Relazioni B

B.1 Proposizioni e predicati

In matematica frasi come "19 è maggiore di 5" o "Giove ruota intorno alla Terra" sono considerate *proposizioni* perché ad esse si può attribuire un preciso valore di verità, cioè si può stabilire se sono vere oppure false: la prima è una proposizione vera, la seconda è falsa.

Non sono proposizioni in senso matematico "Cosa stai studiando?", "domani pioverà!", "x è un numero primo": infatti la prima non è un'affermazione ma pone una domanda, la seconda è una esclamazione e quindi non possiamo stabilire se è vera o falsa; l'ultima contiene un elemento indeterminato e finché non si fissa il valore da attribuire a x, non si può decidere se la frase che lo riguarda è vera o falsa.

Ogni proposizione è formata da un *predicato* (verbo) e dai suoi *argomenti* (cose o persone alle quali il verbo si riferisce).

Analizzando le proposizioni sopra enunciate si ha:

Soggetto	Predicato	Complemento
19	è maggiore di	5
Giove	ruota attorno alla	Terra

Il soggetto e il complemento sono gli argomenti ai quali il predicato si riferisce. In alcune proposizioni il predicato si riferisce a due argomenti (il *soggetto* e il *complemento*) in altre ad un solo argomento: ad esempio, il predicato "essere numero primo" stabilisce semplicemente una caratteristica del numero 5 senza porre alcuna connessione con un altro argomento.

Definizione B.1. Si dice *predicato binario* un predicato che si riferisce a due argomenti.

✍ *Esercizio proposto:* B.1

B.2 Relazioni in un insieme

Il termine *relazione* entra molto spesso in frasi del linguaggio naturale, lo usiamo per esprimere un generico legame tra due persone o tra due oggetti, anche senza specificarne la natura: "si è conclusa la relazione tra Anna e Paolo", "l'allungamento di una sbarretta di ferro è in relazione con il calore fornito", "la frana del terreno è in relazione con il disboscamento della zona e l'abusivismo edilizio", "domani consegnerò la relazione di fisica". Sono tutte espressioni che ci danno informazioni di un qualche collegamento tra gli argomenti (persone, cose) ai quali il termine relazione si riferisce.

Dal punto di vista matematico diamo la seguente definizione.

Definizione B.2. Si dice *relazione* in un insieme A un predicato binario che lega due elementi dell'insieme.

Esempio B.1. Nell'insieme $A = \{3, 5, 6, 9, 30\}$ è introdotto il predicato binario "essere multiplo di"; con esso formiamo le proposizioni vere scegliendo soggetto e complemento nell'insieme A:

30 è multiplo di 6;	30 è multiplo di 5;	9 è multiplo di 9;
9 è multiplo di 3;	3 è multiplo di 3;	30 è multiplo di 30.
30 è multiplo di 3;	5 è multiplo di 5;	
6 è multiplo di 3;	6 è multiplo di 6;	

Il predicato "essere multiplo" genera nell'insieme A una relazione matematica. Esso tuttavia non è il solo che permette di collegare tra loro due elementi di quell'insieme.

✍ *Esercizio proposto:* B.2

Se chiamiamo con $\mathfrak{R}$ il predicato binario che definisce la relazione introdotta nell'insieme, per indicare sinteticamente che la proposizione avente come soggetto a, come complemento b e come predicato $\mathfrak{R}$, scriviamo $a\mathfrak{R}b$ e diremo sinteticamente che a *è in relazione con* b.

Esempio B.2. Con riferimento all'esempio precedente si ha: $A = \{3, 5, 6, 9, 30\}$, $\mathfrak{R}$: "essere multiplo di". Allora scriviamo: per qualunque a e b appartenenti ad A, $a\mathfrak{R}b$ se e solo se a è multiplo di b, in particolare:

$$30\mathfrak{R}\,6;\quad 9\mathfrak{R}\,3;\quad 30\mathfrak{R}\,3;\quad 6\mathfrak{R}\,3;\quad 30\mathfrak{R}\,5;\quad 3\mathfrak{R}\,3;\quad 5\mathfrak{R}\,5;\quad 6\mathfrak{R}\,6;\quad 9\mathfrak{R}\,9;\quad 30\mathfrak{R}\,30.$$

Abbiamo così formato un insieme di *coppie ordinate* di elementi tra loro in relazione: $30\mathfrak{R}\,5$ può anche essere indicata con $(30, 5)$.

Definizione B.3. Chiamiamo *insieme della relazione* (in simboli $G_{\mathfrak{R}}$) l'insieme delle coppie ordinate i cui elementi sono gli argomenti del predicato binario, ossia sono in relazione tra di loro. Esso risulta essere un sottoinsieme del prodotto cartesiano dell'insieme A con se stesso. Si rappresenta per proprietà caratteristica nel seguente modo $G_{\mathfrak{R}} = \{(a, b) \in A \times A / a\mathfrak{R}b\}$.

✍ *Esercizi proposti:* B.3, B.4, B.5, B.6

B.2.1 Grafico di una relazione

Dal momento che una relazione in un insieme Y determina un sottoinsieme del prodotto cartesiano $Y \times Y$ è comodo rappresentare una relazione nello stesso diagramma usato per rappresentare il prodotto cartesiano. Una relazione può quindi essere rappresentata attraverso un *grafico cartesiano*.

✍ *Esercizi proposti:* B.7, B.8

B.2.2 Matrice o tabella di una relazione

Nella figura B.1 è rappresentata la classica griglia per il gioco della battaglia navale. Ogni cella è individuata da una coppia ordinata il cui primo elemento (una lettera dell'alfabeto) indica la riga, il secondo (un numero) indica la colonna; così la coppia $(D, 5)$ indica la cella annerita.

✍ *Esercizi proposti:* B.9, B.10, B.11

B.2.3 Grafo di una relazione

Definizione B.4. Un *grafo* è un insieme di punti detti nodi e di archi che uniscono coppie di punti.

Abbiamo visto che con un predicato si possono formare alcune proposizioni aventi rispettivamente come soggetto e come complemento elementi di un insieme: solo le proposizioni vere determinano la relazione tra gli elementi di quell'insieme e generano coppie di elementi in relazione.

Esempio B.3. Nel diagramma di Eulero-Venn (figura B.2) dell'insieme $A = \{3, 5, 6, 9, 30\}$ rappresentiamo la relazione $\mathfrak{R}$ = "essere multiplo di" collegando mediante una freccia gli argomenti delle proposizione vere.

Come puoi osservare l'elemento 30 è collegato con una freccia all'elemento 6 in quanto la proposizione: "30 è multiplo di 6" è vera, ma non all'elemento 9 poiché la proposizione: "30 è multiplo di 9" è falsa; inoltre la punta della freccia è sul numero 6 in quanto complemento del predicato "essere multiplo"; infine su ciascun elemento abbiamo messo un *anello* o *cappio* per indicare che ogni elemento è in relazione con se stesso essendo vera per ogni elemento a dell'insieme A la proposizione: "a è multiplo di a".

✍ *Esercizi proposti:* B.12, B.13, B.14, B.15, B.16, B.17, B.18

	1	2	3	4	5	6	7
A							
B							
C							
D							
E							
F							

FIGURA B.1: Griglia della battaglia navale.

