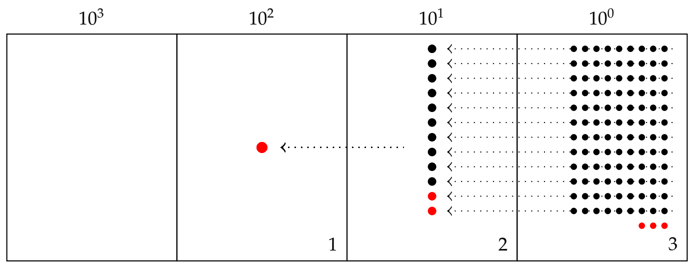
4 I sistemi di numerazione

4.1 La scrittura in base 10

Il nostro sistema di numerazione è il sistema decimale. Ciò ha probabilmente origine dal fatto che abbiamo 10 dita. Forse se fossimo nati ragni avremmo contato fino ad otto ed useremo un sistema di numerazione ottale, se fossimo nati gatti avremmo contato fino a 4 e useremo un sistema quattrale, millepiedi fino a mille. Come conta un computer? Un computer capisce solo due stati: passa corrente o non passa corrente: è come se avesse due dita. Tutti i sistemi che oggi usiamo nell'informatica sono a due stati, si dicono *bistabili*: i circuiti elettrici possono trovarli nello stato di acceso o di spento, i dischi magnetici dell'hard disk sono fatti di microscopici magneti che possono essere magnetizzati in un verso o nel verso opposto, i dischi ottici come i CD-ROM e i DVD si comportano come microscopici specchi che riflettono la luce oppure non la riflettono.

Nell'antichità si usava uno strumento chiamato abaco. Gli abachi erano tavolette suddivise in colonne su cui si spalmavano cera o sabbia e si incidevano segni o si mettevano sassolini.

Per contare un certo numero di oggetti e ricordarci quanti sono, utilizziamo un abaco:



Cominciamo a contare con le mani: per ogni raggruppamento di 10 segniamo un'unità di ordine superiore, fino a contare tutti gli elementi del nostro insieme. Le unità che rimangono, perché non riescono a formare un raggruppamento di 10, vengono segnate con la cifra che le rappresenta: nel nostro caso 3.

Passiamo all'unità di ordine superiore: le decine. Anche con queste formiamo raggruppamenti di 10, se ci riusciamo. Ogni raggruppamento forma un'unità di ordine superiore. Se rimangono unità di questo ordine esse rappresentano decine. Se non rimane alcuna unità scriviamo 0. Nel nostro caso ne rimangono 2.

Il procedimento continua finché non abbiamo finito di contare tutti gli elementi. Nel nostro esempio finiamo dopo aver formato un'unità di ordine superiore. Il nostro numero è 123.

Naturalmente i due numeri 123 e 312 sono due numeri diversi anche se sono formati dalle stesse cifre: sono diversi perché la posizione delle cifre è diversa.

In generale, il valore dei numeri è diverso a seconda della posizione delle sue cifre. Il sistema di numerazione che solitamente usiamo è dunque un *sistema posizionale*: è chiamato decimale o a base dieci perché dieci unità di un determinato ordine formano un'unità di ordine superiore.

Riassumendo, abbiamo una serie di dieci simboli: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Il significato dei simboli dipende dalla posizione che assumono nella "parola" che rappresenta un numero.

Ad esempio: $1846 = 1 \cdot (1000) + 8 \cdot (100) + 4 \cdot (10) + 6 \cdot (1)$.

In particolare, scritto con le potenze del 10: $1846 = 1 \cdot (10)^3 + 8 \cdot (10)^2 + 4 \cdot (10)^1 + 6 \cdot (10)^0$.

Se il numero è indicato come somma delle cifre per le potenze della base la scrittura si chiama *notazione polinomiale*.

Dieci è la *base* della rappresentazione, ovvero il numero di simboli usati, la potenza del 10 indica il *peso* (la posizione) che i simboli hanno nel numero.

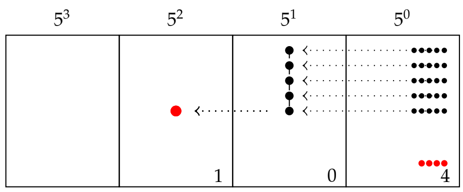
Una volta compreso il meccanismo fondamentale su cui si basa il sistema di numerazione decimale, il procedimento si può estendere ad una base qualunque.

Se B è la base di un sistema, quando si formano B unità di un certo ordine, queste formano un'unità di ordine superiore. In questo modo si può costruire un sistema di numerazione con qualsiasi base maggiore di 1.

4.2 Scrittura di un numero in una base qualsiasi

Il procedimento usato per scrivere un numero in base 10 può essere usato per scrivere un numero in una base qualsiasi.

Esempio 4.1. Contare 29 oggetti in base 5.



