3 Frazioni e numeri razionali

3.1 Premessa storica

Quando si deve dividere una certa grandezza o totalità in un certo numero di parti uguali non sempre sono sufficienti i numeri interi per rappresentare il risultato della divisione. Per esempio, per dividere l'unità in due parti uguali i numeri interi non sono sufficienti.

Gli antichi hanno affrontato questo tipo di problema utilizzando varie scritture per rappresentare le parti in cui dividere l'unità, ossia le frazioni.

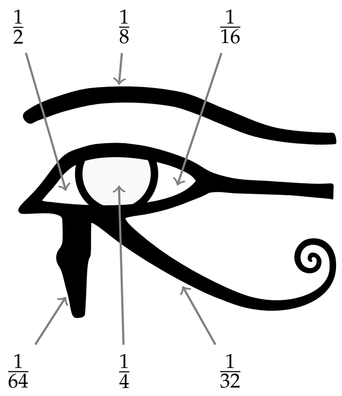
I Babilonesi scrivevano frazioni aventi come denominatore una potenza di 60, la base della loro numerazione; tuttavia non usavano una notazione specifica per le frazioni ed il valore corretto andava interpretato dal contesto.

Gli Egizi facevano largo uso dei numeri frazionari che rappresentavano come somme di frazioni unitarie, ossia frazioni con numeratore uno. La frazione unitaria $\frac{1}{n}$ (con n numero naturale diverso da zero) veniva rappresentata in forma geroglifica ponendo il denominatore n scritto con la normale rappresentazione del numero n sotto ad un ovale. La frazione $\frac{1}{12}$, per esempio, veniva così rappresentata:

Nel *papiro di Ahmes* (detto anche *papiro di Rhind*) troviamo una tabella che dà la scomposizione in frazioni unitarie delle frazioni del tipo $\frac{2}{n}$, con n dispari: la frazione $\frac{2}{43}$ è rappresentata come somma di frazioni unitarie nel seguente modo:

$$\frac{2}{43} = \frac{1}{42} + \frac{1}{86} + \frac{1}{129} + \frac{1}{301}.$$

Alcune unità frazionarie più comuni venivano indicate con le parti dell'occhio di Horus; secondo la leggenda Horus, nella lotta contro lo zio Seth, reo di avergli ucciso il padre, perse un occhio le cui parti vennero ritrovate e ricomposte dal dio Toth a meno di una piccola parte.



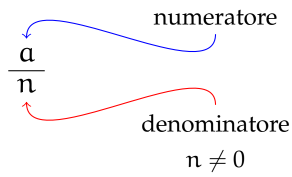
I Romani fecero poco uso dei numeri frazionari; si limitarono a considerare le parti delle misure in uso che venivano divise in 12, 24, 36, 48... Avevano pertanto simboli e nomi particolari per indicare alcune frazioni. *Semis* per indicare $\frac{1}{2}$, il cui simbolo era S oppure Z; *sextans* per indicare $\frac{1}{6}$, *dracma* per indicare $\frac{1}{96}$ e *obolus* per indicare la sesta parte della *dracma*.

Furono gli arabi a introdurre l'attuale scrittura delle frazioni e i termini *numeratore* e *denominatore*.

La notazione attuale per le frazioni si deve sostanzialmente agli arabi, in Europa fu diffusa da Leonardo Pisano (Fibonacci) che con il suo *Liber Abaci* (1202) scrive e opera con le frazioni come oggi le conosciamo.

3.2 Frazioni

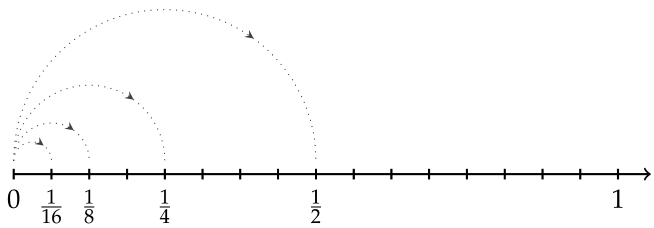
Definizione 3.1. Una *frazione* è una coppia ordinata di numeri naturali in cui il primo si chiama numeratore e il secondo denominatore. Il denominatore deve essere diverso da zero.



Quando si chiede, per esempio un quarto di litro di latte, $\frac{1}{4}$ l, si danno le informazioni su come operare sulla grandezza unitaria litro per ottenere la quantità desiderata. Le frazioni possono essere viste come operatori che si applicano a una grandezza fissata, considerata come l'intero o il tutto, per ottenere una nuova grandezza ben determinata e omogenea alla prima.

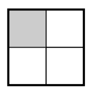
Una frazione con numeratore uguale a 1 è detta *frazione unitaria*; indicata con A una grandezza (segmento, peso, superficie, angolo...) la scrittura $\frac{1}{n}A$ sta ad indicare l'operazione di divisione della grandezza A, intesa come il 'tutto', in n parti uguali.

Nella figura, il segmento unitario da 0 a 1 è stato diviso in due parti uguali ottenendo la frazione $\frac{1}{2}$; dividendolo in quattro parti uguali si ottiene la frazione $\frac{1}{4}$; dividendolo in otto parti uguali si ottiene la frazione $\frac{1}{8}$; dividendolo in sedici parti uguali si ottiene la frazione $\frac{1}{16}$.



Definizione 3.2. Il *denominatore* di una frazione è quel numero che indica in quante parti uguali si è diviso l'intero. Poiché non ha senso dividere un intero in zero parti, il denominatore deve essere diverso da zero.

Vediamo un altro esempio. Il quadrato Q della figura è stato diviso in quattro parti uguali e una parte è stata colorata di grigio; questa parte viene indicata con la frazione unitaria $\frac{1}{4}Q$.



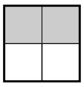
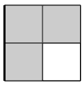
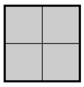
Una frazione $\frac{1}{n}A$ significa l'ennesima parte di A, dove A è il tutto che si deve dividere in n parti uguali. In altre parole, A si può ottenere moltiplicando per n la frazione $\frac{1}{n}A$.

Partendo da $\frac{1}{n}A$ si possono considerare i suoi multipli interi:

$$\frac{2}{n}A, \frac{3}{n}A, \dots, \frac{n}{n}A$$

che rappresentano il doppio di un ennesimo, il triplo di un ennesimo, l'intera grandezza A.

Riferendoci all'esempio del quadrato:

 $\frac{2}{4}Q$  $\frac{3}{4}Q$  $\frac{4}{4}Q$

La frazione $\frac{m}{n}A$ (si legge *emme ennesimi di* A) con $m < n$ indica il multiplo secondo m della frazione unitaria $\frac{1}{n}A$; essa indica la grandezza che si ottiene dividendo A in n parti uguali e prendendone m.

Definizione 3.3. Il *numeratore* di una frazione è quel numero che esprime quante parti, dell'intero suddiviso in parti secondo il denominatore, sono state prese.

Per leggere una frazione si legge prima il numeratore e poi il denominatore. Quest'ultimo si legge come numero ordinale (terzo, quarto, quinto,...) fino a 10 e se è maggiore di dieci si aggiunge la terminazione *-esimo*.

Esempio 3.1. Lettura di frazioni.

a) $\frac{1}{2}$ si legge *un mezzo*;
b) $\frac{1}{10}$ si legge *un decimo*;
c) $\frac{2}{3}$, si legge *due terzi*;
d) $\frac{1}{11}$ si legge *un undicesimo*;
e) $\frac{5}{7}$ si legge *cinque settimi*;
f) $\frac{1}{12}$ si legge *un dodicesimo*.

A volte per scrivere le frazioni si utilizza la scrittura del tipo a/b, quindi $2/3$; $4/6$; $6/9$...

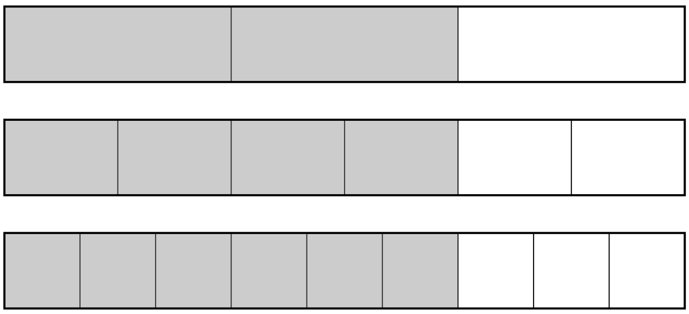
Definizione 3.4. Si chiamano *proprie* le frazioni che hanno il numeratore minore del denominatore. Esse rappresentano sempre una grandezza minore dell'intero.

Vi sono frazioni che pur essendo formate da numeratori e denominatori diversi rappresentano la stessa parte dell'intero.

$\frac{2}{3}$

$\frac{4}{6}$

$\frac{6}{9}$



✍ *Esercizi proposti:* 3.1, 3.2, 3.3, 3.4

Definizione 3.5. Si dicono *equivalenti* due frazioni che rappresentano la stessa parte dell'intero.

Proprietà 3.1 (Invariantiva delle frazioni)**.** *Se si moltiplica, o si divide, numeratore e denominatore di una stessa frazione per uno stesso numero diverso da zero si ottiene una frazione equivalente alla frazione data.*

Per trovare una frazione equivalente a una frazione assegnata è sufficiente moltiplicare per uno stesso numero il numeratore e il denominatore della frazione assegnata.

Esempio 3.2. Trovare due frazioni equivalenti a $\frac{4}{7}$.

Moltiplicando numeratore e denominatore per 2 si ha la frazione equivalente:

$$\frac{4 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{8}{14}.$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per 3 si ha la frazione equivalente:

$$\frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{12}{21}.$$

Definizione 3.6. Una frazione si dice *ridotta ai minimi termini* se il numeratore e il denominatore sono due interi primi tra loro.

Per ridurre ai minimi termini una frazione occorre dividere numeratore e denominatore per il loro Massimo Comune Divisore.

Esempio 3.3. Ridurre ai minimi termini la frazione $\frac{8}{12}$.

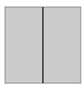
Scompongo in fattori 8 e 12, ottengo $8 = 2^3$ e $12 = 3 \cdot 2^2$. Calcolo il MCD prendendo i fattori comuni con l'esponente più piccolo; in questo caso 2^2 cioè 4. Divido numeratore e denominatore per 4:

$$\frac{8}{12} = \frac{8:4}{12:4} = \frac{2}{3}.$$

Tutte le frazioni che hanno il denominatore (numero di parti in cui va divisa l'unità) uguale al numeratore (numero delle parti che vanno considerate) rappresentano l'intero:

$$\frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{10}{10} = 1.$$

Per esempio, se divido un quadrato in due parti uguali e ne prendo due parti ottengo l'intero; se divido un quadrato in tre parti uguali e ne prendo tre parti ottengo l'intero,...



$\frac{2}{2} = 1$

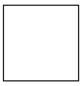
$\frac{3}{3} = 1$

Cosa significa costruire la grandezza $\frac{6}{2}$ del quadrato Q? Tutte le frazioni che hanno il numeratore che è multiplo del denominatore rappresentano un multiplo dell'intero:

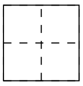
$$\frac{6}{2} = 3, \qquad \frac{15}{3} = 5, \qquad \frac{72}{6} = 12.$$

Definizione 3.7. Si chiamano *apparenti* le frazioni che hanno il numeratore multiplo del denominatore; esse rappresentano una grandezza multipla di quella presa come intero unitario.

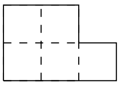
Le frazioni che hanno il numeratore maggiore del denominatore rappresentano grandezze più grandi dell'intero. Infatti le parti da considerare (indicate dal numeratore) sono di più delle parti in cui è divisa l'unità (indicate dal denominatore).



I $\frac{5}{4}$ si ottengono dividendo il quadrato in 4 parti uguali;



dovendone prenderne 5 l'unità non basta.



La grandezza ottenuta è formata da $\frac{4}{4}$ con l'aggiunta di $\frac{1}{4}$. Cioè

$$\frac{5}{4} = \frac{4}{4} + \frac{1}{4}.$$

Definizione 3.8. Si chiamano *improprie* le frazioni che hanno il numeratore maggiore del denominatore; esse rappresentano una grandezza maggiore della grandezza assegnata come intero.

✍ *Esercizi proposti:* 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11, 3.12, 3.13, 3.14, 3.15, 3.16

3.3 Dalle frazioni ai numeri razionali

Abbiamo visto che ci sono delle frazioni che, pur essendo diverse tra di loro, rappresentano la stessa parte dell'intero: queste frazioni vengono chiamate *frazioni equivalenti*. Possiamo formare dei raggruppamenti di frazioni tra loro equivalenti, come nella figura 3.3.

Definizione 3.9. Ogni raggruppamento di frazioni equivalenti è definito come un *numero razionale assoluto* ed è rappresentato da una qualunque frazione del raggruppamento; solitamente si sceglie la frazione ridotta ai minimi termini.

Nel nostro esempio $\frac{2}{3}$ è il numero razionale rappresentante del raggruppamento

$$\frac{2}{3} = \left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{10}{15}, \frac{14}{21}, \dots\right\}.$$

In questo modo abbiamo dato al simbolo a/b un nuovo significato, quello di numero e come tale la scrittura a/b rappresenta il quoziente indicato tra i due numeri naturali a e b. Scriveremo $2 : 3 = 2/3$.

Definizione 3.10. Un numero razionale assoluto preceduto dal segno è detto *numero razionale*. L'insieme dei numeri razionali relativi si indica con il simbolo $\mathbb{Q}$.

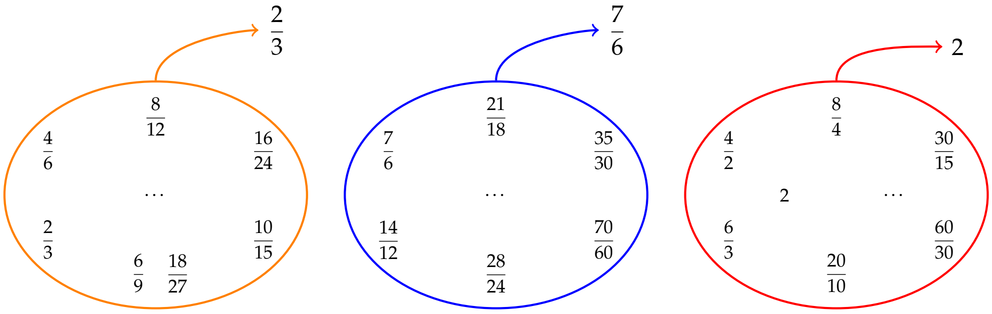


FIGURA 3.1: Esempi di frazioni equivalenti.

Il segno del numero razionale relativo è quello che si ottiene dalla regola della divisione dei segni tra numeratore e denominatore.

Esempio 3.4. Segno di numeri razionali.

$$\frac{-2}{-3} = +\frac{2}{3}; \qquad \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}; \qquad \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Le frazioni proprie, che hanno numeratore minore del denominatore, rappresentano sempre un numero compreso tra 0 e 1.

Le frazioni improprie, che hanno numeratore maggiore del denominatore, si possono scrivere come somma di un numero naturale e di una frazione propria:

- il numero naturale è il risultato della divisione intera tra numeratore e denominatore;
- il numeratore della frazione propria è il resto della divisione tra numeratore e denominatore;
- il denominatore della frazione propria è il denominatore stesso della frazione.

Le frazioni apparenti, del tipo $\frac{2}{2}, \frac{6}{3}, \frac{20}{5}, \frac{12}{4}, \frac{12}{3}, \ldots$ corrispondono a un numero intero, rispettivamente a 1, 2, 4, 3, 4.

Esempio 3.5. $\dfrac{11}{3} = 3 + \dfrac{2}{3}$.

- $11 \div 3 =$ 3 il numero naturale;
- $11 \bmod 3 =$ 2 numeratore della frazione propria;
- $3 =$ denominatore della frazione propria.

Esempio 3.6. $\dfrac{19}{7} = 2 + \dfrac{5}{7}$.

- $19 \div 7 =$ 2 il numero naturale;
- $19 \bmod 7 =$ 2 numeratore della frazione propria;
- $5 =$ denominatore della frazione propria.

✍ *Esercizi proposti:* 3.17, 3.18

3.4 La scrittura dei numeri razionali

I numeri razionali, rappresentati finora come frazioni, possono essere scritti come numeri decimali: basta fare la divisione tra numeratore e denominatore, il quoziente ottenuto è la rappresentazione della frazione sotto forma decimale.

```
1         | 3                         1 1         | 8
1 0         0 , 3 3 3 3 ...               3         1 , 3 7 5
  1 0                                     3 0
    1 0                                     6 0
      1 0                                     4 0
        ...                                     0
```

$\frac{1}{3} = 0,3333\ldots$ $\frac{11}{8} = 1,375$

I numeri decimali che si ottengono sono di due tipi: numeri decimali finiti come $1,375$ e numeri decimali periodici come $1,333333\ldots$; quest'ultimo si scrive mettendo una barra sulla parte periodica: $1,\overline{3}$ oppure racchiudendo la parte periodica tra parentesi tonde $1,(3)$.

I numeri decimali finiti si ottengono dalle frazioni il cui denominatore ha come fattori solo il 2, solo il 5 o entrambi, eventualmente elevati a una potenza.

I numeri decimali periodici semplici si ottengono dalle frazioni il cui denominatore non ha per fattori né 2 né 5.

I numeri decimali periodici misti si ottengono dalle frazioni il cui denominatore contiene altri fattori oltre al 2 e al 5.

Esempio 3.7. Alcuni numeri decimali finiti.

a) $\frac{11}{8} = \frac{11}{2^3} = \frac{11 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{1375}{1000} = 1,375$;
b) $\frac{7}{25} = \frac{7}{5^2} = \frac{7 \cdot 2^2}{5^2 \cdot 2^2} = \frac{28}{100} = 0,28$;
c) $\frac{13}{40} = \frac{13}{2^3 \cdot 5} = \frac{13 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{325}{1000} = 0,325$;
d) $\frac{50}{7} = \frac{\ldots}{10}$, non è possibile, non è un decimale finito.

✍ *Esercizio proposto:* 3.19

Procedura 3.2. *Trasformare una frazione in numero decimale:*

a) eseguire la divisione tra numeratore e denominatore;
b) se la divisione ha un resto mettere la virgola al quoziente e moltiplicare per 10 il resto;
c) continuare la divisione finché il resto è zero oppure fino a che non si trova un resto già trovato prima;
d) se la divisione si conclude con resto 0 si ottiene un numero decimale finito;
e) se la divisione si conclude perché si è ritrovato un resto ottenuto in precedenza si ottiene un numero decimale periodico.

Esempio 3.8. Trasformazione di frazioni in numeri decimali.

a)

$$\begin{array}{r|l} 113 & 20 \\ \cline{2-2} -100 & 5{,}65 \\ \hline 130 & \\ -120 & \\ \hline 100 & \\ -100 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r|l} 17 & 6 \\ \cline{2-2} -12 & 2{,}83 \\ \hline 50 & \\ -48 & \\ \hline 20 & \\ -18 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r|l} 15 & 7 \\ \cline{2-2} -14 & 2{,}142857 \\ \hline 10 & \\ -7 & \\ \hline 30 & \\ -28 & \\ \hline 20 & \\ -14 & \\ \hline 60 & \\ -56 & \\ \hline 40 & \\ -35 & \\ \hline 50 & \\ -49 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

a) $\dfrac{113}{20} = 5,65$, numero decimale finito;

b) $\dfrac{17}{6} = 2,8\overline{3}$, numero decimale periodico misto di periodo 3;

c) $\dfrac{15}{7} = 2,\overline{142857}$, numero decimale periodico di periodo 142857.

✍ *Esercizio proposto:* 3.20, 3.21

Viceversa un numero decimale finito o periodico può essere sempre scritto sotto forma di frazione.

Procedura 3.3. *Trasformare un numero decimale finito in una frazione:*

a) contare le cifre significative dopo la virgola;

b) moltiplicare numeratore e denominatore per la potenza del 10 che ha esponente uguale al numero delle cifre significative dopo la virgola.

