Sistemi di equazioni 22

22.1 Equazione lineare in due incognite

Definizione 22.1. Una equazione di primo grado in due incognite si chiama *equazione lineare*.

Problema 22.1. Determinare due numeri naturali la cui somma sia 16.

Soluzione L'ambiente del problema è l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. Indicati con x e y i due numeri richiesti dal quesito, il problema si formalizza con l'equazione $x + y = 16$, equazione in due incognite, di primo grado.

Determiniamo l'Insieme Soluzione del problema proposto. L'obiettivo è trovare $x \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{N}$ tali che $x + y = 16$ oppure $(x; y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tali che $x + y = 16$. Le coppie di numeri naturali che sono soluzioni dell'equazione sono facilmente determinabili e sono tutte quelle riportate nella tabella seguente.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
y	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

L'Insieme Soluzione del problema posto è dunque formato dalle 17 coppie di numeri naturali sopra elencate. Riformuliamo il problema cercando coppie di numeri razionali la cui somma sia 16. In simboli scriviamo $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{Q}$ tali che $x + y = 16$ oppure $(x; y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ tali che $x + y = 16$.

Possiamo subito dire che tutte le coppie precedenti sono soluzione del problema, ma ce ne sono infinite altre, ad esempio la coppia $(-7; +23)$ è soluzione del problema perché sostituendo a x il valore -7 e a y il valore $+23$ si ha $(-7) + (+23) = 16$. Dal procedimento si capisce che anche la coppia $(+23; -7)$ è soluzione del problema perché $(+23) + (-7) = 16$.

Se attribuiamo un valore arbitrario a x, l'altro elemento della coppia soluzione si può ottenere sottraendo da 16 il valore di x: $y = 16 - x$.

Completa tu:

- se $x = -3$ allora $y = 16 - (-3) = \ldots\ldots$ e la coppia $(\ldots; \ldots)$ è soluzione dell'equazione;
- se $x = \frac{3}{2}$ allora $y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, la coppia $(\ldots\ldots; \ldots\ldots)$ è soluzione dell'equazione;
- se $x = \ldots\ldots\ldots$ allora $y = \ldots\ldots\ldots$, la coppia $(\ldots\ldots; \ldots\ldots)$ è soluzione dell'equazione;
- se $x = \ldots\ldots\ldots$ allora $y = \ldots\ldots\ldots$, la coppia $(\ldots\ldots; \ldots\ldots)$ è soluzione dell'equazione.

Quindi, se l'ambiente del problema è l'insieme $\mathbb{Q}$, troviamo infinite coppie di numeri razionali che soddisfano il problema. E ancora, se formuliamo il problema nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, troveremo tutte le infinite coppie soluzione del problema: basta assegnare all'incognita x valori reali arbitrari e determinare di conseguenza il corrispondente valore di $y = 16 - x$.

Se $x = \sqrt{2} \Rightarrow y = 16 - \sqrt{2}$, la coppia $\left(\sqrt{2}; 16 - \sqrt{2}\right)$ è soluzione dell'equazione.

Completa:

- se $x = -2\sqrt{3} + 1$ allora $y = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
- se $x = 16 + \frac{3\sqrt{5}}{2}$ allora $y = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

♦

Definizione 22.2. Si chiama *Insieme Soluzione* (I. S.) di un'equazione di primo grado in due incognite, l'*insieme delle coppie ordinate* di *numeri reali* che sostituiti rispettivamente a x e a y rendono vera l'uguaglianza.

✍ *Esercizi proposti:* 22.1, 22.2, 22.3

22.1.1 Rappresentazione di un'equazione lineare sul piano cartesiano

---

Esempio 22.2. Determinare l'insieme soluzione dell'equazione $3y - x + 1 = 0$ con $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$.

Osserviamo che l'equazione assegnata ha due incognite ed è di primo grado; l'insieme soluzione sarà formato dalle infinite coppie ordinate $(x; y)$ di numeri tali che $3y - x + 1 = 0$.

Possiamo verificare che la coppia $(1; 0)$ è soluzione dell'equazione, ma come facciamo a determinare tutte le coppie che soddisfano quella equazione?

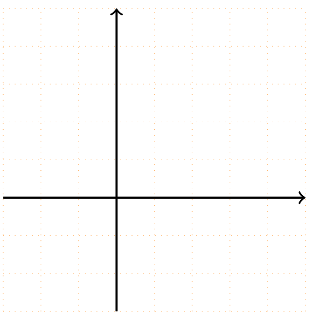
Fissiamo l'attenzione sull'incognita y, pensiamo l'equazione come un'equazione nella sola y, ricaviamo y come abbiamo fatto nelle equazioni di primo grado ad una sola incognita, applicando i principi di equivalenza delle equazioni:

$$3y - x + 1 = 0 \Rightarrow 3y = x - 1 \Rightarrow \frac{3y}{3} = \frac{x-1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}.$$

Al variare di x in $\mathbb{R}$, si ottengono tutte le infinite soluzioni dell'equazione assegnata. Prova a determinarne alcune:

x	y	coppia
0	......	(0;......)
1	......	(1;......)
−1	......	(−1;......)

In verità non possiamo trovare tutte le infinite coppie che risolvono quella equazione, ma possiamo darne una rappresentazione grafica.



La formula

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

rappresenta una funzione lineare; riportiamo le coppie trovate in un riferimento cartesiano ortogonale e tracciamo la retta che rappresenta la funzione.

Una qualunque equazione lineare $ax + by + c = 0$ ammette infinite soluzioni, costituite da coppie ordinate di numeri reali; esse sono le coordinate cartesiane dei punti della retta grafico della funzione $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. La formula $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ si chiama *equazione esplicita della retta*.

Esempio 22.3. Risolvi graficamente l'equazione $y + \frac{2}{3}x - 2 = 0$, con $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$.

L'equazione assegnata è in due incognite, di primo grado, è cioè una equazione lineare. Nel riferimento cartesiano ortogonale essa rappresenta una retta.

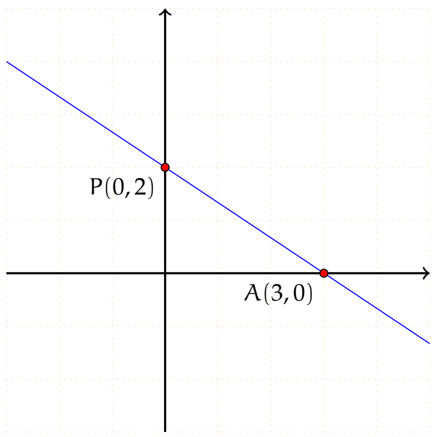
Troviamo l'equazione esplicita della retta:

$$y + \frac{2}{3}x - 2 = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 2.$$

Individuiamo l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse y: $q = 2$, quindi $P(0;2)$ è un punto della retta.

Troviamo un altro punto appartenente alla retta: se $x = 3$ allora $y = 0$, quindi $A(3;0)$ è un punto della retta.

Disegniamo la retta nel piano cartesiano: le coppie $(x;y)$, coordinate dei punti della retta tracciata, sono le infinite soluzioni dell'equazione assegnata.



✍ *Esercizi proposti:* 22.4, 22.5, 22.6

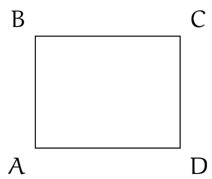
22.2 Definizione di sistema di equazioni

Problema 22.4. Nel rettangolo $ABCD$, la somma del doppio di AB con la metà di BC è di 98 m; aumentando AB di 3 m e BC di 2 m il perimetro del rettangolo diventa di 180 m. Determinare l'area in m^2 del rettangolo.

Dati:

$$2\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC} = 98\,\text{m},$$
$$2(\overline{AB} + 3\text{m} + \overline{BC} + 2\text{m}) = 180\,\text{m}.$$

Obiettivo: Area



Soluzione Per determinare l'area del rettangolo dobbiamo moltiplicare le misure delle sue dimensioni Area $= \overline{AB} \cdot \overline{BC}$ che però non conosciamo; il problema ha quindi due incognite.

Analizzando i dati possiamo osservare che ci sono fornite due informazioni che legano le grandezze incognite. Se poniamo $\overline{AB} = x$ e $\overline{BC} = y$ otteniamo le due equazioni:

$$2x + \frac{1}{2}y = 98; \quad 2(x + 3 + y + 2) = 180$$

che dovranno risultare soddisfatte per una stessa coppia di numeri reali.

♦

Definizione 22.3. Si definisce *sistema di equazioni* l'insieme di più equazioni, in due o più incognite, che devono essere verificate contemporaneamente. La scrittura formale si ottiene raggruppando le equazioni mediante una parentesi graffa.

Analizzeremo in particolare i sistemi in due equazioni e due incognite.

Definizione 22.4. L'Insieme Soluzione (I. S.) di un sistema di equazioni in due incognite è formato da tutte le coppie di numeri reali che rendono vere tutte le equazioni contemporaneamente.

Definizione 22.5. Si chiama *grado di un sistema* il prodotto dei gradi delle equazioni che lo compongono. In particolare, se le equazioni che lo compongono sono di primo grado, il sistema si chiama *sistema lineare*.

La *forma normale o canonica* di un sistema lineare è:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}, \text{ con } a, b, c, a_1, b_1, c_1 \text{ numeri reali.}$$

Il problema 22.4 si formalizza dunque con il sistema:

$$\begin{cases} 2x + \dfrac{1}{2}y = 98 \\ 2(x + 3 + y + 2) = 180 \end{cases},$$

composto da due equazioni in due incognite di primo grado e pertanto il suo grado è 1 ed è un sistema lineare. La sua forma canonica si ottiene sviluppando i calcoli nella seconda equazione, si ottiene

$$\begin{cases} 2x + \dfrac{1}{2}y = 98 \\ 2x + 2y = 170 \end{cases}.$$

22.2.1 Procedimento per ottenere la forma canonica di un sistema

La *forma canonica* di un sistema lineare di due equazioni in due incognite è, come abbiamo visto,

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

con a, b, c, a_1, b_1, c_1 numeri reali.

Esempio 22.5. Scrivere in forma canonica il sistema:

$$\begin{cases} 4x^2 - (y + 2x)^2 = x + 1 - y(4x + y - 1) \\ \dfrac{x-2}{2} + \dfrac{y+3}{3} = 0 \end{cases}.$$

Eseguiamo i calcoli nella prima equazione e riduciamo allo stesso denominatore la seconda equazione:

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 - 4x^2 - 4xy = x + 1 - 4xy - y^2 + y \\ 3x - 6 + 2y + 6 = 0 \end{cases}.$$

Per mezzo del primo principio di equivalenza delle equazioni portiamo le incognite al primo membro e sommiamo i termini simili:

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ 3x+2y=0 \end{cases}$$

che è la forma canonica cercata.

22.2.2 Metodo di sostituzione

Risolvere il sistema significa determinare tutte le coppie di numeri reali che soddisfano contemporaneamente le due equazioni.

Analizziamo i diversi metodi che permettono di ottenere l'Insieme Soluzione, cominciamo dal *metodo di sostituzione*.

Esempio 22.6. $\begin{cases} -3x+y=2 \\ 5x-2y=7 \end{cases}$.

Il sistema si presenta già in forma canonica. Il metodo di sostituzione si svolge nei seguenti passi:

Passo I scegliamo una delle due equazioni e una delle due incognite da cui partire. Applicando i principi d'equivalenza delle equazioni, ricaviamo questa incognita. Nel nostro esempio, partiamo dalla prima equazione e ricaviamo l'incognita y.

$$\begin{cases} -3x+y=2 \\ 5x-2y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2+3x \\ 5x-2y=7 \end{cases}.$$

Passo II sostituiamo nella seconda equazione, al posto dell'incognita trovata, l'espressione a cui è uguale. Nel nostro esempio abbiamo

$$\begin{cases} y=2+3x \\ 5x-2y=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2+3x \\ 5x-2(2+3x)=7 \end{cases}.$$

Passo III svolgiamo i calcoli nella seconda equazione. Nel nostro esempio abbiamo

$$\begin{cases} y=2+3x \\ 5x-4-6x=7 \end{cases}.$$

Passo IV risolviamo la seconda equazione, che ora è un'equazione di primo grado in una sola variabile. Nel nostro esempio, ricaviamo x dalla seconda equazione

$$\begin{cases} y=2+3x \\ 5x-4-6x=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2+3x \\ -x=7+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2+3x \\ x=-11 \end{cases}.$$

Passo V sostituiamo nella prima equazione il valore numerico dell'incognita trovata e avremo un'equazione di primo grado nell'altra incognita. Risolviamo quest'ultima equazione. Nel nostro esempio

$$\begin{cases} y=2+3x \\ x=-11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-31 \\ x=-11 \end{cases}.$$

Passo VI possiamo ora scrivere l'insieme soluzione. Nel nostro esempio $\text{I. S.} = \{(-11; -31)\}$.