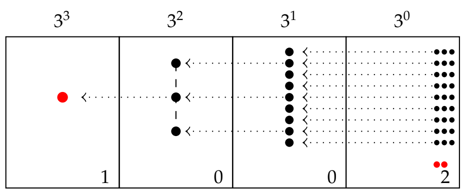
Come nel caso della numerazione in base 10, utilizziamo un abaco.

Invece di contare per dieci proviamo a contare per cinque. Invece di raggruppare per unità, decine, decine di decine e così via, conteremo raggruppando per unità, per cinquine, per cinquine di cinquine e così via.

Il numero rappresentato nell'abaco si scrive $(104)_5$ e si legge *uno-zero-quattro in base cinque* per distinguerlo da centoquattro scritto in base 10.

Per ottenere il numero decimale che corrisponde al numero scritto in base 5 occorre sviluppare il numero in base 5 nella sua scrittura polinomiale: $(104)_5 = 1 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 = 25 + 0 + 4 = (29)_{10}$.

Esempio 4.2. Contare 29 oggetti in base 3.



Questa volta dobbiamo contare per tre.

Il numero che otteniamo si scrive $(1002)_3$ e si legge *uno-zero-zero-due in base tre* per distinguerlo da milledue scritto in base 10.

Per ottenere il numero decimale che corrisponde al numero scritto in base 3 occorre sviluppare il numero in base 3 nella sua scrittura polinomiale.

$$(1002)_3 = 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 5^0 = 27 + 0 + 0 + 2 = (29)_{10}.$$

Riflettiamo su quanto abbiamo fatto negli esempi precedenti: i simboli che occorrono per scrivere un numero in base 10 sono dieci: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; i simboli necessari per scrivere un numero in base 5 sono cinque: $\{0, 1, 2, 3, 4\}$; i simboli necessari per scrivere un numero in base 3 sono tre: $\{0, 1, 2\}$. Analogamente i simboli che serviranno per scrivere un numero in base 2 sono due $\{0, 1\}$. Possiamo generalizzare e dire che i simboli necessari per scrivere un numero in una base B qualsiasi sono B e precisamente $\{0, 1, \ldots, B-1\}$

Possiamo scrivere i numeri anche in una base superiore a 10. Una base molto usata nell'informatica, insieme alla base 2, è la base esadecimale: cioè la base 16.

In questo caso, per contare devo fare raggruppamenti di 16. Sono necessari perciò 16 simboli per indicare questi raggruppamenti, pertanto occorrono simboli anche per i numeri 10, 11, 12, 13, 14, 15...

I simboli convenzionalmente usati sono i seguenti:

$$(A)_{16} = (10)_{10}; (B)_{16} = (11)_{10}; (C)_{16} = (12)_{10}; (D)_{16} = (13)_{10}; (E)_{16} = (14)_{10}; (F)_{16} = (15)_{10}.$$

I numeri seguenti sono

$$(10)_{16} = (16)_{10}; (11)_{16} = (17)_{10}; (12)_{16} = (18)_{10};$$
$$(13)_{16} = (19)_{10}; (14)_{16} = (20)_{10}; (15)_{16} = (21)_{10}.$$

4.2.1 Convertire un numero da una base diversa da 10 a base 10

Per scrivere un numero da una base diversa da 10 a base 10 bisogna sviluppare il numero nella sua forma polinomiale.

Se $(x)_B$ è un numero qualsiasi scritto nella base B e se $a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$ sono le cifre del numero da 0 a $B-1$ avremo:

$$(x)_{10} = a_n \cdot B^n + a_{n-1} \cdot B^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot B^2 + a_1 \cdot B^1 + a_0 \cdot B^0.$$

✍ *Esercizi proposti:* 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5

4.2.2 Convertire un numero da base 10 a una base diversa da 10

Successive divisioni per 3 di 29	*Quozienti* delle succesive divisioni per 3	*Resti* delle successive divisioni per 3
29 : 3	9	2
9 : 3	3	0
3 : 3	1	0
1 : 3	0	1

Abbiamo visto che per contare e scrivere un numero in una base diversa da dieci, per esempio 29 in base 3, dobbiamo raggruppare per 3. Raggruppare per 3 ha lo stesso significato che dividere per 3. Nella prima divisione per tre dei 29 oggetti il quoziente indica quante terzine otteniamo, mentre il resto indica quante unità di ordine 0 verranno considerate.

Nel nostro esempio si ottengono nove terzine, mentre rimangono 2 unità di ordine 0. Il 2 sarà il primo numero a destra che verrà considerato. Con nove terzine si ottengono tre terzine di terzine con resto 0. Questo 0 diventa la cifra che scriviamo a sinistra del 2. Con tre terzine di terzine otteniamo una terzina di terzina di terzina, mentre rimangono 0 terzine di terzine. Questo 0 diventa il numero che scriviamo a sinistra dello zero precedente. Ora il quoziente di 1 diviso 3 dà come quoziente 0 con resto 1. Qui ci fermiamo e scriviamo 1 a sinistra dello 0 trovato precedentemente.

