferenza centrale in corrispondenza dei vertici di un pentagono regolare (vedi figura 1).

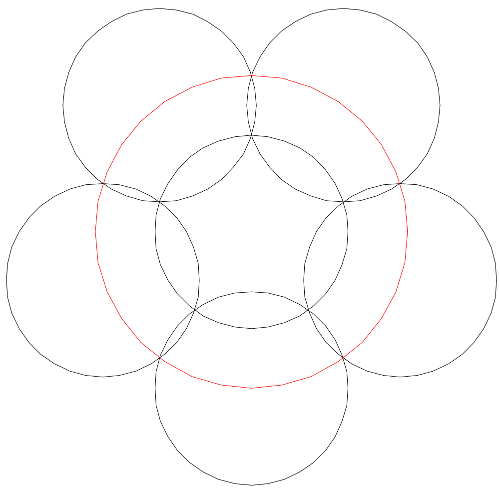

Figura 1

E' facile determinare in questo caso il raggio R della circonferenza rossa. Esso risulta pari a:

$$R = 161.8034\ cm \tag{1}$$

TENTATIVO N° 2

Il secondo tentativo deriva direttamente dal primo ma ha portato ad un risultato decisamente migliore del precedente. Si è mantenuta invariata la posizione della circonferenza centrale così come invariata è rimasta la simmetria pentagonale della distribuzione delle rimanenti 5 circonferenze. Stavolta, rispetto al caso precedente, si è assunto che la distanza d tra il centro di queste circonferenze ed il centro della figura potesse variare. Si è dunque determinato il valore massimo che il raggio R della circonferenza assume al variare di d (vedi figura 2). Semplici considerazioni di carattere geometrico permettono di ottenere la relazione che c'è tra il raggio R della circonferenza grande e la distanza d. Questa è:

$$R = \sqrt{r^2 - \frac{d^2\left(1-\cos 72°\right)}{2}} + d\cos 36°$$

dove $r = 100\ cm$. Il valore massimo di questa funzione è:

$$R = 170.1302\ cm \tag{2}$$

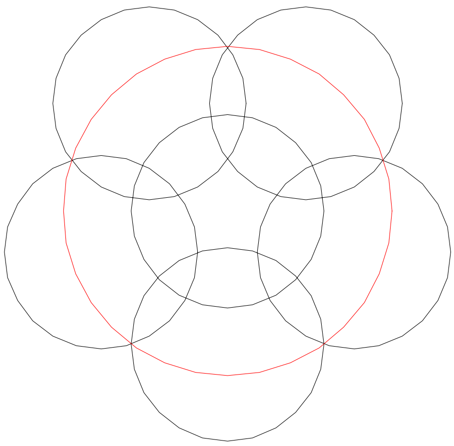

Figura 2

TENTATIVO N°3

Osservando la figura 2 risulta abbastanza evidente che la circonferenza centrale può subire ampie escursioni attorno alla sua posizione centrale senza che per questo la circonferenza grande venga a "scoprirsi". Ciò mi ha fatto sospettare che la configurazione a simmetria pentagonale non fosse quella ottimale: le 6 circonferenze non sono ben sfruttate. Sono dunque passato ad esaminare la soluzione a simmetria esagonale: tutte e sei le circonferenze hanno i centri disposti ai vertici di un esagono regolare di lato pari a 100 *cm* (vedi figura 3).

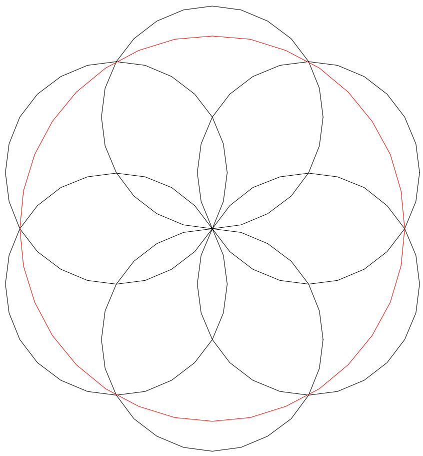

Figura 3

In questo caso il valore del raggio R si ottiene piuttosto agevolmente. Esso risulta pari a:

