Vettori F

F.1 Prime definizioni

Sappiamo che due punti A e B presi su una retta a determinano il segmento b di estremi A e B; fissiamo su di esso un verso di percorrenza, per esempio da A verso B.

Definizione F.1. Il *segmento orientato* di estremi A e B si chiama *vettore*; esso viene indicato con $\overrightarrow{AB}$ oppure con $\vec{u}$; il punto A è il primo estremo e B il secondo estremo.

Un *vettore libero* è caratterizzato da tre elementi:

- la *direzione* indicata dalla retta su cui giace;
- il *verso* indicato dalla punta della freccia che dal primo estremo va al secondo estremo;
- il *modulo o intensità*, uguale alla misura del segmento AB: scriveremo $|\vec{u}| = \overline{AB}$ e leggeremo il modulo del vettore $\vec{u}$ è uguale alla misura del segmento AB.

Un *vettore applicato* è caratterizzato oltre che dai tre elementi suddetti anche dal punto di applicazione, ovvero il punto da cui parte la freccia, chiamato anche primo estremo del vettore.

Esempio F.1. I due vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ in figura F.1 appartengono alla stessa retta, quindi hanno stessa direzione, verso opposto e modulo diverso.

Esempio F.2. I due vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ in figura F.2 appartengono a rette parallele, quindi hanno stessa direzione. I loro versi sono opposti e hanno uguale intensità: essi si chiamano *vettori opposti* e scriveremo $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{DC}$.

Esempio F.3. I due vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ in figura F.3 appartengono a rette parallele, quindi hanno stessa direzione. Hanno lo stesso verso e uguale intensità: essi si chiamano *equipollenti* e scriveremo $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Osserviamo che un vettore può essere interpretato come uno spostamento dal primo estremo al secondo estremo, avente la direzione della retta cui appartiene il vettore stesso nel verso indicato dalla freccia. Nel piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale (figura F.4a) è rappresentato il vettore $\overrightarrow{AB}$ avente il primo estremo nel punto $A(-2;1)$ e il secondo estremo in $B(1;2)$. Per andare da A a B si possono compiere diversi percorsi: possiamo procedere sul

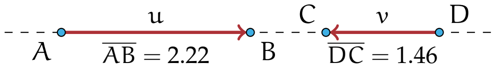


FIGURA F.1: I vettori hanno stessa direzione, verso opposto e modulo diverso.

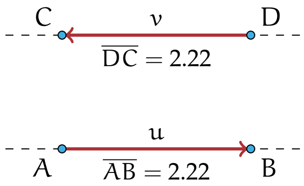


FIGURA F.2: Vettori opposti.

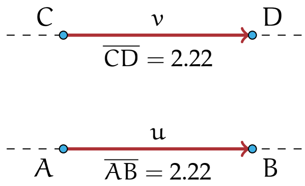


FIGURA F.3: Vettori equipollenti.

vettore $\vec{u}$ oppure possiamo scegliere di compiere due spostamenti particolari, uno parallelo all'asse x e l'altro parallelo all'asse y. In tal modo si determina il punto $C(1; 1)$ come tappa intermedia per raggiungere B: ci spostiamo sul vettore $\overrightarrow{AC}$ e poi da C sul vettore $\overrightarrow{CB}$.

Definizione F.2. Chiamiamo *componenti* del vettore $\overrightarrow{AB}$ le *misure con segno* dei segmenti AC e CB con la precisazione di assegnare il segno $+$ alle misure dello spostamento avente lo stesso verso degli assi coordinati e segno $-$ se il verso è opposto a quello degli assi coordinati.

In figura F.4a le componenti del vettore assegnato sono positive in quanto sia lo spostamento orizzontale che quello verticale avvengono nello stesso verso degli assi coordinati. Scriveremo $\overrightarrow{AB}(+3; +1)$. Tutti i vettori del piano cartediano di componenti $(+3, +1)$ sono equipollenti a $\overrightarrow{AB}$. Ciò che li distingue in modo univoco è il loro punto di applicazione.