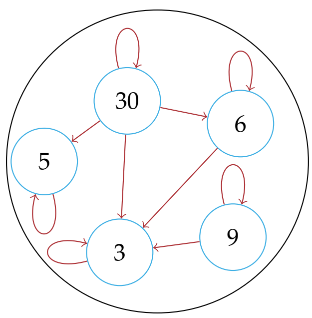


FIGURA B.2: L'insieme A.

B.3 Proprietà delle relazioni

B.3.1 Proprietà riflessiva

Esempio B.4. Nell'insieme $T = \{7, 8, 12, 34, 100\}$ è introdotta la relazione $\mathfrak{R}$: "essere divisore di". Puoi osservare che ogni numero è divisore di se stesso, cioè ogni elemento dell'insieme è in relazione con se stesso. Una relazione di questo tipo si dice che gode della *proprietà riflessiva*. Osserva, però, che nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali la relazione "essere divisibile per" non è riflessiva poiché zero non è divisibile per se stesso.

Definizione B.5. Una relazione $\mathfrak{R}$ in un insieme A gode della *proprietà riflessiva* quando ogni elemento è in relazione con se stesso, ossia per qualunque x dell'insieme A si ha $x\mathfrak{R}x$.

✍ *Esercizio proposto:* B.19

B.3.2 Proprietà antiriflessiva

Esempio B.5. Nell'insieme delle persone $P = \{\text{Marco, Antonio, Carlo}\}$ è data la relazione $\mathfrak{R}$: "essere più alto" rappresentata con la figura B.3. Puoi notare che nessun elemento è in relazione con se stesso. In effetti nessuno può "essere più alto" di se stesso.

Definizione B.6. Una relazione $\mathfrak{R}$ in un insieme A gode della *proprietà antiriflessiva* quando nessun elemento è in relazione con se stesso, ossia per nessun elemento x di A si ha $x\mathfrak{R}x$.

✍ *Esercizio proposto:* B.20

B.3.3 Proprietà simmetrica

Esempio B.6. Nella figura B.4 è rappresentata la relazione $\mathfrak{R}$: "essere concorde con" nell'insieme dei numeri $A = \{-1, +3, -7, +5, -2, +4, +10\}$. Per collegare elementi in relazione abbiamo usato archi poiché, ad esempio, le proposizioni "+3 è concorde con +10" e "+10 è concorde con +3" sono entrambe vere. Per questa relazione si può osservare che se un elemento dell'insieme è in relazione con un altro allora anche quest'ultimo è in relazione con il primo: $-1\mathfrak{R}-7$, ma anche $-7\mathfrak{R}-1$; $+3\mathfrak{R}+5$, ma anche $+5\mathfrak{R}+3$ e così via.

Definizione B.7. Una relazione $\mathfrak{R}$ introdotta in un insieme A gode della *proprietà simmetrica* quando risultano vere le due proposizioni che si ottengono scambiando soggetto e complemento; ossia per qualunque x e y appartenenti all'insieme A se vale $x\mathfrak{R}y$ allora vale anche $y\mathfrak{R}x$.

✍ *Esercizio proposto:* B.21

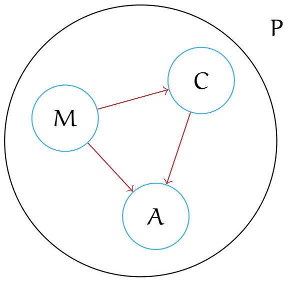


FIGURA B.3: Proprietà antiriflessiva.

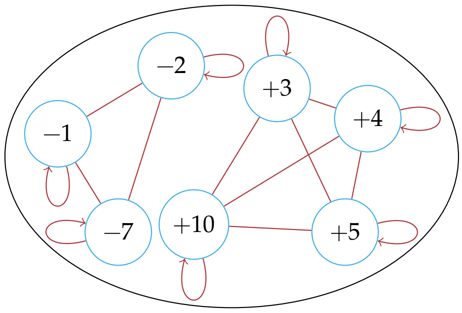


FIGURA B.4: Proprietà simmetrica.

B.3.4 Proprietà antisimmetrica

Esempio B.7. Il diagramma di Venn, nella figura B.5, rappresenta un insieme U e alcuni suoi sottoinsiemi.

Consideriamo ora l'insieme di insiemi $S = \{U, A, B, C, D, E, F\}$ e la relazione $\mathfrak{R}$: "essere sottoinsieme proprio di": completa il grafo della relazione.

Certamente nel completare il grafo (figura B.6) non avrai usato archi: è evidente che le proposizioni "B è sottoinsieme proprio di C" e "C è sottoinsieme proprio di B" non possono essere entrambe vere. Anzi, la verità della prima implica necessariamente la falsità della seconda.

Definizione B.8. Una relazione $\mathfrak{R}$ introdotta in un insieme A gode della *proprietà antisimmetrica* quando non possono essere vere contemporaneamente le proposizioni che si ottengono scambiando il soggetto con il complemento, se soggetto e complemento sono diversi tra loro; ossia per qualunque x e y dell'insieme A se $x \neq y$ e se $x\mathfrak{R}y$ non è vero che $y\mathfrak{R}x$.

✍ *Esercizio proposto:* B.22

B.3.5 Proprietà transitiva

Esempio B.8. Nel grafo (figura B.7) è rappresentata una relazione $\mathfrak{R}$ introdotta in un insieme T. Dall'analisi della situazione rappresentata possiamo affermare che dalla verità di ($a\mathfrak{R}b$ e $b\mathfrak{R}c$)

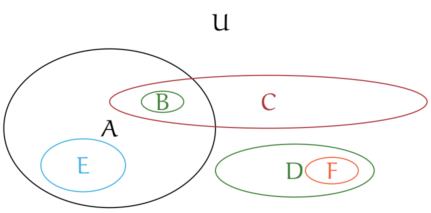


FIGURA B.5: L'insieme U.

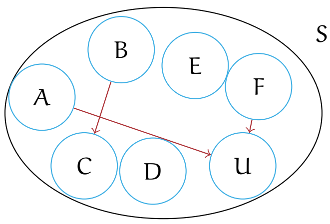


FIGURA B.6: L'insieme S.

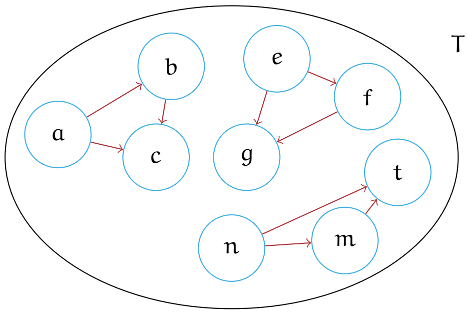


FIGURA B.7: L'insieme T.

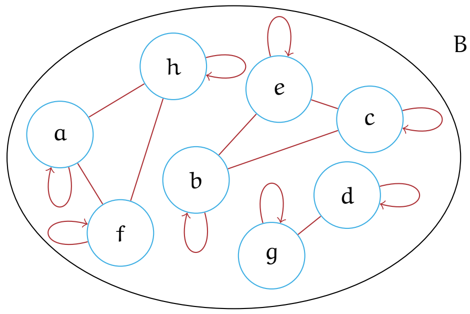


FIGURA B.8: L'insieme B.

segue la verità di $a\mathfrak{R}c$. Analizzando gli altri elementi, possiamo osservare che essendo vera ($e\mathfrak{R}f$ e $f\mathfrak{R}g$) è vera anche $e\mathfrak{R}g$; inoltre si ha che essendo vera ($n\mathfrak{R}m$ e $m\mathfrak{R}t$) è vera anche $n\mathfrak{R}t$.

