17 Altre tecniche di scomposizione

17.1 Trinomi particolari

Consideriamo il seguente prodotto:

$$(x+3)(x+2) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6.$$

Poniamoci ora l'obiettivo opposto: se abbiamo il polinomio $x^2 + 5x + 6$ come facciamo a trovare ritrovare il prodotto che lo ha originato? Possiamo notare che il 5 deriva dalla somma tra il 3 e il 2, mentre il 6 deriva dal prodotto tra 3 e 2. Generalizzando:

$$(x+a) \cdot (x+b) = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a+b)\,x + a \cdot b.$$

Leggendo la formula precedente da destra verso sinistra:

$$x^2 + (a+b)\,x + a \cdot b = (x+a) \cdot (x+b)\,.$$

Possiamo allora concludere che se abbiamo un trinomio di secondo grado in una sola lettera, a coefficienti interi, avente il termine di secondo grado con coefficiente 1, se riusciamo a trovare due numeri a e b tali che la loro somma è uguale al coefficiente del termine di primo grado ed il loro prodotto è uguale al termine noto, allora il polinomio è scomponibile nel prodotto $(x+a)(x+b)$.

Osserva che il termine noto, poiché è dato dal prodotto dei numeri che cerchiamo, ci dice se i due numeri sono concordi o discordi. Inoltre, se il numero non è particolarmente grande è sempre possibile scrivere facilmente tutte le coppie di numeri che danno come prodotto il numero cercato, tra tutte queste coppie dobbiamo poi individuare quella che ha per somma il coefficiente del termine di primo grado.

Esempio 17.1. $x^2 + 7x + 12$.

I coefficienti sono positivi e quindi i due numeri da trovare sono entrambi positivi. Il termine noto 12 può essere scritto sotto forma di prodotto di due numeri naturali solo come:

$$12 \cdot 1; \quad 6 \cdot 2; \quad 3 \cdot 4.$$

Le loro somme sono rispettivamente 13, 8, 7. La coppia di numeri che dà per somma (S) +7 e prodotto (P) +12 è pertanto +3 e +4. Dunque il trinomio si scompone come:

$$x^2 + 7x + 12 = (x+4) \cdot (x+3)\,.$$

Esempio 17.2. $x^2 - \overset{S}{8}x + \overset{P}{15}$.

I segni dei coefficienti ci dicono che i due numeri, dovendo avere somma negativa e prodotto positivo, sono entrambi negativi. Dobbiamo cercare due numeri negativi la cui somma sia -8 e il cui prodotto sia 15. Le coppie di numeri che danno 15 come prodotto sono -15; -1 e -5; -3. Allora i due numeri cercati sono -5 e -3. Il trinomio si scompone come:

$$x^2 - 8x + 15 = (x-5) \cdot (x-3)\,.$$

Esempio 17.3. $x^2 + \overset{S}{4}x - \overset{P}{5}$.

I due numeri sono discordi, il maggiore in valore assoluto è quello positivo. C'è una sola coppia di numeri che dà -5 come prodotto, precisamente $+5$ e -1. Il polinomio si scompone:

$$x^2 + 4x - 5 = (x+5) \cdot (x-1)\,.$$

Esempio 17.4. $x^2 - \overset{S}{3}x - \overset{P}{10}$.

I due numeri sono discordi, in modulo il più grande è quello negativo. Le coppie di numeri che danno -10 come prodotto sono -10; $+1$, ma anche -5; $+2$. Quelli che danno -3 come somma sono -5 e $+2$.

$$x^2 - 3x - 10 = (x-5) \cdot (x+2)\,.$$

Esempio 17.5. In alcuni casi si può applicare questa regola anche quando il trinomio non è di secondo grado, è necessario però che il termine di grado intermedio sia esattamente di grado pari alla metà di quello di grado maggiore.

- $x^4 + 5x^2 + 6 = \left(x^2+3\right) \cdot \left(x^2+2\right)$;
- $x^6 + x^3 - 12 = \left(x^3+4\right) \cdot \left(x^3-3\right)$;
- $a^4 - 10a^2 + 9 = \underbrace{\left(a^2-9\right) \cdot \left(a^2-1\right)}_{\text{differenze di quadrati}} = (a+3) \cdot (a-3) \cdot (a+1) \cdot (a-1)$;
- $-x^4 - x^2 + 20 = -\left(x^4 + x^2 - 20\right) = -\left(x^2+5\right) \cdot \left(x^2-4\right) = -\left(x^2+5\right) \cdot (x+2) \cdot (x-2)$;
- $2x^5 - 12x^3 - 14x = 2x \cdot \left(x^4 - 6x^2 - 7\right) = 2x \cdot \left(x^2-7\right) \cdot \left(x^2+1\right)$;
- $-2a^7 + 34a^5 - 32a^3 = -2a^3\left(a^4 - 17a^2 + 16\right) = -2a^3\left(a^2-1\right)\left(a^2-16\right)$
  $= -2a^3(a-1)(a+1)(a-4)(a+4)\,.$

È possibile applicare questo metodo anche quando il polinomio è in due variabili.

Esempio 17.6. $x^2 + 5xy + 6y^2$.

Per capire come applicare la regola precedente, possiamo scrivere il trinomio in questo modo: $x^2 + \overset{S}{5}xy + \overset{P}{6}y^2$.

Bisogna cercare due monomi A e B tali che $A + B = 5y$ e $A \cdot B = 6y^2$. Partendo dal fatto che i due numeri che danno 5 come somma e 6 come prodotto sono $+3$ e $+2$, i monomi cercati sono $+3y$ e $+2y$, infatti $+3y + 3y = +5y$ e $+3y \cdot (+2y) = +6y^2$. Pertanto si può scomporre come segue: $x^2 + 5xy + 6y^2 = (x+3y)(x+2y)$.

La regola, opportunamente modificata, vale anche se il primo coefficiente non è 1. Vediamo un esempio.

Esempio 17.7. $2x^2 - x - 1$.

Non possiamo applicare la regola del trinomio caratteristico, con somma e prodotto; con un accorgimento, possiamo riscrivere il polinomio in un altro modo. Cerchiamo due numeri la cui somma sia -1 e il prodotto sia pari al prodotto tra il primo e l'ultimo coefficiente, o meglio tra il coefficiente del termine di secondo grado e il termine noto, in questo caso $2 \cdot (-1) = -2$. I numeri sono -2 e $+1$. Spezziamo il monomio centrale in somma di due monomi in questo modo

$$2x^2 - x - 1 = 2x^2 - 2x + x - 1.$$

Ora possiamo applicare il raccoglimento a fattore comune parziale

$$2x^2 - x - 1 = 2x^2 \underbrace{-2x + x}_{-x} -1 = 2x \cdot \underline{(x-1)} + 1 \cdot \underline{(x-1)} = (x-1) \cdot (2x+1)\,.$$

Procedura 17.1. *Sia da scomporre un trinomio di secondo grado a coefficienti interi* $ax^2 + bx + c$ *con* $a \neq 1$*, cerchiamo due numeri* m *ed* n *tali che* $m + n = b$ *e* $m \cdot n = a \cdot c$*; se riusciamo a trovarli, li useremo per dissociare il coefficiente* b *e riscrivere il polinomio nella forma* $p = ax^2 + (m+n) \cdot x + c$ *su cui poi eseguire un raccoglimento parziale.*

✍ *Esercizi proposti:* 17.1, 17.2, 17.3, 17.4, 17.5, 17.6, 17.7, 17.8, 17.9, 17.10

17.2 Scomposizione con la regola Ruffini

Anche il teorema di Ruffini permette di scomporre in fattori i polinomi. Dato il polinomio $P(x)$, se riusciamo a trovare un numero k per il quale $P(k) = 0$, allora $P(x)$ è divisibile per il binomio $x - k$, allora possiamo scomporre $P(x) = (x-k) \cdot Q(x)$, dove $Q(x)$ è il quoziente della divisione tra $P(x)$ e $(x-k)$.