Per facilitare questa operazione possiamo considerare i numeri decimali finiti come frazioni particolari che hanno il numeratore uguale al numero decimale e il denominatore uguale a 1.

1,360 ha due cifre significative dopo la virgola:

$$\frac{1,36}{1} = \frac{1,36 \cdot 10^2}{1 \cdot 10^2} = \frac{136}{100} = \frac{34}{25}.$$

0,00043000 ha cinque cifre significative dopo la virgola:

$$\frac{0,00043}{1} = \frac{0,00043 \cdot 10^5}{1 \cdot 10^5} = \frac{43}{100000}.$$

Un numero decimale periodico, generalmente, presenta tre elementi:

la parte intera composta dalle cifre poste prima della virgola;

il periodo che è composto da una o più cifre che si ripetono all'infinito dopo la virgola;

l'antiperiodo la parte, talvolta assente, composta da una o più cifre poste tra la virgola e il periodo.

Per esempio, nel numero 253,485795795795795... la parte intera è 253, il periodo è 579, l'antiperiodo è 48.

Dato che il numero è infinito non può essere scritto con tutte le sue cifre, si usano due modi per scriverlo in forma compatta, mettendo una lineetta sopra le cifre del periodo o racchiudendo le cifre del periodo tra parentesi tonde.

Il numero 253,485795795795795... può essere scritto $253,48\overline{579}$, oppure $253,48(579)$.

I numeri decimali periodici si dividono in:

semplici se subito dopo la virgola è presente il periodo;

misti se dopo la virgola è presente l'antiperiodo.

Anche i numeri periodici possono essere trasformati in una frazione, che si dice *frazione generatrice* del numero.

Procedura 3.4. *Determinare la frazione generatrice di un numero periodico:*

a) *scrivere il numero senza la virgola;*
b) *il numeratore della frazione si ottiene sottraendo dal numero senza la virgola il numero costituito dalle cifre che precedono il periodo;*
c) *il denominatore della frazione si ottiene scrivendo tanti* 9 *quante sono le cifre del periodo e tanti* 0 *quante sono le eventuali cifre dell'antiperiodo.*

Passo a $2,5\overline{12} \to 2512.$

Passo b $2512 - 25 = 2487.$

Passo c $2,5\overline{12} = \dfrac{2487}{990}.$

Ma perché questa regola? Una possibile spiegazione Consideriamo il numero periodico semplice $2,\overline{3}$. Considero la frazione $\frac{2,\overline{3}}{1}$ moltiplico numeratore e denominatore per 10 $\frac{2,\overline{3}\cdot 10}{1\cdot 10}$ e ottengo $\frac{23,\overline{3}}{10}$.

L'obiettivo è quello di eliminare dal numeratore della frazione la parte decimale. Per ottenere questo risultato tolgo $2,\overline{3}$ da $23,\overline{3}$, cioè $23,\overline{3} - 2,\overline{3} = 21$.

Come mai $2,\overline{3}$ e non $1,\overline{3}$ o $0,\overline{3}$? Perché in questo modo posso sapere quanto vale il denominatore: se $23,\overline{3}$ è il risultato della moltiplicazione di $2,\overline{3} \cdot 10$, 21 è il risultato della moltiplicazione di $2,\overline{3} \cdot 9$ in quanto $23,\overline{3} - 2,\overline{3} = 21$. In definitiva

$$2,\overline{3} = \frac{23-2}{9} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}.$$

Possiamo usare lo stesso procedimento per il numero periodico misto $2,5\overline{12}$.

Considero la frazione $\frac{2{,}5\overline{12}}{1}$, moltiplico numeratore e denominatore per 1000 e ottengo: $\frac{2512{,}\overline{12}}{1000}$. L'obiettivo è quello di eliminare dal numeratore della frazione la parte decimale che contiene il periodo che si ripete all'infinito. Per ottenere questo risultato tolgo da $2512,\overline{12}$ questa volta $25,\overline{12}$, cioè $2512,\overline{12} - 25,\overline{12} = 2487$. Per avere una frazione equivalente occorre che al denominatore abbia 990 in quanto dal numeratore ho tolto 10 volte $2,5\overline{12}$.

$$2,5\overline{12} = \frac{2512 - 25}{990} = \frac{2487}{990}.$$

✍ *Esercizi proposti:* 3.22, 3.23

3.4.1 Numeri periodici particolari

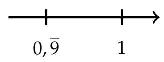
Numeri periodici particolari sono quelli che hanno come periodo il numero 9, come $2,\overline{9}$, $1,1\overline{9}$, $21,22\overline{9}$ ecc. Se, per esempio, applichiamo la regola per il calcolo della frazione generatrice al numero periodico otteniamo un risultato inatteso

$$2,\overline{9} = \frac{29 - 2}{9} = \frac{27}{9} = 3.$$

Quindi $2,\overline{9}$ coincide con il numero intero 3.

Per lo stesso motivo $1,1\overline{9} = 2$, $21,22\overline{9} = 21,23$.

Questo fatto si può anche dimostrare in modo grafico, rappresentando, ad esempio, il numero $0,\overline{9}$ e il numero 1 sulla retta reale.



Se i due numeri fossero veramente diversi sarebbero rappresentati da due punti distinti come in figura. Dato che la retta reale non può avere "buchi", tra un suo punto e un altro ci deve essere almeno un altro numero compreso tra i due. Ma qual è questo numero? Qualunque numero decimale minore di 1 è sicuramente superato dal numero $0,\overline{9}$, ad esempio 0,9999999998 è sicuramente più piccolo di $0,\overline{9}$. Quindi non esiste nessun numero tra $0,\overline{9}$ e 1, di conseguenza i due numeri coincidono.

✍ *Esercizi proposti:* 3.24, 3.25

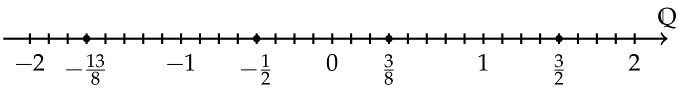
3.5 I numeri razionali e la retta

Anche i numeri razionali si possono rappresentare su una retta orientata. Per fare questo occorre scegliere un punto O sulla retta e associare ad esso il numero zero. Fissiamo poi un segmento unitario e scegliamo un verso di percorrenza.

Dato un numero razionale positivo, rappresentato dalla frazione $\frac{a}{n}$, il punto corrispondente al numero razionale sulla retta viene determinato nel seguente modo. Dividiamo il segmento unitario u in tante parti uguali quante sono quelle indicate dal denominatore n della frazione, ottenendo così la frazione unitaria $\frac{1}{n}$. A partire dal punto O procedendo verso destra, si contano a frazioni unitarie. L'ultimo punto rappresenta il numero razionale $\frac{a}{n}$.

Per le frazioni improprie la singola unità u non è sufficiente, occorre prendere la unità successiva di u e dividere anche questa in n parti. Il procedimento si ripete fino a che si considerano tutte le frazioni unitarie indicate da a. Anche in questo caso, il punto individuato dall'ultima frazione unitaria rappresenta il numero razionale $\frac{a}{n}$. In alternativa si può scomporre la frazione impropria nella somma di un numero intero e di una frazione propria, quindi si rappresenta la frazione impropria a partire dal suo numero intero invece che partire da 0. Per esempio, per rappresentare la frazione $\frac{3}{2}$ trasformiamo la frazione in $1 + \frac{1}{2}$, quindi rappresentiamo partendo dal numero 1 invece che da 0.

Se il numero razionale è negativo, ci comportiamo come prima con l'avvertenza di muoverci nel senso opposto a quello precedente cioè da destra verso sinistra.



✍ *Esercizi proposti:* 3.26, 3.27, 3.28

3.6 Confronto tra numeri razionali

Il numero razionale rappresentato dalla frazione $\frac{a}{n}$ è *minore* del numero razionale rappresentato dalla frazione $\frac{b}{m}$, se nella retta orientata il punto che corrisponde alla frazione $\frac{a}{n}$ precede il punto che corrisponde alla frazione $\frac{b}{m}$ e si scrive

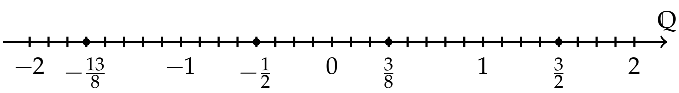
$$\frac{a}{n} < \frac{b}{m}.$$

Il numero razionale $\frac{a}{n}$ è *maggiore* di $\frac{b}{m}$, se nella retta orientata il punto che corrisponde alla frazione $\frac{a}{n}$ segue il punto che corrisponde alla frazione $\frac{b}{m}$ e si scrive

$$\frac{a}{n} > \frac{b}{m}.$$

Il numero razionale $\frac{a}{n}$ è *equivalente* a $\frac{b}{m}$ se nella retta orientata i punti che corrispondono alle frazioni $\frac{a}{n}$ e $\frac{b}{m}$ coincidono.

Esempio 3.9. Confronto tra numeri razionali.



$$-\frac{13}{8} < -\frac{1}{2}, \qquad \frac{3}{8} > -\frac{1}{2}, \qquad \frac{3}{8} < \frac{3}{2}, \qquad -1 > -\frac{13}{8}.$$

Per certe frazioni è facile vedere se una frazione precede o segue un'altra. Per altre non è così semplice.

Consideriamo per esempio le frazioni $\frac{7}{9}$ e $\frac{6}{7}$. Quale frazione precede e quale segue? Il confronto non è immediato perché con la prima frazione si conta per unità frazionarie di tipo $\frac{1}{9}$, con la seconda per unità frazionarie di tipo $\frac{1}{7}$.

In generale, senza ricorrere alla rappresentazione sulla retta, come si possono confrontare i numeri razionali?

Conviene sostituire le frazioni date con altre equivalenti che hanno unità frazionarie dello stesso tipo: cioè occorre ridurre le frazioni allo stesso denominatore.

Procedura 3.5. *Confrontare due frazioni:*

a) *si calcola il minimo comune multiplo dei denominatori delle frazioni;*
b) *si trasforma ciascuna frazione come segue:*
il nuovo denominatore è il mcm *trovato;*
il nuovo numeratore si ottiene dividendo il mcm *per il denominatore della frazione data e moltiplicando il quoziente ottenuto per il numeratore della frazione data.*
c) *si confrontano i nuovi numeratori: la frazione più grande è quella che ha il numeratore più grande.*

Un altro modo per confrontare due frazioni consiste nel *moltiplicare in croce* numeratori e denominatori delle frazioni, come nei seguenti esempi.

Esempio 3.10. Confronta $\frac{3}{2}$ con $\frac{5}{3}$.
Moltiplichiamo il numeratore della prima frazione con il denominatore della seconda frazione e il denominatore della prima frazione per il denominatore della seconda, così:

$$\frac{3}{2} < \frac{5}{3}, \text{ perché } 3 \cdot 3 < 2 \cdot 5.$$

Esempio 3.11. Confronta le frazioni $\frac{7}{9}$ e $\frac{6}{7}$.
$\mathrm{mcm}(7.9) = 63$.

$$\frac{7}{9} = \frac{7 \cdot 7}{9 \cdot 7} = \frac{49}{63}, \qquad \frac{6}{7} = \frac{6 \cdot 9}{7 \cdot 9} = \frac{54}{63}.$$
$$\frac{54}{63} > \frac{49}{63} \Rightarrow \frac{6}{7} > \frac{7}{9}.$$

✍ *Esercizi proposti:* 3.29, 3.30, 3.31, 3.32, 3.33, 3.34, 3.35, 3.36, 3.37, 3.38,3.39, 3.40, 3.41, 3.42, 3.43

3.7 Le operazioni con i numeri razionali

Con i numeri razionali è sempre possibile eseguire le addizioni, le moltiplicazioni, le sottrazioni e le divisioni. In altre parole, poiché un numero razionale può essere scritto sotto forma di frazione, se si addizionano, si moltiplicano, si sottraggono, si dividono due frazioni il risultato è sempre una frazione.

3.7.1 Addizione

Se due frazioni hanno la stessa unità frazionaria allora è sufficiente sommare i numeratori delle frazioni e prendere come denominatore l'unità frazionaria comune.

$$\frac{5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5+2}{3} = \frac{7}{3}.$$

Definizione 3.11. La *somma di due frazioni con lo stesso denominatore* è una frazione che ha per denominatore lo stesso denominatore delle frazioni date e per numeratore la somma dei numeratori.

Se le unità frazionarie sono diverse dobbiamo considerare frazioni equivalenti a quelle date che abbiano la stessa unità frazionaria e poi eseguire l'addizione come indicato nel punto precedente e cioè sommando i numeratori e lasciando lo stesso denominatore comune.

$$\begin{array}{l} \frac{5}{3}=\frac{25}{15} \\[1ex] \frac{2}{3}=\frac{6}{15} \end{array} \rightarrow \boxed{+} \longrightarrow \frac{31}{15}$$

In generale data l'addizione di due frazioni $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$ la somma si può scrivere come

$$\frac{mq+pn}{nq}.$$

$$\begin{array}{l} \frac{m}{n}=\frac{mq}{nq} \\[1ex] \frac{p}{q}=\frac{pn}{nq} \end{array} \rightarrow \boxed{+} \longrightarrow \frac{mq+pn}{nq}$$

Quando si sommano due frazioni si può scegliere un qualsiasi denominatore comune, tuttavia per semplificare i calcoli conviene scegliere il più piccolo possibile, cioè il minimo comune multiplo dei denominatori delle frazioni da sommare.

Procedura 3.6. *Sommare due o più frazioni:*

a) ridurre le frazioni ai minimi termini;
b) calcolare il mcm *dei denominatori;*
c) mettere il mcm *come denominatore della frazione somma;*
d) per ogni frazione dividere il mcm *per il suo denominatore e moltiplicare il risultato per il numeratore della frazione mantenendo il segno;*
e) calcolare la somma algebrica di tutti i numeri trovati;
f) mettere la somma ottenuta come numeratore della frazione somma;
g) ridurre ai minimi termini la frazione ottenuta.

Esempio 3.12. Sommare le frazioni $\frac{8}{12}-\frac{5}{6}+\frac{8}{5}-1$.

Passo a riduco ai minimi termini le frazioni $\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{6}+\dfrac{8}{5}-\dfrac{1}{1}$

Passo b calcolo $\text{mcm}(3,6,5,1)=30$.

Passo c la frazione somma avrà come denominatore il mcm trovato $\dfrac{\dots}{30}$.

Passo d per ogni frazione divido il mcm per il suo denominatore e moltiplico il risultato per il numeratore:

$$\begin{aligned}\frac{2\cdot(30:3)-5\cdot(30:6)+8\cdot(30:5)-1\cdot(30:1)}{30} &= \frac{2\cdot10-5\cdot5+8\cdot6-1\cdot30}{30}\\ &= \frac{20-25+48-30}{30}.\end{aligned}$$

Passo e calcolo la somma algebrica dei numeri ottenuti al numeratore $+13$.

Passo f metto la somma ottenuta al numeratore della frazione somma $+\frac{13}{30}$.

Passo g vedo se posso ridurre la frazione, in questo caso no, il risultato è $+\frac{13}{30}$.

Esempio 3.13. Sommare i numeri razionali $-0,2-1,\overline{2}+25\%+\frac{7}{12}$.
Trasformo i numeri razionali in frazioni:

$$-\frac{2}{10}-\frac{12-1}{9}+\frac{25}{100}+\frac{7}{12}=-\frac{1}{5}-\frac{11}{9}+\frac{1}{4}+\frac{7}{12}.$$

Quindi $\text{mcm}(5,9,4,12)=180$.

$$\begin{aligned}\frac{-1\cdot(180:5)-11\cdot(180:9)+1\cdot(180:4)+7\cdot(180:12)}{180} &= \frac{-1\cdot36-11\cdot20+1\cdot45+7\cdot15}{180}\\ &= \frac{-36-220+45+105}{180}\\ &= -\frac{106}{180}\\ &= -\frac{53}{90}.\end{aligned}$$

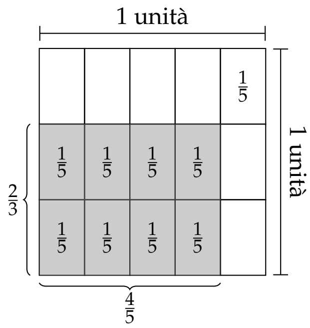
3.7.2 Sottrazione di frazioni

La sottrazione di frazioni si può sempre trasformare in una addizione tra la prima frazione e l'opposto della seconda frazione. Come per i numeri relativi, quando si parla di somma di frazioni si intende sempre somma algebrica di frazioni.

✍ *Esercizi proposti:* 3.44, 3.45, 3.46, 3.47

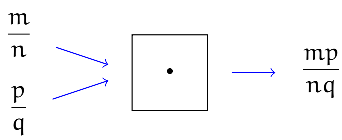
3.7.3 Moltiplicazione

Il risultato della moltiplicazione tra frazioni può essere interpretato come l'area di un rettangolo in cui le frazioni fattori sono la base e l'altezza.



Moltiplicare $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}$ è come calcolare l'area del rettangolo di base $\frac{4}{5}$ e altezza $\frac{2}{3}$. Ogni rettangolino di base $\frac{1}{5}$ e altezza $\frac{1}{3}$ ha area $\frac{1}{15}$. I rettangolini da prendere in considerazione sono 8. Il risultato è quindi $\frac{8}{15}$. Il denominatore indica in quante parti è stato diviso il quadrato unitario: sono $3 \cdot 5 = 15$ parti. Il numeratore indica quante parti prendiamo, sono le parti $2 \cdot 4 = 8$ in grigio.

Il prodotto di due frazioni è una frazione che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.



✍ *Esercizi proposti:* 3.48, 3.49, 3.50, 3.51

3.7.4 Operazione inversa e aritmetica dell'orologio

La divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione. Ma cosa significa operazione inversa? Una operazione può essere interpretata come qualsiasi azione che provoca un cambiamento di stato.

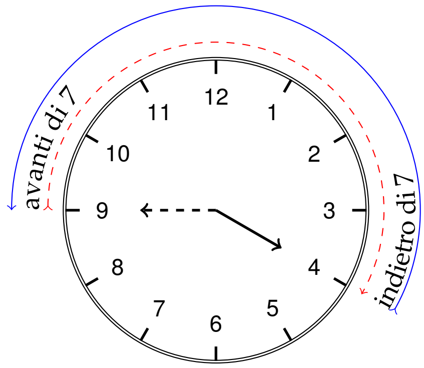
Consideriamo come esempio l'addizione nell'orologio che segna le ore dodici $(12 = 0)$. Addizionare significa spostare le lancette in avanti di un determinato numero di ore. Si riporta la tabella dell'addizione dell'orologio.

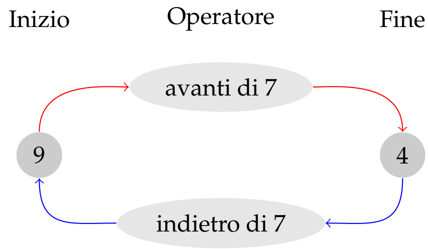
Consideriamo l'addizione $9 + 7 = 4$. Il primo elemento 9 può essere interpretato come stato iniziale, $+7$ come operatore formato dall'operazione «spostare le lancette avanti di...» e dall'argomento 7; il risultato 4 è lo stato finale.

Si indica come operazione inversa quella operazione che applicata allo stato finale con argomento uguale a quello precedente dell'operazione diretta, riporta allo stato iniziale.

Notiamo che anche nella matematica dell'orologio l'addizione gode della proprietà commutativa e associativa, ha l'elemento neutro che è 0, ogni numero ha l'inverso.

