Disequazioni 21

21.1 Intervalli sulla retta reale

Definizione 21.1. Dati due numeri reali a e b, con $a < b$, si chiamano *intervalli*, i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

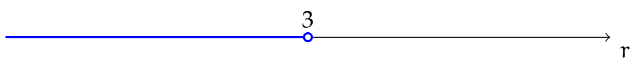
a) $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}/a < x < b\}$ intervallo limitato aperto, a e b sono esclusi;
b) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}/a \leqslant x \leqslant b\}$ intervallo limitato chiuso, a e b sono inclusi;
c) $[a, b) = \{x \in \mathbb{R}/a \leqslant x < b\}$ intervallo limitato chiuso a sinistra e aperto a destra, a è incluso, b è escluso;
d) $(a, b] = \{x \in \mathbb{R}/a < x \leqslant b\}$ intervallo limitato aperto a sinistra e chiuso a destra, a è escluso, b è incluso;
e) $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}/x > a\}$ intervallo superiormente illimitato aperto, a è escluso;
f) $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}/x \geqslant a\}$ intervallo superiormente illimitato chiuso, a è incluso;
g) $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}/x < a\}$ intervallo inferiormente illimitato aperto, a è escluso;
h) $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}/x \leqslant a\}$ intervallo inferiormente illimitato chiuso, a è escluso.

I numeri a e b si chiamano *estremi* dell'intervallo.

I numeri reali possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta: ogni numero reale ha per immagine un punto della retta e viceversa ogni punto della retta è immagine di un numero reale. Di conseguenza ognuno degli intervalli sopra definiti ha per immagine una semiretta o un segmento, precisamente gli intervalli limitati corrispondono a segmenti e quelli illimitati a semirette. Vediamo con degli esempi come si rappresentano i diversi tipi di intervalli.

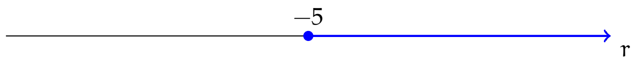
Esempio 21.1. $H = \{x \in \mathbb{R}/x < 3\}$ intervallo illimitato inferiormente $H = (-\infty, 3)$.

L'insieme H è rappresentato da tutti i punti della semiretta che precedono il punto immagine del numero 3, esclusa l'origine della semiretta. Nella figura, la semiretta dei punti che appartengono ad H è stata disegnata con una linea più spessa; per mettere in evidenza che il punto immagine di 3 non appartiene alla semiretta abbiamo messo un pallino vuoto sul punto.



Esempio 21.2. $\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{R}/x \geqslant -5\}$ intervallo illimitato superiormente chiuso a sinistra $\mathbb{P} = [-5, +\infty)$.

Segniamo sulla retta r il punto immagine di -5; l'insieme $\mathbb{P}$ è rappresentato dalla semiretta di tutti i punti che seguono -5, compreso lo stesso -5. Nel disegno, la semiretta dei punti che appartengono a $\mathbb{P}$ è stata disegnata con una linea più spessa, per indicare che il punto -5 appartiene all'intervallo abbiamo messo un pallino pieno sul punto.



Esempio 21.3. $D = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x < 6\}$ intervallo limitato aperto $D = (-2, 6)$.

Segniamo sulla retta reale i punti immagine degli estremi del segmento, -2 e 6. L'insieme D è rappresentato dal segmento che ha per estremi questi due punti. Nel disegno il segmento è stato disegnato con una linea più spessa, i due estremi del segmento sono esclusi, pertanto su ciascuno di essi abbiamo messo un pallino vuoto.

Esempio 21.4. $T = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x \leqslant 6\}$ intervallo limitato chiuso a destra $T = (-2, 6]$.

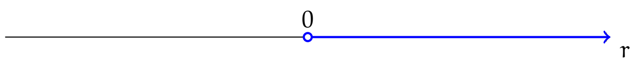
Rispetto al caso precedente, il segmento che rappresenta l'insieme T è chiuso a destra, ossia è incluso nell'intervallo anche il 6, è escluso invece il punto -2.

Esempio 21.5. $S = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leqslant x \leqslant 6\}$ intervallo chiuso e limitato $S = [2, 6]$.

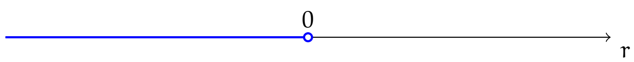
Il segmento che rappresenta l'insieme S contiene tutti e due i suoi estremi:

Esempio 21.6. Altri particolari sottoinsiemi dei numeri reali sono:

- $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$. Semiretta di origine 0 costituita da tutti i numeri positi:



- $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} / x < 0\}$. Semiretta di origine 0 costituita da tutti i numeri reali negativi:



  Il punto 0 non appartiene a nessuna delle due semirette; il numero zero non appartiene né a $\mathbb{R}^+$ né a $\mathbb{R}^-$: $\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \cup \{0\}$.

- $\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} / x \geqslant 0\}$;
- $\mathbb{R}_0^- = \{x \in \mathbb{R} / x \leqslant 0\}$.

✍ *Esercizi proposti:* 21.1, 21.2, 21.3, 21.4, 21.5, 21.6, 21.7

21.2 Disequazioni numeriche

Consideriamo le seguenti proposizioni:

a) 5 è minore di 12;
b) $48 - 90$ è maggiore di 30;
c) il quadrato di un numero reale è maggiore o uguale a zero;
d) sommando ad un numero la sua metà si ottiene un numero minore o uguale a 1.

Esse possono essere tradotte in linguaggio matematico usando i simboli $>$ (maggiore), $<$ (minore), $\geqslant$ (maggiore o uguale), $\leqslant$ (minore o uguale) e precisamente:

a) $5 < 12$; b) $48 - 90 > 30$; c) $x^2 \geqslant 0$; d) $x + \frac{1}{2}x \leqslant 1$.

Le formule che contengono variabili si dicono aperte; quelle che contengono solo numeri si dicono chiuse. Quindi a) e b) sono formule chiuse; c) e d) sono formule aperte.

Definizione 21.2. Chiamiamo *disuguaglianza* una formula chiusa costruita con uno dei predicati $<$ (essere minore); $>$ (essere maggiore); $\leqslant$ (essere minore o uguale); $\geqslant$ (essere maggiore o uguale).

