7 Operazioni con gli insiemi

7.1 Sottoinsieme

Consideriamo l'insieme A degli abitanti di Milano e l'insieme B degli abitanti di Milano con età superiore ai 40 anni. Gli abitanti ultra quarantenni di Milano fanno parte della popolazione di Milano, cioè tutti gli elementi dell'insieme B sono anche elementi di A: si dice che B è sottoinsieme di A, si scrive $B \subseteq A$.

Nel caso in cui tutti gli elementi di Y siano elementi di X e tutti gli elementi di X siano elementi di Y si ha che $X = Y$, e Y si dice *sottoinsieme improprio* di X. Se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$, allora $Y = X$.

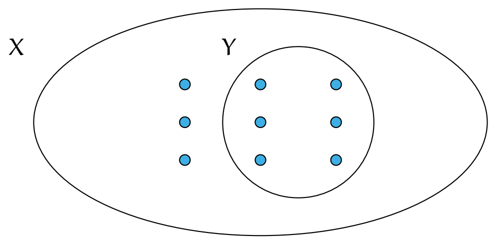
Tra i sottoinsiemi di un insieme si considera anche l'insieme vuoto $\emptyset$, cioè qualunque sia l'insieme X risulta che $\emptyset \subset X$. L'insieme vuoto è considerato un *sottoinsieme improprio* di qualunque insieme. Ogni insieme è sottoinsieme improprio di se stesso.

Se Y è un sottoinsieme di X e X ha altri elementi oltre a quelli di Y si dice che Y è un *sottoinsieme proprio* di X e si scrive $Y \subset X$. La scrittura $A \subseteq B$ si usa quando non si sa in modo certo se $A = B$ o $A \subset B$.

Definizione 7.1. Dati due insiemi X e Y, si dice che Y è un *sottoinsieme* di X se ogni elemento di Y è anche elemento di X.

In simboli: $Y \subseteq X$, che si legge "Y è incluso in X" o "Y è sottoinsieme di X".

La rappresentazione con un diagramma di Eulero-Venn è la seguente:



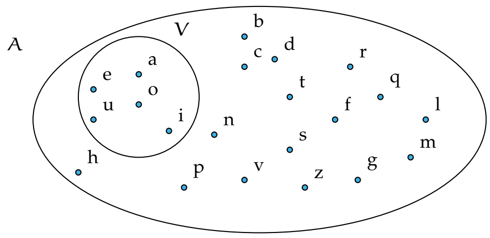
Se a è un elemento del sottoinsieme Y, allora lo sarà anche dell'insieme X:

$$\text{se } a \in Y \text{ e } Y \subseteq X, \text{ allora } a \in X.$$

Dalla stessa definizione, si deduce che ogni insieme è sottoinsieme di se stesso, in simboli $X \subseteq X$. Tra i sottoinsiemi di un insieme si considera anche l'insieme vuoto. Cioè, qualunque sia l'insieme X risulta $\emptyset \subseteq X$.

Esempio 7.1. Consideriamo l'insieme $X = \{$lettere della parola "autunno"$\}$ e l'insieme $Y = \{$lettere della parola "notaio"$\}$; possiamo affermare che "ogni" elemento di Y è anche elemento di X? La risposta è negativa: $i \in Y$ ma $i \notin X$ quindi Y non è sottoinsieme di X e si scrive $Y \not\subset X$.

Esempio 7.2. Sia A l'insieme delle lettere dell'alfabeto italiano e V l'insieme delle vocali, allora si può scrivere $V \subset A$; cioè V è un sottoinsieme proprio di A, come si può anche vedere dalla rappresentazione grafica.



Esempio 7.3. Sia $C = \{1\}$, allora C non ha sottoinsiemi propri; mentre i suoi sottoinsiemi impropri sono $C = \{1\}$ e l'insieme vuoto $\emptyset$.

Esempio 7.4. Sia A l'insieme delle auto esposte in un autosalone e U l'insieme delle auto usate esposte nello stesso autosalone. Si ha che U è un sottoinsieme di A, ma senza avere ulteriori informazioni non possiamo escludere che tutte le auto esposte siano usate, dobbiamo perciò scrivere $U \subseteq A$. Se invece sappiamo che nessuna auto esposta è usata, allora $U = \emptyset$.

✍ *Esercizio proposto:* 7.1

7.2 Insieme delle parti

Consideriamo l'insieme A dei numeri naturali compresi tra 0 e 100, a partire da questo insieme possiamo formare gruppi costituiti dai soli numeri multipli di 10, dai numeri pari, da quelli dispari, da quelli divisibili per 7 e così via. Quindi con gli elementi dell'insieme A possiamo formare molti altri insiemi che sono sottoinsiemi di A.

Esempio 7.5. Determinare tutti i sottoinsiemi di $A = \{1, 2, 3\}$.

$\emptyset \subset A$, infatti l'insieme vuoto è un sottoinsieme di qualunque insieme.

Elenchiamo tutti i sottoinsiemi costituiti da un solo elemento: {1}, {2}, {3}. Elenchiamo ora tutti i sottoinsiemi costituiti da due elementi: {1,2}, {1,3}, {2,3}. L'unico sottoinsieme costituito da tre elementi è A stesso, possiamo scrivere: $\{1, 2, 3\} \subseteq A$. In tutto 8 sottoinsiemi.

Definizione 7.2. Dato un insieme A, si chiama *insieme delle parti* l'insieme che ha come elementi tutti i sottoinsiemi propri ed impropri di A. In simboli: $\wp(A)$.

L'insieme delle parti di un insieme A ha sempre come elementi $\emptyset$ e A quindi $\emptyset \in \wp(A)$ e $A \in \wp(A)$.

Il numero degli elementi di $\wp(A)$, cioè dei suoi possibili sottoinsiemi, propri e impropri, dipende dal numero degli elementi di A.

Esempio 7.6. L'insieme vuoto ha come unico sottoinsieme se stesso, quindi $\wp(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

Esempio 7.7. Dato l'insieme $A = \{a\}$, i suoi possibili sottoinsiemi propri ed impropri sono: $S_1 = \emptyset$, $S_2 = \{a\}$; allora $\wp(A) = \{S_1, S_2\}$.

Esempio 7.8. Dato l'insieme $B = \{\text{matita, penna}\}$ i suoi possibili sottoinsiemi propri ed impropri sono: $S_1 = \emptyset$, $S_2 = B = \{\text{matita, penna}\}$, $S_3 = \{\text{matita}\}$, $S_4 = \{\text{penna}\}$; allora $\wp(A) = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$.

Esempio 7.9. Dato l'insieme $B = \{1, 2, 3\}$, i suoi possibili sottoinsiemi propri ed impropri sono: $S_1 = \emptyset$, $S_2 = B = \{1, 2, 3\}$, $S_3 = \{1\}$, $S_4 = \{2\}$, $S_5 = \{3\}$, $S_6 = \{1, 2\}$, $S_7 = \{1, 3\}$, $S_8 = \{2, 3\}$; allora $\wp(A) = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_{7,}, S_8\}$.

Riassumendo:

- se $A = \emptyset$ l'insieme delle parti ha 1 solo elemento;
- se A ha 1 elemento allora l'insieme delle parti ha 2 elementi;
- se A ha 2 elementi, l'insieme delle parti ne ha 4;
- se A ha 3 elementi, l'insieme delle parti ne ha 8.

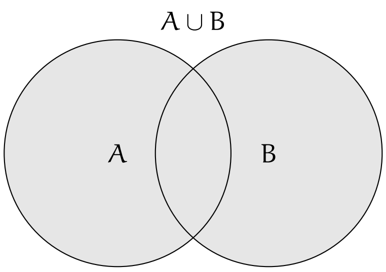
Generalizzando, se A ha n elementi, l'insieme delle parti ne ha 2^n.

✍ *Esercizi proposti:* 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 7.6

7.3 Insieme unione

Prendiamo l'insieme $\mathbb{P}$ dei numeri pari e l'insieme $\mathbb{D}$ dei numeri dispari; allora l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è dato dall'unione dei due insiemi $\mathbb{P}$ e $\mathbb{D}$.

Definizione 7.3. Dati due insiemi A e B, si dice *insieme unione* l'insieme C, composto da tutti gli elementi appartenenti ad A o a B o a entrambi. In simboli: $C = A \cup B$, si legge "A unito a B" o "A unione B".

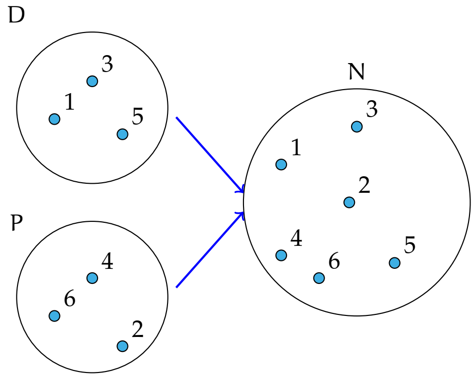


Mediante la proprietà caratteristica si scrive: $C = A \cup B = \{x / (x \in A) \text{ o } (x \in B)\}$.

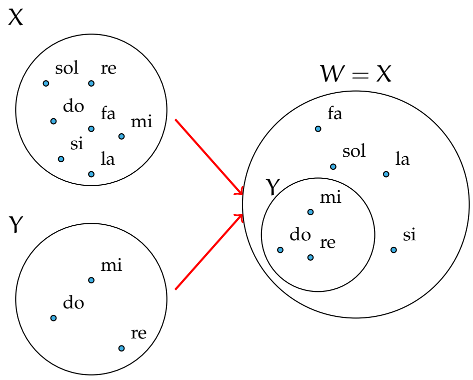
7.3.1 Proprietà dell'unione tra insiemi

a) $A \cup B = B \cup A$: proprietà *commutativa* dell'unione;
b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$: proprietà *associativa* dell'unione;
c) se $B \subset A$, allora $A \cup B = A$;
d) $A \cup \emptyset = A$;
e) $A \cup A = A$: proprietà di *idempotenza* dell'unione.