Esempio F.4. Il vettore $\vec{z}$ della figura F.4b ha componenti entrambe negative poiché lo spostamento orizzontale e quello verticale avvengono in verso contrario rispetto al verso degli assi coordinati: scriveremo $\vec{z}(-2; -3)$. Il vettore $\vec{u}$ della figura F.4b ha la componente lungo l'asse x positiva e negativa la componente verticale: scriveremo $\vec{u}(+4; -3)$.

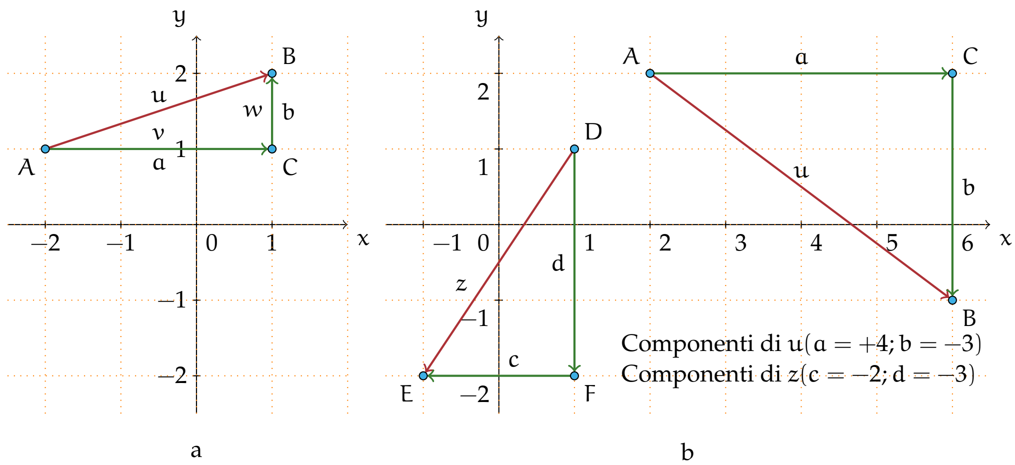


FIGURA F.4: Spostamenti di vettori.

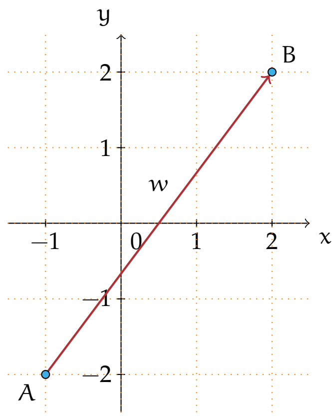
Procedura F.1. *Determinare le componenti cartesiane di un vettore* $\vec{v}$*, note le coordinate cartesiane degli estremi* $A(x_A; y_A)$ *e* $B(x_B; y_B)$*:*

a) *dal primo estremo tracciamo la parallela all'asse* x *e dal secondo estremo la parallela all'asse* y *determinando il punto* $C(x_B; y_A)$*;*
b) *calcoliamo le misure con segno* $a = x_B - x_A$*;* $b = y_B - y_A$*;*
c) *scriviamo* $\vec{v}(a; b)$.

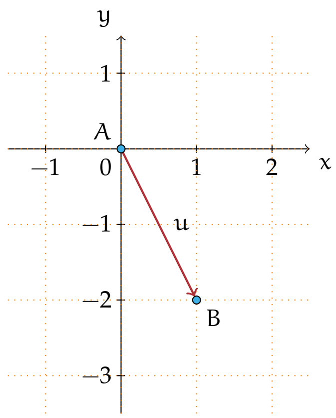
Ottenute le componenti si determina il *modulo del vettore* utilizzando il teorema di Pitagora; si ha infatti $|\vec{u}| = \overline{AB} = \sqrt{a^2 + b^2}$. Il rapporto $m_{\vec{u}} = \frac{b}{a}$ indica la *direzione del vettore*.

Esempio F.5. Assegnato il vettore della figura, determinate le sue componenti, il modulo e la direzione. Completate i passi indicati nella strategia risolutiva:

- scrivete le coordinate degli estremi del vettore assegnato $A(\dots;\dots)$ e $B(\dots;\dots)$;
- individuate le componenti del vettore $\vec{w}$:
  - segnate il punto C; calcolate $a = x_B - x_A$ e $b = y_B - y_A$;
  - le componenti del vettore sono $\vec{w}(\dots;\dots)$;
- determinate il modulo del vettore $|\vec{w}| = \sqrt{\dots}$;
- determinate la direzione del vettore $m_{\vec{w}} = \dots$.