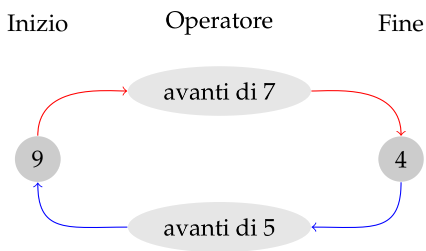
+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

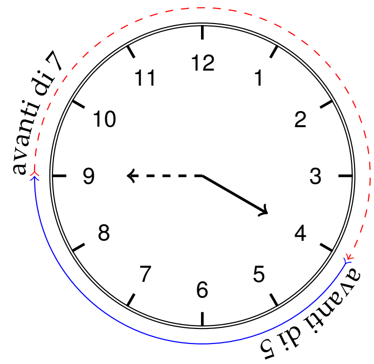




- L'inverso di 0 è 0 perché $0+0=0$;
- l'inverso di 1 è 11 perché $1+11=0$;
- l'inverso di 2 è 10 perché $2+10=0$;
- l'inverso di 3 è 9 perché $3+9=0$;
- l'inverso di 4 è 8 perché $4+8=0$;
- l'inverso di 5 è 7 perché $5+7=0$.

L'elemento inverso è molto importante in quanto ci permette di sostituire l'operazione inversa, con l'operazione diretta che ha come argomento l'elemento inverso dell'argomento dell'operazione diretta.

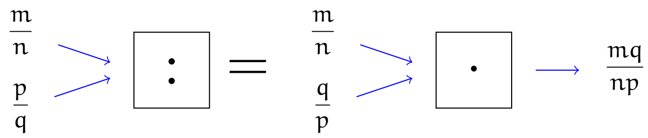




Così per tornare allo stato iniziale invece di operare con portare indietro le lancette di 7, otteniamo lo stesso risultato portando avanti le lancette di 5 che è appunto l'inverso di 7.

3.7.5 Divisione

La divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione. Dato che nell'insieme dei numeri razionali esiste sempre l'inverso di una frazione rispetto alla moltiplicazione, esclusa la frazione zero, si può sempre eseguire la divisione di due qualsiasi frazioni.



$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} = \frac{mq}{np}.$$

Il quoziente di due frazioni è la frazione che si ottiene moltiplicando la prima frazione per l'inverso della seconda frazione.

Esempio 3.14. Quoziente di due frazioni.

➡ $\frac{2}{3} : \frac{7}{4}$.

Il reciproco di $\frac{7}{4}$ è $\frac{4}{7}$. Pertanto

$$\frac{2}{3} : \frac{7}{4} \to \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{21}.$$

➡ $-\frac{2}{3} : \left(-\frac{3}{4}\right)$.

Il reciproco di $-\frac{3}{4}$ è $-\frac{4}{3}$. Pertanto

$$-\frac{2}{3} : \left(-\frac{3}{4}\right) \to -\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = +\frac{8}{9}.$$

➡ $\frac{2}{3} : 0$.

Il reciproco di 0 non esiste, quindi la divisione non è eseguibile.

➡ $0 : \frac{2}{3}$.

Il reciproco di $\frac{2}{3}$ è $\frac{3}{2}$. Pertanto

$$0 : \frac{2}{3} \to 0 \cdot \frac{3}{2} = 0.$$

✍ *Esercizi proposti:* 3.52, 3.53, 3.54, 3.55

3.8 Potenza di una frazione

Come per ogni numero, anche per le frazioni, la potenza di una frazione non è altro che un prodotto di tante frazioni identiche alla frazione data quanto è il valore dell'esponente, pertanto si trova elevando il numeratore e il denominatore della frazione all'esponente della potenza.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ volte}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Esempio 3.15. Potenza di frazioni.

- $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}$;
- $-\frac{2^3}{3} = -\frac{8}{3}$;
- $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = +\frac{4}{9}$.

3.8.1 Potenza con esponente uguale a zero

La definizione di potenza si estende anche al caso in cui l'esponente è zero.

Consideriamo l'esempio della divisione di due potenze con la stessa base e con lo stesso esponente:

- $a^n : a^n = 1$, la divisione di due numeri uguali è 1;
- $a^n : a^n = a^0$, applicando le proprietà delle potenze.

Possiamo allora concludere che per ogni frazione o numero razionale a diverso da zero $a^0 = 1$. Non è invece possibile la potenza 0^0.

3.8.2 Potenza con esponente un numero intero negativo

La definizione di potenza si può estendere anche al caso in cui l'esponente sia uguale a un numero intero negativo:

$$a^{-n} = a^0 : a^n = 1 : a^n = \frac{1}{a^n} = \frac{1^n}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n.$$

Si può definire allora per ogni numero razionale diverso da zero

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n.$$

La potenza di un numero diverso da zero elevato a un esponente intero negativo è uguale a una potenza che ha per base il reciproco della base rispetto alla moltiplicazione e per esponente l'opposto dell'esponente rispetto all'addizione.

Non è definita invece la potenza con esponente negativo di 0. Il numero 0 infatti non ha il reciproco. Pertanto, 0^{-n} è una scrittura priva di significato.

✍ *Esercizi proposti:* 3.56, 3.57, 3.58, 3.59, 3.60

3.9 Notazione scientifica e ordine di grandezza

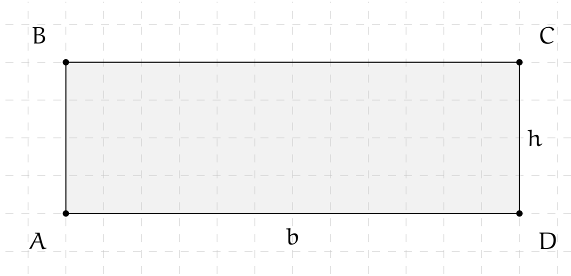
Le discipline scientifiche quali la fisica, la biologia, l'astronomia etc, si trovano spesso a doversi confrontare con misurazioni di grandezze espresse da numeri molto grandi. Per esempio:

- il raggio della Terra è circa 6 400 000 m;
- la velocità della luce nel vuoto è 299 790 000 m/s;
- un globulo rosso ha il diametro di 0,000007 m.

I primi due numeri sono 'molto grandi', mentre l'ultimo è 'molto piccolo' e operare con numeri simili, non è affatto semplice.

Per renderci conto di ciò, consideriamo un rettangolo di dimensioni $b = 0,00000006\,\text{m}$ e $h = 0,0000002\,\text{m}$ e calcoliamone l'area:

$$A = b \cdot h = 0,00000006 \cdot 0,0000002 = 0,000000000000012.$$



Come si può notare, per scrivere il risultato di un'operazione tra due numeri in questo caso 'molto piccoli', è necessario fare particolare attenzione in quanto, per l'eccessiva quantità di cifre decimali, è facile commettere degli errori.

Per risolvere questo problema, si preferisce utilizzare una scrittura compatta che permette di scrivere questo tipo di numeri in forma più agevole. Una tale scrittura prende il nome di *notazione scientifica*.

Definizione 3.12. Un numero α è scritto in *notazione scientifica* se si presenta nella forma:

$$\alpha = k \cdot 10^n,$$

dove k è un numero decimale maggiore o uguale a 1 e minore di 10 e n è un numero intero.

Esempio 3.16. I numeri $3,5 \cdot 10^7$ e $8,9 \cdot 10^{-5}$ sono scritti in notazione scientifica, mentre i numeri $0,5 \cdot 10^3$ e $10,3 \cdot 10^{-8}$ non sono scritti in notazione scientifica in quanto il numero davanti alla potenza di 10 nel primo caso è 0,5 che è minore di 1, nel secondo caso è 10,3 che è maggiore di 10.

3.9.1 Come trasformare un numero in notazione scientifica?

Consideriamo la misura del diametro del globulo rosso, ovvero $0,000007\,\text{m}$. Per esprimere questa misura in notazione scientifica basta considerare la sua frazione generatrice, ovvero:

$$0,000007\,\text{m} = 7 \cdot \frac{1}{1000000}\,\text{m} = 7 \cdot 10^{-6}\,\text{m}.$$

Allo stesso modo il numero 0,000000026 viene scritto in notazione scientifica come segue:

$$0,000000026 = 2,6 \cdot \frac{1}{100000000} = 2,6 \cdot \frac{1}{10^8} = 2,6 \cdot 10^{-8}.$$

Si osservi che in questo secondo caso abbiamo preso in considerazione il valore 2,6 anziché 26, in quanto il numero k deve essere minore di 10.

Consideriamo ora la misura del raggio della Terra, ovvero 6 400 000 m, la sua espressione in notazione scientifica sarà: $6,4 \cdot 10^6$.

Allo stesso modo il numero 340 000 000 000 viene scritto in notazione scientifica $3,4 \cdot 10^{11}$. Si osservi che in questo secondo caso abbiamo preso in considerazione il valore 3,4 anziché 34, in quanto, come si è già detto, il numero k deve essere minore di 10.

❑ **Osservazione** A numeri 'piccoli', corrisponde una potenza di dieci con esponente negativo; a numeri 'grandi', corrisponde una potenza di dieci con esponente positivo.

Procedura 3.7. *Scrivere un numero decimale positivo a in notazione scientifica, se $a > 1$:*

a) si divide il numero decimale per una potenza del 10 in modo da avere un numero decimale compreso maggiore o uguale a 1 e minore di 10;
b) per trovare la potenza del 10 per la quale dividere il numero bisogna contare le cifre significative del numero prima della eventuale virgola e togliere 1;
c) per scrivere il numero a in notazione scientifica occorre moltiplicare il numero trovato al passo precedente per la potenza di 10 utilizzata.

Esempio 3.17. 348 000 000 000 000.

Passo b Per esempio le cifre significative di 348 000 000 000 000 sono 15, si divide quindi il numero per 10^{14} e si ottiene 3,48.

Passo c $3,48 \cdot 10^{14}$.

Procedura 3.8. *Scrivere un numero decimale positivo a in notazione scientifica, se $0 < a < 1$:*

a) si moltiplica il numero decimale per una opportuna potenza del 10 in modo da ottenere un numero maggiore o uguale a 1 e minore di 10;
b) per trovare la potenza del 10 bisogna contare gli zeri che si trovano tra la virgola e la prima cifra significativa del numero e aggiungere 1;
c) per scrivere il numero a in notazione scientifica occorre moltiplicare il numero ottenuto al passo precedente per la stessa potenza di 10 utilizzata presa però con esponente negativo.

Esempio 3.18. 0,000034.

Passo b Nel caso di 0,000034 gli zeri sono 4, si moltiplica allora il numero per 10^5 e si ottiene 3,4.

Passo c Nell'esempio considerato si ottiene $3,4 \cdot 10^{-5}$.

Esempio 3.19. Riprendendo il problema della lamina rettangolare, le sue dimensioni in notazione scientifica vengono scritte come: $b = 6 \cdot 10^{-8}\,\text{m}$, $h = 2 \cdot 10^{-7}\,\text{m}$. L'area sarà quindi:

$$\begin{aligned} A &= b \cdot h \\ &= 6 \cdot 10^{-8}\,\text{m} \times 2 \cdot 10^{-7}\,\text{m} \\ &= 12 \cdot 10^{-15}\,\text{m}^2 \\ &= 1,2 \cdot 10^{1} \cdot 10^{-15}\,\text{m}^2 \\ &= 1,2 \cdot 10^{-14}\,\text{m}^2. \end{aligned}$$

Com'è possibile vedere, utilizzando le note proprietà delle potenze, si riesce ad eseguire l'operazione in maniera molto agevole.

Esempio 3.20. Trasforma in notazione scientifica e calcola $\dfrac{3000 : 6 \text{ milioni}}{5000 \cdot 0,000002}$.

$$\begin{aligned} \frac{3000 : 6 \text{ milioni}}{5000 \cdot 0,000002} &= \frac{3 \cdot 10^3 : (6 \cdot 10^6)}{5 \cdot 10^3 \cdot (2 \cdot 10^{-6})} \\ &= \frac{3 : 6 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} \\ &= \frac{0,5}{10} \cdot 10^{-3+3} \\ &= 0,05 \cdot 10^0 \\ &= 0,05 \\ &= 5 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

✍ *Esercizi proposti:* 3.61, 3.62, 3.63, 3.64, 3.65, 3.66, 3.67, 3.68, 3.69, 3.70, 3.71

3.9.2 Ordine di grandezza

Spesso, nel trattare i numeri 'molto grandi' o 'molto piccoli', non è importante conoscere la misura con precisione, ma basta conoscere "quanto è grande", cioè l'entità della sua grandezza. Per fare ciò si introduce il seguente concetto.

Definizione 3.13. Dato un numero, si definisce *ordine di grandezza* (abbreviato con la sigla o.d.g.), la potenza di 10 più vicina al numero.

Procedura 3.9. *Determinare l'ordine di grandezza di un numero:*

a) *scrivi il numero dato in notazione scientifica* $k \cdot 10^n$;
b) *se* $k < 5$ *l'ordine di grandezza è* 10^n;
c) *se* $k \geqslant 5$ *l'ordine di grandezza è* 10^{n+1}.

Esempio 3.21. Determinare l'ordine di grandezza dei numeri 0,000074 e 47000000000.

Scriviamo dapprima i numeri in notazione scientifica:

$$0,000074 = 7,4 \cdot 10^{-5} \text{ e } 47000000000 = 4,7 \cdot 10^{10}.$$

L'o.d.g. del primo numero è 10^{-4} in quanto il numero 7,4 è maggiore di 5. L'o.d.g del secondo numero è 10^{10} in quanto il numero 4,7 è minore di 5.

✍ *Esercizi proposti:* 3.72, 3.73, 3.74

3.10 Problemi con le frazioni

3.10.1 Problemi diretti

Nei problemi diretti si conosce il valore di una grandezza e se ne deve calcolare la parte che corrisponde a una frazione. In questo caso basta moltiplicare la frazione per la grandezza intera.

Esempio 3.22. Una pasticceria produce 568 cornetti a settimana: i 3/4 sono alla crema, 1/8 sono al cioccolato e 1/8 alla marmellata. Quanti cornetti di ciascun tipo produce?

Per risolvere il problema occorre calcolare la parte che corrisponde a ciascuna frazione:

- cornetti alla crema: $\frac{3}{4} \cdot 568 = 426$;
- cornetti al cioccolato: $\frac{1}{8} \cdot 568 = 71$
- cornetti alla marmellata: 71.

3.10.2 Problemi inversi

Nei problemi inversi si conosce il valore numerico di una frazione di una certa grandezza si deve calcolare il valore dell'intera grandezza. In questo caso occorre dividere il valore numerico dato per la frazione, si ottiene così l'intero.

Esempio 3.23. Mario ha speso € 21 che corrispondono ai 3/5 della somma che possedeva. Quanto possedeva?

In questo problema si sa che € 21 corrispondono ai 3/5 della somma da cercare. È sufficiente dividere 21 per la frazione: € $21 : \frac{3}{5} =$ € $21 \cdot \frac{5}{3} =$ € 35.

Esempio 3.24. Giuseppe possiede € 150. Se spende i 3/5 della somma posseduta e poi i 2/3 della somma rimanente, quanto gli rimane?

Per risolvere il problema si può procedere in più modi.

Calcoliamo prima i 3/5 di 150, cioè € $150 \cdot \frac{3}{5} =$ € 90. Quindi la prima volta Giuseppe spende € 90, perciò gliene rimangono 60. La seconda volta spende i 2/3 di € 60, cioè € $60 \frac{2}{3} =$ € 40. In tutto ha speso € 90 + € 40 = € 130, gli rimangono € 20.

Un altro modo per risolvere il problema è tenere conto che, se la prima volta ha speso i $\frac{3}{5}$ della somma che possedeva, significa che gli rimane la frazione $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$. La seconda volta spende i $\frac{2}{3}$ dei $\frac{2}{5}$, cioè $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$. In tutto ha speso la frazione

$$\frac{3}{5} + \frac{4}{15} = \frac{3 \cdot 3 + 4}{15} = \frac{13}{15},$$

gli rimane perciò la frazione $\frac{2}{15}$, pertanto gli rimangono € $150 \cdot \frac{2}{15} =$ € 20.

✍ *Esercizi proposti:* 3.75, 3.76, 3.77, 3.78

3.11 Le percentuali

Avrai sentito parlare spesso che il prezzo di un oggetto è stato scontato del 10 per cento, oppure che un partito politico ha preso il 25 per cento di voti e altre espressioni simili che coinvolgono le percentuali.

Le percentuali sono un altro modo per scrivere le frazioni.

Definizione 3.14. Le *percentuali* sono frazioni che hanno come denominatore 100 e come numeratore un numero intero o decimale.

La percentuale si indica con un numero intero o decimale seguita dal simbolo %.

$$35\% = \frac{35}{100}; \qquad 7\% = \frac{7}{100}; \qquad 12,5\% = \frac{12,5}{100} = \frac{125}{1000}.$$

Per passare dalla scrittura percentuale alla scrittura decimale basta dividere per 100 il numero che esprime la percentuale:

$$35\% = \frac{35}{100} = 0,35; \qquad 7\% = \frac{7}{100} = 0,07; \qquad 12,5\% = \frac{12,5}{100} = 0,125.$$

Per passare dalla scrittura decimale alla scrittura in percentuale basta moltiplicare numeratore e denominatore per 100:

$$0,02 = \frac{0,02}{1} = \frac{2}{100} = 2\%; \qquad 0,23 = \frac{0,23}{1} = \frac{23}{100} = 23\%; \qquad 1,21 = \frac{1,21}{1} = \frac{121}{100} = 121\%.$$

Per passare da una frazione alla percentuale conviene prima scrivere la frazione come numero decimale e poi da questo passare alla percentuale:

$$\frac{2}{3} = 0,\overline{6} = \frac{0,\overline{6}}{1} = \frac{66,\overline{6}}{100} = 66,\overline{6}\%.$$

✍ *Esercizi proposti:* 3.79, 3.80, 3.81, 3.82

3.11.1 Problemi con le percentuali

Per calcolare la percentuale di una grandezza è sufficiente moltiplicare il valore della grandezza per la percentuale espressa in frazione.

Esempio 3.25. In una scuola che ha 857 alunni ne sono stati promossi il 95%. Quanti sono stati i promossi?

Per rispondere, si moltiplica il numero totale di alunni per la frazione 95/100. Precisamente $\frac{95}{100} \cdot 857 = 814,15$. Poiché il risultato non è un numero intero la percentuale è stata approssimata. Gli alunni promossi sono stati 814.

A volte è nota una parte della grandezza e si vuole conoscere che percentuale è la parte nota rispetto al totale. In questo caso occorre dividere la parte nota per l'intera grandezza, moltiplicare il risultato per 100 ed esprimere il numero in percentuale.

Esempio 3.26. Di una scolaresca di 652 alunni ben 126 hanno avuto il debito in matematica. Qual è la percentuale di alunni che hanno avuto il debito in matematica?

Per rispondere alla domanda eseguiamo i seguenti calcoli:

$$\frac{126}{652} \cdot 100\% \approx 0,19 \cdot 100\% = 19\%.$$

3.11.2 Problemi con gli sconti

Esempio 3.27. Un pantalone costava € 70 e viene venduto con il 20% di sconto, a quanto viene venduto?

Si tratta di calcolare prima lo sconto e po il prezzo scontato. Lo sconto è dato da

$$20\% \cdot 70 \text{ €} = \frac{20}{100} \cdot 70 \text{ €} = 14.$$

Il prezzo scontato è € 70− € 14 = € 56.

In alternativa si può tenere conto che, se 20% esprime lo sconto, la parte rimanente, quella da pagare, è $100\% - 20\% = 80\%$. Quindi per calcolare quanto costano i pantaloni scontati si può calcolare

$$80\% \cdot 70 \text{ €} = \frac{80}{100} \cdot 70 \text{ €} = 56 \text{ €}.$$

Esempio 3.28. Un paio di scarpe da € 120 viene venduto scontato a € 75 Qual è stata la percentuale di sconto praticato?

Per rispondere alla domanda, calcolo lo sconto € 120 − € 75 = € 45.

Calcolo la percentuale che € 45 rappresentano di € 120,

$$\frac{45}{120} \cdot 100\% = 0,375 \cdot 100\% = 37,5\%.$$

Esempio 3.29. Mario ha trovato in un negozio il computer che stava cercando; per fortuna era scontato del 15%, ha risparmiato cosi 120 euro. Quanto costa il computer di listino?

