# Funzioni D

## D.1 Funzioni o applicazioni

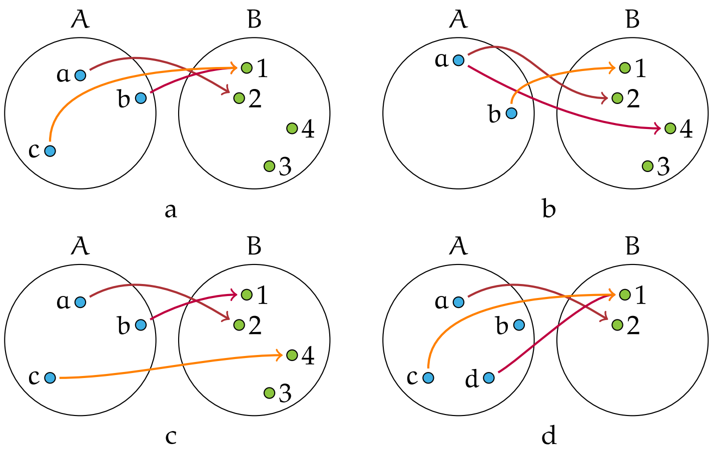
Diamo la seguente definizione

**Definizione D.1.** Una corrispondenza univoca tra due insiemi $A$ e $B$ non vuoti si chiama *funzione o applicazione* di $A$ in $B$, se e solo se il dominio coincide con $A : \mathcal{D} = \mathrm{I.\,D.} = A$.

In altre parole ogni elemento di $A$ è in corrispondenza con un solo elemento di $B$.

---

**Esempio D.1.** Analizziamo le corrispondenze rappresentate con grafico sagittale:




La corrispondenza di figura a rappresenta una funzione.

La corrispondenza di figura b non rappresenta una funzione perché l'elemento $a$ di $A$ è in corrispondenza con due elementi di $B$, il 2 e il 4, quindi non è una corrispondenza univoca.

La corrispondenza della figura c rappresenta una funzione.

La corrispondenza della figura d non è una funzione perché il dominio non coincide con l'insieme $A$.

---

I termini funzione o applicazione sono sinonimi, tuttavia si preferisce usare il termine "funzione" quando i due insiemi $A$ e $B$ sono insiemi numerici. Solitamente una funzione viene indicata con la lettera $f$ e si intende la legge che *associa ad ogni elemento* $x$ *di* $A$ *uno e uno solo elemento* $y$ *di* $B$.

Per indicare la legge che fa passare dall'insieme $A$ all'insieme $B$ usiamo la scrittura

$$f : A \to B, \text{ oppure } A \xrightarrow{f} B$$

**Definizione D.2.** L'elemento $y$ di $B$, corrispondente di un elemento $x$ del dominio, viene detto *immagine di* $x$ *nella funzione* $f$ e si scrive $y = f(x)$ che si legge "$y$ *uguale effe di* $x$".

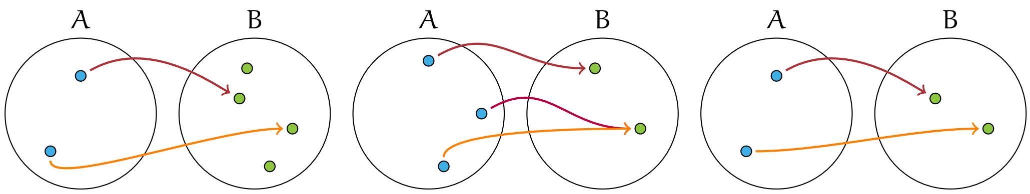
Il sottoinsieme proprio o improprio di $B$ formato dagli elementi che sono immagini degli elementi del dominio si chiama *codominio o insieme immagine* e si scrive $\mathcal{C} = \text{IM.} = f(\mathcal{D})$. Osserviamo che non necessariamente ogni elemento di $B$ è immagine di un elemento del dominio per cui $\mathcal{C} \subseteq B$.

✍ *Esercizi proposti:* D.1, D.2, D.3, D.4

### D.1.1 Funzioni iniettive, suriettive, biunivoche

---

**Esempio D.2.** Nella figure sottostanti sono rappresentate alcune funzioni:




a b c

In figura a si ha IM. $\subset B$ elementi distinti del dominio $A$ hanno immagini distinte in $B$.
In figura b si ha IM. $= B$ ma elementi distinti di $A$ hanno la stessa immagine in $B$.
In figura b si ha IM. $= B$ ed elementi distinti del dominio $A$ hanno immagini distinte in $B$.

---

I tre esempi illustrano tre tipi diversi di funzioni:

**Definizione D.3.** Si dice *iniettiva* una funzione per la quale elementi distinti del dominio hanno immagini distinte in $B$: per *qualunque* $x_1, x_2$ di $A$ con $x_1 \neq x_2$, si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$.

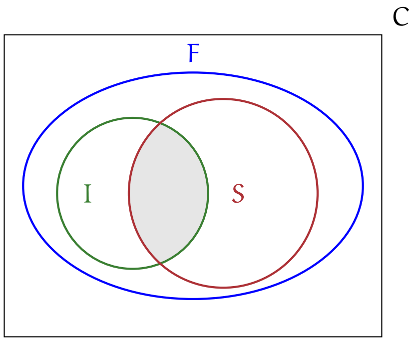
**Definizione D.4.** Si dice *suriettiva* una funzione in cui IM. $= B$.

**Definizione D.5.** Si dice *biunivoca o biiettiva* una funzione che sia *contemporaneamente iniettiva e suriettiva.*

Pertanto in figura a è rappresentata una funzione iniettiva, in figura b una funzione suriettiva e in figura c una funzione biunivoca.

✍ *Esercizi proposti:* D.5, D.6

### D.1.2 Diagramma riepilogativo sui diversi tipi di corrispondenze




Legenda

| | |
|---|---|
| C | insieme delle corrispondenze |
| F | insieme delle funzioni |
| S | insieme delle funzioni suriettive |
| I | insieme delle funzioni iniettive |
| $I \cap S$ | insieme delle funzioni biunivoche |

## D.2 Funzioni tra insiemi numerici

Analizziamo alcune corrispondenze definite tra gli insiemi numerici. In questo caso la funzione $f$ può essere espressa tramite una formula o scrittura analitica, una tabella, un algoritmo, oppure semplicemente con linguaggio comune, purché in modo preciso e inequivocabile. Il generico elemento $x$ del dominio si chiama *variabile indipendente*; il corrispondente elemento $y = f(x)$ si chiama *variabile dipendente*.

---

**Esempio D.3.** Consideriamo la corrispondenza **K**: "essere il valore assoluto di" tra l'insieme $\mathbb{N}_0$ dei naturali diversi da zero e l'insieme $\mathbb{Z}_0$ degli interi relativi diversi da zero. Questa corrispondenza *non è una funzione* in quanto *non è* una corrispondenza *univoca*: un elemento di $\mathbb{N}_0$ ha due immagini poiché ogni numero naturale è valore assoluto di due interi opposti, come rappresentato dalla figura D.1.

**Esempio D.4.** Consideriamo la corrispondenza **K** che *associa ad ogni numero razionale il suo quadrato*. Essa è una funzione di dominio $\mathbb{Q}$: di ogni numero razionale si può determinare il quadrato che è unico; poiché numeri opposti hanno lo stesso quadrato la funzione in esame *non* è *iniettiva*, come rappresentato dalla figura D.2.

L'immagine $y$ di ogni $x$ appartenente a $\mathbb{Q}$ è il suo quadrato: in simboli matematici scriviamo la funzione tramite una formula $f : y = x^2$.

Per quanto riguarda l'insieme immagine o codominio della funzione esso è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{Q}$: il numero razionale $+\frac{3}{4}$ non è quadrato di nessun razionale e neppure $-25$,

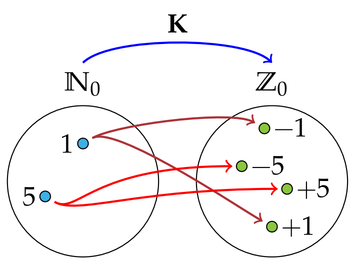



FIGURA D.1: Esempio D.3.

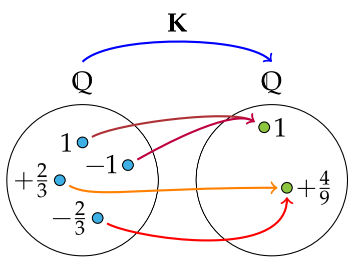



FIGURA D.2: Esempio D.4.

razionale negativo, è quadrato di un numero razionale, quindi IM. $\subset \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$, pertanto la funzione non è suriettiva.

**Esempio D.5.** Analizziamo la corrispondenza che associa *ad ogni intero* il suo valore assoluto.

Sappiamo che il valore assoluto di un intero è un numero naturale, e ogni intero ha un solo valore assoluto. La corrispondenza è univoca e il dominio coincide con l'insieme $\mathbb{Z}$, pertanto è una funzione: $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ rappresentata in forma analitica con $y = |x|$ con $x \in \mathbb{Z}$ e $y = f(x) \in \mathbb{N}$.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x \in \mathbb{Z}$ | 0 | +1 | −1 | −2 | +2 | +3 | −3 | ... |
| $y \in \mathbb{N}$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | ... |

Nella tabella sono rappresentati alcuni elementi del dominio con le rispettive immagini: da cui si deduce che tale funzione non è iniettiva.

**Esempio D.6.** È assegnata la funzione $f : x \in \mathrm{N} \to (x-2) \in \mathbb{Z}$. In questo caso la funzione associa ad ogni numero naturale $x$ il numero intero ottenuto sottraendo 2 da $x$. L'espressione analitica della funzione è $f : y = x - 2$. La legge così espressa si può descrivere anche attraverso una tabella.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x \in \mathbb{N}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |
| $(x-2) \in \mathbb{Z}$ | −2 | −1 | 0 | +1 | +2 | +3 | +4 | ... |

Ogni elemento dell'insieme $\mathbb{N}$ trova il corrispondente in $\mathbb{Z}$; elementi diversi del dominio hanno immagini diverse pertanto la funzione è *iniettiva*; il codominio o insieme immagine è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{Z}$ e precisamente $\mathcal{C} = \mathrm{IM} = \{y \in \mathbb{Z} / y \geqslant -2\}$, pertanto la funzione non è suriettiva.

**Esempio D.7.** Analizziamo la corrispondenza: $f_1 : x \in \mathbb{N} \to (x-2) \in \mathrm{N}$ e costruiamo la relativa tabella:

Vediamo che nella corrispondenza assegnata né 0 né 1 hanno l'immagine.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x \in \mathbb{N}$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |
| $(x-2) \in \mathbb{N}$ | | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |

Fissiamo allora come dominio un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ e precisamente $\mathcal{D} = \mathrm{I.D.} = \mathbb{N} - \{0, 1\}$, in questo modo possiamo procedere nell'analisi della funzione $f_1 : y = x - 2$.

**Esempio D.8.** Consideriamo la corrispondenza che associa ad ogni numero razionale il suo inverso (o reciproco).

Sappiamo che "fare l'inverso" di un numero razionale $x$ significa scrivere il numero razionale $\frac{1}{x}$, ma questa operazione ha significato solo se $x$ è diverso da 0; operiamo dunque una restrizione su $\mathbb{Q}$ e fissiamo $\mathcal{D} = \mathrm{I.D.} = \mathbb{Q}_0$. La corrispondenza è una funzione tra $\mathbb{Q}_0$ e $\mathbb{Q}$. In simboli matematici $f : y = \frac{1}{x}$.

---

✍ *Esercizi proposti:* D.7, D.8, D.9, D.10, D.11

### D.2.1 Funzioni inverse

È assegnata la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ descritta mediante le istruzioni

$$\boxed{\text{prendi } x \in \mathbb{R}} \longrightarrow \boxed{\text{moltiplica per } 2} \longrightarrow \boxed{\text{aggiungi } 1} \longrightarrow \boxed{\text{scrivi } y}$$

La forma algebrica è $y = 2 \cdot x + 1$; essa è definita per qualunque numero reale e l'insieme immagine coincide con il codominio.

Scelto arbitrariamente un valore per la variabile indipendente come $x = -2$ otteniamo la sua immagine $y = -3$, risultato delle operazioni descritte nelle istruzioni.

Preso ora $y = 4$, elemento dell'insieme immagine della funzione, quali istruzioni dobbiamo seguire per determinarne la controimmagine? Il problema si formalizza in questo modo: "per quale valore di $x$ aggiungendo 1 al suo doppio si ottiene 4?"