Il problema di scomporre un polinomio $P(x)$ si riconduce quindi a quello della ricerca del numero k che sostituito alla x renda nullo il polinomio. Un numero di questo tipo si dice anche *radice del polinomio*.

Il numero k non va cercato del tutto a caso, abbiamo degli elementi per restringere il campo di ricerca di questo numero quando il polinomio è a coefficienti interi.

❑ **Osservazione** Le radici intere del polinomio vanno cercate tra i divisori del termine noto.

Esempio 17.8. $p(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$.

Le radici intere del polinomio sono da ricercare nell'insieme dei divisori di 8, precisamente in $\{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$. Sostituiamo questi numeri nel polinomio, finché non troviamo quello che lo annulla.

Per $x = 1$ si ha $p(1) = (1)^3 + (1)^2 - 10 \cdot (1) + 8 = 1 + 1 - 10 + 8 = 0$, pertanto il polinomio è divisibile per $x - 1$.

Utilizziamo la regola di Ruffini per dividere $P(x)$ per $x - 1$.

	1	1	−10	8
1		1	2	−8
	1	2	−8	

Predisponiamo una griglia come quella a fianco, al primo rigo mettiamo i coefficienti di $P(x)$, al secondo rigo mettiamo come primo numero la radice che abbiamo trovato, cioè 1. Poi procediamo come abbiamo già indicato per la regola di Ruffini.

I numeri che abbiamo ottenuto nell'ultimo rigo sono i coefficienti del polinomio quoziente: $q(x) = x^2 + 2x - 8$.

Possiamo allora scrivere:

$$x^3 + x^2 - 10x + 8 = (x - 1) \cdot (x^2 + 2x - 8).$$

Per fattorizzare il polinomio di secondo grado $x^2 + 2x - 8$ possiamo ricorrere al metodo del trinomio notevole. Cerchiamo due numeri la sui somma sia $+2$ e il cui prodotto sia -8. Questi numeri vanno cercati tra le coppie che danno per prodotto -8 e precisamente tra le seguenti coppie $(+8, -1)$, $(-8, +1)$, $(+4, -2)$, $(-4, +2)$. La coppia che dà per somma $+2$ è $(+4, -2)$. In definitiva si ha:

$$x^3 + x^2 - 10x + 8 = (x - 1) \cdot (x^2 + 2x - 8) = (x - 1)(x - 2)(x + 4).$$

Esempio 17.9. $x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 29x + 30$.

Le radici intere vanno cercate tra i divisori di 30, precisamente in $\{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 5; \pm 6; \pm 10; \pm 15; \pm 30\}$. Sostituiamo questi numeri al posto della x, finché non troviamo la radice.

Per $x = 1$ si ha $P(1) = 1 - 5 - 7 + 29 + 30$ senza effettuare il calcolo si nota che i numeri positivi superano quelli negativi, quindi 1 non è una radice.

Per $x = -1$ si ha

$$\begin{aligned} P(-1) &= (-1)^4 - 5 \cdot (-1)^3 - 7 \cdot (-1)^2 + 29 \cdot (-1) + 30 \\ &= +1 + 5 - 7 - 29 + 30 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Una radice del polinomio è quindi -1; utilizzando la regola di Ruffini abbiamo:

	1	−5	−7	29	30
−1		−1	6	1	−30
	1	−6	−1	30	0

Con i numeri che abbiamo ottenuto nell'ultima riga costruiamo il polinomio quoziente $x^3 - 6x^2 - 1x + 30$. Possiamo allora scrivere:

$$x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 29x + 30 = (x + 1)(x^3 - 6x^2 - x + 30).$$

Con lo stesso metodo scomponiamo il polinomio $x^3 - 6x^2 - 1x + 30$. Cerchiamone le radici tra i divisori di 30, precisamente nell'insieme $\{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 5; \pm 6; \pm 10; \pm 15; \pm 30\}$. Bisogna ripartire dall'ultima radice trovata, cioè da -1.

Per $x = -1$ si ha $P(-1) = (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 - 1 \cdot (-1) + 30 = -1 - 6 + 1 + 30 \neq 0$.

Per $x = +2$ si ha $P(+2) = (+2)^3 - 6 \cdot (+2)^2 - 1 \cdot (+2) + 30 = +8 - 24 - 2 + 30 \neq 0$.

Per $x = -2$ si ha $P(+2) = (-2)^3 - 6 \cdot (-2)^2 - 1 \cdot (-2) + 30 = -8 - 24 + 2 + 30 = 0$.

Quindi -2 è una radice del polinomio. Applichiamo la regola di Ruffini, ricordiamo che al primo rigo dobbiamo mettere i coefficienti del polinomio da scomporre, cioè $x^3 - 6x^2 - 1x + 30$.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -6 & -1 & 30 \\ -2 & & -2 & 16 & -30 \\ \hline & 1 & -8 & 15 & 0 \end{array}$$

Il polinomio $q(x)$ si scompone nel prodotto $x^3 - 6x^2 - x + 30 = (x+2) \cdot (x^2 - 8x + 15)$.

Infine possiamo scomporre $x^2 - 8x + 15$ come trinomio notevole: i due numeri che hanno per somma -8 e prodotto $+15$ sono -3 e -5. In conclusione posiamo scrivere la scomposizione:

$$x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 29x + 30 = (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x-3) \cdot (x-5).$$

Non sempre è possibile scomporre un polinomio utilizzando solo numeri interi. In alcuni casi possiamo provare con le frazioni, in particolare quando il coefficiente del termine di grado maggiore non è 1. In questi casi possiamo cercare la radice del polinomio tra le frazioni del tipo $\frac{p}{q}$, dove p è un divisore del termine noto e q è un divisore del coefficiente del termine di grado maggiore.

Esempio 17.10. $6x^2 - x - 2$.

Determiniamo prima di tutto l'insieme nel quale possiamo cercare le radici del polinomio. Costruiamo tutte le frazioni del tipo $\frac{p}{q}$, con p divisore di -2 e q divisore di 6. I divisori di 2 sono $\{\pm 1; \pm 2\}$ mentre i divisori di 6 sono $\{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$. Le frazioni tra cui cercare sono

$$\left\{\pm\frac{1}{1}; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{2}{1}; \pm\frac{2}{3}; \pm\frac{2}{6}\right\}$$

cioè

$$\left\{\pm 1; \pm\frac{1}{2}; \pm 2; \pm\frac{2}{3}; \pm\frac{1}{3}\right\}.$$

Si ha $A(1) = -3; A(-1) = 5; A\left(\frac{1}{2}\right) = -1; A\left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$

Sappiamo dal teorema di Ruffini che il polinomio $A(x) = 6x^2 - x - 2$ è divisibile per $\left(x + \frac{1}{2}\right)$ dobbiamo quindi trovare il polinomio $Q(x)$ per scomporre $6x^2 - x - 2$ come $Q(x) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{array}{c|cc|c} & 6 & -1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & & -3 & 2 \\ \hline & 6 & -4 & 0 \end{array}$$

Applichiamo la regola di Ruffini per trovare il quoziente. Il quoziente è $Q(x) = 6x - 4$ Il polinomio sarà scomposto in $(6x - 4) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)$. Mettendo a fattore comune 2 nel primo binomio si ha:

$$6x^2 - x - 2 = (6x - 4) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) = 2(3x - 2)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (3x - 2)(2x + 1).$$

✍ *Esercizi proposti:* 17.11, 17.12, 17.13, 17.14, 17.15

17.3 Somma e differenza di due cubi

Per scomporre i polinomi del tipo $A^3 + B^3$ e $A^3 - B^3$ possiamo utilizzare il metodo di Ruffini.

Esempio 17.11. $x^3 - 8$.

Il polinomio si annulla per $x = 2$, che è la radice cubica di 8. Calcoliamo il quoziente.

