Monomi 9

9.1 L'insieme dei monomi

D'ora in poi quando scriveremo un'espressione letterale in cui compare l'operazione di moltiplicazione, tralasceremo il puntino fin qui usato per evidenziare l'operazione. Così l'espressione $5 \cdot a^2 + \frac{3}{8} \cdot a \cdot b - 7 \cdot b^2$ verrà scritta in modo più compatto $5a^2 + \frac{3}{8}ab - 7b^2$.

Definizione 9.1. Una espressione letterale in cui numeri e lettere sono legati dalla sola moltiplicazione si chiama *monomio*.

Esempio 9.1. L'espressione nelle due variabili a e b, $E = 5 \cdot 2a^2 \frac{3}{8}ab7b^2$ è un monomio perché numeri e lettere sono legate solo dalla moltiplicazione.

Esempio 9.2. L'espressione $E = 2a^2 - ab^2$ non è un monomio poiché compare anche il segno di sottrazione.

✍ *Esercizio proposto:* 9.1

❑ **Osservazione** Gli elementi di un monomio sono *fattori*, perché sono termini di una moltiplicazione ma possono comparire anche *potenze*, infatti la potenza è una moltiplicazione di fattori uguali. Non possono invece comparire esponenti negativi o frazionari. In un monomio gli esponenti delle variabili devono essere numeri naturali.

Definizione 9.2. Un monomio si dice *ridotto in forma normale* quando è scritto come prodotto di un solo fattore numerico e di potenze letterali con basi diverse.

Esempio 9.3. Il monomio $E = 5 \cdot 2a^2 \frac{3}{8}ab7b^2$ non è scritto in forma normale: tra i suoi fattori vi sono numeri diversi e le potenze letterali hanno basi ripetute, la a e la b compaiono due volte ciascuna.

Moltiplichiamo tra loro i fattori numerici e otteniamo $\frac{105}{4}$; eseguiamo il prodotto di potenze con la stessa base otteniamo a^3b^3. Il monomio in forma normale è $E = \frac{105}{4}a^3b^3$.

Procedura 9.1. *Ridurre in forma normale un monomio:*

a) moltiplicare tra loro i fattori numerici;
b) moltiplicare le potenze con la stessa base.

✍ *Esercizio proposto:* 9.2

Definizione 9.3. La parte numerica del monomio ridotto a forma normale si chiama *coefficiente*.

Esempio 9.4. Nella tabella seguente sono segnati alcuni monomi e i rispettivi coefficienti.

monomio	$-\frac{1}{2}abc$	$3x^3y^5$	a^5b^7	$-k^2$
coefficiente	$-\frac{1}{2}$	3	1	-1

Definizione 9.4. Se il coefficiente del monomio è zero il *monomio* si dice *nullo*.

Il complesso delle lettere che compaiono nel monomio ridotto a forma normale ne costituisce la *parte letterale*.

Esempio 9.5. L'espressione letterale $\frac{3}{5}a^3bc^2$ è un monomio; il numero $\frac{3}{5}$ e le lettere a^3, b, c^2 sono legate dall'operazione di moltiplicazione; il suo coefficiente è il numero $\frac{3}{5}$ e la parte letterale è a^3bc^2.

Esempio 9.6. Controesempi:

a) l'espressione letterale $\frac{3}{5}a^3 + bc^2$ non è un monomio dal momento che numeri e lettere sono legati oltre che dalla moltiplicazione anche dalla addizione;
b) l'espressione letterale $\frac{3}{5}a^{-3}bc^2$ non è un monomio in quanto la potenza con esponente negativo rappresenta una divisione, infatti $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$.

Definizione 9.5. Due o più monomi che hanno parte letterale identica si dicono *simili*.

Esempio 9.7. Il monomio $\frac{3}{5}a^3bc^2$ è simile a $68a^3bc^2$ e anche a $-0,5a^3bc^2$, ma non è simile a $\frac{3}{5}a^2bc^3$. L'ultimo monomio ha le stesse lettere degli altri ma sono elevate ad esponenti diversi.

❑ **Osservazione** Il monomio nullo si considera simile a qualunque altro monomio.

Definizione 9.6. Due monomi simili che hanno coefficiente opposto si dicono *monomi opposti*.

Esempio 9.8. I monomi $\frac{3}{5}a^3bc^2$ e $-\frac{3}{5}a^3bc^2$ sono opposti, infatti sono simili e hanno coefficienti opposti.

Esempio 9.9. Non sono opposti $\frac{3}{5}a^3bc^2$ e $-7a^3bc^2$ ma semplicemente simili. I loro coefficienti hanno segno diverso, ma non sono numeri opposti.

✍ *Esercizio proposto:* 9.3

Definizione 9.7. Il *grado complessivo* di un monomio è la somma degli esponenti della parte letterale.

Quando il monomio è ridotto a forma normale, l'esponente di una sua variabile ci indica il *grado* del monomio *rispetto a quella variabile*.

Esempio 9.10. Il monomio $\frac{3}{5}a^3bc^2$ ha grado complessivo 6, ottenuto sommando gli esponenti della sua parte letterale $(3+1+2=6)$. Rispetto alla variabile a è di terzo grado, rispetto alla variabile b è di primo grado, rispetto alla variabile c è di secondo grado.

Abbiamo detto che gli esponenti della parte letterale del monomio sono numeri naturali, dunque possiamo anche avere una o piùvariabili elevate ad esponente 0. Cosa succede allora nel monomio?

Consideriamo il monomio $56a^3b^0c^2$, sappiamo che qualunque numero diverso da zero elevato a zero è uguale a 1, quindi possiamo sostituire la variabile b che ha esponente 0 con 1 e otteniamo $56a^3 \cdot 1 \cdot c^2 = 56a^3c^2$. Se in un monomio ogni variabile ha esponente 0, il monomio rimane solamente con il suo coefficiente numerico: per esempio $-3a^0x^0 = -3 \cdot 1 \cdot 1 = -3$.

❑ **Osservazione** Esistono *monomi di grado 0*; essi presentano solo il coefficiente e pertanto *sono* equiparabili ai *numeri razionali*.

9.2 Valore di un monomio

Poiché il monomio è un'espressione letterale, possiamo calcolarne il valore quando alle sue variabili sostituiamo numeri.

Esempio 9.11. Calcola il valore del monomio $3x^4y^5z$ per i valori $x=-3$, $y=5$ e $z=0$.

Sostituendo i valori assegnati otteniamo $3 \cdot (-3)^4 \cdot 5^5 \cdot 0 = 0$ essendo uno dei fattori nullo.

❑ **Osservazione** Il valore di un monomio è nullo quando almeno una delle sue variabili assume il valore 0.

Molte formule di geometria sono scritte sotto forma di monomi: area del triangolo $\frac{1}{2}bh$; area del quadrato l^2; perimetro del quadrato $4l$; area del rettangolo bh; volume del cubo l^3 ecc. Esse acquistano significato quando alle lettere sostituiamo numeri che rappresentano le misure della figura considerata.