Esempio 7.10. Siano $D = \{1, 3, 5\}$ e $P = \{2, 4, 6\}$ allora $N = P \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.



Esempio 7.11. Siano $X = \{\text{do, re, mi, fa, sol, la, si}\}$ e $Y = \{\text{do, re, mi}\}$, allora, poiché $Y \subset X$, $W = X \cup Y = X = \{\text{do, re, mi, fa, sol, la, si}\}$.



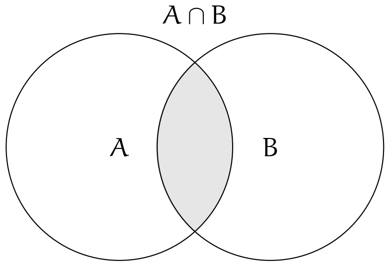
✍ *Esercizi proposti:* 7.7, 7.8, 7.9

7.4 Insieme intersezione

Esempio 7.12. Se A è l'insieme delle lettere della parola "matematica" e B è l'insieme delle lettere della parola "materia". Quali elementi di A stanno in B? Quali elementi di B stanno in A? Quali sono gli elementi che stanno in entrambi gli insiemi?

- L'insieme degli elementi di A che stanno in B è {m, a, t, e, i};
- l'insieme degli elementi di B che stanno in A è {m, a, t, e, i};
- l'insieme degli elementi che stanno sia in A sia in B è {m, a, t, e, i}.

Definizione 7.4. Dati due insiemi A e B, si dice *insieme intersezione* di A e B, l'insieme C composto da tutti gli elementi appartenenti contemporaneamente ad A e a B, ossia comuni a entrambi. In simboli: $C = A \cap B$, che si legge "A intersecato a B" o "A intersezione B".



Mediante proprietà caratteristica si scrive: $C = A \cap B = \{x/(x \in A) \text{ e } (x \in B)\}$.

Se $A \cap B = \emptyset$, ossia se A e B non hanno elementi in comune, i due insiemi si dicono *disgiunti*.

7.4.1 Proprietà dell'intersezione tra insiemi

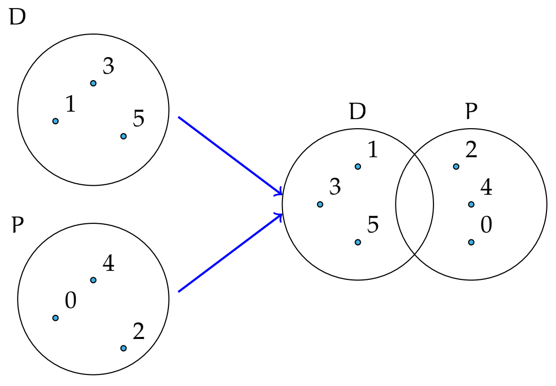
a) $A \cap B = B \cap A$: proprietà *commutativa* dell'intersezione;
b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$: proprietà *associativa* dell'intersezione;
c) Se $B \subset A$, allora $A \cap B = B$;
d) $A \cap \emptyset = \emptyset$;
e) $A \cap A = A$: proprietà di *idempotenza* dell'intersezione;
f) $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$.

7.4.2 Proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione e viceversa

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$: proprietà *distributiva* dell'intersezione rispetto l'unione;
b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$: proprietà *distributiva* dell'unione rispetto l'intersezione.

Esempio 7.13. Siano $X = \{\text{do, re, mi. fa, sol, la, si}\}$ e $Y = \{\text{do, re, mi}\}$. Allora poiché, $Y \subset X$, si ha: $W = X \cap Y = Y = \{\text{do, re, mi}\}$.

Esempio 7.14. Siano $D = \{1, 3, 5\}$ e $P = \{2, 4, 6\}$ allora $N = P \cap D = \emptyset$.

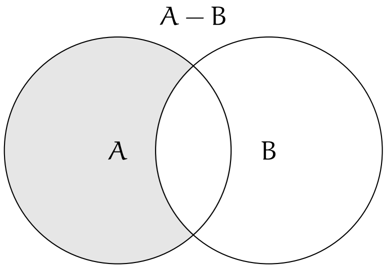


✍ *Esercizi proposti:* 7.10, 7.11, 7.12, 7.13

7.4.3 Insieme differenza

Consideriamo gli insiemi A e B formati rispettivamente dalle lettere dell'alfabeto italiano e dalle consonanti dell'alfabeto italiano cioè: A ={a, b, c, d, e, f, g, h, i, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, z} e B ={b, c, d, f, g, h, l, m, n, p, q, r, s, t, v, z}, le lettere "a, e, i, o, u" che compaiono nell'insieme A ma non in B formano un nuovo insieme chiamato insieme *differenza*.

Definizione 7.5. Dati due insiemi A e B, si dice *insieme differenza* l'insieme C, composto da tutti gli elementi di A che non appartengono a B. In simboli: $C = A - B$ che si legge "A differenza B".



Mediante proprietà caratteristica si scrive: $C = A - B = \{x/(x \in A) \text{ e } (x \notin B)\}$.

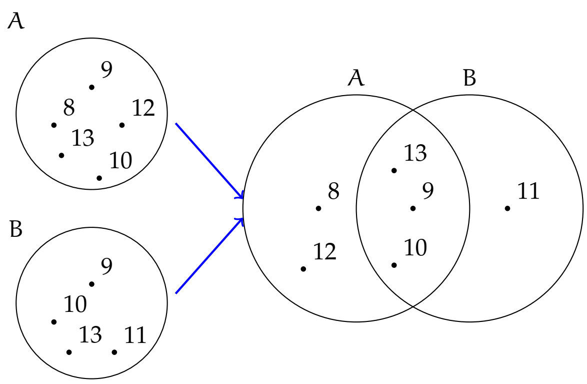
7.4.4 Proprietà della differenza tra insiemi

a) Se $A \cap B = \emptyset$, ossia sono disgiunti allora $A - B = A$, e $B - A = B$;
b) se $B \subset A$, ossia B è sottoinsieme proprio di A allora $B - A = \emptyset$;
c) $A - A = \emptyset$;
d) $A - \emptyset = A$.

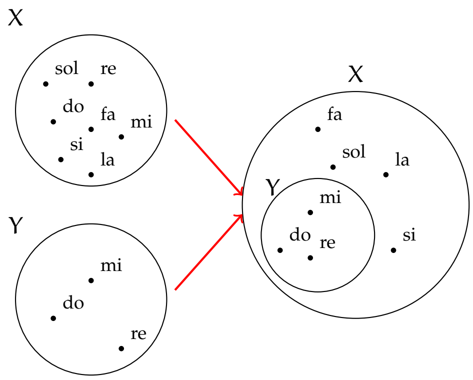
Esempio 7.15. Siano $A = \{8, 9, 10, 12, 13\}$ e $B = \{9, 10, 11, 13\}$ allora $C = A - B = \{8, 12\}$ e $D = B - A = \{11\}$.

Poiché $A - B \neq B - A$ nella differenza non vale la proprietà commutativa.

Esempio 7.16. Siano $D = \{1, 3, 5\}$ e $P = \{0, 2, 4\}$. I due insiemi sono disgiunti $P \cap D = \emptyset$ allora $D - P = \{1, 3, 5\} = D$ e $P - D = \{0, 2, 4\} = P$.



Esempio 7.17. Siano $X = \{do, re, mi, fa, sol, la, si\}$ e $Y = \{do, re, mi\}$ allora poiché $Y \subset X$, $W = X - Y = \{fa, sol, la, si\}$.



✍ *Esercizio proposto:* 7.14

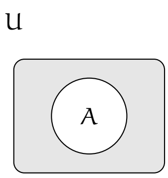
7.5 Insieme complementare

Sia $W = \{$sabato, domenica$\}$ l'insieme dei giorni della settimana che non finiscono per "dì". L'insieme W può essere considerato come sottoinsieme dell'insieme G formato da tutti i giorni della settimana G $=\{$lunedì, martedì, mercoledì, giovedì, venerdì, sabato, domenica$\}$. L'insieme degli elementi di G che non appartengono a W forma un insieme che chiameremo *complementare* di W rispetto a G. L'insieme G invece si dice in questo caso insieme *universo*. Ad esempio nella rappresentazione caratteristica $A = \{x \in N / x \leqslant 100\}$, N è l'insieme universo di A.

Definizione 7.6. Dato un insieme A, uno dei possibili insiemi che contengono A come sottoinsieme si dice *insieme universo* o *insieme ambiente*.

Definizione 7.7. Dato l'insieme A e scelto U come suo insieme universo, l'insieme degli elementi di U che non appartengono ad A si dice *insieme complementare* di A rispetto a U. In simboli: $\overline{A}$ oppure $\overline{A}_U$ oppure $\complement_U A$.

Il diagramma di Eulero-Venn dell'insieme complementare è:



Nella figura la parte in grigio è il complementare di A rispetto a U, cioè $\overline{A}_U$. Come si può vedere dal disegno, essendo $A \subseteq U$ il complementare coincide con la differenza tra insiemi: $\overline{A}_U = U - A$.

Esempio 7.18. Insiemi complementari.

a) Il complementare dell'insieme D dei numeri dispari rispetto all'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è l'insieme P dei numeri pari: $\overline{D}_{\mathbb{N}} = P$;

b) Il complementare dell'insieme V delle vocali dell'alfabeto italiano rispetto all'insieme A delle lettere dell'alfabeto italiano è l'insieme C delle consonanti: $\overline{V}_U = C$;
c) Dati gli insiemi $U = \{x \in N/1 \leqslant x \leqslant 10\}$ e $B = \{x \in N/1 \leqslant x \leqslant 5\}$, poiché $B \subset U$ si può determinare $\overline{B}_U = \{x \in N/6 \leqslant x \leqslant 10\}$.