Esempio F.6. Tracciate nel riferimento cartesiano ortogonale il vettore $\vec{v}(1; -3)$. Nella richiesta di questo quesito sembra manchi qualcosa: conosciamo le componenti del vettore, ma dove mettiamo il primo estremo? Provate a mettere il primo estremo in ciascuno dei seguenti punti: $A_1(-1; 2)$; $A_2(1; 0)$; $A_3(3; -2)$ e determinate il secondo estremo di ciascun vettore; completate indicando per ciascuno il modulo e la direzione. È vero che tutti i vettori tracciati sono equipollenti? In figura è rappresentato il vettore equipollente a quelli costruiti avente il primo estremo nell'origine del riferimento.



❑ **Osservazione** Quando si assegna un vettore mediante le sue componenti, collocheremo il primo estremo nell'origine del riferimento cartesiano ortogonale e il secondo estremo (punta della freccia) avrà come coordinate le componenti del vettore in questione.

✍ *Esercizio proposto:* F.1

F.2 Operazioni con i vettori

F.2.1 Somma di vettori

Definizione F.3. Nel punto A del piano sono applicati due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$: dall'estremo B si traccia la retta parallela ad AC e da C la parallela ad AB e si indica con D il loro punto di intersezione. Il vettore AD individuato dalla diagonale AD del parallelogrammo è la *somma dei vettori* u e v, e si scrive $w = u + v$.

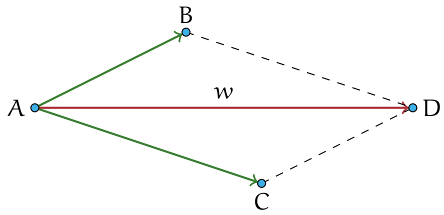


FIGURA F.5: Somma di due vettori.

Nella sua opera *Philosophiae naturalis principia mathematica* del 1682, Isaac Newton (1642-1727) nel primo corollario alle leggi del moto, scrive: «un corpo spinto da due forze congiunte descriverà la diagonale di un parallelogrammo nello stesso tempo nel quale descriverebbe separatamente i lati».

✍ *Esercizio proposto:* F.2

Illustriamo con un esempio che vale anche la *proprietà associativa*.

Esempio F.7. Dimostriamo che vale $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$. Nella figura F.6 è realizzata la costruzione $\vec{v} + \vec{w} = \vec{k}$ e $\vec{u} + \vec{k} = \vec{j}$. Nella figura F.7 è realizzata la costruzione $\vec{u} + \vec{v} = \vec{z}$ e $\vec{z} + \vec{w} = \vec{j}$. Sovrappondendo le due figure si può constatare che i vettori $\vec{j}$ risultanti coincidono.

Osserviamo che la validità della proprietà associativa ci permette di costruire la somma di più vettori. Per come è definita l'operazione di somma, pensando al vettore come rappresentante di uno spostamento dal primo estremo al secondo, possiamo interpretare la figura F.5 come lo spostamento di un punto prima da A fino a B e poi da questo fino a D, essendo $\vec{BD}$ un vettore equipollente ad $\overrightarrow{AC}$. Quindi possiamo affermare che il vettore somma di due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ si può determinare prendendo due vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ rispettivamente equipollenti ai dati; se $\overrightarrow{AB} \equiv \vec{u}$ e $\overrightarrow{BC} \equiv \vec{v}$ (figura F.8), allora la somma è il vettore $\overrightarrow{AC}$, avente A come primo estremo e C, ultimo estremo del secondo vettore, come secondo estremo.

Pertanto la somma di più vettori si può semplicemente determinare scegliendo per ogni addendo il vettore equipollente avente il primo estremo nell'estremo finale dell'addendo precedente: la somma è il vettore avente il primo estremo nel punto iniziale del primo addendo e l'estremo finale nel secondo estremo dell'ultimo addendo.

Esempio F.8. Somma di più vettori: $\vec{z} + \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{s}$, (figura F.9).