✍ *Esercizi proposti:* 9.4, 9.5, 9.6, 9.7, 9.8, 9.9, 9.10, 9.11, 9.12

9.3 Moltiplicazione di due monomi

Ci proponiamo ora di introdurre nell'insieme dei monomi le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, potenza, divisione.

Ricordiamo che definire in un insieme un'operazione significa stabilire una legge che associa a due elementi dell'insieme un altro elemento dell'insieme stesso.

La moltiplicazione di due monomi si indica con lo stesso simbolo della moltiplicazione tra numeri; i suoi termini si chiamano fattori e il risultato si chiama prodotto, proprio come negli insiemi numerici.

Definizione 9.8. Il prodotto di due monomi è il monomio avente per coefficiente il prodotto dei coefficienti, per parte letterale il prodotto delle parti letterali dei monomi fattori.

Esempio 9.12. Assegnati i monomi $m_1 = -4x^2yz^3$ e $m_2 = \frac{5}{6}x^3z^6$ il monomio prodotto è

$$m_3 = \left(-4 \cdot \frac{5}{6}\right)\left(x^2 \cdot x^3\right) \cdot y \cdot \left(z^3 \cdot z^6\right) = -\frac{10}{3}x^5yz^9.$$

Procedura 9.2 (per moltiplicare due monomi)**.** *La moltiplicazione tra monomi si effettua moltiplicando prima i coefficienti numerici e dopo le parti letterali:*

a) *nella moltiplicazione tra i coefficienti usiamo le regole note della moltiplicazione tra numeri razionali;*
b) *nella moltiplicazione tra le parti letterali applichiamo la regola del prodotto di potenze con la stessa base.*

9.3.1 Proprietà della moltiplicazione

a) commutativa: $m_1 \cdot m_2 = m_2 \cdot m_1$;
b) associativa: $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = (m_1 \cdot m_2) \cdot m_3 = m_1 \cdot (m_2 \cdot m_3)$;
c) 1 è l'elemento neutro: $1 \cdot m = m \cdot 1 = m$;
d) se uno dei fattori è uguale a 0 il prodotto è 0, cioè $0 \cdot m = m \cdot 0 = 0$.

✍ *Esercizi proposti:* 9.13, 9.14, 9.15, 9.16

9.4 Potenza di un monomio

Ricordiamo che tra i numeri l'operazione di elevamento a potenza ha un solo termine, la base, sulla quale si agisce a seconda dell'esponente.

$$\text{Potenza} = \text{base}^{\text{esponente}} = \underbrace{(\text{base} \cdot \text{base} \cdot \text{base} \cdot \ldots \cdot \text{base})}_{\text{tanti fattori quanti ne indica l'esponente}}.$$

Analogamente viene indicata la potenza di un monomio: la base è un monomio e l'esponente è un numero naturale.

Definizione 9.9. La *potenza di un monomio* è un monomio avente per coefficiente la potenza del coefficiente e per parte letterale la potenza della parte letterale.

Esempio 9.13. Calcoliamo il quadrato e il cubo del monomio $m_1 = -\frac{1}{2}a^2b$.

$$m_1 = -\frac{1}{2}a^2b \qquad \text{elevo al quadrato}$$
$$\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(a^2\right)^2 \cdot (b)^2 = \frac{1}{4}a^4b^2.$$

$$m_1 = -\frac{1}{2}a^2b \qquad \text{elevo al cubo}$$
$$\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(a^2\right)^3 \cdot (b)^3 = -\frac{1}{8}a^6b^3.$$

Esempio 9.14. Calcoliamo il quadrato e il cubo del monomio $m_2 = 5a^3b^2c^2$.

$$m_2 = 5a^3b^2c^2 \qquad \text{elevo al quadrato}$$
$$\left(5a^3b^2c^2\right)^2 = (5)^2 \cdot \left(a^3\right)^2 \cdot \left(b^2\right)^2 \cdot \left(c^2\right)^2 = 25a^6b^4c^4.$$

$$m_2 = 5a^3b^2c^2 \qquad \text{elevo al cubo}$$
$$\left(5a^3b^2c^2\right)^3 = (5)^3 \cdot \left(a^3\right)^3 \cdot \left(b^2\right)^3 \cdot \left(c^2\right)^3 = 125a^9b^6c^6.$$

Procedura 9.3. *Eseguire la potenza di un monomio:*

a) applichiamo la proprietà relativa alla potenza di un prodotto, eseguiamo cioè la potenza di ogni singolo fattore del monomio;
b) applichiamo la proprietà relativa alla potenza di potenza, moltiplicando l'esponente della variabile per l'esponente delle potenza.

✍ *Esercizi proposti:* 9.17, 9.18, 9.19, 9.20

9.5 Divisione di due monomi

Premessa: ricordiamo che assegnati due numeri razionali d_1 e d_2 con $d_2 \neq 0$, eseguire la divisione $d_1 : d_2$ significa determinare il numero q che moltiplicato per d_2 dà d_1. Nell'insieme $\mathbb{Q}$ basta la condizione $d_2 \neq 0$ per affermare che q esiste ed è un numero razionale.

Definizione 9.10. Assegnati due monomi m_1 e m_2 con m_2 diverso dal monomio nullo, se è possibile determinare il monomio q tale che $m_1 = q \cdot m_2$, si dice che m_1 è divisibile per m_2 e q è il monomio quoziente.

Esempio 9.15. $(36x^5y^2) : (-18x^3y)$.

Per quanto detto sopra, vogliamo trovare, se esiste, il monomio q tale che $(36x^5y^2) = q \cdot (-18x^3y)$ e ripensando alla moltiplicazione di monomi possiamo dire che $q = -2x^2y$. Infatti $(-2x^2y) \cdot (-18x^3y) = (36x^5y^2)$. Il monomio q è quindi il quoziente della divisione assegnata.

Procedura 9.4 (Calcolare il quoziente di due monomi)**.** *Il quoziente di due monomi è così composto:*

a) il coefficiente è il quoziente dei coefficienti dei monomi dati;
b) la parte letterale ha gli esponenti ottenuti sottraendo gli esponenti delle stesse variabili;
c) se la potenza di alcune lettere risulta negativa il risultato della divisione non è un monomio.

Esempio 9.16. $\left(\frac{7}{2}a^3x^4y^2\right) : \left(-\frac{21}{8}ax^2y\right)$.

Seguiamo i passi descritti sopra

$$\left(\frac{7}{2}a^3x^4y^2\right) : \left(-\frac{21}{8}ax^2y\right) = \frac{7}{2} \cdot \left(-\frac{8}{21}\right) a^{3-1}x^{4-2}y^{2-1} = -\frac{4}{3}a^2x^2y.$$

Nell'eseguire la divisione non abbiamo tenuto conto della condizione che il divisore deve essere diverso dal monomio nullo; questa condizione ci obbliga a stabilire per la divisione le Condizioni di Esistenza (C. E.): C. E. $= a \neq 0$ e $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

Esempio 9.17. $\left(\frac{9}{20}a^2b^4\right) : \left(-\frac{1}{8}a^5b^2\right)$.

