19 Frazioni algebriche

19.1 Definizione di frazione algebrica

Diamo la seguente definizione:

Definizione 19.1. Si definisce *frazione algebrica* una espressione del tipo $\frac{A}{B}$ dove A e B sono polinomi.

Osserviamo che un'espressione di questo tipo si ottiene talvolta quando ci si propone di ottenere il quoziente di due monomi.

Esempio 19.1. Determinare il quoziente tra $m_1 = 5a^3b^2c^5$ e $m_2 = -3a^2bc^5$.

Questa operazione si esegue applicando, sulla parte letterale, le proprietà delle potenze e sul coefficiente la divisione tra numeri razionali: $q = 5a^3b^2c^5 : \left(-3a^2bc^5\right) = -\frac{5}{3}ab$. Il quoziente è quindi un monomio.

Esempio 19.2. Determinare il quoziente tra $m_1 = 5a^3b^2c^5$ e $m_2 = -3a^7bc^5$.

In questo caso l'esponente della a nel dividendo è minore dell'esponente della stessa variabile nel divisore quindi si ottiene $q_1 = 5a^3b^2c^5 : \left(-3a^7bc^5\right) = -\frac{5}{3}a^{-4}b$.

Questo non è un monomio per la presenza dell'esponente negativo alla variabile a. Quindi: $q_1 = 5a^3b^2c^5 : \left(-3a^7bc^5\right) = \frac{5b}{3a^4}$. Il quoziente è una frazione algebrica.

Quando vogliamo determinare il quoziente di una divisione tra un monomio e un polinomio e tra polinomi si presentano diversi casi.

Caso I Monomio diviso un polinomio.

- Determinare il quoziente tra: $D = 2a^3b$ e $d = a^2 + b$.

Il dividendo è un monomio e il divisore un polinomio. Questa operazione non ha come risultato un polinomio ma una frazione. $q = 2a^3b : \left(a^2 + b\right) = \frac{2a^3b}{a^2+b}$.

Caso II Un polinomio diviso un monomio.

- Determinare il quoziente tra: $D = 2a^3b + a^5b^3 - 3ab^2$ e $d = \frac{1}{2}ab$.

$q = \left(2a^3b + a^5b^3 - 3ab^2\right) : \left(\frac{1}{2}ab\right) = 4a^2 + 2a^4b^2 - 6b$. Il quoziente è un polinomio.

- Determinare il quoziente tra: $D = 2a^3b + a^5b^3 - 3ab^2$ e $d = \frac{1}{2}a^5b$.

Dividiamo ciascun termine del polinomio per il monomio assegnato: il quoziente sarà $q = \left(2a^3b + a^5b^3 - 3ab^2\right) : \left(\frac{1}{2}a^5b\right) = \frac{4}{a^2} + 2b^2 - \frac{6b}{a^4}$. Il quoziente è una somma di frazioni algebriche.

Caso III Un polinomio diviso un altro polinomio.

➡ Determinare il quoziente tra: $D = x - 3$ e $d = x^2 + 1$.

La divisione tra polinomi in una sola variabile è possibile, quando il grado del dividendo è maggiore o uguale al grado del divisore; questa condizione non si verifica nel caso proposto. Il quoziente è la frazione algebrica $q = \frac{x-3}{x^2+1}$.

Conclusione Una frazione algebrica può essere considerata come il quoziente indicato tra due polinomi. Ogni frazione algebrica è dunque un'espressione letterale fratta o frazionaria.

19.2 Condizioni di esistenza per una frazione algebrica

Per discussione di una frazione algebrica intendiamo la ricerca dei valori che attribuiti alle variabili non la rendano priva di significato. Poiché non è possibile dividere per 0, una frazione algebrica perde di significato per quei valori che attribuiti alle variabili rendono il denominatore uguale a zero. Quando abbiamo una frazione algebrica tipo $\frac{A}{B}$ poniamo sempre la condizione di esistenza (abbreviato con C. E.): $B \neq 0$.

Esempio 19.3. Determinare le condizioni di esistenza di $\frac{1+x}{x}$.
Questa frazione perde di significato quando il denominatore si annulla: C. E. $x \neq 0$.

Esempio 19.4. Determinare le condizioni di esistenza di $\frac{x}{x+3}$.
Questa frazione perde di significato quando il denominatore si annulla: C. E. $x \neq -3$.

Esempio 19.5. Determinare le condizioni di esistenza di $\frac{3a+5b-7}{ab}$.
C. E. $ab \neq 0$. Sappiamo che un prodotto è nullo quando almeno uno dei suoi fattori è nullo, dunque affinché il denominatore non si annulli non si deve annullare né a né b, quindi $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Concludendo C. E. $a \neq 0 \wedge b \neq 0$.

Esempio 19.6. Determinare le condizioni di esistenza di $\frac{-6}{2x+5}$.
C. E. $2x + 5 \neq 0$, per risolvere questa disuguaglianza si procede come per le usuali equazioni: $2x + 5 \neq 0 \Rightarrow 2x \neq -5 \Rightarrow x \neq -\frac{5}{2}$ si può concludere C. E. $x \neq -\frac{5}{2}$.

Esempio 19.7. Determinare le condizioni di esistenza di $\frac{-x^3-8x}{x^2+2}$.
C. E. $x^2 + 2 \neq 0$, il binomio è sempre maggiore di 0 perché somma di due grandezze positive. Pertanto la condizione $x^2 + 2 \neq 0$ è sempre verificata e la frazione esiste sempre. Scriveremo C. E. $\forall x \in \mathbb{R}$.

Esempio 19.8. Determinare le condizioni di esistenza di $\frac{2x}{x^2-4}$.
C. E. $x^2 - 4 \neq 0$; per rendere nullo il denominatore si dovrebbe avere $x^2 = 4$ e questo si verifica se $x = +2$ oppure se $x = -2$; possiamo anche osservare che il denominatore è una differenza di quadrati e che quindi la condizione di esistenza si può scrivere come C. E. $(x-2)(x+2) \neq 0$, essendo un prodotto possiamo scrivere C. E. $x - 2 \neq 0 \wedge x + 2 \neq 0$ e concludere: C. E. $x \neq 2 \wedge x \neq -2$.

Procedura 19.1. *Determinare la condizione di esistenza di una frazione algebrica:*

a) porre il denominatore della frazione diverso da zero;
b) scomporre in fattori il denominatore;
c) porre ciascun fattore del denominatore diverso da zero;
d) escludere i valori che annullano il denominatore.

✍ *Esercizi proposti:* 19.1, 19.2, 19.3, 19.4

19.3 Semplificazione di una frazione algebrica

Semplificare una frazione algebrica significa dividere numeratore e denominatore per uno stesso fattore diverso da zero, in questo modo infatti la proprietà invariantiva della divisione garantisce che la frazione non cambia di valore. Quando semplifichiamo una frazione numerica dividiamo il numeratore e il denominatore per il loro MCD che è sempre un numero diverso da zero, ottenendo una frazione ridotta ai minimi termini equivalente a quella assegnata. Quando ci poniamo lo stesso problema su una frazione algebrica, dobbiamo porre attenzione a escludere quei valori che attribuiti alle variabili rendono nullo il MCD.

Esempio 19.9. Semplificare $\frac{16x^3y^2z}{10xy^2}$.

C. E. $xy^2 \neq 0 \rightarrow x \neq 0 \wedge y \neq 0$. Puoi semplificare la parte numerica. Per semplificare la parte letterale applica la proprietà delle potenze relativa al quoziente di potenze con la stessa base: $x^3 : x = x^{3-1} = x^2$ e $y^2 : y^2 = 1$. Quindi:

$$\frac{16x^3y^2z}{10xy^2} = \frac{8x^2z}{5} = \frac{8}{5}x^2z.$$

Esempio 19.10. Ridurre ai minimi termini la frazione: $\frac{a^2-6a+9}{a^4-81}$.

- Scomponiamo in fattori
  - il numeratore: $a^2 - 6a + 9 = (a-3)^2$;
  - il denominatore: $a^4 - 81 = \left(a^2-9\right)\left(a^2+9\right) = (a-3)(a+3)\left(a^2+9\right)$;
- riscriviamo la frazione $\frac{(a-3)^2}{(a-3)\cdot(a+3)\cdot(a^2+9)}$;
- C. E.$(a-3)\cdot(a+3)\cdot\left(a^2+9\right) \neq 0$ da cui C. E. $a \neq +3$ e $a \neq -3$, il terzo fattore non si annulla mai perché somma di un numero positivo e un quadrato;
- semplifichiamo: $\frac{(a-3)^{\cancel{2}}}{\cancel{(a-3)}\cdot(a+3)\cdot(a^2+9)} = \frac{a-3}{(a+3)(a^2+9)}$.

Esempio 19.11. Ridurre ai minimi termini la frazione in due variabili: $\frac{x^4+x^2y^2-x^3y-xy^3}{x^4-x^2y^2+x^3y-xy^3}$.

- Scomponiamo in fattori
  - $x^4 + x^2y^2 - x^3y - xy^3 = x^2\left(x^2+y^2\right) - xy\left(x^2+y^2\right) = x\left(x^2+y^2\right)(x-y)$;
  - $x^4 - x^2y^2 + x^3y - xy^3 = x^2\left(x^2-y^2\right) + xy\left(x^2-y^2\right) = x(x+y)^2(x-y)$;

- la frazione diventa: $\frac{x^4+x^2y^2-x^3y-xy^3}{x^4-x^2y^2+x^3y-xy^3} = \frac{x(x^2+y^2)(x-y)}{x(x+y)^2(x-y)}$;
- C. E. $x \cdot (x+y)^2 \cdot (x^2+y^2) \neq 0$ cioè C. E. $x \neq 0 \wedge x \neq -y$;
- semplifichiamo i fattori uguali: $\frac{\cancel{x}(x^2+y^2)\cancel{(x-y)}}{\cancel{x}(x+y)^2\cancel{(x-y)}} = \frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}$.