	1	0	0	-8
2		2	4	8
	1	2	4	/

Il polinomio quoziente è $Q(x) = x^2+2x+4$ e la scomposizione risulta

$$x^3-8 = (x-2)(x^2+2x+4).$$

Notiamo che il quoziente assomiglia al quadrato di un binomio, ma non lo è in quanto il termine intermedio è il prodotto e non il doppio prodotto dei due termini, si usa anche dire che è un "falso quadrato". Un trinomio di questo tipo non è ulteriormente scomponibile.

Esempio 17.12. x^3+27.

	1	0	0	27
-3		-3	9	-27
	1	-3	9	/

Il polinomio si annulla per $x = -3$, cioè $P(-3) = (-3)^3+27 = -27+27 = 0$. Il polinomio quindi è divisibile per $x+3$. Calcoliamo il quoziente attraverso la regola di Ruffini.

Il polinomio quoziente è $Q(x) = x^2-3x+9$ e la scomposizione risulta

$$x^3+27 = (x+3)(x^2-3x+9).$$

In generale possiamo applicare le seguenti regole per la scomposizione di somma e differenza di due cubi:

$$A^3+B^3 = (A+B)(A^2-AB+B^2),$$
$$A^3-B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2).$$

✍ *Esercizi proposti:* 17.16, 17.17, 17.18

17.4 Scomposizione mediante metodi combinati

Nei paragrafi precedenti abbiamo analizzato alcuni metodi per ottenere la scomposizione in fattori di un polinomio e talvolta abbiamo mostrato che la scomposizione si ottiene combinando metodi diversi. Sostanzialmente non esiste una regola generale per la scomposizione di polinomi, cioè non esistono criteri di divisibilità semplici come quelli per scomporre un numero nei suoi fattori primi. In questo paragrafo vediamo alcuni casi in cui si applicano vari metodi combinati tra di loro.

Un buon metodo per ottenere la scomposizione è procedere tenendo conto di questi suggerimenti:

1. analizzare se si può effettuare *un raccoglimento totale*;
2. *contare il numero di termini* di cui si compone il polinomio:
   a) con *due* termini analizzare se il binomio è
      i. una *differenza di quadrati* $A^2-B^2 = (A-B)(A+B)$;
      ii. una *differenza di cubi* $A^3-B^3 = (A-B)\left(A^2+AB+B^2\right)$;
      iii. una *somma di cubi* $A^3+B^3 = (A+B)\left(A^2-AB+B^2\right)$;

iv. una *somma di quadrati* nel qual caso è *irriducibile* $A^2 + B^2$.

b) con *tre* termini analizzare se è

i. un *quadrato di binomio* $A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$;

ii. un *trinomio particolare* del tipo $x^2 + Sx + P = (x+a)(x+b)$ con $a+b = S$ e $a \cdot b = P$;

iii. un *falso quadrato*, che è irriducibile $A^2 \pm AB + B^2$.

c) con *quattro* termini analizzare se è

i. un *cubo di binomio* $A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3 = (A \pm B)^3$;

ii. una *particolare differenza di quadrati*
$A^2 \pm 2AB + B^2 - C^2 = (A \pm B + C)(A \pm B - C)$;

iii. un *raccoglimento parziale* $ax + bx + ay + by = (a+b)(x+y)$.

d) con *sei* termini analizzare se è

i. un *quadrato di trinomio* $A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC = (A+B+C)^2$;

ii. un *raccoglimento parziale*
$ax + bx + cx + ay + by + cy = (a+b+c)(x+y)$.

3. se non riuscite ad individuare nessuno dei casi precedenti, provate ad applicare la *regola di Ruffini*.

Ricordiamo infine alcune formule per somma e differenza di potenze dispari.

$$A^5 + B^5 = (A+B)\left(A^4 - A^3B + A^2B^2 - AB^3 + B^4\right),$$

$$A^5 - B^5 = (A-B)\left(A^4 + A^3B + A^2B^2 + AB^3 + B^4\right),$$

$$A^7 \pm B^7 = (A \pm B)\left(A^6 \mp A^5B + A^4B^2 \mp A^3B^3 + A^2B^4 \mp AB^5 + B^6\right),$$

$$\begin{aligned}(A^{11} - B^{11}) = (A-B)(&A^{10} + A^9B + A^8B^2 + A^7B^3 + A^6B^4 \\ &+ A^5B^5 + A^4B^6 + A^3B^7 + A^2B^8 + AB^9 + B^{10}).\end{aligned}$$

La differenza di due potenze ad esponente pari (uguale o diverso) rientra nel caso della differenza di quadrati:

$$A^8 - B^{10} = \left(A^4 - B^5\right)\left(A^4 + B^5\right).$$

In alcuni casi si può scomporre anche la somma di potenze pari:

$$A^6 + B^6 = \left(A^2\right)^3 + \left(B^2\right)^3 = \left(A^2 + B^2\right)\left(A^4 - A^2B^2 + B^4\right),$$

$$A^{10} + B^{10} = \left(A^2\right)^5 + \left(B^2\right)^5 = \left(A^2 + B^2\right)\left(A^8 - A^6B^2 + A^4B^4 - A^2B^6 + B^8\right).$$

Proponiamo di seguito alcuni esercizi svolti o da completare in modo che possiate acquisire una certa abilità nella scomposizione di polinomi.

Esempio 17.13. $a^2x + 5abx - 36b^2x$.

Il polinomio ha 3 termini, è di terzo grado in 2 variabili, è omogeneo; tra i suoi monomi si ha MCD $= x$; effettuiamo il raccoglimento totale: $x \cdot \left(a^2 + 5ab - 36b^2\right)$. Il trinomio ottenuto come secondo fattore è di grado 2 in 2 variabili, omogeneo e può essere riscritto

$$a^2 + (5b) \cdot a - 36b^2.$$

Proviamo a scomporlo come trinomio particolare: cerchiamo due monomi m ed n tali che $m + n = 5b$ e $m \cdot n = -36b^2$; i due monomi sono $m = 9b$ ed $n = -4b$;

$$a^2x + 5abx - 36b^2x = x \cdot (a + 9b) \cdot (a - 4b)\,.$$

Esempio 17.14. $x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y$.

Facendo un raccoglimento parziale del coefficiente 2 tra gli ultimi tre monomi perché otterremmo $x^2 + y^2 + 2 \cdot (xy - x - y)$ su cui non possiamo fare alcun ulteriore raccoglimento.

I primi tre termini formano però il quadrato di un binomio e tra gli altri due possiamo raccogliere -2, quindi $\left(\underline{x + y}\right)^2 - 2 \cdot \left(\underline{x + y}\right)$, raccogliendo $(x + y)$ tra i due termini si ottiene

$$x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y = (x + y) \cdot (x + y - 2)\,.$$

Esempio 17.15. $8a + 10b + (1 - 4a - 5b)^2 - 2$.

Tra i monomi sparsi possiamo raccogliere 2 a fattore comune

$$p = 2 \cdot (4a + 5b - 1) + (1 - 4a - 5b)^2\,.$$

Osserviamo che la base del quadrato è l'opposto del polinomio contenuto nel primo termine: poiché numeri opposti hanno stesso lo quadrato possiamo riscrivere:

$$p = 2 \cdot (4a + 5b - 1) + (-1 + 4a + 5b)^2\,.$$

$$\begin{aligned} 8a + 10b + (1 - 4a - 5b)^2 - 2 &= (4a + 5b - 1) \cdot (2 - 1 + 4a + 5b) \\ &= (4a + 5b - 1) \cdot (1 + 4a + 5b)\,. \end{aligned}$$

Esempio 17.16. $t^3 - z^3 + t^2 - z^2$.

Il polinomio ha 4 termini, è di terzo grado in due variabili. Poiché due monomi sono nella variabile t e gli altri due nella variabile z potremmo subito effettuare un raccoglimento parziale: $t^3 - z^3 + t^2 - z^2 = t^2 \cdot (t + 1) - z^2 \cdot (z + 1)$, che non permette un ulteriore passo. Occorre quindi un'altra idea.