Di essa sappiamo subito stabilire il valore di verità, quando è stabilito l'ambiente in cui vengono enunciate.

Definizione 21.3. Chiamiamo *disequazione* una formula aperta, definita in $\mathbb{R}$ e costruita con uno dei seguenti predicati: $<$ (essere minore); $>$ (essere maggiore); $\leqslant$ (essere minore o uguale); $\geqslant$ (essere maggiore o uguale).

Analogamente a quanto detto per le equazioni, chiamiamo *incognite* le variabili che compaiono nella disequazione, *primo membro* e *secondo membro* le due espressioni che compaiono a sinistra e a destra del segno di disuguaglianza.

Esempio 21.7. Disuguaglianze vere e false.

a) in $\mathbb{N}$, la formula $5 > 0$ è una disuguaglianza: vera;
b) in $\mathbb{Z}$, la formula $-6 > -4$ è una disuguaglianza: falsa;
c) la formula $5x > 0$ è una disequazione; quando all'incognita sostituiamo un numero essa si trasforma in una disuguaglianza e solo allora possiamo stabilirne il valore di verità. Nel caso proposto è vera se sostituiamo alla variabile un qualunque numero positivo, falsa se sostituiamo zero o un numero negativo.

✍ *Esercizio proposto:* 21.8

Definizione 21.4. L'insieme dei valori che sostituiti all'incognita trasformano la disequazione in una disuguaglianza vera, è l'*insieme soluzione* (I. S.) della disequazione.

21.2.1 Ricerca dell'insieme soluzione di una disequazione

Alcune volte l'I. S. si può trovare ragionando sulla forma della disequazione.

Esempio 21.8. Analizziamo le seguenti disequazioni in $\mathbb{R}$:

- $3 \cdot x \geqslant 0$ si cercano quei valori da attribuire all'incognita che moltiplicati per 3 diano un prodotto positivo o nullo. Per le regole dei segni e per la legge di annullamento del prodotto, il numero x deve essere maggiore o uguale a 0: $\text{I. S.} = \{x \in \mathbb{R}/x \geqslant 0\} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$;
- $x^2 + 1 < 0$ si cercano i valori che rendono la somma del loro quadrato con 1 un numero negativo. Poiché il quadrato di un numero è sempre positivo, al più nullo se il numero è zero, aggiungendo ad esso 1, non troveremo mai un risultato negativo: $\text{I. S.} = \emptyset$;
- $-x^2 \leqslant 0$ il primo membro è l'opposto del quadrato di un numero; poiché il quadrato è sempre positivo o nullo, la disequazione è verificata per qualunque numero reale: $\text{I. S.} = \mathbb{R}$;
- $\frac{1}{x} < 0$ il primo membro è l'inverso di un numero reale; tale operazione ha significato per qualunque numero tranne che per 0, $\frac{1}{0}$ infatti è priva di significato. La frazione $\frac{1}{x}$ è negativa per qualunque valore negativo attribuito alla incognita:

  $$\text{I. S.} = \{x \in \mathbb{R}/x < 0\} = \mathbb{R}^-.$$

In questo paragrafo affronteremo disequazioni in una sola incognita, che, dopo aver svolto eventuali calcoli nei due membri, avrà l'incognita al primo grado e i cui coefficienti sono numeri reali.

La forma più semplice o *forma canonica* di una disequazione di primo grado in una sola incognita a coefficienti reali è una delle seguenti $ax > b$; $ax < b$; $ax \geqslant b$; $ax \leqslant b$ con a e b numeri reali.

Per condurre una disequazione alla forma canonica e quindi per determinare il suo I. S. si procede applicando dei principi analoghi a quelli delle equazioni.

Premettiamo la seguente definizione:

Definizione 21.5. Due disequazioni si dicono *equivalenti* se hanno lo stesso insieme delle soluzioni.

Principio 21.1 (I Principio). *Addizionando o sottraendo a ciascuno dei due membri di una disequazione uno stesso numero o una stessa espressione (definita per qualunque valore attribuito all'incognita), si ottiene una disequazione equivalente alla data.*

Regola pratica: questo principio ci permette di "spostare" un addendo da un membro all'altro cambiandogli segno o di "eliminare" da entrambi i membri gli addendi uguali.

Principio 21.2 (II Principio). *Moltiplicando o dividendo ciascuno dei due membri di una disequazione per uno stesso numero positivo o per una stessa espressione (definita e positiva per qualunque valore attribuito alla variabile), si ottiene una disequazione equivalente alla data.*

Principio 21.3 (III Principio). *Moltiplicando o dividendo ciascuno dei due membri di una disequazione per uno stesso numero negativo o per una stessa espressione (definita e negativa per qualunque valore attribuito alla variabile), si ottiene una disequazione equivalente alla data ma con il verso cambiato.*

Esempio 21.9. $4 \cdot (2x - 1) + 5 > 1 - 2 \cdot (-3x - 6)$.

Passo I Eseguiamo i prodotti: $8x - 4 + 5 > 1 + 6x + 12$.

Passo II Spostiamo tutti termini con l'incognita nel primo membro e i termini noti nel secondo membro, cambiamo i segni quando passiamo da un membro all'altro: $8x - 6x > 1 + 12 + 4 - 5$.

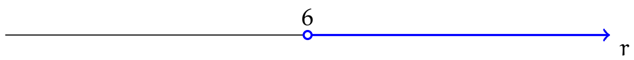
Passo III Sommando i termini simili si ottiene la forma canonica $2x > 12$.

Passo IV Applichiamo il secondo principio dividendo ambo i membri per il coefficiente della x. È fondamentale a questo punto osservare che il coefficiente è 2, che è un numero positivo, pertanto non cambia il verso della disequazione

$$\frac{2}{2}x > \frac{12}{2} \Rightarrow x > 6.$$

Se viceversa il coefficiente dell'incognita fosse stato un numero negativo si sarebbe dovuto cambiare il verso della disequazione.

Passo V Scriviamo l'insieme delle soluzioni $\text{I. S.} = \{x \in \mathbb{R}/x > 6\} = (6, +\infty)$ e rappresentiamo graficamente l'intervallo:



Esempio 21.10. $\dfrac{(x+1)^2}{4} - \dfrac{2+3x}{2} > \dfrac{(x-1)^2}{4}$.