Le seguenti semplificazioni sono errate.

- $\frac{\cancel{a}+b}{\cancel{a}}$ questa semplificazione è errata perché a e b sono addendi, non sono fattori;
- $\frac{\cancel{x^2}+x+4}{\cancel{x^2}+2}$ questa semplificazione è errata perché x^2 è un addendo, non un fattore;
- $\frac{x^{\cancel{2}}+y^{\cancel{2}}}{(x+y)^{\cancel{2}}} = 1$, $\quad \frac{3\cancel{a}(a-2)}{3\cancel{a}x-7} = \frac{a-2}{x-7}$, $\quad \frac{\cancel{(x-y^2)}\cancel{(a-b)}}{\cancel{(y^2-x)}\cancel{(a-b)}} = 1$;
- $\frac{\cancel{(2x-3y)}}{(3y-2x)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{3y-2x}$, $\quad \frac{a^2+ab}{a^3} = \frac{\cancel{a}(a+b)}{a^{\cancel{3}2}} = \frac{\cancel{a}+b}{a^{\cancel{2}}} = \frac{1+b}{a}$.

✍ *Esercizi proposti:* 19.5,19.6, 19.7, 19.8, 19.9, 19.10, 19.11, 19.12

19.4 Moltiplicazione di frazioni algebriche

Il prodotto di due frazioni è una frazione avente per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.

Si vuole determinare il prodotto $p = \frac{7}{15} \cdot \frac{20}{21}$; possiamo scrivere prima il risultato dei prodotti dei numeratori e dei denominatori e poi ridurre ai minimi termini la frazione ottenuta: $p = \frac{7}{15} \cdot \frac{20}{21} = \frac{\cancel{140}^{4}}{\cancel{315}^{9}} = \frac{4}{9}$, oppure prima semplificare i termini delle frazioni e poi moltiplicare: $p = \frac{7}{15} \cdot \frac{20}{21} = \frac{\cancel{7}^{1}}{\cancel{15}^{3}} \cdot \frac{\cancel{20}^{4}}{\cancel{21}^{3}} = \frac{4}{9}$.

Esempio 19.12. Prodotto delle frazioni algebriche $f_1 = -\frac{3a^2}{10b^3c^4}$ e $f_2 = \frac{25ab^2c^7}{ab}$.

Poniamo le C. E. per ciascuna frazione assegnata ricordando che tutti i fattori letterali dei denominatori devono essere diversi da zero, quindi C. E. $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge c \neq 0$. Il prodotto è la frazione $f = -\frac{3a^2}{10b^3c^4} \cdot \frac{25ab^2c^7}{ab} = -\frac{15a^2c^3}{2b^2}$.

Esempio 19.13. Prodotto delle frazioni algebriche $f_1 = -\frac{3a}{2b+1}$ e $f_2 = \frac{10b}{a-3}$.

L'espressione è in due variabili, i denominatori sono polinomi di primo grado irriducibili; poniamo le condizioni di esistenza: C. E. $2b+1 \neq 0 \wedge a-3 \neq 0$ dunque C. E. $b \neq -\frac{1}{2} \wedge a \neq 3$. Il prodotto è la frazione $f = -\frac{3a}{2b+1} \cdot \frac{10b}{a-3} = -\frac{30ab}{(2b+1)(a-3)}$ in cui non è possibile alcuna semplificazione.

❑ **Osservazione** $f = -\frac{3\cancel{a}}{2\cancel{b}+1} \cdot \frac{10\cancel{b}}{\cancel{a}-3}$. Questa semplificazione contiene errori in quanto la variabile a è un fattore del numeratore ma è un addendo nel denominatore; analogamente la variabile b.

Esempio 19.14. Prodotto delle frazioni algebriche in cui numeratori e denominatori sono polinomi $f_1 = \frac{2x^2-x}{x^2-3x+2}$ e $f_2 = \frac{5x-5}{x-4x^2+4x^3}$.

- Scomponiamo in fattori tutti i denominatori (servirà per la determinazione delle C. E.) e tutti i numeratori (servirà per le eventuali semplificazioni),

- $f_1 = \frac{2x^2-x}{x^2-3x+2} = \frac{x\cdot(2x-1)}{(x-1)\cdot(x-2)}$,
- $f_2 = \frac{5x-5}{x-4x^2+4x^3} = \frac{5\cdot(x-1)}{x\cdot(2x-1)^2}$;

- poniamo le C. E. ricordando che tutti i fattori dei denominatori devono essere diversi da zero: C. E. $x-1 \neq 0 \wedge x-2 \neq 0 \wedge x \neq 0 \wedge 2x-1 \neq 0$ da cui C. E. $x \neq 1 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq \frac{1}{2}$;
- determiniamo la frazione prodotto, effettuando le eventuali semplificazioni:
  - $f = \frac{\cancel{x}\cdot\cancel{(2x-1)}}{\cancel{(x-1)}\cdot(x-2)} \cdot \frac{5\cdot\cancel{(x-1)}}{\cancel{x}\cdot(2x-1)^{\cancel{2}}} = \frac{5}{(x-2)(2x-1)}$.

✍ *Esercizi proposti:* 19.13, 19.14, 19.15, 19.16, 19.17

19.5 Potenza di una frazione algebrica

La potenza di esponente n, naturale diverso da zero, della frazione algebrica $\frac{A}{B}$ con $B \neq 0$ (C. E.) è la frazione avente per numeratore la potenza di esponente n del numeratore e per denominatore la potenza di esponente n del denominatore: $\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$.

Esempio 19.15. Calcoliamo $\left(\frac{x-2}{x^2-1}\right)^3$.

Innanzi tutto determiniamo le C. E. per la frazione assegnata

$$\frac{x-2}{x^2-1} = \frac{x-2}{(x-1)\cdot(x+1)}(x-1)(x+1) \neq 0,$$

da cui C. E. $x \neq 1 \wedge x \neq -1$. Dunque si ha

$$\left(\frac{x-2}{x^2-1}\right)^3 = \frac{(x-2)^3}{(x-1)^3\cdot(x+1)^3}.$$

19.5.1 Casi particolari dell'esponente

Se $n = 0$ sappiamo che qualsiasi numero diverso da zero elevato a zero è uguale a 1; lo stesso si può dire se la base è una frazione algebrica, purché essa non sia nulla. $\left(\frac{A}{B}\right)^0 = 1$ con $A \neq 0$ e $B \neq 0$.

Esempio 19.16. Quali condizioni deve rispettare la variabile a per avere $\left(\frac{3a-2}{5a^2+10a}\right)^0 = 1$?

- Scomponiamo in fattori numeratore e denominatore della frazione: $\left(\frac{3a-2}{5a\cdot(a+2)}\right)^0$;
- determiniamo le C. E. del denominatore: $a \neq 0 \wedge a+2 \neq 0$ da cui, C. E. $a \neq 0 \wedge a \neq -2$. Poniamo poi la condizione, affinché la frazione non sia nulla, che anche il numeratore sia diverso da zero. Indichiamo con C_0 questa condizione, dunque C_0: $3a-2 \neq 0$, da cui $a \neq \frac{2}{3}$;
- le condizioni di esistenza sono allora $a \neq -2 \wedge a \neq 0 \wedge a \neq \frac{2}{3}$.

Se n è intero negativo la potenza con base diversa da zero è uguale alla potenza che ha per base l'inverso della base e per esponente l'opposto dell'esponente. $\left(\frac{A}{B}\right)^{-n} = \left(\frac{B}{A}\right)^{+n}$ con $A \neq 0$ e $B \neq 0$.

Esempio 19.17. Determinare $\left(\dfrac{x^2+5x+6}{x^3+x}\right)^{-2}$.

- Scomponiamo in fattori numeratore e denominatore: $\left(\frac{(x+2)\cdot(x+3)}{x\cdot(x^2+1)}\right)^{-2}$;
- C. E. del denominatore $x \neq 0$ e $x^2+1 \neq 0$ da cui C. E. $x \neq 0$ essendo l'altro fattore sempre diverso da 0. Per poter determinare la frazione inversa dobbiamo porre le condizioni perché la frazione non sia nulla e cioè che anche il numeratore sia diverso da zero, quindi si deve avere $C_0 : (x+2)(x+3) \neq 0$ da cui $C_0 : x \neq -2$ e $x \neq -3$;
- quindi se $x \neq 0$, $x \neq -2$ e $x \neq -3$ si ha $\left(\frac{(x+2)\cdot(x+3)}{x\cdot(x^2+1)}\right)^{-2} = \frac{x^2\cdot(x^2+1)^2}{(x+2)^2\cdot(x+3)^2}$.

Esercizio proposto: 19.18

19.6 Divisione di frazioni algebriche

Il quoziente di due frazioni è la frazione che si ottiene moltiplicando la prima con l'inverso della seconda. Lo schema di calcolo può essere illustrato nel modo seguente, come del resto abbiamo visto nell'insieme dei numeri razionali:

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} = \frac{m \cdot q}{n \cdot p}.$$

Si vuole determinare il quoziente $q = \frac{5}{12} : \frac{7}{4}$. L'inverso di $\frac{7}{4}$ è la frazione $\frac{4}{7}$ dunque,

$$q = \frac{5}{12} : \frac{7}{4} = \frac{5}{\cancel{12}^{3}} \cdot \frac{\cancel{4}^{1}}{7} = \frac{5}{21}.$$

Esempio 19.18. Determinare il quoziente delle frazioni algebriche $f_1 = \frac{3a-3b}{2a^2b}$ e $f_2 = \frac{a^2-ab}{b^2}$.