In conclusione, il sistema è *determinato*, la coppia ordinata $(-11; -31)$ verifica contemporaneamente le due equazioni del sistema.

Esempio 22.7. $\begin{cases} \frac{1}{2}(x-1)+3\left(y+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6} \\ y\left(1+\frac{2}{5}\right)-2=\frac{4}{5}-\frac{x-1}{5} \end{cases}$.

a) Il sistema non si presenta nella forma canonica. Svolgiamo i calcoli e portiamo il sistema in forma canonica:

$$\begin{cases} 3x+18y=-2 \\ x+7y=15 \end{cases};$$

b) ricaviamo x dalla seconda equazione:

$$\begin{cases} 3x+18y=-2 \\ x=15-7y \end{cases};$$

c) abbiamo fatto questa scelta perché possiamo ottenere il valore di x con facilità e senza frazioni. Sostituiamo nella prima equazione al posto di x l'espressione trovata:

$$\begin{cases} 3\cdot(15-7y)+18y=-2 \\ x=15-7y \end{cases};$$

d) risolviamo la prima equazione che è di primo grado nella sola incognita y:

$$\begin{cases} -3y=-47 \\ x=15-7y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{47}{3} \\ x=15-7y \end{cases};$$

e) sostituiamo il valore di y nella seconda equazione:

$$\begin{cases} y=\frac{47}{3} \\ x=15-7\left(\frac{47}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{284}{3} \\ y=\frac{47}{3} \end{cases}.$$

Possiamo scrivere l'insieme delle soluzioni:

$$\text{I. S.}=\left\{\left(-\frac{284}{3};\frac{47}{3}\right)\right\}.$$

In conclusione, il sistema è *determinato*; la coppia ordinata $\left(-\frac{284}{3}; \frac{47}{3}\right)$ verifica le due equazioni del sistema.

Esempio 22.8. $\begin{cases} \dfrac{1}{y} = 2\left(\dfrac{x}{y} - \dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{5x+4y+19}{x} = -2 \end{cases}$.

Il sistema è fratto poiché in ciascuna equazione compare l'incognita al denominatore; per poter applicare il secondo principio di equivalenza delle equazioni eliminando i denominatori, dobbiamo porre le C. E. e individuare il Dominio del sistema assegnato, cioè l'insieme in cui si troverà C. E. : $y \neq 0$ e $x \neq 0$ per cui $D = \mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}_0$.

Portiamo a forma canonica applicando i principi di equivalenza delle equazioni:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y} = 2\left(\dfrac{x}{y} - \dfrac{1}{2}\right) \\ \dfrac{5x+4y+19}{x} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{y} = \dfrac{2x}{y} - 1 \\ 5x+4y+19 = -2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 7x+4y = -19 \end{cases}.$$

Applichiamo il metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 7x+4y = -19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x-1 \\ 7x+4y = -19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x-1 \\ 7x+4(2x-1) = -19 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x-1 \\ 15x = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2(-1)-1 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = -1 \end{cases}.$$

La soluzione è compatibile con le condizioni di esistenza.

✍ *Esercizi proposti:* 22.7, 22.8, 22.9, 22.10, 22.11, 22.12, 22.13, 22.14, 22.15

22.2.3 Metodo del confronto

Esempio 22.9. $\begin{cases} -3x + y = 2 \\ 5x - 2y = 7 \end{cases}$.

Passo I ricaviamo da entrambe le equazioni la stessa incognita. Nel nostro esempio ricaviamo la y contemporaneamente da entrambe le equazioni:

$$\begin{cases} y = 2 + 3x \\ y = \dfrac{5x-7}{2} \end{cases}.$$

Passo II poiché il primo membro delle equazioni è lo stesso, possiamo uguagliare anche i secondi membri, ottenendo un'equazione in una incognita. Nell'esempio $2 + 3x = \frac{5x-7}{2}$.

Passo III risolviamo l'equazione trovata e determiniamo il valore di una delle due incognite. Nel nostro esempio $4 + 6x = 5x - 7 \Rightarrow x = -11$.

Passo IV si sostituisce il valore trovato dell'incognita in una delle due equazioni e ricaviamo l'altra incognita. Nel nostro esempio:

$$\begin{cases} x = -11 \\ y = 2 + 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -11 \\ y = -31 \end{cases}.$$

Passo V possiamo ora scrivere l'insieme soluzione. Nel nostro esempio: I. S. $= \{(-11; -31)\}$.

In conclusione, il sistema è determinato, la coppia ordinata $(-11; -31)$ verifica contemporaneamente le due equazioni del sistema.

✍ *Esercizi proposti:* 22.16, 22.17, 22.18, 22.19

22.2.4 Metodo di riduzione

Il metodo di riduzione si basa sulla seguente osservazione: se un sistema è formato dalle equazioni $A = B$ e $C = D$ possiamo dedurre da queste la nuova equazione $A + C = B + D$.

$$\begin{cases} A = B \\ insC = D \end{cases} \Rightarrow A + C = B + D.$$

L'equazione ottenuta potrebbe presentarsi in una sola incognita e quindi potrebbe essere facile trovare il valore di quella incognita.

Esempio 22.10. $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 2x + 5y = -4 \end{cases}$

Sommando membro a membro le due equazioni otteniamo $(3x - 5y) + (2x + 5y) = 1 - 4$. I termini in y si eliminano perché opposti, sommando i monomi simili si ha $5x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{5}$.

Questo metodo, applicato semplicemente sommando membro a membro le equazioni, funziona solo se i coefficienti di una delle due incognite sono opposti. Solo in questo caso sommando le equazioni una delle due incognite 'sparisce'. Tuttavia con qualche accorgimento è possibile applicarlo in ogni caso.

Sfruttiamo il secondo principio di equivalenza delle equazioni che ci permette di moltiplicare ambo i membri di un'equazione per uno stesso numero diverso da zero. In questo modo possiamo sempre trasformare le due equazioni affinché l'incognita x appaia con coefficienti opposti nella prima e nella seconda equazione.

Esempio 22.11. $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 5x - 4y = -4 \end{cases}.$

Nel nostro esempio possiamo moltiplicare la prima equazione per 5 e la seconda per -3, otteniamo:

$$\begin{matrix} +5 \\ -3 \end{matrix} \begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 5x - 4y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15x - 25y = 5 \\ -15x + 12y = 12 \end{cases};$$

sommando membro a membro abbiamo

$$(15x - 25y) + (-15x + 12y) = 5 + 12 \Rightarrow -13y = 17 \Rightarrow y = -\frac{17}{13}.$$

Dopo aver determinato il valore di una incognita possiamo sostituirlo in una qualsiasi equazione del sistema e determinare il valore dell'altra incognita o ripetere il procedimento per l'altra incognita moltiplicando come segue:

$$\begin{array}{r} +4 \\ -5 \end{array}\left\{\begin{array}{l} 3x-5y=1 \\ 5x-4y=-4 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 12x-20y=4 \\ -25x+20y=20 \end{array}\right. .$$

Sommando le due equazioni otteniamo $-13x = 24 \Rightarrow x = -\frac{24}{13}$.

Abbiamo così determinato la coppia soluzione del sistema $\left(-\frac{24}{13}; -\frac{17}{13}\right)$.

Generalizzazione del metodo di riduzione

Assegnato il sistema lineare $\left\{\begin{array}{l} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{array}\right.$ con a, b, c, a_1, b_1, c_1 numeri reali.

Passo I per eliminare y moltiplichiamo la prima per b_1 e la seconda per $-b$:

$$\left\{\begin{array}{l} ab_1x+bb_1y=cb_1 \\ -a_1bx-bb_1y=-bc_1 \end{array}\right. .$$

Passo II sommiamo le due equazioni:

$$ab_1x-a_1bx=cb_1-bc_1 \Rightarrow (ab_1-a_1b)x=cb_1-bc_1.$$

Passo III ricaviamo l'incognita x:

$$x=\frac{cb_1-bc_1}{ab_1-a_1b}, \text{con } ab_1-a_1b\neq 0.$$

Passo IV per eliminare x moltiplichiamo la prima per $-a_1$ e la seconda per a:

$$\left\{\begin{array}{l} -aa_1x+ba_1y=-a_1c \\ aa_1x+ab_1y=ac_1 \end{array}\right.$$

Passo V sommiamo le due equazioni

$$-a_1by+ab_1y=-a_1c+ac_1 \Rightarrow (ab_1-a_1b)y=ac_1-a_1c.$$

Passo VI ricaviamo l'incognita y:

$$y=\frac{ac_1-a_1c}{ab_1-a_1b}, \text{con } ab_1-a_1b\neq 0.$$

La soluzione è

$$\left(\frac{cb_1-bc_1}{ab_1-a_1b}; \frac{ac_1-a_1c}{ab_1-a_1b}\right), \text{con } ab_1-a_1b\neq 0.$$

✍ *Esercizi proposti:* 22.20, 22.21, 22.22, 22.23

22.2.5 Metodo di Cramer

Definizione 22.6. Si chiama *matrice del sistema lineare* di due equazioni in due incognite la tabella

$$\begin{bmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{bmatrix}$$

in cui sono sistemati i coefficienti delle incognite del sistema posto in forma canonica; si chiama *determinante della matrice* il numero reale

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a \cdot b_1 - b \cdot a_1$$

ad essa associato.

Dalla generalizzazione del metodo di riduzione

$$\left(\frac{cb_1 - bc_1}{ab_1 - a_1 b}; \frac{ac_1 - a_1 c}{ab_1 - a_1 b} \right), \text{con } ab_1 - a_1 b \neq 0$$

possiamo dedurre che:

Un *sistema lineare* è *determinato*, ammette cioè una sola coppia soluzione *se il determinante della matrice del sistema è diverso da zero*.

✍ *Esercizi proposti:* 22.24, 22.25

La regola di Cramer [1] ci permette di stabilire la coppia soluzione di un sistema lineare di due equazioni in due incognite, costruendo e calcolando tre determinanti:

a) D il determinante della matrice del sistema:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a \cdot b_1 - b \cdot a_1;$$

b) D_x il determinante della matrice ottenuta sostituendo in D agli elementi della prima colonna i termini noti.

$$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} = c \cdot b_1 - b \cdot c_1$$

c) D_y il determinante della matrice ottenuta sostituendo in D agli elementi della seconda colonna i termini noti.

$$D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} = a \cdot c_1 - c \cdot a_1$$

Se $D \neq 0$ il sistema è determinato e la coppia soluzione è

$$x = \frac{D_x}{D}; \ y = \frac{D_y}{D}.$$

[1] Dal nome del matematico svizzero Gabriel Cramer (1704-1752).

Esempio 22.12. $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x - 3y = 2 \end{cases}.$

Calcoliamo i determinanti.

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a \cdot b_1 - b \cdot a_1 \Rightarrow D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - 3 \cdot 4 = -6 - 12 = -18.$$

Poiché $D \neq 0$ il sistema è determinato.

$$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} = c \cdot b_1 - b \cdot c_1 \Rightarrow D_x = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-3) - 3 \cdot 2 = -12 - 6 = -18,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} = a \cdot c_1 - c \cdot a_1 \Rightarrow D_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 4 = 4 - 16 = -12.$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-18}{-18} = 1;\; y = \frac{D_y}{D} = \frac{-12}{-18} = \frac{2}{3}.$$

✍ *Esercizi proposti:* 22.26, 22.27, 22.28, 22.29, 22.30

22.2.6 Classificazione dei sistemi rispetto alle soluzioni

Dato un sistema in forma canonica $\begin{cases} ax + by = c \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$ ricordando che:

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a \cdot b_1 - b \cdot a_1;$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} = c \cdot b_1 - b \cdot c_1;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} = a \cdot c_1 - c \cdot a_1 :$$

- se $D \neq 0$ il sistema è *determinato*, esiste una sola coppia soluzione $x = \frac{D_x}{D}; y = \frac{D_y}{D}$;
- se $D = 0$ si possono verificare due casi:
  - 1° caso: se $D_x = 0$ e $D_y = 0$ il sistema è *indeterminato*, ogni coppia di numeri reali che verifica un'equazione, verifica anche l'altra;
  - 2° caso: se $D_x \neq 0$ e $D_y \neq 0$ il sistema è *impossibile*, non esiste alcuna coppia che soddisfa entrambi le equazioni e $\text{I. S.} = \emptyset$.