Le due questioni sono rappresentate nel diagramma di Eulero-Venn (figura D.3) e percorrendo le istruzioni con le operazioni inverse otteniamo il valore di $x$ sottraendo 1 al valore dato per $y$ e dividendo il risultato per 2. Le nuove istruzioni da eseguire sono:

$$\boxed{\text{da } y \text{ togli } 1} \longrightarrow \boxed{\text{dividi per } 2} \longrightarrow \boxed{\text{scrivi } x}$$

In formula $x = (y - 1) : 2$.

La funzione così ottenuta si chiama *funzione inversa* di $f(x)$ e si scrive $f^{-1}$.

Poiché la funzione assegnata è iniettiva, ci rendiamo subito conto che per ogni $y$ dell'insieme immagine possiamo determinare la controimmagine (cioè l'unico valore di $x$ tale che $f(x) = y$).

**Definizione D.6.** Per *funzione inversa* di una funzione iniettiva $y = f(x)$ si intende quella funzione che permette di determinare la controimmagine di un qualunque elemento dell'insieme immagine di $f(x)$. Il simbolo della funzione inversa è $f^{-1}$.

Osserviamo che $\mathcal{D}\left(f^{-1}\right) = \text{IM.}(f)$ e $\text{IM.}\left(f^{-1}\right) = \mathcal{D}(f)$.

✍ *Esercizi proposti:* D.12, D.13

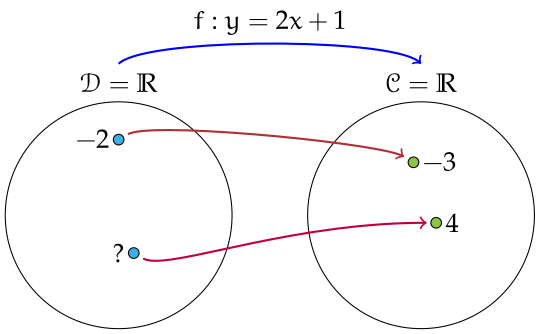


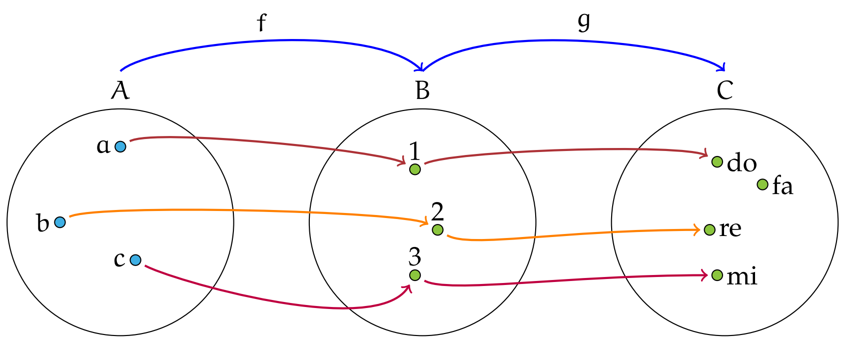

FIGURA D.3: Funzioni inverse.

## D.3 Funzioni composte

Date due funzioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$ è possibile definire la funzione composta

$$g \circ f : A \to C$$

che a un elemento $a$ di $A$ associa prima l'elemento $b = f(a)$ e poi l'elemento $c = g(b)$, in un'unica formula si può scrivere $g(f(a)) = c$.




---

**Esempio D.9.** Data la funzione $f(x) = 2x$ e la funzione $g(x) = x + 1$, determina l'espressione analitica della funzione composta.

Prima agisce la funzione $f$ che raddoppia il valore di $x$. Al valore ottenuto, che è $2x$, si applica la $g$ che fa aumentare di 1. Pertanto la funzione composta raddoppia $x$ e poi aggiunge 1. L'espressione è $g(f(x)) = 2x + 1$.

---

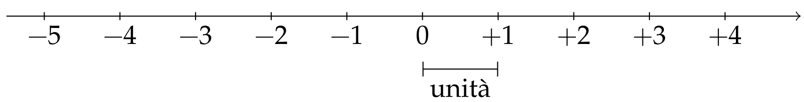
Osserva che la composizione di funzioni non è commutativa. Infatti la funzione $f(g(x))$ si ottiene facendo agire prima la $g(x)$ che aumenta di 1 il valore della variabile e poi la $f(x)$ che raddoppia il valore della variabile; allora $f(g(x)) = 2(x + 1)$.

✍ *Esercizio proposto:* D.14

## D.4 La retta e gli insiemi numerici

Nello studio degli insiemi numerici abbiamo visto come si possono depositare su una semiretta i numeri naturali; la legge costruttiva di questa rappresentazione genera tra l'insieme $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ e i punti della semiretta una corrispondenza avente come dominio $\mathbb{N}$ e come codominio i punti della semiretta. Ad ogni numero naturale possiamo far corrispondere un punto della semiretta, ma *non tutti i punti* della semiretta *sono immagine* di un numero naturale: la *corrispondenza non è biunivoca*.

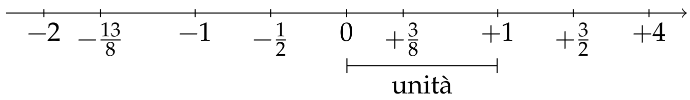
Lo stesso fatto avviene se consideriamo l'insieme $\mathbb{Z}$ come dominio e i punti di una retta orientata come codominio; nella figura viene rappresentata la corrispondenza generata con la legge costruttiva già enunciata nel capitolo dei numeri interi.



Ad ogni numero intero possiamo far corrispondere un punto della retta orientata, ma *non tutti i punti* della retta *sono immagine* di un numero intero: l'insieme immagine non coincide con il codominio e la *corrispondenza non è biunivoca*.

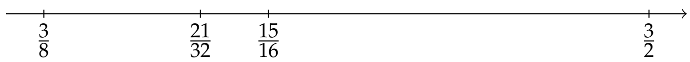
Gli insiemi $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ sono infiniti e la loro caratteristica comune è che tra due naturali consecutivi o tra due interi consecutivi non possiamo trovarne un altro. Si dice che $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ sono due *insiemi discreti*.

Consideriamo ora l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali; sappiamo che anche questi numeri, rappresentati da frazioni, possono essere disposti su una retta orientata come mostrato nella figura sottostante.




L'insieme $\mathbb{Q}$ rispetto agli insiemi $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ presenta un'altra caratteristica: è *denso*, cioè tra due numeri razionali ci sono infiniti altri numeri razionali. Come possiamo confermare questa affermazione?

Osserviamo la figura precedente: fra $\frac{3}{8}$ e $\frac{3}{2}$ si trova certamente il numero 1. Costruiamo il numero $q = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{2}\right)$ ottenuto dividendo per due la somma dei due numeri estremi dell'intervallo considerato, si ottiene $q = \frac{15}{16}$ che è minore di 1 e, a maggior ragione, minore di $\frac{3}{2}$, ma maggiore di $\frac{3}{8}$, come si può verificare trasformando la frazione in una equivalente con denominatore 16. Con lo stesso procedimento possiamo determinare $q_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{8} + \frac{15}{16}\right) = \frac{21}{32}$ che risulta maggiore di $\frac{3}{8}$ e minore di $q$. Con questo procedimento, che non ha mai termine, possiamo determinare infiniti altri numeri razionali compresi tra $\frac{3}{8}$ e $\frac{3}{2}$.




Questa possibilità ci fa supporre che tutti i punti della retta orientata possano essere immagine di un numero razionale, cioè che esista una corrispondenza biunivoca tra l'insieme $\mathbb{Q}$ e i punti della retta. Invece, no! Nel capitolo sull'introduzione ai numeri reali abbiamo visto che benché l'insieme $\mathbb{Q}$ sia infinito e denso, quando pensiamo di aver disposto sull'asse dei numeri tutti i suoi elementi rimangono sulla retta ancora altri punti liberi. La retta geometrica sembra avere "più punti" di quanti siano i numeri razionali: gli infiniti punti lasciati scoperti dai razionali sono immagine di numeri irrazionali.

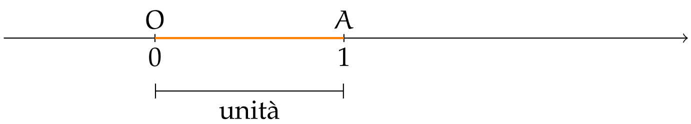
L'insieme che si ottiene dall'unione dell'insieme $\mathbb{Q}$ con l'insieme $\mathbb{J}$ degli irrazionali è l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, cui Cantor attribuì cardinalità $\aleph_1$. La retta geometrica orientata è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}$, il che vuol dire che ad ogni numero reale corrisponde un punto sulla retta orientata e un punto della retta è immagine di un solo numero reale, razionale o irrazionale.

**Definizione D.7.** Si chiama *ascissa di un punto* sulla retta reale il numero reale $\alpha$ che è la sua immagine nella corrispondenza biunivoca.

---

**Esempio D.10.** Determinare l'immagine del numero reale $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ sulla retta reale.

Fisso la retta orientata e un suo punto O al quale attribuisco ascissa 0; fisso un segmento arbitrario come unità di misura e quindi determino il punto A di ascissa 1 riportando il segmento unitario a partire da O, nel verso indicato dalla freccia.




Costruisco il segmento rappresentativo del numero irrazionale $\sqrt{2}$, che è la diagonale del quadrato di lato l'unità. Metto questo segmento adiacente al segmento OA, come in figura. Il punto B è l'immagine del numero $\alpha$, scriviamo $B(\alpha)$.


---

**Sulla retta razionale si possono collocare tutti i numeri del tipo $\sqrt{n}$ con $n \in \mathbb{N}_0$.**

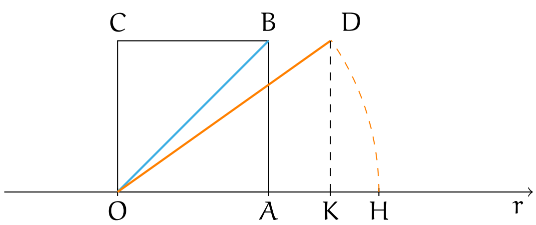
Nella figura è segnato il punto K immagine del numero $\sqrt{2}$; sulla perpendicolare alla retta $r$ nel punto K prendiamo il segmento $KD = OA$ e congiungiamo D con O. Per il teorema di Pitagora sul triangolo OKD si ha

$$\overline{OD}^2 = \overline{OK}^2 + \overline{KD}^2 = \overline{OK}^2 + \overline{OA}^2$$

e passando alle misure

$$\overline{OD}^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow \overline{OD} = \sqrt{3}.$$

Puntando il compasso in O con raggio OD tracciamo l'arco che incontra la retta $r$ in H immagine del numero irrazionale $\sqrt{3}$.




Proseguendo in questo modo possiamo ottenere sulla retta razionale i punti associati ai numeri del tipo $\sqrt{n}$.

Un'altra classica costruzione, nota come "spirale di Teodoro" (figura D.4), permette di ottenere i segmenti di misura $\sqrt{n}$ con $n \in \mathbb{N}_0$. Si inizia con la costruzione del triangolo rettangolo isoscele di cateto 1; sappiamo già che la sua ipotenusa è il segmento di misura $\sqrt{2}$. Sulla perpendicolare in C ad AC si prende il segmento CD di misura 1: applicando il teorema

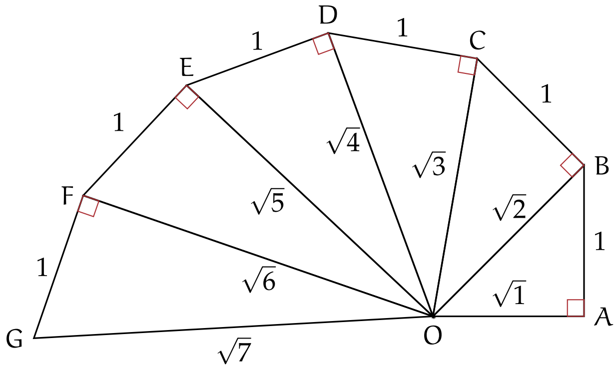



FIGURA D.4: La spirale di Teodoro.

di Pitagora come abbiamo fatto sopra, otteniamo $\overline{AD} = \sqrt{3}$. Ripetiamo la costruzione dal vertice D e otteniamo il triangolo rettangolo ADE la cui ipotenusa è $\overline{AE} = \sqrt{4}$ e poi $\overline{AF} = \sqrt{5}$ e così via.

✍ *Esercizi proposti:* D.15, D.16, D.17

## D.5 Il metodo delle coordinate cartesiane

Abbiamo definito prodotto cartesiano di due insiemi non vuoti A e B l'insieme formato da tutte le coppie ordinate tali che il primo elemento appartenga ad A e il secondo a B. Mediante proprietà caratteristica si scrive: $A \times B = \{(a; b) / \ a \in A \text{ e } b \in B\}$.