Notiamo che i primi due termini costituiscono una differenza di cubi e gli altri due una differenza di quadrati; applichiamo le regole:

$$t^3 - z^3 + t^2 - z^2 = (t - z) \cdot \left(t^2 + tz + z^2\right) + (t - z) \cdot (t + z)\,.$$

Ora effettuiamo il raccoglimento totale del fattore comune $(t - z)$

$$t^3 - z^3 + t^2 - z^2 \;=\; (t - z) \cdot \left(t^2 + tz + z^2 + t + z\right).$$

Esempio 17.17. $x^3 - 7x - 6$.

Il polinomio ha 3 termini, è di 3° grado in una variabile. Non possiamo utilizzare la regola del trinomio particolare poiché il grado è 3. Procediamo con la regola di Ruffini: cerchiamo il numero che annulla il polinomio nell'insieme dei divisori del termine noto $D = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$.

Per $x = +1$ si ha $P(+1) = (+1)^3 - 7 \cdot (+1) - 6 = 1 - 7 - 6 \neq 0$. Per $x = -1$ si ha $P(-1) = (-1)^3 - 7 \cdot (-1) - 6 = -1 + 7 - 6 = 0$. quindi $p = x^3 - 7x - 6 = (x+1) \cdot q(x)$ con $q(x)$ polinomio di secondo grado che determiniamo con la regola di Ruffini:

Pertanto: $P(x) = x^3 - 7x - 6 = (x+1) \cdot \left(x^2 - x - 6\right)$.

	1	0	−7	−6
−1		−1	1	6
	1	−1	−6	0

Il polinomio quoziente è un trinomio di secondo grado; proviamo a scomporlo come trinomio notevole. Cerchiamo due numeri a e b tali che $a + b = -1$ e $a \cdot b = -6$. I due numeri vanno cercati tra le coppie che hanno -6 come prodotto, precisamente $(-6, +1)$, $(-3, +2)$, $(+6, -1)$, $(+3, -2)$. La coppia che fa al caso nostro è $(-3, +2)$ quindi si scompone $q = x^2 - x - 6 = (x-3) \cdot (x+2)$.

In definitiva $x^3 - 7x - 6 = (x+1) \cdot (x-3) \cdot (x+2)$.

Esempio 17.18. $\left(m^2 - 4\right)^2 - m^2 - 4m - 4$.

Il polinomio ha 4 termini di cui il primo è un quadrato di binomio; negli altri tre possiamo raccogliere -1;

$$\left(m^2 - 4\right)^2 - m^2 - 4m - 4 = \left(m^2 - 4\right)^2 - \left(m^2 + 4m + 4\right)$$

Notiamo che anche il secondo termine è un quadrato di binomio, quindi:

$$\left(m^2 - 4\right)^2 - (m+2)^2,$$

che si presenta come differenza di quadrati, allora diviene:

$$\left[\left(m^2 - 4\right) + (m+2)\right] \cdot \left[\left(m^2 - 4\right) - (m+2)\right]$$

.

Eliminando le parentesi tonde $\left(m^2 + m - 2\right) \cdot \left(m^2 - m - 6\right)$.

I due fattori ottenuti si scompongono con la regola del trinomio. In definitiva si ottiene:

$$\begin{aligned}(m^2 + m - 2) \cdot (m^2 - m - 6) &= (m+2) \cdot (m-1) \cdot (m-3) \cdot (m+2) \\ &= (m+2)^2 \cdot (m-1) \cdot (m-3).\end{aligned}$$

Esempio 17.19. $(a-3)^2 + (3a-9) \cdot (a+1) - \left(a^2 - 9\right)$.

$$(a-3)^2 + (3a-9) \cdot (a+1) - \left(a^2 - 9\right) = (a-3)^2 + 3 \cdot (a-3) \cdot (a+1) - (a-3) \cdot (a+3).$$

Mettiamo a fattore comune $(a-3)$:

$$(a-3) \cdot [(a-3) + 3 \cdot (a+1) - (a+3)].$$

Svolgiamo i calcoli nel secondo fattore e otteniamo:

$$(a-3)(a-3+3a+3-a-3)=(a-3)(3a-3).$$

Esempio 17.20. $a^4+a^2b^2+b^4$.

Osserva che per avere il quadrato del binomio occorre il doppio prodotto, aggiungendo e togliendo a^2b^2 otteniamo il doppio prodotto cercato e al passaggio seguente ci troviamo con la differenza di quadrati:

$$a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2=\left(a^2+b^2\right)^2-(ab)^2=\left(a^2+b^2+ab\right)\left(a^2+b^2-ab\right).$$

Esempio 17.21. $a^5+2a^4b+a^3b^2+a^2b^3+2ab^4+b^5$.

$$\begin{aligned}a^5+2a^4b+a^3b^2+a^2b^3+2ab^4+b^5&=a^3\left(a^2+2ab+b^2\right)+b^3\left(a^2+2ab+b^2\right)\\&=\left(a^3+b^3\right)\left(a^2+2ab+b^2\right)\\&=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)(a+b)^2\\&=(a+b)^3\left(a^2-ab+b^2\right).\end{aligned}$$

Esempio 17.22. $a^2x^2+2ax^2-3x^2-4a^2-8a+12$.

$$\begin{aligned}a^2x^2+2ax^2-3x^2-4a^2-8a+12&=x^2\left(a^2+2a-3\right)-4\left(a^2+2a-3\right)\\&=\left(x^2-4\right)\left(a^2+2a-3\right)\\&=(x+2)(x-2)(a-1)(a+3).\end{aligned}$$

17.5 Esercizi

17.5.1 Esercizi dei singoli paragrafi

17.1 - Trinomi particolari

17.1. Scomponi in fattori i seguenti trinomi particolari.

a) $x^2 - 5x - 36$;
b) $x^2 - 17x + 16$;
c) $x^2 - 13x + 12$;
d) $x^2 + 6x + 8$;
e) $x^2 + 7x + 12$;
f) $x^2 - 2x - 3$.

17.2. Scomponi in fattori i seguenti trinomi particolari.

a) $x^2 + 9x + 18$;
b) $x^2 - 5x + 6$;
c) $x^2 - 8x - 9$;
d) $x^2 - 7x + 12$;
e) $x^2 - 6x + 8$;
f) $x^2 - 51x + 50$.

17.3. Scomponi in fattori i seguenti trinomi particolari.

a) $x^2 - 3x - 4$;
b) $x^2 + 5x - 14$;
c) $x^4 + 8x^2 + 12$;
d) $x^2 + 4x - 12$;
e) $x^2 - 3x + 2$;
f) $x^4 - 5x^2 + 4$.

17.4. Scomponi in fattori i seguenti trinomi particolari.

a) $x^2 + 3x - 10$;
b) $x^2 + 13x + 12$;
c) $x^2 + 2x - 35$;
d) $x^6 - 5x^3 + 4$;
e) $x^2 + 5x - 36$;
f) $x^2 + 8x + 7$.

17.5. Scomponi in fattori i seguenti trinomi particolari.

a) $x^2 - 10x + 24$;
b) $y^2 + y - 20$;
c) $x^2 + 4x - 45$;
d) $x^2 - 4x - 21$;
e) $x^2 + 4x - 21$;
f) $x^2 - 10x + 21$.

17.6. Scomponi in fattori i seguenti trinomi particolari.

a) $x^4 + 9x^2 - 10$;
b) $x^6 - x^3 - 30$;
c) $-x^6 + 7x^3 - 10$;
d) $2x^3 + 14x^2 + 20x$;
e) $-3x^6 + 15x^4 - 12x^2$;
f) $x^4 - 37x^2 + 36$.

17.7. Scomponi in fattori i seguenti trinomi particolari.

a) $x^{20} + 4x^{12} - 32x^4$;
b) $x^{40} - x^{20} - 20$;
c) $x^{14} - 37x^7 + 36$;
d) $x^2 + 4xy - 32y^2$;
e) $a^2 - ax - 20x^2$;
f) $a^2 - 12xa - 64x^2$.