La C. E. $a \neq 0$ e $b \neq 0$, il quoziente è

$$\left(\frac{9}{20}a^2b^4\right) : \left(-\frac{1}{8}a^5b^2\right) = \left(\frac{9}{20}\right) \cdot (-8)a^{2-5}b^{4-2} = -\frac{18}{5}a^{-3}b^2.$$

Osserviamo che il quoziente ottenuto non è un monomio perché l'esponente della variabile a è negativo. Il risultato è un'espressione frazionaria o fratta.

In conclusione, l'operazione di divisione tra due monomi ha come risultato un monomio se ogni variabile del dividendo ha esponente maggiore o uguale all'esponente con cui compare nel divisore.

✍ *Esercizi proposti:* 9.21, 9.22, 9.23

9.6 Addizione di due monomi

L'addizione di due monomi si indica con lo stesso simbolo dell'addizione tra numeri; i suoi termini si chiamano addendi e il risultato si chiama somma.

9.6.1 Addizione di due monomi simili

La somma di due monomi simili è un monomio simile agli addendi e avente come coefficiente la somma dei coefficienti.

Esempio 9.18. Calcoliamo $3x^3 + (-6x^3)$.

I due addendi sono monomi simili dunque la somma è ancora un monomio ed è simile ai singoli addendi. Precisamente $3x^3 + (-6x^3) = (3 + (-6))x^3 = -3x^3$.

Osserva che la somma di monomi simili si riduce alla somma algebrica di numeri.

✍ *Esercizio proposto:* 9.24

Proprietà della addizione

a) commutativa: $m_1 + m_2 = m_2 + m_1$;
b) associativa: $m_1 + m_2 + m_3 = (m_1 + m_2) + m_3 = m_1 + (m_2 + m_3)$;
c) 0 è l'elemento neutro: $0 + m = m + 0 = m$;
d) per ogni monomio m esiste il monomio opposto, cioè un monomio m^* tale che

$$m + m^* = m^* + m = 0.$$

L'ultima proprietà enunciata ci permette di definire nell'insieme dei monomi simili anche la sottrazione di monomi. Essa si indica con lo stesso segno della sottrazione tra numeri e il suo risultato si chiama differenza.

❑ **Osservazione** Per sottrarre due monomi simili si aggiunge al primo l'opposto del secondo.

Esempio 9.19. Assegnati $m_1 = \frac{1}{2}a^2b$, $m_2 = -5a^2b$ determina $m_1 - m_2$.

L'operazione richiesta $\frac{1}{2}a^2b - (-5a^2b)$ diventa $\frac{1}{2}a^2b + 5a^2b = \frac{11}{2}a^2b$.

Sulla base di quanto detto, possiamo unificare le due operazioni di addizione e sottrazione di monomi simili in un'unica operazione che chiamiamo *somma algebrica di monomi*.

❑ **Osservazione** La somma algebrica di due monomi simili è un monomio simile agli addendi avente per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.

Esempio 9.20. Determiniamo la somma $\frac{3}{5}x^4 - \frac{1}{3}x^4 + x^4 + \frac{4}{5}x^4 - 2x^4 - \frac{1}{2}x^4$.

Osserviamo che tutti gli addendi sono tra loro simili dunque:

$$\frac{3}{5}x^4 - \frac{1}{3}x^4 + x^4 + \frac{4}{5}x^4 - 2x^4 - \frac{1}{2}x^4 = \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{3} + 1 + \frac{4}{5} - 2 - \frac{1}{2}\right)x^4 = -\frac{13}{30}x^4.$$

9.6.2 Addizione di monomi non simili

Analizziamo il caso della seguente addizione: $7a^3b^2 - 5a^2b^3 + a^3b^2$. Si vuole determinare la somma. I monomi addendi non sono tutti tra loro simili; lo sono però il primo e il terzo.

Le proprietà associativa e commutativa ci consentono di riscrivere l'addizione precedente "avvicinando" i monomi simili e sostituendo ad essi la loro somma:

$$7a^3b^2 - 5a^2b^3 + a^3b^2 = (7a^3b^2 + a^3b^2) - 5a^2b^3 = 8a^3b^2 - 5a^2b^3.$$

L'espressione così ottenuta è la somma richiesta.

✍ *Esercizio proposto:* 9.25

Il procedimento che abbiamo seguito per determinare il risultato dell'addizione assegnata viene chiamato *riduzione dei termini simili*.

In conclusione, l'operazione di addizione tra monomi ha come risultato un monomio solo se gli addendi sono monomi simili; in caso contrario la somma viene effettuata riducendo i monomi simili e lasciando indicata l'addizione tra gli altri monomi.

Esempio 9.21. Calcola la seguente somma: $3a - 7a + 2a + a$.

Il risultato è un monomio poiché gli addendi sono monomi simili, precisamente $-a$.

Esempio 9.22. Calcola la seguente somma: $\frac{1}{2}a^3 + b - \frac{3}{4}a^3 - \frac{6}{5}b$.

Il risultato non è un monomio poiché gli addendi non sono monomi simili: $-\frac{1}{4}a^3 - \frac{1}{5}b$.

✍ *Esercizi proposti:* 9.26, 9.27, 9.28, 9.29, 9.30, 9.31, 9.32

9.7 Espressioni con i monomi

Consideriamo l'espressione letterale $E = (-\frac{1}{2}a^2b)^3 : (a^5b) + (-2ab) \cdot (\frac{1}{2}b + b) + 5ab^2$

Vediamo che è in due variabili, le variabili sono infatti a e b. Inoltre, i termini delle operazioni che vi compaiono sono monomi.

Se volessimo calcolare il valore di E per $a = 10$; $b = -2$ dovremmo sostituire nell'espressione tali valori e risolvere l'espressione numerica che ne risulta. Inoltre se dovessimo calcolare il valore di E per altre coppie dovremmo ogni volta applicare questo procedimento.

Dal momento che abbiamo studiato come eseguire le operazioni razionali con i monomi, prima di sostituire i numeri alle lettere, applichiamo le regole del calcolo letterale in modo da ridurre E, se possibile, in una espressione più semplice.

Prima di procedere, essendovi una divisione poniamo innanzi tutto la C. E. $a \neq 0$ e $b \neq 0$ ed eseguiamo rispettando la precedenza delle operazioni come facciamo nelle espressioni numeriche.

Esempio 9.23.

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^3:(a^5b)+(-2ab)\cdot\left(\frac{1}{2}b+b\right)+5ab^2 && \text{sviluppiamo per prima il cubo}\\
=&\left(-\frac{1}{8}a^6b^3:a^5b\right)+(-2ab)\cdot\frac{3}{2}b+5ab^2 && \text{eseguiamo divisione e moltiplicazione}\\
=&-\frac{1}{8}ab^2-3ab^2+5ab^2 && \text{sommiamo i monomi simili}\\
=&\frac{15}{8}ab^2.
\end{aligned}$$

Ora è più semplice calcolarne il valore: per $a = 10$ e $b = -2$ si ha $= \frac{15}{8}\cdot 10\cdot(-2)^2 = \frac{15}{8}\cdot 10\cdot 4 = 75$.