---

**Esempio D.11.** Il prodotto cartesiano dei due insiemi $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{x, y\}$ è

$$A \times B = \{(1; x), (1; y), (2; x), (2; y), (3; x), (3; y)\}$$

e graficamente si può rappresentare con un diagramma cartesiano come nella figura D.5.

Sappiamo che una retta orientata, fissata una unità di misura arbitraria, è l'immagine geometrica dell'insieme dei numeri reali: ad ogni numero reale corrisponde un punto della retta e un qualunque punto della retta è immagine di un solo numero reale.

---

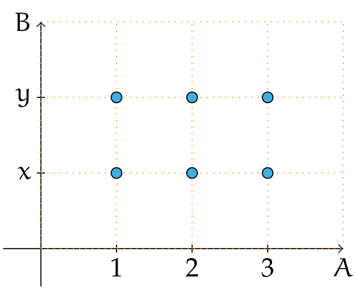



FIGURA D.5: Esempio D.11.

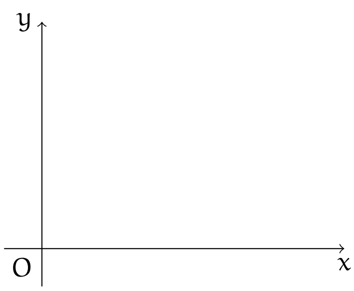



FIGURA D.6: Il piano cartesiano.

### D.5.1 Introduzione al sistema di riferimento cartesiano ortogonale

Preso l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, costruiamo il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$: esso è costituito dall'insieme delle coppie ordinate tali che il primo elemento sia un numero reale come pure il secondo elemento. In $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ avremo coppie il cui primo elemento è 0, coppie il cui primo elemento è un numero positivo e infine coppie il cui primo elemento è un numero negativo, coppie che possiamo sinteticamente rappresentare nel seguente modo:

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(0;0), (0;+), (0;-), (+;0), (-;0), (+;+), (+;-), (-;+), (-;-)\}.$$

È possibile dare una rappresentazione grafica di questo insieme di infiniti elementi?

Consideriamo sul piano una coppia di rette perpendicolari, indichiamo con O il loro punto di intersezione, fissiamo convenzionalmente un verso di percorrenza su ciascuna retta (convenzionalmente sull'orizzontale da sinistra a destra, sulla verticale dal basso all'alto) e infine scegliamo un segmento arbitrario come unità di misura. Indichiamo con $x$ l'asse orizzontale che chiamiamo asse delle ascisse e con $y$ l'asse verticale che chiamiamo asse delle ordinate (figura D.6).

**Definizione D.8.** Si chiama *riferimento cartesiano ortogonale monometrico* la coppia di rette orientate, perpendicolari, dotate di unità di misura.

Gli assi dividono il piano in quattro zone chiamate quadranti che sono numerati come in figura D.7. Ogni punto dell'asse delle ascisse è immagine di un numero reale: O è immagine di zero, i punti alla sua destra rappresentano i numeri reali positivi, quelli alla sua sinistra tutti i numeri reali negativi; analogamente sull'asse delle ordinate il punto O è immagine dello zero, sopra di questo si collocano i numeri positivi e sotto i numeri negativi (figura D.8). Per rappresentare gli elementi di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cioè le coppie ordinate di numeri reali $(\alpha; \beta)$ procediamo nel seguente modo:

- determiniamo sull'asse $x$ il punto A immagine del numero reale $\alpha$ ;
- da A tracciamo la retta parallela all'asse $y$;
- determiniamo sull'asse $y$ il punto B immagine del numero reale $\beta$ ;
- da B tracciamo la retta parallela all'asse $x$.

Il punto P, intersezione delle parallele tracciate, è l'immagine della coppia ordinata $(\alpha; \beta)$.

---

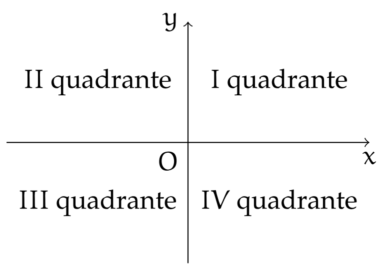



FIGURA D.7: I quattro quadranti del piano cartesiano.

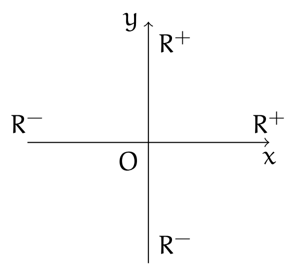



FIGURA D.8: Collocazione dei numeri positivi e negativi sul piano cartesiano.

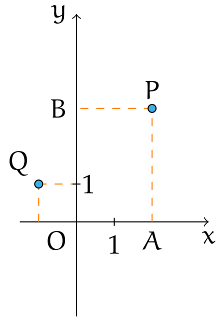



FIGURA D.9: Esempio D.12.

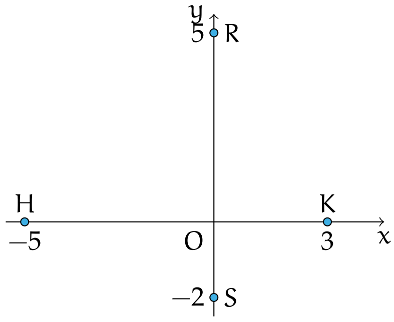



FIGURA D.10: Esempio D.13.

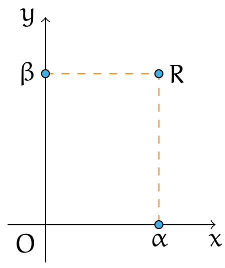



FIGURA D.11: Ascissa e ordinata di un punto.

**Esempio D.12.** Determiniamo l'immagine delle coppie ordinate $(2;3)$ e $(-1;1)$.

Nella figura D.9 è tracciata la costruzione descritta sopra: $P$ è il punto del piano immagine della coppia $(2;3)$ e $Q$ è il punto immagine della coppia $(-1;1)$. Rappresenta le coppie $(4;-1)$ e $(-4;1)$. Quali punti rappresentano le coppie con un elemento uguale a zero?

**Esempio D.13.** Determiniamo l'immagine delle seguenti coppie: $(0;5)$, $(0;-2)$, $(-5;0)$, $(3;0)$.

Osserviamo (figura D.10) che il punto immagine dello zero sull'asse $x$ coincide con $O$, quindi la coppia $(0;5)$ sarà associata al punto $R$ dell'asse $y$ e la coppia $(0;-2)$ al punto $S$ dello stesso asse. Analogamente, poiché il punto immagine dello zero sull'asse $y$ coincide con $O$, le coppie $(-5;0)$ e $(3;0)$ sono associate rispettivamente ai punti $H$ e $K$ dell'asse $x$.

---

Il punto $O$ è immagine della coppia $(0;0)$ ed è chiamato *Origine*.

**Prima conclusione:** ogni coppia di numeri reali è rappresentata da un punto del piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale monometrico.

Prendiamo ora un punto $R$ (figura D.11) del piano sul quale sia stato fissato un riferimento cartesiano ortogonale monometrico e tracciamo da $R$ la parallela all'asse $y$ che interseca l'asse $x$ nel punto $A$. A questo punto è associato un numero reale $\alpha$. Analogamente da $R$ tracciamo la parallela all'asse $x$ che interseca l'asse $y$ nel punto $B$ immagine di un numero reale $\beta$. Al punto $R$ associamo la coppia di numeri reali $(\alpha;\beta)$.

Diremo che $R$ è il punto di coordinate $(\alpha;\beta)$, $\alpha$ si chiama *ascissa* del punto $R$, $\beta$ *ordinata* del punto $R$.

**Seconda conclusione:** ogni punto del piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale monometrico individua una coppia ordinata di numeri reali.

In conclusione, esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e l'insieme dei punti del piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale monometrico. Possiamo dunque "confondere" coppia di numeri reali con punto del piano e anzi diremo, secondo gli esempi precedenti, "$P$ è il punto $(2;3)$, $Q$ il punto $(-1;1)$" invece di "$P$ è il punto immagine della coppia $(2;3)$" o "$P$ è il punto di coordinate $(2;3)$".

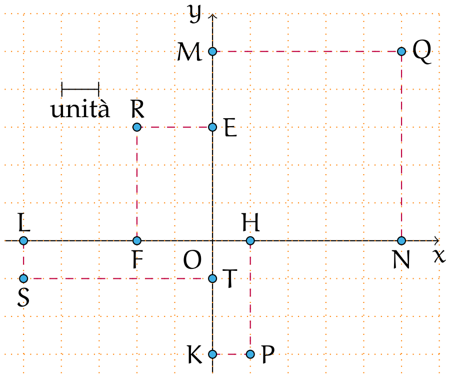



FIGURA D.12: Esempio D.14.

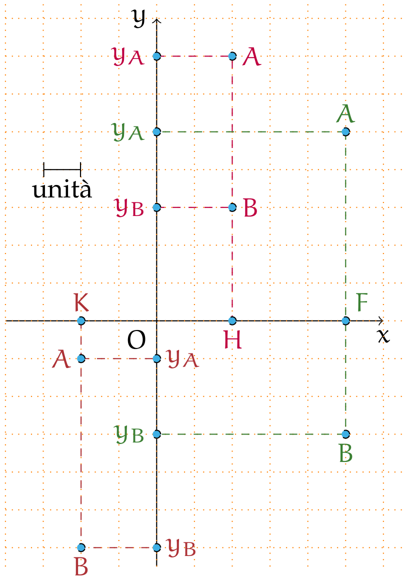



FIGURA D.13: Esempio D.16.

### Un po' di storia

Nel II secolo a.C. Ipparco compilò il primo catalogo stellare in cui precisò la posizione di circa 850 stelle sulla sfera celeste mediante due numeri: latitudine e longitudine. La posizione di un punto era dunque individuata attraverso una coppia di numeri. Ancora oggi attraverso latitudine e longitudine viene individuato un punto sulla superficie terrestre. I romani nel fondare una città segnavano due solchi perpendicolari ai quali riferivano la posizione di case, monumenti, strade.

Nel XVII secolo con le opere di Pierre de Fermat e di René Descartes il metodo di rappresentare punti con coppie di numeri divenne un procedimento matematico per descrivere enti geometrici attraverso numeri, equazioni, disequazioni e tradurre le relazioni tra elementi della geometria in relazioni tra enti dell'algebra.

La geometria analitica tratta quindi questioni geometriche con metodi di tipo algebrico.

✍ *Esercizio proposto:* D.18

### D.5.2 Distanza di due punti

Assegnato nel riferimento cartesiano ortogonale il punto $P(\alpha;\beta)$, il numero reale $|\alpha|$ rappresenta la misura della distanza del punto $P$ dall'asse $y$ e il numero reale $|\beta|$ rappresenta la misura della distanza di $P$ dall'asse $x$.

---

**Esempio D.14.** Determinare la misura della distanza dagli assi coordinati dei punti $P(+1;-3)$, $Q(+5;+5)$, $R(-2;+3)$, $S(-5;-1)$ (figura D.12).

*Dati*: $P(+1;-3)$.

*Obiettivo*: $PH \perp$ asse $x$, il segmento $PH$ è la distanza di $P$ dall'asse $x$; $PK \perp$ asse $y$, il segmento $PK$ è la distanza di $P$ dall'asse $y$.

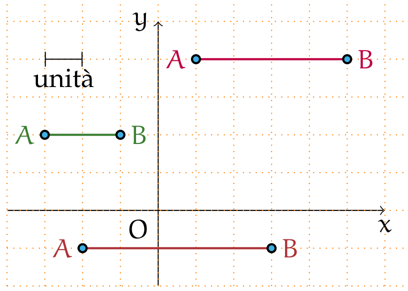



FIGURA D.14: I due punti hanno la stessa ordinata.

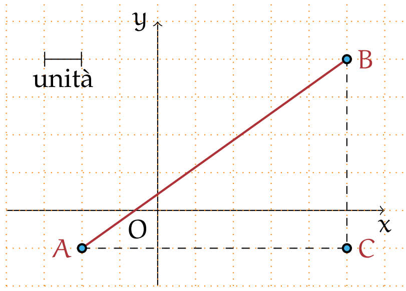



FIGURA D.15: Il segmento ha una direzione diversa da quella degli assi coordinati.

Per quanto detto sopra si ha $\overline{PH} = |-3| = -(-3) = 3$; $\overline{PH} = |+1| = 1$. Completate la soluzione dell'esempio, seguendo la traccia.