17.8. Scomponi in fattori i seguenti trinomi particolari.

a) $m^2 + 20mn + 36n^2$;
b) $x^4 - 8x^2a + 12a^2$;
c) $x^6 + 9x^3y^2 - 36y^4$;
d) $x^2y^2 - 2xy - 35$;
e) $a^4b^2 - a^2b - 72$;
f) $x^4 + 11x^2 + 24$.

17.9 (*). Scomponi i seguenti polinomi seguendo la traccia.

a) $2x^2 - 3x - 5 = 2x^2 + 2x - 5x - 5 =$ . . . . ;
b) $3y^2 + y - 10 = 3y^2 + 6y - 5y - 10 =$ . . . . ;

c) $5t^2 - 11t + 2 = 5t^2 - 10t - t + 2 =$ . . . . ;
d) $-3t^2 + 4t - 1 = -3t^2 + 3t + t - 1 =$ . . . . ;
e) $2x^2 - 3x - 9 = 2x^2 - 6x + 3x - 9 =$ . . . .

17.10. Scomponi i seguenti polinomi.

a) $3a^2 - 4a + 1$;
b) $11k - 6k^2 + 7$;
c) $4b^2 - 4b - 3$;
d) $6x^2 - 13x - 15$;
e) $x^2 + 10ax + 16a^2$;
f) $2x^4 + x^2 - 3$.

17.2 - Scomposizione con la regola Ruffini

17.11. Scomponi in fattori i seguenti polinomi utilizzando il teorema di Ruffini.

a) $2x^2 - 5x + 2$;
b) $3x^2 - 5x - 2$;
c) $x^3 - 4x^2 + x + 6$;
d) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$;
e) $2x^3 - 3x^2 - 8x + 12$;
f) $x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$.

17.12. Scomponi in fattori i seguenti polinomi utilizzando il teorema di Ruffini.

a) $x^3 + 2x^2 - 2x + 3$;
b) $x^3 + x^2 - 5x + 3$;
c) $2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$;
d) $3x^3 + 5x^2 - 16x - 12$;
e) $2x^3 + 5x^2 + 5x + 3$;
f) $2x^3 - 13x^2 + 24x - 9$;
g) $6x^3 - 11x^2 - 3x + 2$;
h) $4x^4 - 4x^3 - 25x^2 + x + 6$.

17.13 (*). Scomponi in fattori i seguenti polinomi utilizzando il teorema di Ruffini.

a) $x^3 - 9x - 9 + x^2$;
b) $m^3 + 2m^2 - m - 2$;
c) $a^3 + a^2 - 4a - 4$;
d) $3a^2 + a - 2$;
e) $6a^3 - a^2 - 19a - 6$;
f) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$;
g) $3t^3 - t^2 - 12t + 4$;
h) $3x^4 + x^3 - 29x^2 - 17x + 42$;
i) $y^4 + y^3 - 3y^2 - 4y - 4$;
j) $t^4 - 8t^2 - 24t - 32$.

17.14 (*). Scomponi in fattori i seguenti polinomi utilizzando il teorema di Ruffini.

a) $2x^5 + 16x^4 + 25x^3 - 34x^2 - 27x + 90$;
b) $x^5 - x^4 - 4x^3 - 5x^2 - 9x + 18$;
c) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$;
d) $a^5 + 3a^4 - 2a^3 - 9a^2 - 11a - 6$;
e) $2x^5 + 16x^4 + 19x^3 - 94x^2 - 213x - 90$;
f) $6x^2 - 7x + 2$;
g) $3x^3 + x^2 + x - 2$;
h) $2x^3 + x^2 + 2x + 1$;
i) $3x^3 + 9x - x^2 - 3$;
j) $1 + 5x + 6x^2 + 4x^3 + 8x^4$.

17.15 (*). Scomponi in fattori i seguenti polinomi utilizzando il teorema di Ruffini.

a) $a^6 + 6a^4 + 11a^2 + 6$. *Suggerimento*: sostituisci $a^2 = x$;
b) $2x^{2n} + x^n - 3$. *Suggerimento*: $x^n = a$;
c) $x^3 - ax^2 - 2ax + 2a^2$ *Suggerimento*: cerca le radici tra i monomi divisori di $2a^2$.

17.3 - Somma e differenza di due cubi

17.16. Scomponi in fattori tenendo presente la somma e la differenza di cubi.

a) $x^3 - 1$;
b) $27 - x^3$;
c) $x^3 + 1$;
d) $x^3 + 8$;
e) $64a^3 - 8b^3$;
f) $8x^3 - 27y^3$;
g) $0,001^3 - x^3$;
h) $10^{-3}x^3 - 10^3y^3$;
i) $x^6 - y^6$;
j) $\frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{27}b^3$.

17.17. Scomponi in fattori tenendo presente la somma e la differenza di cubi.

a) $27x^3 - 8y^3$;
b) $a^3b^3 - 1$;
c) $a^9 - 1$;
d) $a^6 - 1$;
e) $\frac{27}{8}x^3 - 8$;
f) $a^3 - 125$;
g) $0,064x^3 + \frac{1}{27}y^3$;
h) $\frac{1}{8}a^3 - \frac{1}{27}t^3$;
i) $x^6 - y^3$;
j) $x^9 + 27y^3$.

17.18. Scomponi in fattori tenendo presente la somma e la differenza di cubi.

a) $8x^{12} - 1$;
b) $a^{300} + 1$;
c) $5x^4y^3 + \frac{625}{8}x$;
d) $a^{3n} - 8b^3$;
e) $a^{3n+3} + 1$;
f) $\frac{5}{8}a^4 - \frac{5}{27}ab^3$.

17.5.2 Esercizi riepilogativi

17.19 (*). Scomponi in fattori.

a) $(x+1)^2 - (y-1)^2$;
b) $5x^4y^2 + 5x^2y + \frac{5}{4}$;
c) $(y-1)^2 - 2y + 2$;
d) $4 - (y-1)^2$;
e) $4x^2 - xy - 4x + y$;
f) $0,\overline{3}a^2 - \frac{1}{3}b^2$;
g) $3x + k + 3x^2 + kx$;
h) $x^3 + 3x - 4x^2$;
i) $4x^2 - 7x - 2$;
j) $6x^2 - 24xy + 24y^2$.

17.20 (*). Scomponi in fattori.

a) $x^2 - (2+a)x + 2a$;
b) $2x^2 + 5x - 12$;
c) $\frac{1}{16}a^2 + 4b^4 - ab^2$;
d) $81a - 16a^3b^2$;
e) $a^2 - 10a - 75$;
f) $ax + bx - 3ay - 3by$;
g) $x^5 + x^3 + x^2 + 1$;
h) $0,09x^4y^5 - 0,04y$;
i) $-a^2x - 2abx - b^2x + 5a^2 + 10ab + 5b^2$;
j) $\frac{1}{9}x^2 - 0,25b^2$.

17.21 (*). Scomponi in fattori.

a) $8a^3 - \frac{1}{8}b^3$;
b) $4a^3 + 8a^2 - a - 2$;
c) $x^3 - x^4 + 8 - 8x$;
d) $4xy + 4xz - 3ya - 3za - yh - zh$;
e) $x^6 - 81x^2$;
f) $54a^3b - 2b^4$;
g) $-12xyz + 9ya + 6x^3a - 8x^4z$;
h) $y^2 + ay - 6a^2$;
i) $2x^3 + 4x - 3x^2 - 6$;
j) $(x^2 - 7x + 10)^2 - x^2 + 10x - 25$.