Il numero si scrive da destra verso sinistra prendendo i resti dal basso verso l'alto, si ha $(29)_{10} = (1002)_3$.

Controlliamo con la notazione polinomiale: $1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 27 + 2 = 29$.

Esempio 4.3. Convertire nel sistema binario (in base 2) il numero 59.

Successive divisioni per 3 di 59	*Quozienti* delle succesive divisioni per 2	*Resti* delle succesive divisioni per 2
59 : 2	29	1
29 : 2	14	1
14 : 2	7	0
7 : 2	3	1
3 : 2	1	1
1 : 2	0	1

Dividiamo successivamente 59 per 2 fino a che non otteniamo zero come quoziente e prendiamo come risultato della conversione la successione dei resti partendo dall'ultimo. Il numero 59 scritto in base 2 sarà $(111011)_2$.

Verifichiamo con la scrittura polinomiale $1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 32 + 16 + 8 + 2 + 1 = 59$.

Esempio 4.4. Trasforma da base 10 a base diversa di 10.

`base 3`

$315_{10} = 102200_3$

```
3 1 5 | 3
3 1 5   1 0 5 | 3
      0   1 0 5   3 5 | 3
              0   3 3   1 1 | 3
                    2     9   3 | 3
                          2   3   1
                              0
```

`base 4`

$315_{10} = 10323_4$

```
3 1 5 | 4
3 1 2   7 8 | 4
    3   7 6   1 9 | 4
          2   1 6   4 | 4
                3   4   1
                    0
```

`base 5`

$315_{10} = 2230_5$

```
3 1 5 | 5
3 1 5   6 3 | 5
    0   6 0   1 2 | 5
          3   1 0   2
                2
```

Un altro metodo per trasformare un numero decimale in un numero binario

Per trasformare i numeri da base 10 a base 2 basta scrivere il numero come somma delle potenze del 2:

a) si parte dalla potenza del 2 più vicina, per difetto, al numero da convertire;
b) si vede se la potenza precedente di ordine inferiore può fare parte della sequenza, cioè se la somma tra le potenze non diventa più grande del numero. Se può farne parte allora si scrive 1, altrimenti 0;
c) si prosegue in questo modo fino ad arrivare a 2^0;
d) la sequenza di 1 e 0, da sinistra verso destra, ottenuti è il numero binario corrispondente.

Esempio 4.5. Consideriamo ancora il numero 59:

- qual è la potenza del 2 più vicina, per difetto al 59? Il numero 32, cioè 2^5. Quindi 2^5 fa parte del numero binario. Scrivo 1 come primo numero della sequenza

- vediamo ora $2^4 = 16$. Anche 16 può far parte del numero binario perché 32 + 16 = 48 che è minore di 59. Segno 1 come secondo numero della sequenza;
- per lo stesso ragionamento anche $2^3 = 8$ fa parte del numero binario. Infatti 32 + 16 + 8 = 56, minore di 59. Segno ancora 1 come terzo numero della sequenza;
- invece $2^2 = 4$ non può farne parte perché $32 + 16 + 8 + 4 = 60$, maggiore di 59. Segno 0 come quarto numero della sequenza;
- $2^1 = 2$ e $2^0 = 1$ vanno bene e si arriva al totale voluto 59. Segno 1 come quinto e 1 come sesto numero della sequenza.

Riassumendo: $59 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (111011)_2$.

✍ *Esercizi proposti:* 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13, 4.14

4.3 Conversione di un numero da una base diversa da 10 a un'altra base diversa da 10

Esempio 4.6. Scrivere il numero $(1023)_4$ in base 7.

Per scrivere un numero da una base B a una base K tutte e due diverse da 10 occorre:

a) trasformare il numero in base B in un numero decimale attraverso la sua scrittura polinomiale;
b) trasformare il numero decimale nella base K attraverso i resti delle divisione successive per K.

Applichiamo la procedura indicata:

a) $(1023)_4 = 1 \cdot 4^3 + 0 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0 = 64 + 0 + 8 + 3 = (75)_{10}$;
b) Il numero scritto da destra verso sinistra con i resti delle successive divisioni per 7 presi dal basso verso l'alto è $(135)_7$.

Successive divisioni per 7 di 75	*Quozienti* delle succesive divisioni per 7	*Resti* delle succesive divisioni per 7
75 : 7	10	5
10 : 7	1	3
1 : 7	0	1

Le trasformazioni eseguite sono: $(1023)_4 \rightarrow (75)_{10} \rightarrow (135)_7$.

✍ *Esercizi proposti:* 4.15, 4.16, 4.17

4.3.1 Conversione tra base 4, base 8, base 16 e base 2

Consideriamo il numero scritto in base 2 $(11010011100101)_2$ vogliamo scriverlo in base 4, in base 8, in base 16 senza passare dalla sua scrittura in base 10. Infatti gruppi di due cifre in base 2 rappresentano tutte le cifre della base 4, gruppi di 3 cifre in base 2 rappresentano tutte le cifre della base 8, e gruppi di 4 cifre nella base 2 rappresentano tutte le cifre della base 16, come indicato nella seguente tabella.