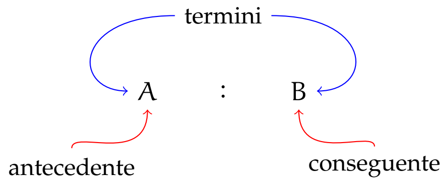
€ 120 corrispondono al 15% del prezzo di listino. Per calcolare il prezzo di listino occorre dividere 120 per la frazione che corrisponde a 15%.

$$120 : \ 15\% = \ 120 : \frac{15}{100} = 120 \cdot \frac{100}{15} = € \ 800.$$

✍ *Esercizi proposti:* 3.83, 3.84, 3.85, 3.86, 3.87, 3.88, 3.89, 3.90, 3.91, 3.92, 3.93, 3.94, 3.95, 3.96, 3.97, 3.98, 3.99, 3.100, 3.101, 3.102, 3.103, 3.104, 3.105, 3.106, 3.107, 3.108, 3.109, 3.110, 3.111, 3.112, 3.113, 3.114

3.12 Proporzioni

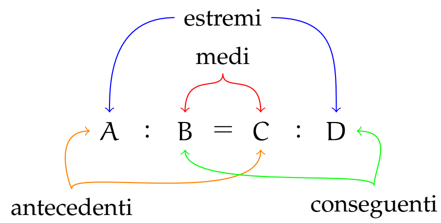
Definizione 3.15. Il rapporto tra due numeri, di cui il secondo è diverso da zero, è il quoziente che si ottiene dividendo il primo numero per il secondo. Il primo numero si dice *antecedente*, il secondo *conseguente*.



Definizione 3.16. Una *proporzione* è una uguaglianza tra due rapporti, del tipo

$$A : B = C : D,$$

che si legge A *sta a* B *come* C *sta a* D, con B e D diversi da zero.



Esempio 3.30. $4 : \ 2 = \ 12 : \ 6$.

Formano una proporzione perché i due quozienti valgono entrambi 2.

Esempio 3.31. $7 : \ 14 = \ 16 : \ 4$.

Non formano una proporzione perché il primo rapporto vale 0,5 mentre il secondo rapporto vale 4.

Proprietà 3.10 (Fondamentale delle proporzioni)**.** *In ogni proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.*

$$A : B = C : D \Rightarrow A \cdot D = B \cdot C.$$

Esempio 3.32. $4 : 6 = 6 : 9$.

Il prodotto dei medi è $6 \cdot 6 = 36$ e il prodotto degli estremi è $4 \cdot 9 = 36$. Quindi è una proporzione.

Esempio 3.33. $20 : 30 = 30 : 40$.

Il prodotto dei medi è $30 \cdot 30 = 900$ il prodotto degli estremi è $20 \cdot 40 = 800$. Quindi non è una proporzione.

Proprietà 3.11 (del permutare). *Se in una proporzione scambiamo tra di loro i medi otteniamo ancora una proporzione; in modo analogo otteniamo ancora una proporzione se scambiamo tra di loro gli estremi, o ancora se scambiamo tra di loro sia i medi sia gli estremi.*

$$A : B = C : D \Rightarrow A : C = B : D \Rightarrow D : B = C : A \Rightarrow D : C = B : A.$$

Esempio 3.34. Data la proporzione $12 : 16 = 18 : 24$ e scambiando tra di loro:

- i medi si ottiene la proporzione $12 : 18 = 16 : 24$;
- gli estremi si ottiene la proporzione $24 : 16 = 18 : 12$;
- sia i medi sia gli estremi si ottiene la proporzione $24 : 18 = 16 : 12$.

Proprietà 3.12 (dell'invertire). *Se in una proporzione scambiamo ogni antecedente con il rispettivo conseguente otteniamo ancora una proporzione.*

$$A : B = C : D \Rightarrow B : A = D : C.$$

Esempio 3.35. Data la proporzione $15 : 9 = 5 : 3$, applicando la proprietà dell'invertire otteniamo la proporzione $9 : 15 = 3 : 5$.

Proprietà 3.13 (del comporre). *In una proporzione la somma dei primi due termini sta al primo termine come la somma del terzo e del quarto termine sta al terzo termine. Analogamente, la somma dei primi due termini sta al secondo termine come la somma del terzo e del quarto termine sta al quarto termine.*

$$A : B = C : D \Rightarrow (A + B) : A = (C + D) : C.$$

$$A : B = C : D \Rightarrow (A + B) : B = (C + D) : D.$$

Esempio 3.36. Data la proporzione $16 : 10 = 40 : 25$, applicando la proprietà del comporre si ottengono le proporzioni

$$26 : 16 = 65 : 40, \qquad 26 : 10 = 65 : 25.$$

Analogamente alla proprietà del comporre si ha la seguente:

Proprietà 3.14 (dello scomporre). *In una proporzione la differenza dei primi due termini sta al primo termine come la differenza del terzo e del quarto termine sta al terzo termine. Analogamente, la differenza dei primi due termini sta al secondo termine come la differenza del terzo e del quarto termine sta al quarto termine.*

$$A : B = C : D \Rightarrow (A - B) : A = (C - D) : C.$$

$$A : B = C : D \Rightarrow (A - B) : B = (C - D) : D.$$

Esempio 3.37. Data la proporzione $16 : 10 = 40 : 25$, applicando la proprietà dello scomporre si ottengono le proporzioni

$$6 : 16 = 15 : 40, \qquad 6 : 10 = 15 : 25.$$

3.12.1 Calcolo di un medio o un estremo incognito

Il medio incognito di una proporzione si calcola moltiplicando gli estremi e dividendo per il medio noto:

$$a : b = x : d \Rightarrow x = \frac{a \cdot d}{b}.$$

L'estremo incognito di una proporzione si calcola moltiplicando i medi e dividendo per l'estremo noto:

$$x : b = c : d \Rightarrow x = \frac{b \cdot c}{d}.$$

Esempio 3.38. Calcola il termine incognito di ciascuna proporzione.

- $5 : 7 = 20 : x \Rightarrow x = \frac{7 \cdot 20}{5} = 28$;
- $2 : x = 3 : 16 \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 16}{3} = \frac{32}{3}$;
- $\frac{2}{3} : \frac{1}{2} = x : \frac{5}{6} \Rightarrow x = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} : \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{1} = \frac{10}{9}$.

Definizione 3.17. Una proporzione si dice *continua* se ha i medi uguali.

Una proporzione continua è del tipo $A : B = B : C$, per esempio

$$3 : 9 = 9 : 27, \qquad 5 : 10 = 10 : 20, \qquad 4 : 16 = 16 : 64.$$

Calcolo del medio in una proporzione continua

In una proporzione continua il medio proporzionale incognito si ottiene moltiplicando gli estremi e calcolando la radice quadrata del prodotto ottenuto.

$$a : x = x : d \Rightarrow x = \sqrt{a \cdot d}.$$

Esempio 3.39. Trovare il valore di x nella seguente proporzione continua $36 : x = x : 9$.

Svolgimento $x = \sqrt{36 \cdot 9} = 18$.

Calcolo di un termine incognito per mezzo delle proprietà del comporre e dello scomporre

---

Esempio 3.40. $(11-x):x = 15:5$.

Applicando la proprietà del comporre si ha la proporzione

$$(11-x+x):x=(15+5):5 \Rightarrow 11:x=20:5$$
$$\Rightarrow x=\frac{11\cdot 5}{20}=\frac{11}{4}.$$

Esempio 3.41. $\left(\frac{1}{2}+x\right):\frac{5}{8}=x:5$.

Permutando i medi si ha $\left(\frac{1}{2}+x\right):x=\frac{5}{8}:5$. Applicando la proprietà dello scomporre si ha:

$$\left(\frac{1}{2}+x-x\right):x=\left(\frac{5}{8}-5\right):5$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}:x=\frac{-35}{8}:5$$
$$\Rightarrow x=\frac{1}{2}\cdot 5:\left(\frac{-35}{8}\right)=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\left(-\frac{8}{35}\right)=-\frac{4}{7}.$$

3.12.2 Grandezze direttamente e inversamente proporzionali

Si consideri il perimetro di un triangolo equilatero; sappiamo che esso varia al variare della lunghezza del suo lato. Se si indica con l la lunghezza del lato del triangolo, allora il perimetro è dato dalla relazione:

$$2p=3l.$$

È possibile notare che se raddoppia il lato, raddoppia anche il perimetro; se si triplica il lato, allora triplica anche il perimetro etc.

Lato l	0,5	1	1,5	2,4	3,1	4,4
Perimetro	1,5	3	4,5	7,2	9,3	13,2
Rapporto $\frac{2p}{l}$	3	3	3	3	3	3

Definizione 3.18. Due grandezze x e y si dicono *direttamente proporzionali* se il loro rapporto è costante, cioè

$$\frac{y}{x}=k,\ \text{con } k\neq 0.$$

In generale, da quest'ultima scrittura, possiamo dedurre che una proporzionalità diretta è espressa da una formula del tipo:

$$y=kx,\ \text{con } k\neq 0.$$

Graficamente un tale tipo di proporzionalità è rappresentato da una retta che passa per l'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali (figura 3.2).

Esaminiamo ora un altro esempio. Se quando vai a fare benzina allo scooter chiedi ogni volta € 10 di benzina, noterai che se aumenta il prezzo della benzina diminuirà la quantità di carburante che ricevi e viceversa se diminuisce il prezzo aumenterà la quantità di carburante che ricevi. Ciò che rimane costante è il prodotto tra il prezzo della benzina e la quantità di benzina ricevuta che deve essere sempre € 10.

Prezzo benzina al litro p (€)	1,126	1,156	1,212	1,248
Benzina ricevuta b (l)	8,881	8,650	8,251	8,013
Costo $c = p \cdot b$ (€)	10,00	10,00	10,00	10,00

Definizione 3.19. Due grandezze x e y si dicono *inversamente proporzionali* se il loro prodotto è costante, cioè se:

$$x \cdot y = k, \text{ con } k \neq 0.$$

In generale, da quest'ultima scrittura, possiamo dedurre che una proporzionalità diretta è espressa da una formula del tipo:

$$y = \frac{k}{x}, \text{ con } k \neq \ 0.$$

Graficamente un tale tipo di proporzionalità è rappresentato da un ramo d'iperbole equilatera in un sistema di assi cartesiani ortogonali (figura 3.3).

✍ *Esercizi proposti:* 3.115, 3.116, 3.117, 3.118, 3.119, 3.120, 3.121, 3.122, 3.123, 3.124, 3.125 3.126, 3.127

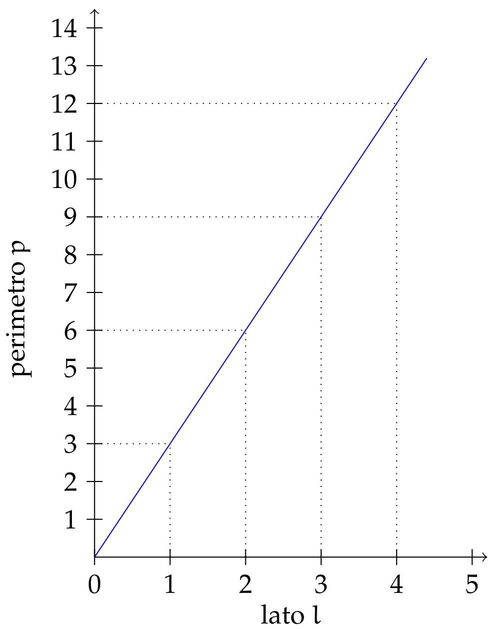


FIGURA 3.2: Proporzionalità diretta.

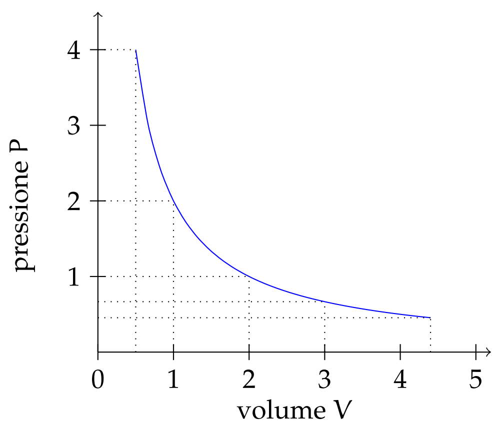


FIGURA 3.3: Proporzionalità inversa.

3.13 Espressioni con le frazioni

Esempio 3.42. Calcola il valore della seguente espressione.

$$\left\{\frac{3}{20}\cdot\left[\left(\frac{4}{9}-\frac{1}{3}\right):5+\left(\frac{3}{7}-\frac{2}{5}\right):\frac{1}{14}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9}\right]+\frac{2}{15}\right\}:2.$$

$$\begin{aligned}
\left\{\frac{3}{20}\cdot\left[\left(\frac{4}{9}-\frac{1}{3}\right):5+\left(\frac{3}{7}-\frac{2}{5}\right):\frac{1}{14}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9}\right]+\frac{2}{15}\right\}:2 =&\\
&=\left\{\frac{3}{20}\cdot\left[\left(\frac{4-3}{9}\right):5+\left(\frac{15-14}{35}\right):\frac{1}{14}+\frac{1}{45}\right]+\frac{2}{15}\right\}:2\\
&=\left[\frac{3}{20}\cdot\left(\frac{1}{9}:5+\frac{1}{35}:\frac{1}{14}+\frac{1}{45}\right)+\frac{2}{15}\right]:2\\
&=\left[\frac{3}{20}\cdot\left(\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{35}\cdot\frac{14}{1}+\frac{1}{45}\right)+\frac{2}{15}\right]:2\\
&=\left[\frac{3}{20}\cdot\left(\frac{1}{45}+\frac{1}{7\cdot 5}\cdot\frac{7\cdot 2}{1}+\frac{1}{45}\right)+\frac{2}{15}\right]:2\\
&=\left[\frac{3}{20}\cdot\left(\frac{1}{45}+\frac{2}{5}+\frac{1}{45}\right)+\frac{2}{15}\right]:2\\
&=\left[\frac{3}{20}\cdot\left(\frac{1+18+1}{45}\right)+\frac{2}{15}\right]:2\\
&=\left(\frac{3}{20}\cdot\frac{20}{45}+\frac{2}{15}\right):2\\
&=\left(\frac{3}{20}\cdot\frac{4}{9}+\frac{2}{15}\right):2\\
&=\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{15}\right):2\\
&=\left(\frac{1}{15}+\frac{2}{15}\right):2\\
&=\frac{3}{15}:2\\
&=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\\
&=\frac{1}{10}.
\end{aligned}$$

Esempio 3.43. Calcola il valore della seguente espressione.

$$\left[\frac{13}{5}:\left(3+\frac{9}{10}\right)+\frac{7}{8}+\left(\frac{13}{4}-2\right)\cdot\frac{4}{15}-\frac{7}{8}\right]\cdot\frac{11}{3}:\left(6-\frac{1}{2}\right).$$

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{13}{5}:\left(3+\frac{9}{10}\right)+\frac{7}{8}+\left(\frac{13}{4}-2\right)\cdot\frac{4}{15}-\frac{7}{8}\right]\cdot\frac{11}{3}:\left(6-\frac{1}{2}\right)=\\
&\quad=\left[\frac{13}{5}:\left(\frac{30+9}{10}\right)+\frac{7}{8}+\left(\frac{13-8}{4}\right)\cdot\frac{4}{15}-\frac{7}{8}\right]\cdot\frac{11}{3}:\left(\frac{12-1}{2}\right)\\
&\quad=\left(\frac{13}{5}:\frac{39}{10}+\frac{7}{8}+\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{15}-\frac{7}{8}\right)\cdot\frac{11}{3}:\frac{11}{2}\\
&\quad=\left(\frac{13}{5}:\frac{39}{10}+\frac{7}{8}+\frac{1}{3}-\frac{7}{8}\right)\cdot\frac{11}{3}\cdot\frac{2}{11}\\
&\quad=\left(\frac{2}{3}+\frac{7}{8}+\frac{1}{3}-\frac{7}{8}\right)\cdot\frac{11}{3}\cdot\frac{2}{11}\\
&\quad=\left(\frac{2}{3}+\frac{7}{8}+\frac{1}{3}-\frac{7}{8}\right)\cdot\frac{2}{3}\\
&\quad=\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}\\
&\quad=1\cdot\frac{2}{3}\\
&\quad=\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Esempio 3.44. Calcola il valore della seguente espressione.

$$\left[\left(\frac{7}{5}-\frac{1}{2}\right)^2:\left(\frac{9}{10}\right)^2-\left(1+\frac{2}{3}-2\right)^2\right]^2:\left(\frac{10}{9}\right)^2-\left(1+\frac{8}{5}+\frac{1}{25}\right).$$

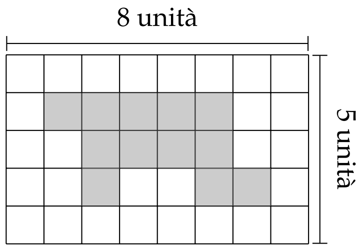
$$\begin{aligned}
\left[\left(\frac{7}{5}-\frac{1}{2}\right)^2:\left(\frac{9}{10}\right)^2-\left(1+\frac{2}{3}-2\right)^2\right]^2:\left(\frac{10}{9}\right)^2-\left(1+\frac{8}{5}+\frac{1}{25}\right) &= \\
&=\left[\left(\frac{14-5}{10}\right)^2:\left(\frac{9}{10}\right)^2-\left(\frac{3+2-6}{3}\right)^2\right]^2:\left(\frac{10}{9}\right)^2-\left(\frac{25+40+1}{25}\right) \\
&=\left[\left(\frac{9}{10}\right)^2:\left(\frac{9}{10}\right)^2-\left(-\frac{1}{3}\right)^2\right]^2:\left(\frac{10}{9}\right)^2-\left(\frac{66}{25}\right) \\
&=\left[1-\frac{1}{9}\right]^2:\left(\frac{10}{9}\right)^2-\left(\frac{66}{25}\right) \\
&=\left[\frac{8}{9}\right]^2\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^2-\frac{66}{25} \\
&=\left(\frac{4}{5}\right)^2-\frac{64}{25} \\
&=\frac{16}{25}-\frac{66}{25} \\
&=-\frac{50}{25} \\
&=-2.
\end{aligned}$$

3.14 Esercizi

3.14.1 Esercizi dei singoli paragrafi

3.2 - Frazioni

3.1. Da un cartoncino rettangolare quadrettato di lati rispettivamente 5 unità e 8 unità viene ritagliata la forma colorata in grigio, come mostrato nella figura.

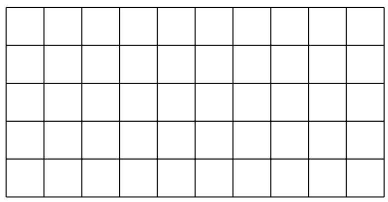


Quale delle seguenti espressioni ti sembra più corretta per esprimere la relazione tra il cartoncino e la forma ritagliata?

a) La forma ottenuta è più piccola del cartoncino;
b) la forma ottenuta è un poligono con un numero maggiore di lati rispetto al cartoncino dato;
c) la forma ottenuta rappresenta i $12/40$ del cartoncino.

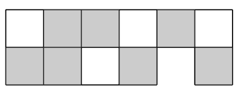
Sbaglio se affermo che la parte colorata è i $3/10$ del cartoncino?

3.2. Il monte-premi di una lotteria è di € 50 000. Il primo premio è di € 25 000, il secondo di € 10 000, il terzo di € 5 000, il quarto di € 4 000, il quinto e il sesto premio sono uguali. Nella figura un quadretto rappresenta € 1 000.



a) Colora con colori diversi i quadretti quanti servono per rappresentare i sei premi, un colore per ogni premio;
b) quale parte del monte-premi è stata incassata da chi ha vinto il secondo premio? Esprimi questa parte con una frazione;
c) Marco ha vinto il sesto premio: quanto ha vinto?