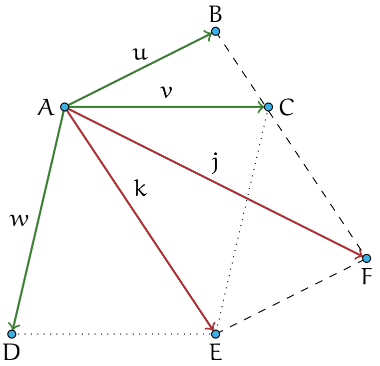


FIGURA F.6: $\vec{v}+\vec{w}=\vec{k}$ e $\vec{u}+\vec{k}=\vec{j}$.

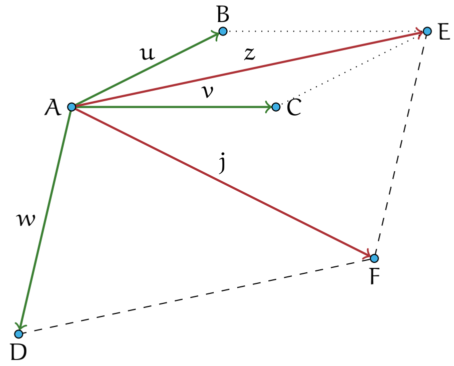


FIGURA F.7: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{z}$ e $\vec{z}+\vec{w}=\vec{j}$.

Abbiamo visto come si costruisce geometricamente il vettore somma di vettori; vediamo come si determinano le componenti del vettore somma se la questione è posta nel riferimento cartesiano ortogonale.

Esempio F.9. Nel piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale (figura F.10) costruiamo il vettore somma dei vettori $\vec{u}(1;2)$ e $\vec{v}(3;-1)$ e determiniamone le componenti.

Strategia risolutiva:

a) costriamo il vettore $\vec{w}$ equipollente al vettore $\vec{v}$ applicato al punto A;
b) determiniamo il punto $D(4;1)$;
c) costruiamo il vettore $\vec{z}=\vec{u}+\vec{v}$ di coordinate $\vec{z}(4;1)$.

Osserviamo che il primo passo realizzato ci permette di affermare $x_z=x_u+x_v$ e $y_z=y_u+y_v$.

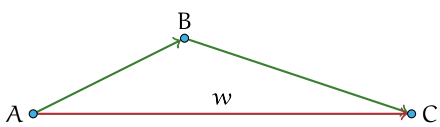


FIGURA F.8: Somma di due vettori.

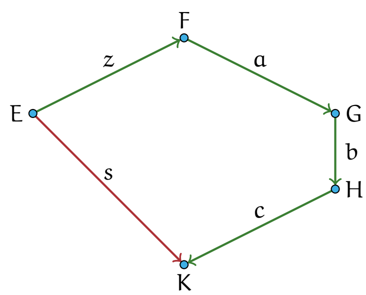


FIGURA F.9: Somma di più vettori.

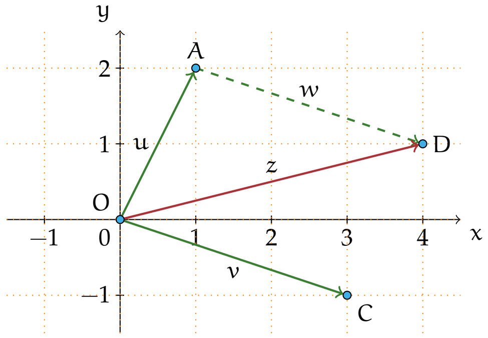


FIGURA F.10: Determinazione di componenti di un vettore.

Procedura F.2. *Regola del parallelogrammo per determinare le componenti cartesiane del vettore somma $\vec{z} = (x_z; y_z)$, note le componenti cartesiane degli addendi $\vec{u} = (x_u; y_u)$ e $\vec{v} = (x_v; y_v)$.*

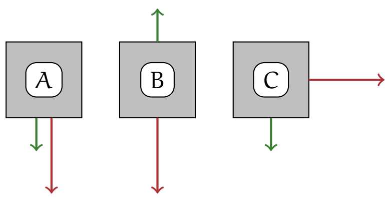
Il primo passo realizzato nella costruzione precedente ci permette di affermare che le componenti del vettore somma sono la somma delle componenti dei vettori addendi:

$$x_z = x_u + x_v \text{ e } y_z = y_u + y_v.$$

✍ *Esercizio proposto:* F.3

Applicazioni dei vettori I vettori sono degli enti geometrici, essi sono utilizzati in fisica per rappresentare tutte le grandezze che sono definite conoscendo modulo, direzione, verso e punto di applicazione. Esempi di grandezze vettoriali sono: la velocità, l'accelerazione, la forza, la densità di corrente elettrica.