Il mcm è 4 numero positivo, moltiplicando per 4 si ha

$$4 \cdot \left[\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{2+3x}{2}\right] > \frac{4 \cdot (x-1)^2}{4}.$$

Semplificando: $(x+1)^2 - 2 \cdot (2+3x) > (x-1)^2$.

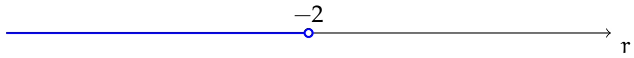
Eseguiamo i prodotti: $x^2 + 2x + 1 - 4 - 6x > x^2 - 2x + 1$

Eliminiamo dai due membri i termini uguali x^2 e 1, trasportiamo a sinistra i monomi con l'incognita e a destra i termini noti; infine sommiamo i monomi simili:

$$\cancel{x^2} + 2x \cancel{+1} - 4 - 6x > \cancel{x^2} - 2x \cancel{+1} \Rightarrow \; 2x + 2x - 6x > +4 \Rightarrow \; -2x > 4.$$

Il coefficiente dell'incognita è negativo, applicando il terzo principio dividiamo ambo i membri per -2 e cambiamo il verso della disuguaglianza:

$$\frac{-2}{-2}x < \frac{4}{-2} \Rightarrow x < -2.$$



$I.S. = \{x \in \mathbb{R} / x < -2\} = (-\infty, -2)$.

Giunti alla forma $-2x > 4$ potevano trasportare a destra del segno di disuguaglianza il monomio con l'incognita e a sinistra mettere il termine noto; ovviamente per il primo principio spostando questi termini cambiano segno e otteniamo $-4 > 2x$. Il coefficiente dell'incognita è positivo dunque applichiamo il secondo principio dividendo per 2, abbiamo $\frac{-4}{2} > \frac{2}{2}x \Rightarrow -2 > x$, che letta da destra a sinistra dice che i valori da attribuire ad x per soddisfare la disequazione assegnata sono tutti i numeri reali minori di -2.

Vediamo qualche esempio in cui scompare l'incognita.

Esempio 21.11. $\frac{1}{2} \cdot (x+5) - x > \frac{1}{2} \cdot (3-x)$.

Il mcm è 2, positivo; moltiplichiamo ambo i membri per 2; svolgiamo i calcoli:

$$2 \cdot \left[\frac{1}{2}(x+5) - x\right] > 2 \cdot \left[\frac{1}{2}(3-x)\right] \Rightarrow x+5-2x > 3-x \Rightarrow -x+5 > 3-x.$$

La forma canonica è $0 \cdot x > -2$ che si riduce alla disuguaglianza $0 > -2$ vera per qualunque x reale: $I.S. = \mathbb{R}$.

Esempio 21.12. $(x+2)^2 - 4(x+1) < x^2 - 1$.

Svolgiamo i calcoli ed eliminiamo i monomi simili:

$$x^2 + 4x + 4 - 4x - 4 < x^2 - 1 \Rightarrow \; 0 \cdot x < -1,$$

che è la disuguaglianza $0 < -1$ falsa per qualunque x reale: $I.S. = \emptyset$.

✍ *Esercizi proposti:* 21.9, 21.10, 21.11, 21.12, 21.13, 21.14, 21.15

21.2.2 Problemi con le disequazioni

Problema 21.13 (Tariffe telefoniche)**.** Sto analizzando due proposte di compagnie telefoniche per poi stipulare il contratto più conveniente per le mie esigenze. La compagnia T_1 prevede una spesa fissa di 5 centesimi di scatto alla risposta da sommare alla spesa di 1 centesimo per ogni minuto di telefonata. La compagnia T_2 non prevede spesa per lo scatto alla risposta, ma per ogni minuto di telefonata la spesa è di 2 centesimi. Dopo quanti minuti di telefonata la seconda tariffa è più conveniente della prima?

Soluzione Indichiamo con x la durata in minuti di una telefonata e con t_1 e t_2 rispettivamente la spesa con la prima e la seconda compagnia:

$$t_1 = (5 + 1 \cdot x) \text{ centesimi}; \quad t_2 = (2 \cdot x) \text{ centesimi}.$$

La t_2 sarà più conveniente di t_1 se $2 \cdot x < 5 + x$.

Il problema è formalizzato con una disequazione nell'incognita x, di primo grado. Dobbiamo trovare l'I.S..

Risolvendo la disequazione si ottiene: $2 \cdot x - x < 5 \Rightarrow x < 5\,\text{min}$.

Conclusione: se le mie telefonate durano meno di 5 minuti allora mi conviene il contratto con T_2, altrimenti se faccio telefonate più lunghe di 5 minuti mi conviene T_1. Le due tariffe sono uguali se la telefonata dura esattamente 5 minuti.

♦

Problema 21.14 (L'abbonamento). Su un tragitto ferroviario, il biglietto costa 8,25 euro. L'abbonamento mensile costa 67,30 euro. Qual è il numero minimo di viaggi che occorre effettuare in un mese perché l'abbonamento sia più conveniente?

Soluzione Indichiamo con x il numero di viaggi. Il costo del biglietto di x viaggi è $8,25 \cdot x$. L'abbonamento è più conveniente quando $8,25 \cdot x > 67,30$ da cui $x > \frac{67,30}{8,25}$ e quindi $x > 8,16$. In conclusione se si fanno 8 viaggi in un mese conviene acquistare i biglietti singoli, da 9 viaggi in poi conviene l'abbonamento.

♦

✍ *Esercizi proposti:* 21.16, 21.17, 21.18, 21.19, 21.20, 21.21, 21.22, 21.23, 21.24, 21.25, 21.26

21.27, 21.28, 21.29, 21.30, 21.31, 21.32

21.3 Sistemi di disequazioni

In alcune situazioni occorre risolvere contemporaneamente più disequazioni. Vediamo alcuni problemi.

Problema 21.15. Il doppio di un numero reale positivo diminuito di 1 non supera la sua metà aumentata di 2. Qual è il numero?