---

Vogliamo ora determinare la misura $\overline{AB}$ di un segmento AB, inserito in un riferimento cartesiano ortogonale monometrico $O_{xy}$, conoscendo le coordinate degli estremi A e B del segmento stesso.

**Caso I** i due punti hanno la stessa ascissa. Il segmento AB è parallelo all'asse $y$ e può presentarsi in diverse posizioni rispetto all'asse $x$.

---

**Esempio D.15.** Determinare la misura della distanza dei punti $A(2;7)$ e $B(2;3)$.
*Dati*: $A(2;7)$, $B(2;3)$.
*Obiettivo*: $\overline{AB}$.
*Procedura risolutiva*: $\overline{AB} = \overline{AH} - \overline{BH} = y_A - y_B = 7 - 3 = 4$.

**Esempio D.16.** Determinare la misura della distanza dei punti $A(5;5)$ e $B(5;-3)$ (figura D.13).
*Dati*: $A(5;5)$, $B(5;-3)$.
*Obiettivo*: $\overline{AB}$.
*Procedura risolutiva*: $\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{BF} = y_A + (-y_B) = y_A - y_B = 5 - (-3) = 8$.

**Esempio D.17.** Determinare la misura della distanza dei punti $A(-2;-1)$ e $B(-2;-6)$.
*Dati*: $A(-2;-1)$, $B(-2;-6)$.
*Obiettivo*: $\overline{AB}$.
*Procedura risolutiva*: $\overline{AB} = \overline{BK} - \overline{AK} = -(y_B) - (-y_A) = y_A - y_B = -1 + 6 = 5$.

---

Osserviamo che in ogni caso abbiamo sottratto dall'ordinata maggiore l'ordinata minore; generalizzando possiamo concludere: la *misura del segmento* AB *parallelo all'asse delle ordinate* è $\overline{AB} = |x_a - x_B|$ indipendentemente da quale estremo abbia ordinata maggiore.

**Caso II** i due punti hanno la stessa ordinata. Il segmento AB (figura D.14) è parallelo all'asse $x$ e può presentarsi in diverse posizioni rispetto all'asse $y$.

Seguendo il procedimento applicato nel primo caso, dopo aver rilevato le coordinate degli estremi del segmento AB nella figura accanto, verifica che in ogni caso $\overline{AB} = |x_A - x_B|$.

La *misura del segmento* AB *parallelo all'asse delle ascisse* è $\overline{AB} = |x_A - x_B|$ indipendentemente da quale estremo abbia ascissa maggiore.

**Caso III** è questo il caso generale: il segmento ha una direzione diversa da quella degli assi coordinati (figura D.15).

*Dati*: $A(x_A; x_B)$, $B(y_A; y_B)$.

*Obiettivo*: $\overline{AB}$.

*Procedura risolutiva*: tracciando da $A$ la parallela all'asse $x$ e da $B$ la parallela all'asse $y$ si determina il vertice $C$ del triangolo rettangolo $ABC$ di cui $AB$ è l'ipotenusa. Per il teorema di Pitagora si ottiene: $\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_C - y_B)^2}$. Poiché $x_C = x_B$ e $y_C = y_A$ sostituendo si ha: $\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

La *misura del segmento* $AB$, *note le coordinate* dei suoi estremi è:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

✍ *Esercizi proposti:* D.19, D.20, D.21, D.22, D.23, D.24, D.25, D.26, D.27, D.28, D.29, D.30, D.31

### D.5.3 Punto medio di un segmento

Ricordiamo il teorema di Talete:

**Teorema D.1** (di Talete)**.** *In un fascio di rette parallele tagliato da due trasversali, a segmenti congruenti su una trasversale corrispondono segmenti congruenti sull'altra trasversale. Cioè, se* $AB = BC$ *allora* $A'B' = B'C'$.

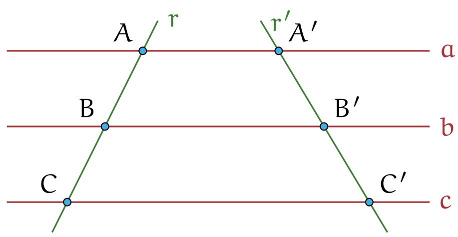



FIGURA D.16: Il teorema di Talete.

Richiamiamo anche la definizione di punto medio di un segmento:

**Definizione D.9.** Il punto medio di un segmento $AB$ è il punto interno al segmento che lo divide in due parti congruenti: $AM \equiv MB$.

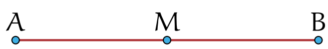



FIGURA D.17: Il punto medio.

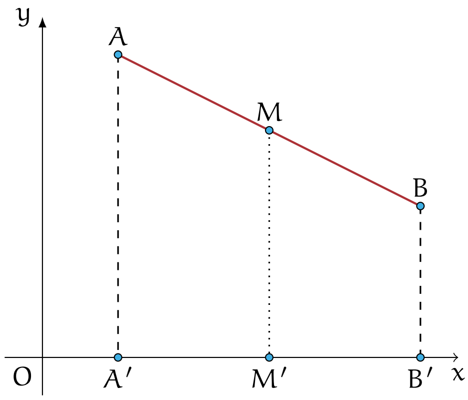



FIGURA D.18: Esempio D.18.

---

**Esempio D.18.** Conoscendo le coordinate degli estremi $A$ e $B$ di un segmento determiniamo le coordinate del suo punto medio (figura D.18).

*Dati*: $A(x_A; x_B)$, $B(y_A; y_B)$, $AM \equiv MB$.

*Obiettivo*: $M(x_M; y_M)$.

*Procedura risolutiva*: essendo $AM \equiv MB$ per il teorema di Talete $A'M' \equiv M'B'$; si ha inoltre $A'(x_A; 0)$, $B'(x_B; 0)$, $M'(x_M; 0)$ e quindi $x_M - x_A = x_B - x_M$ da cui $2x_M = x_A + x_B$ e dunque $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$. Con ragionamento analogo tracciando dai punti $A$, $B$, $M$ le parallele all'asse $x$ si ricava $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

Le *coordinate del punto medio* $M$ di un segmento $AB$, con $A(x_A; x_B)$, $B(x_B; y_B)$ sono:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2};\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

**Esempio D.19.** Determinare le coordinate del punto medio del segmento di estremi $A\left(-\frac{3}{4}; 1\right)$, $B\left(2; -\frac{1}{2}\right)$.

*Dati*: $A\left(-\frac{3}{4}; 1\right)$, $B\left(2; -\frac{1}{2}\right)$, $AM \equiv MB$.

*Obiettivo*: $M(x_M; y_M)$.

*Procedura risolutiva*: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-\frac{3}{4}+2}{2} = \frac{5}{8}$; $y_M = \frac{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{1}{4}$ quindi $M\left(\frac{5}{8}; \frac{1}{4}\right)$.

---

✍ *Esercizi proposti:* D.32, D.33, D.34, D.35, D.36

## D.6 Il grafico di una funzione

Ricordiamo le seguente definizione.

**Definizione D.10.** Una funzione $f$ è una corrispondenza univoca tra due insiemi non vuoti: ad ogni elemento $x$ (variabile indipendente) del dominio associa uno e un solo valore $y$ della variabile dipendente.

L'elemento $y$, corrispondente di un elemento $x$ del dominio, viene detto *immagine di* $x$ nella funzione $f$ e si scrive $y = f(x)$ che si legge *y uguale effe di x*.

Le funzioni numeriche, cioè aventi per dominio e codominio insiemi numerici, possono essere espresse:

- con *linguaggio comune*, purché in modo preciso e inequivocabile: esempio: La funzione $f$ "associa ad ogni numero razionale il suo triplo";
- attraverso un *algoritmo* (figura D.19), cioè una serie di istruzioni per trasformare il valore della variabile indipendente (in ingresso) nel valore della variabile dipendente (in uscita);
- mediante una *tabella*:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-2$ | 0 | 3 | 7 | 10 |
| $y$ | $-6$ | 0 | 9 | 21 | 30 |

- con una *formula* che indica il calcolo che si effettua sulla variabile indipendente per determinare in modo univoco il valore della variabile dipendente. Per esempio: $y = 3x$.

---

**Esempio D.20.** Traccia su un piano quadrettato un riferimento cartesiano ortogonale monometrico. Completa la tabella per la funzione $y = 2x$ avente come dominio e codominio l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | | 1/2 | 2 | $-3$ | |
| $y$ | | 2 | | | | 5 |

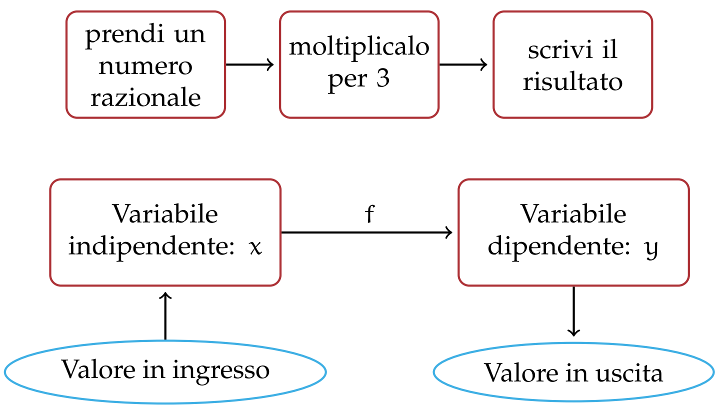



FIGURA D.19: Funzione numerica espressa tramite un algoritmo.

Ogni coppia $(x; y)$ determina nel riferimento cartesiano un punto; rappresenta i punti le cui coordinate sono le coppie ordinate contenute nella tabella. Puoi osservare che i punti trovati sono allineati su una retta passante per l'origine del riferimento.

---

**Definizione D.11.** Si chiama *grafico di una funzione* l'insieme di tutti e soli i punti del piano cartesiano che rappresentano le coppie ordinate costruite tramite la funzione assegnata.

❑ **Osservazione** I pochi punti ottenuti dalla compilazione della tabella possono essere uniti con un tratto continuo perché assegnando alla variabile indipendente altri valori reali, ad esempio compresi tra 0 e 2, si potrebbero determinare infiniti punti che risulterebbero allineati con i precedenti.

✍ *Esercizi proposti:* D.37, D.38

### D.6.1 Funzione di proporzionalità diretta

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $0$ | $-1$ | $1/2$ | $2$ | $-3$ | $-5/2$ |
| $y$ | $0$ | $2$ | $-1$ | $-4$ | $6$ | $5$ |
| $y/x$ | | | | | | |

Compila la terza riga della tabella contenente il rapporto tra la variabile dipendente $y$ e la variabile indipendente $x$. Cosa osservi? Completa: $\dfrac{y}{x} =$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Definizione D.12.** Una funzione in cui risulta *costante e diverso da zero il rapporto* tra la variabile dipendente e la variabile indipendente si chiama *funzione di proporzionalità diretta*. In simboli, $y$ direttamente proporzionale a $x \Leftrightarrow \dfrac{y}{x} = k$ con $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq 0$ o anche $y = k \cdot x$.

Il grafico di una funzione di proporzionalità diretta è una *retta passante per l'origine*; la costante $k$ si chiama *coefficiente angolare* della retta.

Nella figura D.20 è rappresentata una retta passante per l'origine del riferimento; essa forma con l'asse orientato delle $x$ un angolo $\alpha$ ; la costante $k$ ci dà informazioni su tale angolo. In particolare se la costante di proporzionalità è *positiva*, l'angolo $\alpha$ è *acuto*, se la costante è *negativa* allora l'angolo $\alpha$ è *ottuso*. Se $k = 1$ l'angolo è di 45° e la retta è la bisettrice.

**Problema D.21.** Nel quadrato $ABCD$ (figura D.21) il cui lato misura $x$, determinare il perimetro e la diagonale.

*Soluzione* Abbiamo i dati: $\overline{AB} = x$ con $x > 0$ e l'obiettivo: $2p$, $\overline{AC}$.

$2p = 4 \cdot x$, al variare del lato varia il perimetro, che risulta essere dunque funzione del lato. Indicato con $y$ il perimetro scriviamo $y = 4x$, funzione di proporzionalità diretta con $\mathcal{D} = \mathbb{R}^+$, coefficiente $k = 4$. La rappresentazione grafica di questa funzione è una semiretta contenuta nel primo quadrante, ma privata del suo punto origine (figura D.22).