Definizione B.9. Una relazione $\mathfrak{R}$ introdotta in un insieme A gode della *proprietà transitiva* quando se $a\mathfrak{R}b$ e $b\mathfrak{R}c$ allora risulta anche $a\mathfrak{R}c$, con a, b, c elementi qualsiasi dell'insieme A.

✍ *Esercizi proposti:* B.23, B.24, B.25, B.26, B.27, B.28, B.29

B.4 Relazioni di equivalenza

Esempio B.9. Completa la tabella segnando le proprietà di cui gode ciascuna relazione indicata (Ri= riflessiva, Si=simmetrica, Tr=transitiva).

Relazione	Insieme	Proprietà
Avere lo stesso perimetro	poligoni	[Ri][Si][Tr]
Essere fratello di	persone	[Ri][Si][Tr]
Essere figlio di	persone	[Ri][Si][Tr]
Essere più alto di	persone	[Ri][Si][Tr]
Avere gli angoli rispettivamente congruenti	triangoli	[Ri][Si][Tr]
Iniziare con la stessa lettera	parole	[Ri][Si][Tr]
Giocare nella stessa squadra	calciatori	[Ri][Si][Tr]
$(a,b)R(x,y)$ se e solo se $a+b=x+y$	$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$	[Ri][Si][Tr]

Svolgimento: La prima relazione gode delle tre proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva; infatti:

- "il poligono p ha lo stesso perimetro di se stesso" è vera per qualunque poligono (*proprietà riflessiva*);
- "il poligono p_1 ha lo stesso perimetro del poligono p_2" implica la verità della proposizione "il poligono p_2 ha lo stesso perimetro di p_1", qualunque siano i due poligoni p_1 e p_2 (*proprietà simmetrica*);

- se "il poligono p_1 ha lo stesso perimetro di p_2" e "p_2 ha lo stesso perimetro di p_3" allora si ha anche che "p_1 ha lo stesso perimetro di p_3", qualunque siano i poligoni p_1, p_2, p_3 (*proprietà transitiva*).

Verifica tu se anche le altre relazioni godono delle tre proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva, come "essere fratello di", "avere gli angoli rispettivamente uguali", "iniziare con la stessa lettera".

Definizione B.10. Chiamiamo *relazione d'equivalenza* la relazione che gode delle tre proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

✍ *Esercizi proposti:* B.30, B.31

Esempio B.10. Dato l'insieme $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ e la relazione rappresentata dal grafo (figura B.8) costruiamo alcuni suoi sottoinsiemi seguendo le istruzioni:

- *ripeti*;
- scegliamo a caso un elemento di B;
- formiamo un sottoinsieme contenente l'elemento scelto e tutti gli altri che con quello sono in relazione;
- *finché* non abbiamo esaurito tutti gli elementi.

Svolgimento:

- scegliamo l'elemento a, formiamo il sottoinsieme avente come elementi a, h, f che con a sono in relazione: $B_1 = \{a, h, f\}$. Gli elementi di B non sono esauriti, quindi ripetiamo i passi scegliendo un elemento tra quelli rimasti;
- scegliamo g e formiamo il sottoinsieme B_2 avente come elementi g e d, l'unico che con esso è in relazione: $B_2 = \{g, d\}$. Gli elementi dell'insieme B non sono esauriti, quindi ripetiamo i passi scegliendo un elemento tra quelli rimasti;
- scegliamo c e formiamo il sottoinsieme B_3 avente come elementi c, e, b che con esso sono in relazione: $B_3 = \{c, e, b\}$.

Abbiamo esaurito gli elementi dell'insieme assegnato. Abbiamo così ottenuto tre sottoinsiemi dell'insieme B (figura B.9), che hanno queste particolari caratteristiche:

- nessuno è vuoto;
- a due a due sono disgiunti;
- la loro unione è l'insieme B.

Premettiamo le definizioni:

Definizione B.11. Determinare una *partizione di un insieme* X significa suddividere l'insieme stesso in un numero di sottoinsiemi $X_1, X_2, \dots, X_n$, detti *classi*, tali che

a) nessun sottoinsieme è vuoto,
b) a due a due sono disgiunti,
c) la loro unione è l'insieme X.

La *partizione* di X è l'insieme i cui elementi sono le classi $X_1, X_2, \dots, X_n$, e viene indicato con $P(X) = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

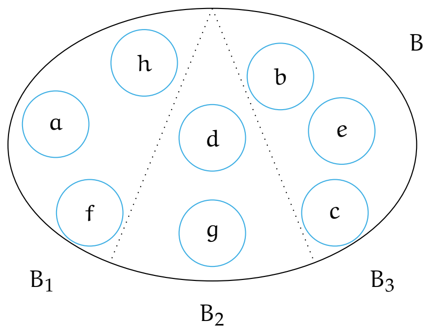


FIGURA B.9: I sottoinsiemi dell'insieme B.

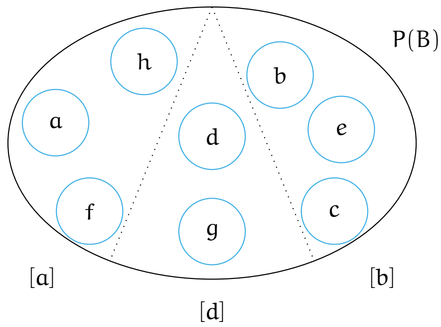


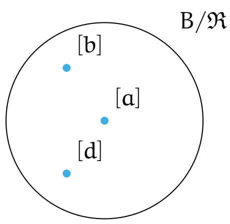
FIGURA B.10: La partizione dell'insieme B in classi d'equivalenza.

Definizione B.12. Quando in un insieme A è stata introdotta una relazione d'equivalenza, si chiama *classe d'equivalenza* ogni sottoinsieme di A contenente tutti e soli gli elementi tra loro in relazione. Si viene così a determinare una *partizione dell'insieme A in classi d'equivalenza* ciascuna indicata racchiudendo in parentesi quadrate un suo qualunque elemento.

Nell'esempio sopra riportato le classi d'equivalenza sono i sottoinsiemi di B indicati con $[a], [b], [d]$; la partizione dell'insieme B in classi d'equivalenza è rappresentata con il diagramma di Eulero-Venn nella figura B.10.

Definizione B.13. Si chiama *insieme quoziente* di un insieme A rispetto a una relazione di equivalenza $\mathfrak{R}$, l'insieme i cui elementi sono le classi d'equivalenza determinate dalla relazione $\mathfrak{R}$. L'insieme quoziente si indica con il simbolo $A/\mathfrak{R}$.

Nel caso dell'esempio precedente si passa all'insieme quoziente $B/\mathfrak{R}$ del seguente diagramma di Eulero-Venn:



❑ **Osservazione** Ogni volta che si ha una relazione d'equivalenza $\mathfrak{R}$ in un insieme A, possiamo stabilire la seguente catena di passaggi:

$$\text{insieme } A \to \text{ partizione } P(A) \to \text{ insieme quoziente } A/\mathfrak{R}.$$

✍ *Esercizi proposti:* B.32, B.33, B.34, B.35, B.36, B.37, B.38, B.39, B.40, B.41, B.42 B.43

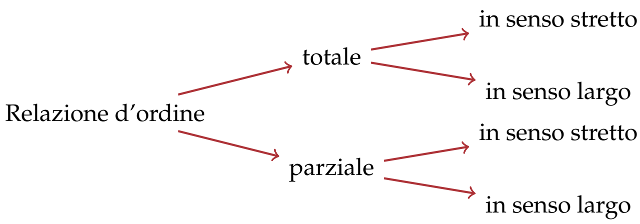
B.5 Relazioni di ordine

Nel linguaggio di ogni giorno avrai certamente spesso usato espressioni come "devo mettere in ordine i miei libri" oppure "qui non c'è ordine" e altre espressioni simili.