Esempio 9.24.

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{2}{3}ab^2c\right)^2:(-3ab^3)-\frac{2}{9}abc^2 && \text{Sviluppiamo le potenze}\\
=&\frac{4}{9}a^2b^4c^2:(-3ab^3)-\frac{2}{9}abc^2 && \text{eseguiamo la divisione e moltiplichiamo le frazioni}\\
=&-\frac{4}{27}abc^2-\frac{2}{9}abc^2 && \text{somiamo i monomi simili}\\
=&\frac{-4-6}{27}abc^2 && \text{il risultato è}\\
=&-\frac{10}{27}abc^2
\end{aligned}$$

Esempio 9.25. $\left[\left(-\frac{14}{16}x^2y^2\right):\left(-\frac{14}{4}xy\right)\right]^3+\frac{1}{2}xy\cdot\frac{1}{4}x^2y^2$. Eseguiamo per prima la divisione tra le parentesi quadre.

$$\begin{aligned}
=&\left[+\frac{14}{16}\cdot\frac{4}{14}xy\right]^3+\frac{1}{2}xy\cdot\frac{1}{4}x^2y^2 && \text{eseguiamo la moltiplicazione tra le frazioni}\\
=&\left[\frac{1}{4}xy\right]^3+\frac{1}{2}xy\cdot\frac{1}{4}x^2y^2 && \text{sviluppiamo il cubo}\\
=&\frac{1}{64}x^3y^3+\frac{1}{2}xy\cdot\frac{1}{4}x^2y^2 && \text{moltiplichiamo i due monomi}\\
=&\frac{1}{64}x^3y^3+\frac{1}{8}x^3y^3 && \text{sommiamo i monomi simili}\\
=&\frac{1+8}{64}x^3y^3 && \text{il risultato è}\\
=&\frac{9}{64}x^3y^3.
\end{aligned}$$

✍ *Esercizi proposti:* 9.33, 9.34, 9.35, 9.36, 9.37, 9.38, 9.39, 9.40, 9.41, 9.42

9.8 Massimo Comune Divisore e minimo comune multiplo tra monomi

9.8.1 Massimo Comune Divisore

Il calcolo del minimo comune multiplo e del massimo comune divisore, studiato per i numeri, si estende anche ai monomi. Premettiamo intanto le seguenti definizioni.

Definizione 9.11. Un monomio A si dice *multiplo* di un monomio B se esiste un monomio C per il quale $A = B \cdot C$; in questo caso diremo anche che B è *divisore* del monomio A.

Definizione 9.12. Il massimo comune divisore tra due o piùmonomi è il monomio che, tra tutti i divisori comuni dei monomi dati, ha grado massimo.

Il coefficiente numerico può essere un qualunque numero reale: se i coefficienti sono tutti interi è opportuno scegliere il loro MCD, se non sono interi è opportuno scegliere 1.

Esempio 9.26. Dati i monomi $12a^3b^2$ e $16a^2b$ sono divisori comuni:

$$1; 2; 4; a; a^2; b; ab; a^2b; 2a.$$

$$2a^2; 2b; 2ab; 2a^2b; 4a; 4a^2; 4b; 4ab; 4a^2b.$$

Il monomio di grado massimo è a^2b, il MCD tra i coefficienti è 4. Pertanto il MCD dei monomi è $4a^2b$.

Procedura 9.5 (Calcolare il MCD tra monomi)**.** *Il* MCD *di un gruppo di monomi è il monomio che ha:*

a) *per coefficiente numerico il* MCD *dei valori assoluti dei coefficienti dei monomi qualora questi siano numeri interi, se non sono interi si prende 1;*
b) *la parte letterale formata da tutte le lettere comuni ai monomi dati, ciascuna presa una sola volta e con l'esponente minore con cui compare.*

Esempio 9.27. Calcolare $\text{MCD}(14a^3b^4c^2; 4ab^2; 8a^2b^3c)$.

Per prima cosa calcoliamo il MCD tra i coefficienti numerici 14, 4 e 8 che è 2. Per ottenere la parte letterale si mettono insieme tutte le lettere comuni, ciascuna con l'esponente minore con cui compare: ab^2.

In definitiva, $\text{MCD}(14a^3b^4c^2; 4ab^2; 8a^2b^3c) = 2ab^2$.

Esempio 9.28. Calcolare il massimo comune divisore tra $5x^3y^2z^3; -\frac{1}{8}xy^2z^2; 7x^3yz^2$.

Si osservi che i coefficienti numerici dei monomi non sono numeri interi quindi si prende 1 come coefficiente del MCD. Le lettere in comune sono xyz, prese ciascuna con l'esponente minore con cui compaiono si ha xyz^2.

Quindi, $\text{MCD}(5x^3y^2z^3; -\frac{1}{8}xy^2z^2; 7x^3yz^2) = xyz^2$.

❑ **Osservazione** La scelta di porre uguale a 1 il coefficiente numerico del MCD, nel caso in cui i monomi abbiano coefficienti razionali, è dovuta al fatto che una qualsiasi frazione divide tutte le altre e quindi una qualsiasi frazione potrebbe essere il coefficiente del MCD Ad essere più precisi, occorrerebbe, quando si parla di monomi e polinomi, chiarire a quale degli insiemi numerici $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ appartengono i loro coefficienti. Qui stiamo considerando coefficienti numerici in $\mathbb{R}$.

Definizione 9.13. Due monomi si dicono *monomi primi tra loro* se il loro MCD è 1.

9.8.2 Minimo comune multiplo

Estendiamo ora ai monomi la nozione di minimo comune multiplo.

Definizione 9.14. Il *minimo comune multiplo di due o più monomi* è il monomio che, tra tutti i monomi multipli comuni dei monomi dati, ha il grado minore.

Il coefficiente numerico può essere un qualunque numero reale: se i coefficienti sono tutti interi è opportuno scegliere il loro mcm, se non lo sono è opportuno scegliere 1.

Esempio 9.29. Per calcolare il minimo comune multiplo tra $5a^3b$ e $10a^2b^2$ dovremmo costruire i loro multipli finché non incontriamo quello comune che ha coefficiente numerico positivo più piccolo e grado minore:

$$5a^3b \text{ alcuni multipli: } 10a^3b, 10a^3b^2, 10a^4b, 15a^3b \dots$$

$$10a^2b^2 \text{ alcuni multipli: } 10a^2b^3, 10a^3b^2, 10a^4b^2, 20a^2b^2 \dots$$

Il minimo comune multiplo è $10a^3b^2$.

In realtà applicando la definizione è poco pratico calcolare il mcm, è utile invece la seguente procedura.

Procedura 9.6 (Calcolo del mcm tra due o più monomi)**.** *Il* mcm *di un gruppo di monomi è il monomio che ha:*

a) *per coefficiente numerico il* mcm *dei valori assoluti dei coefficienti dei monomi qualora questi siano numeri interi, se non sono interi si prende 1;*
b) *la parte letterale formata da tutte le lettere comuni e non comuni ai monomi dati, ciascuna presa una sola volta e con l'esponente maggiore con cui compare.*

Esempio 9.30. Calcola il minimo comune multiplo tra $5a^3bc$, $12ab^2c$ e $10a^3bc^2$.

