

Polinomi 10

10.1 Definizioni fondamentali


Definizione 10.1. Un polinomio è un'espressione algebrica letterale che consiste in una somma algebrica di monomi.

Esempio 10.1. Sono polinomi: $6a + 2b$, $5a^2b + 3b^2$, $6x^2 - 5y^2x - 1$, $7ab - 2a^2b^3 + 4$.

Se tra i termini di un polinomio non sono presenti monomi simili, il polinomio si dice in *forma normale* o *ridotto*; se al contrario si presentano dei termini simili, possiamo eseguire la riduzione del polinomio sommando i termini simili. Tutti i polinomi sono quindi riducibili in forma normale.

Un polinomio in forma normale può presentare tra i suoi termini un monomio di grado 0 che viene comunemente chiamato *termine noto*.

Esempio 10.2. Il polinomio $3ab + b^2 - 2ba + 4 - 6ab^2 + 5b^2$ ridotto in forma normale diventa $ab + 6b^2 - 6ab^2 + 4$. Il termine noto è 4.

 *Esercizio proposto:* [10.1](#)

Un polinomio può anche essere costituito da un unico termine, pertanto un monomio è anche un polinomio. Un polinomio che, ridotto in forma normale, è somma algebrica di due, tre, quattro monomi non nulli si dice rispettivamente binomio, trinomio, quadrinomio.

Esempio 10.3. Binomi, trinomi, quadrinomi.

- a) $xy - 5x^3y^2$ è un binomio;
- b) $3ab^2 + a - 4a^3$ è un trinomio;
- c) $a - 6ab^2 + 3ab - 5b$ è un quadrinomio.

Definizione 10.2. Due polinomi, ridotti in forma normale, formati da termini uguali si dicono *uguali*, più precisamente vale il *principio di identità dei polinomi*: due polinomi $p(x)$ e $q(x)$ sono uguali se, e solo se, sono uguali i coefficienti dei termini simili.

Se due polinomi sono invece formati da termini opposti, allora si dicono polinomi *opposti*.

Definiamo, inoltre, un polinomio *nullo* quando i suoi termini sono a coefficienti nulli. Il polinomio nullo coincide con il monomio nullo e quindi con il numero 0.


Esempio 10.4. Polinomi uguali, opposti, nulli.

- a) I polinomi $\frac{1}{3}xy + 2y^3 - x$; $2y^3 - x + \frac{1}{3}xy$ sono uguali;
- b) i polinomi $6ab - 3a + 2b$; $3a - 2b - 6ab$ sono opposti;
- c) il polinomio $7ab + 4a^2 - ab + b^3 - 4a^2 - 2b^3 - 6ab + b^3$ è un polinomio nullo, infatti riducendolo in forma normale otteniamo il monomio nullo 0.

Definizione 10.3. Il *grado complessivo* (o semplicemente *grado*) di un polinomio è il massimo dei gradi complessivi dei suoi termini. Si chiama, invece, *grado di un polinomio rispetto ad una data lettera* l'esponente maggiore con cui quella lettera compare nel polinomio, dopo che è stato ridotto a forma normale.


Esempio 10.5. Grado di un polinomio.

- ➔ Il polinomio $2ab + 3 - 4a^2b^2$ ha grado complessivo 4 perché il monomio con grado massimo è $-4a^2b^2$, che è un monomio di quarto grado;
- ➔ il grado del polinomio $a^3 + 3b^2a - 4ba^2$ rispetto alla lettera a è 3 perché l'esponente più grande con cui tale lettera compare è 3.

 *Esercizio proposto:* 10.2

Definizione 10.4. Un polinomio si dice *omogeneo* se tutti i termini che lo compongono sono dello stesso grado.

Esempio 10.6. Il polinomio $a^3 - b^3 + ab^2$ è un polinomio omogeneo di grado 3.

 *Esercizio proposto:* 10.3

Definizione 10.5. Un polinomio si dice *ordinato secondo le potenze decrescenti (crescenti) di una lettera*, quando i suoi termini sono ordinati in maniera tale che gli esponenti di tale lettera decrescono (crescono), leggendo il polinomio da sinistra verso destra.