17.22 (*). Scomponi in fattori.

a) $\dfrac{4}{9}a^2 - b^2 + \dfrac{2}{3}a + b$;
b) $x^2 - 6x + 9 - (y^2 - 2y + 1)$;
c) $16a^4x^2 - 8a^2b^2x^2 + b^4x^2$;
d) $4(x-1)^2 - 4y(x-1) + y^2$;
e) $4a^4b - 4a^3b^2 + 6a^3b^3 - 6a^2b^4$;
f) $8x^3 - 14x^2 + 7x - 1$;
g) $x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 24x$;
h) $81a^4 - 64a^2b^2$;
i) $4x^3 + 8x^2 + x - 3$;
j) $2a^4b^3c - 8a^2bc^5$.

17.23 (*). Scomponi in fattori.

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2$;
b) $20x^3 - 45x$;
c) $18p^3q^2x - 2pq^4x + 18p^3q^2y - 2pq^4y$;
d) $20a^6 - 16a^3c - 25a^4b + 20abc$;
e) $2a^7 - 6a^4x^2 + 6a^4b^2 - 18ab^2x^2$;
f) $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$;
g) $3x^5 + 12x^4 - 21x^3 - 66x^2 + 72x$;
h) $32a^3x^2y - 48a^3xy^2 + 4b^3x^2y - 6b^3xy^2$;
i) $x^5 + 3x^4 - xy^4 - 3y^4$;
j) $48a^5bx + 16a^5by - 6a^2b^4x - 2a^2b^4y$.

17.24 (*). Scomponi in fattori.

a) $x^2(x^4 - 18x^2 + 81) - x^6 + 729$;
b) $x^5 - 2x^2 - x + 2$;
c) $x^8 - y^8 - 2x^6y^2 + 2x^2y^6$;
d) $16ab - 81a^5b^9$;
e) $6x^7 + 2x^6 - 16x^5 + 8x^4$;
f) $x^4 - 4x^2 - 45$;
g) $-3a^7x^2 + 9a^5x^4 - 9a^3x^6 + 3ax^8$;
h) $x^3 - 13x^2 + 35x + 49$;
i) $4ab^3c^2 + 20ab^3 - 3abc^2 - 15ab$;
j) $6a^6b^3 - 12a^4b^5 + 6a^2b^7$.

17.25 (*). Scomponi in fattori.

a) $y^3 - 5y^2 - 24y$;
b) $x^2 + 4xy - 6x + 4y^2 - 12y + 9$;
c) $2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 2$;
d) $x^2 - y^2 + 2ay - a^2$;
e) $(3-a)^2 + (5+a)\cdot(a-3)$;
f) $3x^3 - x - 1 + 3x^2$;
g) $x^3y^2 - x^2y^3 + \dfrac{1}{4}xy^4$;
h) $-27x^6 + 9x^5 - x^4 + \dfrac{x^3}{27}$;
i) $4x^2 - 9y^2 - 6yz^2 - z^4$;
j) $\dfrac{1}{8}a^4b^2 - \dfrac{3}{4}a^3b^3 + \frac{3}{2}a^2b^4 - ab^5$.

17.26 (*). Scomponi in fattori.

a) $a^2 + 4ab + 4b^2 - x^2 + 2xy - y^2$;
b) $a^4b - 2a^3b^2 + 4a^3bc + a^2b^3 - 4a^2b^2c + 4a^2bc^2$;
c) $3a^4 - 3a^3x + a^2x^2 - \dfrac{1}{9}ax^3$;

d) $a^3x + 4a^2x + 4ax$;
e) $a^3b^5 - \frac{2}{3}a^2b^6 + \frac{1}{9}ab^7$;
f) $a^2 - ab - 9a + 3b + 18$;
g) $8ab^2 - 2a^3$;
h) $a^4 - 6a^3 + 3a^2 + 18a + 9 - 1$;
i) $a^3 + 3a^2b + a^2 + 3ab^2 + 2ab + b^3 + b^2$;
j) $\frac{x^7}{3} + x^5 + x^3 + \frac{x}{3}$.

17.27 (*). Scomponi in fattori.

a) $\frac{a^2}{4} + 2ab - 16b^4 + 4b^2$;
b) $5a^4x^3 - 40a^4y^3 - 45a^2b^2x^3 + 360a^2b^2y^3$;
c) $-24a^4b^2x^2 - 72a^4b^2y^2 - 3ab^5x^2 - 9ab^5y^2$;
d) $2ax^4y - 6bx^4y - 2axy^4 + 6bxy^4$;
e) $640a^3x^2y - 960a^3xy^2 + 10b^3x^2y - 15b^3xy^2$;
f) $-4x - 3 - 2(x+1)(16x^2 + 9 + 24x)$;
g) $(x-2) + 3(x^2 - 4x + 4) - (x+1)(x-2)^2$;
h) $(x-1)^2 - (x+2)(x^2 - 2x + 1) - 2(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$;
i) $(3x+6) - 5(x^2 + 4x + 4)^2$;
j) $(y-x)^2(3x+2) - 2(x-y)^3 - 2x^2 + 2y^2$.

17.28 (*). Scomponi in fattori.

a) $(-x^2 + 6x - 9)^2 - (4x - 12)(x+1)$;
b) $x + 1 - 2(x^2 + 2x + 1) + (3x^2 + x^3 + 3x + 1)(x-2)$;
c) $36x^2 + 24xy - 48x + 4y^2 - 16y + 15$;
d) $x^5 - 2 - x + 2x^4$;
e) $6a^3 + 11a^2 + 3a$;
f) $3a^4 - 24ax^3$;
g) $x^2 - 2x + 1$;
h) $x^2 + y^2 + z^4 - 2xy + 2xz^2 - 2yz^2$;
i) $a^6 + b^9 + 3a^4b^3 + 3a^2b^6$;
j) $a^3 - 6a^2 + 12a - 8$.

17.29. Scomponi in fattori.

a) $a^2 + b^2 - 1 - 2ab$;
b) $a^4 + 2b - 1 - b^2$;
c) $-8a^2b + 24ab^2 - 18b^3$;
d) $6a^5 - 24ab^4$;
e) $a^4 + b^4 - 2a^2b^2$;
f) $x^6 - 9x^4y + 27x^2y^2 - 27y^3$;
g) $x^2 - 12x + 32$;
h) $x^2 - 8x + 15$;
i) $x^4 - 7x^2 - 60$;
j) $x^3 - 5x^2 + 6x$.

17.30. Scomponi in fattori.

a) $4a^2 - 9 - 4b^2 + 12b$;
b) $x^5 - 13x^3 + 36x$;
c) $4a^2 + 4a + 1$;
d) $4x^2y^2 - 4xy + 1$;
e) $x^3 + 1$;
f) $a^2 + 6a + 9$;
g) $12xy - 16y^2$;
h) $2x^3 - 16$;
i) $2x^2 + 4x + 8$;
j) $ax^2 - ay^2$.

17.31. Scomponi in fattori.

a) $a^3 - 8 + 12a - 6a^2$;
b) $7t^2 - 28$;
c) $2x^2 + 8 + 8x$;
d) $25 + 9x^2 + 30x$;
e) $z^8 - 2z^4 + 1$;
f) $3k^4 + k^6 + 1 + 3k^2$;
g) $3x^5 - 27xy^4$;
h) $25y^4 - 10y^2 + 1$;
i) $8a^4b - 8a^3b^2 + 12a^3b^3 - 12a^2b^4$;
j) $3a^3x + 3a^3y - 3abx - 3aby$.

17.32. Scomponi in fattori.

a) $81a^6b^3 - a^2b^3$;
b) $6abx - 3x + 2aby - y$;
c) $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$;
d) $8a^7b - 8a^3b^3 + 12a^6b - 12a^2b^3$;
e) $4a^2x - 4a^2y^2 - 4ab^2x + 4ab^2y^2$;
f) $a^2 + 12a + 36$;
g) $x^8 - y^8 - 2x^6y^2 + 2x^2y^6$;
h) $5x^4 - 5x^2y^4$;
i) $(2x-1)^3 - (3-6x)^2$;
j) $x^4 - 2x^3 + 6x^2y + x^2 - 6xy + 9y^2$.