Esempio F.10. Nella figura seguente è rappresentata una scatola vista dall'alto. Su di essa agiscono due forze; calcola la forza risultante in ognuno dei casi della figura, sapendo che una forza misura 4 N e l'altra 9 N.



Svolgimento:

a) I due vettori hanno la stessa direzione e lo stesso verso quindi la risultante si ottiene addizionando i due moduli: $|\vec{r}| = 4\,\text{N} + 9\,\text{N} = 13\,\text{N}$;
b) poiché i vettori sono opposti come verso, si procede sottraendo al vettore maggiore il vettore minore e la forza risultante ha la direzione ed il verso del vettore di modulo maggiore: $|\vec{r}| = 9\,\text{N} - 5\,\text{N} = 4\,\text{N}$.

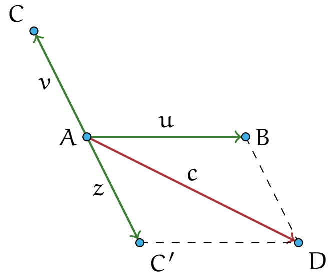


FIGURA F.11: Differenza di due vettori.

c) i due vettori hanno direzioni perpendicolari. In questo caso il vettore somma si ottiene con il metodo del parallelogrammo, quindi applicando il teorema di Pitagora:

$$|\vec{r}| = \sqrt{(4\,\mathrm{N})^2 + (9\,\mathrm{N})^2}.$$

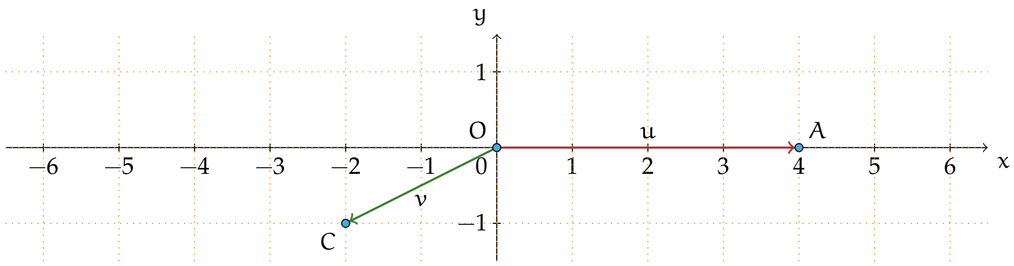
F.2.2 Differenza tra vettori

Procedura F.3. *Per determinare la* differenza tra due vettori *(figura F.11)* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *si procede nel seguente modo:*

a) costruiamo il vettore $\vec{z} = -\vec{v}$ *che ha stessa direzione, stesso modulo, ma verso opposto;*
b) determiniamo con la regola del parallelogrammo $\vec{u} + \vec{z} = \vec{c}$.

Il vettore ottenuto è la differenza tra i vettori assegnati: $\vec{c} = \vec{u} - \vec{v}$.

Esempio F.11. Sono assegnati i vettori $\vec{u}(4;0)$ e $\vec{v}(-2;-1)$. Determinare $\vec{d_1} = \vec{u} - \vec{v}$ e $\vec{d_2} = \vec{v} - \vec{u}$. Cosa osservate?