Esempio 10.7. Il polinomio $\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2y - 2xy^2 + \frac{3}{8}y^3$ è ordinato secondo le potenze decrescenti della lettera x , e secondo le potenze crescenti della lettera y .

Definizione 10.6. Un polinomio di grado n rispetto ad una data lettera si dice *completo* se contiene tutte le potenze di tale lettera di grado inferiore a n , compreso il termine noto.

Esempio 10.8. Il polinomio $x^4 - 3x^3 + 5x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{5}$ è completo di grado 4 e inoltre risulta ordinato rispetto alla lettera x . Il termine noto è $-\frac{3}{5}$.

□ **Osservazione** Ogni polinomio può essere scritto sotto forma ordinata e completa: l'ordinamento si può effettuare in virtù della proprietà commutativa della somma, mentre la completezza si può ottenere mediante l'introduzione dei termini dei gradi mancanti con coefficiente uguale a 0.

Per esempio, il polinomio $x^4 - x + 1 + 4x^2$ può essere scritto sotto forma ordinata e completa come $x^4 + 0x^3 + 4x^2 - x + 1$.

✎ Esercizi proposti: [10.4](#), [10.5](#), [10.6](#), [10.7](#), [10.8](#), [10.9](#), [10.10](#)

10.2 Somma algebrica di polinomi

I polinomi sono somme algebriche di monomi e quindi le espressioni letterali che si ottengono dalla somma o differenza di polinomi sono ancora somme algebriche di monomi.

Definizione 10.7. La somma di due o più polinomi è un polinomio avente per termini tutti i termini dei polinomi addendi.

La differenza di polinomi si può trasformare in somma del primo polinomio con l'opposto del secondo polinomio.

Esempio 10.9. Differenza di polinomi.

$$\begin{aligned} 3a^2 + 2b - \frac{1}{2}ab - \left(2a^2 + ab - \frac{1}{2}b\right) &= 3a^2 + 2b - \frac{1}{2}ab - 2a^2 - ab + \frac{1}{2}b \\ &= a^2 + \frac{-1-2}{2}ab + \frac{4+1}{2}b \\ &= a^2 - \frac{3}{2}ab + \frac{5}{2}b. \end{aligned}$$

✎ Esercizi proposti: [10.11](#), [10.12](#), [10.13](#)


10.3 Prodotto di un polinomio per un monomio

Per eseguire il prodotto tra il monomio $3x^2y$ e il polinomio $2xy + 5x^3y^2$; indichiamo il prodotto con $(3x^2y) \cdot (2xy + 5x^3y^2)$. Applichiamo la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione: $(3x^2y) \cdot (2xy + 5x^3y^2) = 6x^3y^2 + 15x^5y^3$.

□ **Osservazione** Il prodotto di un monomio per un polinomio è un polinomio avente come termini i prodotti del monomio per ciascun termine del polinomio.

Esempio 10.10. Prodotto di un monomio per un polinomio.

$$\begin{aligned} (3x^3y) \cdot \left(\frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{4}{3}xy^3 \right) &= (3x^3y) \cdot \left(\frac{1}{2}x^2y^2 \right) + (3x^3y) \cdot \left(\frac{4}{3}xy^3 \right) \\ &= \frac{3}{2}x^5y^3 + 4x^4y^4. \end{aligned}$$

 Esercizi proposti: [10.14](#), [10.15](#)

10.4 Quoziente tra un polinomio e un monomio

Il quoziente tra un polinomio e un monomio si calcola applicando la proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione.


Definizione 10.8. Si dice che un *polinomio* è *divisibile per un monomio*, non nullo, se esiste un polinomio che, moltiplicato per il monomio, dà come risultato il polinomio dividendo; il monomio si dice *divisore* del polinomio.