17.33. Scomponi in fattori.

a) $x^2 + 10xy + 25y^2$;
b) $27a^6 - 54a^4b + 36a^2b^2 - 8b^3$;
c) $64a^9 - 48a^6b^2 + 12a^3b^4 - b^6$;
d) $4a^2x^2 - 4b^2x^2 - 9a^2y^2 + 9b^2y^2$;
e) $x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8$;
f) $a^7 - a^4b^2 - 4a^3b^2 + 4b^4$;
g) $x^4 + 6x^2 - 40$;
h) $x^5 - 13x^3 + 12x^2$;
i) $32ab - 2a^5b^5$;
j) $24x^4y + 36x^3y^3 + 18x^2y^5 + 3xy^7$.

17.34. Scomponi in fattori.

a) $\frac{4}{9}a^4 + \frac{4}{9}a^2b + \frac{b^2}{9}$;
b) $-2a^{10} + 12a^7b - 24a^4b^2 + 16ab^3$;
c) $x^3 - 7x^2 - 25x + 175$;
d) $2ab^6 + 54a^4 + 18a^2b^4 + 54a^3b^2$;
e) $128a^3 - 200a$;
f) $\frac{4}{25} + \frac{4}{5}xy + x^2y^2$;
g) $x4 - 6x^2 - 27$;
h) $x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x$;
i) $8a^5b^2 - 64a^2b^5$;
j) $4a^2b^5 - 81b$.

17.35. Scomponi in fattori.

a) $ax + bx - 3ay - 3by$;
b) $2ax^2 + 8ay^2 + 8axy$;
c) $81a^4 - b^4$;
d) $3a^5b^3 + 24a^2b^9$;
e) $4x^2 + 2xy + \frac{1}{4}y^2$;
f) $x^2 - 3a^3 + ax - 3a^2x$;
g) $x^2 - 12x + 133$;
h) $3x^5 - 27xy^4$;

i) $25y^4 - 10y^2 + 1$;

j) $\frac{16}{27}x^3 + \frac{8}{3}x^2y + 4xy^2 + 2y^3$.

17.36. Scomponi in fattori.

a) $1 - 9x + 27x^2 - 27x^3$;
b) $6x^3y - 12x^2y^2 + 6xy^3$;
c) $x^4 + 3x^2 - 28$;
d) $2x^3 - 3x^2 - 5x + 6$;
e) $3x^4y^3 + 9x^4 - 9xy^3 - 27x$;
f) $81a^6 - 18a^4b^2 + a^2b^2$;
g) $125 + 75y + 15y^2 + y^3$;
h) $4a^2x^2 - 16a^2y^2 - b^2x^2 + 4b^2y^2$;
i) $x^4 + 2x^2 - 24$;
j) $5x^3 - 17x^2 + 16x - 4$.

17.37. Scomponi in fattori.

a) $27a^6 - 54a^4b + 36a^2b^2 - 8b^3$;
b) $18a^4b - 2b^3$;
c) $x^4 - 9x^2 + 20$;
d) $3a^4b^3 - 6a^3b^3 - 9a^2b^3$;
e) $\frac{1}{8}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{27}$;
f) $4a^5b^2 + 32a^2b^5$;
g) $32a - 50ab^2$;
h) $5x^4y^2 + 5x^4 - 5xy^4 - 5xy^2$;
i) $4y^2 - 12y + 9$;
j) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}ax + \frac{1}{9}a^2$.

17.38. Scomponi in fattori.

a) $\frac{8}{27}x^3 - 2x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{27}{8}$;
b) $\frac{1}{9}a^6 + 9a^2 - 2a^4$;
c) $5x^4 - 5x^3y^2 - 5x^2y + 5xy^3$;
d) $-8a^3 + 12a^2x^2 - 6ax^4 + x^6$;
e) $x^2 + 14x - 32$;
f) $\frac{4}{49}x^2y^2 - \frac{4}{7}xyz + z^2$;
g) $1 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{16}x^6$;
h) $2b^6c - 8c^3$;
i) $16a^4x^2 - 8a^2b^2x^2 + b^4x^2$;
j) $4x^3 + 7x^2 - 14x + 3$.

17.39. Scomponi in fattori.

a) $x^4 - 4x^2 - 45$;
b) $3x^3 + x^2 - 8x + 4$;
c) $4a^2 - 9 - 4b^2 + 12b$;
d) $x^3 + 3x^2 - 6x - 8$;
e) $2ax^2 + 8ay^2 + 8axy$;
f) $x^6 - 81x^2 + x - 3$;
g) $x^6 - y^6 + x^3 + y^3$;
h) $x^2 - 3a^3 + ax - 3a^2x$;
i) $50a^4b^3 - 2b^3$;
j) $16x^3 - 72x^2 + 108x - 54$.

17.40. Scomponi in fattori.

a) $625a^4 - b^4$;
b) $12ax^2 + 12axy + 3ay^2$;
c) $x^4 + 5x^2 - 36$;
d) $-4x^7 + 16x^6 + 28x^5 - 88x^4 - 96x^3$;
e) $\frac{1}{9}x^6 - 2x^4 + 9x^2$;
f) $a^4 + 4a^2 - 32$;
g) $4x^3 + 7x^2 - 14x + 3$;
h) $2ax^4y - 8bx^4y - 2axy^4 + 8bxy^4$;
i) $36ab - 49a^3b^3$;
j) $\frac{4}{25}a^4 + \frac{25}{9}b^2 - \frac{4}{3}a^2b$.

17.41. Scomponi in fattori.

a) $t^5 - z^5$;
b) $3x^2 + 6x + 6$;
c) $t^6 - 2t^3 + 1$;
d) $tx + x^2 + y^2 + ty + 2xy$;
e) $12m^3 + 9m^5 - 3m^7$;
f) $a^2b - 25b + a^2 - 25$;
g) $2ab - b^2 + 3 \cdot (b - 2a)^2$;
h) $x^6 - y^6$;
i) $3k^3 - k^2 + k + 5$;
j) $y^6 + y^3 - 2$.

17.42. Scomponi in fattori.

a) $a^8 - 1$;
b) $32a^4b^3 - 2b^3$;
c) $x^6 - 8a^3 + 12a^2x^2 - 6ax^4$;
d) $x^2 - 3a^3 + ax - 3a^2x$;
e) $9y^2 + 6y + 1$;
f) $9a^3 - 9$;
g) $a^3 + 4a - 2a^2 - 3$;
h) $3a + 2a^3 - 7a^2$;
i) $50a^3b^2 - 8a^5$;
j) $20ab^2c + 8abc + 2abc^2 + 2a^2bc^2 + 2a^2b^2c$.

17.43. Scomponi in fattori.

a) $ab^4 - \frac{1}{3}a^2b^2 - b^6 + \frac{1}{27}a^3$;
b) $2xy + 16 - x^2 - y^2$;
c) $(a+2)\left(a^3 - 8\right) + \left(a^3 + 8\right)(a-2)$;
d) $(x-y)^2 + 2(x-y)(3a+b) + (3a+b)^2$;
e) $x^6 - 27 + 26x^3$;
f) $4y^2 - 12x^2y + 25x^2y^2 - 20xy^2 + 9x^4 + 30x^3y$;
g) $\frac{1}{8} - 8x^3y^3 + 6x^2y^2 + \frac{3}{2}xy$;
h) $4xy(a - 3b) + 2xy^2a - 6xy^2b - 2x^2y(3b - a)$;
i) $x^2 - 4x - 5xy + x^2y + 6y + 4$;
j) $x^6 - 8 - 7x^3$.

17.44 (*). Scomponi in fattori.

a) $x^{a+1} - 5x^a - 4x^{a-2}$;
b) $x^{n^2-1} + 2x^{n^2+2} + x^{n^2}(x-3)$;
c) $x^{4n+1} - x^{3n+1}y^n + 2x^ny^{4n} - 2y^{5n}$;
d) $x^{n+2} + 3x^ny^{2n} - x^2y^3 - 3y^{3+2n}$;
e) $x^ay^b + x^a - y^b - 1$;
f) $x^{2n+1}y^{h+1} - 2x^{2n+1} - y^{h+1} + 2$;
g) $x^{a+4} - 3x^{a+2}y^a + x^2y^2 - 3y^{2+a}$.