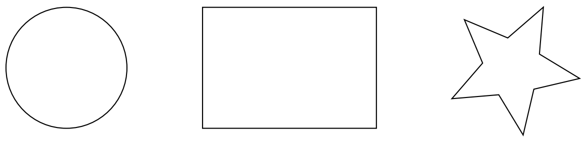
3.3. La figura seguente è composta da 11 quadratini, alcuni bianchi altri grigi.



Completa: la figura è divisa in due parti mediante la colorazione: la parte grigia rappresenta .... dell’intera figura, mentre la parte bianca ne è ....

3.4. Di ciascuna figura colora la parte indicata dalla frazione.

$\frac{3}{5}$ $\qquad$ $\frac{2}{3}$ $\qquad$ $\frac{1}{2}$



3.5. Indica se le frazioni sono proprie (P), improprie (I) o apparenti (A).

a) $\frac{3}{4}$ $\boxed{\text{P}}$ $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\qquad$ c) $\frac{12}{3}$ $\boxed{\text{P}}$ $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\qquad$ e) $\frac{5}{3}$ $\boxed{\text{P}}$ $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{A}}$

b) $\frac{8}{3}$ $\boxed{\text{P}}$ $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\qquad$ d) $\frac{5}{2}$ $\boxed{\text{P}}$ $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\qquad$ f) $\frac{3}{2}$ $\boxed{\text{P}}$ $\boxed{\text{I}}$ $\boxed{\text{A}}$

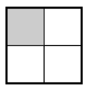
3.6. Trova le frazioni equivalenti completando.

a) $\frac{3}{4} = \frac{\dots}{12}$; $\qquad$ b) $\frac{12}{16} = \frac{3}{\dots}$; $\qquad$ c) $\frac{5}{2} = \frac{\dots}{10}$; $\qquad$ d) $\frac{21}{35} = \frac{\dots}{5}$.

3.7. Indica almeno tre frazioni equivalenti a ciascuna delle seguenti.

a) $\frac{5}{6}$; $\qquad$ b) $\frac{3}{5}$; $\qquad$ c) $\frac{12}{60}$; $\qquad$ d) $\frac{2}{3}$; $\qquad$ e) $\frac{1}{2}$; $\qquad$ f) $\frac{5}{2}$.

3.8. Nella figura che segue il quadratino colorato rappresenta 1/4 del quadrato grande; costruisci una figura che rappresenti 8/4 del quadrato grande accostando opportunamente altri quadrati uguali.



3.9. Riduci ai minimi termini le seguenti frazioni.

a) $\frac{4}{6}$; $\qquad$ d) $\frac{18}{16}$; $\qquad$ g) $\frac{80}{100}$; $\qquad$ j) $\frac{10}{15}$; $\qquad$ m) $\frac{16}{6}$; $\qquad$ p) $\frac{21}{9}$;

b) $\frac{8}{2}$; $\qquad$ e) $\frac{3}{12}$; $\qquad$ h) $\frac{8}{12}$; $\qquad$ k) $\frac{14}{49}$; $\qquad$ n) $\frac{18}{15}$; $\qquad$ q) $\frac{24}{30}$;

c) $\frac{2}{10}$; $\qquad$ f) $\frac{6}{20}$; $\qquad$ i) $\frac{9}{6}$; $\qquad$ l) $\frac{15}{21}$; $\qquad$ o) $\frac{20}{12}$; $\qquad$ r) $\frac{25}{15}$.

3.10. Riduci ai minimi termini le seguenti frazioni.

a) $\frac{27}{21}$; $\qquad$ d) $\frac{32}{24}$; $\qquad$ g) $\frac{40}{6}$; $\qquad$ j) $\frac{48}{60}$; $\qquad$ m) $\frac{121}{22}$; $\qquad$ p) $\frac{110}{30}$;

b) $\frac{28}{14}$; $\qquad$ e) $\frac{35}{10}$; $\qquad$ h) $\frac{42}{21}$; $\qquad$ k) $\frac{12}{30}$; $\qquad$ n) $\frac{87}{99}$; $\qquad$ q) $\frac{240}{75}$;

c) $\frac{30}{16}$; $\qquad$ f) $\frac{36}{81}$; $\qquad$ i) $\frac{45}{27}$; $\qquad$ l) $\frac{135}{77}$; $\qquad$ o) $\frac{15}{360}$; $\qquad$ r) $\frac{140}{294}$.

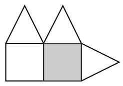


FIGURA 3.4: Esercizio 3.11

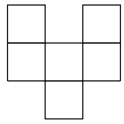
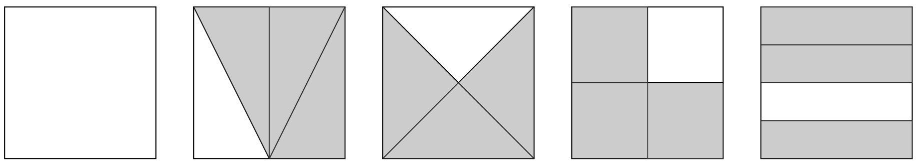


FIGURA 3.5: Esercizio 3.12

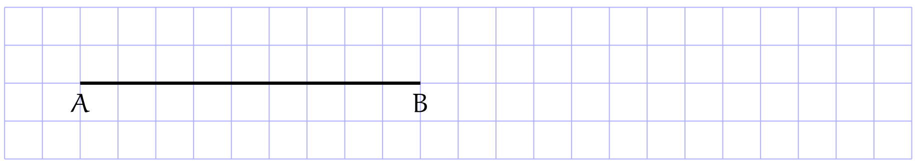
3.11. Si può dire che la parte colorata in grigio della figura corrisponde a $\frac{1}{5}$ della figura stessa?

3.12. Costruisci una figura che corrisponde a $\frac{11}{6}$ della figura seguente.

3.13. Per ciascuno dei seguenti disegni la parte colorata in grigio rappresenta sempre la frazione $\frac{3}{4}$ del quadrato bianco?



3.14. Il segmento nel disegno rappresenta i 3/5 dell'intero.



Ti basta questa informazione per costruire l'intero? Come procederesti?

3.15. Disegna un segmento come grandezza unitaria e dimostra che la frazione 3/5 è equivalente a 6/10 ma non a 9/25.

3.16. Usando una grandezza unitaria arbitraria, stabilisci quale delle seguenti frazioni rappresenta l'intero e quale un suo multiplo:

$$\frac{2}{4} \qquad \frac{6}{3} \qquad \frac{5}{5} \qquad \frac{8}{4} \qquad \frac{9}{4}.$$

3.3 - Dalle frazioni ai numeri razionali

3.17. Raggruppa le seguenti frazioni in insiemi di frazioni equivalenti. Etichetta l'insieme con un numero razionale, prendendo per ogni gruppo la frazione ridotta ai minimi termini.

$$\frac{1}{3};\ \frac{2}{4};\ -\frac{5}{2};\ \frac{6}{-14};\ \frac{-12}{4};\ \frac{3}{6};\ \frac{-3}{-9};\ \frac{10}{-4};\ \frac{10}{20};\ \frac{-18}{42};\ \frac{5}{15};\ -\frac{9}{21};\ -\frac{15}{6};\ \frac{4}{12}.$$

3.18. Riscrivi le seguenti frazioni improprie come somma di un numero naturale e una frazione propria.

$$\frac{10}{3};\ \frac{17}{9};\ \frac{11}{2};\ \frac{25}{3};\ \frac{17}{10};\ \frac{15}{6}.$$

3.4 - La scrittura dei numeri razionali

3.19. Senza eseguire le divisioni indica quali di queste frazioni possono essere scritte come numero decimale finito (DF), quali come numero decimale periodico (DP) e quali come numero intero (I):

a) $-\frac{3}{2}$ $\boxed{\text{DF}}$ $\boxed{\text{DP}}$ $\boxed{\text{I}}$

b) $-\frac{6}{5}$ $\boxed{\text{DF}}$ $\boxed{\text{DP}}$ $\boxed{\text{I}}$

c) $\frac{2}{25}$ $\boxed{\text{DF}}$ $\boxed{\text{DP}}$ $\boxed{\text{I}}$

d) $\frac{5}{8}$ $\boxed{\text{DF}}$ $\boxed{\text{DP}}$ $\boxed{\text{I}}$

e) $\frac{5}{6}$ $\boxed{\text{DF}}$ $\boxed{\text{DP}}$ $\boxed{\text{I}}$

f) $-\frac{5}{12}$ $\boxed{\text{DF}}$ $\boxed{\text{DP}}$ $\boxed{\text{I}}$

g) $\frac{12}{6}$ $\boxed{\text{DF}}$ $\boxed{\text{DP}}$ $\boxed{\text{I}}$

h) $\frac{5}{10}$ $\boxed{\text{DF}}$ $\boxed{\text{DP}}$ $\boxed{\text{I}}$

3.20. Trasforma le seguenti frazioni in numeri decimali.

a) $\frac{13}{2}$ b) $\frac{11}{3}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{15}{6}$ e) $\frac{17}{7}$ f) $\frac{15}{8}$ g) $\frac{12}{9}$ h) $\frac{127}{10}$ i) $\frac{122}{11}$ j) $\frac{13}{12}$ k) $\frac{35}{121}$ l) $\frac{121}{35}$ m) $\frac{12}{10}$ n) $\frac{127}{100}$ o) $\frac{122}{1100}$ p) $\frac{13}{100}$ q) $\frac{35}{1000}$ r) $\frac{121}{10000}$ s) $\frac{12}{5}$ t) $\frac{13}{7}$ u) $\frac{15}{4}$ v) $\frac{5}{8}$ w) $\frac{32}{9}$ x) $\frac{21}{20}$ y) $\frac{37}{18}$ z) $\frac{2}{21}$

3.21 (*). Trasforma in frazioni i seguenti numeri decimali.

a) 12,5 b) 4,2 c) 6,25 d) 3,75 e) 0,1 f) 2,5 g) 100,100 h) 0,12 i) 1,1030 j) 0,00100 k) 100,0010 l) 0,0001 m) 1,25 n) 0,08 o) 1,002 p) 15,675 q) 1,7 r) 1,46 s) 0,13 t) 0,149 u) 5,015 v) 3,21 w) 2,3 x) 1,086

3.22. Completa la tabella.

Numero decimale	Parte intera	Parte decimale	Periodo	Antiperiodo	Frazione
1,7521					
$3,\overline{75}$					
$12,1\overline{24}$					
$1,0\overline{5}$					
$0,13\overline{57}$					

3.23. Trasforma i seguenti numeri decimali in frazioni.

a) $-1,25$;
b) 0,03;
c) $-2,\overline{1}$;
d) $0,\overline{13}$;
e) 5,080;
f) $3,7\overline{52}$;
g) $-0,38$;
h) $11,\overline{175}$;
i) $0,01\overline{02}$
j) $0,12\overline{345}$;
k) $100,\overline{100}$;
l) $100,\overline{001}$;
m) 0,08;
n) 0,2;
o) 0,1;
p) 0,03;
q) $23,\overline{5}$;
r) $22,\overline{32}$;
s) 0,25;
t) $31,\overline{02}$;
u) $0,\overline{21}$;
v) $2,3\overline{4}$;
w) $3,21\overline{8}$;
x) $0,03\overline{4}$.

3.24. Scrivi la frazione generatrice di $12,3\overline{45}$. Qual è la 614-esima cifra decimale del numero?

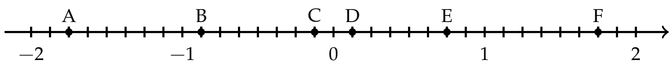
3.25. Calcola $0,\overline{9} - 3,\overline{9}$. Cosa osservi?

3.5 - I numeri razionali e la retta

3.26. Rappresenta su una retta orientata, dopo aver scelto una opportuna unità di misura, i seguenti gruppi di numeri razionali, ciascun gruppo su una retta.

a) $\frac{2}{3}, \quad -\frac{3}{4}, \quad \frac{5}{2}, \quad -\frac{7}{12}, \quad \frac{3}{2}, \quad -\frac{11}{6}, \quad \frac{9}{4};$
b) $\frac{0}{4}, \quad \frac{5}{4}, \quad \frac{9}{4}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{19}{8}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{7}{4}, \quad \frac{4}{2};$
c) $\frac{10}{3}, \quad \frac{5}{3}, \quad 2, \quad \frac{0}{3}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{13}{6};$
d) $\frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad -\frac{5}{4}, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{7}{8}, \quad -\frac{5}{16};$
e) $\frac{8}{5}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{10}, \quad -\frac{7}{4}, \quad -\frac{3}{5}, \quad -\frac{11}{10}.$

3.27. Scrivi i numeri razionali rappresentati dai punti segnati sulla retta nella figura.



3.28. Disegna su una retta orientata i seguenti numeri decimali, ciascun gruppo su una retta.

a) $0,6 \qquad 2,3 \qquad -1,2 \qquad -0,06;$
b) $+1,4 \qquad -0,3 \qquad -1,5 \qquad 0,2;$
c) $-0,8 \qquad -1,6 \qquad +4,91 \qquad -1,17;$
d) $1,55 \qquad 2,01 \qquad -3,0 \qquad -2,10.$

3.6 - Confronto tra numeri razionali

3.29. Inserisci tra le seguenti coppie di numeri razionali i simboli di maggiore (>), minore (<) o uguale (=).

a) $\frac{4}{5} \ldots \frac{5}{7};$
b) $-\frac{9}{5} \ldots -\frac{8}{3};$
c) $-1 \ldots \frac{1}{12};$
d) $\frac{2}{7} \ldots \frac{6}{21};$
e) $-\frac{1}{2} \ldots -\frac{3}{4};$
f) $\frac{3}{5} \ldots \frac{6}{9}.$

3.30. Quale dei seguenti numeri razionali è il maggiore?

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{5}{8}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{7}{12}.$$

3.31. Quale dei seguenti numeri razionali è il minore?

$$-\frac{2}{3}, \quad -\frac{3}{4}, \quad -\frac{5}{6}, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{2}{5}.$$

3.32. Scrivi in ordine crescente (dal più piccolo al più grande).

$$-\frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad -\frac{5}{6}, \quad \frac{1}{2}, \quad -1, \quad -\frac{2}{5}, \quad 0.$$

3.33. Scrivi in ordine decrescente (dal più grande al più piccolo).

$$-\frac{3}{2}, \quad \frac{4}{3}, \quad -\frac{6}{5}, \quad \frac{2}{5}, \quad -1, \quad \frac{5}{2}, \quad 0$$

3.34. Qual è la minore delle seguenti frazioni?

$\boxed{A}$ $\frac{2}{3}$ $\boxed{B}$ $\frac{2}{7}$ $\boxed{C}$ $\frac{3}{2}$ $\boxed{D}$ $\frac{1}{2}$.

3.35. Metti in ordine le seguenti frazioni.

$$\frac{3}{4}; \quad \frac{4}{3}; \quad \frac{11}{12}; \quad \frac{5}{3}.$$

3.36. Ordina dal più piccolo al più grande.

a) 10,011 10,110 11,001 11,100;
b) 10,01 11,11 10,101 10,001;
c) 0,101 0,011 0,110 0,0101;
d) 1,0101 1,1001 1,0011 1,0110;

3.37. Scrivi una frazione molto vicina a $-\frac{2}{9}$.

3.38. Scrivi una frazione compresa tra:

a) $\frac{3}{5}$ e $\frac{7}{10}$; b) $\frac{5}{3}$ e $\frac{1}{7}$; c) $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$.

3.39. Quali disuguaglianze sono vere?

a) $-\frac{7}{6} < -\frac{6}{7}$; $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
b) $-\frac{7}{6} > +\frac{6}{7}$; $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
c) $-\frac{7}{6} < +\frac{6}{7}$; $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
d) $+\frac{7}{6} < -\frac{6}{7}$; $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
e) $+\frac{7}{6} < +\frac{6}{7}$; $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
f) $+\frac{7}{6} > -\frac{6}{7}$. $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

3.40. Quale dei seguenti numeri è più vicino a 1?

$\boxed{A}$ 0, 10 $\boxed{B}$ 0, 99 $\boxed{C}$ 0, 01 $\boxed{D}$ 0, 90

3.41. Quale dei seguenti numeri è più vicino alla frazione $\frac{1}{10}$?

$\boxed{\text{A}}$ 0,01 $\boxed{\text{B}}$ 0,90 $\boxed{\text{C}}$ 1,01 $\boxed{\text{D}}$ 0,19

3.42. Scrivi due numeri compresi tra:

a) 2,3 e 3,4;
b) 3,4 e 3,6;
c) $2,\overline{3}$ e $2,\overline{4}$;
d) $1,1\overline{3}$ e $1,2\overline{3}$;
e) $3,\overline{4}$ e $3,\overline{6}$;
f) $1,\overline{35}$ e $1,\overline{36}$.

3.43. Rappresenta su una opportuna retta numerica le seguenti frazioni e poi riscrivile in ordine crescente:

$$\frac{3}{4}; \frac{3}{8}; \frac{1}{3}; \frac{5}{4}; \frac{2}{5}; \frac{6}{3}; \frac{5}{6}; \frac{12}{4}; \frac{19}{8}; \frac{16}{5}.$$

3.44. Calcola le seguenti somme algebriche tra frazioni.

a) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}$;
b) $\frac{7}{11}+\frac{4}{11}$;
c) $\frac{3}{2}-\frac{5}{2}$;
d) $\frac{8}{18}+\frac{5}{9}$;
e) $\frac{6}{5}+0$;
f) $-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}$;
g) $-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$;
h) $\frac{4}{3}-\frac{6}{5}$;
i) $\frac{2}{5}+\frac{5}{8}$;
j) $\frac{5}{8}+\frac{5}{6}$;
k) $\frac{5}{6}-\frac{5}{12}$;
l) $1-\frac{3}{2}$;
m) $\frac{11}{5}+5$;
n) $\frac{7}{3}-\frac{6}{4}$;
o) $3-\frac{2}{3}$;
p) $\frac{1}{5}-1$;
q) $4+\frac{3}{2}-\frac{3}{4}$;
r) $\frac{4}{3}+3-\frac{1}{2}$;
s) $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-\frac{5}{4}$;
t) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$.

3.45. Calcola le seguenti somme algebriche fra numeri razionali.

a) $1,\overline{6}+\frac{2}{3}$;
b) $5,1-1,\overline{5}$;
c) $0,03+\frac{0}{3}$;
d) $0,1\overline{6}-1,\overline{45}$;
e) $50\%+\frac{1}{2}$;
f) $\frac{2}{5}-1,2+5\%$;
g) $-1,\overline{2}+25\%+\frac{5}{18}$;
h) $\frac{3}{2}-13\%+0,15$;
i) $1,\overline{2}+1,2+\frac{1}{2}+1,2\%$;
j) $7,9892+3,1218$;
k) $3,999+$ un centesimo.

3.46. Completa la seguente tabella.

a	$-\frac{2}{3}$	$+\frac{3}{4}$	-1	0	$-1,\overline{6}$	-5	$-0,21$
b	$+\frac{7}{3}$	$-\frac{5}{8}$	$+\frac{2}{5}$	15%	$+2,\overline{3}$	$+\frac{17}{3}$	$+\frac{3}{5}$
$a+b$							
$a-b$							
$b-a$							
$-a-b$							
$-a+b$							

3.47. Calcola a mente:

a) $0,1+0,1$;
b) $0,2+0,8$;
c) $0,01+0,9$
d) $0,91+0,19$;
e) $1,10+1,01$;
f) $0,999+0,10$;
g) $1,1-0,9$;
h) $100-0,99$;
i) $2-0,1$;
j) $3-1,1$;
k) $4-1,4$;
l) $10-0,10$.