Esempio 10.11. Quoziente tra un polinomio e un monomio.

$$(6x^5y + 9x^3y^2) : (3x^2y) = 2x^{(5-2)}y^{(1-1)} + 3x^{(3-2)}y^{(2-1)} = 2x^3 + 3xy.$$

Osservazione

- a) Poiché ogni monomio è divisibile per qualsiasi numero diverso da zero, allora anche ogni polinomio è divisibile per un qualsiasi numero diverso da zero;
- b) un polinomio è divisibile per un monomio, non nullo, se ogni fattore letterale del monomio divisore compare, con grado uguale o maggiore, in ogni monomio del polinomio dividendo;
- c) la divisione tra un polinomio e un qualsiasi monomio non nullo è sempre possibile, tuttavia il risultato è un polinomio solo nel caso in cui il monomio sia divisore di tutti i termini del polinomio;
- d) il quoziente tra un polinomio e un monomio suo divisore è un polinomio ottenuto dividendo ogni termine del polinomio per il monomio divisore.

 Esercizi proposti: [10.16](#), [10.17](#), [10.18](#)

10.5 Prodotto di polinomi

Il prodotto di due polinomi è il polinomio che si ottiene moltiplicando ogni termine del primo polinomio per ciascun termine del secondo polinomio.

Esempio 10.12. Prodotto di polinomi.

a) $(a^2b + 3a - 4ab) \left(\frac{1}{2}a^2b^2 - a + 3ab^2\right)$. Riducendo i termini simili:


$$\begin{aligned} (a^2b + 3a - 4ab) \left(\frac{1}{2}a^2b^2 - a + 3ab^2\right) &= \frac{1}{2}a^4b^3 - a^3b + \underline{3a^3b^3} + \frac{3}{2}a^3b^2 - 3a^2 \\ &\quad + 9a^2b^2 - \underline{2a^3b^3} + 4a^2b - 12a^2b^3 \\ &= \frac{1}{2}a^4b^3 - a^3b + a^3b^3 + \frac{3}{2}a^3b^2 - 3a^2 + 9a^2b^2 + 4a^2b - 12a^2b^3. \end{aligned}$$

b) $(x - y^2 - 3xy) \cdot (-2x^2y - 3y)$. Moltiplicando ogni termine del primo polinomio per ogni termine del secondo otteniamo.

$$(x - y^2 - 3xy) (-2x^2y - 3y) = -2x^3y + 3xy + 2x^2y^3 - 3y^3 + 6x^3y^2 + 9xy^2;$$

c) $\left(\frac{1}{2}x^3 - 2x^2\right) \left(\frac{3}{4}x + 1\right)$.

$$\left(\frac{1}{2}x^3 - 2x^2\right) \left(\frac{3}{4}x + 1\right) = \frac{3}{8}x^4 + \underline{\frac{1}{2}x^3} - \underline{\frac{3}{2}x^3} - 2x^2 = \frac{3}{8}x^4 - x^3 - 2x^2.$$

 Esercizio proposto: [10.19](#)

10.6 Esercizi

10.6.1 Esercizi dei singoli paragrafi

10.1 - Definizioni fondamentali

10.1. Riduci in forma normale il seguente polinomio:

$$5a^3 - 4ab - 1 + 2a^3 + 2ab - a - 3a^3.$$

Svolgimento: Evidenziamo i termini simili e sommiamoli tra di loro:

$$5a^3 - 4ab + 1 + 2a^3 + 2ab - a - 3a^3$$

in modo da ottenere ... Il termine noto è ...

10.2. Il grado di:

- $x^2y^2 - 3y^3 + 5yx - 6y^2x^3$ rispetto alla lettera y è ..., il grado complessivo è ..
- $5a^2 - b + 4ab$ rispetto alla lettera b è ..., il grado complessivo è

10.3. Stabilire quali dei seguenti polinomi sono omogenei:

- $x^3y + 2y^2x^2 - 4x^4$;
- $2x + 3 - xy$;
- $2x^3y^3 - y^4x^2 + 5x^6$.

10.4. Individuare quali dei seguenti polinomi sono ordinati rispetto alla lettera x con potenze crescenti:

- $2 - \frac{1}{2}x^2 + x$;
- $\frac{2}{3} - x + 3x^2 + 5x^3$;
- $3x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - x + \frac{7}{8}$.

10.5. Relativamente al polinomio $b^2 + a^4 + a^3 + a^2$:

→ Il grado massimo è Il grado rispetto alla lettera a è ... Rispetto alla lettera b è ...

- il polinomio è ordinato rispetto alla a ?
- è completo?
- è omogeneo?