Esempio 22.13. $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 4x - 3y = 2 \end{cases}.$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) + 3 \cdot (4) = -6 + 12 = 6 \neq 0;$$

il sistema è determinato.

Esempio 22.14. $\begin{cases} 8x-6y=2 \\ 4x-3y=1 \end{cases}$.

$$D = \begin{vmatrix} 8 & -6 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 8\cdot(-3)+6\cdot(4) = -24+24 = 0;$$

il sistema è indeterminato o impossibile.

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-3)-(-6)\cdot 1 = -6+6 = 0;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 8\cdot 1 - 2\cdot 4 = 8-8 = 0.$$

Il sistema è indeterminato.

Esempio 22.15. $\begin{cases} 8x-6y=1 \\ 4x-3y=2 \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 8 & -6 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 8\cdot(-3)-4\cdot(-6) = -24+24 = 0;$$

il sistema è indeterminato o impossibile.

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3)-(-6)\cdot 2 = -3+12 = +9;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 8\cdot 2 - 1\cdot 4 = 16-4 = 12.$$

Il sistema è impossibile.

Osserviamo che se $D=0$ si ha

$$a\cdot b_1 - b\cdot a_1 = 0 \Rightarrow a\cdot b_1 = b\cdot a_1 \Rightarrow \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}.$$

Ciò significa che, se i coefficienti delle incognite della prima equazione sono proporzionali ai coefficienti delle incognite della seconda equazione allora il sistema è indeterminato o impossibile.

In particolare, se poi $D_x = 0$ si ha

$$c\cdot b_1 - b\cdot c_1 = 0 \Rightarrow c\cdot b_1 = b\cdot c_1 \Rightarrow \frac{c}{c_1} = \frac{b}{b_1}.$$

Quindi se anche i termini noti delle due equazioni sono nella stessa proporzione, cioè se

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$$

il sistema è indeterminato.

Se invece $D_x \neq 0$, cioè

$$\frac{c}{c_1} \neq \frac{b}{b_1}$$

il sistema è impossibile.

✍ *Esercizi proposti:* 22.31, 22.32, 22.33, 22.34, 22.35, 22.36, 22.37, 22.38

22.2.7 Il metodo grafico

Il problema della ricerca dell'Insieme Soluzione di un'equazione lineare ci ha condotto ad un proficuo collegamento tra concetti algebrici e concetti geometrici; in particolare abbiamo visto che:

Concetto algebrico	Concetto geometrico
Coppia ordinata di numeri reali	Punto del piano dotato di riferimento cartesiano
Equazione lineare	Retta
Coppia soluzione dell'equazione $ax+by+c=0$	Punto della retta di equazione $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

Vedremo ora come sia possibile sfruttare questi collegamenti per risolvere un sistema lineare di due equazioni in due incognite.

Problema 22.16. Determina due numeri reali di cui si sa che la loro somma è 6 e il doppio del primo aumentato della metà del secondo è ancora 6.

Soluzione Indichiamo con x e y i due numeri incogniti; il problema si formalizza con due equazioni: $x+y=6$ e $2x+\frac{1}{2}y=6$.

Dobbiamo individuare una coppia di numeri reali che sia soluzione dell'una e dell'altra equazione.

Il punto di vista algebrico La coppia di numeri reali x e y che risolve il problema è quella che risolve il sistema

$$\begin{cases} x+y=6 \\ 2x+\dfrac{1}{2}y=6 \end{cases}.$$

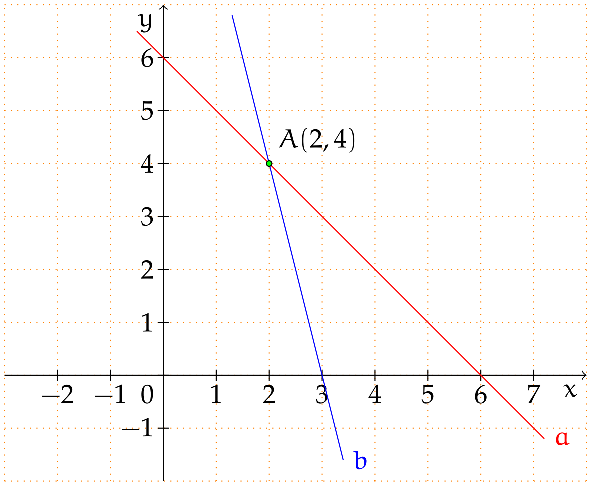
Applicando uno qualunque dei metodi algebrici esposti si ottiene $x=2$ e $y=4$.

Il punto di vista geometrico Il problema si può spostare in ambiente geometrico: la coppia soluzione rappresenta un punto che appartiene sia alla retta rappresentata dalla prima equazione sia alla retta rappresentata dalla seconda equazione, quindi rappresenta il punto di intersezione delle due rette.

Si rappresenta nel riferimento cartesiano ortogonale il sistema. La retta a è quella di equazione $x+y=6$, che passa per i punti $(6,0)$ e $(0,6)$.

La retta b è quella di equazione $2x+\frac{1}{2}y=6$, che passa per i punti $(3,0)$ e $(0,12)$.

Il punto $A(2,4)$ è il punto di intersezione delle due rette, le sue coordinate formano la coppia soluzione del sistema e di conseguenza sono i due numeri che stiamo cercando nel problema.



♦

Esempio 22.17. $\begin{cases} 2x-3y=7 \\ x+y+6=5(x-y) \end{cases}$.

Il punto di vista algebrico Portiamo in forma canonica il sistema, otteniamo:

$$\begin{cases} 2x-3y=7 \\ x+y+6=5(x-y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y=7 \\ x+y+6=5x-5y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y=7 \\ -4x+6y=-6 \end{cases}.$$

Si può notare che il sistema ha i coefficienti delle incognite in proporzione:

$$\frac{a}{a_1}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2};\ \frac{b}{b_1}=\frac{-3}{+6}=-\frac{1}{2},$$

mentre i termini noti non sono nella stessa proporzione $\frac{c}{c_1}=\frac{7}{-1}$ quindi il sistema è impossibile: I. S. $=\emptyset$.

Il punto di vista geometrico Determiniamo le equazioni esplicite delle rette rappresentate dalle due equazioni lineari del sistema assegnato. Si ha:

$$\begin{cases} y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{7}{3} \\ y=\dfrac{2}{3}x-1 \end{cases}.$$

Le due rette (figura 22.1) hanno lo stesso coefficiente angolare, il coefficiente della x e quindi hanno la stessa inclinazione, pertanto sono parallele. Non hanno quindi nessun punto di intersezione $r_1 \cap r_2 = \emptyset$, il sistema è impossibile: I. S. $=\emptyset$.

Esempio 22.18. $\begin{cases} 2x+3y+1=0 \\ y+\dfrac{1}{3}=-\dfrac{2}{3}x \end{cases}$.

Il punto di vista algebrico Scriviamo in forma canonica il sistema $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$.

Osserviamo che sono due equazioni identiche, pertanto il rapporto tra i coefficienti delle incognite e il rapporto tra i termini noti è sempre 1. Il sistema è indeterminato. D'altra parte, se le due equazioni sono identiche significa che tutte le infinite coppie (x, y) che rendono vera la prima equazione, verificano anche la seconda.

Il punto di vista geometrico Rappresentiamo nel riferimento cartesiano ortogonale (figura 22.2) le due rette aventi come equazioni le equazioni del sistema. È semplice rendersi conto che le due rette coincidono; tutti i punti di una coincidono con tutti i punti dell'altra: $r_1 \cap r_2 = r_1 = r_2$.

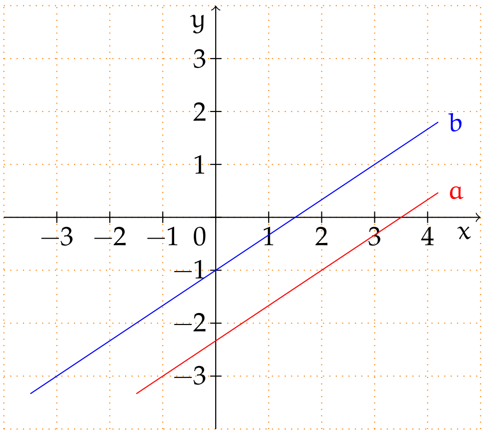


FIGURA 22.1: Esempio 23.17

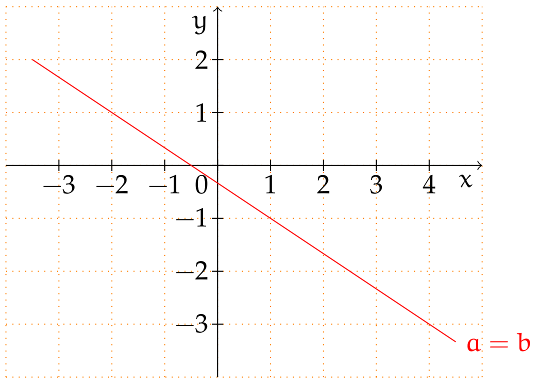


FIGURA 22.2: Esempio 23.18

✍ *Esercizi proposti:* 22.39, 22.40, 22.41, 22.42, 22.43

22.3 Sistemi fratti

Nel seguente sistema $\begin{cases} \frac{2}{x+1} - \frac{3}{y-2} = \frac{2x-5y+4}{xy+y-2-2x} \\ 3y + 2(x - y - 1) = 5x - 8(-x - 2y + 1) \end{cases}$ di due equazioni in due incognite, la prima equazione presenta le incognite anche al denominatore.

Definizione 22.7. Si chiama *sistema fratto o frazionario* il sistema in cui almeno in una delle equazioni che lo compongono compare l'incognita al denominatore.

Poiché risolvere un sistema significa determinare tutte le coppie ordinate che verificano entrambe le equazioni, nel sistema fratto dovremo innanzi tutto definire il Dominio o Insieme di Definizione nel quale individuare le coppie soluzioni.

Definizione 22.8. Si chiama *Dominio* (D) o *Insieme di Definizione* (ID) del sistema fratto, l'insieme delle coppie ordinate che rendono diverso da zero i denominatori che compaiono nelle equazioni.

Esempio 22.19. $\begin{cases} \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{3}{y-2} = \dfrac{2x-5y+4}{xy+y-2-2x} \\ 3y+2(x-y-1) = 5x-8(-x-2y+1) \end{cases}$.

Passo I Scomponiamo i denominatori nella prima equazione per determinare il mcm.

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{3}{y-2} = \dfrac{2x-5y+4}{(x+1)(y-2)} \\ 3y+2(x-y-1) = 5x-8(-x-2y+1) \end{cases} \Rightarrow \text{mcm} = (x+1)(y-2).$$

Passo II Poniamo le Condizioni di Esistenza da cui determineremo il Dominio del sistema:

$$\text{C. E.}: \begin{cases} x \neq -1 \\ y \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \text{D} = \text{I. S.} = \{(x;y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, x \neq -1 \text{ e } y \neq 2\}.$$

Passo III Riduciamo allo stesso denominatore la prima equazione, svolgiamo i calcoli nella seconda per ottenere la forma canonica: $\begin{cases} -5x+7y = 11 \\ 11x+15y = 6 \end{cases}$.

Passo IV Risolviamo il sistema e otteniamo la coppia soluzione $\left(-\frac{123}{152}; \frac{151}{152}\right)$ che è accettabile.

Esempio 22.20. $\begin{cases} \dfrac{3x+y-1}{x} = 3 \\ \dfrac{2x+3y}{y-1} = 7 \end{cases}$.

Passo I Per la prima equazione si ha mcm $= x$; per la seconda mcm $= y-1$.

Passo II Poniamo le Condizioni di Esistenza da cui determineremo il Dominio:

$$\text{C. E.}: \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 1 \end{cases} \rightarrow \text{D} = \text{I. S.} = \{(x;y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x \neq 0 \text{ e } y \neq 1\}.$$

Passo III Riduciamo allo stesso denominatore sia la prima che la seconda equazione: $\begin{cases} 3x+y-1 = 3x \\ 2x+3y = 7y-7 \end{cases}$.

Passo IV Determiniamo la forma canonica: $\begin{cases} y-1 = 0 \\ 2x-4y = -7 \end{cases}$.

Passo V Determiniamo con un qualunque metodo la coppia soluzione: $\left(-\frac{3}{2}; 1\right)$ che non accettabile poiché contraddice la C. E. e quindi non appartiene al dominio. Il sistema assegnato è quindi impossibile I. S. $= \emptyset$.