3.48. Calcola i seguenti prodotti fra frazioni.

a) $\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}$;
b) $6\cdot\frac{5}{2}$
c) $-\frac{6}{5}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)$;
d) $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{9}$d;
e) $\frac{5}{5}\cdot\frac{5}{8}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)$;
f) $\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{8}{9}\right)\cdot\frac{5}{6}$;

3.49. Calcola i seguenti prodotti fra numeri razionali.

$$-1,\overline{1}\cdot\frac{18}{5};\qquad 2\%\cdot 5\%;\qquad -\frac{3}{4}\cdot(-120\%).$$

3.50. Completa la seguente tabella.

a	$-\frac{2}{3}$	$+\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$	15%	$-1,\overline{6}$	$+\frac{17}{3}$	$-0,21$
b	$+\frac{7}{3}$		$-\frac{5}{2}$		$+2,\overline{3}$		$+\frac{5}{3}$
$a\cdot b$		1		-1		0	

3.51. Calcola a mente:

a) $0,1\cdot 0,1$;
b) $\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}$;
c) $0,1\cdot 100$;
d) $1\cdot 0,1$;
e) $2\cdot 0,1$;
f) $20\cdot 0,02$;
g) $0,01\cdot 10$;
h) $\frac{1}{100}\cdot 10$;
i) $0,1\cdot 0,2$;
j) $\frac{3}{10}\cdot 30$;
k) $0,01\cdot 0,1$;
l) $1000\cdot 0,0001$.

3.52. Calcola i seguenti quozienti fra frazioni.

a) $\frac{3}{2}:\frac{4}{3}$;
b) $-\frac{6}{5}:\left(-\frac{2}{3}\right)$;
c) $\frac{+3}{2}:\left(\frac{-3}{2}\right)$;
d) $\frac{2}{5}:\frac{5}{8}:\left(-\frac{5}{6}\right)$.

3.53. Calcola i seguenti quozienti fra numeri razionali.

a) $-1,\overline{1}:\frac{18}{5}$;
b) $2\%:5\%$;
c) $\frac{1}{2}:0,5$;
d) $-\frac{3}{4}:1,4:(-120\%)$.

3.54. Completa la seguente tabella.

a	$-\frac{2}{3}$	$+\frac{3}{4}$	-1	0	$-1,\overline{6}$	-5	$-0,21$
b	$+\frac{7}{3}$	$-\frac{5}{8}$	$+\frac{2}{5}$	15%	$+2,\overline{3}$	$+\frac{17}{3}$	$+\frac{3}{5}$
$a:b$							
$b:a$							

3.55. Calcola a mente:

a) $0,30 \cdot 0,40$;
b) $0,5 : 0,1$;
c) $0,5 \cdot 0,2$;
d) $0,1 \cdot 0,1$;
e) $0,4 \cdot 3$;
f) $0,1 : 0,1$;
g) $0,5 \cdot 20$;
h) $0,1 \cdot 0,010$.

3.8 - Potenza di una frazione

3.56. Calcola il valore delle seguenti potenze.

a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$;
b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$;
c) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2$;
d) $\left(\frac{1}{2}-1\right)^3$;
e) $\left(-\frac{3}{5}\right)^0$;
f) $\left(-\frac{3}{5}\right)^1$;
g) -2^4;
h) $(-2)^4$;
i) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$;
j) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$;
k) $-\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$;
l) -2^{-4};
m) $(-2)^{-4}$;
n) $-\left(\frac{5}{6}\right)^{-1}$.

3.57. Indica quali proprietà delle potenze sono state applicate nelle seguenti uguaglianze.

a) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^5 = -\frac{3^5}{2^5}$; proprietà

b) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 : \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^{-1} = -\frac{2}{3}$;

c) $\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^6 = +\frac{3^6}{2^6}$;

d) $\left(\frac{5}{2}\right)^2 : \left(\frac{25}{10}\right)^2 = \left(\frac{5}{2} : \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5}\right)^2 = 1^2$;

e) $\left(-\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{25}\right)^2 = \left(-\frac{5}{2} \cdot \frac{6}{25}\right)^2 = \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = +\frac{3^2}{5^2}$.

3.58. Completa la seguente tabella.

a	a^2	a^{-2}	$-a^2$	$(-a)^3$	a^{-1}	a^0	a^3
$\left(-\frac{2}{3}\right)$							
$-1,\overline{6}$							
$-0,1$							
$\frac{3}{10}$							

3.59. Calcola a mente.

a) $3,4 \cdot 10^2$;
b) $3,4 : 10^2$;
c) $0,34 \cdot 10^4$;
d) $34,4 : 10^2$;
e) $0,34 \cdot 10^3$;
f) $34,10 \cdot 10^3$;
g) $3,04 \cdot 10$;
h) $0,34 : 10^2$.

3.60. Calcola le seguenti potenze prestando particolare attenzione ai segni.

a) $-(-2)^2$;
b) $[-(-1)^2]^3$;
c) $-(-2)^{-4}$;
d) $-[-(-1)^{-1}]^{-2}$;
e) $\dfrac{2^{-1}+3^{-2}}{2^{-2}+3^{-1}}$;
f) $\dfrac{2^{-2}-3^{-1}}{2^{-2}+3^{-1}}$;
g) $(-3)^3 \cdot \dfrac{2^{-2}-5^{-1}}{2^{-2}+5^2}$.

3.9 - Notazione scientifica e ordine di grandezza

3.61. Esprimere in notazione scientifica i seguenti numeri.

a) $780000000000000 = 7,8 \cdot 10^{\cdots}$;
b) $423000000000 = 4,23 \cdot 10^{\cdots}$;
c) $76000000000000 = \ldots \cdot 10^{\cdots}$;
d) $0,00000000098 = 9,8 \cdot 10^{\cdots}$;
e) $0,0000045 = 4,5 \cdot 10^{\cdots}$;
f) $0,000000987 = \ldots \cdot 10^{\cdots}$.

3.62. Quale tra i seguenti numeri non è scritto in notazione scientifica?
$\boxed{\text{A}}$ $5,67 \cdot 10^{-12}$ $\boxed{\text{B}}$ $4,28 \cdot 10^8$ $\boxed{\text{C}}$ $10,3 \cdot 10^{-2}$ $\boxed{\text{D}}$ $9,8 \cdot 10^7$

3.63. Determina in notazione scientifica l'area di una lamina di ferro quadrata avente il lato di misura $0,00000000021$ m.

3.64. Scrivi in notazione scientifica i seguenti numeri.

34000; $0,000054$; 26; $0,54000$; 5; $0,00001$; 990000; 222.

3.65. Trasforma i numeri in notazione scientifica e scrivi nella stessa forma il risultato.

a) $0,00036 \cdot 20000000 = \ldots$
b) $8400 : 42 = \ldots$
c) $900000000 : 0,0003 = \ldots$
d) $3 : 10000000 = \ldots$

3.66. Calcola ed esprimi il risultato in notazione scientifica.

a) $3 \cdot 10^{24} + 4 \cdot 10^{24}$;
b) $0,3 \cdot 10^{104} + 4 \cdot 10^{103}$;
c) $6 \cdot 10^{101} \cdot 0,15 \cdot 10^{101}$;
d) $12 \cdot 10^{2000} : 6 \cdot 10^{200}$.

3.67 (*). Trasforma i numeri in notazione scientifica e scrivi nella stessa forma il risultato.

$$\frac{(0,00002)^2 : 30000000 \cdot (0,1)^5}{4000 \cdot 0,02 : 0,000003}.$$

3.68 (*). Trasforma i numeri in notazione scientifica e scrivi nella stessa forma il risultato.

$$\frac{(3000)^2 : 0,000003 : 20000000}{0,00002 : 0,00000004}.$$

3.69 (*). Trasforma i numeri in notazione scientifica e scrivi nella stessa forma il risultato.

$$\frac{(2000)^3 \cdot (0,000001)^5 : 20}{(0,0003)^2 : 3.000.000}.$$

3.70 (*). Trasforma i numeri in notazione scientifica e scrivi nella stessa forma il risultato.

$$\frac{4000^2 \cdot 0,000012}{3 \cdot 10^9 \cdot 2000^3}.$$

3.71. Disponi in ordine di distanza dal Sole i seguenti pianeti, in base alla distanza media riportata tra parentesi: Mercurio $(5,8 \cdot 10^7)$, Nettuno $(4,5 \cdot 10^9)$, Giove $(7,8 \cdot 10^8)$, Plutone $(6,1 \cdot 10^9)$, Urano $(2,7 \cdot 10^9)$, Terra $(1,5 \cdot 10^8)$, Marte $(2,3 \cdot 10^8)$.

3.72. Determina l'ordine di grandezza dei seguenti numeri.

a) 126 000 000; b) 0,0000098; c) 7 000 000; d) 0,0000000027.

3.73. Completare la seguente tabella.

Numero	26000000	0,000083	490000	0,0000081
Notazione scientifica				
o.d.g.				

3.74. Determina l'ordine di grandezza del risultato dei seguenti calcoli.

a) $5,3 \cdot 10^5 \cdot 1,2 \cdot 10^3 - 2,5 \cdot 10^6$;
b) $(5 \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10^3)^3$.

3.10 - Problemi con le frazioni

3.75. La distanza Roma - Bari è di 450 km. Se ho percorso i 2/5 del tragitto quanti chilometri mancano ancora da percorrere?

3.76 (*). Lucia ha letto 3/5 di un libro, gli rimangono da leggere 120 pagine. Quante pagine ha il libro?

3.77. Una persona possiede € 525. Se spende i 3/5 della somma e poi i 2/3 della rimanente, quale somma di denaro gli rimane?

3.78. Luigi ha 18 anni, cioè i 3/7 dell'età di sua madre, che a sua volta ha i 4/5 dell'età del marito. Quali sono l'età del padre e della madre di Luigi?

3.11 - Le percentuali

3.79. Trasforma i seguenti numeri percentuali in numeri decimali.

$$12\%;\quad 0,03\%;\quad 4,3\%;\quad 80\%;\quad 3,5\%;\quad -0,2\%;\quad 15\%;\quad -0,38\%.$$

3.80. Trasforma i seguenti numeri decimali in percentuali.

$$-1,25;\quad 0,03;\quad -2,\overline{1};\quad 0,\overline{13};\quad 5,080;\quad 3,7\overline{52};\quad -0,38.$$

3.81. Trasforma i seguenti numeri percentuali in frazioni ridotte ai minimi termini.

$$12\%;\quad 0,03\%;\quad 4,3\%;\quad 80\%;\quad 3,5\%;\quad -0,2\%;\quad 15\%;\quad -0,38\%.$$

3.82. Trasforma le seguenti frazioni in numeri percentuali.

$$-\frac{3}{2};\quad \frac{4}{3};\quad -\frac{6}{5};\quad \frac{2}{25};\quad \frac{5}{8};\quad \frac{5}{6};\quad -\frac{5}{12}.$$

3.83. A una scuola di ballo si sono iscritte 120 persone; il 20% frequentano i corsi di ballo liscio. In quanti frequentano i corsi di liscio?

3.84. Una scuola attiva dei corsi di lingue. 32 studenti si iscrivono al corso di inglese, 24 al corso di francese e 16 al corso di tedesco. Qual è la percentuale degli alunni iscritti al corso di inglese, rispetto al totale degli iscritti?

3.85. A una scuola di ballo sono iscritte 120 persone. Di queste il 68% sono donne. Quanti sono gli uomini?

3.86. Una bici viene venduta con uno sconto del 10%, il prezzo di listino prima dello sconto era € 175. Quanto costa ora?

3.87 (*). Una canna da pesca da € 125 è in vendita promozionale a € 70. Qual è la percentuale di sconto applicata?

3.88 (*). Per l'acquisto di un armadio Maria è riuscita a spuntare, dopo lunghe discussioni, uno sconto del 25% risparmiando ben € 120. Qual era il prezzo senza sconto dell'armadio?

3.89. Completa la seguente tabella.

Prezzo di listino (€)	Sconto (€)	sconto (%)	Prezzo scontato (€)
120	12	10	108
250	10		
125	5		
170		10	
1 100		15	
220			20
12 000			700
	15	15	
	30		50
		25	140
	120	30	

3.90. Calcola:

a) il 10% di 100;
b) il 30% di 700;
c) il 20% di 500;
d) il 15% di 150;
e) il 25% di 1250;
f) il 16% di 120.

3.91. Quale percentuale è:

a) 10 bocciati su 120 alunni: la percentuale di bocciati è ......;
b) 15 alunni su 45 giocano a calcio: la percentuale di alunni che giocano a calcio è ......;
c) 10 alunni su 28 suonano il piano: la percentuale di alunni che suonano il piano è ......;
d) 20 alunni su 120 frequentano il corso di teatro: la percentuale di alunni che fanno teatro è ......

3.92. Se aumenta il prezzo:

a) un chilo di pane lo scorso anno costava € 1,20, quest'anno è aumentato del 3%, allora costa ......;
b) un litro di benzina lo scorso anno costava € 1,514, quest'anno costa € 1,629 allora è aumentata del ......%;
c) un litro di latte lo scorso anno costava € 1,25, quest'anno è aumentato di 0,05%, allora costa € ......;
d) un chilo di formaggio parmigiano lo scorso anno costava € 23,50 quest'anno costa € 25,80 allora è aumentato del ......%.

3.93. Se il prezzo diminuisce:

a) un chilo di pomodori lo scorso anno costava € 1,20, quest'anno è diminuito del 5%, allora costa € ......;
b) un chilo di peperoni lo scorso anno costava € 2,10, quest'anno costa € 1,80 allora è diminuito del ......%;
c) un chilo di cicoria lo scorso anno costava € 0,80, quest'anno due chili costano € 1,20, allora la cicoria è diminuita del ......%;
d) un chilo di arance lo scorso anno costava € 1,40, quest'anno le arance sono diminuite del 15%, allora costano al chilo € ......

3.94. Dato il costo di un oggetto IVA esclusa, calcola il prezzo IVA inclusa.

Costo IVA esclusa (€)	IVA (%)	Costo IVA inclusa (€)
130	21	
1 250	21	
17,40	4	
	21	170
	21	12 240
101,00		105,60

3.95. Dati imponibile (costo senza IVA) e IVA determina il costo comprensivo di IVA, e viceversa

Imponibile (€)	IVA (%)	IVA (€)	Totale
100	21	21	121
1 100	21		
1	23		1 100
1 000			1 100
	21	141	
1 100		100	

3.96. La seguente tabella riporta i dati relativi alla provenienza di una classe prima di una scuola secondaria.

	Scuola di provenienza			
Sesso	Scuola A	Scuola B	Scuola C	Altre scuole
M	6	4	4	2
F	5	3	4	2

a) Qual è la percentuale di alunni provenienti dalla Scuola A?
b) qual è la percentuale di maschi provenienti dalla Scuola C?
c) qual è la percentuale di alunni che non provengono dalle scuole A o B o C?
d) qual è la percentuale di alunni che provengono dalle scuola A o C?

3.97. Agli esami di stato un gruppo di allievi (A) ha riportato i seguenti punteggi (P) in centesimi.

P	60	64	68	70	74	75	80	82	83	84	85	86	87	88	89	90	92	94	98	100
A	2	3	1	5	4	2	1	2	3	2	4	1	3	2	1	3	2	4	6	8

Per poter partecipare a un concorso occorre aver conseguito il diploma con un punteggio superiore a 75. Quale percentuale di diplomati potrà partecipare al concorso? Se solo il 10% di quelli che si sono presentati al concorso lo hanno superato, quanti degli allievi hanno superato il concorso?

3.98. Tra i dipendenti di un'azienda si effettua un sondaggio per decidere se è opportuno introdurre un nuovo tipo di turno di lavoro. Nella tabella sono riportati i risultati del sondaggio.

	favorevoli	contrari
uomini	75	49
donne	81	16

a) Tra le donne, qual è la percentuale di lavoratrici favorevoli al nuovo turno?
b) qual è la percentuale di lavoratori (uomini e donne) che non sono favorevoli al nuovo turno?

3.99. Sapendo che $\overline{AB} = 12\,\text{cm}$ e che $\overline{BC} = \frac{3}{4}\overline{AB}$ calcola la lunghezza di BC.

3.100. Sapendo che $\overline{AB} = 36\,\text{cm}$ e che $\overline{AB} = \frac{6}{5}\overline{BC}$ calcola la lunghezza di BC.

3.101. Sapendo che $\overline{AB} + \overline{BC} = 15\,\text{cm}$ e che $\overline{AB} = \frac{2}{3}\overline{BC}$ calcola le lunghezze di AB e BC.

3.102. Sapendo che $\overline{AB} - \overline{BC} = 4\,\text{cm}$ e che $\overline{AB} = \frac{4}{3}\overline{BC}$ calcola le lunghezze di AB e BC.

3.103. Determina le ampiezze di due angoli complementari sapendo che uno è la metà dell'altro.

3.104. Determina le ampiezze di due angoli supplementari sapendo che uno è i 2/3 dell'altro.

3.105. Determina le misure dei due lati di un rettangoli sapendo che ha perimetro di 128 cm e che l'altezza è 3/2 della base.

3.106. La superficie della Toscana è divisa tra le seguenti provincie, calcola per ciascuna di esse la percentuale del territorio posseduta: Arezzo (3 235 km^2), Firenze (3 514 km^2), Grosseto (4 504 km^2), Livorno (1 211 km^2), Lucca (1 773 km^2), Massa e Carrara (1 156 km^2), Pisa (2 444 km^2), Pistoia (965 km^2), Prato (365 km^2), Siena (3 821 km^2).

3.107. La superficie della Terra è per il 70% ricoperta di acqua e per il 30% di terraferma. Per 1/5 la terraferma è coperta da ghiaccio e deserto, per 2/3 da foreste e montagna. La parte rimanente è terreno coltivato. Qual è in percentuale la parte della superficie terrestre coltivata?

3.108 (*). In 30 kg di sapone concentrato al 30% quanta acqua e quanto sapone ci sono?

3.109. Una soluzione di 6 kg è concentrata al 45%. Quanta sostanza concentrata devo aggiungere per avere una nuova soluzione concentrata al 60%.

3.110. Quanta acqua bisogna aggiungere a una soluzione di 2 kg concentrata al 12% per ottenere una nuova soluzione concentrata al 10%?

3.111. Si hanno due soluzioni delle stesse sostanze, una concentrata al 10% e l'altra al 30%. In quale proporzione occorre miscelare le due soluzioni in modo da ottenere 6 kg di soluzione concentrata al 15%?

3.112. Una società ha acquistato dei PC nuovi per i propri dipendenti. Pagandoli in contanti ha ottenuto uno sconto dell'8%, versando di conseguenza l'importo di € 24 500. Qual è il valore iniziale della merce acquistata?

3.113. Una persona paga un tappeto € 1200, lo stesso tappeto l'anno precedente costava € 900. Quanto è stato l'aumento percentuale da un anno all'altro?

3.114. Quanto vale il 2012% di 2012?

3.12 - Proporzioni

3.115. Verifica se i gruppi di numeri formano nell'ordine scritto una proporzione.

a) $\frac{1}{5}; \frac{3}{5}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}$ b) $\frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{5}{6}$ c) 35; 7; 48; 6 d) 14; 3,5; 4; 1 e) $\frac{1}{5}; \frac{4}{3}; \frac{4}{27}; \frac{8}{9}$

3.116. Applica la proprietà fondamentale delle proporzioni per verificare quale delle seguenti scritture formano una proporzione.

a) $10 : 11 = 12 : 13$ Sì No
b) $7 : 14 = 21 : 42$ Sì No
c) $64 : 48 = 8 : 6$ Sì No
d) $18 : 15 = 12 : 10$ Sì No
e) $10 : 6 = 5 : 3$ Sì No
f) $1,2 : 1,4 = 3,6 : 4,2$ Sì No

3.117. Disponi opportunamente i numeri in modo che formino una proporzione.

a) 7 5 20 28;
b) 8 3 2 12;
c) 5 6 2 15;
d) 3 5 9 15;
e) 6 7 2 21;
f) 3 8 6 16.