- Scomponiamo in fattori le due frazioni algebriche: $f_1 = \frac{3a-3b}{2a^2b} = \frac{3\cdot(a-b)}{2a^2b}$ e $f_2 = \frac{a^2-ab}{b^2} = \frac{a\cdot(a-b)}{b^2}$;
- poniamo le condizioni d'esistenza dei denominatori: $2a^2b \neq 0 \wedge b^2 \neq 0$ da cui C. E. $a \neq 0 \wedge b \neq 0$;
- determiniamo la frazione inversa di f_2. Per poter determinare l'inverso dobbiamo porre le condizioni perché la frazione non sia nulla. Poniamo il numeratore diverso da zero, $C_0 : a \neq 0 \wedge a-b \neq 0$ da cui $C_0 : a \neq 0 \wedge a \neq b$;
- aggiorniamo le condizioni C. E. $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq b$;
- cambiamo la divisione in moltiplicazione e semplifichiamo:

$$\frac{3\cdot(a-b)}{2a^2b} : \frac{a\cdot(a-b)}{b^2} = \frac{3\cdot\cancel{(a-b)}}{2a^2\cancel{b}} \cdot \frac{b^{\cancel{2}}}{a\cdot\cancel{(a-b)}} = \frac{3b}{2a^3}.$$

Esercizi proposti: 19.19, 19.20, 19.21

19.7 Addizione di frazioni algebriche

19.7.1 Proprietà della addizione tra frazioni algebriche

Nell'insieme delle frazioni algebriche la somma:

- è commutativa: $f_1 + f_2 = f_2 + f_1$;
- è associativa: $(f_1 + f_2) + f_3 = f_1 + (f_2 + f_3) = f_1 + f_2 + f_3$;
- possiede l'elemento neutro, cioè esiste una frazione F^0 tale che per qualunque frazione f si abbia $F^0 + f = f + F^0 = f$ e $F^0 = 0$;
- ogni frazione algebrica f, possiede la frazione opposta $(-f)$ tale che

$$(-f) + f = f + (-f) = F^0 = 0.$$

Quest'ultima proprietà ci permette di trattare contemporaneamente l'operazione di addizione e di sottrazione, come abbiamo fatto tra numeri relativi; $(+1) + (-2)$ omettendo il segno di addizione $+$ e togliendo le parentesi diventa $1 - 2$; $(+1) - (-2)$ omettendo il segno di sottrazione $-$ e togliendo le parentesi diventa $1 + 2$. Come per i numeri relativi, quando si parlerà di somma di frazioni si intenderà "somma algebrica".

Esempio 19.19. Le frazioni $\frac{2x-3y}{x+y} + \frac{x+2y}{x+y}$ hanno lo stesso denominatore.
Poniamo le C. E. $x + y \neq 0$ da cui C. E. $x \neq -y$ allora

$$\frac{2x-3y}{x+y} + \frac{x+2y}{x+y} = \frac{(2x-3y)+(x+2y)}{x+y} = \frac{3x-y}{x+y}.$$

❑ **Osservazione** A questo caso ci si può sempre ricondurre trasformando le frazioni allo stesso denominatore. Si potrebbe scegliere un qualunque denominatore comune, ad esempio il prodotto di tutti i denominatori ma, scegliamo il mcm dei denominatori delle frazioni addendi per semplificare i calcoli.

Esempio 19.20. $\dfrac{x+y}{3x^2y} - \dfrac{2y-x}{2xy^3}$.
Dobbiamo trasformare le frazioni in modo che abbiano lo stesso denominatore:

- calcoliamo il $\text{mcm}(3x^2y, 2xy^3) = 6x^2y^3$;
- poniamo le C. E. $6x^2y^3 \neq 0$ da cui C. E. $x \neq 0$ e $y \neq 0$;
- dividiamo il mcm per ciascun denominatore e moltiplichiamo il quoziente ottenuto per il relativo numeratore:
$$\frac{2y^2 \cdot (x+y)}{6x^2y^3} - \frac{3x \cdot (2y-x)}{6x^2y^3};$$
- la frazione somma ha come denominatore lo stesso denominatore e come numeratore la somma dei numeratori:

$$\frac{2y^2 \cdot (x+y)}{6x^2y^3} - \frac{3x \cdot (2y-x)}{6x^2y^3} = \frac{2xy^2 + 2y^3 + 2x^2y - 6xy + 3x^2}{6x^2y^3}.$$

Esempio 19.21. $\dfrac{x+2}{x^2-2x} - \dfrac{x-2}{2x+x^2} + \dfrac{-4x}{x^2-4}$.

- Scomponiamo in fattori i denominatori:

$$\frac{x+2}{x(x-2)}-\frac{x-2}{x(2+x)}+\frac{-4x}{(x+2)(x-2)},$$

il mcm è $x\cdot(x+2)\cdot(x-2)$;
- poniamo le C. E. $x(x+2)(x-2)\neq 0$ da cui C. E. $x\neq 0$, $x\neq 2$ e $x\neq -2$;
- dividiamo il mcm per ciascun denominatore e moltiplichiamo il quoziente ottenuto per il relativo numeratore:

$$\frac{(x+2)^2-(x-2)^2-4x^2}{x\cdot(x+2)\cdot(x-2)};$$

- eseguiamo le operazioni al numeratore:

$$\frac{x^2+4x+4-x^2+4x-4-4x^2}{x\cdot(x+2)\cdot(x-2)}=\frac{8x-4x^2}{x\cdot(x+2)\cdot(x-2)};$$

- semplifichiamo la frazione ottenuta, dopo aver scomposto il numeratore:

$$\frac{-4\cancel{x}\cdot\cancel{(x-2)}}{\cancel{x}\cdot(x+2)\cdot\cancel{(x-2)}}=\frac{-4}{x+2}.$$

Esempio 19.22. $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{2x}{x+1}+\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{5x^2-7}{x^3-2x^2+2-x}$.

- Scomponiamo in fattori x^3-2x^2+2-x, essendo gli altri denominatori irriducibili: $x^3-2x^2+2-x=x^2(x-2)-1(x-2)=(x-2)\left(x^2-1\right)=(x-2)(x+1)(x-1)$ che è anche il mcm dei denominatori;
- poniamo le C. E. $(x-2)(x+1)(x-1)\neq 0$ da cui C. E. $x\neq 2$, $x\neq -1$ e $x\neq 1$;
- dividiamo il mcm per ciascun denominatore e moltiplichiamo il quoziente ottenuto per il relativo numeratore:

$$\frac{x(x+1)(x-1)-2x(x-2)(x-1)+x(x-2)(x+1)-(5x^2-7)}{(x-2)(x+1)(x-1)};$$

- eseguiamo le operazioni al numeratore:

$$\frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{(x-2)(x+1)(x-1)};$$

- semplifichiamo la frazione ottenuta, dopo aver scomposto il numeratore. La frazione somma è:

$$-\frac{7}{(x-2)(x+1)}.$$

✍ *Esercizi proposti:* 19.22, 19.23, 19.24, 19.25, 19.26, 19.27, 19.28, 19.29, 19.30

19.8 Esercizi

19.8.1 Esercizi dei singoli paragrafi

19.2 - Condizioni di esistenza per una frazione algebrica

19.1. Determinare per ciascuna frazione la condizione di esistenza.

a) $\dfrac{-3x^3+x-2x^2+1}{3x-6}$;
b) $\dfrac{-x^3-8x}{x^2+4x+4}$;
c) $\dfrac{2x}{x^3-7x^2+x-7}$;
d) $\dfrac{-54}{a^3b^5c}$;
e) $\dfrac{b-1}{3ab}$;
f) $\dfrac{a+b-1}{2a\left(b^2-1\right)}$.

19.2. Determinare per ciascuna frazione la condizione di esistenza.

a) $\dfrac{ay^2}{y^2-5y+6}$;
b) $\dfrac{3x-8}{x^2}$;
c) $\dfrac{-3x^3+x-2x^2+1}{x-1}$;
d) $\dfrac{a^2-3b}{a-b}$;
e) $\dfrac{a+2ab-6b}{a+b}$;
f) $\dfrac{-a}{2a-b}$.

19.3. Determinare per ciascuna frazione la condizione di esistenza.

a) $\dfrac{-x^3-8y^2}{x^2+y^2}$;
b) $\dfrac{2x+3y-1}{x^2-4xy}$;
c) $\dfrac{3x+8y}{x^2-y^2}$;
d) $\dfrac{a^2-1}{2a^2x+4ax+2x}$;
e) $\dfrac{-6a-5ab}{2b^2+4ab}$;
f) $\dfrac{y-1}{ay+a+y+1}$.

19.4. Determinare per ciascuna frazione la condizione di esistenza.

a) $\dfrac{-8a+3ab^4}{a^2b^2-25b^4}$;
b) $\dfrac{a^3-2b^2}{a^3-b^3}$;
c) $\dfrac{-8a+3}{a^3+3a^2+3a+1}$.