Anche in matematica, fin dalla scuola elementare, hai imparato a ordinare gli elementi dell'insieme dei numeri naturali: dati due numeri naturali hai imparato infatti a stabilire quale dei due è il maggiore.

Definizione B.14. Una relazione $\mathfrak{R}$, introdotta in un insieme A, si chiama *relazione d'ordine* se è antisimmetrica e transitiva.

Riguardando le varie relazioni introdotte sin qui, possiamo stabilire che esistono relazioni d'ordine di vario tipo, schematizzate nel seguente diagramma:



Attraverso alcuni esempi, vogliamo chiarire le differenze tra i diversi tipi; a questo scopo introduciamo la seguente definizione.

Definizione B.15. Data una relazione $\mathfrak{R}$ d'ordine in un insieme A, due elementi distinti x e y sono *confrontabili* se rispetto ad $\mathfrak{R}$ si ha $x\mathfrak{R}y$ oppure $y\mathfrak{R}x$.

Esempio B.11. In base al diagramma di Eulero-Venn nella figura B.5 introduciamo nell'insieme di insiemi $S = \{U, A, B, C, D, E, F\}$ la relazione $\mathfrak{R}$: "essere sottoinsieme di".

Ricordiamo che, dati due insiemi X e Y, X è *sottoinsieme* di Y quando ogni elemento di X appartiene a Y; in simboli $X \subseteq Y$ e si legge X è contenuto in Y o X è uguale a Y.

Vogliamo studiare le proprietà della relazione $\mathfrak{R}$:

a) poiché ogni insieme è sottoinsieme di se stesso, possiamo dire che $\mathfrak{R}$ è riflessiva;
b) se $X \subseteq Y$ e $X \neq Y$ allora $Y \not\subset X$ quindi $\mathfrak{R}$ è una relazione antisimmetrica;
c) se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq Z$ allora $X \subseteq Z$ quindi $\mathfrak{R}$ è una relazione transitiva.

Inoltre è evidente che esistono almeno due elementi dell'insieme S che non sono in alcun modo in relazione: ad esempio $A \not\subset D$ e $D \not\subset A$, ossia A e D non sono confrontabili.

Esempio B.12. Riprendiamo il diagramma di Eulero-Venn dell'esempio precedente e introduciamo nell'insieme $S = \{U, A, B, C, D, E, F\}$ la relazione $\mathfrak{R}$: "essere sottoinsieme proprio di". Studiamo le proprietà di questa relazione:

➡ cosa è cambiato rispetto alla relazione precedente? . . .
➡ sono ancora valide le proprietà antisimmetrica e transitiva? . . .

➡ esistono elementi di S non confrontabili? ...

Definizione B.16. Una relazione d'ordine si dice *parziale* quando almeno due elementi non sono confrontabili.

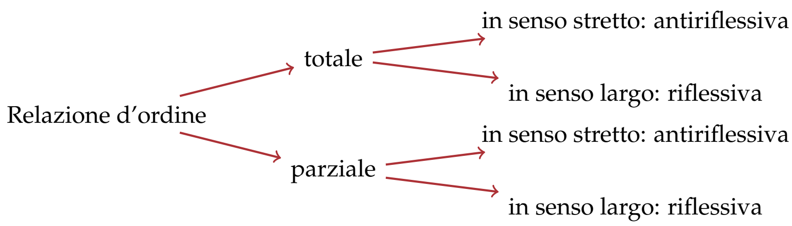
Definizione B.17. Si dice relazione d'ordine parziale *in senso largo* quando la relazione gode della proprietà riflessiva.

Definizione B.18. Si dice relazione d'ordine parziale *in senso stretto* quando la relazione gode della proprietà antiriflessiva.

Definizione B.19. Una relazione d'ordine si dice *totale* quando due qualsiasi elementi possono essre messi in relazione, cioè sono confrontabili.

Definizione B.20. Si dice relazione d'ordine totale *in senso largo* quando la relazione gode della proprietà riflessiva.

Definizione B.21. Si dice relazione d'ordine totale *in senso stretto* quando la relazione gode della proprietà antiriflessiva.



✍ *Esercizi proposti:* B.44, B.45, B.46, B.47, B.48, B.49, B.50, B.51, B.52, B.53, B.54 B.55, B.56, B.57, B.58, B.59, B.60, B.61,B.62, B.63

B.6 Esercizi

B.6.1 Esercizi dei singoli paragrafi

B.1 - Proposizioni e predicati

B.1. Completa la tabella come suggerito nella prima riga, individuando, per ciascuna proposizione, il predicato e gli argomenti a cui esso si riferisce:

Proposizioni	Predicato	Argomenti
7 è divisore di 14	essere divisore di	7, 14
11 è maggiore di 10	essere maggiore di	
5 è numero primo		
Andrea frequenta la stessa palestra di Marco		
Marta è moglie di Piero		
Paolo è padre di Marco		

B.2 - Relazioni in un insieme

B.2. Nell'insieme $A = \{3, 5, 6, 9, 30\}$ considera il predicato "essere minore di"; con esso forma proposizioni vere aventi come soggetto e come complemento due elementi di A.

a) p_1: 9 è minore di 30;
b) p_2: . . . . ;
c) p_3: . . . .

B.3. Nell'insieme A rappresentato con un diagramma di Eulero-Venn (figura B.11) introduciamo il predicato $\mathfrak{R}$:"avere una sola lettera diversa". Costruisci l'insieme $G_{\mathfrak{R}}$.

Traccia di soluzione: Per costruire l'insieme $G_{\mathfrak{R}}$ devo formare le coppie ordinate ricordando che per qualunque a e b appartenenti ad A, $a\mathfrak{R}b$ se e solo se "a ha una sola lettera diversa da b", ad esempio prete$\mathfrak{R}$ prese.

B.4. Nell'insieme C ={Como, Milano, Venezia, Parma, Brescia, Aosta, Torino, Genova, Imperia, Arezzo, Firenze, Grosseto, Napoli, Campobasso, Catanzaro, Bologna, Vercelli, Salerno} è introdotta la relazione $\mathfrak{R}$: "essere nella stessa regione". Costruisci l'insieme $G_{\mathfrak{R}}$.

B.5. Nell'insieme $S = \{x/x$ è il nome di un giorno della settimana$\}$ è introdotta la relazione $\mathfrak{R}$: $x \in S$, $y \in S$, $x\mathfrak{R}y$ se e solo se "x ha lo stesso numero di sillabe di y". Costruisci l'insieme $G_{\mathfrak{R}}$.

B.6. Nell'insieme $F = \{1, 3, 4, 6, 5, 9, 0, 2\}$ è introdotta la relazione $\mathfrak{R}$: "essere consecutivi". Costruisci l'insieme $G_{\mathfrak{R}}$.

B.3 - Grafico di una relazione

B.7. Considera l'insieme $S = \{x/x$ è il nome di un giorno della settimana$\}$, completa la rappresentazione grafica (figura B.12) dell'insieme $S \times S$, evidenzia poi con una crocetta gli elementi dell'insieme $G_{\mathfrak{R}}$ determinato dalla relazione "x ha lo stesso numero di sillabe di y".