Soluzione Incognita del problema è il numero reale che indichiamo con x. Di esso sappiamo che deve essere positivo, quindi $x > 0$ e che deve verificare la condizione

$$2x - 1 \leqslant \frac{1}{2}x + 2.$$

Le due disequazioni devono verificarsi contemporaneamente.

Il problema può essere formalizzato con un *sistema di disequazioni*:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 2x - 1 \leqslant \frac{1}{2}x + 2. \end{cases}$$

Risolvere un sistema di disequazioni significa trovare l'insieme dei numeri reali che sono soluzioni comuni alle due disequazioni, cioè che le verificano entrambe.

Se indichiamo con I.S._1 e I.S._2 rispettivamente gli insiemi soluzione della prima e della seconda disequazione, l'insieme soluzione del sistema è dato dall'intersezione $\text{I.S.} = \text{I.S.}_1 \cap \text{I.S.}_2$.

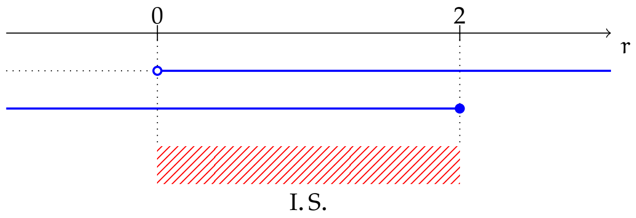
Risolviamo separatamente le due disequazioni e determiniamo gli insiemi delle soluzioni.

$$d_1 : x > 0 \Rightarrow \text{I.S.}_1 = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\},$$
$$d_2 : 4x - 2 \leqslant x + 4 \Rightarrow\ 3x \leqslant\ 6 \Rightarrow \text{I.S.}_2 = \{x \in \mathbb{R} / x \leqslant\ 2\}.$$

Dobbiamo ora determinare $\mathrm{I.S.} = \mathrm{I.S.}_1 \cap \mathrm{I.S.}_2$.

Questa ricerca può essere facilitata rappresentando graficamente i due intervalli in uno stesso schema. Disegniamo l'asse dei numeri reali r e su esso indichiamo i numeri che entrano in gioco, lo 0 e il 2. Disegniamo una prima linea dove rappresentiamo con una linea spessa $\mathrm{I.S.}_1$, disegniamo una seconda linea dove rappresentiamo con una linea più spessa $\mathrm{I.S.}_2$.

Su una terza linea rappresentiamo l'insieme degli elementi comuni a $\mathrm{I.S.}_1$ e $\mathrm{I.S.}_2$, che è appunto l'insieme delle soluzioni del sistema di disequazioni.

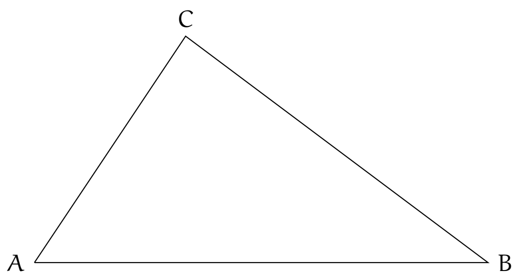


Non ci rimane che descrivere l'intervallo delle soluzioni in forma insiemistica:

$$\mathrm{I.S.} = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x \leqslant 2\} = (0, 2].$$

Problema 21.16. In un triangolo il lato maggiore misura 13 m, gli altri due lati differiscono tra di loro di 2 m. Come si deve scegliere il lato minore affinché il perimetro non superi i 100 m?

Dati: $\overline{AB} = 13\,\mathrm{m}$, $\overline{BC} - \overline{AC} = 2\,\mathrm{m}$. Riferendoci alla figura, AC è il lato minore; indichiamo con x la sua misura.



Obiettivo: determinare x in modo che $2p \leqslant 100$.

Soluzione $\overline{AC} = x; \overline{BC} = 2 + x; \overline{AB} = 13$ con $x > 0$.

L'obiettivo in linguaggio matematico si scrive: $x + (2 + x) + 13 \leqslant 100$.

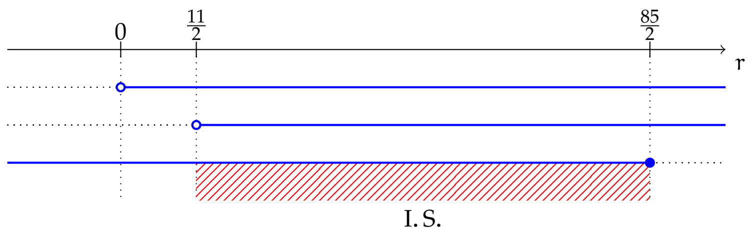
Per la "disuguaglianza triangolare" si deve avere $13 < x + (2 + x)$. Il problema è formalizzato dal sistema:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x + (x + 2) + 13 \leqslant 100 \\ 13 < x + (x + 2) \end{cases},$$

Risolvendo ciascuna disequazione si ottiene

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \leqslant \dfrac{85}{2} \\ x > \dfrac{11}{2} \end{cases}.$$

Determiniamo l'insieme soluzione aiutandoci con una rappresentazione grafica.



Affinché il perimetro non superi 100 m la misura in metri del lato minore deve essere un numero dell'insieme:

$$\text{I. S.} = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{11}{2} < x \leqslant \frac{85}{2}\right\}.$$

♦

Risolviamo delle disequazioni più articolate nel calcolo algebrico.

Esempio 21.17. Risolvere il seguente sistema di disequazioni.

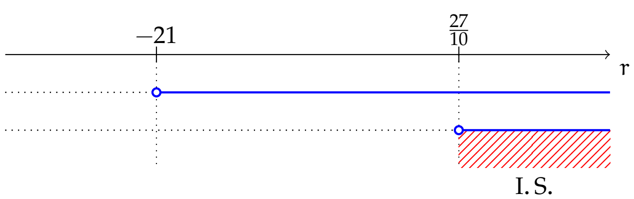
$$\begin{cases} x > \dfrac{2x-11}{8} + \dfrac{19-2x}{4} \\ \dfrac{1}{5}(x+1) > \dfrac{x}{3} - \dfrac{15+2x}{9} \end{cases}.$$

Risolviamo separatamente le due disequazioni:

$$d_1 : 8x > 2x - 11 + 38 - 4x \Rightarrow \; 10x > 27 \Rightarrow x > \frac{27}{10} \rightarrow \text{I. S.}_1 = \left\{x \in \mathbb{R} / x > \frac{27}{10}\right\},$$

$$d_2 : 9x + 9 > 15x - 75 - 10x \Rightarrow \; 4x > -84 \Rightarrow x > -21 \rightarrow \text{I. S.}_2 = \{x \in \mathbb{R} / x > -21\}.$$

Rappresentiamo graficamente le soluzioni e determiniamo $\text{I. S.} = \text{I. S.}_1 \cap \text{I. S.}_2$:



$$\text{I. S.} = \left\{x \in \mathbb{R}/x > \frac{27}{10}\right\}.$$

Esempio 21.18. Risolvere il seguente sistema di disequazioni.