3.118. Completa la seguente tabella.

1° termine	2° termine	Antecedente	Conseguente	Rapporto	Rap. inverso
32	8	32	8	$32:8=4$	$\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$
12	13				
$\frac{3}{5}$	3				
				$\frac{1}{4}:\frac{3}{2}=\frac{1}{6}$	
					$\frac{7}{10}=\frac{21}{30}$

3.119. Completa la seguente tabella.

Proporzione	Antecedenti	Conseguenti	Medi	Estremi	Valore rapporto
$3:5=21:35$	3 e 21	5 e 35	5 e 21	3 e 35	0,6
$54:12=36:8$					
$7:21=9:27$					
$\frac{5}{4}:\frac{15}{8}=4:6$					

3.120. Calcola il termine incognito delle seguenti proporzioni.

a) $269\ 2:24=3:x$;

b) $x:0,\overline{6}=0,8:1,\overline{3}$;

c) $\frac{7}{3}:x=\frac{4}{3}:\frac{8}{35}$;

d) $\left(1-\frac{5}{12}\right):\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{3}\right)=x:\left(\frac{9}{8}-\frac{5}{8}\right)$.

3.121. Calcola il termine incognito delle seguenti proporzioni.

a) $\left(\frac{3}{20}+\frac{3}{8}\right):x=\left(1-\frac{1}{3}\right):\left(\frac{11}{3}+\frac{1}{7}\right)$;

b) $\left(1+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right):\left(\frac{5}{8}+\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{5}{8}+\frac{1}{2}\right):x$;

c) $\left(\frac{4}{5}+1\right):\left(3-\frac{1}{5}\right)=x:\left(2+\frac{1}{3}\right)$.

3.122 (*). Calcola il termine incognito delle seguenti proporzioni.

a) $\left(\frac{5}{3}+\frac{8}{3}-3\right):x=x:\left(1+\frac{5}{16}+\frac{3}{8}\right)$;

b) $\left\{\frac{5}{2}:\left[\frac{1}{2}\cdot\left(3+\frac{1}{3}:\frac{5}{3}-\frac{14}{5}\right)\right]\right\}:x=x:\left\{\frac{3}{11}\left[\left(5-\frac{3}{2}\right)\cdot\frac{2}{21}+\frac{3}{2}\right]\right\}$;

c) $(70-x):6=x:8$;

d) $\left(\frac{5}{6}-x\right):\left(1-\frac{1}{2}\right)=x:\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\right)$.

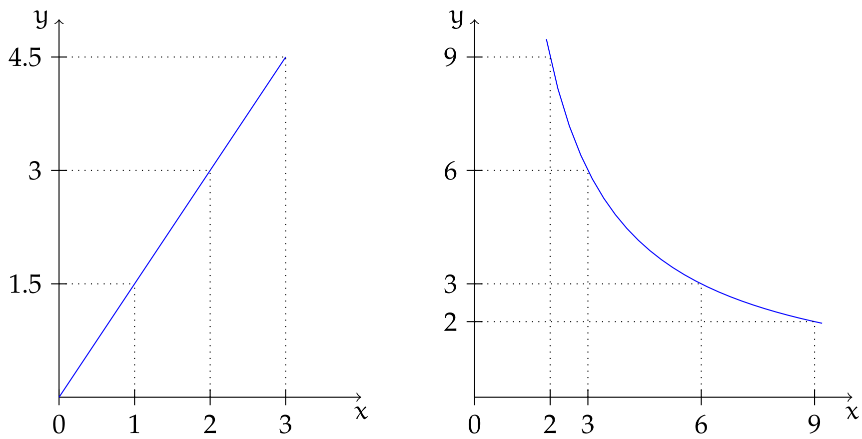
3.123 (*). Calcola il termine incognito delle seguenti proporzioni.

a) $x : y = 5 : 3$, con $x + y = 24$;
b) $\left(6 + \frac{3}{5}\right) : y = \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{15}\right) : x$, con $x + y = \frac{13}{4}$;
c) $\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{6}\right) : \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{20}\right) = x : y$, con $x - y = \frac{1}{3}$;
d) $x : \frac{2}{7} = y : \frac{1}{2} = z : \frac{3}{14}$, con $x + y + z = \frac{1}{2}$.

3.124. Per ciascuna funzione costruisci la tabella dei valori (almeno 5) e stabilisci se sono riferite a grandezze direttamente proporzionali, inversamente proporzionali o nessuno dei due casi.

a) $y = 5x$;
b) $y = \frac{1}{2x}$;
c) $y = \frac{2}{3}x$;
d) $y = \frac{1}{x} + 3$;
e) $y = 6x + 1$;
f) $y = \frac{24}{x}$;
g) $y = 4x$;
h) $y = \frac{18}{x}$;
i) $y = \frac{1}{2}x$;
j) $y = \frac{6}{x}$;
k) $y = 5 + x$;
l) $y = 3x + 2$;
m) $y = \frac{2}{x}$;
n) $y = 2x$;
o) $y = 2x - 1$;
p) $y = \frac{1}{2x} + 1$;
q) $y = 2x - 2$.

3.125. Osserva i grafici e rispondi alle domande:



a) quale grafico rappresenta una funzione di proporzionalità diretta e quale di proporzionalità inversa?
b) qual è il coefficiente di proporzionalità? Del primo grafico è . . . . . . del secondo è . . . . . .
c) qual è la funzione? Del primo grafico è . . . . del secondo grafico è . . . .

3.126. La tabella seguente riporta alcuni valori che esprimono il variare della grandezza y al variare di x:

x	1	2	3	4	6	8	12	24
y			8		4		2	1

a) Completa la tabella sulla base dei valori noti;
b) si tratta di grandezze direttamente o inversamente proporzionali?
c) qual è la legge che lega y a x?
d) rappresenta su un piano cartesiano questa relazione.

3.127. La tabella seguente riporta alcuni valori che esprimono il variare dello spostamento s (espresso in km) in funzione del tempo t (espresso in ore) relativo a un corpo che si muove con velocità costante.

t	1	2	3	4	5	6	7	8
s	7		21		35		49	56

a) Completa la tabella sulla base dei valori noti;
b) si tratta di grandezze direttamente o inversamente proporzionali?
c) qual è la legge che lega s a t?
d) rappresenta su un piano cartesiano questa relazione.

3.14.2 Esercizi riepilogativi

3.128. Esegui le seguenti operazioni con le frazioni, quando è possibile.

a) $\frac{2}{3} \cdot 0$;
b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$;
c) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{0}$;
d) $\frac{1}{2} \cdot \frac{0}{2}$;
e) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$;
f) $\frac{2}{3} : 0$;
g) $\frac{2}{3} - 0$;
h) $1 : \frac{2}{3}$;
i) $\frac{1}{4} \cdot 4$;
j) $\frac{1}{4} : 4$;
k) $0,3 : 3$;
l) $1,5 : 1,\overline{5}$;
m) $1,5 : 1,5$;
n) $1,5^0$;
o) $(1-1)^0$;
p) $(-1)^{-1}$;
q) $3^0 : 2^0$;
r) $(-2)^{-2} : (-1)^{-1}$.

3.129. Verifica le seguenti uguaglianze trovando la frazione generatrice.

$$\frac{1,\overline{7}}{1,\overline{3}} = 1,\overline{3}; \quad \frac{2,\overline{7}}{1,\overline{6}} = 1,\overline{6}; \quad \frac{1,\overline{16}}{2,\overline{3}} = 0,5; \quad \frac{2,\overline{3}}{1,\overline{6}} = 1,4.$$

3.130. Sottolinea le frazioni equivalenti a $\frac{3}{5}$ tra le seguenti.

$$\frac{6}{10}; \quad \frac{25}{100}; \quad \frac{12}{10}; \quad \frac{5}{25}.$$

3.131. Completa le seguenti uguaglianze.

a) $\frac{3}{5}=\frac{\dots}{10}$; b) $\frac{75}{10}=\frac{\dots}{100}$; c) $\frac{7}{\dots}=\frac{1}{2}$; d) $3=\frac{24}{\dots}$.

3.132. Completa:

$$\frac{3}{4}+\dots=1; \qquad 1-\dots=\frac{4}{13}; \qquad \frac{11}{12}\cdot\dots=\frac{8}{55}; \qquad \dots:\frac{5}{3}=\frac{3}{5}.$$

3.133. Correggi le seguenti operazioni.

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 7+4\cdot 2}{4+7}; \qquad \frac{8}{25}-\frac{3}{10}=\frac{8-3}{50}; \qquad 3\cdot\frac{11}{13}=\frac{33}{39}.$$

3.134. Completa la seguente tabella.

	Sottraendo			
$-$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{2}$
Minuendo $\frac{23}{12}$				
$\frac{13}{2}$				
$\frac{9}{4}$				

3.135. Completa la seguente tabella.

	Primo fattore			
$\times$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{11}{4}$
Minuendo $\frac{3}{4}$				
$\frac{5}{2}$				
$\frac{7}{3}$				
$\frac{8}{5}$				

3.136. Riscrivi in simboli e motiva la verità o falsità di ciascuna proposizione:

a) il triplo di un terzo è l'unità;

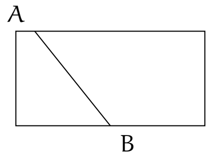


FIGURA 3.6: 3.137

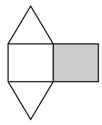


FIGURA 3.7: 3.138

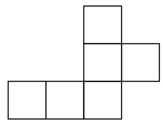


FIGURA 3.8: 3.139

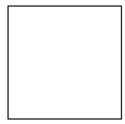


FIGURA 3.9: 3.140

b) la somma di un quinto con il doppio di un mezzo è sei quinti;
c) un ottavo è maggiore di un quinto.

3.137. Relativamente alla figura 3.6, quale proposizione è vera?

a) Il segmento AB la divide in due parti uguali;
b) il segmento AB la divide in due quadrilateri.

3.138. La parte in grigio rappresenta 1/4 della figura 3.7?

3.139. Costruisci una figura che sia gli 11/6 della figura 3.8.

3.140. Colora i 3/4 della figura 3.9.

3.141. Costruire la frazione $\frac{N}{D}$ significa dividere l'unità in . . . parti uguali e prendere . . . parti.

3.142. Rappresenta su una opportuna retta numerica le seguenti frazioni.

$$\frac{3}{4};\quad \frac{3}{8};\quad \frac{1}{3};\quad \frac{5}{4};\quad \frac{2}{5};\quad \frac{6}{3};\quad \frac{5}{6};\quad \frac{12}{4};\quad \frac{19}{8};\quad \frac{16}{5}.$$

3.143 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left(-1+\frac{1}{2}\right):\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{4}\right)$;
b) $\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)$;
c) $\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right):\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\right)$;
d) $\frac{1}{3}-\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{6}\right)+\frac{3}{2}-\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{7}{30}-\frac{4}{5}\right)+\frac{5}{6}\right]$.

3.144 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\frac{5}{6}-\frac{2}{3}\cdot\frac{12}{5}+\frac{3}{2}\cdot\left[\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{12}{7}-\frac{5}{2}\right)+\frac{5}{6}\right]$;
b) $\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{12}{5}-\frac{3}{4}:\left[0{,}75-\frac{5}{6}\right]$;
c) $\frac{1}{3}:\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{6}-\frac{1}{15}$;

d) $-\left(\frac{3}{4}+1,4\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{8}\right)+\frac{6}{5}$.

3.145 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left(\frac{2}{3}-\frac{7}{6}\right)-\left(1+\frac{5}{6}\right):\left(2-\frac{1}{3}\right)$;

b) $\left(\frac{5}{3}-\frac{7}{2}\right)\cdot\frac{4}{5}+\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{15}\right)\cdot\frac{5}{2}\right]^2$;

c) $\frac{63}{55}\cdot\frac{44}{45}+\frac{14}{75}\cdot\frac{15}{35}+\frac{2}{25}\cdot10-\frac{16}{25}:\frac{3}{5}+\frac{1}{15}$;

d) $\left\{\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right):\left(\frac{5}{6}-\frac{5}{12}\right)\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right]:\frac{1}{4}\right\}-\frac{2}{3}\cdot(-0,6)$.

3.146 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\frac{4}{5}-\frac{27}{7}\cdot\frac{1}{12}+\frac{8}{21}:\frac{8}{6}+\frac{13}{2}\cdot\frac{1}{7}-\frac{9}{14}+\frac{1}{7}-\frac{12}{25}:\frac{3}{5}$;

b) $\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)\cdot\frac{7}{2}-\left(\frac{10}{18}-\frac{7}{15}\right):\frac{2}{9}\right]:\frac{14}{15}\cdot\frac{1}{4}+1$;

c) $\left[\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{10}\right):\frac{37}{5}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{3}\right]^2:\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{12}\right)^2\right]$;

d) $\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{7}{5}+\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{7}\right):\frac{2}{14}-\frac{1}{400}$.

3.147 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left(3-\frac{18}{5}-\frac{5}{6}\right)\cdot\left(-\frac{9}{4}+\frac{3}{4}\right)-\frac{2^2}{3}+\frac{1}{60}$;

b) $\left(\frac{3}{5}-1\right)-\left(\frac{1}{8}+\frac{7}{5}-\frac{17}{20}\right)+\left(\frac{7}{6}-\frac{2}{5}\right):\frac{4}{15}-\left(\frac{3}{2}-\frac{5}{2}:\frac{1}{5}\right):\frac{22}{17}-\frac{3}{10}$;

c) $\frac{19}{3}\cdot\left(\frac{3}{5}+\frac{3}{2}-2\right):\left(\frac{3}{10}-1,25\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-1\right)+\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{3}{10}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)^2$;

d) $\left[\left(1+\frac{1}{2}\right):3-\left(2+\frac{3}{2}\right)+1\right]+\left(3-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right)-1\left(-2+\frac{3}{2}\right)^2$.

3.148 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left[\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{4}+\frac{2}{5}\right)\right]-\left[\frac{3}{5}-\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)\right]$;

b) $2-\left[3+1-\left(2-\frac{1}{2}\right)\right]-\left(-2-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\right):\left(-\frac{1}{2}\right)$;

c) $\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{6}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\right)+\frac{10}{8}\cdot\left(\frac{5}{7}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\cdot\frac{1}{6^2}$;

d) $\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^4\cdot\left[\left(\frac{2}{5}\right)^8:\left(\frac{2}{5}\right)^3\right]^2\right\}^2:\left[\left(\frac{2}{5}\right)^3\cdot\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3\right]^4$.

3.149 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $1-\left[\left(\frac{3}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2:\left(\frac{3}{2}\right)^4-\left(\frac{4}{5}\right)^3:\left(\frac{4}{5}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^4:\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]$;

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+\frac{2^2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}-\frac{(-2)^{-2}}{5}-2^4$;

c) $\left\{\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{2}:\left(\frac{6}{8}+1-\frac{3}{4}\right)\right]^3\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{8}\right)+\frac{3}{5}\right\}:\frac{1}{5}$;

d) $\left\{\frac{1}{2}+\frac{15}{2}:\left[\frac{1}{2}:\left(1-\frac{3}{4}\right)+1\right]\right\}\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\right)^5:\left(\frac{1}{3}\right)^4\right]^2$.

3.150 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left\{\left[\left(\frac{5}{4}\right)^2:\left(\frac{1}{2}\right)\right]\cdot\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}\right)\cdot\frac{4}{5}\right]\cdot\frac{1}{14}\right\}^2:\left(1-\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{10}\right)^2$;

b) $\left[(0,4-1)^2:0,01-\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}$;

c) $\frac{7}{15}\left\{\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{11}{16}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right):\left[\left(\frac{4}{7}+\frac{5}{4}\right):\frac{17}{7}\right]\right\}\cdot\frac{9}{5}$;

d) $\left(2+\frac{1}{2}\right)^2:\left(2-\frac{1}{2}\right)^{-2}+\left[\left(2+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{7}{3}\right)^{-2}\right]^{-1}$.

3.151 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left[\left(3+\frac{1}{2}-\frac{5}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]:\left\{\frac{3}{2}-\left[\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{11}+\frac{5}{22}+\frac{7}{33}\right):\frac{82}{33}+\frac{1}{12}\right]^5\right\}^3:\frac{1}{4}$;

b) $\left\{\left[\left(\frac{8}{3}\right)^{10}:\left(\frac{8}{3}\right)^6\right]^2\cdot\left[\left(\frac{8}{3}\right)^8:\left(\frac{8}{3}\right)^3\right]\right\}:\left(\frac{8}{3}\right)^{11}$;

c) $\left(1+\frac{3}{2}\right)^2\cdot\left(2-\frac{5}{2}\right)^{-2}\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-2}$;

d) $\left(\frac{1}{3}-1\right)-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{6}{5}-\left(\frac{2}{9}-\frac{1}{5}\right)\cdot 3-\frac{1}{30}$.

3.152 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\dfrac{\left(1+\frac{2}{3}\right):5+\left(2-\frac{2}{3}\right)}{3+\left(\frac{1}{2}-1\right)}:\dfrac{\left(5-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{7}{3}-\frac{2}{35}\right)}{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(3-\frac{1}{3}\right)}$;

b) $8,75\cdot\left(\frac{2}{5}-0,2\right)\cdot\left\{\left[2-1,\overline{6}-\left(0,2+\frac{2}{3}\right)\right]\cdot\left(\frac{1}{7}-\frac{17}{4}\right)\right\}-\frac{2}{3}\cdot\left(2-\frac{1}{2}\right)+7,5-0,\overline{3}$;

c) $\left[\left(\frac{7}{5}-\frac{1}{2}\right)^2:\left(\frac{9}{10}\right)^2-\left(1+\frac{2}{3}-2\right)^2\right]^2:\left(\frac{10}{9}\right)^2-\left(1+\frac{8}{5}-\frac{1}{25}\right)$;

d) $\left(\frac{1}{6}+0,1\right)\cdot 0,16\cdot(1-1,0\overline{1})^{-1}$.

3.153 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\dfrac{\left\{\left[\frac{1}{2}-\left(2-\frac{11}{4}\right)\right]:(-3,5)\right\}\cdot\left(1-\frac{4}{5}\right):7^{-2}}{\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}(-3)^2(-1)^2:(-3)^2}$;

b) $\left(\frac{4}{3}-2\right)\left(-\frac{1}{2}\right):\left[\frac{5}{7}\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(2+\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{4}-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right)\right]:\frac{11}{6}$;

c) $\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-2}:\left(\frac{5}{2}-2\right)^{-3}$.

3.154 (*). Calcola il valore della seguente espressione.

$$\left\{\left[\left(1-\frac{3}{5}\right)^3:\left(\frac{2}{5}\right)^4\right]:\left(\frac{3}{5}-1\right)^2\right\}^6 :\left\{\left[\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{7}{5}-1\right)^2\right]^2\cdot\left[\left(1-\frac{3}{5}\right)^5:\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)^4\right]^2\right\}^2.$$

3.155 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)\left(-1-\frac{1}{3}\right)+\left[\left(1+\frac{4}{3}\right)\cdot\left(4-\frac{9}{2}\right)\right]\cdot\frac{3}{4}+3-\left(\frac{2}{27}\cdot\frac{9}{10}-\frac{1}{10}\right)-\frac{9}{40}$;

b) $\left[0,625+4,5\cdot(0,75-0,\overline{6})\right]:\left[0,875+0,75\cdot(2,5-2,\overline{3})\right]$;

c) $\left\{3-\left[0,\overline{6}-\left(0,1\overline{6}+\frac{5}{12}\right)\right]:0,25\right\}^2\cdot(0,\overline{6}-0,625)$;

d) $\left(\frac{12}{9}-1\right)^2\cdot\left(\frac{2}{81}:3\right)^{-1}\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{7}{4}\right)^3\cdot\left[-\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{49}-\frac{3}{147}\right)\right]-\frac{1}{(-4)^2}$.