Determiniamo ora la diagonale: per il teorema di Pitagora si ha

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$$
$$\overline{AC} = \sqrt{2 \cdot x^2} = x \cdot \sqrt{2}.$$

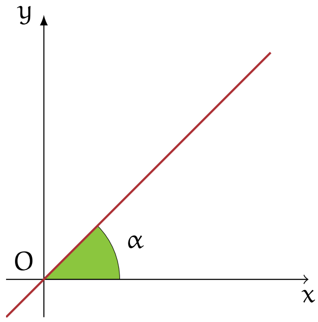



FIGURA D.20: Coefficiente angolare di una funzione.

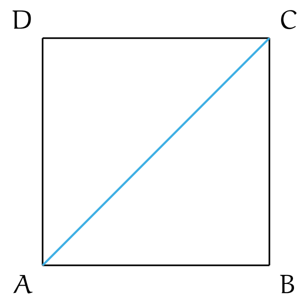



FIGURA D.21: Il quadrato ABCD del problema D.21.

Indicando con $y$ la diagonale si ha la funzione di proporzionalità diretta $y = \sqrt{2} \cdot x$ con coefficiente $k = \sqrt{2}$, di dominio $\mathcal{D} = \mathbb{R}^+$. La rappresentazione grafica di questa funzione è una semiretta contenuta nel primo quadrante, ma privata del suo punto origine (figura D.23).

♦

✍ *Esercizi proposti:* D.39, D.40, D.41, D.42, D.43

### D.6.2 La funzione costante

La figura D.24 rappresenta una funzione in cui $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ e l'insieme IM. $= \{2\}$.

**Definizione D.13.** Si chiama *funzione costante* la legge che associa ad ogni valore assunto dalla variabile indipendente lo stesso valore della variabile dipendente; in simboli: $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha $y = k$ con $k \in \mathbb{R}$.

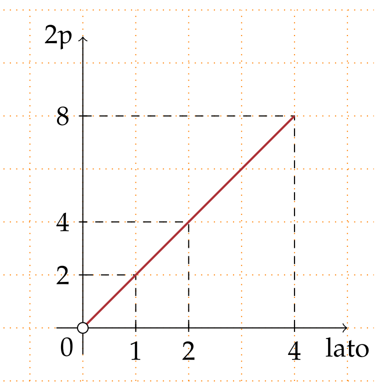



FIGURA D.22: Il perimetro 2p in funzione del lato.

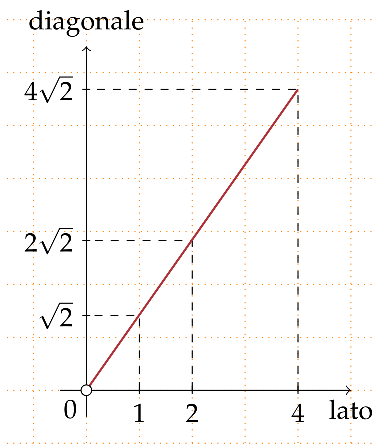



FIGURA D.23: La diagonale in funzione del lato.

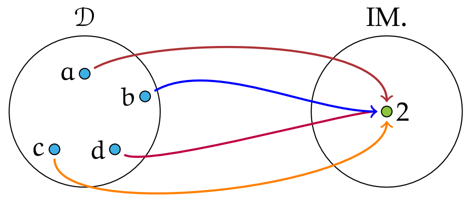



FIGURA D.24: Funzione con $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ e IM. $= \{2\}$.

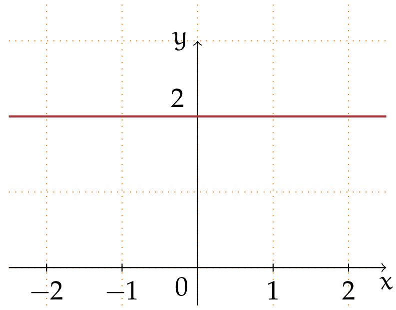



FIGURA D.25: Funzione costante.

Rappresentiamo la funzione del grafo come formula, compiliamo la tabella e infine tracciamo il suo grafico nel riferimento cartesiano ortogonale.

Formula: $y = 2$:

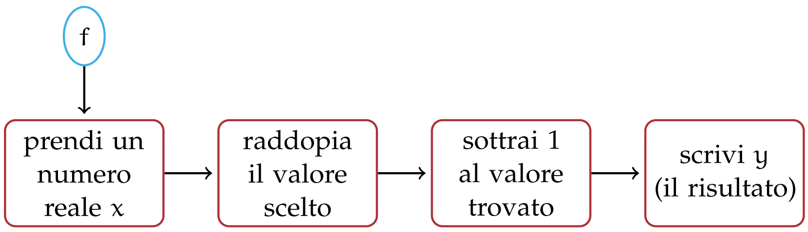
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-2$ | $0$ | $-3$ | $1$ | $2$ |
| $y$ | $2$ | $2$ | $2$ | $2$ | |

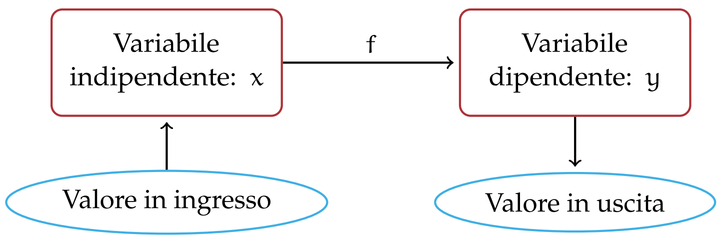
Il grafico di una funzione costante è una retta parallela all'asse delle ascisse (asse $x$, figura D.25) Osserviamo che se $k$ è positivo la retta sta nel semipiano delle ordinate positive (I e II quadrante); se $k$ è negativo la retta sta nel semipiano delle ordinate negative (III e IV quadrante); se $k = 0$ allora la retta coincide con l'asse $x$ delle ascisse.

✍ *Esercizi proposti:* D.44, D.45, D.46, D.47

### D.6.3 La funzione lineare

Le seguenti istruzioni individuano una funzione:




Completa:

- la funzione data si esprime con linguaggio comune: "la differenza tra ..............";
- la formula che indica il legame algebrico tra la variabile indipendente e la variabile dipendente è $y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

La tabella che ne rappresenta alcuni valori è:

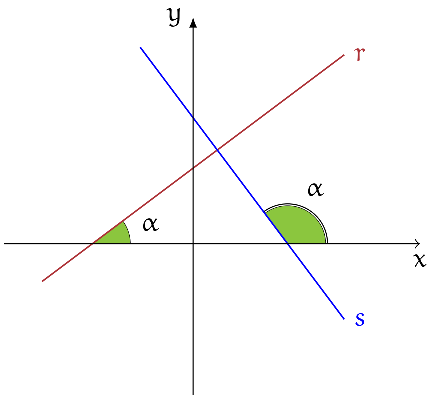
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-2$ | $0$ | | | |
| $y$ | | | $0$ | | |

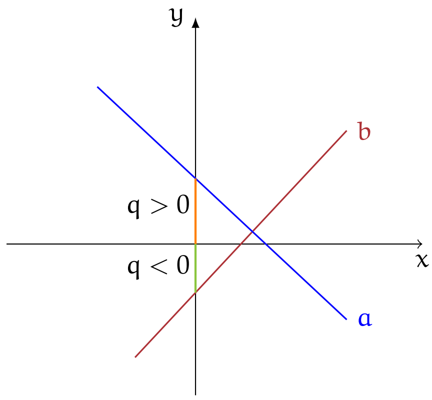
Rappresenta i punti del grafico in un riferimento cartesiano ortogonale. Rispondi: i punti trovati sono allineati? la funzione è una proporzionalità diretta?

**Definizione D.14.** Una funzione espressa dalla formula $y = m \cdot x + q$ con $m \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R}$ il cui grafico è una retta si dicono *funzioni lineari*.

**Significato dei coefficienti $m$ e $q$ nella funzione lineare $y = mx + q$**

- Se $m = 0$ la funzione è $y = q$, il suo grafico è una retta parallela all'asse $x$;
- se $m \neq 0$ esso è il coefficiente angolare della retta; ci dà informazioni sull'angolo che la retta forma con l'asse orientato delle ascisse;
- se $m > 0$ l'angolo formato con l'asse delle ascisse è un angolo acuto; se $m < 0$ l'angolo è ottuso;
- se $q = 0$ la funzione è $y = ax$, il suo grafico è una retta passante per l'origine;
- se $q \neq 0$ esso è l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse delle ordinate (asse $y$).




❍ **Conclusione** la funzione costante e la funzione di proporzionalità diretta sono funzioni lineari.

---

**Esempio D.22.** Riferendoti ai grafici precedenti, completa con uno dei segni $>$, $<$, $=$.

- nella formula della funzione avente $r$ come grafico si ha $m \ldots\ 0$ e $q \ldots\ 0$;

- nella formula della funzione avente $s$ come grafico si ha $m \dots 0$ e $q \dots 0$;
- nella formula della funzione avente $a$ come grafico si ha $m \dots 0$ e $q \dots 0$;
- nella formula della funzione avente $b$ come grafico si ha $m \dots 0$ e $q \dots 0$.

---

Assegnata una tabella di corrispondenza è possibile determinare la formula della funzione lineare.

---

**Esempio D.23.** Stabilisci se la tabella assegnata rappresenta una funzione lineare e determina la formula che la descrive.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2/3$ |
| $y$ | $-8$ | $-5$ | $-2$ | $1$ | $0$ |

*Procedura risolutiva*: segno nel riferimento cartesiano i punti corrispondenti alle coppie ordinate $(x; y)$ date dalla tabella e osservo che il grafico è una retta non passante per l'origine. Non si tratta dunque di una proporzionalità diretta (il rapporto $y/x$ non è costante!). Per determinare la formula devo stabilire il valore di $m$ (coefficiente angolare) e di $q$. Dalla tabella individuo il valore $q = -2$, infatti per $x = 0$ si ha $y = -2$. Per determinare $m$, sommo 2 a tutte le ordinate e trovo la tabella della proporzionalità diretta $y = 3x$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2/3$ |
| $y$ | $-6$ | $-3$ | $0$ | $3$ | $2$ |

Quindi la formula della funzione lineare cercata è $y = 3x - 2$. Questo procedimento è possibile perché nella tabella è già evidente il valore di $q$.

---

*Esercizi proposti:* D.48, D.49, D.50

### D.6.4 La funzione di proporzionalità inversa

**Problema D.24.** La base e l'altezza di un rettangolo $ABCD$ misurano rispettivamente 3 cm e 4 cm. Determina la sua area.

*Soluzione* ..........................................................................

♦

Se le misure dei lati sono numeri interi, esistono altri rettangoli equivalenti a quello dato? Costruisci i rettangoli equivalenti, indicando accanto a ciascuno la misura dei lati. Se le misure fossero numeri reali, potresti determinare *tutti* i rettangoli equivalenti a quello assegnato?

*Generalizziamo*: i lati $x$ e $y$ di tutti i rettangoli equivalenti a quello dato sono legati dalla condizione $x \cdot y = 12$ con $x \in \mathbb{R}^+$ e $y \in \mathbb{R}^+$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $6$ | $8$ | $10$ | $1/3$ | $4/3$ |
| $y$ | $2$ | $3/2$ | $6/5$ | $36$ | $9$ |

Osserviamo che se fissiamo il valore di $x$ il lato $y$ vale $y = \frac{12}{x}$ come nella tabella. Rappresenta ora nel riferimento cartesiano ortogonale i punti individuati dalla tabella: essi si collocano nel primo quadrante perché ......... Ti sembrano allineati?

**Definizione D.15.** Una funzione in cui *il prodotto* tra la variabile dipendente e la variabile indipendente risulta *costante e diverso da zero* si chiama *funzione di proporzionalità inversa*. In simboli: $y$ inversamente proporzionale a $x \Leftrightarrow x \cdot y = k$ con $k \in \mathbb{R}_0$ e $x \neq 0$ o anche $y = \dfrac{k}{x}$.

Il grafico di una funzione di *proporzionalità inversa* è una curva chiamata *iperbole*.

Analizziamo tale funzione e rappresentiamo il suo grafico a secondo dei valori della costante $k$.

**Caso** $k > 0$ Quando ci proponiamo di costruire una tabella di valori, le variabili $x$ e $y$ sono senz'altro concordi; al numero positivo $x$ corrisponde il numero positivo $y = \frac{k}{x}$ dunque i punti nel riferimento cartesiano si collocano nel primo quadrante; al numero negativo $x$ corrisponde il numero negativo $y = \frac{k}{x}$ dunque i punti nel riferimento cartesiano si collocano nel terzo quadrante.