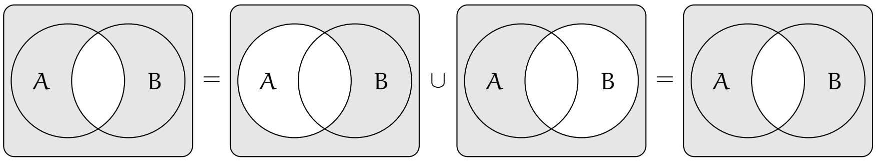
✍ *Esercizi proposti:* 7.15, 7.16, 7.17

7.6 Leggi di De Morgan

Dati due insiemi A e B ci sono alcune proprietà, dette *leggi di De Morgan* che semplificano lo svolgimento di alcune operazioni:

a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$: Prima legge di De Morgan;
b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$: Seconda legge di De Morgan.

Dimostriamo la prima legge di De Morgan utilizzando i diagrammi di Eulero-Venn.



$(\overline{A \cap B})$ $\overline{A}$ $\overline{B}$ $\overline{A} \cup \overline{B}$

✍ *Esercizio proposto:* 7.18

7.7 Prodotto cartesiano fra insiemi

Supponiamo che la partita di calcio Lecce - Juventus sia terminata 3-2; in questo caso il risultato della partita non rappresenta un insieme di numeri dato che nella rappresentazione di un insieme scrivere $\{3, 2\}$ e $\{2, 3\}$ è la stessa cosa. Infatti, se avessimo scritto 2-3 al posto di 3-2 la partita avrebbe avuto un esito differente. Ci troviamo nel caso di una *coppia ordinata* di numeri.

Definizione 7.8. Un insieme di due elementi a e b presi in un certo ordine si dice *coppia ordinata*. Se il primo elemento della coppia è a ed il secondo è b si scrive: (a, b).

Definizione 7.9. Dati due insiemi A e B non vuoti, l'insieme formato da tutte le coppie ordinate tali che il primo elemento appartiene ad A e il secondo a B, si chiama *prodotto cartesiano* di A per B. In simboli: $A \times B$ che si legge "A per B" oppure "A prodotto cartesiano con B" o ancora "A cartesiano B".

Mediante proprietà caratteristica si scrive: $A \times B = \{(x; y)/x \in A \text{ e } y \in B\}$. Nel caso in cui $B = A$, il prodotto cartesiano diventa $A \times A = A^2 = \{(x; y)/x \in A \text{ e } y \in A\}$.

Esempio 7.19. Sia $C = \{x, y, z\}$, il prodotto cartesiano $C \times C$ è dato dalle seguenti coppie ordinate: $C \times C = \{(x; x), (x; y), (x; z), (y; x), (y; y), (y; z), (z; x), (z; y), (z; z)\}$.

7.7.1 Proprietà del prodotto cartesiano tra insiemi

a) $A \times \emptyset = \emptyset$;
b) $\emptyset \times A = \emptyset$;
c) $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$.

Esempio 7.20. Sia $A = \{a, b\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Il prodotto cartesiano $A \times B$ è dato dalle seguenti coppie ordinate: $A \times B = \{(a; 1), (a; 2), (a; 3), (b; 1), (b; 2), (b; 3)\}$, mentre il prodotto cartesiano $B \times A$ è dato dalle seguenti coppie ordinate: $B \times A = \{(1; a), (2; a), (3; a), (1; b), (2; b), (3; b)\}$.

Si può notare che $A \times B \neq B \times A$.

Poiché $A \times B \neq B \times A$ nel prodotto cartesiano non vale la proprietà commutativa.

✍ *Esercizi proposti:* 7.19, 7.20, 7.21, 7.22, 7.23, 7.24

7.7.2 Rappresentazione del prodotto cartesiano tra insiemi

Tabulazione delle coppie ordinate Come fatto nei precedenti esempi, si combina il primo elemento di A con tutti gli elementi di B, il secondo elemento di A con tutti gli elementi di B e cosi via fino ad esaurire tutti gli elementi di A.

$$A \times B = \{(a; 1), (a; 2), (a; 3), (b; 1), (b; 2), (b; 3)\}.$$

Diagramma a frecce Si rappresentano i due insiemi graficamente con i diagrammi di Eulero-Venn e si tracciano degli archi orientati che escono dagli elementi del primo insieme e raggiungono gli elementi del secondo insieme formando coppie ordinate del prodotto cartesiano.

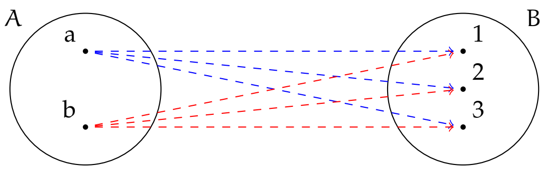


Tabella a doppia entrata Si costruisce una tabella nella quale si riportano gli elementi del primo insieme sulla prima colonna e gli elementi del secondo insieme sulla prima riga. Le caselle di incrocio rappresentano le coppie ordinate del prodotto cartesiano.

		B		
		1	2	3
A	a	(a; 1)	(a; 2)	(a; 3)
	b	(b; 1)	(b; 2)	(b; 3)

Diagramma cartesiano Si tracciano due semirette una orizzontale e l'altra verticale, orientate, perpendicolari, con l'origine in comune. Si riportano gli elementi del primo insieme sulla semiretta orizzontale e quelli del secondo su quella verticale. Tali semirette vengono chiamate *assi cartesiani*. Si tracciano prima le parallele all'asse verticale dai punti sull'asse orizzontale che rappresentano gli elementi del primo insieme, poi le parallele all'asse orizzontale dai punti sull'asse verticale; i punti di intersezione rappresentano le coppie ordinate del prodotto cartesiano.

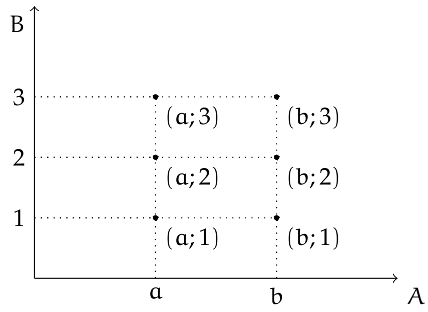
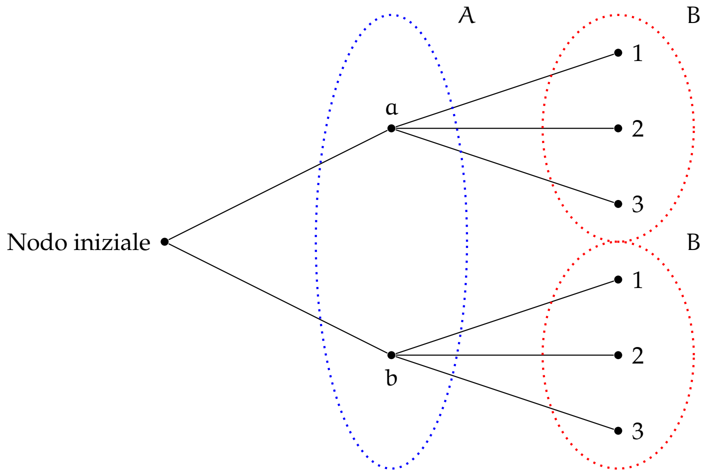


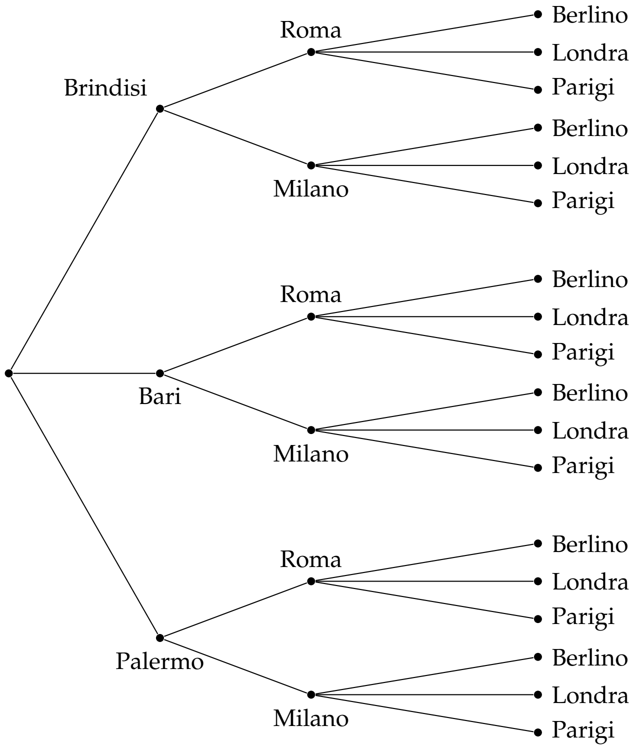
Diagramma ad albero È un grafico formato da un nodo iniziale dal quale si ripartono alcuni rami che a loro volta possono ramificarsi e così via fino a che nello schema figurano tutte le possibili situazioni.

Si può raggiungere un particolare nodo solo muovendosi lungo i rami ed il percorso che collega due nodi qualsiasi deve essere unico.

La rappresentazione mediante diagramma ad albero è vantaggiosa nel caso si voglia fare il prodotto cartesiano tra più insiemi.



Esempio 7.21. Una compagnia aerea deve organizzare delle rotte aeree per collegare fra loro alcune città effettuando uno scalo in un'altra città. Sia $P = \{\text{Brindisi}, \text{Bari}, \text{Palermo}\}$ l'insieme delle città di partenza, $S = \{\text{Roma}, \text{Milano}\}$ l'insieme delle città di scalo e $A = \{\text{Parigi}, \text{Berlino}, \text{Londra}\}$ l'insieme delle città di arrivo. Per conoscere tutte le possibili rotte aeree dobbiamo determinare il prodotto cartesiano tra i 3 insiemi $P \times S \times A$. Rappresentiamo $P \times S \times A$ tramite un diagramma ad albero:



7.8 I diagrammi di Eulero-Venn come modello di un problema

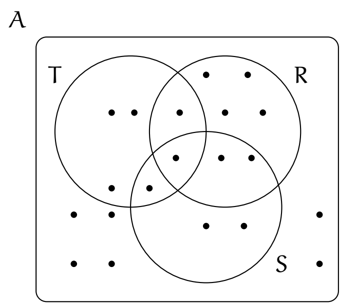
Alcune volte, trovandoci di fronte a un problema, possiamo rappresentare la situazione con diagrammi di Eulero-Venn, ciò agevola la comprensione e facilita la risoluzione del problema. Attraverso alcuni esempi mostreremo come usare la teoria degli insiemi per risolvere problemi.