$$R = 2\sqrt{100^2 - 50^2} = 173.2051\,cm \tag{3}$$

TENTATIVO N°4

Il quarto tentativo deriva da una considerazione fatta sulla soluzione precedente. Osservando la figura 3 si vede abbastanza agevolmente che bastano tre sole circonferenze coi centri sfalsati di 120° rispetto al centro della figura, per "ricoprire" la parte centrale della circonferenza grande. Pertanto, è possibile incrementare il valore del raggio R semplicemente "allontanando" dal centro in direzione radiale le rimanenti tre circonferenze.

Detta d la distanza tra i centri delle tre circonferenze che vengono "allontanate" ed il centro della circonferenza grande (vedi figura 4), per mezzo di semplici considerazioni di carattere geometrico è possibile ottenere l'espressione del raggio R della circonferenza grande in funzione della distanza d.

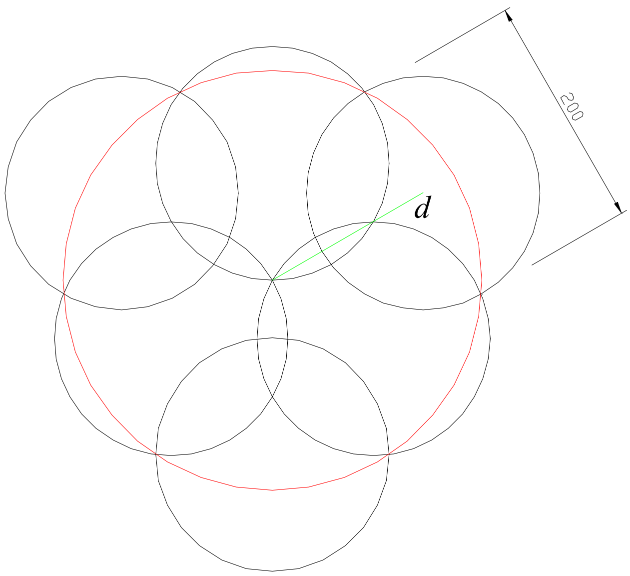

Figura 4

Di seguito ometterò di riportare l'espressione della funzione $R(d)$ sia perché questa risulta essere particolarmente complessa. Procedendo numericamente si trova che il valore più grande di R è pari a:

$$R = 179.5281\,cm \tag{4}$$

e si ottiene quando la distanza d tra i centri delle tre circonferenze "allontanate" ed il centro della circonferenza grande è pari a:

$$d = 149.0985\,cm$$

Per questo valore della distanza d si verifica anche che le tre circonferenze "allontanate" intersecano le circonferenze adiacenti in punti che distano tra di loro di 200 cm.

Può essere interessante far notare che a questo tentativo ne sono seguiti altri in cui, pur mantenendo essenzialmente la disposizione reciproca delle circonferenze, si rinunciava alla simmetria polare della figura assumendo come variabili sia la distanza tra i centri di due delle tre circonferenze centrali, che la posizione del centro della circonferenza grande (si è però mantenuta la simmetria speculare rispetto ad un asse verticale). Ciò che ho ottenuto, oltre a perdere parecchio tempo, è stato scoprire che il valore massimo di R per questa disposizione delle 6 circonferenze si ha nel caso a simmetria polare indicato in figura 4.

TENTATIVO N°5

Con il quinto tentativo non sono riuscito a migliorare il valore ottenuto nel tentativo precedente: lo descrivo solo per "dovere di cronaca". La configurazione studiata in questo caso è quella indicata in figura 5.