✍ *Esercizi proposti:* 22.44, 22.45, 22.46, 22.47, 22.48, 22.49

22.4 Sistemi letterali

Definizione 22.9. Si chiama *sistema letterale* il sistema in cui oltre alle incognite, solitamente indicate con x e y, compaiono altre lettere dette parametri.

Distinguiamo tre casi distinti di discussione.

Le equazioni sono lineari e il parametro si trova solo al numeratore

---

Esempio 22.21. $\begin{cases} 2ax-(a-1)y=0 \\ -2x+3y=a \end{cases}$.

È un sistema letterale in quanto, reso in forma canonica, presenta un parametro nei suoi coefficienti. Esso è lineare, pertanto la coppia soluzione, se esiste, dipenderà dal valore del parametro.

Per *discussione del sistema letterale* s'intende l'analisi e la ricerca dei valori che attribuiti al parametro rendono il sistema determinato (in tal caso si determina la soluzione) ma anche scartare i valori del parametro per cui il sistema è impossibile o indeterminato. Per discutere il sistema usiamo il metodo di Cramer.

Passo I Calcoliamo il determinante del sistema:

$$D = \begin{vmatrix} 2a & -(a-1) \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 4a+2.$$

Passo II Determiniamo il valore del parametro che rende D diverso da zero: $4a+2 \neq 0 \Rightarrow a \neq 0 - \frac{1}{2}$. Se $a \neq -\frac{1}{2}$ il sistema è determinato.

Passo III Calcoliamo i determinanti D_x e D_y per trovare la coppia soluzione.

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & -(a-1) \\ a & 3 \end{vmatrix} = a\cdot(a-1); \quad D_y = \begin{vmatrix} 2a & 0 \\ -2 & a \end{vmatrix} = 2a^2.$$

Quindi $x = \frac{a\cdot(a-1)}{4a+2}$ e $y = \frac{2a^2}{4a+2}$.

Passo IV Il determinante è nullo se $a = -\frac{1}{2}$; poiché per questo valore di a i determinanti D_x e D_y sono diversi da zero si ha che per $a = -\frac{1}{2}$ il sistema è impossibile.

Riassumendo si ha:

Condizioni sul parametro	Insieme Soluzione	Sistema
$a \neq -\frac{1}{2}$	$\left(\frac{a\cdot(a-1)}{4a+2}; \frac{2a^2}{4a+2}\right)$	determinato
$a = -\frac{1}{2}$	$\emptyset$	impossibile

Il parametro compare al denominatore in almeno una equazione del sistema

---

Esempio 22.22. $\begin{cases} \dfrac{y+a}{3} - \dfrac{a-x}{a-1} = a \\ \dfrac{x+2a}{a} - 3 = \dfrac{y}{2} - a \end{cases}$.

Il sistema non è fratto pur presentando termini frazionari nelle sue equazioni; la presenza del parametro al denominatore ci obbliga ad escludere dall'insieme $\mathbb{R}$ quei valori che annullano il denominatore. Se $a = 1$ oppure $a = 0$ ciascuna equazione del sistema è priva di significato, pertanto lo è anche il sistema. Con le condizioni di esistenza C. E. : $a \neq 1$ e $a \neq 0$ possiamo ridurre allo stesso denominatore ciascuna equazione e condurre il sistema alla forma canonica: $\begin{cases} 3x + (a-1)y = 2a^2 + a \\ 2x - ay = 2a - 2a^2 \end{cases}$

Passo I Calcoliamo il determinante del sistema: $D = \begin{vmatrix} 3 & a-1 \\ 2 & -a \end{vmatrix} = 2 - 5a.$

Passo II Determiniamo il valore del parametro che rende D diverso da zero: $2 - 5a \neq 0 \Rightarrow a \neq \frac{2}{5}$ Se $a \neq \frac{2}{5}$ il sistema è determinato.

Passo III Calcoliamo i determinanti D_x e D_y per trovare la coppia soluzione

$$D_x = \begin{vmatrix} 2a^2 + a & a-1 \\ 2a - 2a^2 & -a \end{vmatrix} = a \cdot (2a - 5); \quad D_y = \begin{vmatrix} 3 & 2a^2 + a \\ 2 & 2a - 2a^2 \end{vmatrix} = 2a \cdot (2 - 5a).$$

Quindi $x = \frac{a \cdot (2-5a)}{2-5a}$ e $y = \frac{2a \cdot (2-5a)}{2-5a}$ e semplificando $(a; 2a)$.

Passo IV Il determinante è nullo se $a = \frac{2}{5}$; poiché anche i determinanti D_x e D_y si annullano si ha per $a = \frac{2}{5}$ sistema indeterminato.

Riassumendo si ha:

Condizioni sul parametro	Insieme Soluzione	Sistema
$a = 0 \vee a = 1$	$\emptyset$	privo di significato
$a \neq \frac{2}{5}$ e $a \neq 1$ e $a \neq 0$	$\{(a; 2a)\}$	determinato
$a = \frac{2}{5}$	$\{\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 / 3x - \frac{3}{5}y = \frac{18}{25}\}$	indeterminato

---

Il sistema è frazionario

Esempio 22.23. $\begin{cases} \frac{y-a}{x} = \frac{2}{a} \\ x + y = 1 \end{cases}$.

Il sistema letterale è fratto e nel denominatore oltre al parametro compare l'incognita x. Se $a = 0$ la prima equazione, e di conseguenza tutto il sistema, è privo di significato. Per poter procedere alla ricerca dell'Insieme Soluzione poniamo sul parametro la condizione di esistenza:

$$\text{C. E.} : a \neq 0. \tag{22.1}$$

Essendo fratto dobbiamo anche stabilire il Dominio del sistema:

$$D = \{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x \neq 0\}. \tag{22.2}$$

Passo I Portiamo nella forma canonica: $\begin{cases} -2x + ay = a^2 \\ x + y = 1 \end{cases}$ con $a \neq 0$ e $x \neq 0$.

Passo II Calcoliamo il determinante del sistema: $D = \begin{vmatrix} -2 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - a = -(2 + a)$.

Passo III Determiniamo il valore del parametro che rende D diverso da zero: $-2 - a \neq 0 \Rightarrow a \neq -2$. Se $a \neq -2$ il sistema è determinato.

Passo IV calcoliamo i determinanti D_x e D_y per trovare la coppia soluzione

$$D_x = \begin{vmatrix} a^2 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a \cdot (a - 1); \quad D_y = \begin{vmatrix} -2 & a^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - a^2 = -(2 + a^2).$$

Quindi $x = -\frac{a \cdot (a-1)}{2+a}$ e $y = \frac{a^2+2}{2+a}$ è la coppia soluzione accettabile se $x = -\frac{a \cdot (a-1)}{2+a} \neq 0$ per quanto stabilito in 22.2; essendo $a \neq 0$ per la 22.1 la coppia soluzione è accettabile se $a \neq 1$.

Passo V il determinante D è nullo se $a = -2$; essendo i determinanti D_x e D_y diversi da zero si ha: se $a = -2$ il sistema è impossibile. Riassumendo si ha:

Parametro	Incognite	Insieme Soluzione	Sistema
	$x \neq 0$		
$a = 0$			privo di significato
$a \neq 2, a \neq 0$		$\left(-\frac{a \cdot (a-1)}{2+a}; \frac{a^2+2}{2+a}\right)$	determinato
$a \neq -2$ e $a \neq 0$ e $a \neq 1$		accettabile	
$a = -2$			impossibile

✍ *Esercizi proposti:* 22.50, 22.51, 22.52, 22.53, 22.54, 22.55, 22.56

22.5 Sistemi lineari di tre equazioni in tre incognite

Problema 22.24. Determinare tre numeri reali x, y, z (nell'ordine) tali che il doppio del primo uguagli l'opposto del secondo, la differenza tra il primo e il triplo del terzo sia nulla e la somma del secondo con il terzo superi il primo di 4 unità.

Soluzione Formalizziamo le condizioni espresse nel testo attraverso equazioni lineari:

a) il doppio del primo uguagli l'opposto del secondo: $2x = -y$;
b) la differenza tra il primo e il triplo del secondo sia nulla: $x - 3z = 0$;
c) la somma del secondo con il terzo superi il primo di 4 unità: $y + z = x + 4$.

Le tre condizioni devono essere vere contemporaneamente, quindi i tre numeri sono la terna soluzione del sistema di primo grado di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} 2x = -y \\ x - 3z = 0 \\ y + z = x + 4 \end{cases}.$$

Si può ricavare la y dalla prima equazione e sostituire nelle altre due:

$$\begin{cases} y = -2x \\ x - 3z = 0 \\ -2x + z = x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x \\ x - 3z = 0 \\ -3x + z = 4 \end{cases}.$$

Dalla seconda equazione ricaviamo x in funzione di z e sostituiamo il valore di x nell'ultima equazione

$$\begin{cases} y = -2x \\ x = 3z \\ -3x + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x \\ x = 3z \\ -3(3z) + z = 4 \end{cases}.$$

Risolviamo l'ultima equazione che è di primo grado in una sola incognita e sostituiamo il valore ottenuto di z nella seconda equazione:

$$\begin{cases} y = -2x \\ x = 3z \\ z = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x \\ x = 3\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} \\ z = -\frac{4}{9} \end{cases}.$$

Infine sostituiamo il valore ottenuto di x nella prima equazione:

$$\begin{cases} y = 3 \\ z = -\dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

♦

Esempio 22.25. $\begin{cases} 3x + y - z = 7 \\ x + 3y + z = 5 \\ x + y - 3z = 3 \end{cases}.$

Procediamo con il metodo di riduzione. Sommiamo le prime due equazioni: $4x + 4y = 12$ Moltiplichiamo la seconda equazione per 3 e sommiamo con la terza: $3(x + 3y + z) + x + y = 3 \cdot 5 + 3 = 4x + 10y = 18$. Costruiamo il sistema di queste due equazioni nelle sole due incognite x e y: $\begin{cases} 4x + 4y = 12 \\ 4x + 10y = 18 \end{cases}.$

Moltiplichiamo la seconda equazione per -1 e sommiamo le due equazioni:

$$\begin{cases} 4x+4y=12 \\ -4x-10y=-18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+4y=12 \\ -4x-10y+4x+4y=-18+12 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 4x+4y=12 \\ -6y=-6 \Rightarrow y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}.$$

Sostituendo nella prima equazione del sistema ricaviamo la terza incognita: $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}.$

La terna soluzione del sistema assegnato è $(2;1;0)$.

✍ *Esercizi proposti:* 22.57, 22.58, 22.59, 22.60, 22.61, 22.62, 22.63

22.6 Sistemi da risolvere con sostituzioni delle variabili

Alcuni sistemi possono essere ricondotti a sistemi lineari per mezzo di sostituzioni nelle variabili.

Esempio 22.26. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{2}{y}=3 \\ \frac{2}{x}-\frac{4}{y}=-1 \end{cases}.$

Con la seguente sostituzione di variabili

$$\begin{cases} u=\frac{1}{x} \\ v=\frac{1}{y} \end{cases}, \tag{22.3}$$

il sistema diventa

$$\begin{cases} u+2v=3 \\ 2u-4v=-1 \end{cases}.$$

Per risolverlo possiamo moltiplicare per 2 la prima equazione:

$$\begin{cases} 2u+4v=6 \\ 2u-4v=-1 \end{cases}$$

Sommando membro a membro abbiamo $4u=5$ dalla quale possiamo determinare $u=\frac{5}{4}$.

Per ricavare l'incognita v moltiplichiamo la prima equazione per -2, otteniamo

$$\begin{cases} -2u-4v=-6 \\ 2u-4v=-1 \end{cases}$$

Sommando membro a membro abbiamo

$$-8v=-7 \Rightarrow v=\frac{7}{8}.$$

Avendo trovato i valori delle incognite u e v possiamo ricavare x e y sostituiendo con i valori trovati nella 22.3:

$$\begin{cases} \dfrac{5}{4} = \dfrac{1}{x} \\ \dfrac{7}{8} = \dfrac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{5} \\ y = \dfrac{8}{7} \end{cases}.$$

✍ *Esercizi proposti:* 22.64, 22.65, 22.66

22.7 Esercizi

22.7.1 Esercizi dei singoli paragrafi

22.1 - Equazione lineare in due incognite

22.1. Completa la tabella delle coppie di soluzioni dell'equazione $x+2y-1=0$.

x		-1	0		$\frac{1}{2}$			2,25	
y	0			-1		$\frac{3}{4}$	2		1,5

22.2. Completa la tabella delle coppie di soluzioni dell'equazione $3x-2y=5$.

x		0	1		$\frac{1}{6}$			$-\sqrt{2}$	0,25
y	0			-1		$\frac{3}{4}$	$\sqrt{2}$		

22.3. Completa la tabella delle coppie di soluzioni dell'equazione $3x-2\sqrt{2}y=0$.

x		0			$\frac{1}{6}$		$\sqrt{2}$
y	0		1	-1		$\sqrt{2}$	

22.4. Risolvi graficamente le seguenti equazioni in due incognite.

a) $2x-2y+3=0$;

b) $-\dfrac{1}{5}x-\dfrac{5}{2}y+1=0$;

c) $-2y+3=0$;

d) $x+2y+\dfrac{7}{4}=0$.