Base 10	Base 2	Base 4	Base 8	Base 16
0	0	00 = 0	000 = 0	0000 = 0
1	1	01 = 1	001 = 1	0001 = 1
2		10 = 2	010 = 2	0010 = 2
3		11 = 3	011 = 3	0011 = 3
4			100 = 4	0100 = 4
5			101 = 5	0101 = 5
6			110 = 6	0110 = 6
7			111 = 7	0111 = 7
8				1000 = 8
9				1001 = 9
10				1010 = A
11				1011 = B
12				1100 = C
13				1101 = D
14				1110 = E
15				1111 = F

Da base 2 a base 4

Dobbiamo raggruppare il numero scritto in base 2 in gruppi di due cifre partendo da sinistra e tradurre con la corrispondente cifra in base 4.

Numero scritto in base 2	1 1	0 1	0 0	1 1	1 0	0 1	0 1
Numero scritto in base 4	3	1	0	3	2	1	1

$$(11010011100101)_2 = (3103211)_4.$$

Convertire il numero da base 2 a base 8

Dobbiamo raggruppare il numero scritto in base 2 in gruppi di tre cifre partendo da sinistra e tradurre con la corrispondente cifra in base 8.

Numero scritto in base 2	1 1	0 1 0	0 1 1	1 0 0	1 0 1
Numero scritto in base 8	3	2	3	4	5

$$(11010011100101)_2 = (32345)_8.$$

Convertire il numero da base 2 a base 16

Dobbiamo raggruppare il numero scritto in base 2 partendo da sinistra in gruppi di quattro cifre e tradurre con la corrispondente cifra in base 16.

Numero scritto in base 2	1 1	0 1 0 0	1 1 1 0	0 1 0 1
Numero scritto in base 16	3	4	E	5

$$(11010011100101)_2 = (34E5)_{16}.$$

✍ *Esercizi proposti:* 4.18, 4.19

Perché è importante la base 2?

Tutti gli strumenti elettronici che utilizziamo hanno bisogno di tradurre le informazioni che inseriamo in stati fisici della macchina. Il metodo più semplice per tradurre in linguaggio macchina le nostre informazioni è utilizzare la base 2: composta solo dai simboli 0 e 1. La base due è quindi l'alfabeto a disposizione delle macchine per comprendere e rispondere alle nostre richieste. Se si utilizzasse la base 10 dovremo far riconoscere dall'apparato dieci differenti simboli che devono essere tradotti in dieci differenti stati.

A partire da questa informazione elementare detta *bit* (compressione dall'inglese di *bi*nary digi*t*) è possibile costruire informazioni più complesse sotto forma di sequenze finite di zero e di uno. Attraverso la codifica binaria si è in grado di rappresentare caratteri, numeri, istruzioni di programma ma anche immagini, suoni e video.

Il primo multiplo del bit è il *Byte* che è formato da una sequenza di 8 bit:

0	1	0	1	0	0	0	0

Con una sequenza di 8 bit possiamo codificare fino a 256 caratteri attraverso il codice ASCII[1]. Quando digitiamo un carattere nella tastiera del calcolatore mandiamo un impulso che è una sequenza di 8 bit. Vediamo alcuni esempi della codifica binaria dei caratteri.

Carattere	In base 2	Numero decimale
A	0 1 0 0 0 0 0 1	65
a	0 1 1 0 0 0 0 1	97
M	0 1 0 0 1 1 0 1	77
m	0 1 1 0 1 1 0 1	109
0	0 0 1 1 0 0 0 0	48
1	0 0 1 1 0 0 0 1	49
à	1 0 1 0 0 0 0 0	160
ò	1 0 1 0 0 0 1 0	162

Anche il byte ha i suoi multipli. Eccone alcuni indicati nella seguente tabella.

		Sistema internazionale		Utilizzo in informatica	
Nome	Marca	Potenze del 10	Valore decimale rispetto ai byte	Potenze del 2	Valore decimale rispetto ai byte
byte	B	10^0	1	2^0	1
kilobyte	kB	10^3	1.000	2^{10}	1.024
megabyte	MB	10^6	1.000.000	2^{20}	1.048.576
gigabyte	GB	10^9	1.000.000.000	2^{30}	1.073.741.824
terabyte	TB	10^{12}	1.000.000.000.000	2^{40}	1.099.511.627.776

❑ **Osservazione** È noto che i prefissi *kilo-*, *Mega-* e *Giga-* corrispondono a 1.000, 1.000.000 (un milione) e 1.000.000.000 (un miliardo), mentre nell'informatica vengono impropriamente usati per indicare particolari potenze di 2.

[1]Acronimo di *American Standard Code for Information Interchange*.