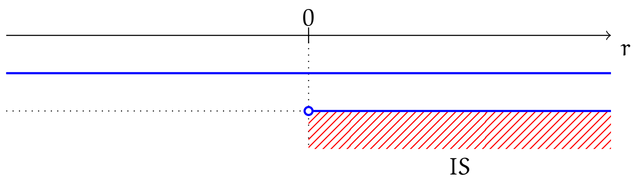
$$\begin{cases} 2 \cdot (x+1) + (-2)^2 \cdot x > 3 \cdot (2x-3) \\ \dfrac{(x-3)^2}{4} - \dfrac{(2x-1)^2}{16} < \dfrac{35}{16} \end{cases}.$$

Risolviamo separatamente le due disequazioni:

$$D_1 : 2x + 2 + 4x > 6x - 9 \Rightarrow \ 0x > -11 \to \text{I. S.}_1 = \mathbb{R},$$

$$D_2 : 4x^2 + 36 - 24x - 4x^2 - 1 + 4x - 35 < 0 \Rightarrow -20x < 0 \Rightarrow x > 0 \to \text{I. S.}_2 = \{x \in \mathbb{R}/x > 0\}.$$

Determiniamo $\text{I. S.} = \text{I. S.}_1 \cap \text{I. S.}_2$.



$$\text{I. S.} = \{x \in \mathbb{R}/x > 0\}.$$

Esempio 21.19. Risolvere il seguente sistema di disequazioni.

$$\begin{cases} (x-2) \cdot (x+3) \geqslant x + (x-1) \cdot (x+1) \\ (x-1)^3 \leqslant x^2 \cdot (x-3) + 2\left(-\dfrac{1}{2}x + 1\right) \end{cases}.$$

Risolviamo separatamente le disequazioni:

$$D_1 : x^2 - 2x + 3x - 6 > x + x^2 - 1 \Rightarrow \ 0x \geqslant \ 5 \to \text{I. S.}_1 = \emptyset.$$

Poiché la prima equazione non ha soluzioni non avrà soluzioni nemmeno il sistema. È superfluo quindi risolvere la seconda disequazione. La risolviamo per esercizio.

$$D_2 : x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \leqslant x^3 - 3x^2 - x + 2 \Rightarrow \ 4x \leqslant \ 3 \Rightarrow x \leqslant \frac{3}{4} \to \text{I. S.}_2 = \left\{x \in \mathbb{R}/x \leqslant \frac{3}{4}\right\}.$$

$$\text{I. S.} = \text{I. S.}_1 \cap \text{I. S.}_2 = \emptyset \cap \text{I. S.}_2 = \emptyset.$$

Esempio 21.20. Risolvere il seguente sistema di disequazioni.

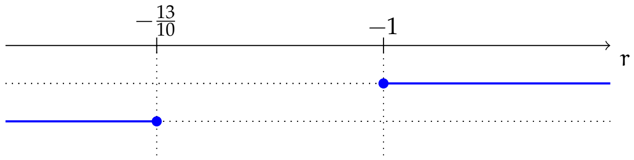
$$\begin{cases} \dfrac{1}{3} \cdot \left(x - \dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{2} \cdot \left(x - \dfrac{1}{3}\right) \leqslant \dfrac{1}{6} \\ x + 1 \leqslant \dfrac{2x-1}{3} + \dfrac{1-2x}{4} \end{cases}.$$

Risolviamo separatamente le due disequazioni:

$$D_1: \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x \leqslant \frac{1}{6} \Rightarrow 2x - 3x \leqslant 1 \Rightarrow x \geqslant -1 \to \mathrm{I.S.}_1 = \{x \in \mathbb{R} / x \geqslant -1\},$$

$$D_2: 12x + 12 \leqslant 8x - 4 + 3 - 6x \Rightarrow 10x \leqslant -13 \Rightarrow x \leqslant -\frac{13}{10} \to \mathrm{I.S.}_2 = \left\{x \in \mathbb{R} / x \leqslant -\frac{13}{10}\right\}.$$

Rappresentiamo le soluzioni e determiniamo $\mathrm{I.S.} = \mathrm{I.S.}_1 \cap \mathrm{I.S.}_2$.



Il grafico mette in evidenza che i due insiemi soluzione non hanno elementi in comune, pertanto $\mathrm{I.S.} = \emptyset$.

21.33, 21.34, 21.34, 21.35, 21.36, 21.37, 21.38, 21.39, 21.40, 21.41

21.4 Disequazioni polinomiali di grado superiore al primo

Problema 21.21. Determinare i valori di x che rendono il polinomio $p = (3x-7)(2-x)$ positivo.

Il problema chiede di determinare l'insieme delle soluzione della disequazione di secondo grado $(3x-7)(2-x) > 0$. La disequazione si presenta nella forma di prodotto di due fattori di primo grado e proprio la sua forma di prodotto ci faciliterà la risposta al quesito.

Sappiamo che nell'insieme dei numeri relativi il segno del prodotto di due fattori segue la regola dei segni visualizzata dalla tabella a lato: "il segno di un prodotto è positivo se i due fattori sono concordi". Questo fatto si traduce nei due metodi risolutivi del problema proposto.