Il mcm tra i coefficienti 5, 12, 10 è 60. Per ottenere la parte letterale osservo il grado maggiore delle lettere componenti i monomi, riporto tutte le lettere, comuni e non comuni, una sola volta con il grado maggiore con cui ciascuna compare: $a^3b^2c^2$.

In definitiva, $\text{mcm}(5a^3bc; 12ab^2c; 10a^3bc^2) = 60a^3b^2c^2$.

Esempio 9.31. Calcola il minimo comune multiplo tra $6x^2y; -\frac{1}{2}xy^2z; \frac{2}{3}x^3yz$.

I coefficienti numerici dei monomi non sono interi quindi il mcm avrà come coefficiente 1.

La parte letterale si costruisce mettendo insieme tutte le lettere che compaiono, prese una sola volta, x, y, z ciascuna presa con l'esponente massimo, quindi x^3y^2z.

In definitiva $\text{mcm}(6x^2y; -\frac{1}{2}xy^2z; \frac{2}{3}x^3yz) = x^3y^2z$.

Assegnati due monomi, per esempio x^2y e xy^2z, calcoliamo MCD e mcm.

$\text{MCD}(x^2y; xy^2z) = xy$ e $\text{mcm}(x^2y; xy^2z) = x^2y^2z$.

Moltiplichiamo ora MCD e mcm, abbiamo: $xy \cdot x^2y^2z = x^3y^3z$.

Moltiplichiamo ora i monomi assegnati, abbiamo: $(x^2y) \cdot (xy^2z) = x^3y^3z$.

Il prodotto dei due monomi è uguale al prodotto tra il MCD e il mcm. Si può dimostrare che questa proprietà vale in generale.

Proprietà 9.7. *Dati due monomi, il prodotto tra il loro massimo comun divisore e il loro minimo comune multiplo è uguale al prodotto tra i monomi stessi.*

✍ *Esercizi proposti:* 9.41, 9.42, 9.43, 9.44, 9.45, 9.46, 9.47

9.9 Esercizi

9.9.1 Esercizi dei singoli paragrafi

9.1 - L'insieme dei monomi

9.1. Individua tra le espressioni letterali di seguito elencate, quelle che sono monomi.

$$E_1 = 35x^2 + y^2; E_2 = -4^{-1}ab^4c^6; E_3 = \frac{4}{x}y^2; E_4 = -\frac{87}{2}x^2z.$$

Per rispondere in modo corretto devo individuare quelle espressioni in cui compare solamente la ....; pertanto sono monomi ....

9.2. Scrivi in forma normale i seguenti monomi:

$\frac{4}{9}ab18c^3 2^{-2}a^3b = \frac{\dots}{\dots}a^{\dots}b^{\dots}c^{\dots};$

$-x^5\frac{1}{9}y^4\left(-1+5\right)^2y^7 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

9.3. Nell'insieme $M = \left\{-\frac{34}{5}a^3b, 3^2a^2b^4, \frac{1}{3}ab^3, a^3b, -a, 7a^2b^4, -\frac{1}{3}ab^3, -89a^3b\right\}$, determina i sottoinsiemi dei monomi simili; rappresenta con un diagramma di Venn.

9.2 - Valore di un monomio

9.4. Calcola l'area di un triangolo che ha altezza $h = 2,5$ e base $b = \frac{3}{4}$.

9.5. Calcola il valore dei seguenti monomi in corrispondenza dei valori indicati per ciascuna lettera.

a) $-\frac{2}{9}xz$ per $x = \frac{1}{2}, z = -1$;
b) $-\frac{8}{5}x^2y$ per $x = -1, y = +10$;
c) $-\frac{1}{2}a^2bc^3$ per $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}, c = -1$;
d) $\frac{7}{2}a^3x^4y^2$ per $a = \frac{1}{2}, x = 2, y = -\frac{1}{2}$;
e) $\frac{8}{3}abc^2$ per $a = -3, b = -\frac{1}{3}, c = \frac{1}{2}$.

9.6. Il grado complessivo di un monomio è:

a) l'esponente della prima variabile che compare nel monomio;
b) la somma di tutti gli esponenti che compaiono sia ai fattori numerici sia a quelli letterali;
c) il prodotto degli esponenti delle variabili che compaiono nel monomio;
d) la somma degli esponenti di tutte le variabili che vi compaiono.

9.7. Due monomi sono simili se:

a) hanno lo stesso grado;
b) hanno le stesse variabili;
c) hanno lo stesso coefficiente;
d) hanno le stesse variabili con rispettivamente gli stessi esponenti.

9.8. Individua e sottolinea i monomi tra le seguenti espressioni letterali:

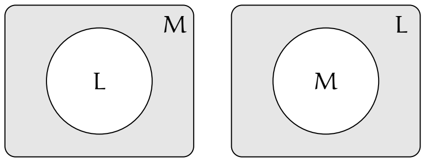
$$3+ab; -2a; -\frac{7}{3}ab^2; -(\frac{4}{3})^3; a^2bc\cdot\frac{-2}{a^3}; 4a^{-3}b^2c^5; -x; 8x^4-4x^2; -y\cdot(2x^4+6z); \frac{abc^9}{3+7^{-2}}$$

9.9. Nel monomio $m = -\frac{5}{2}a^3x^2y^4z^8$ distinguiamo: coefficiente $= \ldots$, parte letterale $= \ldots$, grado complessivo $= \ldots$, il grado della lettera $x = \ldots$

9.10. Motiva brevemente la verità o falsità delle seguenti proposizioni:

a) "Se due monomi hanno ugual grado allora sono simili"
V F perché ....
b) "Se due monomi sono simili allora hanno lo stesso grado"
V F perché ....

9.11. Quale diagramma di Venn rappresenta in modo corretto la seguente proposizione: «alcune espressioni letterali non sono monomi». L: insieme delle espressioni letterali, M: insieme dei monomi.



A B

9.12. Attribuisci il valore di verità alle seguenti proposizioni:

a) Il valore del monomio $-a$ è negativo per qualunque a diverso da zero. V F
b) Il valore del monomio $-a^2$ è negativo per qualunque a diverso da zero. V F
c) Il monomio b^6 è il cubo di b^2. V F
d) L'espressione ab^{-1} è un monomio. V F
e) Il valore del monomio ab è nullo per $a = 1$e$b = -1$. V F

9.3 - Moltiplicazione di due monomi

9.13. Determina il prodotto dei seguenti monomi.

a) $(-x^2y^4) \cdot \left(-\frac{8}{5}x^2y\right)$;
b) $\left(-\frac{15}{28}xy^3\right) \cdot \left(-\frac{7}{200}x^2y^2\right)$;
c) $(a^5b^5y^2) \cdot \left(-\frac{8}{5}a^2y^2b^3\right)$;
d) $2{,}5ab^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}a^2b\right) \cdot 1{,}5a$;
e) $\left(-\frac{2}{9}xz\right)\left(-\frac{1}{4}z^3\right)(27x)$;
f) $-8\left(\frac{1}{4}x\right)\left(\frac{4}{5}x^3a^4\right)$;
g) $5x^3y^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}x^3y^2\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$;
h) $6ab \cdot \left(-\frac{1}{3}a^2\right) \cdot \frac{1}{2}ab \cdot 4a^2$;
i) $\left(\frac{7}{2}a^3x^4y^2\right) \cdot \left(-\frac{8}{21}ax^2y\right)$.