Tutto questo genera confusione; per esempio un disco fisso che da specifiche dovrebbe garantire una capacità di archiviazione pari a 160 gigabyte, quando ne viene visualizzata la dimensione arriva poco oltre 149 gigabyte e i produttori giocano su questa "incertezza". I produttori fanno i conti "imbrogliando". Un PC che viene dichiarato con un hard disk da 160 GB vengono trasformati in byte moltiplicando per 10^9. Ma quando verifichiamo la grandezza del disco sull'elaboratore, il computer divide per 2^{30}.

$(1{,}6 \cdot 10^{11}) : (1{,}07410^9) = 1{,}49 \cdot 10^2$. Solo per questo "imbroglio" ci siamo persi 11 GB.

✍ *Esercizio proposto:* 4.20

4.4 Operazioni in base diversa da dieci

Le quattro operazioni con i numeri in base diversa da dieci possono effettuarsi con gli stessi algoritmi utilizzati per i numeri naturali.

4.4.1 Addizione

Esempio 4.7. Eseguire l'addizione in base 2 tra 101011_2 e 10011_2.

Dobbiamo tradurre in base due quello che facciamo in base dieci. Abbiamo perciò bisogno di costruire la tavola di addizione in base due che riportiamo a lato. La tavola, o tabellina, è piuttosto semplice, bisogna solo fare attenzione che in base due si ha $1+1=10$, perché il 2 si scrive appunto 10 in base due.

+	0	1
0	0	1
1	1	10

$$\begin{array}{lcccccccc}
\text{Riporti} & & & & 1 & 1 & & \\
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & + \\
 & & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 &
\end{array}$$

Mettiamo i numeri in colonna (vedi a fianco) e cominciamo ad addizionare a partire dalle unità: $1+1=0$, scrivo 0 e riporto 1. Nella colonna di ordine superiore trovo $(1+1)+1 = 10+1 = 11$, scrivo 1 e riporto 1. Nella colonna di ordine superiore trovo $1+0+0=1$, scrivo 1 senza riportare alcunché. Continuo in questo modo fino ad esaurire tutte le cifre da addizionare.

Facciamo la verifica nell'usuale sistema decimale:

$$(101011_2 = 43) + (10011_2 = 19) = (111110_2 = 62).$$

Esempio 4.8. Eseguire la somma in base 5 tra 34231_5 e 4341_5.

Costruiamo la tavola di addizione in base cinque: ricordiamo che $4+1=10$, $4+2=11$, ecc.

Mettiamo i numeri in colonna e cominciamo ad addizionare a partire dalle unità: $1+1=2$, scrivo 2 senza riporto. Nella colonna di ordine superiore trovo $3+4=12$. Scrivo 2 e riporto 1. Nella colonna di ordine superiore trovo $(1+2)+3 = 3+3 = 11$ scrivo 1 e riporto 1. Procedendo verso sinistra ora trovo $(1+4)+4 = 10+4 = 14$ scrivo 4 e riporto 1. Infine $1+3=4$. L'addizione è terminata.

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

```
Riporti 1 1 1
         3 4 2 3 1 +
           4 3 4 1
         ---------
         4 4 1 2 2
```

Verifica nel sistema decimale:

$$(34231_5 = 2441) + (4341_5 = 596) = (44122_5 = 3037).$$

✍ *Esercizi proposti:* 4.21, 4.22, 4.23

4.4.2 Sottrazione

Per la sottrazione ci possiamo servire delle stesse tabelle dell'addizione.

Esempio 4.9. $101011_2 - 11111_2$.

```
Riporti -1 -1 -1
             1  0  1  0 1 1 -
                1  1  1 1 1
             ---------------
             0  0  1  1 0 0
```

Mettiamo i numeri in colonna e cominciamo a sottrarre partendo dalle unità: $1-1=0$ scrivo 0. Nella colonna di ordine superiore trovo di nuovo $1-1=0$ scrivo 0. Procedendo verso sinistra trovo $0-1$ devo quindi prendere in prestito un unità di ordine superiore che messa davanti a 0 diviene $10-1=1$. scrivo 1 e riporto -1. Mi sposto ancora a sinistra e trovo $(-1+1)-1=0-1$. Occorre prendere in prestito un'unità di ordine superiore $10-1=1$. Scrivo 1 e riporto -1. Nella colonna a sinistra ho 0 del minuendo, -1 del riporto e -1 del sottraendo. Occorre prendere a prestito un'unità di ordine superiore quindi $10-1=1$ a cui devo togliere 1 del sottraendo: $1-1=0$. Infine nella unità di ordine superiore devo addizionare il riporto -1 a 1 e scrivo ancora 0. Il risultato della sottrazione è: 1100

Verifica nel sistema decimale: $(101011_2 = 43) - (11111_2 = 31) = (1100_2 = 12)$.

Esempio 4.10. $34231_5 - 4341_5$.

Ci serviamo della tavola di addizione in base cinque.

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

```
Riporti -1 -1 -1
         3  4  2  3 1 -
            4  3  4 1
         ------------
         2  4  3  4 0
```

Verifica: $(34231_5 = 2441) - (4341_5 = 596) = (24340_5 = 1845)$.