$\times$	$+$	$-$
$+$	$+$	$-$
$-$	$-$	$+$

Soluzione **Metodo I**: impostiamo due sistemi di disequazioni, formalizzando l'osservazione precedente:

$$\begin{cases} 3x - 7 > 0 \\ 2 - x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 3x - 7 < 0 \\ 2 - x < 0 \end{cases}.$$

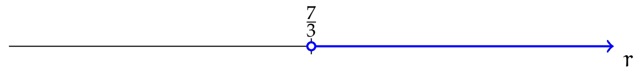
Risolvendo i due sistemi e unendo le loro soluzioni otteniamo l'insieme delle soluzioni della disequazione originaria: $\mathrm{I.S.} = \mathrm{I.S.}_1 \cup \mathrm{I.S.}_2$.

$$\mathrm{I.S.}_1: \begin{cases} 3x - 7 > 0 \\ 2 - x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \dfrac{7}{3} \\ x < 2 \end{cases} \to \mathrm{I.S.}_1 = \emptyset,$$

$$\mathrm{I.S.}_2: \begin{cases} 3x - 7 < 0 \\ 2 - x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \dfrac{7}{3} \\ x > 2 \end{cases} \to \mathrm{I.S.}_2 = \left\{x \in \mathbb{R} / 2 < x < \frac{7}{3}\right\}.$$

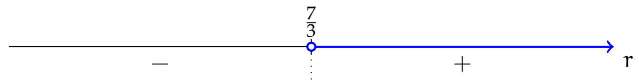
Quindi $\text{I. S.} = \text{I. S.}_1 \cup \text{I. S.}_2 = \left\{x \in \mathbb{R} / 2 < x < \frac{7}{3}\right\}$.

Metodo II: Torniamo alla disequazione iniziale $(3x-7)(2-x) > 0$ e applichiamo un altro metodo. Osserviamo che quando risolviamo la disequazione $3x-7>0$ determiniamo l'insieme dei valori che attribuiti alla variabile rendono il polinomio $p = 3x-7$ positivo, precisamente sono i valori $x > \frac{7}{3}$ Rappresentiamo l' I. S. con una semiretta in grassetto come in figura:



In realtà, nel grafico sono contenute tutte le informazioni sul segno del polinomio:

- la semiretta in grassetto rappresenta i valori che rendono il polinomio positivo;
- il valore $x = \frac{7}{3}$ è quello che annulla il polinomio;
- la semiretta non in grassetto rappresenta i valori che rendono il polinomio negativo.



♦

✍ *Esercizi proposti:* 21.42, 21.43

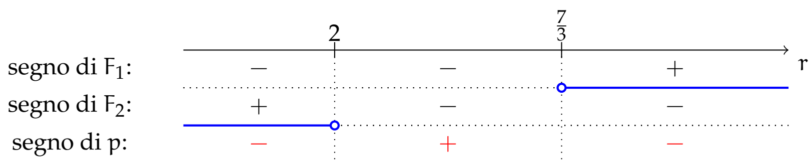
Esempio 21.22. $(3x-7)\cdot(2-x) > 0$.

La disequazione equivale a determinare i valori che attribuiti alla variabile x rendono positivo il polinomio $p = (3x-7)\cdot(2-x)$.

Studiamo separatamente il segno dei due fattori:

$$F_1 : 3x-7>0 \Rightarrow x > \frac{7}{3}, \quad F_2 : 2-x>0 \Rightarrow x<2.$$

Per risolvere la disequazione iniziale ci è di particolare aiuto un grafico che sintetizzi la situazione.



Applicando poi la regola dei segni otteniamo il segno del polinomio $p = (3x-7)\cdot(2-x)$.

Ricordiamo che la disequazione che stiamo risolvendo $(3x-7)\cdot(2-x) > 0$ è verificata quando il polinomio $p = (3x-7)\cdot(2-x)$ è positivo, cioè nell'intervallo in cui abbiamo ottenuto il segno "+". Possiamo concludere $\text{I. S.} = \left\{x \in \mathbb{R}/2 < x < \frac{7}{3}\right\}$.

Esempio 21.23. $(x-3)\cdot(2x-9)\cdot(4-5x) > 0$.

Determiniamo il segno di ciascuno dei suoi tre fattori:

$$F_1 : x-3>0 \Rightarrow x>3; \quad F_2 : 2x-9>0 \Rightarrow x > \frac{9}{2}; \quad F_3 : 4-5x>0 \Rightarrow x < \frac{4}{5}.$$

Costruiamo la tabella dei segni:

	$\frac{4}{5}$		3		$\frac{9}{2}$		r
segno di F_1:	$-$		$-$		$+$	$+$	
segno di F_2:	$-$		$-$		$-$	$+$	
segno di F_3:	$+$		$-$		$-$	$-$	
segno di p:	$+$		$-$		$+$	$-$	

La disequazione è verificata negli intervalli dove è presente il segno "+".

$$\text{I. S.} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x < \frac{4}{5} \vee 3 < x < \frac{9}{2} \right\}.$$

Esempio 21.24. $4x^3 + 4x^2 \leqslant 1 + x$. La disequazione è di terzo grado; trasportiamo al primo membro tutti i monomi:

$$4x^3 + 4x^2 - 1 - x \leqslant 0.$$

Possiamo risolverla se riusciamo a scomporre in fattori di primo grado il polinomio al primo membro:

$$4x^3 + 4x^2 - 1 - x = 4x^2(x+1) - (x+1) = (x+1)(4x^2 - 1) \Rightarrow (x+1)(2x-1)(2x+1) \leqslant 0.$$

Studiamo ora il segno di ciascun fattore, tenendo conto che sono richiesti anche i valori che annullano ogni singolo fattore (legge di annullamento del prodotto):

$$F_1 : x + 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -1; \quad F_2 : 2x - 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant \frac{1}{2}, \quad F_3 : 2x + 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -\frac{1}{2}.$$

Possiamo ora costruire la tabella dei segni. Ricordiamo che la disequazione di partenza $4x^3 + 4x^2 \leqslant 1 + x$ è verificata dove compare il segno "$-$":

		-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		r
segno di F_1:	$-$		$+$		$+$		$+$	
segno di F_2:	$-$		$-$		$-$		$+$	
segno di F_3:	$-$		$-$		$+$		$+$	
segno di p:	$-$		$+$		$-$		$+$	

$$\text{I. S.} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \leqslant -1 \text{ oppure } -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \right\}.$$