10.6. Scrivere un polinomio di terzo grado nelle variabili a e b che sia omogeneo.

10.7. Scrivere un polinomio di quarto grado nelle variabili x e y che sia omogeneo e ordinato secondo le potenze decrescenti della seconda indeterminata.

10.8. Scrivere un polinomio di quinto grado nelle variabili r e s che sia omogeneo e ordinato secondo le potenze crescenti della prima indeterminata.

10.9. Scrivere un polinomio di quarto grado nelle variabili z e w che sia omogeneo e ordinato secondo le potenze crescenti della prima indeterminata e decrescenti della seconda.

10.10. Scrivere un polinomio di sesto grado nelle variabili x , y e z che sia completo e ordinato secondo le potenze decrescenti della seconda variabile.

10.11. Calcola il valore numerico dei polinomi per i valori a fianco indicati.

- $x^2 + x$ per $x = -1$;
- $2x^2 - 3x + 1$ per $x = 0$;
- $3x^2 - 2x - 1$ per $x = 2$;
- $3x^3 - 2x + x$ per $x = -2$;
- $\frac{3}{4}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{6}ab$ per $a = -\frac{1}{2}$, $b = 3$;
- $4x - 6y + \frac{1}{5}x^2$ per $x = -5$, $y = \frac{1}{2}$.

10.2 - Somma algebrica di polinomi

10.12. Calcolare la somma dei due polinomi: $2x^2 + 5 - 3y^2x$, $x^2 - xy + 2 - y^2x + y^3$.

Svolgimento: Indichiamo la somma $(2x^2 + 5 - 3y^2x) + (x^2 - xy + 2 - y^2x + y^3)$, eliminando le parentesi otteniamo il polinomio $2x^2 + 5 - 3y^2x + x^2 - xy + 2 - y^2x + y^3$, sommando i monomi simili otteniamo $3x^2 - 4xy - y^2x + y^3 + 7$.

10.13. Esegui le seguenti somme di polinomi.

- a) $a + b - b$;
- b) $a + b - 2b$;
- c) $a + b - (-2b)$;
- d) $a - (b - 2b)$;
- e) $2a + b + (3a + b)$;
- f) $2a + 2b + (2a + b) + 2a$;
- g) $2a + b - (-3a - b)$;
- h) $2a - 3b - (-3b - 2a)$;
- i) $(a + 1) - (a - 3)$.

10.14 (*). Esegui le seguenti somme di polinomi.

- a) $(2a^2 - 3b) + (4b + 3a^2) + (a^2 - 2b)$;
- b) $(3a^3 - 3b^2) + (6a^3 + b^2) + (a^3 - b^2)$;
- c) $\left(\frac{1}{5}x^3 - 5x^2 + \frac{1}{5}x - 1\right) - \left(3x^3 - \frac{7}{3}x^2 + \frac{1}{4}x - 1\right)$;
- d) $\left(\frac{1}{2} + 2a^2 + x\right) - \left(\frac{2}{5}a^2 + \frac{1}{2}ax\right) + \left[-\left(-\frac{3}{2} - 2ax + x^2\right) + \frac{1}{3}a^2\right] - \left(\frac{3}{2}ax + 2\right)$;
- e) $\left(\frac{3}{4}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{6}ab\right) - \left(\frac{9}{8}ab + \frac{1}{2}a^2 - 2b\right) + ab - \frac{3}{4}a$.

10.3 - Prodotto di un polinomio per un monomio

10.15. Esegui i seguenti prodotti di un monomio per un polinomio.

- | | | |
|--------------------------|----------------------------|---------------------------------|
| a) $(a + b)b$; | f) $(a^2 - a)a$; | k) $(a^2b - ab - 1)(a^2b^2)$; |
| b) $(a - b)b$; | g) $(a^2 - a)(-a)$; | l) $(a^2b - ab - 1)(ab)^2$; |
| c) $(a + b)(-b)$; | h) $(a^2 - a - 1)a^2$; | m) $ab(a^2b - ab - 1)ab$; |
| d) $(a - b + 51)b$; | i) $(a^2b - ab - 1)(ab)$; | n) $-2a(a^2 - a - 1)(-a^2)$; |
| e) $(-a - b - 51)(-b)$; | j) $(ab - ab - 1)(ab)$; | o) $(x^2a - ax + 2)(2x^2a^3)$. |