17.5.3 Risposte

17.9. a) $(x+1)(2x-5)$, b) $(y+z)(3y-5)$, e) $(x-3)(2x+3)$.

17.13. a) $(x+1)(x+3)(x-3)$, b) $(m-1)(m+1)(m+2)$, c) $(a+1)(a-2)(a+2)$, d) $(a+1)(3a-2)$, e) $(a-2)(3a+1)(2a+3)$, f) $(x-1)(x-2)^2$, g) $(t+2)(t-2)(3t-1)$, h) $(x-3)(x-1)(x+2)(3x+7)$, i) $(y+2)(y-2)\left(y^2+y+1\right)$, j) $(t+2)(t-4)\left(t^2+2t+4\right)$.

17.14. a) $(x+2)(x+3)(x+5)\left(2x^2-4x+3\right)$, b) $(x+2)(x-3)(x-1)\left(x^2+x+3\right)$, c) $(x-1)^2(x+2)^2$, d) $(a+1)(a-2)(a+3)(a^2+a+1)$, e) $(x+2)(x+3)(x+5)(2x^2-4x-3)$, f) $(2x-1)(3x-2)$, g) $(3x-2)\left(x^2+x+1\right)$, h) $(2x+1)\left(x^2+1\right)$, i) $(3x-1)\left(x^2+3\right)$.

17.15. a) $(a^2+1)(a^2+2)(a^2+3)$, b) $(x^n-1)(2x^n+3)$, c) $(x-a)\left(x^2-2a\right)$.

17.19. a) $(x+y)(x-y+2)$, b) $5\left(\frac{1}{2}+x^2y\right)^2$, c) $(y-1)(y-3)$, d) $(y+1)(3-y)$, e) $(x-1)(4x-y)$, f) $\frac{1}{3}(a+b)(a-b)$, g) $(x+1)(3x+k)$, h) $x(x-1)(x-3)$, i) $(x-2)(4x+1)$, j) $6(x-2y)^2$.

17.20. a) $(x-2)(x-a)$, b) $(x+4)(2x-3)$, c) $\left(\frac{1}{4}a-2b^2\right)^2$, d) $a(9-4ab)(9+4ab)$, e) $(a-15)(a+5)$, f) $(a+b)(x-3y)$, g) $(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^2-x+1\right)$, h) $\frac{1}{100}y\left(3x^2y^2+2\right)\left(3x^2y^2-2\right)$, i) $(a+b)^2(5-x)$, j) $\frac{1}{36}(2x+3b)(2x-3b)$.

17.21. a) $\left(2a-\frac{1}{2}b\right)\left(4a^2+ab+\frac{1}{4}b^2\right)$, b) $(a+2)(2a+1)(2a-1)$, c) $(1-x)(x+2)\left(x^2-2x+4\right)$, d) $(y+z)(4x-3a-h)$, e) $x^2(x+3)(x-3)\left(x^2+9\right)$, f) $2b(3a-b)\left(9a^2+3ab+b^2\right)$, g) $(3a-4xz)\left(2x^3+3y\right)$, h) $(y-2a)(y+3a)$, i) $\left(x^2+2\right)(2x-3)$, j) $(x-5)^2(x-1)(x-3)$.

17.22. a) $\left(\frac{2}{3}a+b\right)\left(\frac{2}{3}a-b+1\right)$, b) $(x-4+y)(x-2-y)$, c) $x^2(2a-b)^2(2a+b)^2$, d) $(2x-2-y)^2$, e) $2a^2b(2a+3b^2)(a-b)$, f) $(x-1)(2x-1)(4x-1)$, g) $x(x-2)(x+3)(x-4)$, h) $a^2(9a-8b)(9a+8b)$, i) $(2x+3)(2x-1)(x+1)$, j) $2a^2bc(ab-2c^2)(ab+2c^2)$.

17.23. a) $(x-1)(x+2)(x+1)$, b) $5x(2x-3)(2x+3)$, c) $2pq^2(3p-q)(3p+q)(x+y)$, d) $a(4a^2-5b)(5a^3-4c)$, e) $2a(a^3+3b^2)(a^3-3x^2)$, f) $(x-2y)^3$, g) $3x(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)$, h) $2xy(2a+b)(2x-3y)(4a^2-2ab+b^2)$, i) $(x+3)(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$, j) $2a^2b(2a-b)(3x+y)(4a^2+2ab+b^2)$.

17.24. a) $-9(x+3)(x-3)(2x^2+9)$, b) $(x+1)(x-1)^2(x^2+x+2)$, c) $(x-y)^3(x+y)^3(x^2+y^2)$, d) $ab(2-3ab^2)(2+3ab^2)(4+9a^2b^4)$, e) $2x^4(x-1)(x+2)(3x-2)$, f) $(x-3)(x+3)(x^2+5)$, g) $3ax^2(x-a)^3(x+a)^3$, h) $(x+1)(x-7)^2$, i) $ab(4b^2-3)(c^2+5)$, j) $6a^2b^3(a-b)^2(a+b)^2$.

17.25. a) $y(y+3)(y-8)$, b) $(x+2y-3)^2$, c) $2(x^2+1)(x-1)^2$, d) $(x-a+y)(x+a-y)$, e) $2(a-3)(a+1)$, f) $(3x^2-1)(x+1)$, g) $xy^2(x-\frac{1}{2}y)^2$, h) $x^3\left(\frac{1}{3}-3x\right)^3$, i) $(2x+3y+z^2)(2x-3y-z^2)$, j) $\frac{1}{8}ab^2(a-2b)^3$.

17.26. a) $(a+2b+x-y)(a+2b-x+y)$, b) $a^2b(a-b+2c)^2$, c) $3a\left(a-\frac{1}{3}x\right)^3$, d) $ax(a+2)^2$, e) $ab^5\left(ab-\frac{1}{3}b^2\right)^2$, f) $(a-3)(a-b-6)$, g) $-2a(a+2b)(a-2b)$, h) $(a-4)(a+1)(a^2-3a-2)$, i) $(a+b)^2(a+b+1)$, j) $\frac{1}{3}x(x^2+1)^3$.

17.27. a) $\left(\frac{1}{2}a+2b-4b^2\right)\left(\frac{1}{2}a+2b+4b^2\right)$, b) $5a^2(a-3b)(a+3b)(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$, c) $-3ab^2(2a+b)(x^2+3y^2)(4a^2-2ab+b^2)$, d) $2xy(a-3b)(x-y)(x^2+xy+y^2)$, e) $5xy(4a+b)(2x-3y)(16a^2-4ab+b^2)$, f) $-(4x+3)(8x^2+14x+7)$, g) $(x-1)(x-2)(3-x)$, h) $(x-1)^2(1-3x)$, i) $-(2+x)(5x^3+30x^2+60x+37)$, j) $(x-y)(x^2+xy-4y-2y^2)$.

17.28. a) $(x-3)(x^3-9x^2+23x-31)$, b) $(x+1)(x^3-5x-3)$, c) $(6x+2y-3)(6x+2y-5)$, d) $(x+2)\left(x^2+1\right)(x+1)(x-1)$, e) $a(3a+1)(2a+3)$, f) $3a(a-2x)\left(a^2+2ax+4x^2\right)$.

17.45. a) $x^{a-2}(x^3-5x^2-4)$, b) $x^{n^2-1}(2x-1)(x^2+x-1)$, c) $(x^n-y^n)(x^{3n+1}+2y^{4n})$, d) $(x^n-y^3)(x^2+3y^{2n})$, e) $(x^a-1)(y^b+1)$, f) $(x^{2n+1}-1)(y^{1+h}-2)$, g) $(x^{2+a}+y^2)(x^2-3y^a)$.