Esempio 7.22. Nel seguente diagramma di Eulero-Venn, l'insieme A rappresenta un gruppo di amici appassionati di ballo; gli insiemi T, R, S rappresentano rispettivamente coloro che ballano il tango, la rumba, il samba; ogni puntino rappresenta uno degli amici.

Quanti sono gli amici appassionati di ballo?

Quanti tra loro ballano

a) *nessuno* dei balli indicati?
b) *almeno uno* dei balli tango, samba, rumba?
c) *almeno* il samba?
d) *solo* la rumba?
e) la rumba *e* il tango?
f) *tutti* i balli indicati?



Per rispondere alle domande dobbiamo contare gli elementi che formano determinati insiemi.

Quanti sono gli amici appassionati di ballo? Per rispondere a questa domanda, contiamo tutti i puntini che compaiono nel disegno. Si ha $\text{card}\, A = 20$.

Rispondiamo ora alle altre domande.

a) Quanti tra loro ballano *nessuno* dei balli indicati? Chi non balla nessuno dei balli indicati sta nell'insieme A, ma in nessuno degli insiemi R, S,T quindi appartiene al complementare di $R \cup S \cup T$ rispetto all'insieme A, dunque $\text{card}(\overline{R \cup S \cup T}) = 6$.

b) Quanti tra loro ballano *almeno uno* dei balli tra tango, samba, rumba? Chi balla almeno uno di quei balli è rappresentato dagli elementi dell'insieme $R \cup S \cup T$, quindi $\text{card}(R \cup S \cup T) = 14$.

c) Quanti tra loro ballano *almeno* il samba? Gli amici che ballano almeno il samba sono nell'insieme S, quindi $\text{card}\, S = 6$.

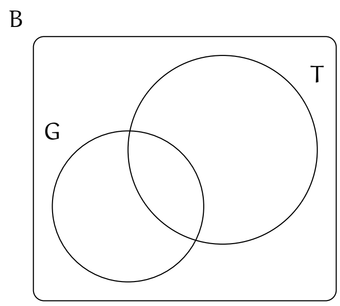
d) Quanti tra loro ballano *solo* la rumba? Nell'insieme R sono rappresentati gli amici che ballano almeno il rumba, quindi dobbiamo togliere dall'insieme R gli elementi che stanno in S o in T: $\text{card}(R - (T \cup S)) = 4$.

e) Quanti tra loro ballano la rumba *e* il tango? Quelli che ballano sia la rumba che il tango sono gli elementi dell'insieme intersezione $R \cap T$, quindi $\text{card}(R \cap T) = 2$.

f) Quanti tra loro ballano *tutti* i balli indicati? Quelli che ballano tutti e tre i balli indicati sono elementi dell'insieme intersezione $R \cap S \cap T$, quindi $\text{card}(R \cap S \cap T) = 1$.

Esempio 7.23. A settembre, per la festa delle contrade, a Lainate è arrivato un luna park dove oltre ad una grande giostra era stato allestito un tiro a segno con palline di gomma piuma, proprio per i bambini. Alcuni bambini, accompagnati dalla loro maestra si sono recati al luna park: 7 sono stati sulla giostra, 3 sono stati sia sulla giostra che al tiro a segno, 3 si sono divertiti solamente col tiro a segno e altri 2 sono stati a guardare. Quanti bambini sono andati quel giorno al luna park?

Per risolvere il problema rappresentiamo con diagrammi di Eulero-Venn la situazione; indichiamo con B l'insieme dei bambini recatisi al luna park, con G l'insieme di quelli che sono stati sulla giostra e con T l'insieme di quelli che hanno provato il tiro a segno. Dall'enunciato sappiamo che $\text{card}(G) = 7$, $\text{card}(G \cap T) = 3$, $\text{card}(T - G) = 3$ e $\text{card}(B - (G \cup T)) = 2$.



Completa la rappresentazione segnando i bambini con dei puntini e rispondi al quesito.

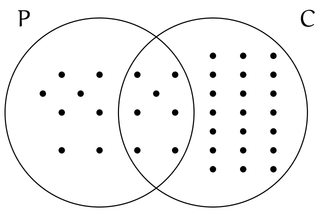
Esempio 7.24. Alla palestra Anni Verdi, il giovedì, si tengono due allenamenti di pallavolo e calcio dalle 17.00 alle 18.30. Frequentano il corso di pallavolo 15 persone e sono 28 quelli che frequentano l'allenamento di calcio. Quante persone frequentano pallavolo o calcio in questo orario?

Dati $P = \{\text{iscritti a pallavolo}\}$, $C = \{\text{iscritti a calcio}\}$, $\text{card}(P) = 15$, $\text{card}(C) = 28$.

Obiettivo Il problema chiede di determinare la cardinalità di $P \cup C$.

Soluzione Osserviamo che non ci sono persone che frequentano sia l'uno che l'altro sport essendo gli allenamenti nello stesso orario; gli insiemi P e C sono disgiunti: $P \cap C = \emptyset$. Quindi: $\text{card}(P \cup C) = \text{card}(P) + \text{card}(C) = 15 + 28 = 43$.

Esempio 7.25. Alla palestra Anni Verdi, il lunedì si tengono allenamenti di pallavolo, dalle 17.00 alle 18.30 e dalle 19.00 alle 20.30 gli allenamenti di calcio. Quelli che frequentano la pallavolo sono 15, quelli che frequentano il calcio sono 28, però ce ne sono 7 di loro che fanno entrambi gli allenamenti. Quanti sono gli sportivi che si allenano il lunedì?



Dati $P = \{\text{iscritti a pallavolo}\}$, $C = \{\text{iscritti a calcio}\}$, $\text{card}(P) = 15$, $\text{card}(C) = 28$ e $\text{card}(P \cap C) = 7$.

Obiettivo Il problema chiede di determinare la cardinalità di $P \cup C$.

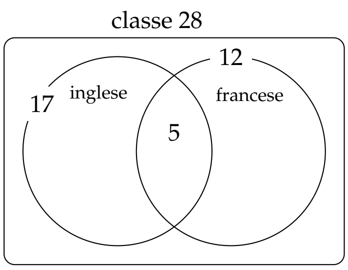
Soluzione $\text{card}(P \cup C) = \text{card}(P) + \text{card}(C) - \text{card}(P \cap C) = 15 + 28 - 7 = 36$.

Generalizzando possiamo affermare che dati due insiemi finiti A e B la cardinalità dell'insieme $A \cup B$ è data dalla seguente formula: $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.

Esempio 7.26. A scuola si sono aperti i corsi di lingue. Della classe di Piero, che è composta da 28 ragazzi, 17 frequentano il corso di inglese, 12 quello di francese, 5 di loro frequentano sia il corso di inglese, sia quello di francese. Quanti sono i ragazzi della classe di Piero che non frequentano alcun corso di lingue?

Rappresentiamo la situazione con un diagramma di Eulero-Venn.

L'insieme universo è costituito dai 28 ragazzi che compongono la classe. I ragazzi che frequentano almeno un corso *non* sono $17 + 12 = 29$, perché ce ne sono 5 che frequentano entrambi i corsi e vengono conteggiati due volte. Quindi i ragazzi che frequentano almeno un corso sono $17 + 12 - 5 = 24$. Di conseguenza quelli che non frequentano nessun corso sono $28 - 24 = 4$.

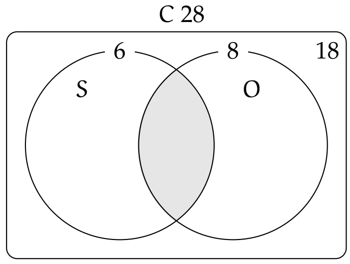


Esempio 7.27. Il professore di matematica di Piero è piuttosto severo; nella sua classe, di 28 alunni, ha messo solo 6 sufficienze allo scritto e solo 8 all'orale. I ragazzi che sono risultati insufficienti sia allo scritto sia all'orale sono stati 18. Quanti sono i ragazzi che hanno avuto una votazione sufficiente sia allo scritto che all'orale?

Rappresentiamo la situazione con un diagramma di Eulero-Venn.

C è l'insieme degli alunni della classe di Piero, è costituito da 28 elementi. S è l'insieme dei ragazzi sufficienti allo scritto, è costituito da 6 alunni. O è l'insieme dei ragazzi che sono sufficienti all'orale, è costituito da 8 elementi.

Gli elementi di $\overline{S \cup O}$ sono 18, cioè i ragazzi che non sono sufficienti né allo scritto, né all'orale.



L'insieme $S \cup O$ è quindi costituito da $28 - 18 = 10$ elementi.

Ricordiamo che

$$\begin{aligned} &\operatorname{card}(S \cup O) = \operatorname{card}(S) + \operatorname{card}(O) - \operatorname{card}(S \cap O) \\ \Rightarrow &\operatorname{card}(S \cap O) = \operatorname{card}(S) + \operatorname{card}(O) - \operatorname{card}(S \cup O) \\ \Rightarrow &\operatorname{card}(S \cap O) = 6 + 8 - 10 = 4. \end{aligned}$$

In conclusione i ragazzi sufficienti allo scritto e all'orale sono 4.