9.14. Determina il prodotto dei seguenti monomi.

a) $(-2xy)\cdot(+3ax)$;
b) $6a(-2ab)\left(-3a^2b^2\right)$;
c) $(-1)(-ab)$;
d) $1{,}5a^2b\cdot\left(-\frac{2}{3}a^2b\right)$;
e) $-\frac{7}{5}xy^3\left(-\frac{10}{3}xy^2z\right)$;
f) $-x\left(14x^2\right)$.

9.15. Determina il prodotto delle seguenti coppie di monomi.

a) $1{,}\overline{6}xa\left(1{,}2xy^2\right)$;
b) $\left(\frac{12}{7}m^2n^3\right)\left(-\frac{7}{4}mn\right)$;
c) $\left(-\frac{5}{4}ax^2\right)\left(\frac{3}{10}x^3y\right)$;
d) $12ab\left(-\frac{1}{2}a^3b^3\right)$;
e) $\left(-\frac{15}{8}at^2\right)\left(\frac{6}{5}t^3x\right)$;
f) $\left(\frac{12}{4}a^2n^2\right)\left(-\frac{7}{4}ax\right)$.

9.16. Sulla base degli esercizi precedenti puoi concludere che il grado del monomio prodotto è:

a) il prodotto dei gradi dei suoi fattori;
b) la somma dei gradi dei suoi fattori;
c) minore del grado di ciascuno dei suoi fattori;
d) uguale al grado dei suoi fattori.

9.4 - Potenza di un monomio

9.17. Esegui le potenze indicate.

a) $\left(-\frac{3}{5}abx^3y^5\right)^3 = \frac{\dots}{\dots}a^3b^3x^{\cdots}y^{\cdots}$;
b) $\left(-a^4b^2\right)^7 = \dots$;
c) $\left(-3x^3y^4z\right)^2 = 9x^6y^{\cdots}z^{\cdots}$;
d) $\left(\frac{1}{2}a^2bc^5\right)^4 = \frac{1}{\dots}a^{\cdots}b^{\cdots}c^{\cdots}$;
e) $\left(a^3b^2\right)^8 = \dots$;
f) $\left(-5ab^2c\right)^3 = \dots$

9.18. Esegui le potenze indicate.

a) $\left(+2ax^3y^2\right)^2$;
b) $\left(-\frac{1}{2}axy^2\right)^3$;
c) $\left(\frac{3}{4}x^4y\right)^3$;
d) $\left(\frac{2}{3}xy^2\right)^3$;
e) $\left(-\frac{1}{2}ab\right)^4$;
f) $\left(-\frac{3}{2}a^5\right)^2$.

9.19. Esegui le operazioni indicate.

a) $\left[\left(-rs^2t\right)^2\right]^3$;
b) $\left[\left(-\frac{1}{2}x^2y^3\right)^2\right]^3$;
c) $\left[\left(-\frac{3}{2}a^2b^3\right)^2\right]^2$;
d) $\left(-xy\right)^2\left(-\frac{1}{2}xy^2\right)^3$;
e) $-\left(\frac{3}{2}xy^2\right)^0\cdot\left(-\frac{1}{6}xy\right)^2$;
f) $-\left(-\frac{1}{3}x^3y^2\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$.

9.20. Esegui le operazioni indicate.

a) $\left(\frac{2}{3}ab^2c\right)^2 \cdot (-3ab^3)^2$;

b) $\left[\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^2 \cdot \frac{2}{3}a^2b\right]^2$;

c) $\left(\frac{2}{3}x \cdot \frac{1}{6}x \cdot \frac{1}{2}x\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{6}ab^2\right)^2$.

9.5 - Divisione di due monomi

9.21. Esegui le divisioni indicate e poni le C. E.:

a) $15b^8 : \left(-\frac{40}{3}b^3\right)$;

b) $\left(-\frac{13}{72}x^2y^5z^3\right) : \left(-\frac{26}{27}xyz\right)$;

c) $(-a^7) : (8a^7)$;

d) $\left(\frac{1}{2}a^3\right) : (-4a^5)$;

e) $\left(-\frac{12}{2}a^7b^5c^2\right) : (-18ab^4c)$;

f) $(-34x^5y^2) : (-2yz^3)$.

9.22. Esegui le divisioni indicate e poni le C. E.:

a) $21a^3x^4b^2 : 7ax^2b$;

b) $a^6 : 20a^2$;

c) $20ax^4y : 2xy$;

d) $-72a^4b^2y^2 : (-3ab^2)$.

9.23. Esegui le operazioni indicate e poni le C. E.:

a) $48a^5bx : a^2b$;

b) $\left[-\left(-\frac{1}{3}x^3y^2\right)^2 : \left(-\frac{1}{3}\right)\right]^2 : (x^3y^2)^2$;

c) $\left[\frac{3}{5}x^4 : \left(\frac{1}{3}x^4\right)\right] \cdot \left[x^4 : \left(\frac{4}{5}x^4\right)\right]$;

d) $\left(\frac{2}{3}ab^2c\right)^2 : (-3ab^3)$.

9.6 - Addizione di due monomi simili

9.24. Determina la somma dei monomi simili $8a^2b + (-\frac{2}{3})a^2b + \frac{1}{6}a^2b$.

La somma è un monomio .... agli addendi; il suo coefficiente è dato da $8 - \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \ldots$, la parte letterale è .... Quindi la somma è ....

9.25. Determina la somma $S = 2a - 3ab - a + 17ab + 41a$.

I monomi addendi non sono tra loro simili, modifico la scrittura dell'operazione applicando le proprietà associativa e commutativa in modo da affiancare i monomi simili:

$$S = 2a - 3ab - a + 17ab + 41a = (\ldots\ldots\ldots) + (\ldots\ldots\ldots) = \ldots\ldots\ldots$$

La somma ottenuta non è un ....

9.26. Esegui la somma algebrica dei seguenti monomi.

a) $6x + 2x - 3x$;
b) $-3a + 2a - 5a$;
c) $5a^2b - 3a^2b$;
d) $a^2b^2 - 3a^2b^2$;
e) $2xy - 3xy + xy$;
f) $2y^2 - 3y^2 + 7y^2 - 4y^2$.

9.27. Esegui la somma algebrica dei seguenti monomi.

a) $-2xy^2 + xy^2$;
b) $-3ax - 5ax$;
c) $5ab - 2ab$;
d) $-3xy^2 + 3xy^2$;
e) $7xy^3 - 2xy^3$;
f) $+2xy^2 - 4xy^2$.