22.5. Risolvi graficamente le seguenti equazioni in due incognite.

a) $-2x+4y-1=0$;

b) $2y+\dfrac{2}{3}x+6=0$;

c) $\sqrt{2}x+\sqrt{6}y=0$;

d) $\sqrt{3}y+\sqrt{6}=-x$.

22.6. Stabilisci quali coppie appartengono all'Insieme Soluzione dell'equazione.

a) $5x+7y-1=0$ $\quad\left(-\frac{7}{5};0\right),\left(-\frac{1}{5};-1\right),\left(0;\frac{1}{7}\right),\left(\frac{2}{5};-\frac{1}{7}\right)$;

b) $-x+\dfrac{3}{4}y-\dfrac{4}{3}=0$ $\quad(0;-1),\left(\frac{1}{12};\frac{7}{9}\right),\left(-\frac{4}{3};0\right),(-3;4)$;

c) $-x-y+\sqrt{2}=0$ $\quad\left(\sqrt{2};0\right),\left(0;-\sqrt{2}\right),\left(1+\sqrt{2};-1\right),\left(1;-1-\sqrt{2}\right)$.

22.7. Risolvi i seguenti sistemi con il metodo di sostituzione.

a) $\begin{cases} y=-2 \\ 2x-y+2=0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} y=-x+1 \\ 2x+3y+4=0 \end{cases}$.

22.8 (*). Risolvi i seguenti sistemi con il metodo di sostituzione.

a) $\begin{cases} x=1 \\ x+y=1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} y=x \\ 2x-y+2=0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2y=2 \\ x+y=1 \end{cases}$.

22.9 (*). Risolvi i seguenti sistemi con il metodo di sostituzione.

a) $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ x + 2y = 14 \end{cases}$;
b) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 4y - 6x = -2 \end{cases}$;
c) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$;
d) $\begin{cases} x + 4y - 1 = 3 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + 1 = -\dfrac{x}{6} - 1 \end{cases}$.

22.10 (*). Risolvi i seguenti sistemi con il metodo di sostituzione.

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 6x - 9y = 6 \end{cases}$;
b) $\begin{cases} x + 2y = 14 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$;
c) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -2x - 4y = 2 \end{cases}$;
d) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -6x + 3y = -9 \end{cases}$.

22.11 (*). Risolvi i seguenti sistemi con il metodo di sostituzione.

a) $\begin{cases} \dfrac{x - 4y}{3} = x - 5y \\ x - 2 = 6y + 4 \end{cases}$;
b) $\begin{cases} \dfrac{y^2 - 4x + 2}{5} = \dfrac{2y^2 - x}{10} - 1 \\ x = -2y + 8 \end{cases}$;
c) $\begin{cases} 3x - \dfrac{3}{4}(2y - 1) = \dfrac{13}{4}(x + 1) \\ \dfrac{x + 1}{4} - \dfrac{y}{2} = \dfrac{1 + y}{2} - \dfrac{1}{4} \end{cases}$;
d) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} = 0 \\ \dfrac{y - x - 1}{2} + x - y + 1 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

22.12 (*). Risolvi i seguenti sistemi con il metodo di sostituzione.

a) $\begin{cases} y - \dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{4} = 0 \\ \dfrac{2x + 1}{1 - x} + \dfrac{2 + y}{y - 1} = -1 \end{cases}$;
b) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3\left(\dfrac{x}{6} + 3y\right) = 4 \end{cases}$;
c) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{6}x = 5 - \dfrac{6x + 10}{4} \\ 2(x - 2) - 3x = 40 - 6\left(y - \dfrac{1}{3}\right) \end{cases}$;
d) $\begin{cases} 2\dfrac{y}{3} + x + 1 = 0 \\ \dfrac{y + 1}{2} + \dfrac{x - 1}{3} + 1 = 0 \end{cases}$.

22.13 (*). Risolvi i seguenti sistemi con il metodo di sostituzione.

a) $\begin{cases} (x - 2)^2 + y = (x + 1)(x - y) + (3 - y)(2 - x) \\ \dfrac{x}{4} - 2y = 2 \end{cases}$;
b) $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x - y + k = 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} y - \dfrac{3-2x}{3} = \dfrac{x-y}{3} + 1 \\ \dfrac{x+1}{2} + \dfrac{5}{4} = y + \dfrac{2-3x}{4} \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ kx + (k+1)y + 1 = 0 \end{cases}$.

22.14. Risolvere il sistema che formalizza il problema 23.4:

$$\begin{cases} 2x + \dfrac{1}{2}y = 98 \\ 2x + 3y = 170 \end{cases},$$

e concludere il problema determinando l'area del rettangolo.

22.15. Determinare due numeri reali x e y tali che il triplo della loro somma sia uguale al doppio del primo aumentato di 10 e il doppio del primo sia uguale al prodotto del secondo con 5.

22.16 (*). Applica il metodo del confronto per risolvere i seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} x + y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x = -1 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$.

22.17 (*). Applica il metodo del confronto per risolvere i seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 2x \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x + y = 2 \\ -x - y = 2 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x - \dfrac{1}{2}y = 2 \end{cases}$.

22.18 (*). Applica il metodo del confronto per risolvere i seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} y - \dfrac{3x-4}{2} = 1 - \dfrac{y}{4} \\ 2y - 2x = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x - y + \dfrac{1}{3} = 0 \\ x - \dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{3} = 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{6}x = 5 - \dfrac{6x+10}{8} \\ 8(x-2) + 3x = 40 - 6\left(y - \dfrac{1}{6}\right) \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x = \dfrac{y-4}{3} + 1 \\ y = \dfrac{x+3}{3} \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x - y + k = 0 \\ x + y = k - 1 \end{cases}$.

22.19. In un triangolo isoscele la somma della base con il doppio del lato è 168 m e la differenza tra la metà della base e $1/13$ del lato è 28 m. Indicata con x la misura della base e con y quella del lato, risolvete con il metodo del confronto il sistema lineare che formalizza il problema. Determinate l'area del triangolo.

22.20 (*). Risolvere i seguenti sistemi con il metodo di riduzione.

a) $\begin{cases} x+y=0 \\ -x+y=0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x+y=1+y \\ 4x+y=2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=-1 \end{cases}$.

22.21 (*). Risolvere i seguenti sistemi con il metodo di riduzione.

a) $\begin{cases} x-y=0 \\ -2x+3y=1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x+\dfrac{2}{3}y=3 \\ \dfrac{3}{2}x-\dfrac{3}{2}y=2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x=3-x \\ 2x+y=3 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 5y+2x=1 \\ 3x+2y+2=0 \end{cases}$.

22.22 (*). Risolvere i seguenti sistemi con il metodo di riduzione.

a) $\begin{cases} -3x+y=2 \\ 5x-2y=7 \end{cases}$;

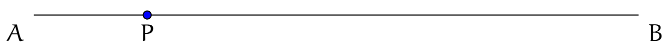
b) $\begin{cases} 2x=3-x \\ \\ 2x+y=3 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \dfrac{4}{3}x-\dfrac{4y-x}{2}+\dfrac{35}{12}-\dfrac{x+y}{4}=0 \\ \dfrac{3(x+y)}{2}-\dfrac{1}{2}(5x-y)=\dfrac{1}{3}(11-4x+y) \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+ay+a=0 \\ 2x-ay+a=0 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} 2ax+2y-1=0 \\ ax+y=3 \end{cases}$.

22.23. Il segmento AB misura 80 cm; il punto P lo divide in due parti tali che il quadruplo della parte minore uguagli il triplo della differenza fra la maggiore e il triplo della minore. Determinare $\overline{AP}$ e $\overline{PB}$, formalizzando il problema con un sistema lineare che risolverete con il metodo di riduzione.



22.24. Stabilire se è determinato il sistema:

$$\begin{cases} (x-1)(x+1)-3(x-2)=2(x-y+3)+x^2 \\ x(x+y-3)+y(4-x)=x^2-4x+y \end{cases}.$$

22.25. Verificare che il determinante della matrice del sistema è nullo:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2}x-\dfrac{7}{4}y=10^5 \\ \\ 6x-7y=5^{10} \end{cases}.$$

22.26 (*). Risolvere con la regola di Cramer i seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} x-3y=2 \\ x-2y=2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x+2y=3 \\ 3x-3y=2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 5y+2x=1 \\ 3x+2y+2=0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 5x+2y=-1 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$.

22.27 (*). Risolvere con la regola di Cramer i seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} \frac{1}{2}y-\frac{2}{3}y=2 \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y=1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \frac{y}{5}-\frac{x}{2}=10 \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=5 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2(x-2y)+3x-2(y+1)=0 \\ x-2(x-3y)-5y=6(x-1) \end{cases}$; d) $\begin{cases} 4-2x=\frac{3}{2}(y-1) \\ \frac{2x+3y}{2}=\frac{7+2x}{2} \end{cases}$.

22.28 (*). Risolvere con la regola di Cramer i seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} 3x+y=-3 \\ -2x+3y=+2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 6x-2y=5 \\ x+\frac{1}{2}y=0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 10x-20y=-11 \\ x+y-1=0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ 4x+6y=0 \end{cases}$.

22.29 (*). Risolvere con la regola di Cramer i seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+4y=1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x+2y=4 \\ \frac{3}{2}x+y=2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} ax+ay=3a^2 \\ x-2y=-3a \end{cases}$; d) $\begin{cases} 3x-2y=8k \\ x-y=3k \end{cases}$.

22.30. Risolvi col metodo di Cramer il sistema

$$\begin{cases} 25x-3y=18 \\ \frac{3(y+6)}{5}=5x \end{cases}.$$

Cosa osservi?

22.31. Per ciascuno dei seguenti sistemi stabilisci se è determinato, indeterminato, impossibile.

a) $\begin{cases} x-2y=3 \\ 4x-8y=12 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-4y=5 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x-6y=12 \end{cases}$; d) $\begin{cases} \frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y=-2 \\ \frac{5}{4}x-\frac{15}{4}y=-\frac{5}{2} \end{cases}$.

22.32. Per ciascuno dei seguenti sistemi stabilisci se è determinato, indeterminato, impossibile.

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{7}x - \dfrac{4}{5}y = 0 \\ \dfrac{5}{4}x - 7y = \dfrac{19}{2} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} -40x + 12y = -3 \\ 17x - 2y = 100 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x - y = 3 \\ -x + y = 1 \end{cases}$.

22.33. Per ciascuno dei seguenti sistemi stabilisci se è determinato, indeterminato, impossibile.

a) $\begin{cases} -x + 3y = -\dfrac{8}{15} \\ 5x - 15y = \dfrac{2^3}{3} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} = -\dfrac{y}{2} + 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$.

22.34. La somma di due numeri reali è 16 e il doppio del primo aumentato di 4 uguaglia la differenza tra 5 e il doppio del secondo. Stabilisci, dopo aver formalizzato il problema con un sistema lineare, se è possibile determinare i due numeri.

22.35. Stabilisci per quale valore di a il sistema $\begin{cases} ax + y = -2 \\ -3x + 2y = 0 \end{cases}$ è determinato. Se $a = -\frac{3}{2}$ il sistema è indeterminato o impossibile?

22.36. Perché se $a = \frac{1}{3}$ il sistema $\begin{cases} x + ay = 2a \\ 3x + y = 2 \end{cases}$ è indeterminato?

22.37. Per quale valore di k è impossibile il sistema?

$$\begin{cases} 2x - 3ky = 2k \\ x - ky = 2k \end{cases} .$$

22.38. Per quale valore di k è indeterminato il sistema?

$$\begin{cases} (k-2)x + 3y = 6 \\ (k-1)x + 4y = 8 \end{cases} .$$

22.39 (*). Risolvi graficamente i sistemi, in base al disegno verifica se le rette sono incidenti, parallele o coincidenti e quindi se il sistema è determinato, impossibile o indeterminato.

a) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} y = x - 1 \\ 2y = 2x - 2 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2y - x = 2 \end{cases}$.