✍ *Esercizi proposti:* 7.25, 7.26, 7.27, 7.28, 7.29, 7.30, 7.31, 7.32, 7.33, 7.34, 7.35, 7.36, 7.37, 7.38

7.9 Esercizi

7.9.1 Esercizi dei singoli paragrafi

7.1 - Sottoinsieme

7.1. Siano $T = \{t/t \text{ un triangolo}\}$, $R = \{r/r \text{ un rettangolo}\}$, $E = \{e/e \text{ un triangolo equilatero}\}$. Quale affermazione è vera?

a) $R \subset T$; b) $E \subset T$; c) $E \subset R$; d) $T \subset E$.

7.2 - Insieme delle parti

7.2. Se $A = \{x \in \mathbb{N}/1 \leqslant x < 3\}$, allora $\wp(A)$ ha:

$\boxed{\text{A}}$ 2 elementi, $\boxed{\text{B}}$ 3 elementi, $\boxed{\text{C}}$ 4 elementi, $\boxed{\text{D}}$ 8 elementi

7.3. Considera l'insieme $B = \{x \in \mathbb{N}/1 < x < 5\}$ e $\wp(B)$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere o false?

a) $\{1\} \in \wp(B)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

b) $\emptyset \subset \wp(B)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

c) $\{2, 5\} \in \wp(B)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

d) $\{\emptyset\} \in \wp(B)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

e) $0 \in \emptyset$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

f) $\emptyset \subseteq B$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

g) $\{1, 2, 3\} \in \wp(B)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

h) $\{1, 2, 3\} \notin \wp(B)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

7.4. Scrivi l'insieme che ha come insieme delle parti $\{\emptyset, \{8, 10\}, \{8\}, \{10\}\}$.

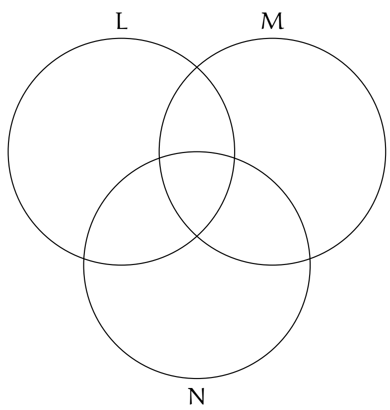
7.5. Dato $H = \{h/h$ è una lettera della parola "MAMMA"$\}$ scrivi tutti gli elementi di $\wp(H)$.

7.6. Dato $A = \{x \in \mathbb{N}/n < 5 \text{ e } n \text{ divisore di } 12\}$ scrivi tutti gli elementi di $\wp(A)$.

7.3 - Insieme unione

7.7. Dati $A = \{1, 2, 4, 5\}$ e $B = \{1, 3, 4, 5, 8\}$ determina la loro unione dopo aver rappresentato gli insiemi mediante diagrammi di Eulero-Venn.

7.8. Dati gli insiemi $L = \{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$, $M = \{4, 5, 6, 7, 10\}$ e $N = \{2, 3, 5, 7, 9, 10\}$ determina l'insieme unione completando prima la rappresentazione grafica poi quella tabulare.



7.9. Dati gli insiemi C delle lettere della parola “GIARDINO” e D delle lettere della parola “ORA”, determina la loro unione aiutandoti con la rappresentazione grafica.

7.4 - Insieme intersezione

7.10. Dati $A = \{1, 2, 4, 5\}$ e $B = \{1, 3, 4, 5, 8\}$ determina la loro intersezione dopo aver rappresentato gli insiemi mediante diagrammi di Eulero-Venn.

7.11. Dati gli insiemi C delle lettere della parola “LIBRO” e D delle lettere della parola “PASTA” determina la loro intersezione aiutandoti con la rappresentazione grafica.

7.12. Considerando i 3 insiemi $S = \{a, b, c, e, f, s, t\}$, $T = \{a, c, g, h, l, s\}$ e $U = \{b, c, d, g, s, t\}$, determina l’insieme intersezione dando sia la rappresentazione grafica sia quella tabulare.

7.13. Determina l’intersezione tra i seguenti insiemi:

a) $A = \{-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3\}$, $B = \{-2, -1, 0, +1, +2, +3, +4\}$; $A \cap B = \dots$
b) $A = \{x \in \mathbb{N} / 2 \leqslant x \leqslant 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} / 3 < x < 7\}$; $B \cap A = \dots$
c) $A = \{x \in \mathbb{Z} / -5 \leqslant x \leqslant +5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} / -15 \leqslant x < 3\}$; $A \cap B = \dots$
d) $A = \{x \in \mathbb{N} / x > 100\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} / 10 < x < 20\}$; $B \cap A = \dots$
e) $A = \{l$ lettera di “SATURNO”$\}$, $B = \{l$ lettera di “NETTUNO”$\}$; $A \cap B = \dots$

7.5 - Insieme differenza

7.14. Dati gli insiemi $E = \{x / x$ è una lettera della parola “cartellone”$\}$ e $F = \{x / x$ è una lettera della parola “martello”$\}$, determina $E - F$ e $F - E$.

7.5 - Insieme complementare

7.15. Verifica, utilizzando la rappresentazione grafica, che

a) $\overline{A}_U \cup A = U$;
b) $(A - B) \cup (B - A) \cup (\overline{A \cup B}) = \overline{A \cap B}$.

7.16. Dati E ed F sottoinsiemi di un insieme U, l’insieme definito da $\overline{E \cap F}$ è uguale a:

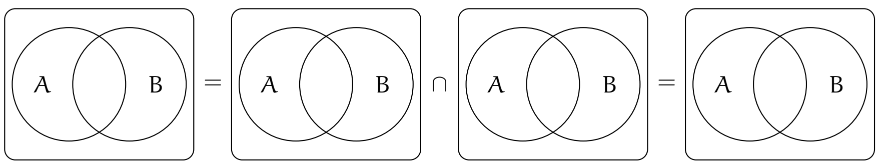
$\boxed{A}$ $E \cup F$ $\boxed{B}$ $\overline{E \cup F}$ $\boxed{C}$ $E \cap F$ $\boxed{D}$ $\overline{E} \cup \overline{F}$

7.17. Dati G ed H sottoinsiemi di un insieme U, l’insieme definito da $\overline{G \cup H}$ è uguale a:

$\boxed{A}$ $\overline{G \cap H}$ $\boxed{B}$ $\overline{G} \cap \overline{H}$ $\boxed{C}$ $\overline{G \cap \overline{H}}$ $\boxed{D}$ nessuno dei precedenti

7.6 - Leggi di De Morgan

7.18. Dimostra la seconda legge di De Morgan, annerendo gli spazi opportuni.



$(\overline{A \cup B})$ $\overline{A}$ $\overline{B}$ $\overline{A} \cap \overline{B}$

7.7 - Prodotto cartesiano fra insiemi

7.19. Sia $E = \{x \in N/1 \leqslant x < 3\}$, $F = \{x/x$ è una vocale della parola "TELEFONO"$\}$ e $G = \{x \in N/x < -6\}$. Allora:

a) $E = \{1, \ldots\ldots\ldots\}$;
b) $F = \{e, \ldots\ldots\ldots\}$;
c) $G = \{\ldots\ldots\ldots\}$;
d) $E \times F = \{(1;e), \ldots\ldots\ldots\}$;
e) $F \times E = \{(e;1), \ldots\ldots\ldots\}$;
f) $F \times G = \{\ldots\ldots\ldots\}$;
g) $G \times E = \{\ldots\ldots\ldots\}$.

7.20. Quanti sono gli elementi del prodotto cartesiano $A \times B$, dove A ha 6 elementi, B ne ha 3:

$\boxed{A}$ 9 $\boxed{B}$ 18 $\boxed{C}$ 6 $\boxed{D}$ Non si può sapere.

7.21. Sapendo che $E \times F = \{(x;x), (x;y), (x;z), (y;x), (y;y), (y;z)\}$, indica gli elementi di E e di F:

a) $E = \{\ldots\ldots\ldots\}$; b) $F = \{\ldots\ldots\ldots\}$.

7.22. Se $A \times B$ ha 5 elementi, da quanti elementi possono essere costituiti A e B?

$\boxed{A}$ 1; 5 $\boxed{B}$ 3; 2 $\boxed{C}$ 6; 1 $\boxed{D}$ 2; 3.

7.23. Dati gli insiemi $A = \{3, 5, 6\}$ e $B = \{-2, 1\}$ costruisci il diagramma cartesiano di $A \times B$ ed elencane gli elementi.

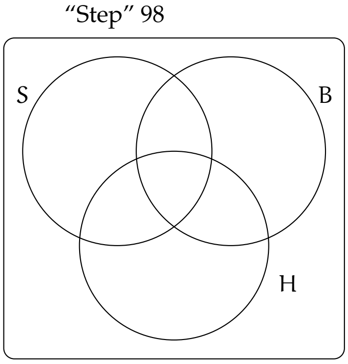
7.24. Dato $A = \{0, 1, 2\}$ calcola $A \times A$.

7.8 - I diagrammi di Eulero-Venn come modello di un problema

7.25. La scuola "Step" organizza corsi di Salsa, Hip Hop e Break Dance.

a) Gli iscritti ai corsi sono in tutto 98;
b) 6 frequentano tutti e tre i corsi;
c) 37 frequentano il corso di Salsa;
d) 15 solo i corsi di Salsa e di Hip Hop;
e) 7 solo i corsi Salsa e Break Dance;
f) 9 almeno Hip Hop e Break Dance;
g) 28 Salsa o Break Dance ma non Hip Hop.

Quanti praticano solo Hip Hop?
Rappresentiamo la situazione con un diagramma di Eulero-Venn.



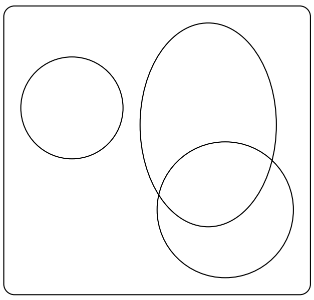
S è l'insieme degli iscritti al corso di Salsa, B l'insieme degli iscritti al corso di Break Dance, H l'insieme degli iscritti al corso di Hip Hop.