9.28. Esegui la somma algebrica dei seguenti monomi.

a) $\frac{1}{2}a^2 - a^2$;
b) $+2xy^2 - 4xy^2 + xy^2$;
c) $-5x^2 + 3x^2$;
d) $\frac{1}{2}a + 2a$;
e) $5a^2b + 2a^2b + a^2b - 3a^2b - a^2b$;
f) $0,1x - 5x - 1,2x + 3x$.

9.29. Esegui la somma algebrica dei seguenti monomi.

a) $\frac{1}{4}a^3b^2 - \frac{1}{2}a^3b^2$;
b) $\frac{2}{3}x - \frac{2}{5}x - 2x + \frac{3}{10}x$;
c) $\frac{2}{5}ab - \frac{1}{2}ab + \frac{27}{2}ab - \frac{1}{10}ab - \frac{5}{2}ab$;
d) $-\left(-\frac{1}{2}ax^2\right) - 3ax^2$;
e) $-\frac{9}{2}xy - (-xy)$;
f) $2xy^2 - \frac{3}{2}xy^2 - xy^2$.

9.30. Esegui la somma algebrica dei seguenti monomi.

a) $\frac{1}{2}a + 2a + (2a - a) - \left(3a - \frac{1}{2}a\right)$;
b) $6xy^2 + \frac{1}{3}xy^2 - \frac{1}{4}xy^2 - 6xy^2$;
c) $\frac{1}{2}xy^2 + \frac{3}{2}xy^2$;
d) $\left(\frac{2}{3}a + a\right) - \left(\frac{2}{3}a - a\right)$;
e) $5ab - 2ab + (-ab) - (+2ab) + ab$;
f) $-1,2x^2 + 0,1x^2 + (-5x)^2 - (-25x)^2$.

9.31. Esegui le operazioni indicate.

a) $6ab - \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{2}ab + 4a^2$;
b) $\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x^2 + x^2\right) - \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x^2\right)$;
c) $-\frac{4}{3}a^2b^3 - 2a^2b^3 + \frac{1}{3}a^2b^3 - a^2b^3$;
d) $(-xy)^2\left(-\frac{1}{2}xy^2\right) + \frac{3}{2}xy^2\left(-\frac{1}{6}xy\right)^2$.

9.32. Esegui la somma algebrica dei seguenti monomi.

a) $\frac{1}{2}x^2 - 2x^2 - \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x^2 - 2x^2 - \frac{3}{5}x^2\right)$;
b) $5x^3y^2 + \left(-\frac{1}{3}x^3y^2\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) - (x^3y^2) + \left(-\frac{1}{4}x^3y^2\right) - \left(-\frac{1}{3}\right)$;
c) $\left(2xy^2 - \frac{3}{2}xy^2\right) - (xy^2 + 2xy^2 - 4xy^2) + \left(xy^2 + \frac{1}{2}xy^2\right)$.

9.7 - Espressioni con i monomi

9.33 (*). Esegui le operazioni tra monomi.

a) $\left(\frac{1}{2}a^2-a^2\right)\left(\frac{1}{2}a+2a\right)+(2a-a)\left(3a-\frac{1}{2}a\right)a;$

b) $\left(\frac{2}{3}a-\frac{5}{2}a\right)a+\left(7a-\frac{1}{3}a\right)^2:2;$

c) $\frac{1}{2}x^2\left(x^2+\frac{1}{2}x^2\right)-\frac{1}{6}x^3\left(12x-\frac{18}{5}x\right);$

d) $\left(-\frac{3}{4}x^4a^2b\right):\left(\frac{1}{2}x^2ab\right)+\frac{2}{3}x^2a;$

e) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}a\right)^2:\left(\frac{3}{2}a-2a\right);$

f) $(3a-2a)(2x+2x):2a.$

9.34 (*). Esegui le operazioni tra monomi.

a) $\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{2}{3}x^2+x^2\right)\left(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}x\right);$

b) $\left(\frac{1}{5}x-\frac{5}{2}x+x\right)-\left(2x-\frac{8}{3}x+\frac{1}{4}x+x\right)-\frac{7}{60}x;$

c) $5a+\left\{-\frac{3}{4}a-\left[2a-\frac{1}{2}a+(3a-a)+0,5a\right]-a\right\};$

d) $-12x^2\left(\frac{1}{3}x\right)^2+\left[0,1x^2(-5x)^2-(-x^2)^2\right];$

e) $-\frac{3}{5}x^2y^2\left(-\frac{10}{9}xz^2\right)(-15xy)-0,\overline{6}x^4yz(-0,\overline{7}xy^2z);$

f) $\frac{1}{2}ab^2c+\left[\frac{3}{4}a^3b^6c^3-\left(-\frac{1}{4}ab^2c\right)^3-\left(-\frac{1}{2}ab^2\right)^2\left(-\frac{1}{16}ab^2c^3\right)\right]:\left(-\frac{5}{4}a^2b^4c^2\right).$

9.35 (*). Esegui le operazioni tra monomi.

a) $\left(2xy^2-\frac{3}{2}xy^2\right)-(xy^2+2xy^2-4xy^2)+\left(xy^2+\frac{1}{2}xy^2\right);$

b) $\frac{1}{4}x^4y^2-\left[\frac{3}{2}x^5y^4:\left(\frac{1}{2}xy\right)^2-3x^3y^2\right]\left(-\frac{1}{3}x\right)+\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)^2;$

c) $a^2-\left\{a-\left[2\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{3}\right)\right]\right\}^2+\left(\frac{2}{3}a+a\right)\left(\frac{2}{3}a-a\right);$

d) $\left[\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)^2\cdot\left(-\frac{2}{3}b^2\right)^2-\left(+\frac{1}{3}b^3a^2\right)^2\right]:\left(\frac{2}{3}a-\frac{1}{6}a+\frac{1}{2}a\right)+\left(-\frac{1}{6}ab^2\right)^2\left(-\frac{2}{5}ab^2\right);$

e)

$$\left[\left(2x+\frac{7}{4}x\right)^2:\left(\frac{1}{3}x+x+\frac{3}{4}x\right)\right]^2:\left(18x-\frac{9}{2}x+\frac{27}{2}x\right)$$
$$+\left[\left(-\frac{2}{3}abx\right)^2-\left(\frac{1}{3}abx\right)^2\right]:(a^2b^2x)-x;$$

f)

$$\left(\frac{1}{4}xy^2\right)\left(-\frac{16}{5}x^2y\right)-8x^2y^2\left(-2xy\right)-\frac{2}{5}x\left(-\frac{5}{3}x^2\right)\left(+3y^3\right)$$
$$+\left(\frac{12}{7}xy^2\right)\left(-\frac{7}{4}x^2y\right)+\frac{9}{5}x^3y^3.$$

9.36 (*). Esegui le operazioni tra monomi.