19.3 - Semplificazione di una frazione algebrica

19.5 (*). Semplifica le seguenti frazioni e indica le condizioni di esistenza.

a) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}$;
b) $\dfrac{4x^2-4}{8x^2-8}$;
c) $\dfrac{ax+x+a^2+a}{a^2+2a+1}$;
d) $\dfrac{4x^2-4+x^3-x}{2x+2}$;
e) $\dfrac{5x+5y}{3x+3y+ax+ay}$;
f) $\dfrac{3a^3-3a^2-a+1}{9a^4-1}$.

19.6 (*). Semplifica le seguenti frazioni e indica le condizioni di esistenza.

a) $\dfrac{2x-2-ax+a}{x^2-2x+1}$;
b) $\dfrac{6a^2-4ab+3a-2b}{4a^2+4a+1}$;
c) $\dfrac{4x+4y}{3x+3y+ax+ay}$;
d) $\dfrac{a^2-b^2-ac+bc}{ab+ac+b^2-c^2}$;
e) $\dfrac{x^2+xy}{2x+2y+ax+ay}$;
f) $\dfrac{3ax+6a+3x+6}{6ax+6x+12a+12}$.

19.7 (*). Semplifica le seguenti frazioni e indica le condizioni di esistenza.

a) $\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$; b) $\dfrac{2x^2-5x+2}{2x^2-7x+6}$; c) $\dfrac{a^3+a^2+a+1}{ax+x+2a+2}$; d) $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+6x+9}$; e) $\dfrac{-2x+2+ax-a}{x^2-2x+1}$; f) $\dfrac{4x^3-4x^4+8x-8x^2}{1-x^2}$.

19.8 (*). Semplifica le seguenti frazioni e indica le condizioni di esistenza.

a) $\dfrac{2x^2-3x+1}{2x^2-5x+3}$; b) $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$; c) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-3x^2+3x-1}$; d) $\dfrac{6a^2b^3-9a^3b^2}{2ab-3a^2-2b+3a}$; e) $\dfrac{x^2+7x+12}{x^2-9}$; f) $\dfrac{x^3-1}{x^4+2x^3+x^2-1}$.

19.9 (*). Semplifica le seguenti frazioni e indica le condizioni di esistenza.

a) $\dfrac{2x^2+3x-2}{2x^2+x-6}$; b) $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{2x^2-x-1}$; c) $\dfrac{2x^2-4xy}{ax-2ay+2x-4y}$; d) $\dfrac{8a^5b^5-4a^3b^5}{2a^3-a-1+2a^2}$; e) $\dfrac{2x^2-x-3}{3x^2+2x-1}$; f) $\dfrac{x^3+x^2-2x-2}{x^3+x^2+2x+2}$.

19.10 (*). Semplifica le seguenti frazioni e indica le condizioni di esistenza.

a) $\dfrac{-2a-a^2}{2b+ab+4+2a}$; b) $\dfrac{x^2+3x-28}{x^2+2x-24}$; c) $\dfrac{2x^3-7x^2+7x-2}{2x^3-5x^2+x+2}$; d) $\dfrac{a^2+a}{ab+b+a+1}$; e) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2+2x-15}$; f) $\dfrac{x^3+x^2-2x-2}{x^2+2x+1}$.

19.11 (*). Semplifica le seguenti frazioni e indica le condizioni di esistenza.

a) $\dfrac{-a^2-a}{ab+b+a+1}$; b) $\dfrac{2x^2-x-3}{x^3+1}$; c) $\dfrac{4x+4y}{6x+6y+2ax+2ay}$; d) $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^3-3x^2+3x-1}$; e) $\dfrac{x^2-xy}{2x^2-2xy+ax^2-axy}$; f) $\dfrac{x^3-8}{(x^2+4)^2-4x^2}$.

19.12 (*). Semplifica le seguenti frazioni e indica le condizioni di esistenza.

a) $\dfrac{2x^2-x-1}{2x^2+x}$; b) $\dfrac{x^2+2xy+y^2-1}{x^2+y^2+1+2xy-2x-2y}$; c) $\dfrac{2x^3-x-1}{ax^2-ax+x^2-x}$; d) $\dfrac{x^6-1}{x^4-1}$.

19.4 - Moltiplicazione di frazioni algebriche

19.13 (*). Determinate i seguenti prodotti, indicando sempre le condizioni di esistenza.

a) $\dfrac{3x-6y}{5xy^3}\cdot\dfrac{2x^2y^2+xy^3}{4y^2-x^2}$; b) $\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^2-1}\cdot\dfrac{x}{x^3-4x}$; c) $\dfrac{4x-2a}{x-a}\cdot\dfrac{3a-3x}{a-2x}$; d) $\dfrac{-1-2a-a^2}{1+a^2-2a}\cdot\dfrac{a^3-3a^2+3a-1}{a^4+2a^3-2a-1}$.

19.14 (*). Determinate i seguenti prodotti, indicando sempre le condizioni di esistenza.

a) $\frac{2a^4+6a+12+4a^3}{16-a^4}\cdot\frac{a^2-7a+10}{5a^5+15a^2}$;

b) $\frac{-45x^7}{y^{-2}}\cdot\frac{4y^{-7}}{36x^{-1}}$;

c) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}\cdot\frac{x^2+3x+2}{x^2-2x+1}$;

d) $\frac{x^2-4x+4}{x^3-8}\cdot\frac{x^2+2x+4}{x^2-2x}$.

19.15 (*). Determinate i seguenti prodotti, indicando sempre le condizioni di esistenza.

a) $\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2+2x+1}\cdot\frac{ax+x}{x^2+x}$;

b) $\frac{4x^3-4x^2-x+1}{8x^3-1}\cdot\frac{4x^3+2x^2+x}{2x^2-x-1}$;

c) $\frac{x^2-x-6}{2x^2-8x+8}\cdot\frac{x^2+x-6}{x^3+2x^2-9x-18}$;

d) $\frac{x^4-1}{x^2-2x+1}\cdot\frac{2x^2-x-1}{2x^3+x^2+2x+1}\cdot\frac{2x^2-2x+2}{x^3+1}$.

19.16. Determinate i seguenti prodotti, indicando sempre le condizioni di esistenza.

a) $\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}\cdot\frac{2x^2+8x+8}{4x^2-16}$;

b) $\frac{2x^3-2x^2-3x+3}{2x^2-4x+2}\cdot\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$;

c) $\frac{a^2-b^2}{3x-3y}\cdot\frac{6x^3y-6xy^3}{a^2x-a^2y+b^2y-b^2x}$;

d) $\frac{2x^2-x-3}{3x^2+2x-1}\cdot\frac{x^3+1}{2x^2-x-3}$.

19.17. Determinate i seguenti prodotti, indicando sempre le condizioni di esistenza.

a) $\frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}\cdot\frac{x^2+2x-15}{x^2-x-6}$;

b) $\frac{2x^2-5x-3}{ax-3a+x-3}\cdot\frac{2ax+4a+2x+4}{4ax-4x+8a-8}$;

c) $\frac{x^3-x}{x^3-2x^2-x+2}\cdot\frac{x^3-8}{(x^2+4)^2-4x^2}$;

d) $\frac{a^3+a^2+a+1}{ax+x+2a+2}\cdot\frac{x^4-5x^2+4}{x^2-3x+2}$;

e) $\frac{2x^2-5x-3}{ax-3a+x-3}\cdot\frac{2ax+4a+2x+4}{4ax-4x+8a-8}$;

f) $\frac{2ax+4a+2x+4}{4ax-4x+8a-8}\cdot\frac{-a-b}{a^2+ab+a+b}$.

19.5 - Potenza di una frazione algebrica

19.18. Determina, con le dovute condizioni sulle variabili, le seguenti frazioni.

a) $\left(\frac{3x^2}{5y^3}\right)^2$;

b) $\left(\frac{x+y}{x^2-y^2}\right)^3$;

c) $\left[\left(\frac{12ab}{a^2b-ab^2}\right)^2\cdot\left(\frac{a-b}{2a^2}\right)^{-2}\right]^{-1}$;

d) $\left[\left(\frac{x^2+x}{x^2+4x+3}\right)^2\cdot\left(\frac{2x}{x+3}\right)\right]^2$;

e) $\frac{a^2-b^2}{a^3+ab^2+2a^2b}\cdot\left(\frac{5a^2-5ab}{4ab+4b^2}\right)^{-1}$;

f) $\left(\frac{a^2-9}{12a^2-12a+3}\right)\cdot\left(\frac{12a^3-6a^2}{a^2-4a+3}\right)^3$.

19.6 - Divisione di frazioni algebriche

19.19 (*). Semplificare le seguenti espressioni, evidenziando sempre le condizioni di esistenza.

a) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}:\dfrac{x^2-x-6}{x^2-4}$;

b) $\dfrac{x^2+ax-x-a}{x^2-1}:\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+x+ax+a}$;

c) $\dfrac{2x^2-3x+1}{x^3-3x^2-x+3}:\dfrac{4x^2-1}{x^2-2x-3}$;

d) $\dfrac{x^4-1}{x^4-2x^2+1}:\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^3-3x^2+3x-1}$.

19.20 (*). Semplificare le seguenti espressioni, evidenziando sempre le condizioni di esistenza.

a) $\dfrac{xy+x+2y+2}{xy+2x-y-2}\cdot\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}:\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-9}$;

b) $\left(\dfrac{a^3-a^2}{2a^2+a-1}\cdot\dfrac{a^2-2a-3}{a^2-2a+1}\right):\left(\dfrac{a^2-9}{12a^2-12a+3}\cdot\dfrac{12a^3-6a^2}{a^2-4a+3}\right)$;

c) $\dfrac{a^2-b^2-a-b}{3a^2-3b^2}:\left(\dfrac{a^2-ab}{3a^2}\cdot\dfrac{5a+5ab-5a^2}{a^2-2ab+b^2}\right)$;

d) $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{2x^2-x-1}:\dfrac{2x^3-7x^2+7x-2}{2x^3-5x^2+x+2}\cdot\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-5x+6}$.