B.8. Considera l'insieme F = {1, 3, 4, 6, 5, 9, 0, 2}; fai la rappresentazione grafica dell'insieme $F \times F$ e metti in evidenza con una crocetta gli elementi dell'insieme $G_{\mathfrak{R}}$ determinato dalla relazione "essere consecutivi".

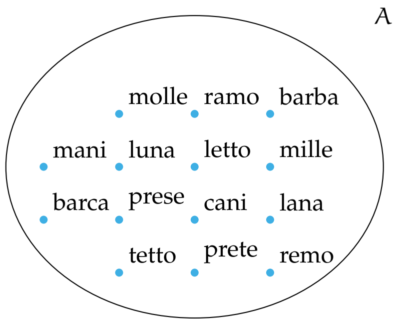


FIGURA B.11: Esercizio B.3.

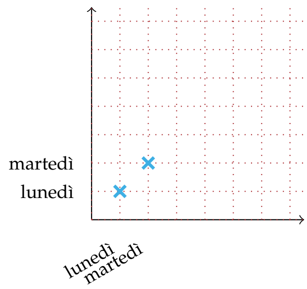


FIGURA B.12: Esercizio B.7.

B.4 - Matrice o tabella di una relazione

B.9. Considera nell'insieme $A = \{-1, +3, -7, +5, -2, +4, +10\}$ la relazione $\mathfrak{R}$: $x \in A$, $y \in A$, $x\mathfrak{R}y$ se e solo se "x è concorde con y". Costruiamo una tabella a doppia entrata (figura B.13)) riportando in orizzontale e in verticale gli elementi dell'insieme A. Fissa l'attenzione su una cella e segui le istruzioni:

- se $a\mathfrak{R}b$ metti 1 nella cella (a, b);
- altrimenti metti 0 nella cella (a, b).

Prosegui tu seguendo l'esempio.

❑ **Osservazione** Alla fine tutte le celle sono riempite: compare zero se gli elementi della coppia ordinata non sono in relazione, compare 1 al contrario. La relazione $\mathfrak{R}$ è completamente rappresentata.

La tabella costruita si chiama *matrice della relazione*. Una relazione può sempre essere rappresentata attraverso una matrice.

B.10. Nell'insieme $S = \{x/x$ è il nome di un giorno della settimana$\}$ è introdotta la relazione $\mathfrak{R}$: $x \in S$, $y \in S$, $x\mathfrak{R}y$ se e solo se "x ha lo stesso numero di sillabe di y". Rappresenta la relazione con una matrice.

B.11. Assegnato il predicato $\mathfrak{R}$: "essere divisibile per" introdotto nell'insieme $A = \{12, 4, 2, 8, 3, 21, 5, 60\}$, rappresenta con una matrice la relazione $\mathfrak{R}$.

	−1	+3	−7	+5	−2	+4	+10
−1	1						
+3							
−7							
+5			0				
−2							
+4							
+10							

FIGURA B.13: Esercizio B.9.

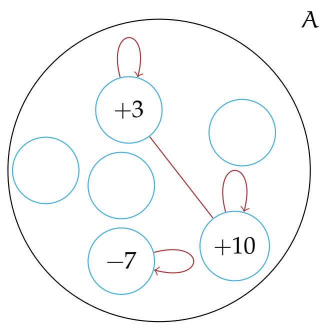


FIGURA B.14: Esercizio B.12.

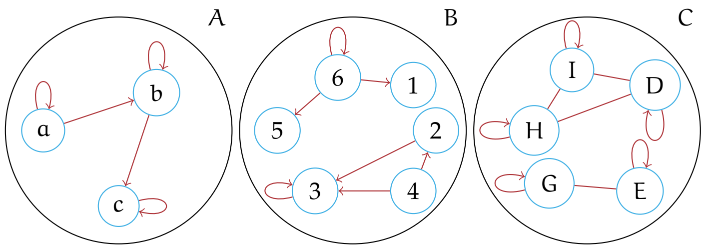


FIGURA B.15: Esercizio B.14.

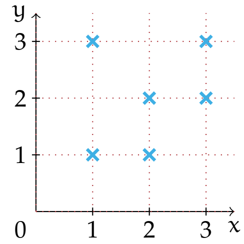


FIGURA B.16: Esercizio B.18.

B.5 - Grafo di una relazione

B.12. Completa la rappresentazione (figura B.14)) con frecce della relazione $\mathfrak{R}$: $x \in A$, $y \in A$, $x\mathfrak{R}y$ se e solo se "x è concorde con y" nell'insieme A $=\{-1, +3, -7, +5, -2, +4, +10\}$.

❑ **Osservazione** Nel completare il disegno dell'esercizio precedente hai dovuto utilizzare una freccia con due punte, infatti le proposizioni "+3 è concorde con +10" e "+10 è concorde con +3" sono entrambe vere. Quando si ha questo caso si può omettere la punta della freccia utilizzando un *arco* che collega gli argomenti del predicato.

B.13. Nell'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ è introdotto il predicato $\mathfrak{R}$: "essere il doppio"; costruisci l'insieme $G_{\mathfrak{R}}$, rappresenta la relazione nei tre modi descritti sopra: con un grafico cartesiano, con una matrice, con un grafo.

B.14. Sono assegnati i grafi di tre relazioni $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$ introdotte in altrettanti insiemi A, B, C (figura B.15); deduci da essi gli elementi di ciascun insieme e costruisci per ciascuna relazione l'insieme $G_{\mathfrak{R}}$.

B.15. Rappresenta nei tre modi che sono stati descritti (con un grafico cartesiano, con una matrice, con un grafo) la relazione $\mathfrak{R}$: "essere nati nello stesso mese" introdotta nell'insieme C degli alunni della tua classe.

B.16. Nell'insieme $H = \{x \in \mathbb{N} / 21 < x < 40\}$, $x\mathfrak{R}y$ se e solo se "la somma delle cifre di x è uguale alla somma delle cifre di y". Costruisci $G_{\mathfrak{R}}$ e rappresenta la relazione con una matrice.

B.17. Scegli la risposta corretta: Una relazione $\mathfrak{R}$ introdotta in un insieme A determina:

a) un sottoinsieme di A;
b) l'insieme $A \times A$;
c) un insieme di coppie;
d) un grafico cartesiano;
e) un sottoinsieme di $A \times A$.

B.18. Rappresenta con un grafo la relazione $\mathfrak{R}$ rappresentata nel grafico cartesiano della figura B.16.

B.6 - Proprietà riflessiva

B.19. Quali relazioni sono riflessive?

Insieme	Relazione	È riflessiva?
Numeri naturali	essere divisibile per	Sì No
Libri che hai in cartella	avere lo stesso numero di pagine	Sì No
Rette del piano	essere perpendicolare a	Sì No
Rette del piano	essere parallela a	Sì No
Poligoni	avere lo stesso numero di lati	Sì No
Città della Lombardia	terminare con la stessa vocale	Sì No
Parole italiane	essere il plurale di	Sì No

B.7 - Proprietà antiriflessiva

B.20. Quali delle seguenti relazioni sono antiriflessive?