---

**Esempio D.25.** Rappresentare graficamente la funzione $y = \frac{2}{x}$. Per far questo assegniamo a $x$ alcuni valori, positivi e negativi:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-3$ | $-1$ | $-1/2$ | $1$ | $4$ | $1/2$ | $3$ |
| $y$ | $-2/3$ | $-2$ | $-4$ | $2$ | $1/2$ | $4$ | $2/3$ |

Riportiamo i punti nel riferimento cartesiano ortogonale. Essi si collocano nel primo e terzo quadrante come previsto, non sono allineati. Non possiamo attribuire alla variabile indipendente il valore zero perché non si può dividere per zero, né alcun valore di $x$ potrà avere come immagine $y = 0$ in quanto un quoziente è zero se il dividendo è zero (in questo caso è 2). Il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R}_0$ e l'insieme immagine è IM. $= \mathbb{R}_0$.

Il grafico di questa funzione (figura D.26) non ha punti appartenenti agli assi coordinati. Questa curva è una *iperbole*; essa è formata da due rami che si collocano nel I e III quadrante.

---

**Caso** $k < 0$ Quando ci proponiamo di costruire una tabella di valori, le variabili $x$ e $y$ sono senz'altro discordi; al numero positivo $x$ corrisponde il numero negativo $y = \frac{k}{x}$ dunque i punti nel riferimento cartesiano si collocano nel quarto quadrante; al numero negativo $x$ corrisponde il numero positivo $y = \frac{k}{x}$ dunque i punti nel riferimento cartesiano si collocano nel secondo quadrante.

---

**Esempio D.26.** Rappresentare graficamente la funzione $y = -\frac{1}{2x}$. Per far questo assegniamo a $x$ alcuni valori, positivi e negativi.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-2$ | $-1$ | $-1/2$ | $1$ | $2$ | $1/2$ | $3/2$ |
| $y$ | $1/4$ | $1/2$ | $1$ | $-1/2$ | $-1/4$ | $-1$ | $-1/3$ |

Riportiamo i punti nel riferimento cartesiano ortogonale. Essi si collocano nel secondo e quarto quadrante come previsto, non sono allineati. Non possiamo attribuire alla variabile indipendente il valore zero perché non si può dividere per zero, né alcun valore di $x$ potrà avere come immagine $y = 0$ in quanto un quoziente è zero se il dividendo è zero, ma in questo caso è $-\frac{1}{2}$. Il dominio è $\mathcal{D} = \mathbb{R}_0$ e l'insieme immagine è IM. $= \mathbb{R}_0$.

Il grafico di questa funzione (figura D.27) non ha punti appartenenti agli assi coordinati. Questa curva è una *iperbole*; essa è formata da due rami che si collocano nel II e IV quadrante.

---

✍ *Esercizi proposti:* D.51, D.52

### D.6.5 La funzione di proporzionalità quadratica

È assegnata la tabella che esprime il legame tra due variabili reali; determina se essa rappresenta una funzione costante, una funzione lineare, una funzione di proporzionalità diretta, di proporzionalità inversa, oppure nessuno di questi tipi:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-2$ | $-1$ | $1/2$ | $0$ | $2$ | $3$ | $3/2$ |
| $y$ | $4$ | $1$ | $1/4$ | $0$ | $4$ | $9$ | $9/4$ |

Come avrai notato dall'analisi delle coppie assegnate, la tabella associa ad ogni valore della variabile indipendente il suo quadrato. Il dominio di tale funzione è $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, mentre l'immagine è IM. $= \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. La formula in cui si esprime il legame algebrico delle due variabili è, $y = x^2$. Costruiamo il suo grafico (figura D.28), utilizzando i punti della tabella.

**Definizione D.16.** Una funzione in cui risulta *costante e diverso da zero il rapporto* tra la variabile dipendente e il quadrato della variabile indipendente si chiama *funzione di proporzionalità quadratica*. In simboli: $y$ proporzionale a $x^2 \Leftrightarrow \frac{y}{x^2} = k$ con $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq 0$ o anche $y = k \cdot x^2$.

Il grafico di una funzione di proporzionalità quadratica è una curva passante per l'origine, chiamata *parabola*. Il punto $O(0;0)$ si chiama vertice della parabola.

✍ *Esercizi proposti:* D.53, D.54, D.55, D.56, D.57, D.58, D.59, D.60

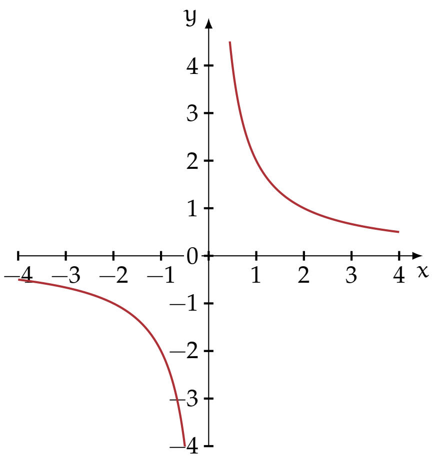



FIGURA D.26: La funzione $y = \frac{2}{x}$.

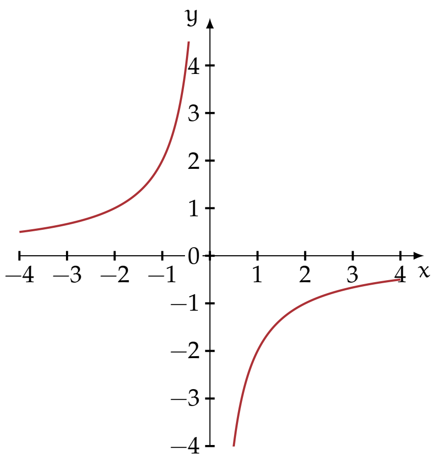



FIGURA D.27: La funzione $y = -\frac{1}{2x}$.

### D.6.6 Funzione lineare a tratti

**Problema D.27.** La ditta "Farvit" produce viti che vengono vendute a peso in imballaggi particolari il cui peso non supera i 10 Kg; la tabella dei prezzi esposta nel magazzino degli ordini è la seguente:

| Peso | Costo |
|---|---|
| peso $\leqslant$ 4 Kg | $1,5 \cdot$ peso |
| 4 Kg $<$ peso $\leqslant$ 8 Kg | $0,5 \cdot$ peso $+ 4$€ |
| 8 Kg $<$ peso $\leqslant$ 10 Kg | 12€ |

*Soluzione* Pensando il peso come variabile indipendente che possa assumere qualunque valore reale positivo, possiamo rappresentare la tabella esposta con un grafico (figura D.29).

Osserviamo che il punto C rappresenta il costo di un pacco di 8 Kg; il punto D è l'estremo di un segmento aperto a sinistra. Per un peso di $8,1$ Kg il costo è di 10€. Il grafico tracciato è formato da segmenti appartenenti a rette diverse: in questi casi si dice che la funzione è definita per casi.

Qual è il costo di una confezione di 3 Kg? Costo $= \dots\dots\dots$ Segnate il punto corrispondente sul grafico. Il punto E cosa rappresenta? ......... Stabilite dominio e codominio della funzione Costo.

♦

**Definizione D.17.** Diciamo che una funzione è *definita per casi* quando è definita da espressioni diverse su sottoinsiemi diversi del dominio.

---

**Esempio D.28.** È assegnata la funzione $f(x) = \begin{cases} f_1\colon \quad y = 1 - x \text{ con } x \leqslant 0 \\ f_2\colon \quad y = 1 \text{ con } x > 0 \end{cases}$ tracciate il suo grafico.

**Passo I** individuiamo il dominio che risulta dall'unione dei sottoinsiemi in cui è definita ciascuna espressione; quindi $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f_1} \cup \mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R}$.

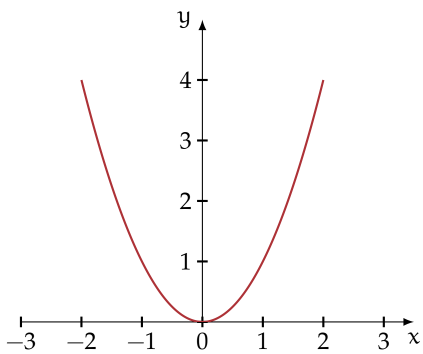



FIGURA D.28: La funzione $y = x^2$.

**Passo II** $f_1$ è una funzione lineare, quindi determiniamo due punti per tracciarne il grafico: $A(0;1)$ e $B(-1;2)$; $f_2$ è una funzione costante.

**Passo III** tracciamo il grafico (figura D.30) che risulta formato dall'unione di due semirette aventi la stessa origine $A(0;1)$.

**Esempio D.29.** Seguendo i passi dell'esempio precedente, dopo aver determinato il dominio, tracciare il grafico della funzione $f(x) = \begin{cases} y = 1 \text{ se } x > 0 \\ y = 0 \text{ se } x = 0 \\ y = -1 \text{ se } x < 0 \end{cases}$ e calcolare l'ordinata dei suoi punti A e B sapendo che $x_A = 34$ e $x_B = -5$.

---

❑ **Osservazione** I grafici dei due esempi precedenti hanno una notevole differenza: le due semirette del primo esempio hanno la stessa origine, il grafico si può tracciare senza sollevare la matita dal foglio, le semirette del secondo esempio hanno invece origine diversa e il grafico non può essere tracciato senza sollevare la matita dal foglio. Diciamo nel primo caso che la funzione è *continua* nel dominio, nel secondo caso che è *discontinua*.

✍ *Esercizio proposto:* D.61

### D.6.7 Funzione valore assoluto

Particolare importanza assume la funzione valore assoluto definita da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} y = x \text{ se } x \geqslant 0 \\ y = -x \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

Vogliamo tracciarne il grafico. Nel riferimento cartesiano ortogonale tracciamo la retta $y = x$ e su di essa evidenziamo la semiretta $b$ avente l'origine in O i cui punti appartengono al primo quadrante; analogamente tracciamo la retta $y = -x$ e su di essa evidenziamo la semiretta $a$ avente l'origine in O i cui punti appartengono al secondo quadrante. Nella

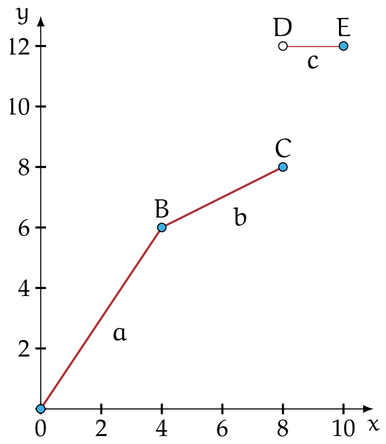



FIGURA D.29: Problema D.27.

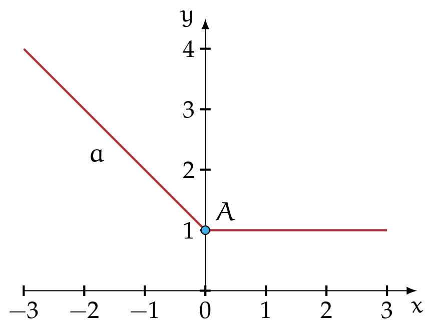



FIGURA D.30: Esempio D.28.

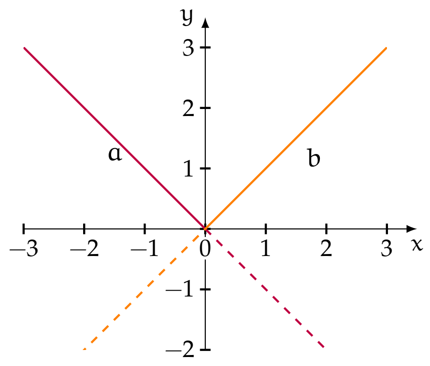



FIGURA D.31: Metodo per ottenere il grafico della funzione di valore assoluto.

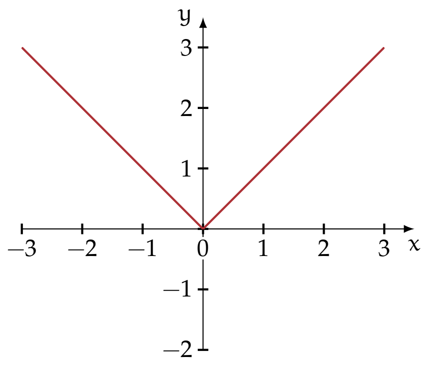



FIGURA D.32: La funzione valore assoluto.

figura D.31 sono rappresentati i passi descritti e nella figura D.32 il grafico della funzione valore assoluto come unione delle due semirette evidenziate.

❍ **Conclusione** il grafico della funzione valore assoluto di equazione $y = |x|$ è formato da due semirette aventi come origine l'origine del riferimento cartesiano. La funzione è continua, è nulla per $x = 0$ e positiva per ogni $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, il codominio è $\mathcal{C} = \{y \in \mathbb{R} / \, y \geqslant 0\}$.