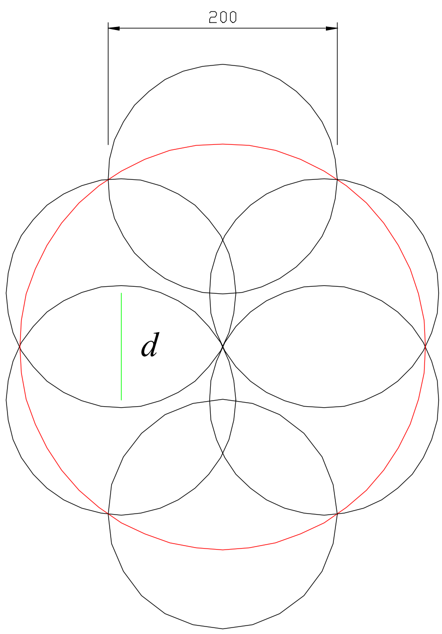

Figura 5

La configurazione indicata in figura 5 è stata studiata al variare del parametro *d*, in modo tale che le circonferenze in "alto" ed in "basso" intersecassero in corrispondenza del loro diametro le circonferenze adiacenti. Il valore massimo ottenuto per il raggio *R* è pari a:

$$R = 176.9292\ cm \tag{5}$$

e si è ottenuto quando il parametro *d* ha assunto il valore:

$$d = (93.25259 \pm 0.000005)\ cm$$

Anche in questo caso sono state studiate configurazioni asimmetriche dove la distanza *d* tra i centri delle coppie di circonferenze a "sinistra" e a "destra" del centro della circonferenza grande erano differenti, ed anche in questo caso si è ottenuto che il valore massimo di *R* si ha per la configurazione simmetrica.

TENTATIVO N°6

Col sesto tentativo sono riuscito a migliorare la soluzione ottenuta col 4° tentativo. La configurazione studiata è quella di figura 6.

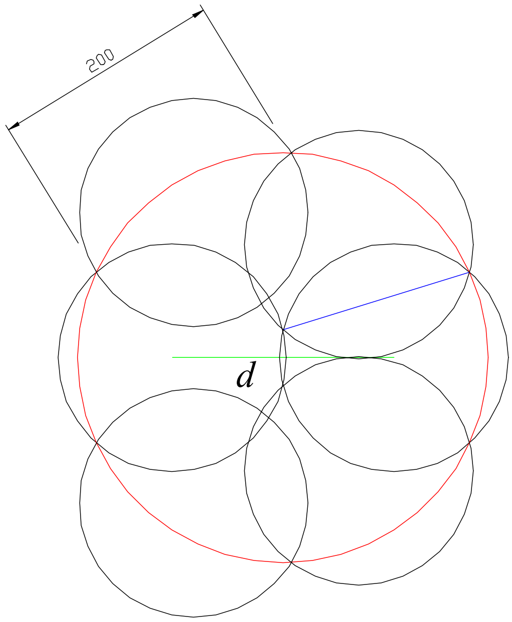

Figura 6

In questa configurazione la circonferenza grande ha il centro in corrispondenza della mezzeria del tratto di lunghezza *d* che unisce i centri delle due circonferenze centrali disposte in "orizzontale". Il valore massimo di *R* è stato determinato al variare del parametro *d*, in modo tale che la circonferenza in "alto" e a "sinistra" intersecasse in corrispondenza del proprio diametro le circonferenze adiacenti. Il valore ottenuto per il raggio è in questo caso pari a:

$$R = 179.6860\ cm \tag{6}$$

ed è stato ottenuto quando il parametro *d* ha assunto il valore:

$$d = (194.0472 \pm 0.0008)\ cm$$

TENTATIVO N°7

Il settimo ad ultimo tentativo qui riportato è quello che ha permesso di ottenere il valore più grande di *R*. La disposizione delle circonferenze è quella di figura 7.