Insieme	Relazione	È antiriflessiva?
Numeri naturali	essere multiplo di	Sì No
Rette del piano	essere perpendicolare a	Sì No
Poligoni	avere lo stesso perimetro	Sì No
Città del Piemonte	avere più abitanti di	Sì No
Parole italiane	essere il femminile di	Sì No
Fiumi italiani	essere affluente	Sì No
Persone	essere figlio di	Sì No

B.8 - Proprietà simmetrica

B.21. Riconosci le relazioni simmetriche:

Insieme	Relazione	È simmetrica?
Città d'Italia	appartenere alla stessa regione	Sì No
Rette del piano	essere perpendicolari	Sì No
Solidi	avere lo stesso volume	Sì No
Persone	essere il padre di	Sì No
Persone	essere fratello o sorella di	Sì No
Numeri naturali	avere lo stesso numero di cifre di	Sì No
Fiumi d'Europa	essere affluente	Sì No
Numeri interi	essere il quadrato di	Sì No

Le relazioni degli ultimi due casi non godono della proprietà simmetrica. Infatti:

- la proposizione "Il Ticino è un affluente del Po" è vera, ma non lo è la proposizione che da essa si ottiene scambiando il soggetto con il complemento;
- se un numero intero è il quadrato di un altro (ad esempio $+25$ è il quadrato di $+5$), non è vero che $+5$ è il quadrato di $+25$.

B.9 - Proprietà antisimmetrica

B.22. Riconosci le relazioni antisimmetriche:

Insieme	Relazione	È antisimmetrica?
Numeri naturali	essere divisibile per	Sì No
Rette del piano	essere perpendicolare a	Sì No
Poligoni	avere lo stesso perimetro	Sì No
Angoli	essere complementare a	Sì No
Città del Lazio	essere nella stessa provincia di	Sì No

B.10 - Proprietà transitiva

B.23. Verifica se, nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, la relazione $\mathfrak{R}$: "avere lo stesso numero di cifre" gode della proprietà transitiva. Completa le proposizioni e rappresenta $\mathfrak{R}$ con un grafo:

a) da $18\mathfrak{R}\,50$ e $50\mathfrak{R}\ldots$ segue $\ldots\mathfrak{R}\ldots$;
b) da $\ldots\mathfrak{R}\,555$ e $\ldots\mathfrak{R}\,267$ segue $\ldots\mathfrak{R}\ldots$

B.24. Indica quale tra le seguenti relazioni è transitiva:

Insieme	Relazione	È transitiva?
Numeri naturali	essere multiplo di	Sì No
Regioni d'Italia	essere più a nord di	Sì No
Numeri interi	essere minore di	Sì No
Rette del piano	essere perpendicolari	Sì No
Persone	essere padre di	Sì No
Stati d'Europa	confinare con	Sì No

B.25. Dai una rappresentazione tabulare dell'insieme $H = \{x \in \mathbb{N} / 0 \leqslant x \leqslant 12\}$; determina il resto della divisione di ciascun numero di H con 4, compila la tabella come suggerito nell'esempio:

operazione	0 : 4	1 : 4	2 : 4		12 : 4
resto	0	1			0

Introduciamo in H la relazione $x\mathfrak{R}y$ se e solo se "x e y hanno lo stesso resto nella divisione per 4". Costruisci il grafo della relazione e stabilisci se gode della proprietà transitiva.

La stessa relazione $\mathfrak{R}$ introdotta nell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ è una relazione transitiva?

B.26. Completa il grafo (figura B.17) in modo che la relazione rappresentata diventi transitiva.

B.27. Indica la risposta corretta:

a) se una relazione è simmetrica, all'insieme $G_{\mathfrak{R}}$ appartengono le coppie del tipo (a, b) e (b, a);
b) il grafico cartesiano è un modo per

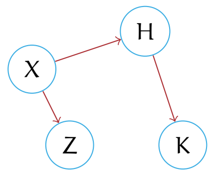


FIGURA B.17: Esercizio B.26.

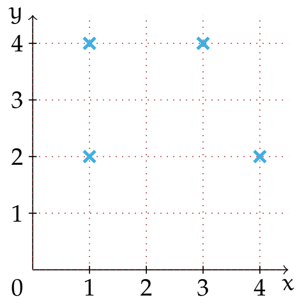


FIGURA B.18: Esercizio B.28.

rappresentare una relazione;

c) la matrice di una relazione riflessiva presenta tutti uno sulla diagonale discendente;
d) la matrice di una relazione antiriflessiva non presenta alcun uno sulla diagonale discendente;
e) se una relazione è transitiva, allora è anche simmetrica;
f) se $(x, y) \in G_{\mathfrak{R}}$ e $(y, z) \in G_{\mathfrak{R}}$ qualche volta si ha $(x, z) \in G_{\mathfrak{R}}$;
g) se $(x, y) \in G_{\mathfrak{R}}$ si ha sempre $(y, x) \in G_{\mathfrak{R}}$;
h) una relazione riflessiva presenta nel suo grafo il cappio su ciascun elemento;
i) una relazione binaria è individuata da un predicato che lega due argomenti dell'insieme A;
j) una relazione binaria genera un sottoinsieme del prodotto cartesiano$A \times A$.

B.28. Con riferimento al grafico cartesiano disegnato nella figura B.18, quale è vera?

a) nel suo grafo almeno un elemento non presenta il cappio;
b) la relazione è antisimmetrica;
c) la relazione è transitiva;
d) l'insieme $G_{\mathfrak{R}}$ è costituito dalle coppie $(1, 2)$, $(1, 4)$, $(3, 4)$, $(4, 2)$.

B.29. Quali proprietà verificano le seguenti relazioni?

R = riflessiva; AR = antiriflessiva; S = simmetrica; AS = antisimmetrica; T = transitiva

Insieme	Relazione	Proprietà				
Poligoni del piano	avere lo stesso numero di lati	R	AR	S	AS	T
Numeri naturali	avere lo stesso numero di cifre	R	AR	S	AS	T
Numeri naturali	essere minore di	R	AR	S	AS	T
Numeri naturali	essere divisibile per	R	AR	S	AS	T
$A = \{x \in \mathbb{N} / 1 \leqslant x \leqslant 5\}$	essere multiplo di	R	AR	S	AS	T

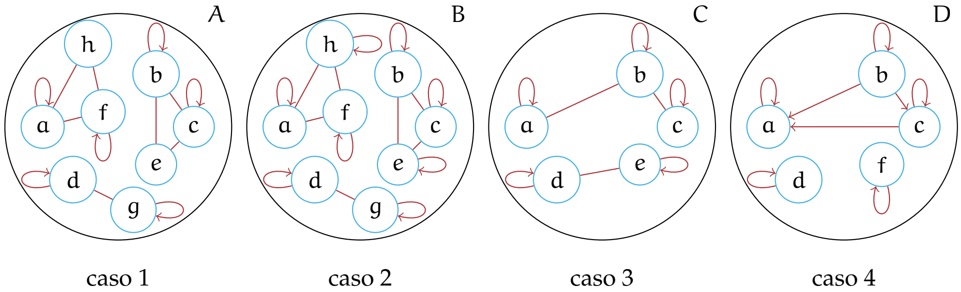


FIGURA B.19: Esercizio B.31

B.11 - Relazioni di equivalenza

B.30. Quali delle seguenti sono relazioni di equivalenza?