3

10.16. Esegui i seguenti prodotti di un monomio per un polinomio.

- a) $\frac{3}{4}x^2y \cdot \left(2xy + \frac{1}{3}x^3y^2\right)$;
- b) $\left(\frac{a^4}{4} + \frac{a^3}{8} + \frac{a^2}{2}\right)(2a^2)$;
- c) $\left(\frac{1}{2}a - 3 + a^2\right)\left(-\frac{1}{2}a\right)$;
- d) $\left(5x + 3xy + \frac{1}{2}y^2\right)(3x^2y)$;
- e) $\left(\frac{2}{3}xy^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}xy\right)(6xy)$;
- f) $-\frac{1}{3}y(6x^2y - 3xy)$;
- g) $-3xy^2\left(\frac{1}{3}x + 1\right)$;
- h) $\left(\frac{7}{3}b - b\right)\left(a - \frac{1}{2}b + 1\right)(3a - 2a)$.

10.4 - Quoziente tra un polinomio e un monomio**10.17.** Svolgi le seguenti divisioni tra polinomi e monomi.

a) $(2x^2y + 8xy^2) : (2xy);$

b) $(a^2 + a) : a;$

c) $(a^2 - a) : (-a);$

d) $\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}\right) : \frac{1}{2};$

e) $\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}\right) : 2;$

f) $(2a - 2) : \frac{1}{2};$

g) $\left(\frac{1}{2}a - \frac{a^2}{4}\right) : \frac{a}{2}.$

10.18. Svolgi le seguenti divisioni tra polinomi e monomi.

a) $(a^2 - a) : a;$

b) $(a^3 + a^2 - a) : a;$

c) $(8a^3 + 4a^2 - 2a) : 2a;$

d) $(a^3b^2 + a^2b - ab) : b;$

e) $(a^3b^2 - a^2b^3 - ab^4) : (-ab^2);$

f) $(a^3b^2 + a^2b - ab) : ab;$

g) $(16x^4 - 12x^3 + 24x^2) : (4x^2).$

h) $(-x^3 + 3x^2 - 10x + 5) : (-5);$

10.19. Svolgi le seguenti divisioni tra polinomi e monomi.

a) $[(-3a^2b^3 - 2a^2b^2 + 6a^3b^2) : (-3ab)] \cdot \left(\frac{1}{2}b^2\right);$

b) $\left(\frac{4}{3}a^2b^3 - \frac{3}{4}a^3b^2\right) : \left(-\frac{3}{2}a^2b^2\right);$

c) $\left(2a + \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{4}\right) : \left(\frac{a}{2}\right);$

d) $\left(\frac{1}{2}a - \frac{a^2}{4} - \frac{a^3}{8}\right) : \left(\frac{1}{2}a\right);$

e) $\left(-4x + \frac{1}{2}x^3\right) \left(2x^2 - 3x + \frac{1}{2}\right);$

f) $(a^3b^2 - a^4b + a^2b^3) : (a^2b);$

g) $(a^2 - a^4 + a^3) : (a^2).$

10.5 - Prodotto di polinomi**10.20.** Esegui i seguenti prodotti di polinomi.

a) $\left(\frac{1}{2}a^2b - 2ab^2 + \frac{3}{4}a^3b\right) \cdot \left(\frac{1}{2}ab\right);$

b) $(x^3 - x^2 + x - 1)(x - 1);$

c) $(a^2 + 2ab + b^2)(a + b);$

d) $(a - 1)(a - 2)(a - 3);$

e) $(a + 1)(2a - 1)(3a - 1);$

f) $(a + 1)(a^2 + a)(a^3 - a^2).$

10.6.2 Esercizi riepilogativi**10.21 (*).** Risolvi le seguenti espressioni con i polinomi.

a) $(-a - 1 - 2) - (-3 - a + a);$

b) $(2a^2 - 3b) - [(4b + 3a^2) - (a^2 - 2b)];$

c) $(2a^2 - 5b) - [(2b + 4a^2) - (2a^2 - 2b)] - 9b;$

- d) $3a \left[2(a - 2ab) + 3a \left(\frac{1}{2} - 3b \right) - \frac{1}{2}a(3 - 5b) \right];$
 e) $2(x - 1)(3x + 1) - (6x^2 + 3x + 1) + 2x(x - 1).$