Procedura 21.4. *Determinare l'*I. S. *Di una disequazione polinomiale di grado superiore al primo:*

a) *scrivere la disequazione nella forma* $p \leqslant 0$, $p \geqslant 0$, $p < 0$, $p > 0$;
b) *scomporre in fattori irriducibili il polinomio;*
c) *determinare il segno di ciascun fattore, ponendolo sempre maggiore di zero, o maggiore uguale a zero a seconda della richiesta del problema;*
d) *costruire la tabella dei segni, segnando con un punto ingrossato gli zeri del polinomio;*
e) *determinare gli intervalli in cui il polinomio assume il segno richiesto.*

✍ *Esercizi proposti:* 21.44, 21.45, 21.46, 21.47, 21.48, 21.49, 21.50, 21.51, 21.52, 21.53

21.5 Disequazioni frazionarie

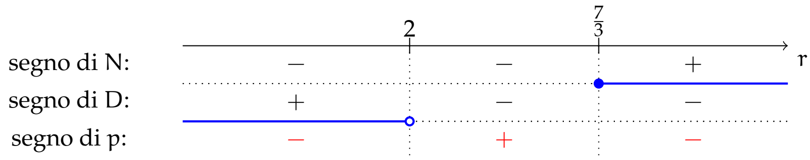
Un'espressione contenente operazioni tra frazioni algebriche ha come risultato una frazione algebrica. Con la condizione di esistenza che il denominatore della frazione sia diverso da zero la ricerca del segno di una frazione algebrica viene effettuata con la stessa procedura seguita per il prodotto di due o più fattori.

Esempio 21.25. $p = \dfrac{3x-7}{2-x} \geqslant 0$.

Poniamo innanzi tutto la C. E. : $2-x \neq 0$ cioè $x \neq 2$ e procediamo studiando il segno del numeratore e del denominatore. Terremo conto della C. E. ponendo il denominatore semplicemente maggiore di zero e non maggiore uguale.

$$N \geqslant 0 \Rightarrow 3x-7 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant \frac{7}{3},$$

$$D > 0 \Rightarrow 2-x > 0 \Rightarrow x < 2.$$



Analogamente a quanto fatto per il prodotto, dalla tabella dei segni otteniamo

$$\text{I. S.} = \left\{x \in \mathbb{R} / 2 < x \leqslant \frac{7}{3}\right\}$$

in cui vediamo già compresa la C. E. che inizialmente avevamo posto.

Procedura 21.5. *Procedura per determinare* I. S. *di una disequazione frazionaria:*

a) *applicare il primo principio e trasportare tutti i termini al primo membro;*
b) *eseguire i calcoli dell'espressione al primo membro per arrivare a una disequazione nella forma:* $\dfrac{N(x)}{D(x)} > 0$ *oppure* $\dfrac{N(x)}{D(x)} \geqslant 0$ *oppure* $\dfrac{N(x)}{D(x)} < 0$ *oppure* $\dfrac{N(x)}{D(x)} \leqslant 0$;
c) *studiare il segno del numeratore e del denominatore, ponendo* $N(x) > 0$ *(oppure* $N(x) \geqslant 0$ *a secondo della richiesta) e* $D(x) > 0$;
d) *costruire la tabella dei segni, segnando con un punto in grassetto gli zeri del numeratore;*
e) *determinare gli intervalli in cui il polinomio assume il segno richiesto.*

Esempio 21.26. $\dfrac{x-1}{2x+2} + \dfrac{2x+1}{4x-2} > \dfrac{4x^2(2x+1)+1}{8x^3+8x^2-2x-2}$.

Trasportiamo tutti i termini al primo membro $\dfrac{x-1}{2x+2} + \dfrac{2x+1}{4x-2} - \dfrac{4x^2(2x+1)+1}{8x^3+8x^2-2x-2} > 0$.

Scomponiamo in fattori i denominatori, determiniamo il minimo comune multiplo e sommiamo le frazioni per arrivare alla forma $\frac{N(x)}{D(x)} > 0$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{x-1}{2(x+1)}+\frac{2x+1}{2(2x-1)}-\frac{4x^2(2x+1)+1}{2(x+1)(2x-1)(2x+1)}>0\\
\Rightarrow&\frac{(x-1)(2x-1)(2x+1)+(2x+1)(2x+1)(x+1)-4x^2(2x+1)+1}{2(x+1)(2x-1)(2x+1)}>0\\
\Rightarrow&\frac{4x+1}{2(x+1)(2x-1)(2x+1)}>0. \qquad (21.1)
\end{aligned}
$$

Studiamo separatamente il segno di tutti i fattori che compaiono nella frazione, sia quelli al numeratore sia quelli al denominatore e costruiamo la tabella dei segni:

$$N>0 \Rightarrow\ 4x+1>0 \Rightarrow x>-\frac{1}{4},$$

$$D>0 \Rightarrow \begin{cases} x+1>0 \Rightarrow x>-1\\ 2x-1>0 \Rightarrow x>\frac{1}{2}\\ 2x+1>0 \Rightarrow x>-\frac{1}{2}\end{cases}.$$

	$x<-1$	$-1<x<-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}$	$x>\frac{1}{2}$
segno di N:	−	−	−	+	+
D: segno di d_1:	−	+	+	+	+
D: segno di d_2:	−	−	−	−	+
D: segno di d_3:	−	−	+	+	+
segno di f:	+	−	+	−	+

Non abbiamo posto le C. E. in quanto già rispettate dalle disequazioni del denominatore. Prendiamo gli intervalli in cui il segno della frazione è positivo come richiesto dalla disequazione 21.1:

$$\text{I.S.}=\left\{x\in\mathbb{R}/x<-1\vee-\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{4}\vee x>\frac{1}{2}\right\}.$$

Esempio 21.27. $\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2x-3}{x-1}+\frac{10x-3}{6x-6}\leqslant\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2+2}{3x-2}+\frac{1}{3(x-1)(3x-2)}$.