19.21. Semplificare le seguenti espressioni, evidenziando sempre le condizioni di esistenza.

a) $\dfrac{4x^3-4x^2-8}{4x^2-16}:\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$;

b) $\dfrac{x^2+x}{5x-10}:\dfrac{x+1}{20x}$;

c) $\dfrac{2x^2-x-3}{x^2-1}:\dfrac{x^3+x^2-2x-2}{x^2+2x+1}$;

d) $\left(\dfrac{-2a}{b^3}\cdot\left(\dfrac{-ab}{4}\right)^2\right):\left(\dfrac{a^2}{2b^3}\right)^{-2}$.

19.7 - Addizione di frazioni algebriche

19.22. Vero o falso? Se falso calcola il risultato corretto.

a) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{y^2+x^2}{x^2+y^2}=1$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

b) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1+x}{x^2}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

c) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{-y+1}{x-y}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

d) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{2}{x-1}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

19.23. Vero o falso? Se falso calcola il risultato corretto.

a) $1+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x+1}{x+1}=1$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

b) $\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-a}=\dfrac{1+1}{a-b}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

c) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x}=\dfrac{3}{x}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

d) $x-\dfrac{y}{x+y}=\dfrac{x^2+xy-y}{x+y}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

19.24. Vero o falso? Se falso calcola il risultato corretto.

$\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{x-y+x+y}{x^2-y^2}=\dfrac{2x}{x^2-y^2}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

19.25. Riduci le seguenti somme di frazioni algebriche.

a) $\frac{x+2y}{15}+\frac{x-y}{3}$;
b) $\frac{a}{2x}+5-\frac{3a}{4x^2}$;
c) $\frac{5a^2+1}{12}-\frac{4a^2-1}{3}+\frac{5a+a^2}{4}$;
d) $\frac{a}{9}-\frac{2b}{27}-ab$.

19.26. Riduci le seguenti somme di frazioni algebriche.

a) $\frac{1}{x-2}+1$;
b) $\frac{x}{2y}+1-\frac{3x}{4y^2}$;
c) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}$;
d) $\frac{2}{xy}-\frac{1}{xy-1}$;
e) $-\frac{1}{x}+\frac{2}{3x}-6x$;
f) $-3x+\frac{1}{2x}$.

19.27. Riduci le seguenti somme di frazioni algebriche.

a) $\frac{5}{x}-x+\frac{1}{3}$;
b) $\frac{2x+1}{8x}-\frac{x-1}{4x^2}$;
c) $\frac{2x+1}{3}-\frac{1}{x}$;
d) $\frac{1}{x+y}-y$;
e) $\frac{9}{x^3y}+\frac{x^2}{x^2y^2}$;
f) $1-\frac{x+1}{x-1}$.

19.28 (*). Riduci le seguenti somme di frazioni algebriche.

a) $\frac{1}{x^2y}+\frac{1}{xy^2}-\frac{1}{x^2y^2}$;
b) $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}-\frac{1}{3x}$;
c) $\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2-a}-\frac{1}{a-1}$;
d) $\frac{a-1}{a^2-a}+\frac{1}{a-2}-\frac{2}{a}$;
e) $\frac{2}{a-1}+\frac{3}{1-a}+\frac{a}{a-1}$;
f) $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x-1}+x$.

19.29 (*). Riduci le seguenti somme di frazioni algebriche.

a) $\frac{x+1}{x}-\frac{x}{x-1}$;
b) $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x^2-4}$;
c) $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2-3x+2}$;
d) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2-2x+1}$.

19.30 (*). Riduci le seguenti somme di frazioni algebriche.

a) $\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{a+ab-b-1}$;
b) $\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{a-1}+\frac{1}{2a^2-a-1}$;
c) $\frac{2x-3}{x}+\frac{-2x}{2x+3}-1$;
d) $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^3-1}$.

19.8 - Espressioni con le frazioni algebriche

19.31 (*). Semplifica le seguenti espressioni.

a) $\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}-\frac{5}{x^2}$;
b) $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x-x^2}+\frac{1}{x}$;
c) $\frac{a-3}{a+3}+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}$;
d) $\frac{x^2-4x+3}{x-1}+\frac{2-x}{x^2-4}$.

19.32 (*). Semplifica le seguenti espressioni.

a) $\left(\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{1}{a+1}\right)\dfrac{a^2-1}{2a}$;

b) $\dfrac{1}{a-1}+\dfrac{1}{a+1}\,\dfrac{a^2-1}{2a}$;

c) $1-\dfrac{a+b}{a-b}\left(\dfrac{2a-b}{a+b}-\dfrac{a-b}{a}\right)$;

d) $\dfrac{x^2+2x+1}{1-x^2}-\dfrac{x^3-1}{x-1}+\dfrac{2-8x^2}{4x^2-1}$.

19.33 (*). Semplifica le seguenti espressioni.

a) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2-2x+1}+\dfrac{1}{x^3-3x^2+3x-1}$;

b) $\dfrac{1-x}{(x-1)^2}-\dfrac{x^3+1}{(x+1)^2}+\dfrac{3x^2-4x+1}{1-x^2}$;

c) $\dfrac{1}{2-3x}+\dfrac{2x+2}{2x}+\dfrac{6x+1}{3x-2}-\dfrac{x+2}{3x^2-2x}$;

d) $\dfrac{3x}{x^2-2xy+y^2}-\dfrac{3}{x-y}+\dfrac{9}{2y-2x}$.

19.34. Semplifica le seguenti espressioni.

a) $\dfrac{6x}{x^2-4}+\dfrac{3}{2-x}-\dfrac{1}{x+2}$;

b) $\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}-\dfrac{1}{x^2+x+1}$;

c) $\dfrac{(x-1)^2}{x^3-3x^2+3x-1}-\dfrac{x-1}{(1-x)^3}$;

d) $\dfrac{1}{2x-1-x^2}-\dfrac{x}{1-x}$.

19.35 (*). Semplifica le seguenti espressioni.

a) $\dfrac{24x}{x^2+3x-4}+\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}-\dfrac{18(x-1)}{x^2+2x-8}$;

b) $\dfrac{2}{x^2-9x+20}-\dfrac{2}{25-x^2}-\dfrac{4}{x^2+x-20}$;

c) $\dfrac{4ay-4a^2}{y^3+8a^3}+\dfrac{1}{y+2a}-\dfrac{y-a}{y^2-2ay+4a^2}$;

d) $\dfrac{8x-12}{4x^2-12x+9}-\dfrac{5x}{2x^2+3x}-\dfrac{20x}{9-4x^2}$.

19.36 (*). Semplifica le seguenti espressioni.

a) $\dfrac{x^2-2x+3}{x^3+1}+\dfrac{x-2}{x^2-x+1}-\dfrac{1}{x+1}$;

b) $\dfrac{t^2-1}{4+t^2}-\dfrac{4z-1}{2z+1}+\dfrac{24z-4t^2-2t^2z}{2t^2z+t^2+8z+4}$;

c) $\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-2\right):\left(1-\dfrac{x^2}{y^2}\right)+\dfrac{x-y}{x}$;

d) $\left(\dfrac{x+a}{x-a}-\dfrac{x-a}{x+a}\right):\left(1-\dfrac{x-a}{x+a}\right)^2$.

19.37. Semplifica le seguenti espressioni.

a) $\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}-\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}+\dfrac{x^3-x}{x^3-2x^2-x+2}-\dfrac{x^3-8}{x^2-4x+4}$;

b) $\dfrac{2x^2-5x-3}{ax-3a+x-3}-\dfrac{2x^3-x-1}{ax^2-ax+x^2-x}$;

c) $\dfrac{b+1}{a^2+ab+a}-\dfrac{1}{a}+\dfrac{a+1-b}{a^2+2a+1-b^2}$;

d) $\dfrac{x^4-x^2a^2}{4x^2a^2+4xa^3+a^4}:\left(\dfrac{x^2+ax}{2x^2a+xa^2}\cdot\dfrac{2xa^2+a^3}{x^2-ax}\right)$.

19.38 (*). Semplifica le seguenti espressioni.

a) $\dfrac{1}{xy+yz-y^2-xz}-\dfrac{1}{zx+zy-xy-z^2}-\dfrac{1}{xy-x^2-yz+xz}$;

b) $1-\dfrac{2x(x-2)}{x+2}+\dfrac{2-x^2}{-x-2}+\dfrac{6+(3-x)^2}{x+2}$;

c) $\dfrac{a^2b^2}{a^4-ab^3+a^3b-b^4}:\left(\dfrac{a+b}{a^3-b^3}-\dfrac{1}{a^2-b^2}\right)$;

d) $\left(\dfrac{2a^2+a}{a^3-1}-\dfrac{a+1}{a^2+a+1}\right)\cdot\left(1+\dfrac{a+1}{a}-\dfrac{a^2+5a}{a^2+a}\right)$.

19.39 (*). Semplifica le seguenti espressioni.

a) $\dfrac{x+2}{x-3}-\dfrac{2-x}{1-x}+\dfrac{x^2+1}{x^2-4x+3}-1$;

b) $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{2x}{x^2-4}-\left(\dfrac{x}{x+2}-1\right)\right]:\dfrac{1}{2-x}$;

c) $\left(\dfrac{x^3-x^2}{1-x^2}+x-1\right):\left(1-\dfrac{x}{x+1}\right)$;

d) $\left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z+1}\right):\left(\dfrac{z^3-z^2}{z-5}:\dfrac{z^5-z^3}{2z-10}\right)$.