22.40 (*). Risolvi graficamente i sistemi, in base al disegno verifica se le rette sono incidenti, parallele o coincidenti e quindi se il sistema è determinato, impossibile o indeterminato.

a) $\begin{cases} 3x+y=-3 \\ -2x+3y=-2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 3x+y=-3 \\ -2x+3y=+2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x-3y=2 \\ x-2y=2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x=2-y \\ 2x-y=1 \end{cases}$.

22.41 (*). Risolvi graficamente i sistemi, in base al disegno verifica se le rette sono incidenti, parallele o coincidenti e quindi se il sistema è determinato, impossibile o indeterminato.

a) $\begin{cases} 5x+2y=-1 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x=3-x \\ 2x+y=3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x=2-y \\ 2x-y=1 \end{cases}$.

22.42. Vero o falso?

a) Risolvere graficamente un sistema lineare significa trovare il punto di intersezione di due rette? $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
b) Un sistema lineare, determinato ha una sola coppia soluzione? $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
c) Un sistema lineare è impossibile quando le due rette coincidono? $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

22.43. Completa:

- se $r_1 \cap r_2 = r_1 = r_2$ allora il sistema è . . . . ;
- se $r_1 \cap r_2 = P$ allora il sistema è . . . . ;
- se $r_1 \cap r_2 = \emptyset$ allora il sistema è . . . .

22.3 - Sistemi fratti

22.44 (*). Verifica l'insieme soluzione dei seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} \dfrac{4y+x}{5x}=1 \\ \dfrac{x+y}{2x-y}=2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2+3\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{x} \\ 3\dfrac{x}{y}-1=\dfrac{-2}{y} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} y=\dfrac{4x-9}{12} \\ \dfrac{y+2}{y-1}+\dfrac{1+2x}{1-x}+1=0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} \dfrac{y}{2x-1}=-1 \\ 2\dfrac{x}{y-1}=1 \end{cases}$.

22.45 (*). Verifica l'insieme soluzione dei seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} 3\dfrac{x}{y}-\dfrac{7}{y}=1 \\ 2\dfrac{y}{x}+\dfrac{5}{x}=1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} \dfrac{x}{9y}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3y} \\ 9\dfrac{y}{2x}-1-\dfrac{3}{x}=0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2\dfrac{x}{3y}-\dfrac{1}{3y}=1 \\ \dfrac{3}{y+2x}=-1 \end{cases}$; d) $\begin{cases} \dfrac{x}{2-\frac{y}{2}-2}=1 \\ \dfrac{x-y}{x+\frac{3}{2}y-1}=1 \end{cases}$.

22.46 (*). Verifica l'insieme soluzione dei seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} \dfrac{\frac{x}{2}+\frac{2y}{3}-\frac{1}{6}}{x+y-2}=6 \\ x+y=1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \dfrac{x-2y}{4}=\dfrac{\frac{x-y}{2}+2x}{4} \\ \dfrac{x}{\frac{y}{3}+1}=1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \dfrac{x+3y-1}{x-y}=\dfrac{1}{y-x} \\ x=2y-10 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} \dfrac{2}{x-2}-\dfrac{3}{y+3}=1 \\ \dfrac{5}{y+3}=\dfrac{6}{2-x}-4 \end{cases}$.

22.47 (*). Verifica l'insieme soluzione dei seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} y-\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{4}=0 \\ \dfrac{2x+1}{1-x}+\dfrac{2+y}{y-1}=-1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x+y=2 \\ y\left(\dfrac{x}{y}+3\right)=4 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=0 \\ \dfrac{y(y-x-1)}{y+1}+x-y+1=\dfrac{1}{2} \end{cases}$;

d) $\begin{cases} \dfrac{3x-7y+1}{4x^2-9y^2}=\dfrac{4}{18y^2-8x^2} \\ \dfrac{4(1-3x)^2}{2}-y=\dfrac{(12x-5)(6x-y)}{4}+3xy+2 \end{cases}$.

22.48 (*). Verifica l'insieme soluzione dei seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} \dfrac{2x-3y}{x-2y}-\dfrac{3y-1}{x+5y}=\dfrac{2(x^2+2xy)-(3y-2)^2}{x^2+3xy-10y^2} \\ x+y=-19 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \dfrac{x-3}{x-3y+1}+\dfrac{xy-y}{x-3y-1}=\dfrac{x^2-3xy+x^2y-3xy^2+3y^2}{x^2+9y^2-6xy-1} \\ \dfrac{x-3}{5y-1}-\dfrac{y-3}{1+5y}=\dfrac{x+5y^2-5xy+2}{1-25y^2} \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \dfrac{x-2y}{x^2-xy-2y^2}-\dfrac{1}{y}=2 \\ \dfrac{4}{y}-\dfrac{5}{x+y}=-9 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2x - y - 11 = 0 \\ \dfrac{y+1}{x-1} + \dfrac{3-y}{5x-5} - \dfrac{2}{3} = 0 \end{cases}$.

22.49. Verifica l'insieme soluzione dei seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{x} = \dfrac{y+2}{y-2} \\ \dfrac{3x-1}{3x-2} = \dfrac{1+y}{y-2} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \dfrac{2}{5x-y} = \dfrac{-3}{5y-x} \\ \dfrac{1}{4x-3y} = \dfrac{2x+y-1}{3y-4x} \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{x-\sqrt{2}} + \dfrac{2\sqrt{2}}{y-\sqrt{3}} = 0 \\ \dfrac{1}{x-\sqrt{3}} - \dfrac{\sqrt{6}}{2\left(y+2\sqrt{2}\right)} = 0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} \dfrac{x-y+1}{x+y-1} = 2 \\ \dfrac{x+y+1}{x-y-1} = -2 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} \dfrac{2}{x-2} = \dfrac{3}{y-3} \\ \dfrac{1}{y+3} = \dfrac{-1}{2-x} \end{cases}$.

22.4 - Sistemi letterali

22.50 (*). Risolvere e discutere il seguente sistema. Per quali valori di a la coppia soluzione è formata da numeri reali positivi?

$$\begin{cases} x + ay = 2a \\ \dfrac{x}{2a} + y = \dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

22.51. Perché se il seguente sistema è determinato la coppia soluzione è accettabile?

$$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ \dfrac{2x-y}{x+1} = \dfrac{1}{a} \end{cases}.$$

22.52. Nel seguente sistema è vero che la coppia soluzione è formata da numeri reali positivi se $a > 2$?

$$\begin{cases} \dfrac{a-x}{a^2} + a + \dfrac{y-2a}{a+1} = -1 \\ 2y = x \end{cases}.$$

22.53. Spiegate perché non esiste alcun valore di a per cui la coppia $(0;2)$ appartenga a I. S. del sistema:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ \dfrac{2x-y}{x+1} = \dfrac{1}{a} \end{cases}.$$

22.54 (*). Nel seguente sistema determinate i valori da attribuire al parametro a affinché la coppia soluzione accettabile sia formata da numeri reali positivi.

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} - \dfrac{y-a}{3} = \dfrac{1-y}{3} \\ a(x+2)+y=1 \end{cases}.$$

22.55 (*). Risolvere i seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} x+ay=2a \\ \dfrac{x}{2a}+y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2}=x^2-3x+y-2 \\ \dfrac{x^2-4xy+3y^2}{3y-x}=k \end{cases}$;

c) $\begin{cases} kx-y=2 \\ x+6ky=0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} kx-8y=4 \\ 2x-4ky=3 \end{cases}$.

22.56 (*). Risolvere i seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} 4x-k^2y=k \\ kx-4ky=-3k \end{cases}$;

b) $\begin{cases} kx-4ky=-6 \\ kx-k^2y=0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} (k-1)x+(1-k)y=0 \\ (2-2k)x+y=-1 \end{cases}$.

22.5 - Sistemi lineari di tre equazioni in tre incognite

22.57 (*). Determinare la terna di soluzione dei seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} x-2y+z=1 \\ x-y=2 \\ x+3y-2z=0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x+y+z=4 \\ x-3y+6z=1 \\ x-y-z=2 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x+2y-3z=6-3y \\ 2x-y+4z=x \\ 3x-z=y+2 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ x-2y+z=5 \\ x+2z=3 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ y-4z=0 \\ x-2y+z=2 \end{cases}$;

f) $\begin{cases} x-3y+6z=1 \\ x+y+z=5 \\ x+2z=3 \end{cases}$;

22.58 (*). Determinare la terna di soluzione dei seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} x-4y+6z=2 \\ x+4y-z=2 \\ x+3y-2z=2 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 4x-y-2z=1 \\ 3x+2y-z=4 \\ x+y+2z=4 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x-3y=3 \\ x+y+z=-1 \\ 2x-z=0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ x-6y+8z=2 \\ 3x-4y+8z=2 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} 4x-6y-7z=-1 \\ x+y-z=1 \\ 3x+2y+6z=1 \end{cases}$;

f) $\begin{cases} 4x-3y+z=4 \\ x+4y-3z=2 \\ y-7z=0 \end{cases}$.

22.59 (*). Determinare la terna di soluzione dei seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} 3x-6y+2z=1 \\ x-4y+6z=5 \\ x-y+4z=10 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x+y-5z=2 \\ x+y-7z=-2 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$; e) $\begin{cases} x-4y+2z=7 \\ -3x-2y+3z=0 \\ x-2y+z=1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 4x-y-7z=-12 \\ x+3y+z=-4 \\ 2x-y+6z=5 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 3x-y+z=-1 \\ x-y-z=3 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$; f) $\begin{cases} -2x-2y+3z=4 \\ 2x-y+3z=0 \\ 2x+y=1 \end{cases}$.

22.60. Quale condizione deve soddisfare il parametro a affinché il sistema seguente non sia privo di significato? Determina la terna soluzione assegnando ad a il valore 2.

$$\begin{cases} x+y+z=\frac{a^2+1}{a} \\ ay-z=a^2 \\ y+ax=a+1+a^2z \end{cases}.$$

22.61. Determina il dominio del sistema e stabilisci se la terna soluzione è accettabile:

$$\begin{cases} \frac{5}{1-x}+\frac{3}{y+2}=\frac{2x}{xy-2+2x-y} \\ \frac{x+1-3(y-1)}{xyz}=\frac{1}{xy}-\frac{2}{yz}-\frac{3}{xz} \\ x+2y+z=0 \end{cases}.$$

22.62. Verifica se il sistema è indeterminato:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ y-z=5 \\ x+z+2=0 \end{cases}.$$

22.63. Determina il volume del parallelepipedo retto avente per base un rettangolo, sapendo che le dimensioni della base e l'altezza hanno come misura (rispetto al cm) i valori di x, y, z ottenuti risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 3x+1=2y+3z \\ 6x+y+2z=7 \\ 9(x-1)+3y+4z=0 \end{cases}.$$

22.6 - Sistemi da risolvere con sostituzioni delle variabili

22.64 (*). Risolvi i seguenti sistemi per mezzo di opportune sostituzioni delle variabili.

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{y}=-4 \\ \dfrac{2}{3x}+\dfrac{2}{y}=1 \end{cases}$; sostituire $u=\frac{1}{x}; v=\frac{1}{y}$.

b) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x^2-y^2=5 \end{cases}$; sostituire $u=x^2; v=y^2$

c) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{2}{x-y}=1 \\ \dfrac{3}{x+y}-\dfrac{5}{x-y}=2 \end{cases}$; sostituire $u=\frac{1}{x+y}; v=\dots$.

22.65 (*). Risolvi i seguenti sistemi per mezzo di opportune sostituzioni delle variabili.

a) $\begin{cases} \dfrac{5}{2x}-\dfrac{2}{y}=2 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=3 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}=4 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{y}=-3 \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}=4 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{y-1}=2 \\ \dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{y-1}=3 \end{cases}$.

22.66 (*). Risolvi i seguenti sistemi per mezzo di opportune sostituzioni delle variabili.

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{y}+\dfrac{2}{z}=3 \\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}+\dfrac{2}{z}=4 \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{y}-\dfrac{1}{z}=-3 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x^3+y^3=9 \\ 2x^3-y^3=-6 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x^2+y^2=-1 \\ x^2-3y^2=12 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} \dfrac{4}{x^2}-\dfrac{2}{y^2}-\dfrac{2}{z^2}=0 \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{z^2}=2 \\ \dfrac{2}{y^2}-\dfrac{2}{z^2}=0 \end{cases}$.