10.22. Risolvi le seguenti espressioni con i polinomi.

- a) $\left(\frac{1}{3}x - 1 \right) (3x + 1) - 2x \left(\frac{5}{4}x - \frac{1}{2} \right) (x + 1) - \frac{1}{2}x \left(x - \frac{2}{3} \right);$
 b) $(b^3 - b)(x - b) + (x + b)(ab^2 - a) + (b + a)(ab - ab^3) + 2ab(b - b^3);$
 c) $ab(a^2 - b^2) + 2b(x^2 - a^2)(a - b) - 2bx^2(a - b);$
 d) $\left(\frac{3}{2}x^2y - \frac{1}{2}xy \right) \left(2x - \frac{1}{3}y \right) 4x;$
 e) $\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a^2 \right) (1 - a) [a^2 + 2a - (a^2 + a + 1)].$

10.23. Risolvi le seguenti espressioni con i polinomi.

- a) $(1 - 3x)(1 - 3x) - (-3x)^2 + 5(x + 1) - 3(x + 1) - 7;$
 b) $3 \left(x - \frac{1}{3}y \right) \left[2x + \frac{1}{3}y - (x - 2y) \right] - 2 \left(x - \frac{1}{3}y + 2 \right) (2x + 3y);$
 c) $\frac{1}{24}(29x + 7) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(x - 3)(x - 3) - 2 - \left[\frac{1}{3} - \frac{3}{2} \left(\frac{3}{4}x + \frac{2}{3} \right) \right];$
 d) $-\frac{1}{4}(2abx + 2a^2b^2 + 3ax) + a^2(b^2 + x^2) - \left[\left(\frac{1}{3}ax \right)^2 - \left(\frac{2}{3}bx \right)^2 \right];$
 e) $\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{5} \right) \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{5} \right) - \left[\left(\frac{1}{3}x \right)^2 - \left(\frac{1}{2}y \right)^2 \right].$

10.24. Risolvi le seguenti espressioni con i polinomi.

- a) $\left(\frac{1}{2}x - 1 \right) \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \right) + \left(-\frac{1}{2}x \right)^3 + 2 \left(\frac{1}{2}x + 1 \right);$
 b) $(3a - 2)(3a + 2) - (a - 1)(2a - 2) + a(a - 1)(a^2 + a + 1);$
 c) $-4x(5 - 2x) + (1 - 4x + x^2)(1 - 4x - x^2);$
 d) $-(2x - 1)(2x - 1) + [x^2 - (1 + x^2)]^2 - (x^2 - 1)(x^2 + 1).$

10.25. Risolvi le seguenti espressioni con i polinomi.

- a) $4(x + 1) - 3x(1 - x) - (x + 1)(x - 1) - (4 + 2x^2);$
 b) $\frac{1}{2}(x + 1) + \frac{1}{4}(x + 1)(x - 1) - (x^2 - 1);$
 c) $(3x + 1) \left(\frac{5}{2} + x \right) - (2x - 1)(2x + 1)(x - 2) + 2x^3.$

10.26 (*). Risolvi le seguenti espressioni con i polinomi.

- a) $\left(a - \frac{1}{2}b \right) a^3 - \left(\frac{1}{3}ab - 1 \right) [2a^2(a - b) - a(a^2 - 2ab)];$
 b) $(3x^2 + 6xy - 4y^2) \left(\frac{1}{2}xy - \frac{2}{3}y^2 \right);$
 c) $(2a - 3b) \left(\frac{5}{4}a^2 + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{6}b^2 \right) - \frac{1}{6}a \left(12a^2 - \frac{18}{5}b^2 \right) + \frac{37}{30}ab^2 - \frac{1}{2}a \left(a^2 - \frac{11}{2}ab \right);$

$$d) \frac{1}{3}xy \left[(x-y^2) \left(x^2 - \frac{1}{2}y \right) - 3x \left(-\frac{1}{9}xy \right) (3y) \right] - \frac{1}{3}x \left(x^3y + \frac{1}{4}xy^2 \right).$$