✍ *Esercizi proposti:* D.62, D.63, D.64

## D.7 Esercizi

### D.7.1 Esercizi dei singoli paragrafi

#### D.1 - Funzioni o applicazioni

**D.1.** Per le funzioni rappresentate nell'esempio D.1, completa:

- figura a: $\mathcal{D} =$ I. D. $= \dots\dots\dots\dots\dots$ ; $\mathcal{C} =$ IM. $= \dots\dots\dots\dots\dots$ ; $f(a) = \dots\dots\dots\dots\dots$ ;
- figura c: $\mathcal{D} =$ I. D. $= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ ; $\mathcal{C} =$ IM. $= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ ; $f(\dots) = 4$.

**D.2.** È vero che la corrispondenza che associa ad ogni regione italiana il suo capoluogo di provincia è una funzione?

a ) Completa: $\mathcal{D} =$ I. D. $= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ ;
b ) è vero che IM. ={ città d'Italia}?
c ) completa f(Liguria)$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ ; $f(\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots)$ =Cagliari?

**D.3.** Assegnati gli insiemi $A$ ={mare, ruspa, fegato, generale} e $B$ ={1,2,3,4,5,6,7,8,9} la corrispondenza che associa ad ogni elemento di $A$ il numero di lettere di cui è composta la parola è una funzione?

a ) Rappresentala con grafico sagittale e stabilisci l'insieme immagine;
b ) quale relazione sussiste tra $B$ e IM.?

**D.4.** Quali tra le seguenti corrispondenze sono funzioni?

| Dominio | Codominio | Corrispondenza |
|---|---|---|
| libri | autori | a ogni libro associa l'autore |
| canzoni | cantanti | a ogni canzone associa il cantante |
| portoni di una via | numeri | a ogni portone associa il numero civico |
| computer | sistemi operativi | a ogni computer associa il S.O. installato |

**D.5.** Si è ammessi alla facoltà $U$ se nel test d'ingresso si è avuto un punteggio compreso tra 60 incluso e 100 incluso. La corrispondenza che associa ad ogni studente che ha superato il test il punteggio ottenuto è una funzione? Se rispondi affermativamente, sai dire di che tipo è la funzione?

**D.6.** Spiega perché la funzione che associa a ciascuna persona il suo codice fiscale è biunivoca.

#### D.2 - Funzioni tra insiemi numerici

**D.7.** Nella corrispondenza che associa ad ogni intero il suo valore assoluto (esempio D.5), è vero che scelto un qualunque numero naturale è possibile determinare almeno un numero intero di cui è immagine? Completate: $f(\dots\dots) = 45$. L'osservazione precedente permette di concludere che tale funzione è suriettiva? Fate la rappresentazione sagittale della funzione.

**D.8.** Data la funzione $y = x - 2$ con dominio $\mathbb{N} - \{0, 1\}$ e codomino $\mathbb{N}$ completa l'analisi dell'esempio D.7

a ) elementi diversi del dominio hanno immagini diverse, quindi tale funzione è *iniettiva*; si ha anche $\mathcal{C} = \text{IM.} = \mathbb{N}$ e pertanto la funzione è *suriettiva*, quindi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ;
b ) preso $y = 8$ sapresti trovare l'elemento del dominio di cui è immagine? . . . . . . . . . . . . . ;

**D.9.** Stabilisci se la funzione $f : y = \frac{1}{x}$ è iniettiva. Nell'insieme immagine c'è lo zero? Completate $\mathcal{C} = \text{IM.} = \ldots$ Completate la tabella

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x \in \mathbb{Q}_0$ | $-2$ | $-7/8$ | $+1$ | | | | $-1$ | |
| $y \in \mathbb{Q}_0$ | | | | $+1/3$ | $-12/5$ | $-7/8$ | | $-1$ |

**D.10.** Consideriamo la funzione f che associa ad ogni numero razionale il suo triplo.

$\mathbb{Q} \xrightarrow{f} \mathbb{Q}$; la sua espressione in forma analitica è $f : y = \ldots\ldots\ldots$

$\mathcal{D} = \text{I. D.} = \mathbb{Q}$; possiamo moltiplicare per 3 qualunque numero razionale.

$\mathcal{C} = \text{IM.} = \mathbb{Q}$; infatti per ogni numero razionale $y$ c'è un numero razionale $x$ di cui $y$ è il triplo, basta dividere $y$ per 3.

a ) qual è l'immagine di 0? . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
b ) quale elemento del dominio ha per immagine 5? . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
c ) è vero che ogni numero positivo ha l'immagine positiva? . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
d ) è vero che $-1$ è immagine di $-3$? . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
e ) la funzione è iniettiva?
f ) la funzione è biunivoca?

Fai il grafo sagittale della funzione.

**D.11.** Per ciascuna delle seguenti funzioni determinare l'insieme di definizione, l'insieme immagine e stabilire se la funzione è iniettiva o suriettiva.

a ) $y : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; \quad x \to 2x;$
b ) $y : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}; \quad x \to x^2;$
c ) $y : \mathbb{N} \to \mathbb{N}; \quad x \to \frac{1}{x};$
d ) $y : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}; \quad x \to 2x;$
e ) $y : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}; \quad x \to \frac{1}{x}.$

**D.12.** Per ciascuna delle funzioni elencate in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, riempite le colonne della tabella.

| $y = f(x)$ | $f(x)$ è iniettiva? | $x = f^{-1}(y)$ |
|---|---|---|
| $y = 2x$ | | |
| $y = x + 2$ | | |
| $y = 2x - 2$ | | |
| $y = x^2$ | | |
| $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ | | |
| $y = \sqrt{2} \cdot x$ | | |

**D.13.** Assegnata la funzione lineare $f : y = m \cdot x + q$, essendo una funzione iniettiva la sua inversa è: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

### D.3 - Composizione di funzioni

**D.14.** Date le funzioni $f(x) = 2x+1$ e $g(x) = 3x+2$ che hanno per dominio rispettivamente $A = \{x \in \mathbb{Z} / -2 \leqslant x \leqslant 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} / -1 \leqslant x \leqslant 3\}$. Scrivi le espressioni analitiche delle funzioni $f \circ g$ e $g \circ f$.

### D.4 - La retta e gli insiemi numerici

**D.15.** Determina sulla retta reale i punti immagine dei seguenti numeri reali: $\alpha = \frac{3}{2}\sqrt{2}$; $\beta = \frac{2}{5} + \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\delta = -\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$; $\lambda = \sqrt{3} - 3$.

**D.16.** Verifica che il numero $\chi = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ non è uguale al numero $\omega = \sqrt{5}$, usando la rappresentazione sulla retta orientata.

**D.17.** Stabilisci il valore di verità della proposizione: "poiché tra 2 e 3 non vi è nessun altro numero naturale, anche tra $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ non vi è nessun numero reale".

### D.5 - Il metodo delle coordinate cartesiane

**D.18.** Per ciascuna coppia di punti indica in quale quadrante si trova, se si trova su un asse indica l'asse: $(0;-1)$, $\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{4}\right)$, $\left(0;\frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{5}{3};1\right)$, $\left(1;-\frac{5}{3}\right)$. $(-8;9)$, $\left(-2;-\frac{1}{4}\right)$, $(-1;0)$.

Completa l'osservazione conclusiva:

- tutte le coppie del tipo $(+;+)$ individuano punti del ........;
- tutte le coppie del tipo $(\ldots;\ldots)$ individuano punti del IV quadrante;
- tutte le coppie del tipo $(-;+)$ individuano punti del ........;
- tutte le coppie del tipo $(-;-)$ individuano punti del ........;
- tutte le coppie del tipo $(\ldots;0)$ individuano punti del ........;
- tutte le coppie del tipo $(\ldots;\ldots)$ individuano punti dell'asse $y$.

**D.19.** Sono assegnati i punti $A(3;-1)$, $B(3;5)$, $M(-1;-1)$, $N(-1;-7)$. È vero che $\overline{AB} = \overline{MN}$?

**D.20.** Sono assegnati i punti $A(1;5)$, $B(-4;5)$, $C(-4;-2)$, $D(5;-2)$. Quale poligono si ottiene congiungendo nell'ordine i quattro punti assegnati? Determinare l'area del quadrilatero $ABCD$.

**D.21.** Determina l'area del quadrilatero $MNPQ$ sapendo che $M(6;-4)$, $N(8;3)$, $P(6;5)$, $Q(4;3)$.

**D.22.** Determina $\overline{AB}$ sapendo che $A(7;-1)$ e $B(-3;-6)$.

**D.23.** Determina la distanza di $P\,(-3;2,5)$ dall'origine del riferimento.

**D.24.** Calcola la misura del perimetro del triangolo $ABC$ di vertici $A(3;-2)$, $B(4;1)$, $C(7;-4)$.

**D.25.** Determina il perimetro del quadrilatero di vertici $A(1;5)$, $B(-4;5)$, $C(-4;-2)$, $D(5;-2)$.

**D.26.** Determina il perimetro del quadrilatero di vertici $M(6;-4)$, $N(8;3)$, $P(6;5)$, $Q(4;3)$.

**D.27.** Determina il perimetro e la misura delle diagonali del quadrilatero di vertici $A(1;-3)$, $B(4;3)$, $C(-3;1)$, $D(-6;-5)$.

**D.28.** Verifica che il triangolo di vertici $E(4;3)$, $F(-1;4)$, $G(3;-2)$ è isoscele.

**D.29.** Il triangolo $ABC$ ha il lato $BC$ appoggiato sull'asse $x$; il vertice $B$ ha ascissa $\frac{5}{4}$, il vertice $C$ segue $B$ e $\overline{BC} = \frac{17}{2}$. Determina le coordinate del vertice $C$, l'area e il perimetro del triangolo sapendo che il terzo vertice è $A(-1;5)$.

**D.30.** I punti $F(3;0)$, $O(0;0)$, $C(0;5)$ sono i vertici di un rettangolo; determina le coordinate del quarto vertice, il perimetro, l'area e la misura delle diagonali del rettangolo.

**D.31.** I punti $O(0;0)$, $A(4;5)$, $B(9;5)$, $C(3;0)$ sono i vertici di un trapezio. Determina perimetro e area del trapezio $OABC$.

**D.32.** Determina le coordinate del punto medio dei segmenti i cui estremi sono le seguenti coppie di punti:

a) $A(-\sqrt{2};0), B(0;\sqrt{2})$;
b) $A\left(\frac{2}{3};-\frac{3}{2}\right), B\left(-\frac{1}{6};3\right)$;
c) $A(-1;4), B(1;-4)$;
d) $A\left(0;-\frac{3}{2}\right), B(-2;-1)$;
e) $A\left(1+\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{3}}\right), B\left(-\sqrt{2};-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;
f) $A\left(\frac{7}{5};-\frac{7}{5}\right), B(1;-1)$;
g) $A\left(-3;\frac{1}{2}\right), B\left(\frac{1}{2};-3\right)$.

**D.33.** I vertici del triangolo $ABC$ sono i punti $A\left(\frac{2}{3};-\frac{3}{2}\right)$, $B\left(-\frac{1}{6};1\right)$, $C\left(\frac{4}{3};0\right)$, determina le coordinate dei punti $M$, $N$, $P$, punti medi rispettivamente dei lati $AB$, $AC$, $BC$.

**D.34.** I vertici del triangolo $ABC$ sono i punti $A(-3;5)$, $B(3;-5)$, $C(3,5)$, i punti $M$, $N$, $P$ sono i punti medi rispettivamente dei lati $AB$, $AC$, $BC$. Determina il perimetro di $ABC$ e di $MNP$. Quale relazione sussiste tra i perimetri ottenuti? Secondo te vale la stessa relazione anche tra le aree dei due triangoli?

**D.35.** Verifica che il triangolo di vertici $A(2;3)$, $B(6;-1)$, $C(-4;-3)$ è rettangolo (è sufficiente verificare che le misure dei lati verificano la relazione di Pitagora). È vero che $CB$ è l'ipotenusa? Verifica che $AM$, con $M$ punto medio di $BC$ è metà di $BC$ stesso. Come sono i triangoli $AMC$ e $AMB$?

**D.36.** Verifica che i segmenti $AB$ e $CD$ di estremi $A\left(\frac{1}{2};2\right)$, $B\left(-\frac{3}{4};-2\right)$, $C(3;1)$, $D\left(-\frac{7}{2};-1\right)$ hanno lo stesso punto medio. È vero che $AC = BD$?