19.40 (*). Semplifica le seguenti espressioni.

a) $\dfrac{x+y}{x^2+x+xy+y}-\dfrac{1}{y+1}+\dfrac{x}{x+1}$;

b) $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a^3}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{1-a^3}-1\right)$;

c) $\left(\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{2x}{1-x^2}\right)\cdot\dfrac{x^2+2x+1}{4x^2}$;

d) $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a^2-a}-\dfrac{1}{a-2}\right):\dfrac{1+a+a^2}{1-a^3}$.

19.41 (*). Semplifica le seguenti espressioni.

a) $\left(\dfrac{x^2-5}{x^2+4x+4}+\dfrac{1}{2+x}+\dfrac{6}{4x+8}\right)\cdot\dfrac{2x+4}{2x^2+5x}$;

b) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{(1-x)^2}{x^3-x}-\dfrac{2}{1-x}+(x-3)\cdot\dfrac{2x-x^2-1}{(1-x^2)^2}$;

c) $\left(\dfrac{1}{a^2-2a+1}+\dfrac{1}{a^2-3a+2}\right):\dfrac{4a^2-6a}{1-a}$;

d) $\left(\dfrac{x}{x-a}-\dfrac{x}{x-1}\right)\dfrac{ax^2-ax-a^2x+a^2}{ax-x^2}$.

19.42. Semplifica le seguenti espressioni.

a) $\left(\dfrac{x+1}{2x-2}+\dfrac{5}{2x^2-2}-\dfrac{x+3}{2x+2}\right):\dfrac{3}{4x^2-4}$;

b) $\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^2+2x+1}-\dfrac{x^3-1}{x^2-1}+\dfrac{x^2-3x-4}{x^2+2x+1}-\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-1}$;

c) $\dfrac{x^4-x^2a^2}{4x^2a^2+4xa^3+a^4}:\dfrac{x^2+ax}{2x^2a+xa^2}:\dfrac{2xa^2+a^3}{x^2-ax}$;

d) $\left(\dfrac{a}{a^2-1}-\dfrac{a}{a^2+1}\right)\cdot\dfrac{a^3-a^2+a-1}{2a^2}+\dfrac{a}{1+a}$.

19.43 (*). Semplifica le seguenti espressioni.

a) $\left(\dfrac{a^2+1}{2a}-1\right):\dfrac{a^2-3a+2}{4a}:\dfrac{a^2+a-2}{a^2-4}+\dfrac{a^2+1}{a}$;

b) $\left(x^2+\dfrac{1}{4}+x\right)\left(\dfrac{1-6x}{1-2x}+\dfrac{1-12x^2}{4x^2-1}\right)\left(4-\dfrac{2}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{4x^2-1}\right)$;

c) $\dfrac{a^2+b^2-2ab}{a-1}\left(a-b+\dfrac{a^2+b^2}{b-a}\right)\left(\dfrac{a+2}{a-1}-\dfrac{a^2+1}{a^2-a}\right)\dfrac{a-1}{2b^2-2ab}$;

d) $\left(\dfrac{x^2}{x+1}+1-x\right)\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{x^2}{(x-1)^2}+\dfrac{2x^3-3x^2+x}{(x-1)^3}\right)+\dfrac{3}{x}$.

19.44 (*). Semplifica le seguenti espressioni.

a) $\left(\dfrac{2a-b}{a-2b}-2\right)^2\left[\left(\dfrac{4b^2}{a}-a\right)\left(\dfrac{3a+2b}{a+2b}-1\right)\right]^2$;

b) $\dfrac{\left(\dfrac{x^2+2x+2}{x^3}-\dfrac{1}{x+2}\right)\left(\dfrac{10-3x}{4-x^2}-\dfrac{1}{2-x}\right)}{\left(\dfrac{2+x}{2-x}-\dfrac{2-x}{2+x}\right)^2}$;

c) $\left(\dfrac{a-1}{a+4}-\dfrac{a+1}{a-4}\right):\left(\dfrac{a-1}{4-a}+\dfrac{a+1}{a-4}\right)\cdot\dfrac{a^2-16}{5a^2-20a}$;

d) $\left(1-\dfrac{x+1}{x-1}\right):\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{3x+6}{x^2-4}-\dfrac{2}{x^2-3x+2}:\left(\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{x}{x+3}\right)+\dfrac{2x-3}{x(x-2)(x-1)}$.

19.45 (*). Semplifica le seguenti espressioni.

a) $\dfrac{1}{x^2+4x+4}+\dfrac{1}{x^3+2x^2}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3+4x^2+4x}-\dfrac{2}{x^4+4x^3+4x^2}$;

b) $\dfrac{4x+1}{2-2x}+\dfrac{3x+5}{3x-5}-\dfrac{1}{3x}+3x\cdot\dfrac{x-3}{3x^2-8x+5}$;

c) $\left(\dfrac{3}{x-8}-\dfrac{22x-48}{x^2-12x+32}+\dfrac{4x}{x-4}\right):\dfrac{x-12}{x-8}$;

d) $\dfrac{x^3-25x}{x^2+8x+15}:\left(\dfrac{x}{2x+6}+\dfrac{2}{3-x}+\dfrac{6+x}{x^2-9}\right)$.

19.46 (*). Semplifica le seguenti espressioni.

a) $\dfrac{x-2}{2}-\left(\dfrac{1}{3x-6}+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\dfrac{4}{2-x}-\left[\dfrac{1}{2}x^2(x-6)+6x-5\right]:(x-2)^2$;

b) $2x^2\cdot\dfrac{x-3}{x-1}+(2x-1)(1-x)-\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{9x-9}+x$;

c) $\dfrac{x+5}{x^2-6x+5}+\dfrac{3x+3}{x^2-4x+3}-\dfrac{2(x+1)}{x^2-8x+15}-\dfrac{2x+4}{(x-1)(x-5)}$;

d) $\dfrac{x^2+x-6}{27-3x^2}+\dfrac{5x-18}{2x^2-18}-\dfrac{11}{4x-12}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{12(x-3)}$.

19.47 (*). Semplifica le seguenti espressioni.

a) $\left(2a-\dfrac{1}{2}\right)a+\left(\dfrac{2a^2}{2+a}+2+a\right)x+(3a-2)x-x\left(\dfrac{8}{a+2}+6a-4\right)$;

b) $\left(\dfrac{3x^2+x-3}{2-6x}+\dfrac{x}{2}\right):\dfrac{3+2x}{3x-1}+\dfrac{9x-3}{(6x-2)(3+2x)}-\dfrac{x}{3+2x}$;

c) $\dfrac{8x^2-2a^2}{(a-1)^2}+\left(\dfrac{2x^2-1}{a+1}+\dfrac{2x^2+1}{1-a}\right)(a+1)+\dfrac{4x^2-1}{a-1}-\dfrac{16x^2-5a^2+a}{(a-1)^2}$;

d) $\left[\left(\dfrac{x+6}{2}+\dfrac{3}{a-1}\right):\dfrac{x}{a-1}+3a+\dfrac{x(1+2a)}{2}+\dfrac{x(1-7a)+3}{2x}\right]\cdot\dfrac{2x^2}{x^2+3}$.

19.48 (*). Semplifica le seguenti espressioni.

a) $\left(\frac{1}{5}x-\frac{x-1}{x-5}\right)\left(\frac{x+1}{5}-\frac{1}{x+5}\right)\cdot(25-x^2)-\frac{2}{5}x(x+5)(7-x);$

b) $\left(\frac{ax}{a^2-9}\cdot\frac{3a+9}{b-3}-\frac{ax}{9-3b-3a+ab}\right)\cdot\frac{b-3}{2};$

c) $\left(\frac{1}{a}+\frac{x-a}{x^2+ax}-\frac{2}{a+x}\right)\cdot\frac{x^2+3x}{x^2-a^2}+\left(\frac{x^2}{x^2-a^2}+\frac{a-x}{a+x}\right)\cdot\frac{x-a}{2ax-a^2};$

d) $\left(\frac{a}{a^2-a}+\frac{a}{a^2+a}+\frac{1}{a}-\frac{1}{a-a^2}\right):\frac{3a+1}{2a^2-2}.$

19.49 (*). Semplifica le seguenti espressioni.

a) $\left[\left(\frac{1}{a^2+9-b^2+6a}-\frac{1}{a^2+9+b^2+6a-2ab-6b}\right):\frac{-6b}{3a+9+3b}\right]^{-1};$

b) $\left(\frac{3}{x^6-x^3}-\frac{1}{9x^3-9}\right):\frac{9+x^2+3x}{3x^5+3x^3+3x^4}+\frac{6x-5}{x-1}-\frac{x-2}{x+2}+\frac{12}{x^2+x-2};$

c) $\left(\frac{1}{2b-2-a+ab}+\frac{1}{1-b}\right):\left(\frac{1}{b+1}-\frac{1}{2+a+2b+ab}\right)+\frac{2b^2-b-1}{b^2-2b+1};$

d) $\left(\frac{x+2}{x-2}-\frac{2x^2+ax}{x^2-4}+\frac{ax-3x+2a-6}{(x+2)(a-3)}\right)\cdot\frac{x^2-4}{a-4}.$

19.50 (*). Semplifica le seguenti espressioni.