10.27 (*). Risolvi la seguente espressione con i polinomi.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x \left[(x-y^2) \left(x^2 + \frac{1}{2}y \right) - 5x \left(-\frac{1}{10}xy \right) (4y) \right] - \frac{1}{2}x \left(x^3y + \frac{1}{2}xy^2 \right) \\ - \frac{1}{2}x^2 \left(x^2 + \frac{1}{2}y + xy^2 \right) + \frac{1}{4}xy (y^2 + 2x^3 + xy). \end{aligned}$$

10.28 (*). Risolvi la seguente espressione con i polinomi.

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}a - 2b \right) \left(\frac{3}{2}a + 2b \right) \left(\frac{9}{4}a^2 + 4b^2 \right) - \frac{3}{4} \left(\frac{9}{4}a^2 \right) - a^2 \left(\frac{9}{4}a^2 - 5b^2 \right) \\ + 5ab \left(\frac{3}{4}a^2 + \frac{4}{3}b^2 \right). \end{aligned}$$

10.29 (*). Risolvi la seguente espressione con i polinomi.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}x + 2y \right) \left(\frac{1}{2}x - 2y \right) \left(\frac{1}{4}x^2 - 4y^2 \right) - \frac{1}{4}x \left(\frac{27}{4}x^3 - \frac{61}{3}xy^2 \right) \\ - 16(y^4 + x^4) - \frac{37}{12}x^2y^2 + \frac{141}{8}x^4. \end{aligned}$$

10.30 (*). Risolvi la seguente espressione con i polinomi.

$$\begin{aligned} x \left(\frac{2}{3}y^2 - \frac{27}{8}x^2 \right) - \left[- \left(\frac{3}{2}x - \frac{2}{3}y \right) \left(\frac{9}{4}x^2 + xy + \frac{4}{3}y^2 \right) + \frac{2}{3}x^2 \left(\frac{9}{4}y^2 + \frac{1}{3}y \right) \right] \\ + \frac{2}{9}y (x^2 + 4y^2 - 9xy). \end{aligned}$$

10.31 (*). Risolvi la seguente espressione con i polinomi.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}ab + \frac{2}{3}xy \right) \left(\frac{1}{2}ab - \frac{2}{3}xy \right) - \left[\left(\frac{1}{2}ab \right)^2 - \left(\frac{2}{3}xy \right)^2 \right] \left(\frac{1}{2}ax \right) + \frac{3}{2}ax \left(\frac{2}{3}a - \frac{2}{3}y \right) \\ - x \left(\frac{1}{2}ax + \frac{3}{4}xy \right) - \frac{2}{9}x^2y^2(ax - 2) + \frac{1}{4}a^2b^2 \left(\frac{1}{2}ax - 1 \right) + \frac{3}{4}x^2 \left(y + \frac{2}{3}a \right). \end{aligned}$$

10.32 (*). Risolvi la seguente espressione con i polinomi.

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}ab - \frac{1}{3}a^2 - \left\{ \frac{3}{4}ab + \frac{1}{2}a \left[\frac{3}{2}b - \left(\frac{1}{6}a - \frac{4}{5}a \cdot \frac{25}{3}a \right) \left(-\frac{2}{3}ab \right) - \left(-\frac{8}{3}ab \right) \left(-\frac{9}{8}b \right) \right] \right\} \\ + \frac{1}{3}a \left(a - 5b - 9a^3b + \frac{1}{6}a^2b \right). \end{aligned}$$

10.33 (*). Risolvi la seguente espressione con i polinomi.

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}x^2 + \left\{ \left[2x - \left(\frac{3}{2}x^2y - \frac{7}{4}xy + \frac{1}{8}y^3 \right) : \left(-\frac{1}{2}y \right) \right] 2x - \frac{7}{10}xy \right\} \left(-\frac{1}{6}x^2 \right) \\ + x^2y - \frac{1}{3}x \left(\frac{3}{5}x \right) - x^2 \left(y - x^3 - \frac{1}{12}xy^2 \right). \end{aligned}$$

10.34. Se $A = x - 1$, $B = 2x + 2$, $C = x^2 - 1$ determina

- a) $A + B + C$; c) $A + B \cdot C$; e) $2AC - 2BC$;
 b) $A \cdot B - C$; d) $A \cdot B \cdot C$; f) $(A + B) \cdot C$.