7.26. Il club "Argento vivo" ha 2500 iscritti; nel mese di gennaio ha organizzato alcune manifestazioni sportive alle quali hanno partecipato 850 degli iscritti e alcuni tornei di scacchi ai quali hanno partecipato in 780. 320 iscritti al club hanno potuto partecipare, grazie alla perfetta organizzazione, sia alle manifestazioni sportive sia ai tornei di scacchi. Quanti soci del club non hanno partecipato a nessuna delle iniziative e quanti invece hanno partecipato ad almeno una?

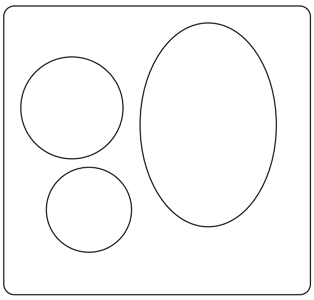
7.27 (*). In una scuola di musica si tengono 4 corsi di cui quello di pianoforte è obbligatorio per tutti i 100 studenti iscritti, mentre quelli di violino, flauto e chitarra sono facoltativi. Per essere ammessi agli esami di fine anno bisogna frequentare almeno un corso oltre a quello di pianoforte. Se gli alunni:

a) che frequentano il corso di flauto sono 25 e non frequentano né quello di violino, né quello di chitarra;
b) iscritti sia al corso di violino sia a quello di chitarra sono 20;
c) che frequentano il corso di violino sono 46;
d) che frequentano solo il corso di violino sono tanti quanti quelli che frequentano solo il corso di chitarra.

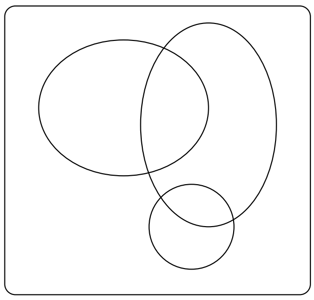
Quanti alunni non possono sostenere l'esame finale? Quale dei seguenti diagrammi di Venn può essere preso come modello della situazione?



A



B



C

7.28 (*)**.** I componenti di una compagnia teatrale sanno almeno cantare, ballare, recitare. Al termine di una rappresentazione si sa che 12 hanno almeno ballato, 8 hanno almeno cantato e 16 hanno almeno recitato. La versatilità dei componenti ha permesso che 5 abbiano almeno ballato e cantato, 3 abbiano almeno cantato e recitato, 8 abbiano ballato e recitato, 2 ballerini hanno ballato, cantato e recitato. Quanti sono i componenti della compagnia?

7.29 (*)**.** Da un'indagine condotta su consumatori adulti è risultato che 605 bevono almeno vino, 582 bevono almeno latte, 348 bevono almeno birra, 140 bevono almeno vino e birra, 85 bevono almeno vino e latte, 56 bevono almeno latte e birra, 25 bevono tutte e tre le bevande mentre 71 non bevono alcuna delle bevande citate.

a) Quante persone bevono una sola bevanda?
b) quante bevono almeno una bevanda?
c) quante sono le persone intervistate?

7.30 (*)**.** In una scuola di lingue sono iscritti 164 studenti; 80 seguono il corso di francese e 120 il corso di tedesco. Quanti studenti seguono entrambi i corsi? Quanti studenti seguono solo il corso di tedesco?

7.31. In un classe di 28 allievi, 18 frequentano il laboratorio di teatro, 22 il laboratorio di fotografia, 3 non frequentano alcun laboratorio. Rappresenta la situazione con un diagramma di Eulero-Venn. Quanto allievi frequentano entrambi i laboratori? Quanti frequentano almeno un laboratorio? Quanti non frequentano il laboratorio di teatro?

7.32. In una pizzeria, domenica sera, erano presenti 140 persone: 50 hanno mangiato pizza e calzone, 20 hanno mangiato solo calzone e 15 non hanno mangiato né pizza né calzone. Il pizzaiolo si chiede se può conoscere in base alle precedenti informazioni, quante pizze ha preparato. Aiutalo a risolvere il suo problema illustrando la situazione con un diagramma di Venn, assegnando a ciascun insieme la sua cardinalità.

7.33. In un paese di 3200 abitanti arrivano due quotidiani: il primo è letto da 850 persone, il secondo da 780. Poiché 320 persone leggono entrambi i quotidiani, quante persone non leggono alcun quotidiano e quante almeno uno?

7.34 (Test di ammissione a architettura 2008)**.** Nella classe di Asdrubale ci sono 37 allievi. Tutti si sono iscritti ad almeno una delle due attività extracurriculari (musica e pallavolo). Alla fine 15 fanno musica e 28 fanno pallavolo. Quanti allievi, frequentando entrambe le attività, hanno la necessità di programmare gli orari per evitare sovrapposizioni?

$\boxed{\text{A}}$ 13 $\boxed{\text{B}}$ 9 $\boxed{\text{C}}$ 16 $\boxed{\text{D}}$ 22 $\boxed{\text{E}}$ 6

7.35 (Test di ammissione a medicina 2008)**.** In un'aula scolastica, durante la ricreazione, 14 studenti stanno seduti, 8 mangiano la pizza. Con questi dati si può concludere con certezza che il numero totale N degli studenti è:

$\boxed{\text{A}}$ $N > 14$ $\boxed{\text{B}}$ $N < 14$ $\boxed{\text{C}}$ $N > 22$ $\boxed{\text{D}}$ $N = 22$ $\boxed{\text{E}}$ $N \geqslant 14$

7.36. In una scuola di 150 alunni ci sono 23 studenti che frequentano il corso ECDL, 41 studenti che frequentano solo il corso di Inglese, 3 studenti che frequentano tutti e due i corsi. Quanti sono gli studenti che frequentano solo il corso ECDL? Quanti studenti non frequentano nessuno dei due corsi?

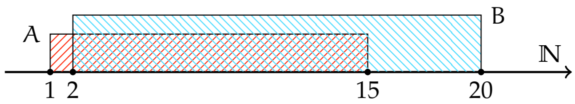
7.37. In un giorno di vacanza, 20 alunni dovrebbero studiare latino e matematica per recuperare le lacune: 8 non studiano latino, 10 studiano matematica e 4 non studiano niente. Quanti alunni studiano entrambe le materie?

7.38. In una classe di 20 alunni si sta organizzando una gita scolastica. Durante l'assemblea gli alunni raccolgono informazioni sulle mete già visitate: 18 hanno visitato Venezia, 14 Roma, 5 Firenze. Solo 3 hanno visitato tutte e tre le città, 5 hanno visitato Firenze e Venezia, 3 solo Venezia. Quanti hanno visitato solo

Firenze? Quanti hanno visitato Firenze e Roma? Quanti non hanno visitato nessuna delle tre città? Quanti non hanno visitato Roma?

7.9.2 Esercizi riepilogativi

7.39. Siano $A = \{x \in \mathbb{N} / 1 \leqslant x \leqslant 15\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} / 2 \leqslant x \leqslant 20\}$.



Quale delle seguenti affermazioni è vera:

$\boxed{\text{A}}$ $A \subset B$ $\boxed{\text{B}}$ $B \supset A$ $\boxed{\text{C}}$ $A = B$ $\boxed{\text{D}}$ $B \not\subset A$

7.40. Siano $A = \{x \in \mathbb{N} / x$ è pari e $(1 \leqslant x \leqslant 20)\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} / x$ è multiplo di 6 e $(2 \leqslant x \leqslant 18)\}$. Quale affermazione è vera?

$\boxed{\text{A}}$ $A \subset B$ $\boxed{\text{B}}$ $B \supset A$ $\boxed{\text{C}}$ $A = B$ $\boxed{\text{D}}$ $B \subset A$

7.41. Siano $A = \{x \in \mathbb{N} / 3 \leqslant x \leqslant 10\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} / 2 \leqslant x \leqslant 20\}$. Quali delle seguenti affermazioni è vera:

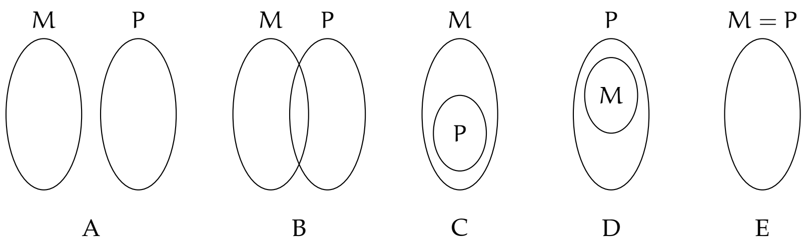
$\boxed{\text{A}}$ $A \subset B$ $\boxed{\text{B}}$ $B \supset A$ $\boxed{\text{C}}$ $A = B$ $\boxed{\text{D}}$ $B \not\subset A$

7.42. Individua tutti i possibili sottoinsiemi propri formati da tre elementi dell'insieme C ={a, e, i, o, u}.

7.43. Sia $A = \{1, 2, 3, 4\}$ scrivi i possibili sottoinsiemi propri e impropri di A.

7.44. Associa a ogni diagramma la corretta rappresentazione grafica. Attenzione ci può essere più di una risposta corretta.

a) $M \subset P$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{D}}$ $\boxed{\text{E}}$
b) $P \supseteq M$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{D}}$ $\boxed{\text{E}}$
c) $M \subseteq (M \cup P)$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{D}}$ $\boxed{\text{E}}$
d) $M \not\subset P$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{D}}$ $\boxed{\text{E}}$
e) $P \subset (P \cup M)$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{D}}$ $\boxed{\text{E}}$
f) $M \neq P$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{D}}$ $\boxed{\text{E}}$



7.45. Determina l'unione tra i seguenti insiemi.

a) $A = \{-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3\}$, $B = \{-2, -1, 0, +1, +2, +3, +4\}$. $A \cup B = \dots\dots\dots\dots$;
b) $A = \{x \in \mathbb{N}/2 \leqslant x \leqslant 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}/3 < x < 7\}$. $A \cup B = \dots\dots\dots\dots$;
c) $A = \{x \in \mathbb{Z}/-5 \leqslant x \leqslant +5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z}/-15 \leqslant x < 3\}$. $A \cup B = \dots\dots\dots\dots$;
d) $A = \{x \in \mathbb{N}/x > 100\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}/10 < x < 20\}$. $A \cup B = \dots\dots\dots\dots$;
e) $A = \{l$ lettera di SATURNO$\}$, $B = \{l$ lettera di NETTUNO$\}$.$A \cup B = \dots\dots\dots\dots$

7.46. Sia M_3 l'insieme dei multipli 3 e M_4 l'insieme dei multipli di 4, in generale M_n l'insieme dei multipli del numero n.

a) Calcola $M_3 \cap M_4$. Si tratta di $M \dots$ l'insieme dei multipli di $\dots$;
b) calcola $M_6 \cap M_4$. Si tratta di $M \dots$ l'insieme dei multipli di $\dots$;
c) calcola $M_{60} \cap M_{48}$;
d) sai dedurre una regola che, dati due numeri naturali m e n calcoli $M_m \cap M_n$? Può accadere che questo insieme sia vuoto?