### D.6 - Il grafico di una funzione

**D.37.** Sono assegnate alcune funzioni con una formula; compila le tabelle a seguito di ciascuna.

$f_1 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \quad y = \frac{1}{2}x$:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 2 | | | | |
| $y$ | 1 | | | | |

$f_2 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \quad y = -x$:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | | | | |
| $y$ | $-1$ | | | | |

$f_3 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \quad y = 2-3x$:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0 | | | | |
| $y$ | 2 | | | | |

**D.38.** Esprimi con linguaggio comune la funzione $f_1$ dell'esercizio precedente e rispondi alle domande:

a ) qual è l'immagine di 0? $y = \ldots\ldots;$
b ) quale elemento del dominio ha per immagine 5? $x = \ldots\ldots;$
c ) è vero che ogni numero positivo ha l'immagine positiva? Perché?
d ) è vero che $-1$ è immagine di $-2$? Perché?

**D.39.** Dopo aver determinato per ciascuna delle seguenti funzioni il coefficiente angolare $k$, tracciane il grafico in un riferimento cartesiano ortogonale:

a ) $f_1 : y = \frac{1}{2}x;$
b ) $f_2 : y = x;$
c ) $f_3 : y = \frac{4}{3}x;$
d ) $f_4 : y = \frac{3}{5}x;$
e ) $f_5 : y = 5x;$
f ) $f_6 : y = -\frac{1}{2}x;$
g ) $f_7 : y = -x;$
h ) $f_8 : y = -\frac{3}{4}x.$

**D.40.** Riporta in uno stesso riferimento cartesiano ortogonale le prime cinque funzioni dell'esercizio precedente. Evidenzia con un colore diverso la funzione $f_2$, calcola poi il coefficiente angolare $k$ compilando la seguente tabella:

| $f$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $k$ | | | | | |

*Cancella i termini errati* nella seguente analisi: "Tutte le funzioni hanno coefficiente angolare positivo/negativo; tutte le rette formano con l'asse orientato delle $x$ un angolo ottuso/acuto; tutte le rette aventi coefficiente minore di 1 stanno sopra/sotto la $f_2$; tutte le rette aventi coefficiente maggiore di 1 stanno sopra/sotto la $f_2$".

**D.41.** Ripeti l'esercizio precedente per le altre tre funzioni, evidenziando la funzione $f_7$; costruisci l'analoga tabella e *cancella i termini errati* nella seguente analisi: "Tutte le funzioni hanno coefficiente angolare positivo/negativo; tutte le rette formano con l'asse orientato delle $x$ un angolo ottuso/acuto; tutte le rette aventi coefficiente minore di $-1$ stanno sopra/sotto la $f_7$; tutte le rette aventi coefficiente maggiore di $-1$ stanno sopra/sotto la $f_7$".

**D.42.** Se $x$ rappresenta la misura del lato di un triangolo equilatero; determina la misura della altezza al variare della misura del lato. Nel riferimento cartesiano ortogonale traccia il grafico della funzione ottenuta.

**D.43.** Quale deve essere la misura del lato di un quadrato per avere la diagonale di 2 m?

**D.44.** Traccia nel riferimento cartesiano ortogonale il grafico delle funzioni: $y = -2$; $y = 6$; $y = 0$; $y = -1$; $y = 3$.

**D.45.** Traccia nel riferimento cartesiano la funzione $y = 1$ e $y = -3$; nello stesso riferimento traccia la funzione $y = 2x$. Le tre rette individuano nel piano due punti. Determina la distanza dei due punti.

**D.46.** Le due funzioni $f_1$ e $f_2$ di proporzionalità diretta assegnate dalle tabelle seguenti delimitano sulla funzione $y = -2$ un segmento; determina la misura del segmento e il suo punto medio:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | $x$ | $-2$ | $0$ | $3$ | $-1$ |
| | $y$ | $2$ | $0$ | $-3$ | $1$ |
| $f_2$ | $x$ | $1$ | $0$ | $3$ | $-2$ |
| | $y$ | $4$ | $0$ | $12$ | $-8$ |

**D.47.** Traccia il grafico cartesiano delle funzioni $f_1 : y = 2x$, $f_2 : y = -\frac{1}{2}x$, $f_3 : y = 2$ e indica con $A$ e $B$ rispettivamente i punti di intersezione di $f_1$ con $f_3$ e di $f_2$ con $f_3$. Considera il triangolo $AOB$ ($O$ è l'origine del riferimento). È vero che $\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2$? Sai trarre una caratteristica del triangolo $AOB$? Traccia nello stesso riferimento la funzione $f_4 : y - 4$ e indica con $C$ e $D$ rispettivamente i punti di intersezione di $f_1$ con $f_4$ e di $f_2$ con $f_4$. Calcola l'area del quadrilatero $ABCD$.

**D.48.** Sono assegnate le funzioni lineari: $f_1 : y = \frac{1}{2}x - 2$, $f_2 : y = -x - \frac{3}{4}$, $f_3 : y = 6x - 6$. Rappresentale in un riferimento cartesiano ortogonale dopo aver compilato per ciascuna una tabella di valori.

**D.49.** Segna nel riferimento cartesiano ortogonale i punti assegnati tramite la tabella:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-3$ | $-3/2$ | $0$ | $3$ | $6$ |
| $y$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $2$ | $4$ |

La funzione assegnata è una proporzionalità diretta?
Scrivi la formula $y = \dots\dots\dots$

Completa ora la tabella avente i medesimi valori della variabile indipendente, ma i valori della variabile dipendente siano ottenuti dai precedenti diminuiti di 2:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-3$ | $-3/2$ | $0$ | $3$ | $6$ |
| $y$ | | | $-2$ | | |

Scrivi la formula della nuova funzione $y = \dots\dots\dots$
Traccia il suo grafico nello stesso riferimento. È una funzione lineare?

**D.50.** La tabella individua coppie di punti allineati; trova la formula che descrive ciascuna funzione lineare e traccia il suo grafico:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | $x$ | $5$ | $-1$ | $0$ | $3$ | $1$ |
| | $y$ | $-2$ | $4$ | $-3$ | $0$ | $2$ |
| $f_2$ | $x$ | $-4$ | $-4/3$ | $0$ | $-1/3$ | $4/3$ |
| | $y$ | $-2$ | $0$ | $1$ | $3/4$ | $2$ |
| $f_3$ | $x$ | $-6$ | $-1$ | $0$ | $3$ | $1$ |
| | $y$ | $-11/3$ | $-1/3$ | $1/3$ | $7/3$ | $1$ |

**D.51.** Traccia il grafico delle seguenti funzioni di proporzionalità inversa:

a) $f_1 : y = -\frac{3}{2x}$;
b) $f_2 : y = \frac{1}{x}$;
c) $f_3 : y = \frac{5}{x}$;
d) $f_4 : y = \frac{-3}{x}$;
e) $f_5 : y = -\frac{1}{x}$;
f) $f_6 : y = -\frac{2}{5x}$.

**D.52.** Traccia nelle stesso riferimento cartesiano ortogonale la curva $\gamma : y = -\frac{1}{2x}$ e le rette $r_1 : y = 2$ e $r_2 : y = -2$. Verifica che l'origine del riferimento è il punto medio del segmento avente per estremi i punti $A_1 = r_1 \cap \gamma$ e $A_2 = r_2 \cap \gamma$.

**D.53.** Traccia il grafico delle seguenti funzioni di proporzionalità quadratica:

a) $f_1 : y = -x^2$;
b) $f_2 : y = x^2$;
c) $f_3 : y = -\frac{1}{2}x^2$;
d) $f_4 : y = -\frac{5}{2}x^2$;
e) $f_5 : y = \frac{3}{4}x^2$;
f) $f_6 : y = \frac{7}{3}x^2$.

**D.54.** Dai grafici dell'esercizio precedente trai le conclusioni, completando.

a) se $k > 0$ allora i punti della parabola si trovano . . . . . . . . .;
b) se $k < 0$ allora i punti della parabola si trovano . . . . . . . . .;
c) se $k > 1$ allora la curva è più aperta o più chiusa rispetto alla $y = x^2$? . . . . . . . . .;
d) se $0 < k < 1$ allora la curva è più aperta o più chiusa rispetto alla $y = x^2$? . . . . . . . . .;
e) se $k < -1$ allora la curva è più aperta o più chiusa rispetto alla $y = -x^2$? . . . . . . . . .;
f) se $-1 < k < 0$ allora la curva è più aperta o più chiusa rispetto alla $y = -x^2$? . . . . . . . . ..

**D.55.** Determina la distanza del punto di ascissa $x = -2$ della parabola $y = 3x^2$ dal suo vertice.

**D.56.** Sono assegnate le funzioni $f_1 : y = (-x)^2$ e $f_2 : y = -x^2$ di proporzionalità quadratica. Spiega se e perché sono o non sono la stessa funzione. Danne di ciascuna la descrizione in linguaggio comune. Costruisci per ciascuna una tabella di valori e costruisci il rispettivo grafico. Puoi confermare la risposta data alla prima richiesta?

**D.57.** Completa la seguente tabella:

| Funzione | In linguaggio comune | Formula | Tipo |
|---|---|---|---|
| $f_1$ | Associa ad ogni $x$ reale il valore $-2/3$ | | |
| $f_2$ | Associa ad ogni $x$ reale il triplo del suo quadrato | | |
| $f_3$ | | $y = -5x^2$ | |
| $f_4$ | Associa ad ogni $x$ reale il suo doppio aumentato di $3/2$ | | |
| $f_5$ | Associa ad ogni $x$ reale $\neq 0$ l'opposto del suo reciproco | | |
| $f_3$ | | $y = -5x$ | |

Traccia nel riferimento cartesiano ortogonale le funzioni assegnate. Per quale/i è vero che per qualunque $x$ del dominio è IM. $= \mathbb{R}$?

**D.58.** Il rettangolo $ABCD$ ha il lato $AB$ triplo del lato $BC$. Indica $\overline{BC} = x$; determina il perimetro del rettangolo in funzione di $x$. $2p = \ldots\ldots\ldots$ Spiega perché è necessaria la condizione $x > 0$; rappresenta graficamente nel riferimento cartesiano la funzione perimetro. Determina ora l'area in funzione di $x$, Area $= \ldots\ldots\ldots$; rappresenta la funzione area, nello stesso riferimento.

**D.59.** Il triangolo rettangolo $ABC$, retto in $A$ ha i cateti l'uno doppio dell'altro. Indica la misura del cateto minore $\overline{AB} = x$ e spiega perché è necessaria la condizione $x > 0$.

Determina in funzione di $x$ l'area del triangolo. Area $= \ldots\ldots\ldots$ rappresenta questa funzione nel riferimento cartesiano ortogonale. Stabilisci le misure dei cateti se l'area è di $20\,\text{cm}^2$.

Calcola in funzione di $x$ il perimetro del triangolo: $2p = \dots\dots\dots$, rappresenta come varia la funzione perimetro al variare di $x$.

**D.60.** Nel triangolo isoscele $ABC$ il lato obliquo $AB$ è doppio della base $BC$; indica $\overline{BC} = x$ e determina in funzione di $x$ il perimetro del triangolo. $2p = \dots\dots\dots$ Di che funzione si tratta? Descrivila e rappresentala nel riferimento cartesiano ortogonale, dopo aver fissato le opportune condizioni sulla variabile indipendente.

Se il perimetro è 120 cm, quanto misurano i lati del triangolo? Calcola, in questo caso, l'area del triangolo e la misura delle altezze relative ai lati uguali.

**D.61.** Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} y = -1 \text{ se } x > 1 \\ y = 2x \text{ se } x \leqslant 1 \end{cases}.$$

**D.62.** Traccia il grafico della funzione $y = |x+1|$.

**D.63.** Un caseificio vende mozzarelle a € 4,50 al chilo ai clienti che acquistano fino 10 kg di mozzarella, per i clienti che fanno acquisti superiori ai 10 kg vende a € 4,00 al kg per la parte che eccede i 10 kg e per i primi 10 kg vende sempre a € 4,50. Per i clienti dei grandi supermercati che acquistano quantità superiori a 100 kg vende a € 3,50 al kg. Codifica con opportune formule la funzione costo:

$$\begin{cases} \dots\dots\dots \text{ se } x \leqslant 10 \\ \dots\dots\dots \text{ se } 10 < x \leqslant 100 \\ \dots\dots\dots \text{ se } x > 100 \end{cases}.$$

Determina il costo dei seguenti ordini:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| kg | 3,5 | 11,8 | 78 | 120 | | | |
| euro | | | | | 360 | 57 | 35 |

Rappresenta graficamente la funzione.

**D.64.** Dal grafico della funzione stabilisci insieme di definizione $\mathcal{D}$, insieme immagine IM., verifica se la funzione è iniettiva, suriettiva o biettiva.