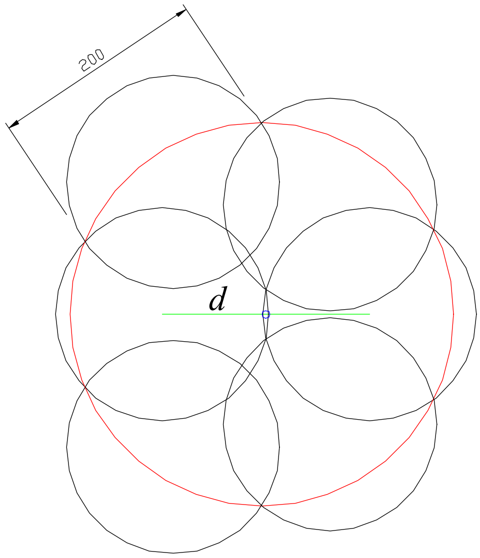

Figura 7

La differenza tra la configurazione di figura 7 dalla configurazione del precedente tentativo (figura 6) sta nel fatto che in questo caso il centro della circonferenza grande non si trova nella mezzeria del segmento di lunghezza *d* che unisce i centri delle circonferenze "centrali", ma bensì è spostato sulla sinistra di una piccola quantità ε (lo si può notare osservando che in figura 7 la circonferenza grande interseca in maniera differente le due circonferenze "centrali" disposte orizzontalmente). Il valore di *R* è stato ottenuto trovando numericamente il valore massimo (approssimato alle prime 5 cifre decimali) in dipendenza delle due variabili *d* e ε. Si è ottenuto:

$$R = 179.88678\ cm \tag{7}$$

quando i valori di ε e *d* sono stati assunti rispettivamente pari a:

$$\begin{cases} \varepsilon = 3.753\ cm \\ d = (194.6071 \pm 0.0142)\ cm \end{cases}$$

Le coordinate dei centri delle circonferenze C_1, C_2 e C_3 rispetto ad un sistema di assi cartesiani *xy* sono:

$$\begin{cases} x_{C_1} = -97.30315\ cm \\ y_{C_1} = 0 \end{cases} \tag{A}$$

$$\begin{cases} x_{C_2} = 97.30315\, cm \\ y_{C_2} = 0 \end{cases} \tag{B}$$

$$\begin{cases} x_{C_3} = 60.09980092\, cm \\ y_{C_3} = 102.9922798\, cm \end{cases} \tag{C}$$

mentre i loro raggi sono pari a 100 *cm*.

Le coordinate del centro della circonferenza grande sono:

$$\begin{cases} x_C = -3.753\, cm \\ y_C = 0 \end{cases} \tag{D}$$

ed il suo raggio è pari a:

$$R = 179.8867823\, cm \tag{E}$$

Assumendo i dati delle (A), (B), (C), (D) ed (E), si ha che la distanza del segmento $\overline{AB}$ di figura A risulta pari a:

$$\overline{AB} = 199.9999971\, cm$$

Tale distanza può dunque essere coperta dal diametro della circonferenza C_4.

A conclusione è utile sottolineare due cose. La prima è che la disposizione delle circonferenze è simmetrica rispetto all'asse cartesiano *x*. La seconda cosa, invece, è che i dati riportati in precedenza sono stati ottenuti nel tentativo di massimizzare manualmente (utilizzando un programma di calcolo numerico: Matematica 3.0) il valore *R* del raggio della circonferenza più grande al variare di due parametri (descritti ε e *d* nel file word della soluzione) sotto la condizione che il segmento $\overline{AB}$ fosse minore o, al limite, uguale a 200 *cm*. Non è escluso, dunque, che i risultati ottenuti si possano ulteriormente raffinare.

A tal proposito può anche essere utile aggiungere che non so se la configurazione ottenuta sia quella migliore.

<u>Soluzione di Pasquale Salemme</u>

Il raggio R della circonferenza più grande che si può ottenere è pari a:
R = 179,528147490481 cm

Poiché la figura geometrica, di cui si vuole ricoprire la superficie, è una circonferenza, la configurazione delle 6 circonferenze dovrà essere scelta tra quelle a simmetria centrale.
Sono state individuate n. 3 configurazioni:

<u>Prima configurazione che chiameremo **6+0**</u>:

6 circonferenze, con i centri disposti su una circonferenza di raggio r = 100, a 60° tra loro e posti ai vertici di un esagono regolare (fig. 1).

<u>Seconda configurazione che chiameremo **5+1**</u>:

1 circonferenza al centro e 5 circonferenze intorno ad essa con i centri disposti a 72° tra di essi e collocati nei punti medi dei lati di un pentagono regolare (fig. 2).