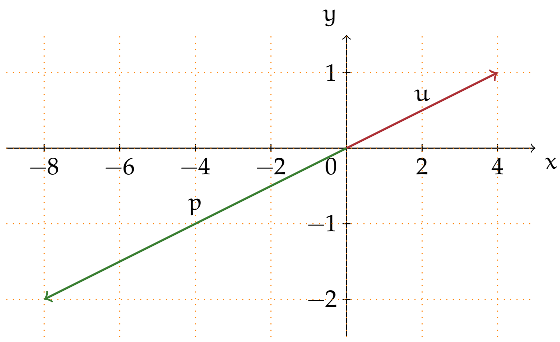
F.2.3 Moltiplicazione di un numero reale per un vettore

Definizione F.4. Assegnato un numero reale r ed un vettore $\vec{v}$, il *prodotto* $r \cdot \vec{v}$ è un vettore $\vec{p}$ avente:

a) la stessa direzione del vettore $\vec{v}$;
b) intensità o modulo uguale al prodotto del modulo di $\vec{v}$ per il valore assoluto di r: $|\vec{p}| = |r| \cdot |\vec{v}|$;
c) verso uguale al verso di $\vec{v}$ se r è positivo, verso opposto a quello di $\vec{v}$ se r è negativo.

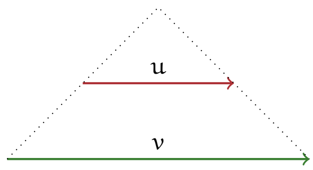
Esempio F.12. Nella figura sono rappresentati il vettore $\vec{v}$ e altri vettori ottenuti moltiplicandolo per un numero reale: $\vec{a} = 2 \cdot \vec{v}, \vec{b} = -\frac{3}{2} \cdot \vec{v}$, $\vec{c} = \frac{1}{3} \cdot \vec{v}$.

Esempio F.13. Nel piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale rappresentiamo il vettore $\vec{u}(4;1)$; le componenti del vettore $\vec{p} = -2 \cdot \vec{u}$ si ottengono moltiplicando per -2 le componenti del vettore dato: $\vec{p}(-8;-2)$. $\vec{p}$ e $\vec{u}$ hanno la stessa direzione essendo $m_{\vec{u}} = \frac{1}{4} = m_{\vec{p}}$ e anzi appartengono alla stessa retta avendo in comune il punto di applicazione.



In generale $\vec{u}(x_u; y_u) \rightarrow r \cdot \vec{u} = \vec{p}(r \cdot x_u; r \cdot y_u)$ e $m_{\vec{u}} = m_{\vec{p}}$.

❑ **Osservazione** Se due vettori hanno la stessa direzione, cioè appartengono a rette parallele (non coincidenti), si può sempre trovare un numero reale r tale che uno sia r volte l'altro. La figura seguente può suggerirvi come giustificare l'osservazione precedente.



Esempio F.14. Sono assegnati i vettori $\vec{x}(\frac{1}{2};1)$; $\vec{y}(-3;-1)$; $\vec{z}(0;3)$. Costruite i vettori: $\vec{p_1} = 2 \cdot \vec{x} - \vec{y}$; $\vec{p_2} = 2 \cdot (\vec{z} + \vec{y})$; $\vec{p_3} = -\frac{3}{2} \cdot \vec{z} + 2 \cdot \vec{y} + 3 \cdot \vec{x}$ e determinatene le componenti.

✍ *Esercizi proposti:* F.4, F.5, F.6

F.3 Dipendenza e indipendenza lineare

Definizione F.5. Diciamo che un vettore $\vec{v}$ è *combinazione lineare* di altri vettori $\vec{x}; \vec{y}; \vec{z}$ se vale l'uguaglianza $\vec{v} = r_1 \cdot \vec{x} + r_2 \cdot \vec{y} + r_3 \cdot \vec{z}$; i numeri reali r_1, r_2, r_3 sono i coefficienti della combinazione lineare.

Esempio F.15. Nell'esempio precedente hai costruito i vettori $\vec{p_1}; \vec{p_2}; \vec{p_3}$ eseguendo la somma algebrica di vettori costruiti moltiplicando per numeri reali i vettori assegnati $\vec{x}; \vec{y}; \vec{z}$. Possiamo dire che:

- $\vec{p_1}$ è combinazione lineare dei vettori $\vec{x}$ e $\vec{y}$ i cui coefficienti sono $r_1 = 2, r_2 = -1$.
- $\vec{p_2}$ è combinazione lineare dei vettori $\vec{z}$ e $\vec{y}$ i cui coefficienti sono $r_1 = 2, r_2 = 2$.
- $\vec{p_3}$ è combinazione lineare dei vettori $\vec{x}$,$\vec{y}$ e $\vec{z}$ i cui coefficienti sono $r_1 = -\frac{3}{2}, r_2 = 2, r_3 = 3$.