22.7.2 Esercizi riepilogativi

Gli esercizi indicati con (†) sono tratti da *Matematica* 2, Dipartimento di Matematica, ITIS V. Volterra, San Donà di Piave, Versione [11-12] [S-A11], pg. 53; licenza CC, BY-NC-BD, per gentile concessione dei professori che hanno reddatto il libro. Il libro è scaricabile da http://www.istitutovolterra.it/dipartimenti/matematica/dipmath/docs/M2_1112.pdf

22.67 (*). Risolvi i seguenti sistemi con più metodi ed eventualmente controlla la soluzione graficamente.

a) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x=1+3y \\ -y-2x=3 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} -x+2y=1 \\ 3x-y=3 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} 5x-y=2 \\ 2x+3y=-1 \end{cases}$.

22.68 (*). Risolvi i seguenti sistemi con più metodi ed eventualmente controlla la soluzione graficamente.

a) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x-y=2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 5x+3y=2 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+2y=2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 7x-2y=4 \\ 8x-6y=9 \end{cases}$.

22.69 (*). Risolvi i seguenti sistemi con più metodi ed eventualmente controlla la soluzione graficamente.

a) $\begin{cases} 3x-2y=4 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 3x-2y=2 \\ 2y-2x=-\frac{4}{3} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 3x-y=7 \\ x-2y=5 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 5x-2x=7 \\ -x-2y=-\frac{1}{2} \end{cases}$.

22.70 (*). Risolvi i seguenti sistemi con più metodi ed eventualmente controlla la soluzione graficamente.

a) $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x-2y=-\dfrac{1}{6} \\ -y-\dfrac{2}{3}y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$; c) $\begin{cases} -\dfrac{1}{3}x+\dfrac{3}{2}y-1=0 \\ 3x-\dfrac{1}{5}y+\dfrac{3}{2}=0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{3}x-\dfrac{3}{2}y+1=0 \\ 9y-2x-6=0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} -\dfrac{2}{3}y+3x=y \\ x-\dfrac{1}{2}y+3=0 \end{cases}$.

22.71 (*). Risolvi i seguenti sistemi con più metodi ed eventualmente controlla la soluzione graficamente.

a) $\begin{cases} 5y+\dfrac{3}{2}x=-2 \\ 3x+10y-3=0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x-3y=\dfrac{1}{2} \\ 3(y-2)+x=0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x+y=0 \\ x-2y=-5 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=5 \end{cases}$.

22.72 (*). Risolvi i seguenti sistemi con più metodi ed eventualmente controlla la soluzione graficamente.

a) $\begin{cases} 2x+2y=6 \\ x-2y=-3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x-2y=0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{3}x+3y+2=0 \\ 2x+\dfrac{1}{2}y=\dfrac{11}{2} \end{cases}$; d) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}y=1 \\ \dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}y=1 \end{cases}$.

22.73 (*). Risolvi i seguenti sistemi con più metodi ed eventualmente controlla la soluzione graficamente.

a) $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 4x + \frac{1}{2}y = \frac{5}{2} \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ 4x + 2y + 6 = 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x + \frac{1}{2}y = -\frac{3}{10} \\ -25x + 5y = 6 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

22.74 (*). Risolvi i seguenti sistemi con più metodi ed eventualmente controlla la soluzione graficamente.

a) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 1 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} \frac{1}{2}(x-3) - y = \frac{3}{2}(y-1) \\ \frac{3}{2}(y-2) + x = 6\left(x + \frac{1}{3}\right) \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 10x - 5y = 26 \\ x + 5y = -\frac{42}{5} \end{cases}$; d) $\begin{cases} \frac{x+4y}{6} - 3 = 0 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 0 \end{cases}$.

22.75 (*). Risolvi i seguenti sistemi con più metodi ed eventualmente controlla la soluzione graficamente.

a) $\begin{cases} 3(x-4) = -\frac{4y}{5} \\ 7(x+y) + 8\left(x - \frac{3y}{8} - 2\right) = 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \frac{2}{5}(y - x - 1) = \frac{y-x}{3} - \frac{2}{5} \\ (x-y)^2 - x(x-2y) = x + y(y-1) \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2x - 3(x-y) = -1 + 3y \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = -\frac{1}{6} \end{cases}$;

d) $\begin{cases} (y+2)(y-3) - (y-2)^2 + (x+1)^2 = (x+3)(x-3) - \frac{1}{2} \\ \left(y - \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{4}\right) - (y-1)^2 + 2x + 3 = \frac{3}{4} \end{cases}$.

22.76 (*). Risolvi i seguenti sistemi con più metodi ed eventualmente controlla la soluzione graficamente.

a) $\begin{cases} \dfrac{\frac{x}{2}-y+5}{\frac{4}{3}-\frac{5}{6}} = x - \dfrac{\frac{x}{2}-\frac{y}{3}}{2} \\ -x - \dfrac{\frac{y}{3}-x}{2} = 1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \dfrac{\frac{x+1}{2}-y}{2} = y - 20x \\ x - \dfrac{y}{4} = \dfrac{x-y}{6} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x^2 + \dfrac{y}{4} - 3x = \dfrac{(2x+1)^2}{4} - \dfrac{y}{2} \\ (y-1)^2 = -8x + y^2 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} \dfrac{4y - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}}{\frac{5}{6}} = x - 2y \\ x = 3y \end{cases}$.

22.77. Determina due numeri sapendo che la loro somma è 37, la loro differenza è 5.

22.78 (*). Il doppio della somma di due numeri è uguale al secondo numero aumentato del triplo del primo, inoltre aumentando il primo numero di 12 si ottiene il doppio del secondo diminuito di 6.

22.79 (*). Determina tre numeri la cui somma è 81. Il secondo supera il primo di 3. Il terzo numero è dato dalla somma dei primi due.

22.80 (*). Determina due numeri sapendo che la loro somma è pari al doppio del minore aumentato di 1/4 del maggiore, mentre la loro differenza è uguale a 9.

22.81 (*). Determina due numeri la cui somma è 57 e di cui si sa che il doppio del più grande diminuito della metà del più grande è 49.

22.82 (*). Determina tre lati sapendo che il triplo del primo lato è uguale al doppio del secondo aumentato di 10 m; la differenza tra il doppio del terzo lato e il doppio del secondo lato è uguale al primo lato aumentato di 12; la somma dei primi due lati è uguale al terzo lato.

22.83 (*). Determina un numero di due cifre sapendo che la cifra delle diecine è il doppio di quella delle unità e scambiando le due cifre si ottiene un numero più piccolo di 27 del precedente.

22.84 (*). Determina il numero intero di due cifre di cui la cifra delle decine supera di 2 la cifra delle unità e la somma delle cifre è 12.

22.85 (†). Determina due numeri naturali il cui quoziente è 5 e la cui differenza è 12.

22.86 (*, †). Determinare un numero naturale di due cifre sapendo che la loro somma è 12 e che, invertendole, si ottiene un numero che supera di 6 la metà di quello iniziale.

22.87 (†). Determinare la frazione che diventa uguale a 5/6 aumentando i suoi termini di 2 e diventa 1/2 se i suoi termini diminuiscono di 2.

22.88 (*, †). La somma delle età di due coniugi è 65 anni; un settimo dell'età del marito è uguale ad un sesto dell'età della moglie. Determinare le età dei coniugi.

22.89 (*, †). Un numero naturale diviso per 3 dà un certo quoziente e resto 1. Un altro numero naturale, diviso per 5, dà lo stesso quoziente e resto 3. Sapendo che i due numeri hanno per somma 188, determinali e calcola il quoziente.

22.90 (*). Giulio e Giulia hanno svuotato i loro salvadanai per comparsi una bici. Nel negozio c'è una bella bici che piace a entrambi, costa€ 180 e nessuno dei due ha i soldi sufficienti per comprarla. Giulio dice: «Se mi dai la metà dei tuoi soldi compro io la bici».

Giulia ribatte: «se mi dai la terza parte dei tuoi soldi la bici la compro io». Quanti soldi hanno rispettivamente Giulio e Giulia?

22.91. A una recita scolastica per beneficienza vengono incassati € 216 per un totale di 102 biglietti venduti. I ragazzi della scuola pagano € 1, i ragazzi che non sono di quella scuola pagano € 1,5, gli adulti pagano € 3. Quanti sono i ragazzi della scuola che hanno assisitto alla recita?

22.92. Da un cartone quadrato di lato 12 cm, si taglia prima una scriscia parallela a un lato e di spessore non noto, poi si taglia dal lato adiacente una striscia parallela al lato spessa 2 cm in più rispetto alla striscia precedente. Sapendo che il perimetro del rettangolo rimasto è $33,6$ cm, calcola l'area del rettangolo rimasto.

22.93 (*). Al bar per pagare 4 caffè e 2 cornetti si spendono € $4,60$, per pagare 6 caffé e 3 cornetti si spendono € $6,90$. È possibile determinare il prezzo del caffé e quello del cornetto?

22.94 (*). Al bar Mario offre la colazione agli amici perché è il suo compleano: per 4 caffé e 2 cornetti paga €4,60. Subito dopo arrivano tre altri amici che prendono un caffè e un cornetto ciascuno, questa volta paga €4,80. Quanto costa un caffé e quanto un cornetto?

22.95 (*). Un cicloturista percorre 218 km in tre giorni. Il secondo giorno percorre il 20% in più del primo giorno. Il terzo giorno percorre 14 km in più del secondo giorno. Qual è stata la lunghezza delle tre tappe?

22.96 (*). In un parcheggio ci sono moto e auto. In tutto si contano 43 mezzi e 140 ruote. Quante sono le auto e quante le moto?

22.97. Luisa e Marisa sono due sorella. Marisa, la più grande è nata 3 anni prima della sorella; la somma dele loro età è 59. Qual è l'età delle due sorelle?

22.98. Mario e Lucia hanno messo da parte del denaro. Lucia ha € 5 in più di Mario. Complessivamente potrebbero comprare 45 euro di schede prepagate per i cellulari. Quanto possiede Mario e quanto possiede Lucia?

22.99. Una macchina per giaccio produce 10 cubetti di giaccio al minuto, mentre una seconda macchina per giacchio produce 7 cubetti al minuto. Sapendo che in tutto sono stati prodotti 304 cubetti e che complessivamente le macchine hanno lavorato per 22 minuti, quanti cubetti ha prodotto la prima macchina e quindi ne ha prodotti la seconda.

22.100 (*). In un parcheggio ci sono automobili, camion e moto, in tutto 62 mezzi. Le auto hanno 4 ruote, i camion ne hanno 6 e le moto ne hanno 2. In totale le ruote sono 264. Il numero delle ruote delle auto è uguale al numero delle ruote dei camion. Determina quante auto, quanti camion e quante moto ci sono nel parcheggio.

22.101. Un vasetto di marmellata pesa 780 g. Quando nel vasetto rimane metà marmellata, il vasetto pesa 420 g. Quanto pesa il vasetto vuoto?

22.102 (*). Una gelateria prepara per la giornata di Ferragosto 30 kg di gelato. Vende i coni da due palline a € 1,50 e i coni da tre palline a € 2,00. Si sa che da 2 kg di gelato si fanno 25 palline di gelato. A fine giornata ha venduto tutto il gelato e ha incassato € 272,50. Quanti coni da due palline ha venduto?

22.103 (Prove Invalsi 2004-2005). Marco e Luca sono fratelli. La somma delle loro età è 23 anni. Il doppio dell'età di Luca è uguale alla differenza tra l'età del loro padre e il triplo dell'età di Marco. Quando Luca è nato, il padre aveva 43 anni. Determina l'età di Marco e di Luca.

22.104 (Giochi d'autunno 2010, Centro Pristem). Oggi Angelo ha un quarto dell'età di sua madre. Quando avrà 18 anni, sua madre avrà il triplo della sua età. Quanti anni hanno attualmente i due?

22.105 (Giochi di Archimede, 2008)**.** Pietro e Paolo festeggiano il loro onomastico in pizzeria con i loro amici. Alla fine della cena il conto viene diviso in parti uguali tra tutti i presenti e ciascuno dovrebbe pagare 12 euro. Con grande generosità però gli amici decidono di offrire la cena a Pietro e Paolo; il conto viene nuovamente diviso in parti uguali tra gli amici di Pietro e Paolo (cioè tutti i presenti esclusi Pietro e Paolo), e ciascuno di loro paga 16 euro. Quanti sono gli amici di Pietro e Paolo?

22.106 (*)**.** Al bar degli studenti, caffè e cornetto costano € 1,50; cornetto e succo di frutta costano € 1,80, caffè e succo di frutta costano € 1,70. Quanto costano in tutto 7 caffè, 5 cornetti e 3 succhi di frutta?