Relazione	Insieme	È d'equivalenza?
Essere multiplo	numeri naturali	$\boxed{V}$ $\boxed{F}$
Avere lo stesso numero di sillabe	parole italiane	$\boxed{V}$ $\boxed{F}$
Essere minore	interi relativi	$\boxed{V}$ $\boxed{F}$
Vincere	squadre di calcio	$\boxed{V}$ $\boxed{F}$
Avere lo stesso numero di angoli	poligoni	$\boxed{V}$ $\boxed{F}$
Essere il plurale	parole italiane	$\boxed{V}$ $\boxed{F}$
Essere il cubo	numeri italiani	$\boxed{V}$ $\boxed{F}$

B.31. Analizza i grafi nella figura B.19 e individua quello che rappresenta una relazione d'equivalenza:

- nel caso 1 non è rappresentata una relazione d'equivalenza perché . . . .
- nel caso 2 la presenza del cappio su ciascun elemento indica che la relazione gode della proprietà . . . , il fatto che coppie di elementi siano collegate da archi indica che vale la proprietà . . . , infine terne di elementi godono della proprietà . . . In conclusione . . . .
- la relazione del caso 3 non gode della proprietà . . . . , pertanto . . . .
- nel caso 4 sussistono le proprietà . . . e . . . , ma non la proprietà . . . pertanto la relazione . . . .

B.32. Fissa l'attenzione sulla relazione $\mathfrak{R}$: "frequentare la stessa classe" introdotta nell'insieme S degli alunni iscritti nella tua scuola. Verifica che $\mathfrak{R}$ è una relazione d'equivalenza. Costruisci le classi d'equivalenza. Quante ne hai potuto formare? Come sono indicate nella realtà che vivi quotidianamente? Determina la partizione $P(S)$ in classi d'equivalenza e infine l'insieme quoziente $S/\mathfrak{R}$.

B.33. Studia in $\mathbb{N}$ la relazione $\mathfrak{R}$: "avere la stessa cifra delle unità". Verifica se è una relazione d'equivalenza, costruisci l'insieme quoziente dopo aver risposto alle seguenti domande:

- quanti numeri naturali sono tra loro equivalenti?
- da quanti elementi è costituito l'insieme $\mathbb{N}/\mathfrak{R}$?
- qual è l'elemento che sceglieresti come rappresentante di ciascuna classe?

B.34. Considera la relazione $\mathfrak{R}$: "avere lo stesso resto nella divisione per due" introdotta nell'insieme $\mathbb{N}$ e studiane le proprietà.

- è una relazione d'equivalenza? Se la risposta è affermativa, costruisci l'insieme quoziente $\mathbb{N}/\mathfrak{R}$.
- quante classi d'equivalenza hai formato?
- puoi sfruttare quanto ottenuto per enunciare le definizioni di numero pari e di numero dispari?
- giustifica, in base allo svolgimento dell'esercizio, l'affermazione: "L'insieme dei numeri pari è il complementare in $\mathbb{N}$ dell'insieme dei numeri dispari".

B.35. Considera l'insieme $A = \{x \in \mathbb{N}/1 \leqslant x \leqslant 20\}$ e i suoi sottoinsiemi: $A_1 = \{1, 5, 9, 13, 17\}$; $A_2 = \{2, 6, 10, 14, 18\}$; $A_3 = \{3, 7, 11, 15, 19\}$; $A_4 = \{4, 8, 12, 16, 20\}$.

a) Rappresenta gli insiemi con un diagramma di Eulero-Venn;
b) si può affermare che quei sottoinsiemi determinano una partizione dell'insieme A?
c) è vero che a ciascuno dei suddetti sottoinsiemi appartengono i numeri di A aventi lo stesso resto nella divisione per 4?
d) quei sottoinsiemi sono dunque classi d'equivalenza? Qual è il predicato della relazione che le determina?

B.36. Nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali stabilisci se è d'equivalenza la relazione $\mathfrak{R}$: "$x\mathfrak{R}y$ se e solo se x ha le stesse cifre di y".

B.37. Nell'insieme C degli alunni della tua classe verifica se la relazione $\mathfrak{R}$: "$x\mathfrak{R}y$ se e solo se il cognome di x ha la stessa lettera iniziale del cognome di y" è d'equivalenza; determina in caso affermativo la partizione dell'insieme C e l'insieme quoziente $C/\mathfrak{R}$.

B.38. Nell'insieme delle parole della lingua italiana verifica se la relazione "$x\mathfrak{R}y$ se e solo se x ha lo stesso numero di lettere di y" è una relazione di equivalenza. In caso affermativo individua alcune classi di equivalenza.

B.39. Nell'insieme dei nomi dei giorni della settimana considera la relazione "$x\mathfrak{R}y$ se e solo se x e y hanno almeno tre lettere in comune". Verifica se è una relazione di equivalenza e in caso affermativo individua le classi di equivalenza.

B.40. Nell'insieme dei numeri naturali da 1 a 100, verifica se la relazione "$x\mathfrak{R}y$ se e solo se x e y hanno lo stesso numero di lettere" è una relazione di equivalenza. Individua quante sono le classi di equivalenza. Scrivi tutti gli elementi delle classi di equivalenza [1] e [10].

B.41. Nell'insieme dei numeri naturali da 1 a 100, verifica se la relazione "$x\mathfrak{R}y$ se e solo se $x + y$ è dispari" è una relazione di equivalenza.

B.42. Nell'insieme dei nomi dei mesi dell'anno verifica se la relazione "$x\mathfrak{R}y$ se e solo se x e y hanno almeno 3 lettere in comune" è una relazione di equivalenza. Eventualmente individua le classi di equivalenza.

B.43. Sia S un insieme non vuoto in cui è definita una relazione $\mathfrak{R}$ riflessiva e transitiva; in S si definisca la relazione $\sharp$ ponendo, per ogni x, y appartenenti a X, $x\sharp y$ se e solo se $x\mathfrak{R}y$ e $y\mathfrak{R}x$. Verificare che $\sharp$ è relazione di equivalenza in X.

B.12 - Relazioni di ordine

B.44. Nell'insieme $M = \{1, 8, 3, 4, 10, 2, 7, 0, 5, 9, 6\}$ viene introdotta la relazione $\mathfrak{R}$ così definita: "$x\mathfrak{R}y$ se e solo se $y - x$ appartiene a $\mathbb{N}$". La relazione è riflessiva? La relazione è antisimmetrica? La relazione è transitiva? È vero che due elementi distinti sono sempre confrontabili?

B.45. È assegnata la relazione R nell'insieme T, rappresentata col grafo (figura B.20).

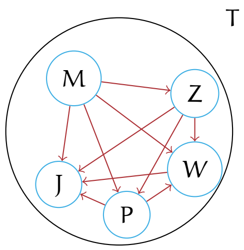


FIGURA B.20: Esercizio B.45.

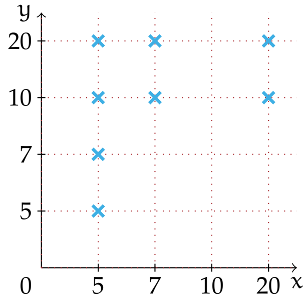


FIGURA B.21: Esercizio B.47.

Analizzando il grafo, rispondi alle domande:

- la relazione è riflessiva?
- la relazione è antisimmetrica?
- la relazione è transitiva?
- due elementi distinti sono sempre confrontabili?

Alla prima domanda avrai risposto negativamente: nessun elemento dell'insieme T è in relazione con se stesso, mentre valgono le proprietà antisimmetrica e transitiva. Infine scelti due elementi qualsiasi dell'insieme T, essi sono sempre confrontabili.