Nell'insieme **V** di tutti i vettori del piano cartesiano, consideriamo i vettori $\vec{i}(1;0)$ e $\vec{j}(0;1)$ rispettivamente appartenenti all'asse delle ascisse e delle ordinate; possiamo notare che

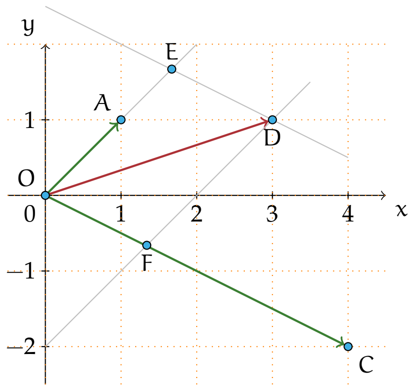
$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1.$$

Ora, ogni vettore $\vec{v}$ del piano può essere scritto come combinazione lineare di $\vec{i}$ e $\vec{j}$; le sue componenti sono i coefficienti della combinazione lineare con cui si determina $\vec{v}$.

$$\vec{v}(x_v; y_v) = x_v \cdot \vec{i} + y_v \cdot \vec{j}$$

✍ *Esercizio proposto:* F.7

Esempio F.16. Disegniamo nel riferimento cartesiano ortogonale i vettori $\vec{u}(1;1)$, $\vec{v}(4;-2)$, $\vec{w}(3;1)$; ci chiediamo se è possibile scrivere $\vec{w}$ come combinazione lineare degli altri due.



Il metodo geometrico Dobbiamo costruire due vettori $\vec{u}' = r_1 \cdot \vec{u}$ e $\vec{v}' = r_2 \cdot \vec{v}$ tali che sommati diano il vettore $\vec{w}$. Dal punto D tracciamo la parallela alla retta OC, che interseca la retta AO nel punto E; dallo stesso punto D tracciamo la parallela alla retta AO che interseca in F la retta OC. I punti E ed F sono gli estremi dei due vettori $\overrightarrow{OE} = r_1 \cdot \vec{u}$ e $\overrightarrow{OF} = r_2 \cdot \vec{v}$ con $r_1 > 1$ e $r_2 < 1$ rispettivamente ottenuti allungando e accorciando $\vec{u}$ e $\vec{v}$: si ha $\vec{w} = r_1 \cdot \vec{u} + r_2 \cdot \vec{v}$.

Il metodo algebrico Dobbiamo trovare due numeri r_1 e r_2 tali che

$$\vec{w} = r_1 \cdot \vec{u} + r_2 \cdot \vec{v} \rightarrow \begin{cases} 3 = 1 \cdot r_1 + 1 \cdot r_2 \\ 1 = 1 \cdot r_1 - 2 \cdot r_2 \end{cases}$$

e risolvendo si ottiene $r_1 = \frac{5}{3}$ e $r_2 = \frac{1}{3}$, coerentemente ai risultati della costruzione effettuata.

✍ *Esercizio proposto:* F.8

Definizione F.6. Dato un insieme V di vettori, questi si dicono *linearmente indipendenti* se almeno uno di essi si può scrivere come combinazione lineare degli altri. Altrimenti si dicono *linearmente indipendenti*.

❑ **Osservazione** Altrimenti nella definizione significa che nessun vettore dell'insieme può essere scritto come combinazione lineare degli altri.

✍ *Esercizi proposti:* F.9, F.10

F.4 Esercizi

F.4.1 Esercizi dei singoli capitoli

F.1 - Prime definizioni

F.1. Segnate nel piano dotato di riferimento cartesiano ortogonale i vettori $\vec{v}(1;2)$ e $\vec{w}(3;-1)$. Possiamo affermare che $|\vec{w}| = 2 \cdot |\vec{v}|$?