<u>Terza configurazione che chiameremo **3+3**</u>:

3 circonferenze, con i centri disposti su una circonferenza di raggio r = 100, a 120° tra di loro e collocati ai vertici di un triangolo equilatero.
Le altre 3 circonferenze sono più esterne, con i centri disposti su una circonferenza di raggio più grande, a 120° tra di loro e collocati ai vertici di un triangolo equilatero di lato più grande (fig. 3).

Prima configurazione (6+0)

In questa configurazione il raggio **R** incognito è pari alla lunghezza dell'altezza del triangolo equilatero ABO, il cui lato è doppio del raggio **r** delle 6 circonferenze.

R = OH = AO sen 60° =
= 2 r sen 60° =
= 173,2050808 cm

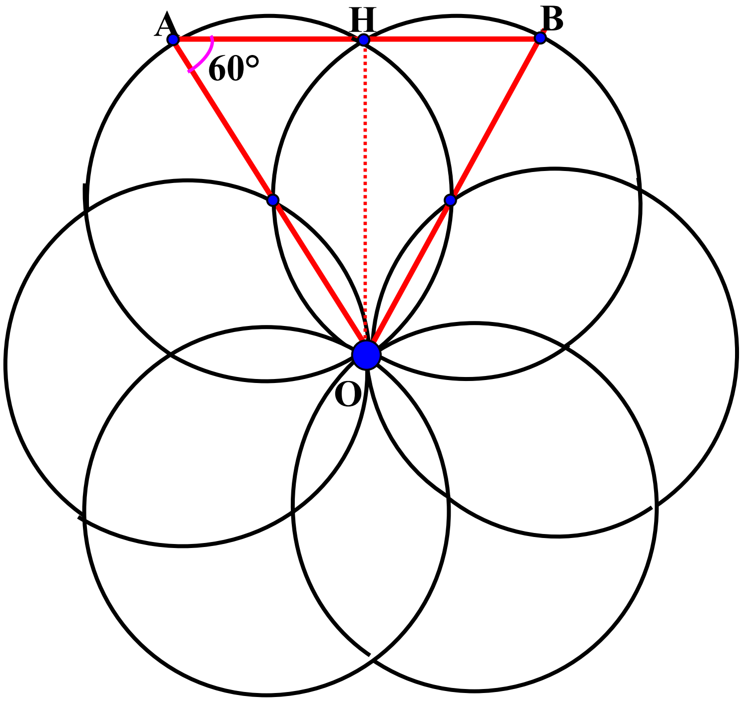

Fig. 1

Seconda configurazione (5+1)

In questa configurazione il raggio **R** incognito è pari alla lunghezza della congiungente del centro della figura con un vertice di un pentagono regolare il cui lato è doppio del raggio **r** delle 6 circonferenze.

R = OA =
=AH / cos 54° =
= r / cos 54° =
= 170,1301617 cm.