a) $\left[\frac{(a-3b)(b-2)}{a^2-4a+4}-\left(2-\frac{1}{a+1}\right)\frac{a^2+2a+1}{2a+1}+\frac{3a+b}{2-a}+\frac{a^3-4a+4}{(a-2)^2}\right]\cdot\frac{a-2}{b};$

b) $\left(\frac{x+1}{a}\right)^3\cdot\frac{6x^2}{-x^3-x^4}\cdot\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)^2:\frac{x+1}{a^3};$

c) $\left(\frac{6ab+6ab^2}{ab-3a^2b}-\frac{3(a-x)+6b}{1-3a}+\frac{2-x}{x}-1-\frac{2}{x}-\frac{1}{1-3a}\right):\frac{3}{1-3a};$

d) $\left(\frac{(a+2)^2-4(1+ax)-7}{a^2-16}+\frac{3ax+a}{a-4}-\frac{5a+17}{a^2-16}+ax-1\right):\frac{ax+1}{a-4}.$

19.51 (*). Semplifica le seguenti espressioni.

a) $\left(\frac{a^2+3ax}{10a^2-4a}+\frac{x}{2}-\frac{2+ax}{2a}\right)\cdot\frac{2a}{a^2+4}+\left[\frac{2(x+3)}{2-5a}-\frac{x}{4-10a}+\frac{11}{5a-2}\right]:\frac{a^2+4}{2a};$

b) $\left(\frac{x+2a}{2+a}+\frac{x-6}{a+4}+\frac{x-4}{-a-2}+\frac{2x}{a+4}+1\right)\cdot\frac{a+4}{x+a+2};$

c) $\left(\frac{3ax+2b}{a^2}+\frac{6ax+8b}{2a^2-a^2b}+\frac{8b-2b^3}{a^2\left(b^2-4b+4\right)}+\frac{16b}{a^2b-2a^2}\right)\cdot\frac{b-2}{b-4};$

d) $\left(\frac{1}{a}-\frac{x+a}{x^2+ax}\right):\frac{x^2-a^2}{ax^2+3ax}+\frac{x+a}{2ax-a^2}\left(\frac{x^2}{x^2-a^2}-\frac{x-a}{x+a}\right)-\frac{4x-ax}{x^2+ax}+\frac{a^2-2a}{x^2-a^2}.$

19.52 (*). Semplifica le seguenti espressioni.

a) $\frac{6x+1}{x^2-4x+4}+\frac{10x-12}{4x}+1+\frac{1-x^2}{x(x-2)}+\frac{9x-28}{x^2-4x+4};$

b) $\left(\frac{4}{x^2-4}+\frac{x}{x^2-2x}+\frac{3}{x^2+2x}+\frac{24}{x^3-4x}\right)\cdot\frac{x^2+2x}{x+6};$

c) $\left(\frac{6x^2-26x-15}{x-5}:\frac{2x^2+1}{x^2-x-20}\cdot\frac{6x}{x+4}+\frac{90x}{2x^2+1}\right):\frac{12x^2}{2x^2+1}$;

d) $\left(\frac{6x+2}{x^2-4x+4}+\frac{2}{2x-x^2}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)+\frac{x-1}{x^2-2x}+\frac{x-4}{x^3-2x^2}$.

19.53 (*). Semplifica le seguenti espressioni.

a) $\left(\frac{a+x+2}{2a-a^2}+\frac{2x}{2-a}+\frac{x}{a}\right)\cdot\frac{2-a}{a+3}-\frac{a+2}{a^2+3a}$;

b) $\left[\frac{2x+2(a+1)}{a^2-1}+\frac{2-x}{1-a}\right]\cdot\frac{a+1}{ax+3x}$;

c) $\left(\frac{x^2+3x+9}{x^3-27}+\frac{1}{9-6x+x^2}-\frac{1}{3-x}\right):\frac{2x-3}{x^2-9}$.

19.54 (*). Semplifica le seguenti espressioni.

a) $\left[\frac{a+x}{a-x}:\left(\frac{2x}{a-x}+1\right)-\frac{4a^2+x}{x+2}\right]\cdot\frac{2x^2-8}{1-2a^2}$;

b) $\left(\frac{1-x}{x-a}+\frac{3+2a}{x+a}-\frac{5x}{x+a}-\frac{6x^2-a^2}{a^2-x^2}\right):\frac{3a+2}{a^2-2ax+x^2}$;

c) $\left[\frac{a-b+1}{a^2-ab}+\frac{1}{a^2+ab}+\frac{2b\left(1-a^2\right)}{a\left(a^2-b^2\right)}-\frac{-a+2b+2ab-b^2-2}{(a+b)(a-b)}\right]\cdot\frac{a^2-b^2}{2ab-b^2+2b-ab^2}$.

19.55. Semplifica le seguenti espressioni.

a) $\frac{a+1}{a^2-3a+2}-\frac{a}{(4-a^2)(1-a)}+a^2-a$;

b) $\frac{x^4-x^2a^2}{4x^2a^2+4xa^3+a^4}:\frac{x^2+ax}{2x^2a+xa^2}\cdot\frac{2xa^2+a^3}{x^2-ax}$;

c) $\frac{1}{4}\left(\frac{15}{x+3}-\frac{12}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right):\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)\right]$;

d) $(1+x^2)\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right):\left(\frac{x}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)$.

19.56. Semplifica le seguenti espressioni.

a) $\left[\frac{a+3}{a^2+3a+2}:\left(\frac{1}{a+2}-\frac{2}{a+1}\right)\right]:\left[\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{a+1}\right):(3a+1)\right]$;

b) $\frac{2y+1}{2y-1}\left(\frac{x+2y}{x-2y}+\frac{x-2y}{x+2y}-\frac{2x^2+1+4y^2}{x^2-4y^2}\right):\frac{4y^2+1+4y}{x^2-4y^2}$;

c) $(x+2)\cdot\left(\frac{2}{x^2+5x+6}+\frac{2}{x+3}-\frac{2}{x+2}\right)^2$;

d) $2\left(1+\frac{x}{y}\right)+\left[\left(\frac{x}{y}+1\right)^2:\left(\frac{x}{y}-1\right)\right]\cdot\left(\frac{x}{y}-1\right)^2:\left(\frac{x}{y}+1\right)$.

19.57. Semplifica le seguenti espressioni.

a) $\left(1-\frac{2y}{x+y}\right)\left[\left(1-\frac{3xy}{x^2+xy+y^2}\right):\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}\right]^2$;

b) $\dfrac{2x-3}{x-1}\cdot\left[\left(\dfrac{3x^2-2}{x-1}+\dfrac{6x-2}{x-3}\right)\cdot\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x+13}{x-3}\right]^2$;

c) $\dfrac{a^2-2a+1}{a^2+2a+1}\left(a+\dfrac{a}{a+3}\cdot\dfrac{4}{a+3}\right)\left[\left(\dfrac{2}{a+1}-1+a\right):\dfrac{2+3a+a^2}{a^2+2a-3}\right]^2:\left(\dfrac{2}{a+1}+a-1\right)^2$;

d) $\left(2a+\dfrac{1+4a-8a^3}{4a^2-1}\right):\left(\dfrac{2}{a-1}+\dfrac{4}{2a+1}-2\right)\cdot\left(\dfrac{8a^2}{1+2a}-2a\right)\cdot\left(a-\dfrac{2a}{2a+1}\right)^{-1}$.

19.58. Semplifica le seguenti espressioni.

a) $\left[\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{3-x}\right)\cdot\left(\dfrac{5-2x}{x^2+3-4x}\right)^{-1}+\left(\dfrac{1-x}{x-2}\right)^2\right]\cdot\left[\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^2-\dfrac{x-1}{x^2-4x+4}\right]^{-1}$;

b) $\dfrac{2x}{x^2-1}\cdot\left[\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{1}{3}x\left(1+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{9}{x^3-x^2}\right)\right]:\left[\dfrac{1}{1-x}\left(\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{x}\right)-\dfrac{x^2}{3x-3}\right]$;

c) $\dfrac{x^3-x}{x^3-2x^2-x+2}+\dfrac{x^3-8}{x^2-4x+4}+\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^2-3x+2}+\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}$.

19.59 (*). Semplifica le seguenti espressioni.

a) $\dfrac{\dfrac{x^{3n}-y^{3n}}{x^{2n}+2x^ny^n+y^{2n}}}{\dfrac{2x^{2n}-4x^ny^n+2y^{2n}}{x^{2n}-y^{2n}}}+\dfrac{1}{2}(x^n-y^n)-\dfrac{x^ny^n}{2(x^n+y^n)}$;

b) $\dfrac{\dfrac{x^ny+x^{n+1}+y^{n+1}+xy^n}{x^{n+1}-x^ny-xy^n+y^{n+1}}}{\dfrac{x^n+y^n}{x^n-y^n}}-\dfrac{\dfrac{x^3}{x^3-y^3}}{\dfrac{x^2}{x^2+y^2+xy}}$;

c) $\dfrac{\dfrac{1}{x^2-25+20y-4y^2}-\dfrac{1}{x^2-25+4y^2+4xy}}{\dfrac{x^2-4y^2}{x^2+25+10x-4y^2}}\cdot\left(\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}-\dfrac{5}{4}\right):\dfrac{1}{\dfrac{x}{y}-2}$;

d) $\dfrac{\dfrac{x^{n+1}+xy-x^ny-y^2}{x^{2n}-y^2}}{\dfrac{1+\dfrac{y}{x}}{x^{n-1}-\dfrac{y}{x}}}-\left(-\dfrac{a}{a+2}+\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{1}{\dfrac{ax+2x+ay+2y}{2y+2x}}\right)$;

e) $\dfrac{\left(\dfrac{x^3-b^3}{x^3-3bx^2+3b^2x-b^3}-\dfrac{bx}{x^2-2bx+b^2}+\dfrac{x+b}{b-x}\right):\left(\dfrac{x+b}{x-b}+1\right)}{\dfrac{x^2-bx-6b^2}{x^2+bx-2b^2}}:\dfrac{b}{x}$.