22.107 (†)**.** Un negozio ha venduto scatole contenenti 6 fazzoletti ciascuna ed altre contenenti 12 fazzoletti ciascuna, per un totale di 156 fazzoletti. Il numero delle confezioni da 12 ha superato di 1 la metà di quello delle confezioni da 6. Quante confezioni di ogni tipo si sono vendute?

22.108 (*, †)**.** Nella città di Nonfumo gli unici negozi sono tabaccherie e latterie. L'anno scorso le tabaccherie erano i $2/3$ delle latterie; quest'anno due tabaccherie sono diventate latterie cosicché ora le tabaccherie sono i $9/16$ delle latterie. Dall'anno scorso a quest'anno il numero cimplessivo dei negozi di Non fumo è rimasto lo stesso. Quante latterie c'erano l'anno scorso a Nonfumo?

22.109. Un rettangolo di perimetro 80 cm ha la base che è i $2/3$ dell'altezza. Calcolare l'area del rettangolo.

22.110 (*)**.** Un trapezio isoscele ha il perimetro di 72 cm. La base minore è i $3/4$ della base maggiore; il lato obliquo è pari alla somma dei $2/3$ della base minore con i $3/2$ della base maggiore. Determina le misure delle basi del trapezio.

22.111 (*)**.** Calcola l'area di un rombo le cui diagonali sono nel rapporto $3/2$. Si sa che la differenza tra le due diagonali è 16 cm.

22.112. In un triangolo rettangolo i $3/4$ dell'angolo acuto maggiore sono pari ai $24/13$ dell'angolo acuto minore. Determinare l'ampiezza degli angoli.

22.113 (*)**.** In un triangolo, un angolo supera di 16° un secondo angolo; il terzo angolo è pari ai $29/16$ della somma dei primi due. Determina le misure degli angoli del triangolo.

22.114. In un rettangolo di perimetro 120 cm, la base è $2/3$ dell'altezza. Calcola l'area del rettangolo.

22.115. Determina le misure dei tre lati x, y, z di un triangolo sapendo che il perimetro è 53 cm. Inoltre la misura z differisce di 19 cm dalla somma delle altre due misure e che la misura x differisce di 11 cm dalla differenza tra y e z.

22.116 (*)**.** Aumentando la base di un rettangolo di 5 cm e l'altezza di 12 cm, si ottiene un rettangolo di perimetro 120 cm che è più lungo di 12 cm del perimetro del rettangolo iniziale.

22.117 (*)**.** In un triangolo isoscele di perimetro 64 cm, la differenza tra la base e la metà del lato obliquo è 4 cm. Determina la misura della base e del lato obliquo del triangolo.

22.118 (*)**.** Un segmento AB di 23 cm viene diviso da un suo punto P in due parti tali che il triplo della loro differenza è uguale al segmento minore aumentato di 20 cm. Determina le misure dei due segmenti in cui resta diviso AB dal punto P.

22.7.3 Risposte

22.8. a) $(1;0)$, b) $(-2;-2)$, c) $(0;1)$, d) $(0;1)$.

22.9. a) $(4;5)$, b) indeterminato, c) $(1;-1)$, d) $(-4;2)$.

22.10. a) indeterminato, b) $(4;5)$, c) impossibile, d) indeterminato.

22.11. a) $(-66;-12)$, b) $(2;3)$, d) $(0;0)$.

22.12. a) $\left(-\frac{9}{8};-\frac{9}{8}\right)$, b) $\left(\frac{28}{17};\frac{6}{17}\right)$, d) $(1;-3)$.

22.13. a) $\left(-4;-\frac{3}{2}\right)$, c) $\left(\frac{1}{6};\frac{35}{24}\right)$.

22.16. a) $(0;0)$, b) $(2;-1)$, c) $(2;1)$, d) $(-1;-3)$.

22.17. a) impossibile, c) impossibile, d) indeterminato.

22.18. a) $\left(\frac{2}{3};0\right)$, b) $\left(-\frac{1}{5};\frac{1}{5}\right)$, c) $(3;4)$, d) $(0;1)$.

22.20. a) $(0;0)$, b) $(0;1)$, c) $\left(\frac{1}{2};0\right)$, d) $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

22.21. a) $(1;1)$, b) $(1;1)$, c) $\left(\frac{35}{12};\frac{19}{12}\right)$, d) $\left(-\frac{12}{11};\frac{7}{11}\right)$.

22.22. a) $(-11;-31)$, b) $(1;1)$, c) $(1;2)$.

22.26. a) $(2;0)$, b) $\left(\frac{13}{12};\frac{5}{12}\right)$, c) $\left(-\frac{12}{11};\frac{7}{11}\right)$, d) $\left(0;-\frac{1}{2}\right)$.

22.27. a) $(21,-12)$, b) $\left(-\frac{240}{19};\frac{350}{19}\right)$, c) $\left(\frac{34}{37};\frac{16}{37}\right)$, d) $\left(1;\frac{7}{3}\right)$.

22.28. a) $(-1;0)$, b) $\left(\frac{1}{2};-1\right)$, c) $\left(\frac{3}{10};\frac{7}{10}\right)$, d) $\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{6}\right)$.

22.29. a) impossibile, b) indeterminato, c) $(a;2a)$, d) $(2k;-k)$.

22.39. a) rette parallele, sistema impossibile, b) $(-3;-8)$, c) rette identiche, indeterminato, d) $(2;2)$.

22.40. a) $(-1;0)$, b) $(2;0)$, c) $(-1;0)$, d) rette parallele, impossibile.

22.41. a) $\left(0;-\frac{1}{2}\right)$, b) $(1;1)$, c) $\left(\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right)$.

22.44. a) indeterminato, b) $(3;3)$, c) $(-\frac{5}{11};\frac{7}{11}$, d) impossibile.

22.45. a) $\left(\frac{9}{5};-\frac{8}{5}\right)$, b) $(-1;-1)$, c) impossibile, d) $\left(-\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)$.

22.46. a) $(39;-38)$, b) $\left(\frac{3}{4};-\frac{3}{4}\right)$, c) $(-6;2)$, d) $(-2;-5)$.

22.47. a) $\left(-\frac{9}{8};-\frac{9}{8}\right)$, b) $(1;1)$, c) impossibile, d) $\left(-\frac{3}{17};\frac{6}{17}\right)$.

22.48 a) $(-18;-1)$, b) $\left(\frac{7}{4};\frac{1}{2}\right)$, c) $(2;-1)$.

22.50. $a > 0$.

22.54. $-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$.

22.55. a) $a \neq 0 \rightarrow (a;1)$, b) determinato per $k \neq 14$, $k \neq \frac{6}{7}$ con soluzioni $\left(\frac{k-6}{4};\frac{5k-6}{4}\right)$; se $k = 14 \vee k = \frac{6}{7}$ impossibile, c) determinato $\forall k$ con soluzioni $\left(\frac{12k}{6k^2+1};\frac{2}{6k^2+1}\right)$, d) determinato per $k \neq -2$, $k \neq 2$ con soluzioni $\left(\frac{4k-6}{k^2-4};\frac{8-3k}{4(k^2-4)}\right)$; se $k = -2 \vee k = 2$ impossibile.

22.56. a) Determinato per $k \neq -4$, $k \neq 4$, $k \neq 0$ con soluzioni $\left(\frac{3k^2+4k}{16-k^2};\frac{k+12}{16-k^2}\right)$; se $k = -4 \vee k = 4$ impossibile; se $k = 0$ indeterminato con soluzioni tipo $(0;t)$ con $t \in \mathbb{R}$,

b) determinato per $k \neq 0, k \neq 4$con soluzioni $\left(\frac{6}{4-k}; \frac{6}{k(4-k)}\right)$; se $k = 0 \vee k = 4$ impossibile, c) determinato per $k \neq 1, k \neq \frac{3}{2}$ con soluzioni $\left(\frac{1}{2k-3}; \frac{1}{2k-3}\right)$; se $k = \frac{3}{2}$ impossibile; se $k = 1$ indeterminato con soluzioni del tipo $(t; -1)$.

22.57. a) $(0; -2; 3)$, b) $\left(3; \frac{8}{9}; \frac{1}{9}\right)$, c) $(1; 1; 0)$, d) $(-21, -7, 12)$, e) $\left(\frac{3}{2}; -\frac{2}{7}; -\frac{1}{14}\right)$, f) $(-5; 6; 4)$.

22.58. a) $(2; 0; 0)$, b) $(1; 1; 1)$, c) $(0; -1; 0)$, d) $\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$, e) $\left(\frac{9}{31}; \frac{17}{31}; -\frac{5}{31}\right)$, f) $\left(\frac{7}{6}; \frac{7}{30}; \frac{1}{30}\right)$.

22.59. a) $(5; 3; 2)$, b) $\left(-\frac{60}{43}; -\frac{53}{43}; \frac{47}{43}\right)$, c) $\left(\frac{10}{3}; -3; \frac{1}{3}\right)$, d) $(6; 11; -8)$, e) $\left(-5; -\frac{33}{4}; -\frac{21}{2}\right)$, f) $\left(-\frac{5}{2}; 6; \frac{11}{3}\right)$.

22.64. a) $\left(-\frac{1}{27}; \frac{2}{19}\right)$, b) $(3; 2)$, $(-3; 2)$, $(3; -2)$, $(-3; -2)$, c) $\left(\frac{55}{9}; -\frac{44}{9}\right)$.

22.65. a) $\left(\frac{7}{6}; 14\right)$, b) $(1; 1)$, c) $(2; -1)$, d) $\left(-\frac{1}{4}; -2\right)$.

22.66. a) $\left(1; -\frac{5}{8}; -\frac{5}{7}\right)$, b) $(1; 2)$, c) $\emptyset$, d) $(1; 1; 1)$, $(-1; 1; 1)$, $(1; -1; 1)$, $(1; 1; -1)$, $(-1; -1; 1)$; $(-1; 1; -1)$, $(1; -1; -1)$, $(-1; -1; -1)$.

22.67. a) $(0; 1)$, b) $(-1; -1)$, c) $\left(\frac{7}{5}; \frac{6}{5}\right)$, d) $\left(\frac{5}{17}; -\frac{9}{17}\right)$.

22.68. a) $(1; 1)$, b) $\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$, c) $\left(\frac{7}{19}; \frac{1}{19}\right)$, d) $\left(\frac{3}{13}; -\frac{31}{26}\right)$.

22.69. a) $\left(\frac{22}{13}; \frac{7}{13}\right)$, b) $\left(\frac{9}{5}; -\frac{8}{5}\right)$, c) $\left(\frac{2}{3}; 0\right)$, d) $\left(\frac{7}{3}; -\frac{11}{12}\right)$.

22.70. a) $\left(-\frac{59}{20}; -\frac{9}{10}\right)$, b) indeterminato, c) $\left(-\frac{123}{266}; \frac{75}{133}\right)$, d) $(-30; -54)$.

22.71. a) Impossibile, b) $(-1; 2)$, c) $\left(\frac{13}{3}; \frac{5}{9}\right)$, d) $(2; -3)$.

22.72. a) $(1; 2)$, b) $(3; -1)$, c) $(2; 1)$, d) $(1; 1)$.

22.73. a) $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$, b) $\left(-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right)$, c) impossibile, d) $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

22.74. a) $\emptyset$, b) $\left(\frac{8}{5}; -2\right)$, c) $\left(-\frac{50}{47}; -\frac{10}{47}\right)$, d) $(2; 4)$.

22.75. a) impossibile, c) $(1; -2)$, d) $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

22.76. a) $\left(-\frac{92}{27}; \frac{38}{9}\right)$, b) $\left(\frac{1}{8}; 1\right)$, c) $\left(-\frac{1}{21}; -\frac{10}{21}\right)$, d) $\left(\frac{27}{26}; \frac{9}{26}\right.$.

22.78. $(18; 18)$.

22.79. $18,75; 21,75; 40,5$.

22.80. $(27; 36)$.

22.81. $(26; 31)$.

22.82. $(12\,\text{m}, 13\,\text{m}, 25\,\text{m})$.

22.83. 63.

22.84. 75.

22.86. 84.

22.88. $(35; 30)$.

22.89. $(70; 118; 23)$.

22.90. $(108; 144)$.

22.93. Indeterminato.

22.94. €0,7 e €0,9.

22.95. 60 km; 72 km; 86 km.

22.96. 27; 16.

22.100. 30 auto; 20 camion; 12 moto.

22.102. 135.

22.106. € 11,90.

22.108. 30.

22.110. $\frac{288}{23}$ cm; $\frac{216}{23}$ cm.

22.111. 1536 cm^2.

22.113. 24°; 40°; 116°.

22.116. Impossibile.

22.117. 16 cm; 24 cm.

22.118. 7 cm; 16 cm.