10.35 (*). Operazioni tra polinomi con esponenti letterali.

- a) $(a^{n+1} - a^{n+2} + a^{n+3}) : (a^{1+n})$;
 b) $(1 + a^{n+1})(1 - a^{n-1})$;
 c) $(16a^{n+1}b^{n+2} - 2a^{2n}b^{n+3} + 5a^{n+2}b^{n+1}) : (2a^n b^n)$;
 d) $(a^{n+1} - a^{n+2} + a^{n+3})(a^{n+1} - a^n)$;
 e) $(a^n - a^{n+1} + a^{n+2})(a^{n+1} - a^{n-1})$;
 f) $(a^n + a^{n+1} + a^{n+2})(a^{n+1} - a^n)$;
 g) $(a^{n+2} + a^{n+1})(a^{n+1} + a^{n+2})$;
 h) $(1 + a^{n+1})(a^{n+1} - 2)$;
 i) $(a^{n+1} - a^n)(a^{n+1} + a^n)(a^{2n+2} + a^{2n})$;
 j) $\left(\frac{1}{2}x^n - \frac{3}{2}x^{2n}\right)\left(\frac{1}{3}x^n - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}x^n - 1\right)(x^n + x)$.

10.36. Se si raddoppiano i lati di un rettangolo, come varia il suo perimetro?

10.37. Se si raddoppiano i lati di un triangolo rettangolo, come varia la sua area?

10.38. Se si raddoppiano gli spigoli a , b , e c di un parallelepipedo, come varia il suo volume?

10.39. Come varia l'area di un cerchio se si triplica il suo raggio?

10.40. Determinare l'area di un rettangolo avente come dimensioni $\frac{1}{2}a$ e $\frac{3}{4}a^2b$.

10.41. Determinare la superficie laterale di un cilindro avente raggio di base x^2y e altezza $\frac{1}{5}xy^2$.

10.6.3 Risposte

10.14. d) $-x^2 + x + \frac{29}{15}a^2$,

e) $-\frac{a^2}{2} - \frac{7}{24}ab + \frac{5}{2}b$.

10.21. a) $-a$, b) $-9b$, c) $-18b$,

d) $6a^2 - \frac{63}{2}a^2b$, e) $2x^2 - 9x - 3$.

10.26. a) $a^4 - \frac{1}{2}a^3b - \frac{1}{3}a^4b + a^3$,

b) $\frac{3}{2}x^3y + x^2y^2 - 6xy^3 + \frac{8}{3}y^4$,

c) $\frac{1}{2}b^3$, d) $\frac{1}{6}xy^4 - \frac{1}{4}x^2y^2$.

10.27. 0.

10.28. $-16b^4 - \frac{27}{16}a^2$.

10.29. 0.

10.30. $-\frac{3}{2}x^2y^2$.

10.31. $a^2x - axy$.

10.32. $-\frac{7}{9}a^4b + \frac{3}{2}a^2b^2 - 3ab$.

10.33. $\frac{1}{2}x^4 + \frac{7}{60}x^3y$.

10.35. a) $1 - a + a^2$,

b) $1 - a^{n-1} + a^{n+1} - a^{2n}$,

c) $8ab^2 - a^n b^3 + \frac{5}{2}a^2b$,

d) $a^{2n+4} - 2a^{2n+3} + 2a^{2n+2} - a^{2n+1}$,

e) $a^{2n+3} - a^{2n+2} - a^{2n-1} + a^{2n}$,

f) $-a^{2n} + a^{2n+3}$,

g) $a^{2n+4} + 2a^{2n+3} + a^{2n+2}$,

i) $a^{2n+2} - a^{n+1} - 2$, h) $a^{4n+4} - a^{4n}$,

j) $\frac{7}{12}x^{2n} + \frac{3}{4}x^n - \frac{1}{2}x^{3n} - \frac{1}{3}x^{n+1} + x$.