a) $\frac{2}{3}a^2b-\left[3a-\frac{1}{3}a^2b-\left(\frac{2}{5}a+\frac{1}{2}a-3a\right)+\left(\frac{2}{5}a^2b+\frac{1}{2}a^2b-2a^2b\right)\right]-\frac{1}{10}a^2b+\frac{51}{10}a;$

b) $\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}x-2x\right)\left(-\frac{1}{2}x^2\right)+\left(\frac{3}{4}x^2-2x^2\right)\left(-\frac{3}{5}x\right)-\frac{4}{3}\left(x^3+\frac{1}{2}x^3\right);$

c)

$$\left[\frac{3}{5}ab^2+\frac{1}{2}b-ab^2\cdot\left(-\frac{3}{10}+\frac{4}{5}-\frac{1}{2}\right)-2b+\frac{3}{2}b+\frac{1}{15}ab^2\right]^2$$
$$:\left[\left(b+\frac{3}{2}b\right)^2-\frac{5}{10}b^2+\frac{1}{2}b^2\right]\cdot\left(-\frac{5}{2}ab\right)^2;$$

d) $\left[\left(\frac{3}{2}xy\right)^2\cdot\left(\frac{4}{15}y\right)^2-\left(\frac{3}{2}xy^2\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3+\frac{8}{75}x^2y^4\right]:\left(\frac{10}{3}x^2y\right);$

e) $\left(\frac{1}{2}x+2x\right)\left(\frac{1}{2}x-2x\right)\left(\frac{1}{4}x^2-4x^2\right)-\frac{1}{4}x\left(\frac{27}{4}x^3-\frac{61}{3}x^3\right)-16(x^4+x^4)-\frac{1}{12}x^2\cdot x^2+\frac{1}{8}x^4.$

9.37. Assegnati i monomi: $m_1=\frac{3}{8}a^2b^2$, $m_2=-\frac{8}{3}ab^3$, $m_3=-3a$, $m_4=-\frac{1}{2}b$ e $m_5=2b^3$. Calcola il risultato delle seguenti operazioni, ponendo le opportune C. E.:

a) $m_1\cdot m_2\cdot(m_4)^2;$
b) $-m_2\cdot m_1\cdot(m_3)^2\cdot m_5;$
c) $(m_3\cdot m_4)^2-m_1;$
d) $m3\cdot m_5-m_2;$
e) $m_2:m_3+m_5;$
f) $m_1:m_2.$

9.38. Quando sottraiamo due monomi opposti otteniamo:

a) il doppio del primo termine;
b) il doppio del secondo termine;
c) il monomio nullo;
d) 0.

9.39. Quando dividiamo due monomi opposti otteniamo:

$\boxed{\text{A}}$ −1 $\boxed{\text{B}}$ 0 $\boxed{\text{C}}$ 1 $\boxed{\text{D}}$ il quadrato del primo monomio

9.40. Attribuisci il valore di verità alle seguenti proposizioni:

a) la somma di due monomi opposti è il monomio nullo $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
b) il quoziente di due monomi simili è il quoziente dei loro coefficienti $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
c) la somma di due monomi è un monomio $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
d) il prodotto di due monomi è un monomio $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

e) l'opposto di un monomio ha sempre il coefficiente negativo V F

9.41 (*). Un quadrato è formato da 9 quadrati più piccoli, tutti di lato $2x$. Determina perimetro e area del quadrato.

9.42 (*). Di un triangolo equilatero di lato a si raddoppiano due lati e si dimezza il terzo lato, si ottiene un triangolo . . . . Qual'è la differenza tra i perimetri dei due triangoli?

9.8 - Massimo Comune Divisore e minimo comune multiplo tra monomi

9.43. Vero o falso?

a) $12a^3b^2c$ è un multiplo di abc V F
b) $2xy$ è un divisore di x^2 V F
c) $2a$ è divisore di $4ab$ V F
d) $-5b^2$ è divisore di $15ab$ V F
e) $8ab$ è multiplo di a^2b^2 V F
f) $12a^5b^4$ è multiplo di $60a^5b^7$ V F
g) 5 è divisore di $15a$ V F

9.44. Vero o falso?

a) il mcm fra monomi è divisibile per tutti i monomi dati V F
b) il MCD fra monomi è multiplo di almeno un monomio dato V F
c) il mcm è il prodotto dei monomi tra di loro V F

9.45 (*). Calcola il mcm e il MCD dei seguenti gruppi di monomi.

a) $14x^3y^2$, xy e $4x^3y^4$;
b) xyz^5e $x^3y^2z^2$;
c) $4ab^2$, a^3b^2 e $5ab^5$.

9.46. Calcola il mcm e il MCD dei seguenti gruppi di monomi.

a) $2a^2bc^3$, ab^4c^2 e $24a^3bc$;
b) $6a^2x$, $2ax^3$ e $4x^2c^3$;
c) $30ab^2c^4$, $5a^2c^3$ e $12abc$.

9.47. Calcola il mcm e il MCD dei seguenti gruppi di monomi.

a) $x^2y^4z^2$, xz^3 e $24y^2z$;
b) $4a^2y$, y^3c e $15ac^5$;
c) $13xyc^2$, $x^2y^3c^2$ e $6c^4$.

9.48 (*). Calcola il mcm e il MCD dei seguenti gruppi di monomi.

a) $a^nb^mz^{2m+1}$, $a^{3n}b^{m+3}$ e $a^{4n}b^{m+4}$;
b) $-2xy^3z$, $-6x^3yz$ e $8x^3z$;
c) $\frac{1}{4}ab^2c$, $-3a^2b^2c$ e $-\frac{1}{2}ab^2c^2$;
d) $\frac{2}{3}x^2y^2$, $\frac{1}{6}xy^2$ e $\frac{2}{5}xyz^2$.

9.49. Dati i monomi $3xy^2$ e xz^3

a) calcola il loro MCD;
b) calcola il loro mcm;
c) verifica che il loro prodotto è uguale al prodotto tra il loro mcm e il loro MCD;
d) verifica che il loro MCD è uguale al quoziente tra il loro prodotto e il loro mcm.

9.9.2 Risposte

9.33. d) $-\frac{5}{6}ax^2$.

9.34. a) $\frac{7}{72}x^3$, b) $-2x$, c) $-\frac{3}{4}a$, d) $\frac{1}{6}x^4$, f) $-\frac{1}{8}ab^2c$.

9.35. a) $3xy^2$, b) $\frac{3}{2}x^4y^2$, c) 0, d) $-\frac{1}{90}a^3b^6$, e) $\frac{49}{48}x$, f) $16x^3y^3$.

9.36. a) $2a^2b$, b) $-\frac{2}{3}x^3$, c) $\frac{4}{9}a^4b^4$, d) $-\frac{3}{25}y^3$.

9.41. $24x$; $36x^2$.

9.42. $\frac{3}{2}a$.

9.45. a) $28x^3y^4; xy$, b) $x^3y^2z^5; xyz^2$, c) $20a^3b^5; ab^2$.

9.48. a) $a^{4n}b^{m+4}z^{2m+1}; a^nb^m$, b) $24x^3y^3z; 2xz$, c) $a^2b^2c^2; ab^2c$, d) $x^2y^2z^2; xy$.