

### 18.1 Divisore comune e multiplo comune

Il calcolo del *minimo comune multiplo* (mcm) e del *massimo comune divisore* (MCD) si estende anche ai polinomi. Per determinare MCD e mcm di due o più polinomi occorre prima di tutto scomporli in fattori irriducibili. La cosa non è semplice poiché non si può essere sicuri di aver trovato il massimo comune divisore o il minimo comune multiplo per la difficoltà di decidere se un polinomio è irriducibile: prudentemente si dovrebbe parlare di divisore comune e di multiplo comune.

Un polinomio  $A$  si dice multiplo di un polinomio  $B$  se esiste un polinomio  $C$  per il quale  $A = B \cdot C$ ; in questo caso diremo anche che  $B$  è divisore del polinomio  $A$ .

### 18.2 Massimo Comun Divisore

Dopo aver scomposto ciascun polinomio in fattori, il massimo comune divisore tra due o più polinomi è il prodotto di tutti i fattori comuni ai polinomi, presi ciascuno una sola volta, con il minimo esponente. Sia i coefficienti numerici, sia i monomi possono essere considerati polinomi.

**Procedura 18.1.** Calcolare il MCD tra polinomi:

- a) scomponiamo in fattori ogni polinomio;
- b) prendiamo i fattori comuni a tutti i polinomi una sola volta con l'esponente più piccolo;
- c) se non ci sono fattori comuni a tutti i polinomi il MCD è 1.

**Esempio 18.1.** Determinare il MCD ( $3a^2b^3 - 3b^3$ ;  $6a^3b^2 - 6b^2$ ;  $2a^2b^2 - 24ab^2 + 12b^2$ ).

- ➡ Scomponiamo in fattori i singoli polinomi;
  - ➡  $3a^2b^3 - 3b^3 = 3b^3(a^2 - 1) = 3b^3(a - 1)(a + 1)$ ;
  - ➡  $6a^3b^2 - 6b^2 = 6b^2(a^3 - 1) = 6b^2(a - 1)(a^2 + a + 1)$ ;
  - ➡  $12a^2b^2 - 24ab^2 + 12b^2 = 12b^2(a^2 - 2a + 1) = 12b^2(a - 1)^2$ .
- ➡ i fattori comuni a tutti i polinomi presi con l'esponente più piccolo sono:
  - ➡ tra i numeri il 3;
  - ➡ tra i monomi  $b^2$ ;
  - ➡ tra i polinomi  $a - 1$ .
- ➡ quindi il MCD  $= 3b^2(a - 1)$ .

### 18.3 Minimo comune multiplo


Dopo aver scomposto ciascun polinomio in fattori, il minimo comune multiplo tra due o più polinomi è il prodotto dei fattori comuni e non comuni di tutti i polinomi, quelli comuni presi una sola volta, con il massimo esponente.

**Procedura 18.2.** Calcolare il mcm tra polinomi:

- a) scomponiamo in fattori ogni polinomio;
- b) prendiamo tutti i fattori comuni e non comuni dei polinomi, i fattori comuni presi una sola volta con il massimo esponente.

**Esempio 18.2.** Determinare il mcm  $(3a^2b^3 - 3b^3; 6a^3b^2 - 6b^2; 2a^2b^2 - 24ab^2 + 12b^2)$ .

- ⇒ Scomponiamo in fattori i singoli polinomi;
  - ⇒  $3a^2b^3 - 3b^3 = 3b^3(a^2 - 1) = 3b^3(a - 1)(a + 1)$ ;
  - ⇒  $6a^3b^2 - 6b^2 = 6b^2(a^3 - 1) = 6b^2(a - 1)(a^2 + a + 1)$ ;
  - ⇒  $12a^2b^2 - 24ab^2 + 12b^2 = 12b^2(a^2 - 2a + 1) = 12b^2(a - 1)^2$ .
- ⇒ i fattori comuni presi con il massimo esponente e quelli non comuni sono:
  - ⇒ tra i coefficienti numerici il 12;
  - ⇒ tra i monomi  $b^3$ ;
  - ⇒ tra i polinomi  $(a - 1)^2 \cdot (a + 1) \cdot (a^2 + a + 1)$ .
- ⇒ quindi il mcm  $= 12b^3(a - 1)^2(a + 1)(a^2 + a + 1)$ .

 Esercizi proposti: [18.1](#), [18.2](#), [18.3](#), [18.4](#), [18.5](#), [18.6](#), [18.7](#), [18.8](#), [18.9](#), [18.10](#), [18.11](#)

**18.4 Esercizi****18.4.1 Esercizi dei singoli paragrafi****18.1 - MCD e mcm tra polinomi**

**18.1 (\*)**. Calcola il MCD e il mcm dei seguenti gruppi di polinomi.

a)  $a + 3, 5a + 15, a^2 + 6a + 9$ ;                      b)  $a^2 - b^2, ab - b^2, a^2b - 2ab^2 + b^3$ .