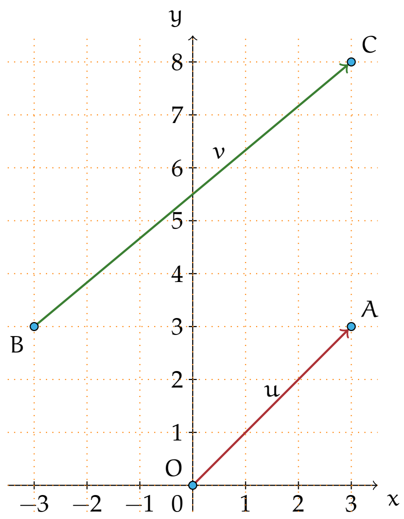
F.2 - Operazioni con i vettori

F.2. Provate a giustificare la seguente affermazione: l'operazione di addizione definita secondo la regola del parallelogrammo gode della proprietà commutativa.

F.3. Determinate il vettore $\vec{z} = \vec{u} + \vec{w}$ essendo $\vec{u}(-1;-3)$ e $\vec{v}(2;-1)$. Determinate inoltre il modulo di $\vec{z}$ e la sua direzione. Potete affermare che $|\vec{z}| = |\vec{u}| + |\vec{w}|$?

F.4. Nel riferimento cartesiano ortogonale sono rappresentati i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Completate:

a) il vettore $\vec{u}$ è applicato all'origine e ha componenti . . .;
b) il vettore $\vec{v}$ ha il primo estremo in $B(\ldots;\ldots)$ e il secondo in . . ., pertanti le sue componenti sono . . .;
c) $m_{\vec{u}} = \ldots$ e $m_{\vec{v}} = \ldots$, pertanto essi sono . . .;
d) $|\vec{u}| = \ldots$ e $|\vec{v}| = \ldots$;
e) determinare r in modo che $\vec{v} = r \cdot \vec{u}$.



F.5. Determinate le componenti del vettore $\vec{w} = 2 \cdot \vec{v}$ essendo $\vec{v}(\frac{3}{2};-2)$; verificate che $\vec{w}$ e $\vec{v}$ hanno stessa direzione e $|\vec{w}| = 2 \cdot |\vec{v}|$.

F.6. Verificate che $\frac{3}{2} \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \frac{3}{2}\vec{x} + \frac{3}{2}\vec{y}$ essendo $\vec{x}(-\frac{5}{4};1)$ e $\vec{y}(4;-1)$.

F.3 - Dipendenza e indipendenza lineare

F.7. Completate le scritture:

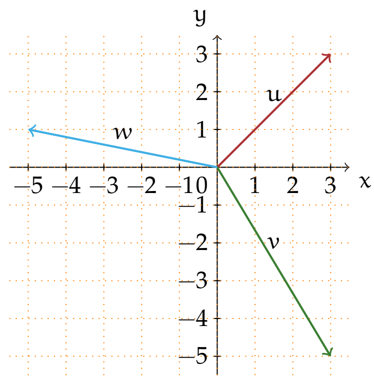
a) $\vec{v}(-\sqrt{2}; \frac{5}{4}) = \ldots \cdot \vec{i} + \ldots \cdot \vec{j};$

b) $\vec{u}(1; -1) = \ldots \cdot \vec{i} + \ldots \cdot \vec{j};$

c) $\vec{h}(\ldots; \ldots) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \vec{i} - 9 \cdot \vec{j};$

d) $\vec{z}(\ldots; \ldots) = \frac{3\sqrt{5}}{3} \cdot \vec{i};$

F.8. Dati i vettori della figura, applicate il metodo geometrico per determinare i vettori che permettono di scrivere $\vec{w}$ come combinazione lineare degli altri due. Riprendete questi stessi vettori e determinate i vettori che permettono di scrivere $\vec{v}$ come combinazione lineare degli altri due. Riprendete questi stessi vettori e determinate i vettori che permettono di scrivere $\vec{u}$ come combinazione lineare degli altri due.



F.9. I vettori dell'esercizio precedente sono linearmente dipendenti?

F.10. Spiegate perché i tre vettori $\vec{v}(1; 2)$, $\vec{u}(3; 1)$ e $\vec{w}(-3; -6)$ sono linearmente dipendenti.