19.60 (*). È vero che $P=\left(\dfrac{4a^2-1}{8a^3b}:\dfrac{2a+1}{4a^4b}\right)\cdot\left(\dfrac{2a^5}{6a-3}:\dfrac{a^2}{27}\right)$ è sempre positiva per qualunque $a\neq0$ e $b\neq0$?

19.61 (*). Data $Q=\dfrac{4-(a^2-2ab+b^2)}{b-2-a}:\left(\dfrac{4-2a+2b}{3a^2}:\dfrac{2}{a^3}\right)$, quali condizioni dobbiamo porre alla variabile b affinché sia vera la proposizione "Per $a=3$, l'espressione Q assume il valore -1"?

19.8.2 Risposte

19.5. a) $\frac{x-3}{x+3}$, b) $\frac{1}{2}$, c) $\frac{x+a}{a+1}$, d) $\frac{x^2+3x-4}{2}$, e) $\frac{5}{3+a}$, f) $\frac{a-1}{3a^2+1}$.

19.6. a) $\frac{2-a}{x-1}$, b) $\frac{3a-2b}{2a+1}$, c) $\frac{4}{a+3}$, d) $\frac{a-b}{b+c}$, e) $\frac{x}{a+2}$, f) $\frac{1}{2}$.

19.7. a) $\frac{2x+1}{3x+2}$, b) $\frac{2x-1}{2x-3}$, c) $\frac{a^2+1}{x+2}$, d) $\frac{x+2}{x+3}$, e) $\frac{a-2}{x-1}$, f) $\frac{4x(x^2+2)}{x+1}$.

19.8. a) $\frac{2x-1}{2x-3}$, b) $\frac{x+2}{x+3}$, c) $\frac{1}{x-1}$, d) $\frac{3a^2b^2}{a-1}$, e) $\frac{x+4}{x-3}$, f) $\frac{x-1}{x^2+x-1}$.

19.9. a) $\frac{2x-1}{2x-3}$, b) $\frac{x^2+1}{2x+1}$, c) $\frac{2x}{a+2}$, d) $\frac{4a^3b^5}{a+1}$, e) $\frac{2x-3}{3x-1}$, f) $\frac{x^2-2}{x^2+2}$.

19.10. a) $\frac{-a}{b+2}$, b) $\frac{x+7}{x+6}$, c) $\frac{2x-1}{2x+1}$, d) $\frac{a}{b+1}$, e) $\frac{x+2}{x+5}$, f) $\frac{x^2-2}{x+1}$.

19.11. a) $-\frac{a}{b+1}$, b) $\frac{2x-3}{x^2-x+1}$, c) $\frac{2}{a+3}$, d) $\frac{x^2+1}{(x-1)^2}$, e) $\frac{1}{a+2}$, f) $\frac{x-2}{x^2+4-2x}$.

19.12. a) $\frac{x-1}{x}$, b) $\frac{x+y+1}{x+y-1}$, c) $\frac{2x^2+2x+1}{x(a+1)}$, d) $\frac{x^4+x^2+1}{x^2+1}$.

19.13. a) $\frac{-3(2x+y)}{5y^2(x+2y)}$, b) 1, c) 6, d) $-\frac{1}{a+1}$.

19.14. a) $\frac{-2(a-5)}{5a^2(a^2+4)}$, b) $-5\frac{x^8}{y^5}$, c) $\frac{x+1}{x-1}$, d) $\frac{1}{x}$.

19.15. a) $a+1$, b) x, c) $\frac{1}{2(x-2)}$, d) 2.

19.19. a) $\frac{(x-2)^2}{x^2-9}$, b) $\left(\frac{x+a}{x+1}\right)^2$, c) $\frac{1}{2x+1}$, d) $\frac{x-1}{x+1}$.

19.20. a) $\frac{y+1}{y+2}$, b) $\frac{a-3}{2a+6}$, c) $-\frac{1}{5}$, d) $\frac{x^2+1}{x-3}$.

19.28. a) $\frac{x+y-1}{x^2y^2}$, b) $\frac{7}{6x}$, c) $\frac{1}{a}$, d) $\frac{2}{a(a-2)}$, e) 1, f) x.

19.29. a) $-\frac{1}{x^2-x}$, b) $\frac{2x+1}{x^2-4}$, c) $\frac{2}{x-2}$, d) $\frac{x}{(x-1)^2}$.

19.30. a) $\frac{a+b+1}{(a-1)(b+1)}$, b) $\frac{3a+1}{2a^2-a-1}$, c) $\frac{-3(x+3)}{x(2x+3)}$, d) $\frac{x(x+1)}{x^3-1}$.

19.31. a) $\frac{2x^2-5x+3}{x^3}$, b) $\frac{2}{x(1-x)}$, c) $-\frac{1}{3}$, d) $\frac{x^2-x-7}{x+2}$.

19.32. a) 1, b) $\frac{a^2+1}{2a(a-1)}$, c) $\frac{b^2}{a(b-a)}$, d) $\frac{x^3+3x-2}{x-1}$.

19.33. a) $\frac{x^2-x+1}{(x-1)^3}$, b) $\frac{-x^3-x^2+x-1}{x^2-1}$, c) $\frac{3x+2}{x}$, d) $\frac{3(5y-3x)}{2(x-y)^2}$.

19.35. a) $\frac{7(x+1)}{(x+4)(x-1)}$, b) $\frac{22}{(x+5)(x-5)(x-4)}$, c) $\frac{a}{y^2-2ay+4a^2}$, d) $\frac{9}{2x-3}$.

19.36. a) $\frac{x^2-2x}{x^3+1}$, b) $\frac{3-2t^2}{t^2+4}$, c) $\frac{x-y}{x+y}$, d) $\frac{x(a+x)}{a(x-a)}$.

19.38. a) $\frac{2}{(x-y)(y-z)}$, b) $\frac{15-x}{x+2}$, c) ab, d) $\frac{a-1}{a^2+a}$.

19.39. a) $\frac{10}{x-3}$, b) $\frac{2(1-x)}{x+2}$, c) -1, d) $\frac{1}{2}$.

19.40. a) $\frac{y}{y+1}$, b) $\frac{1}{1-a}$, c) $\frac{x+1}{2x}$, d) $\frac{1}{a-2}$.

19.41. a) $\frac{1}{x+2}$, b) $\frac{x^6+x^5-x^4-x^3+18x^2-2}{2x(x-1)(x+1)^2}$, c) $\frac{-1}{2a(a-1)(a-2)}$, d) $\frac{a(a-1)}{a-x}$.

19.43. a) $\frac{(a+1)^2}{a}$, b) $\frac{8x^2}{2x-1}$, c) $\frac{2a-1}{a-1}$, d) $\frac{4(2x-1)}{(x-1)^2}$.

19.44. a) $36b^2$, b) $\frac{(x-2)^2(2x^2+3x+2)}{8x^5}$, c) -1, d) $\frac{2x+3}{3(x-2)(x-1)}$.

19.45. a) $\frac{-2}{x^2(x+2)}$, b) $\frac{x+2}{6x(x-1)}$, c) $\frac{4x-3}{x-4}$, d) $2(x-3)$.

19.46. a) $\frac{6x-5}{3(x-2)^2}$, b) $\frac{45x-19}{9(1-x)}$, c) $\frac{8(x+2)}{(1-x)(x-3)(x-5)}$, d) $-\frac{4x+111}{6(x+3)(x-3)}$.

19.47. a) $\frac{a(4a-1)}{2}$, b) $\frac{3-2x}{2x+3}$, c) $\frac{-8x^2+a^2+1}{(a-1)^2}$, d) $x(2a+1)$.

19.48. a) $\frac{-x^4+14x^3+35x^2+380x}{25}$, b) $\frac{ax}{a-3}$, c) $\frac{x+a+3}{a(x+a)}$, d) 2.

19.49. a) $(a+3-b)^2$, b) $\frac{14x+3}{3(x-1)}$, c) $\frac{b}{b-1}$, d) $-x$.

19.50. a) $\frac{8-3b}{a-2}$, b) $-6(x+1)^2$, c) $a+x+1$, d) $\frac{a^2+3a-8}{a+4}$.

19.51. a) $\frac{1}{5a-2}$, b) 3, c) $\frac{3x}{a}$, d) $\frac{x^2}{(x+a)(x-a)}$.

19.52. a) $\frac{5x^3-28}{2x(x-2)^2}$, b) $\frac{x+3}{x-2}$, c) $3x-13$, d) $\frac{7}{x-2}$.

19.53. a) $\frac{x}{a}$, b) $\frac{1}{a-1}$, c) $\frac{x+3}{x-3}$.

19.54. a) $4(x-2)$, b) $\frac{(x-a)(2x-a)}{x+a}$, c) $\frac{1}{a}$.

19.59. a) $\frac{x^{2n}}{x^n+y^n}$, b) $\frac{y}{x-y}$, c) $\frac{1}{x+2y}$, d) $\frac{x}{x+y}$, e) $\frac{b}{x-3b}$.

19.60. Vero: $P = 9a^4$.

19.61. $b \neq 1 \wedge b \neq 5$.