**18.2 (\*)**. Calcola il MCD e il mcm dei seguenti gruppi di polinomi.

a)  $x^2 - 5x + 4, x^2 - 3x + 2, x^2 - 4x + 3$ ;                      b)  $x^2 + 2x - 2, x^2 - 4x + 4, x^2 - 4$ .

**18.3 (\*)**. Calcola il MCD e il mcm dei seguenti gruppi di polinomi.

a)  $a^3b^2 - 2a^2b^3, a^3b - 4a^2b^2 + 4ab^3, a^3b^2 - 4ab^4$ ;  
b)  $x^3 + 2x^2 - 3x, x^3 - x, x^2 - 2x + 1$ .

**18.4 (\*)**. Calcola il MCD e il mcm dei seguenti gruppi di polinomi.

a)  $a - b, ab - a^2, a^2 - b^2$ ;                      b)  $b + 2a, b - 2a, b^2 - 4a^2, b^2 - 4a + 4a^2$ .

**18.5 (\*)**. Calcola il MCD e il mcm dei seguenti gruppi di polinomi.

a)  $a^2 - 9, 3a - a^2, 3a + a^2$ ;                      b)  $a + 1, a^2 - 1, a^3 + 1$ .

**18.6 (\*)**. Calcola il MCD e il mcm dei seguenti gruppi di polinomi.

a)  $x^2 + 2xy + y^2, x^2 - y^2, (x + y)^2(x - y)$ ;                      b)  $b^3 + b^2 - 4b - 4, b^2 - a, b^2 - 1$ .

**18.7 (\*)**. Calcola il MCD e il mcm dei seguenti gruppi di polinomi.

a)  $a - 2, a^2 - 9, a^2 + a - 6$ ;  
b)  $3x + y + 3x^2 + xy, 9x^2 - 1, 9x^2 + 6xy + y^2$ .

**18.8 (\*)**. Calcola il MCD e il mcm dei seguenti gruppi di polinomi.

a)  $2x^3 - 12x^2y + 24xy^2 - 16y^3, 6x^2 - 12xy, 4x^3 - 16x^2y + 16xy^2$ ;  
b)  $x - 1, x^2 - 2x + 1, x^2 - 1$ .

**18.9**. Calcola il MCD e il mcm dei seguenti gruppi di polinomi.

a)  $x^3 - 9x + x^2, 4 - (x - 1)^2, x^2 + 4x + 3$ ;                      c)  $a^2 - 1, b + 1, a + ab - b - 1$ ;  
b)  $x - 2, x - 1, x^2 - 3x + 2$ ;                      d)  $x, 2x^2 - 3x, 4x^2 - 9$ .

**18.10**. Calcola il MCD e il mcm dei seguenti gruppi di polinomi.

a)  $x - 1, x^2 - 1, x^3 - 1$ ;                      c)  $z - 5, 2z - 10, z^2 - 25, z^2 + 25 + 10z$ ;  
b)  $y^3 + 8a^3, y + 2a, y^2 - 2ay + 4a^2$ ;                      d)  $a^2 - 2a + 1, a^2 - 3a + 2, 1 - a$ .

**18.11.** Calcola il MCD e il mcm dei seguenti gruppi di polinomi.

- a)  $2x, 3x - 2, 3x^2 - 2x, 10x^2$ ;
- b)  $a^2 - a, a^2 + a, a - a^2, 2a^2 - 2$ ;
- c)  $x - 2, x^2 - 4, ax + 2a - 3x - 6, a^2 - 6a + 9$ ;
- d)  $x^2 - a^2, x + a, x^2 + ax, ax + a^2$ ;
- e)  $x^2 - 4x + 4, 2x - x^2, x^2 - 2x, x^3, x^3 - 2x^2$ .

#### 18.4.2 Risposte

- 18.1.** a)  $(a + 3); 5(a + 3)^2$ , b)  $(a - b); b(a + b)(a - b)^2$ .
- 18.2.** a)  $(x - 1); (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$ , b)  $1; (x - 2)^2(x + 2)(x^2 + 2x - 2)$ .
- 18.3.** a)  $ab(a - 2b); a^2b^2(a - 2b)^2(a + 2b)$ , b)  $(x - 1); x(x - 1)^2(x + 1)(x + 3)$ .
- 18.4.** a)  $(a - b); a(a - b)(a + b)$ , b)  $1; (b - 2a)(b + 2a)(b^2 - 4a + 4a^2)$ .
- 18.5.** a)  $1; a(a - 3)(a + 3)$ , b)  $(a + 1); (a + 1)(a - 1)(a^2 - a + 1)$ .
- 18.6.** a)  $(x + y); (x + y)^2(x - y)$ , b)  $1; (b - 1)(b + 1)(b - 2)(b + 2)(b^2 - a)$ .
- 18.7.** a)  $1; (a - 2)(a - 3)(a + 3)$ , b)  $1; (x + 1)(3x - 1)(3x + 1)(3x + y)^2$ .
- 18.8.** a)  $2(x - 2y); 12x(x - 2y)^3$ , b)  $(x - 1); (x - 1)^2(x + 1)$ .