✍ *Esercizi proposti:* 4.24, 4.25, 4.26

4.4.3 Moltiplicazione

Adoperiamo lo stesso algoritmo usato per moltiplicare due numeri decimali utilizzando la tabella della moltiplicazione.

Esempio 4.11. $101011_2 \times 101_2$.

Dobbiamo tradurre in base due quello che facciamo in base dieci. Abbiamo perciò bisogno di costruire la tavola della moltiplicazione in base due.

×	0	1
0	0	0
1	0	1

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr}
 & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \times \\
 & & & & & 1 & 0 & 1 & \\
\hline
 & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & - & & \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 &
\end{array}
$$

Verifica nel sistema decimale: $(101011_2 = 43) \times (101_2 = 5) = (11010111_2 = 215)$.

Esempio 4.12. $231_5 \times 24_5$.

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & 2 & 3 & 1 & \times \\
 & & & 2 & 4 & \\
\hline
 & 2 & 0 & 2 & 4 & \\
1 & 0 & 1 & 2 & - & \\
\hline
1 & 2 & 1 & 4 & 4 &
\end{array}
$$

Verifica nel sistema decimale: $(231_5 = 66) \times (24_5 = 14) = (12144_5 = 924)$.

✍ *Esercizi proposti:* 4.27, 4.28, 4.29

4.4.4 Divisione

Anche per la divisione il procedimento è del tutto analogo a quello usato nel sistema decimale, la tavola da utilizzare è quella della moltiplicazione.

Esempio 4.13. $11101_2 : 101_2$.

Dobbiamo tradurre in base due quello che facciamo in base dieci.

La cifra di ordine più alto si ottiene dalla divisione di 111 con 101. Il quoziente è 1, il resto si ottiene dalla differenza tra il dividendo e il prodotto del quoziente per il divisore. In questo caso il resto è 10.

Si abbassa lo 0 e otteniamo 100. Si ha $100 : 111 = 0$. La seconda cifra del divisore è 0.

La moltiplicazione di 0 per il divisore dà 0. Il nuovo resto è 100 a cui aggiungiamo l'ultima cifra del dividendo.

Otteniamo 1001 che viene divisa 101. Il quoziente termina con 1 con il resto uguale a 100.

$$
\begin{array}{rrrrrr|rrr}
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\cline{7-9}
- & 1 & 0 & 1 & & & 1 & 0 & 1 \\
\cline{2-4}
 & & 1 & 0 & 0 & & & & \\
 & & 0 & 0 & 0 & & & & \\
\cline{3-5}
 & & 1 & 0 & 0 & 1 & & & \\
 & & - & 1 & 0 & 1 & & & \\
\cline{4-6}
 & & & 1 & 0 & 0 & & &
\end{array}
$$

Verifica nel sistema decimale:

$$(11101_2 = 29) : (101_2 = 5) = (\textit{Quoziente} : 101_2 = 5; \textit{Resto} : 110 = 4).$$

Eseguiamo la prova della divisione direttamente in base 2: *dividendo* $=$ *quoziente* $\times$ *divisore* $+$ *resto*.

Il quoziente moltiplicato il divisore è uguale a 11001. Se a questo risultato aggiungiamo il resto 100 otteniamo il dividendo 11101.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 1 & 0 & 1 & \times \\
 & & 1 & 0 & 1 & \\
\cline{3-5}
 & & 1 & 0 & 1 & \\
 & 0 & 0 & 0 & - & \\
1 & 0 & 1 & - & & \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & + \\
 & & 1 & 0 & 0 & \\
\hline
1 & 1 & 1 & 0 & 1 &
\end{array}$$

Esempio 4.14. $3402_5 : 42_5$.

Dobbiamo tradurre in base due quello che facciamo in base dieci.

Il 42 nel 34 non ci sta. Prendiamo allora tre cifre 340. Il 4 nel 34 ci sta 4 volte. 4 è la cifra di ordine più alto del quoziente. Dobbiamo trovare il resto. Il resto si ottiene sottraendo il risultato della moltiplicazione tra 4 e 42 che è 323. Il resto è uguale 12. Si abbassa il 2 e otteniamo 122. Il 4 nel 12 in base 5 ci sta una sola volta, infatti $4 \times 2 = 13$. La seconda cifra del divisore è 1. La moltiplicazione di 1 per il divisore dà 42. Sottraendo 42 da 122 si ottiene 30. Dato che 30 è minore di 42 la divisione intera è terminata.

$$\begin{array}{cccc|cc}
3 & 4 & 0 & 2 & 4 & 2 \\
\cline{5-6}
3 & 2 & 3 & & 4 & 1 \\
\cline{1-4}
 & 1 & 2 & 2 & & \\
 & & 4 & 2 & & \\
\cline{3-4}
 & & 3 & 0 & &
\end{array}$$

Verifica: $(3402_5 = 477) : (42_5 = 22) = (\textit{Quoziente} : 41_5 = 21; \textit{Resto} : 30 = 15)$.