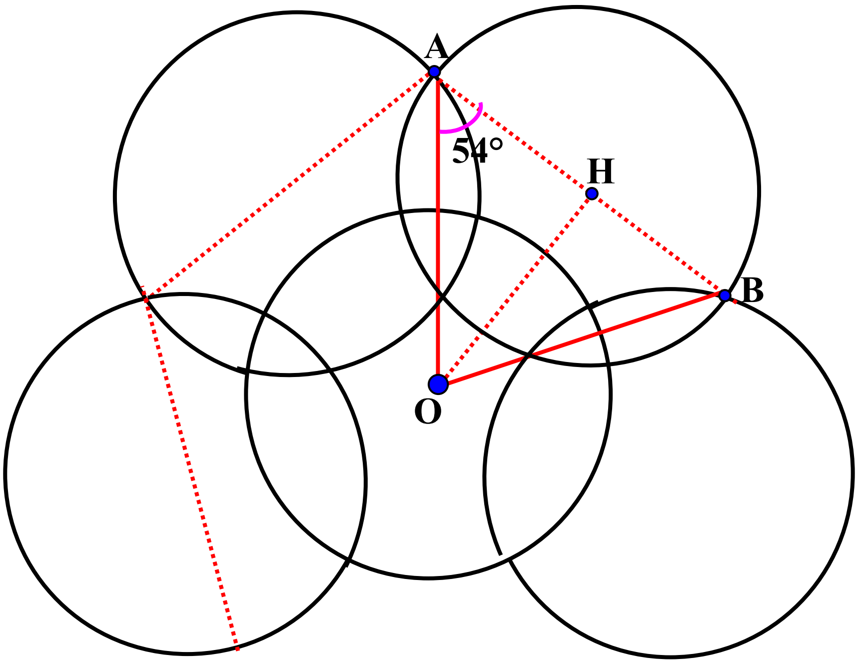

Fig. 2

<u>Terza configurazione (3+3)</u>

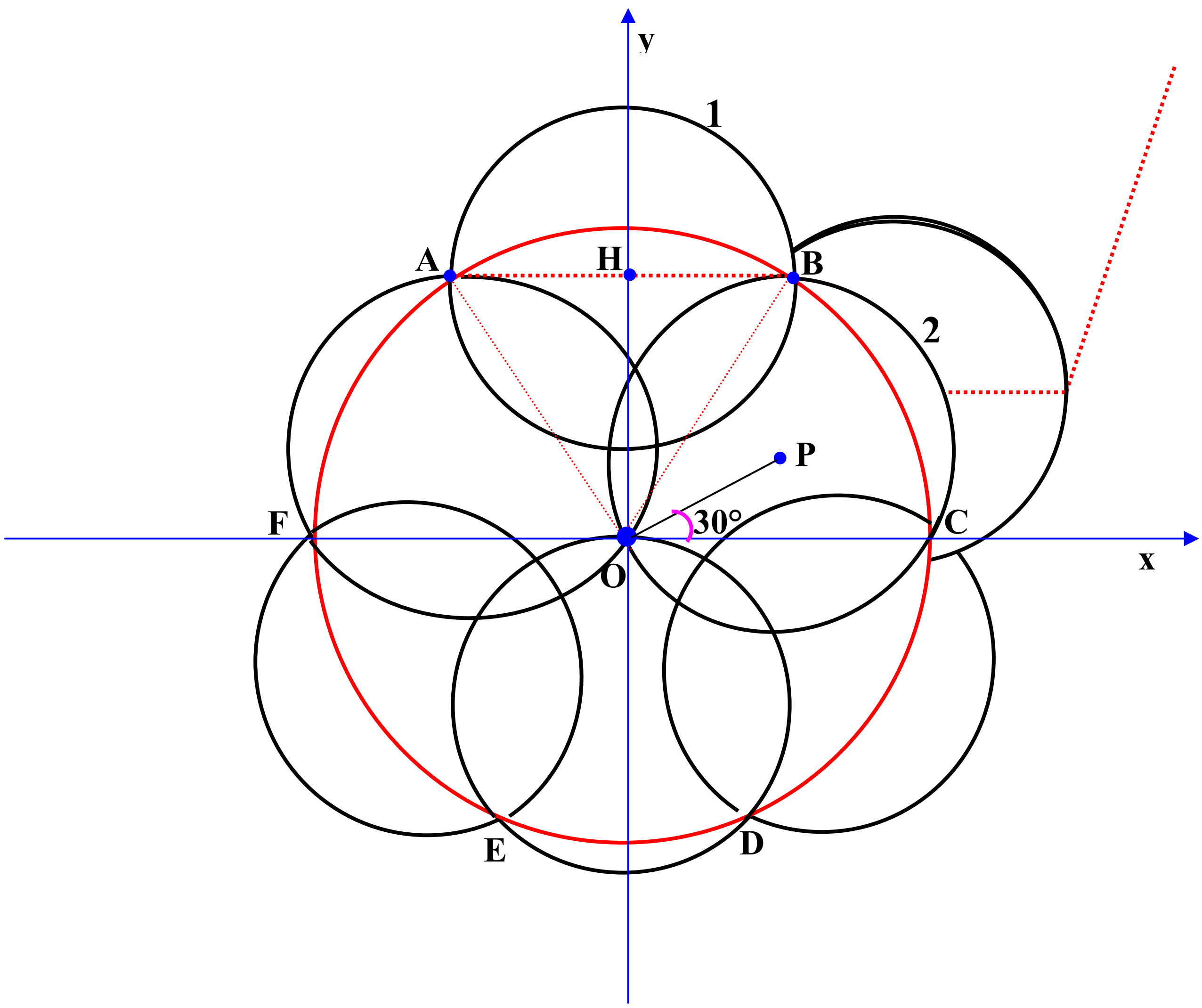

Fig. 3

In questa configurazione il raggio **R** incognito è pari alla lunghezza della congiungente del centro della figura con uno dei vertici di un esagono **<u>non</u>** regolare avente i lati opposti uguali ma non uguali fra di loro AB = CD = EF e BC = DE = FA.

Del triangolo rettangolo OHB, possiamo solo intuire che il cateto HB è pari al raggio r =100 ma di questo triangolo non conosciamo il valore dei due angoli acuti.
Ricorriamo pertanto alla geometria analitica.

Considerando le due circonferenze 1 e 2 di fig. 3 e il loro punto di incrocio B, di coordinate B(x, y) nel sistema cartesiano di figura, il problema diventa:

Tenendo ferma la circonferenza 2 di centro P, <u>massimizzare</u> il segmento OB = Sqrt(x^2+y^2) spostando la circonferenza 1 tenendo il centro di essa sull'asse y.

Dette:
x_1 e y_1 le coordinate del centro della circonferenza 1
x_2 e y_2 le coordinate del centro della circonferenza 2

si scrivono le equazioni delle circonferenze 1 e 2:

$(y - y_1)^2 + (x - x_1)^2 = r^2$ dove $x_1 = 0$
$(y - y_2)^2 + (x - x_2)^2 = r^2$ dove $x_2 = r \cos 30°$ e $y_2 = r \text{ sen } 30°$

dalla prima si ricava:

$x = \text{Sqrt}(r^2 - (y - y_1)^2)$

La seconda diventa:

$y^2 - r\, y + x^2 - r\, x\, \text{Sqrt}(3) = 0$

Sostituendo in quest'ultima il valore di x, dopo alcuni passaggi, si ottiene un'equazione di 2° grado in y con il parametro y_1 e $r = 100$ del tipo:

$a\, y^2 + b\, y + c = 0$

dove:

$a = (2 y_1 - r)^2 + 3 r^2$

$-b/2 = (2 y_1 - r) (y_1^2 - r^2) + 3 y_1 r^2$

$c = y_1^4 - 2 r^4 + y_1^2 r^2$

da cui, attraverso la nota formula risolutiva dell'equazione di 2° grado, scegliendo il segno + davanti al radicale, si ha:

$y = (- b/2 + \text{Sqrt} [(- b/2)^2 - a c)]) (1/a)$

sostituendo i valori di a, b, c si ottiene l'ordinata y del punto B al variare del parametro y_1.

Nota y, si calcola l'ascissa x del punto B

x = Sqrt(r^2 – (y – y_1)^2)   e successivamente

R = OB = Sqrt(x^2+y^2)

Utilizzando un foglio elettronico excel si può calcolare:

a, – b/2, c, y, x, R   al variare del parametro y_1

Per massimizzare il valore di R, è opportuno, osservando la fig. 3, scegliere un intervallo del parametro y_1 intorno al valore di 150

Dal file excel "Calcoli_6circ" si può notare che il valore di R è massimo nell'intervallo 149, 098473 ÷ 149,098480.

Si può notare anche che nello stesso intervallo il valore x dell'ascissa di B vale esattamente:

x = 100 = r   (così come si era già intuito all'inizio)

e che l'ordinata y di B vale:

y = 149,098476656752 minore di 150

Il punto B non coincide con il punto di ordinata massima della circonferenza 2, infatti il centro P e il punto B non hanno la stessa ascissa.

Pertanto dal file excel "Calcoli_6circ" si ottiene il valore massimo di R pari a:

<u>R = 179,528147490481 cm</u>