7.47. Sia D_4 l'insieme dei divisori di 4 e D_6 l'insieme dei divisori di 6, in generale D_n l'insieme dei divisori del numero n.

a) Calcola $D_4 \cap D_6$. Si tratta di $D \dots$ l'insieme dei divisori di $\dots$;
b) calcola $D_{60} \cap D_{48}$;
c) sai dedurre una regola che, dati due numeri naturali m e n, calcoli $D_m \cap D_n$? Può accadere che questo insieme sia vuoto? Qual è il numero minimo di elementi che può contenere?

7.48. $A = \{x/x \in \mathbb{Q}, 0 < x < \frac{3}{2}\}$ e $B = \{x/x \in \mathbb{Q}, 1 < x < 6\}$, calcola $A \cap B = \dots$

7.49. $A = \{x/x \in \mathbb{Q}, -1 < x < 0\}$ e $B = \{x/x \in \mathbb{Q}, \frac{1}{3} < x < 6\}$, calcola $A \cap B = \dots$

7.50. $A = \{x/x \in \mathbb{Q}, -5 < x < 10\}$ e $B = \{x/x \in \mathbb{Q}, \frac{1}{3} < x < 6\}$, calcola $A \cap B = \dots$

7.51. $A = \{x/x \in \mathbb{Q}, 0 \leqslant x < 10\}$ e $B = \{x/x \in \mathbb{Q}, \frac{1}{3} < x \leqslant 6\}$, calcola $A \cap B = \dots$

7.52. Dato l'insieme $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 32\}$ e il suo sottoinsieme B dei multipli di 3, determina gli insiemi $A - B$ e $B - A$.

7.53. Dato l'insieme $X = \{x \in N/10 \leqslant x \leqslant 100\}$ e $Y = \{y \in N/10 < y < 100\}$ determina $X - Y$ e $Y - X$.

7.54. Determina la differenza tra i seguenti insiemi:

a) $A = \{-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3\}$, $B = \{-2, -1, 0, +1, +2, +3, +4\}$. $A - B = \dots$;
b) $A = \{x \in \mathbb{N}/2 \leqslant x \leqslant 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}/3 < x < 7\}$. $B - A = \dots$;
c) $A = \{x \in \mathbb{Z}/-5 \leqslant x \leqslant +5\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z}/-15 \leqslant x < 3\}$. $A - B = \dots$;
d) $A = \{x \in \mathbb{N}/x > 100\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}/10 < x < 20\}$. $B - A = \dots$;
e) $A = \{l$ lettera di SATURNO$\}$, $B = \{l$ lettera di NETTUNO$\}$. $A - B = \dots$

7.55. Dati gli insiemi C e D tali che $C \subset D$ completa le seguenti relazioni aiutandoti con la rappresentazione grafica

a) $D - C =$
b) $D \cap \overline{C} =$
c) $\overline{C \cap D} =$
d) $C \cup \overline{C} =$
e) $C - D =$
f) $C \cap \overline{C} =$

7.56. Quale delle seguenti scritture corrisponde a $\overline{X \cap \overline{Y}}$:

a) $\overline{X} \cup \overline{Y}$
b) $\overline{X} \cap \overline{Y}$
c) $\overline{X} \cup Y$
d) $X \cup \overline{Y}$

7.57. Esegui le operazioni indicate $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$.

a) $A = \{2, 4, 6, 8\}$ $B = \{1, 3, 6, 9\}$
b) $A =$\{a,e,i,o,u\} $B =$\{a,b,c,d,e\}
c) $A = \emptyset$ $B = \{0\}$
d) $A = \{x \in \mathbb{N} / x$ è pari$\}$ $B = \{x \in \mathbb{N} / x$ è dispari$\}$
e) $A = \{x \in \mathbb{N} / x$ è multiplo di $2\}$ $B = \{x \in \mathbb{N} / x$ è multiplo di $4\}$
f) $A = \{x \in \mathbb{Z} / -5 \leqslant x \leqslant 5\}$ $B = \{x \in \mathbb{Z} / -2 \leqslant x \leqslant 8\}$
g) $A = \{x \in \mathbb{N} / x$ è lettera di casa$\}$ $B = \{x \in \mathbb{N} / x$ è lettera di caserma$\}$

7.58. Dato $A = \{x \in \mathbb{N} / x$ è multiplo di $2\}$ determina $\complement_{\mathbb{N}} A$.

7.59. Dato $A = \{I, II, III\}$ e $B = \{a, b\}$ determina $A \times B$.

7.60. Dato $B = \{1, 2, 3\}$ calcola $(B \cup B) \cap B$.

7.61. $A =$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}, $B =$\{3, 6, 9, 12, 15, 18\}, $C =$\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\} calcola $A \cap B$, $A \cup C$, $(A \cap B) \cup C$, $B \cap C$, $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

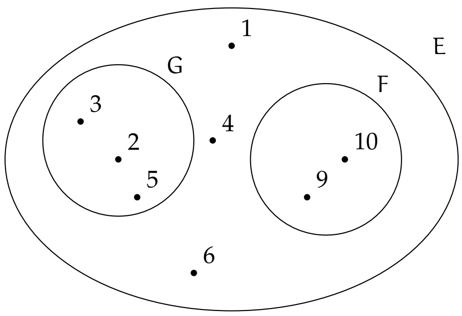
7.62. $A = \{x \in \mathbb{Z} / -5 \leqslant x < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} / -3 < x \leqslant 2\}$ calcola $A \cup B$, $A \cap B$, $B - A$, $\complement_A B$, $A \times (A \cap B)$ e $\wp(B - A)$.

7.63. Per ciascuna delle seguenti affermazioni false dai un controesempio.

a) $A \cup B = A$;
b) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$;
c) se x è multiplo di 2 allora è anche multiplo di 4;
d) se card $A = 2$ e card $B = 5$ allora card $A \cup B = 7$;
e) se card $A = 2$ e card $B = 5$ allora card $A \cap B = 2$.

7.64. In base alla figura rispondi alle domande:

a) L'insieme E ha 5 elementi $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
b) $2 \in E$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
c) $3 \notin G$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
d) $F \subset G$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
e) $F \subset E$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
f) $\emptyset \subseteq G$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
g) $\text{card}(E) = 8$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
h) $10 \in E$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
i) $F \cap E = F$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
j) $F \cup G = E$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
k) $(E - F) - G = \{1, 4\}$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$



7.65. Dato l'insieme $A = \{0; 1; 5; 6; 9\}$ stabilisci quali dei seguenti sono o no suoi sottoinsiemi, completando con gli opportuni simboli le scritture a fianco indicate.

a) $B = \{1; 5; 6\}$	$B \ldots\ldots\ldots A$	d) $E = \{0\}$	$E \ldots\ldots\ldots A$
b) $C = \{0; 1; 3; 5\}$	$C \ldots\ldots\ldots A$	e) $F = \{5; 6; 7\}$	$F \ldots\ldots\ldots A$
c) $D = \{\}$	$D \ldots\ldots\ldots A$	f) $G = \{6; 0; 1; 5; 9\}$	$G \ldots\ldots\ldots A$

7.66. Siano dati i seguenti insiemi $C = \{x/x$ è una lettera della parola "REMARÈ'$\}$, $D = \{x/x$ è una lettera della parola "VOLARÈ'$\}$, $E = \{x/x$ è una lettera della parola "AMARÈ'$\}$, indica quali delle seguenti relazioni sono vere:

$\boxed{A}$ $D \subseteq C$ $\boxed{B}$ $D \not\subset E$ $\boxed{C}$ $C = E$ $\boxed{D}$ $E \supseteq C$

7.67. Completa la seguente tabella:

Simbologia	Significato
$A = \{a, b, c, d\}$	A è formato dagli .... a, b, c, d.
$a \in A$	L'elemento a .... all'insieme A.
....	L'elemento f non appartiene all'insieme A.
$B \subset A$	L'insieme B è ...... nell'insieme A, ovvero B è un ...... di A.
....	L'insieme vuoto è un sottoinsieme di A.
....	L'insieme C è l'unione degli insiemi A e B.
$D = A \cap B$	L'insieme D è ....degli insiemi A e B.
$A \cap F = \emptyset$	A e F sono insiemi .... cioè non hanno ....
$L = \complement_A B$	L'insieme L è ....
....	L'insieme M è la differenza tra A e B.

7.68. Rappresenta graficamente l'insieme $A = \{x \in \mathbb{N}/x \leqslant 25$ e x è pari$\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N}/x \leqslant 27$ e x è multiplo di $4\}$ e stabilisci se $A \supseteq B$.

7.69. Verifica usando i diagrammi di Eulero-Venn che se $A \subset B$ e $B \subset C$ allora $A \subset C$. Le relazioni valgono anche se il simbolo $\subset$ viene sostituito con $\subseteq$?