✍ *Esercizi proposti:* 4.30, 4.31

4.5 Esercizi

4.5.1 Esercizi dei singoli paragrafi

4.2 - Scrittura di un numero in una base qualsiasi

4.1. Stabilire il valore di verità delle seguenti proposizioni:

a) la scrittura 1234 può esprimere un numero in base 4. V F
b) il valore numerico espresso in base 10 della cifra 2 nel numero $(1523)_6$ è 72. V F
c) il valore numerico espresso in base 10 della cifra 3 nel numero $(321)_4$ è 12. V F
d) il valore numerico espresso in base 10 del numero $(321)_4$ è 57. V F

4.2. Scrivi il numero $(3411)_5$ in forma polinomiale e trova il corrispondente numero decimale.

$$(3411)_5 = 3 \cdot 5^{\cdots} + \ldots \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + \ldots\ldots = 375 + \ldots\ldots + 5 + \ldots\ldots = \ldots\ldots$$

4.3. Trasforma i seguenti numeri scritti in base diversa da 10 in un numero decimale

$$(11101)_2; (2001)_3; (3023)_4; (41)_5; (3005)_6.$$

4.4. Trasforma i seguenti numeri scritti in base 2 in un numero decimale.

$$(110111)_2; (1001)_2; (111)_2; (111111)_2; (101)_2.$$

4.5. Trasforma i seguenti numeri scritti in base 16 in un numero decimale.

$$(20F)_{16}; (AA)_{16}; (19)_{16}; (3E)_{16}.$$

4.6. Scrivere in base 2 i seguenti numeri in base dieci: 2; 4; 15; 12; 27; 33.
Risultati: $\ldots\ldots$; $(100)_2$; $\ldots\ldots$; $(1100)_2$; $\ldots\ldots\ldots$; $(100001)_2$.

4.7. Scrivere in base 3 i seguenti numeri: 2; 4; 15; 12; 27; 33.
Risultati: $(2)_3$; $(\ldots\ldots)_3$; $(120)_3$; $(\ldots\ldots)_3$; $(1000)_3$; $(\ldots\ldots\ldots)_3$.

4.8. Scrivere in base 4 i seguenti numeri: 2; 4; 15; 12; 27; 33.
Risultati: $(\ldots\ldots)_4$; $(10)_4$; $(33)_4$; $(\ldots\ldots)_4$; $(\ldots\ldots)_4$; $(201)_4$.

4.9. Scrivere in base 5 i seguenti numeri: 2; 4; 15; 12; 27; 33.
Risultati: $(2)_5$; $(\ldots\ldots)_5$; $(\ldots\ldots)_5$; $(22)_5$; $(\ldots\ldots\ldots)_5$; $(113)_5$.

4.10. Scrivere in base 6 i seguenti numeri: 2; 4; 15; 12; 27; 33.
Risultati: $(\ldots\ldots)_6$; $(4)_6$; $(\ldots\ldots)_6$; $(20)_6$; $(\ldots\ldots)_6$; $(\ldots)_6$.

4.11. Scrivere in base 7 i seguenti numeri decimali: 2; 4; 15; 12; 27; 33.
Risultati: $(2)_7$; $(\ldots\ldots)_7$; $(\ldots\ldots)_7$; $(\ldots\ldots)_7$; $(\ldots\ldots)_7$; $(45)_7$.

4.12. Scrivere in base 8 i seguenti numeri: 2; 4; 15; 12; 27; 33.
Risultati: $(\ldots)_8$; $(\ldots)_2$; $(17)_8$; $(\ldots\ldots)_8$; $(33)_8$; $(\ldots\ldots)_8$.

4.13. Scrivere in base 9 i seguenti numeri: 2; 4; 15; 12; 27; 33.
Risultati: $(\ldots\ldots)_9$; $(\ldots\ldots)_9$; $(16)_9$; $(\ldots\ldots)_9$; $(\ldots\ldots)_9$; $(36)_9$.

4.14. Scrivere in base 16 i seguenti numeri: 2; 4; 15; 12; 27; 33.
Risultati: $(2)_{16}$; $(\ldots\ldots)_{16}$; $(F)_{16}$; $(\ldots\ldots)_{16}$; $(1B)_{16}$; $(\ldots\ldots)_{16}$.

4.3 - Conversione di un numero da una base diversa da 10 a un'altra base diversa da 10

4.15. Trasformare in base 7 i seguenti numeri scritti in base 4.

$$(103)_4;\ (120)_4;\ (203)_4;\ (1301)_4;\ (123)_4;\ (301)_4.$$

Risultati: $(25)_7$; $(\ldots\ldots)_7$; $(50)_7$; $(\ldots\ldots)_7$; $(36)_7$; $(\ldots\ldots)_7$.