B.46. Verifica che la relazione $\mathfrak{R}$: "essere divisore" introdotta nell'insieme J ={3, 6, 10, 15, 21} è una relazione d'ordine parziale in senso largo.

B.47. Perché la relazione $\mathfrak{R}$ assegnata con il grafico cartesiano riportato nella figura B.21, pur essendo una relazione d'ordine non può essere classificata in nessuna delle tipologie studiate? Dai una breve motivazione indicando quali proprietà non sono soddisfatte dalla relazione rappresentata.

B.48. Nell'insieme degli studenti della tua classe determina le proprietà della relazione $\mathfrak{R}$: "$x\mathfrak{R}y$ se e solo se l'altezza di x non supera l'altezza di y". È una relazione d'ordine? Di quale tipo?

B.49. Nell'insieme $A = \{12, 4, 2, 8, 3, 21, 5, 60\}$ la relazione $\mathfrak{R}$: "essere divisibile" è una relazione d'ordine? Se lo è di che tipo di relazione si tratta? Totale, parziale, in senso largo, in senso stretto.

B.50. Nell'insieme $\mathbb{N} - \{0\}$ la relazione "essere divisibile" è d'ordine totale in senso largo?

B.51. Rappresenta nelle tre modalità studiate una relazione che sia solo simmetrica; ripeti le rappresentazioni per una relazione che sia almeno simmetrica. Quale significato hanno le due richieste formulate sopra?

B.52. L'insieme $G_{\mathfrak{R}}$ di una relazione introdotta nell'insieme $A = \{a, b, c, d, e\}$ è $G_{\mathfrak{R}} = \{(a, a); (a, b); (b, b); (d, d); (c, d); (d, e); (e, e)\}$. Quale delle seguenti affermazioni è vera

a) $\mathfrak{R}$ è una relazione antiriflessiva
b) $\mathfrak{R}$ è una relazione solo antisimmetrica
c) $\mathfrak{R}$ è una relazione riflessiva
d) $\mathfrak{R}$ è una relazione transitiva e antisimmetrica

B.53. La relazione $\mathfrak{R}$: "essere vicini di banco" inserita nell'insieme degli alunni della tua classe è una relazione d'equivalenza? È una relazione d'ordine?

B.54. I tre sottoinsiemi $A_1 = \{36, 135, 432\}$; $A_2 = \{65\}$; $A_3 = \{66, 3522, 93, 435\}$ dell'insieme $A = \{36, 65, 66, 93, 135, 432, 435, 3522\}$ costituiscono una partizione dell'insieme A? Sapresti trovare una caratteristica per gli elementi di ciascun sottoinsieme? A_1, A_2, A_3 sono classi d'equivalenza?

B.55. Nell'insieme $\mathbb{N}$ la relazione $\mathfrak{R}$: "$x\mathfrak{R}y$ se e solo se $x \cdot y$ è un numero dispari" è d'equivalenza?

B.56. La relazione $\mathfrak{R}$: "$x\mathfrak{R}y$ se e solo se x sta nella stessa nazione di y" nell'insieme $K = \{$Parigi, Madrid, Milano, Siviglia, Bari, Granata, Venezia, Lione$\}$ è d'equivalenza? Costruisci $A/\mathfrak{R}$.

B.57. Verifica se la relazione $\mathfrak{R}$ assegnata con la matrice rappresentata sotto è d'equivalenza, in caso positivo determina la partizione dell'insieme $A = \{\square, \Diamond, \infty, \nabla\}$ e l'insieme quoziente $A/\mathfrak{R}$.

	$\square$	$\Diamond$	∞	∇
$\square$	1	1	0	0
$\Diamond$	1	1	0	0
∞	0	0	1	1
∇	0	0	1	1

B.58. In un torneo di pallavolo gareggiano quattro squadre A, B, C, D; rappresenta con un grafo a frecce le seguenti informazioni, relative alle prime tre giornate:

- 1° giorno: A vince contro B; C vince contro D
- 2° giorno: D vince contro A; B vince contro C
- 3° giorno: A vince contro C; B vince contro D

Il 4° giorno si gioca la semifinale tra le prime due classificate e le altre due. Se per ogni vittoria si ottiene un punteggio di 10 punti e per ogni sconfitta un punteggio di 2 punti, quale squadra gioca la semifinale con B? Il torneo è vinto dalla squadra C. Rappresenta con un grafo a frecce la situazione della semifinale e quella della finale. È unica la risposta a quest'ultimo quesito?

B.59. Associa a ciascun grafo (figura B.22) la corretta relazione d'ordine:

a) d'ordine totale largo;
b) d'ordine totale stretto;
c) d'ordine parziale largo;
d) d'ordine parziale stretto.

B.60. Nell'insieme di tutti gli iscritti a Facebook determina le proprietà della relazione $\mathfrak{R}$: "$x\mathfrak{R}y$ se e solo se il numero di amici di x supera il numero di amici di y". È una relazione d'ordine? Di quale tipo?

B.61. Nell'insieme delle parole della lingua italiana verifica se la relazione "$x\mathfrak{R}y$ se e solo se x ha più lettere di y" è una relazione d'ordine. In caso affermativo dire se è totale o parziale, in senso largo o in senso stretto.

B.62. Nell'insieme dei numeri naturali, verifica se la relazione "$x\mathfrak{R}y$ se e solo se x ha un numero di cifre maggiore del numero di cifre di y" è una relazione d'ordine. In caso affermativo dire se è totale o parziale, in senso largo o in senso stretto.

B.63. Andrea, insegnante di grafica, ha chiesto ai suoi alunni di usare il minimo numero di colori per colorare il modello della figura B.23, in modo che poligoni confinanti non risultino con lo stesso colore. Come si può risolvere il problema? [Risposta: 3 colori]

Traccia di soluzione: Nell'insieme $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ studia la relazione $\mathfrak{R}$: "confinare con", rappresentandola con un grafico cartesiano e sfrutta i risultati trovati per risolvere il problema. La soluzione può essere trovata fissando un punto interno a ciascuna regione: due punti sono uniti se e solo se le regioni confinano, il segmento che li congiunge deve attraversare solo il loro confine comune; i punti che non sono congiunti indicano regioni che avranno lo stesso colore.

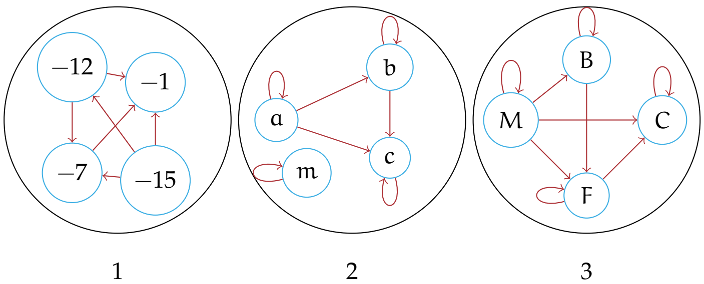


FIGURA B.22: Esercizio B.58.

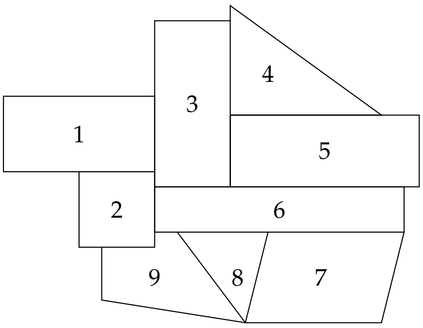


FIGURA B.23: Esercizio B.62.