7.70. Dato $A = \{\text{do, re, mi}\}$ determina l'insieme delle parti $\wp(A)$.

7.71. Considerato l'insieme $X = \{a, c, d, t, o\}$ stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false.

a) $\{x/x$ è una vocale della parola "CAROTA"$\} \subset X$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
b) $\{a, t\} \not\subset \wp(X)$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
c) $\{a, t\} \in \wp(X)$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
d) $0 \in X$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
e) $\emptyset \in \wp(X)$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
f) $X \in \wp(X)$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

7.72. Se U è l'insieme universo degli italiani, D l'insieme delle donne italiane, L l'insieme degli italiani laureati, S l'insieme degli italiani sposati, cosa rappresentano i seguenti insiemi?

a) $\overline{D}$;
b) $L \cap D$;
c) $\overline{L \cup D \cup S}$;
d) $L - S$;
e) $\overline{L} \cap S$;
f) $\overline{L \cap D \cap S}$.

7.73. Quanti elementi ha $\wp(H)$ sapendo che H ha 7 elementi?

$\boxed{A}$ 49 $\boxed{B}$ 64 $\boxed{C}$ 128 $\boxed{D}$ 7 $\boxed{E}$ 14

7.74. Scrivi l'insieme che ha per insieme delle parti: $\{\emptyset, \{\text{Mauro}\}, \{\text{Mario}\}\{\text{Mauro, Mario}\}\}$.

7.75. Se $A \cup B = B$ cosa puoi dire di A e B?

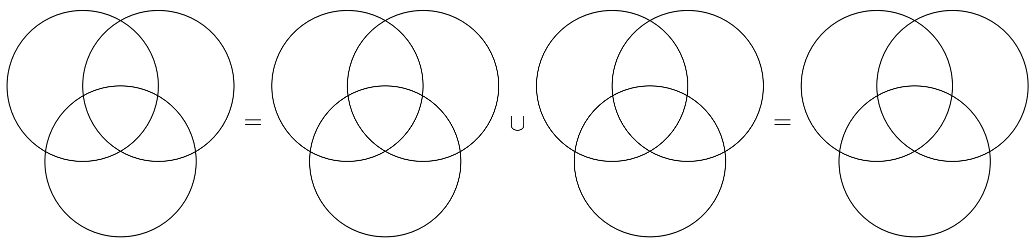
$\boxed{A}$ $B \subseteq A$ $\boxed{B}$ $A \notin B$ $\boxed{C}$ $A \subseteq B$ $\boxed{D}$ $A \subset B$ $\boxed{E}$ $A \cap B = \emptyset$

7.76. Dati gli insiemi $A = \{10, 20, 30, 40, 50\}$, $B = \{20, 30, 50\}$, determina un insieme C tale che:

a) $B \cup C = A$;
b) $A \cap C = B$;
c) $C \cup C = B$;
d) $C \cap C = A$.

7.77. Dati gli insiemi $A = \{x \in \mathbb{N} / x \leqslant 10 \text{ e } x \text{ pari}\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} / x \leqslant 20 \text{ e } x \text{ divisibile per } 4\}$, $C = \{1, 2\}$ determina $(A \cap B)xC$.

7.78. Dimostra la proprietà distributiva dell'intersezione rispetto l'unione annerendo gli spazi opportuni.

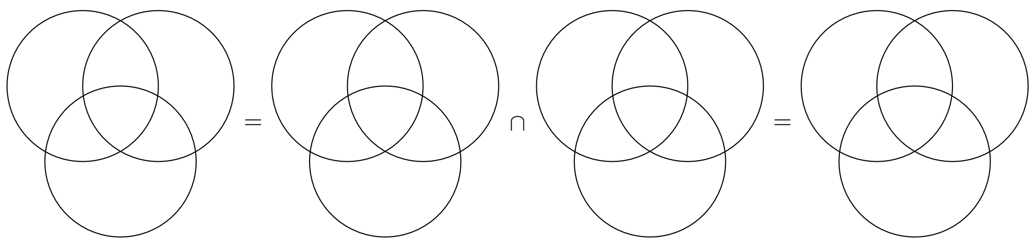


$X \cap (Y \cup Z)$ $X \cap Y$ $X \cap Z$ $(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

7.79. Se $E - F = E$ cosa puoi dire di E e F?

$\boxed{A}$ $E \cup F = E$ $\boxed{B}$ $E = F$ $\boxed{C}$ $E \subseteq F$ $\boxed{D}$ $F \subset E$ $\boxed{E}$ $E \cap F = \emptyset$

7.80. Dimostra la proprietà distributiva dell'unione rispetto l'intersezione annerendo gli spazi opportuni e inserendo le formule opportune.



... ...

7.81. Dati i seguenti insiemi $A = \{x \in N / x \leqslant 25\}$, $B = \{x \in N / 4 < x \leqslant 9\}$, $C = \{x \in N / x < 25\}$ e $D = \{x \in N / x > 7\}$. Scegli fra i seguenti i loro complementari.

a) $E = \{x \in N / x \geqslant 25\}$;
b) $F = \{x \in N / x \leqslant 6\}$;
c) $G = \{x \in N / x > 25\}$;
d) $H = \{x \in N / x < 7\}$;
e) $I = \{x \in N / x < 4 \text{ e } x \geqslant 8\}$;
f) $L = \{x \in N / x < 4 \text{ o } x \geqslant 10\}$;
g) $M = \{x \in N / x \leqslant 4 \text{ e } x \geqslant 9\}$.

7.82. Quali dei seguenti sono sottoinsiemi dei numeri pari? L'insieme dei

$\boxed{A}$ multipli di 4 $\boxed{B}$ multipli di 3 $\boxed{C}$ multipli di 6 $\boxed{D}$ numeri primi

7.83 (*). In una classe di 30 allievi 16 hanno debito in matematica, 20 in italiano, 10 non hanno avuto nessun debito. Rappresenta la situazione con un diagramma di Eulero-Venn.

a) quanti allievi hanno debito in entrambe le materie;
b) quanti allievi hanno almeno un debito;
c) quanti allievi non hanno debito in italiano;
d) quanti allievi non hanno debito in matematica.

7.84. Quali dei seguenti insiemi possono essere sottoinsiemi dell'insieme dei quadrilateri? L'insieme dei:

a) quadrati;
b) rombi;
c) trapezi;
d) triangoli equilateri;
e) poligoni;
f) cerchi;
g) parallelogrammi.

7.85. Dati gli insiemi $A = \{x/x \in \mathbb{N}, x < 10\}$, $B = \{x/x \in \mathbb{N}, 5 < x \leqslant 16\}$, $C = \{x/x \in \mathbb{N}, x \geqslant 7\}$ determina:

a) $A \cup B \cup C$;
b) $A \cap B \cap C$;
c) $(A \cup B) \cap C$;
d) $(B \cap C) \cup A$.

7.86. Dato $A = \{x/x$ è un numero naturale, x è pari e $x > 12\}$ determina l'insieme complementare di A.

7.87. Quanti sono i sottoinsiemi dell'insieme che contiene come elemento l'insieme vuoto?

7.88. $A = \{x/x$ è divisore di $12\}$, $B = \{x/x$ è divisore di $6\}$, $C = \{x/x$ è divisore di $15\}$, determina:

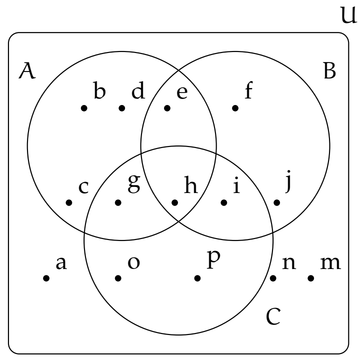
a) $A \cup B$;
b) $A \cup C$;
c) $A \cup B \cup C$;
d) $A \cap B$;
e) $B \cap C$;
f) $A \cap C$;
g) $A \cap B \cap C$;
h) $A \cap (B \cup C)$.

7.89. Dato l'insieme $U = \{x/x = 2n + 1, n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant n \leqslant 5\}$:

a) rappresenta U in forma tabulare;
b) costruisci due sottoinsiemi propri A e B di U tali che $A \cap B = \emptyset$;
c) determina $A \cup B$ e $A - B$, dai il risultato con rappresentazione tabulare e mediante diagrammi di Eulero-Venn.

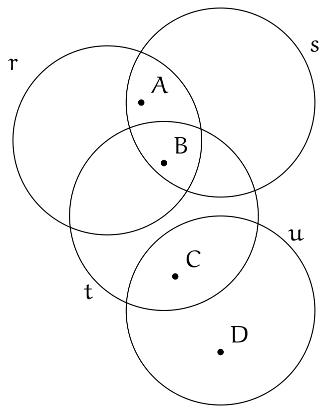
7.90. In base agli insiemi rappresentati con il diagramma di Eulero-Venn determina gli insiemi richiesti:

a) $A \cup B$;
b) $\overline{A \cup B \cup C}$;
c) $A \cap B$;
d) $B \cap C$;
e) $A \cap B \cap C$;
f) $A \cap (B \cup C)$;
g) $A \cup (B \cap C)$;
h) $B \cap \overline{C}$;
i) $(A \cup B) - C$;
j) $B \cap \overline{C}$
k) $C - (A \cap B)$;
l) $\overline{(A \cup B)} - C$.



7.91. Determina l'insieme $\wp(A)$, insieme delle parti di A, dove A è l'insieme delle lettere della parola "NONNA".

7.92. Nel seguente diagramma di Eulero-Venn gli insiemi r, s, t sono rette, gli elementi A, B, C, D sono punti. Dai una rappresentazione geometria, rappresentando le rette e che corrispondono alla seguente situazione.



7.9.3 Risposte

7.27. 3; A

7.28. 22.

7.29. a) 1048, b) 1279, c) 1350.

7.30. 36; 84.

7.84. a) 16, b) 20, c) 10, d) 14.