3.156 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}-\dfrac{\left(\frac{1}{3}+0,5\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{3}-0,5\right)^{-2}}+\left(\frac{0,5-0,1}{1-0,5}\right)^{-2}-4^{-2}$;

b) $\left[0,1\overline{6}+(0,1\overline{36}+0,41\overline{6}-0,2\overline{27}):0,3\overline{90}\right]:\left[0,\overline{36}+2.25\cdot(0,\overline{5}-0,\overline{27})\right]$;

c) $\dfrac{1,6-0,5\cdot(0,\overline{6}-0,5):(1-0,\overline{6})^2-0,7}{3\cdot(1-0,5)^2+0,875-(1-0,5)^2:0,2-0,6\cdot 0,5}$;

d) $0,1\overline{6}^2+\left[1,5:1,5^2+(1,\overline{6}-0,5):(2-0,\overline{3})+(0,\overline{6}+0,5-0,2)\cdot 0,75:5,8\right]\cdot 0,\overline{6}$.

3.157 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left\{0,8\overline{3}-\left[0,\overline{6}+(0,75-0,\overline{6}^2-(1-2,\overline{3}\cdot 0,25))\right]+0,\overline{6}:0,\overline{8}\right\}:1,02\overline{7}$;

b) $\dfrac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{13^2-12^3}}-\sqrt{\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{24}}$;

c) $\sqrt{20-2\cdot(2+3)+(2+1)\cdot 5}+\sqrt{48:6-3\cdot 2+10:5}$;

d) $\sqrt{\dfrac{1}{9}\cdot\left\{\left[\dfrac{11}{3}-\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)\right]:\left[\left(2-\dfrac{7}{4}\right)+\dfrac{10}{3}\right]\right\}}$.

3.158 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\sqrt{\left\{\left[\left(\dfrac{5}{4}\right)^2:\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\right]\left[\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{20}\right)\cdot\dfrac{4}{5}\right]\cdot\dfrac{1}{4}\right\}^2:\left(1-\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{3}{10}\right)^2}$;

b) $\left(1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}\right)^{-2}\cdot\left(1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}\right)^{2}\cdot\left(4-\dfrac{9}{2}\right)^{-3}$.

3.159 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni.

a) $\left[\left(2+\dfrac{1+\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{2}}\right)^{-3}\cdot\left(\dfrac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}}{\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{3}}-\dfrac{1}{8}\right)\cdot\left(-\dfrac{3}{10}\right)^{-2}\right]^{-2}$;

b) $\dfrac{\left[-\left(\dfrac{9}{4}+\dfrac{9}{5}\right)-\dfrac{1}{20}\right]\cdot\left(\dfrac{11}{4}-\dfrac{5}{2}\right)}{1-\left[1-\left(-\dfrac{17}{7}\right)\right]-\left(-1+\dfrac{2}{7}-\dfrac{1}{14}\right)}-\left[\left(\dfrac{1}{7}+\dfrac{33}{21}\right)-\left(1-\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{7}\right)\right]$.

3.160 (*). Calcola il valore della seguente espressione.

$$\left(\frac{7}{6}-\frac{5}{4}\right):\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{10}+\left\{\left[2-\left(2+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\right):\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\cdot 2-\frac{7}{10}\right\}$$
$$\cdot\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)+\left[\frac{1}{3}+\left(1-\frac{1}{4}\right):\left(-\frac{9}{2}\right)+\frac{1}{15}\right].$$

3.161 (*). Calcola il valore della seguente espressione.

$$\left(-\frac{3}{2}-1\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}+1\right)+\left(\frac{3}{4}-2\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}-2\right)\cdot\frac{4}{11}+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)$$
$$-\left[\frac{1}{9}-\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right):\left(\frac{9}{4}+1+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)+\frac{2}{3}:\left(\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+\frac{1}{3}\right)\right]+\left(\frac{7}{6}-1\right)^2.$$

3.162 (*). Calcola il valore della seguente espressione.

$$\left[-\left(-\frac{1}{5}\right)^2:\left(\frac{3}{5}-1\right)^{-2}\right]\cdot\left(-1-\frac{1}{5}\right)^{-2}\cdot\left(-2\right)^{-2}\cdot 30^2$$
$$-\left\{-\left[\left(-3-\frac{1}{4}+\frac{13}{4}\right)^2:(-4)^{-2}\right]\right\}.$$

3.163 (*). Calcola il valore della seguente espressione.

$$\left[-(-1)^3+\left(\frac{2}{3}-1\right)^{-2}\right]\cdot\left(-1-\frac{1}{7}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{-1}{5}\right)^{2} +\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left[\left(-1-\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot\left(-\frac{3}{2}-1\right)^{2}\right]^{-1}:(-5)^{-2}\right\}^{2}.$$

3.164 (*). Calcola il valore della seguente espressione.

$$1-\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)^{2}-\left[\frac{3}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{3}-1+\frac{4}{5}\right]:\left[-\left(\frac{4}{5}\right)^{0}-\left(\frac{7}{5}-2\right)^{2}\right] -\frac{3}{2}+\left[\left(-\frac{4}{5}\right)^{-3}\right]^{2}:\left(-\frac{4}{5}\right)^{-5}.$$

3.165. Calcola il valore dell'espressione $E=A-B$, dove

$$A=\left(\left(\left(-\frac{3}{7}\right)^{4}:\left(-\frac{7}{3}\right)^{-2}\right)\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}\right)^{-2},\qquad B=\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{-6}\cdot\left(1-\frac{4}{7}\right)^{5}\right)^{2}.$$

3.166 (*). L'età di Paolo è i 5/11 di quella della madre che ha 44 anni. Quanti anni ha Paolo?

3.167 (*). L'età di Marco è 1/2 di quella di Paolo che è 1/3 di quella del padre che ha 54 anni. Quanti anni ha Marco?

3.168 (*). I 2/5 del libro che stiamo leggendo è la parte più noiosa. Le rimanenti 63 pagine sono invece le più avvincenti. Di quantepagine è formato il libro?

3.169 (*). Gli alunni del primo e del secondo anno di una scuola media sono rispettivamente i 3/7 e i 2/7 del totale. Sapendo che gli alunni che frequentano la terza media sono 54, quanti sono tutti gli alunni della scuola?

3.170 (*). Al supermercato ho speso 7/10 della somma di denaro che possedevo; successivamente ho incassato un credito uguale ai 13/20 della somma iniziale e ho speso 2/15 sempre della somma iniziale per un rifornimento di benzina. Sapendo che sono rimasto con 220,50 euro, quale somma di denaro possedevo inizialmente?

3.171 (*). In una fattoria ci sono vitelli, capre e animali da cortile per un totale di 75 capi. I vitelli sono i 2/5 di tutti gli animali, mentre le capre sono i 2/3 degli animali da cortile. Quanti vitelli, capre e animali da cortile ci sono?

3.172 (*). Tre casse pesano complessivamente 220 kg; la seconda pesa 1/2 della prima e la terza pesa 1/3 della seconda. Calcola il peso di ciascuna cassa.

3.173 (*). Tre operai devono eseguire un lavoro. Il primo da solo lo farebbe in 12 giorni, il secondo in 18 giorni e il terzo in 36 giorni. Lavorando insieme, in quanti giorni i tre operai potrebbero eseguire tutto il lavoro?

3.174 (*). Un collezionista vende i 3/7 della sua collezione costituita da 385 pezzi. Quanti pezzi gli rimangono?

3.175 (*). In un terreno agricolo sono stati piantati ulivi e mandorli per 266 alberi complessivi. Se gli ulivi sono i 4/10 degli alberi di mandorle, quanti sono gli ulivi e i mandorli

3.176 (*). Il prezzo di copertina di un libro è di 29 euro; quanto verrà pagato con uno sconto del 15%?

3.177 (*). Su 1020 alunni di una scuola, 153 sono stati respinti; qual è la percentuale dei promossi?

3.178 (*). La differenza di età fra Marco e Antonio è di 18 anni e l'età di Marco è i $7/4$ di quella di Antonio. Quanti anni hanno Marco e Antonio?

3.179. Un oggetto è costituito da una lega di zinco e rame. Il suo peso è di 280 g e la percentuale di rame è il 20%. Quanti grammi di zinco contiene?

3.180 (*). Mario va in pizzeria e, nell'attesa di essere servito, conta le persone che vi si trovano: gli uomini sono i $5/9$ delle donne, queste superano gli uomini di 8 unità, infine vi sono 17 bambini. Quante persone ci sono in tutto? Quanti sono gli uomini e le donne?

3.181 (*). Gino compra un'auto da 5 400 euro. Paga i $4/9$ in contanti ed il resto in 5 rate. Qual è l'ammontare di ogni rata? A quale frazione corrisponde ogni rata?

3.182 (*). Il serbatoio di una macchina contiene benzina per i $3/4$ della sua capacità. Dopo aver consumato i $2/3$ della benzina che c'è, si fa un pieno aggiungendone 66 litri. Qual è la capacità del serbatoio?

3.183. Un misurino contiene $1/8$ di kg di farina. Quanti misurini di farina sono necessari per riempire un sacchetto di 5 kg?

3.184 (*). Due gruppi di scavatori scavano una galleria, ciascun gruppo comincia da una delle due parti opposte; se fino a oggi hanno scavato rispettivamente $5/9$ e $3/7$ dell'intera galleria e restano ancora da scavare 2 m, quanto è lunga l'intera galleria?

3.185 (*). L'aria è composta per $39/50$ di azoto e per $21/100$ di ossigeno, la parte rimanente è composta da gas diversi. Quale frazione di aria occupano tutti gli altri gas?

3.186 (*). Luca ha pagato la tassa scolastica in ritardo, ha pagato € 56,16 compresa la mora del 4% per il ritardo nel pagamento. Quanto avrebbe dovuto pagare senza mora?

3.187. In un'azienda $3/10$ degli impiegati sono addetti contabilità. Qual è la percentuale degli addetti contabilità rispetto a tutti gli impiegati azienda?

3.188. A un gruppo di 200 intervistati è stato chiesto quale quotidiano leggono. Le risposte sono state le seguenti:

- 90 leggono "La Repubblica";
- 70 leggono "Il Corriere della sera";
- 30 leggono "La stampa";
- 10 leggono "La gazzetta dello sport".

Trasforma in percentuali i dati ottenuti.

3.189. A un concorso si sono presentati 324 candidati. 22 hanno superato il concorso. Qual è stata la percentuale dei candidati che non hanno superato il concorso?

3.190 (*). Un'auto usata è stata acquistata a € 11 800 in questo modo: il 5% come caparra per la prenotazione, il 20% al momento della consegna e il resto in 12 rate di pari importo. Qual è l'importo della rata?

3.191 (*). Un gestore di un bar acquista i cornetti a € 0,60 rivende a € 0,75. Qual è la percentuale di guadagno sul prezzo di acquisto?

3.192. In un supermercato si vende il pomodoro pelato a € 0,60 in confezioni da 250 g e a 1,00 euro in confezioni da 500 g. Qual è la percentuale di sconto che usufruisce chi compra la confezione da mezzo chilo?

3.193 (*). In una piscina contenente 2800 m^3 di acqua si devono aggiungere 15 litri di cloro. Quanto cloro occorre per 1000 m^3 di acqua?

3.194 (*). La somma di due segmenti misura 34 cm, sapendo che le loro lunghezze sono in proporzione con $3/2$, calcola la loro lunghezza.

3.195 (*). Gli angoli interni di un triangolo hanno misure proporzionali ai numeri 1; 3; 5. Ricordando che la somma degli angoli interni di un triangolo misura 180°, calcola le misure degli angoli.

3.196. Un televisore a 16/9 ha la base di 18 pollici. Quanti pollici misura l'altezza?

3.197. Per preparare una torta bisogna mettere 3 parti di zucchero ogni 4 parti di farina. Se si utilizzano 500g di farina, quanto zucchero bisogna utilizzare?

3.198 (*). Un negoziante, durante il periodo di Natale, aumenta tutti i prezzi del 10%. Se il prezzo iniziale di un paio di scarpe era € 70,00 qual è ora il suo prezzo? Dopo le feste, il negoziante abbassa i nuovi i prezzi del 10%. Quanto costano ora le scarpe?

3.199 (*). Al cinema "Pegaso" hanno deciso di aumentare il biglietto del 10%; il numero degli spettatori è calato, però, del 10%. È stato un affare? Spiega perché.

3.200. Anna entra in una cartoleria e compra due penne, di cui una costa il doppio dell'altra; riceve lo sconto 15% sulla penna più costosa e del 40% su quella meno costosa. Qual è lo sconto che riceve complessivamente?

3.201 (*). Pierino oggi ha incrementato il suo capitale del 10%. Se anche domani l'incremento sarà del 10%, quanto sarà l'incremento totale in percentuale?

3.202. Tizio ha perso il 20% dei suoi soldi; quanto dovrà guadagnare, in percentuale, per recuperare?

3.203 (*). Un paio di scarpe scontato del 20% costa € 40 quanto costava prima dello sconto?

3.204. Per pavimentare una piazza 8 operai impiegano 10 giorni lavorando 8 ore al giorno; quanti giorni impiegherebbero 5 operai se lavorassero 6 ore al giorno?

3.205. Pierino si reca in un negozio di giocattoli, dove ne acquista uno. A Pierino vengono offerti due tipi di sconti, uno del 10% e uno del 35%. In quale ordine converrà ricevere i due sconti? Spiega il motivo.

3.206 (*). Una tariffa telefonica ha un costo di 10 cent al minuto per i primi 5 minuti di conversazione. Per i minuti successivi aumenta del 5%. Dopo 15 minuti di conversazione aumenta del 20% del costo iniziale. Quanto si spende se si effettua una telefonata di 20 minuti?

3.207. Un ingegnere incassa per la realizzazione di un progetto una certa somma. Di essa il 20% deve essere restituita allo stato come IVA e della parte rimanente il 40% deve essere pagata come tasse. Qual è la percentuale della somma che rimane all'ingegnere?

3.208. Nel paese di Vattelapesca il 20% degli abitanti è europeo il restante 80% è asiatico. La lingua inglese è parlata dal 50% degli europei e dal 40% degli asiatici. Se a Vattelapesca 5 930 persone parlano inglese, quanti sono gli abitanti di Vattelapesca?

3.209. Un liquido viene filtrato con un primo filtro che toglie il 40% delle impurità. Successivamente viene filtrato con un secondo filtro che toglie il 30% delle impurità. Infine viene filtrato con un terzo filtro che elimina il 50% delle impurità. Quale percentuale complessiva delle impurità è stata eliminata?

3.210. Una prova di ammissione consiste di due test. Solo i 2/3 dei candidati superano il primo test e 1/5 di quelli che hanno superato il primo test superano anche il secondo. Qual è la percentuale di candidati che hanno superato tutti e due i test?

3.211. L'acquisto di un'auto può essere fatto con due tipi di pagamento: pagando l'intero importo di € 23 000 all'acquisto il 1° gennaio 2011; oppure dividendo il pagamento in tre rate annuali di 8000, da pagare il 1° gennaio 2011, il 1° gennaio 2012, il 1° gennaio 2013. Avendo tutto il denaro su un conto corrente bancario a un interesse annuo del 3% quale forma di pagamento è più vantaggiosa? Di quanto?

3.212. Una forte influenza ha colpito il 60% dei bambini di età inferiore o uguale a 10 anni e il 15% delle persone di età maggiore. Se la percentuale di persone che si sono ammalate di questa influenza è stata del 20%, qual è la percentuale di bambini in quella popolazione?

3.213 (*). Una maglietta costava lire 65.000 prima dell'entrata in vigore dell'euro, dopo costava € 40. Di quanto è aumentato in %, il prezzo della maglietta? Si tenga conto che 1 € valeva 1936,77 lire.

3.214. Una ragazza, di 46 kg, va dal dietologo, che le consiglia di restare entro il 5% del peso attuale. Tra quali valori può oscillare il suo peso?

3.215. Per raccogliere le foglie cadute nel cortile della scuola, Mario impiega 6 ore, Marco 10 ore, Matteo 15 ore. Se i tre si mettessero a lavorare insieme, in quante ore pulirebbero il cortile?

3.216. Una certa bevanda è ottenuta mescolando 1 parte di sciropppo con 5 parti di acqua. Per errore Adolfo ha mescolato 5 parti di sciroppo con 1 di acqua, ottenendo 3 litri di miscuglio. Aggiungendo una opportuna quantità di acqua, Adolfo può ottenere una bevanda in cui sono rispettate le proporziioni stabilite? Quanti litri di acqua deve aggiungere?

3.14.3 Risposte

3.21. a) $25/2$, b) $21/5$, c) $25/4$, d) $15/4$, e) $1/10$, f) $5/2$.

3.67. $5 \cdot 10^{-30}$.

3.68. $3 \cdot 10^{2}$.

3.69. $1,3 \cdot 10^{-8}$.

3.70. $8 \cdot 10^{-18}$.

3.76. 300.

3.87. 44%.

3.88. 480.

3.108. 21 kg, 9 kg.

3.122. a) $\pm\frac{3}{2}$, b) $\pm\frac{5}{2}$, c) 40, d) $\frac{25}{48}$.

3.123. a) $x = 15; y = 9$, b) $x = \frac{1}{2}; y = \frac{11}{4}$, c) $x = \frac{5}{6}; y = \frac{1}{2}$, d) $x = \frac{1}{7}; y = \frac{1}{4}; z = \frac{3}{28}$.

3.143. a) $-\frac{2}{11}$, b) $\frac{1}{24}$, c) $\frac{5}{6}$, d) $-\frac{3}{20}$.

3.144. a) $-\frac{673}{1680}$, b) $\frac{31}{3}$, c) $\frac{1}{2}$, d) $\frac{55}{96}$.

3.145. a) $-\frac{8}{5}$, b) $-\frac{46}{45}$, c) 1, d) $\frac{13}{5}$.

3.146. a) $\frac{11}{28}$, b) $\frac{15}{14}$, c) $\frac{1}{50}$, d) $\frac{5}{3}$.

3.147. a) $\frac{5}{6}$, b) 10, c) $\frac{13}{15}$, d) $\frac{11}{6}$.

3.148. a) $\frac{1}{3}$, b) $-\frac{1}{12}$, c) $\frac{139}{40}$, d) 1.

3.149. a) $\frac{1}{6}$, b) $\frac{9}{20}$, c) $\frac{10}{3}$, d) $\frac{1}{3}$.

3.150. a) $\frac{1}{144}$, b) 540, c) $\frac{77}{50}$, d) $\frac{46}{9}$.

3.151. a) $\frac{44}{3}$, b) $\frac{64}{9}$, c) 400, d) $-\frac{2}{3}$.

3.152. a) $\frac{100}{303}$, b) 10, c) -2, d) -4.

3.153. a) $-\frac{2}{27}$, b) $-\frac{60}{11}$, c) $\frac{8}{81}$,

3.154. $\left(\frac{2}{5}\right)^{-46}$.

3.155. a) 2, b) 1, c) $\frac{8}{27}$, d) $\frac{25}{4}$.

3.156. a) $-\frac{9}{2}$, b) 1, c) 2, d) $\frac{38}{45}$.

3.157. a) $\frac{40}{37}$, b) $\frac{1}{15}$, c) 7, d) $\frac{1}{3}$.

3.158. a) $\frac{7}{3}$, b) $-\frac{8}{81}$.

3.159. a) 100, b) $-\frac{1}{2}$.

3.160. $-\frac{5}{3}$.

3.161. $\frac{5}{9}$.

3.162. -1.

3.163. $\frac{199}{10}$.

3.164. $-\frac{3}{2}$.

3.166. 20.

3.167. 9.

3.168. 105.

3.169. 189.

3.170. 270.

3.171. 30, 18, 27.

3.172. 132, 66, 22.

3.173. 6.

3.174. 220.

3.175. 76, 190.

3.176. € 24,65.

3.177. 85%.

3.178. 42, 24.

3.180. 45, 10, 18.

3.181. € 600, 1/9.

3.182. 88.

3.184. 126.

3.185. 1/100.

3.186. € 54.

3.190. € 737,50.

3.191. 25%.

3.193. 5,36 l.

3.194. 13,6 cm, 20,4 cm.

3.195. 20°, 60°, 100°.

3.198. € 77; € 69,30.

3.199. No, perde l'1% dei ricavi.

3.201. 21%.

3.203. € 50.

3.206. € 2,15.

3.213. 19,19%.