4.16. Trasformare in base 9 i seguenti numeri scritti in base 3.

$$(10002)_3;\ (2020)_3;\ (11201)_3;\ (120122)_3;\ (1001)_3.$$

Risultati: $(102)_9$; $(\ldots\ldots)_9$; $(\ldots\ldots)_9$; $(518)_9$; $(\ldots\ldots)_9$.

4.17. Trasformare in base 16 i seguenti numeri scritti in base 4.

$$(133)_4;\ (120)_4;\ (203)_4;\ (2301)_4;\ (223)_4.$$

Risultati: $(1F)_{16}$; $(\ldots\ldots)_{16}$; $(23)_{16}$; $(\ldots\ldots)_{16}$; $(2B)_{16}$.

4.18. Convertire in base 4, 8 e 16 i seguenti numeri scritti in base 2:

$$(101)_2;\quad (100011)_2;\quad (1111110101)_2;\quad (10100100)_2;\quad (1101)_2.$$

4.19. Convertire in base 2 i seguenti numeri scritti in base 16:

$$(12)_{16};\quad (A)_{16};\quad (1C3)_{16};\quad (AB)_{16};\quad (223)_{16}.$$

4.20 (*). Perché un DVD scrivibile quando si compra dichiara una capacità di 4,7 GB e invece ha una capacità reale di 4,3? Un CD-R dichiara una capacità di 700 MB. Qual è la sua capacità reale?

4.4 - Operazioni in base diversa da dieci

4.21. Eseguire le seguenti addizioni in base 2.

$$\begin{array}{r} 111101\ + \\ 10110 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 101101\ + \\ 11111 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1011\ + \\ 111 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1011\ + \\ 1101 \\ 1011 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10111\ + \\ 11001 \\ 1100 \\ \hline \end{array}$$

4.22. Eseguire le seguenti addizioni in base 5.

$$\begin{array}{r} 342401\ + \\ 23142 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 202401\ + \\ 434 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2341\ + \\ 444 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1401\ + \\ 3112 \\ 344 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4321\ + \\ 1234 \\ 340 \\ \hline \end{array}$$

4.23. Eseguire le seguenti addizioni in base 3.

$$\begin{array}{r} 210201\ + \\ 21212 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 202101\ + \\ 12110 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2211\ + \\ 202 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10221\ + \\ 1202 \\ 11201 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 222\ + \\ 121 \\ 212 \\ \hline \end{array}$$

4.24. Eseguire le seguenti sottrazioni in base 2.

$\begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1 \ - \\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \ - \\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1 \ - \\ 1\ 1\ 1 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ 1 \ - \\ 1\ 1\ 1 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \ - \\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ \hline \end{array}$

4.25. Eseguire le seguenti sottrazioni in base 5.

$\begin{array}{r} 3\ 4\ 2\ 4\ 0\ 1 \ - \\ 2\ 3\ 1\ 4\ 2 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 2\ 0\ 2\ 4\ 0\ 1 \ - \\ 4\ 3\ 4 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 2\ 3\ 4\ 1 \ - \\ 4\ 4\ 4 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 3\ 4\ 4\ 4 \ - \\ 3\ 1\ 2\ 3 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 1\ 3\ 2\ 4\ 2 \ - \\ 4\ 2\ 2\ 4 \\ \hline \end{array}$

4.26. Eseguire le seguenti sottrazioni in base 3.

$\begin{array}{r} 2\ 1\ 0\ 2\ 0\ 1 \ - \\ 2\ 1\ 2\ 1\ 2 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 2\ 0\ 2\ 1\ 0\ 1 \ - \\ 1\ 2\ 1\ 1\ 0 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 2\ 2\ 1\ 1 \ - \\ 2\ 0\ 2 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 1\ 2\ 0\ 1 \ - \\ 2\ 2\ 2 \\ \hline \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 2\ 1\ 0\ 0\ 1 \ - \\ 1\ 2\ 1\ 0\ 2 \\ \hline \end{array}$

4.27. Moltiplica in base 2: $111101_2 \times 10110_2$; $\quad 101101_2 \times 11111_2$; $\quad 1011_2 \times 111_2$.

4.28. Moltiplica in base 5: $2401_5 \times 42_5$; $\quad 431_5 \times 34_5$; $\quad 214_5 \times 41_5$.

4.29. Moltiplica in base 3: $10201_3 \times 212_3$; $\quad 2101_3 \times 212_3$; $\quad 1211_3 \times 22_3$.

4.30 (*). Eseguire le seguenti divisioni in base 2.

a) 11101 : 11; b) 1011101 : 100; c) 100011 : 10.

4.31 (*). Eseguire le seguenti divisioni in base 5.

a) 2304 : 43; b) 3310 : 24; c) 2012 : 31.

4.5.2 Risposte

4.3 29, 55, 203, 21, 653.

4.4 55, 9, 7, 63, 5.

4.5 527, 170, 25; 62.

4.20 667, 57 MB.

4.30 a) Q=11; R=1, b) Q=1011; R=1, c) Q=10001; R=0.

4.31 a) Q=24; R=12, b) Q=112; R=12, c) Q=31; R=1.