Trasportiamo tutti i termini al primo membro:

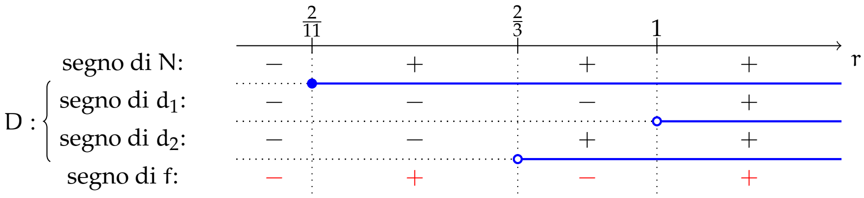
$$\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2x-3}{x-1}+\frac{10x-3}{6x-6}-\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2+2}{3x-2}-\frac{1}{3(x-1)(3x-2)}\leqslant\ 0.$$

Eseguiamo le operazioni per semplificare la frazione e ridurla alla forma $\frac{N(x)}{D(x)}\leqslant\ 0$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{x}{2}-\frac{4x-6}{3(x-1)}+\frac{10x-3}{6(x-1)}-\frac{3x^2+6}{2(3x-2)}-\frac{1}{3(x-1)(3x-2)}\leqslant\ 0\\
\Rightarrow&\frac{3x(x-1)(3x-2)-2(4x-6)(3x-2)+(10x-3)(3x-2)-3(3x^2+6)(x-1)-2}{6(x-1)(3x-2)}\leqslant\ 0\\
\Rightarrow&\frac{11x-2}{6(x-1)(3x-2)}\leqslant\ 0. \qquad (21.2)
\end{aligned}
$$

Studiamo il segno del numeratore e dei fattori del denominatore:

$$N \geqslant 0 \Rightarrow 11x - 2 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant \frac{2}{11},$$
$$D > 0 \Rightarrow \begin{cases} d_1 > 0 \Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ d_2 > 0 \Rightarrow 3x - 2 > 0 \Rightarrow x > \frac{2}{3} \end{cases} .$$



Non abbiamo posto le C. E. in quanto già rispettate dalle disequazioni del denominatore. Prendiamo gli intervalli in cui il segno della frazione è positivo o nullo come dalla disequazione 21.2:

$$\text{I. S.} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \leqslant \frac{2}{11} \vee \frac{2}{3} < x < 1 \right\}.$$

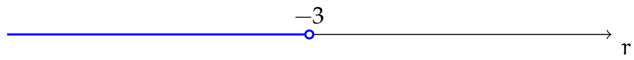
✍ *Esercizi proposti:* 21.54, 21.55, 21.56, 21.57, 21.58, 21.59, 21.60, 21.61, 21.62, 21.63, 21.64, 21.65, 21.66, 21.67, 21.68, 21.69

21.6 Esercizi

21.6.1 Esercizi dei singoli paragrafi

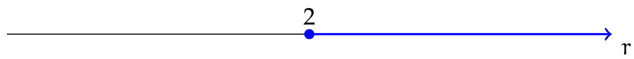
21.1 - Intervalli sulla retta reale

21.1. Determina la scrittura corretta per il seguente grafico.



$\boxed{A}$ $x < -3$ $\boxed{B}$ $x > -3$ $\boxed{C}$ $x \leqslant -3$ $\boxed{D}$ $x \leqslant -3$

21.2. Determina la scrittura corretta per il seguente grafico.



$\boxed{A}$ $x < 2$ $\boxed{B}$ $x > 2$ $\boxed{C}$ $x \geqslant 2$ $\boxed{D}$ $x \leqslant 2$

21.3. Determina la scrittura corretta per il seguente grafico.

$\boxed{A}$ $x < +2$ $\boxed{B}$ $x > -2$ $\boxed{C}$ $-2 \leqslant x \leqslant 2$ $\boxed{D}$ $-2 < x < 2$

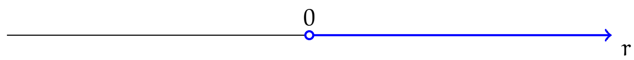
21.4. Determina la scrittura corretta per il seguente grafico.

$\boxed{A}$ $x < 5; x > 3$ $\boxed{B}$ $3 > x \geqslant 5$ $\boxed{C}$ $3 \leqslant x < 5$ $\boxed{D}$ $3 < x \leqslant 5$

21.5. Determina la scrittura corretta per il seguente grafico.

$\boxed{A}$ $\mathbb{R}^- - \{-1\}$ $\boxed{B}$ $-1 \geqslant x \geqslant 0$ $\boxed{C}$ $-1 \leqslant x \leqslant 0$ $\boxed{D}$ $0 < x < -1$

21.6. Determina la scrittura corretta per il seguente grafico.



$\boxed{A}$ $x > 0$ $\boxed{B}$ $x > -\infty$ $\boxed{C}$ $x \leqslant 0$ $\boxed{D}$ $0 < x \leqslant 0$

21.7. Determina la scrittura corretta per il seguente grafico.

$\boxed{A}$ $x \geqslant 1; x < 2$ $\boxed{B}$ $1 \leqslant x < 2$ $\boxed{C}$ $x \leqslant 1$ e $x > 2$ $\boxed{D}$ $2 \geqslant 1$

21.2 - Disequazioni numeriche

21.8. Completa la seguente tabella indicando con una crocetta il tipo di disuguaglianza o disequazione:

Proposizione	Disuguaglianza Vera	Disuguaglianza Falsa	Disequazione
Il doppio di un numero reale è minore del suo triplo aumentato di 1:			
La somma del quadrato di 4 con 3 è maggiore della somma del quadrato di 3 con 4:			
Il quadrato della somma di 4 con 3 è minore o uguale a 49:			
In $\mathbb{Z}$: $(5+8)-(2)^4 > 0$:			
$-x^2 > 0$:			
$(x+6)^2 \cdot (1-9) \cdot (x+3-9) < 0$:			

21.9. Rappresenta graficamente l'insieme delle soluzioni delle seguenti disequazioni.

a) $x-2>0$;
b) $x+5>0$;
c) $x-4>0$;
d) $x-5 \geqslant 0$;
e) $x+3 \leqslant 0$;
f) $x>0$;
g) $x \geqslant 0$;
h) $-1 \leqslant x$;
i) $3>x$.

21.10 (*). Trova l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni.

a) $3-x>x$;
b) $2x>3$;
c) $3x \leqslant 4$;
d) $5x \geqslant -4$;
e) $x^2+x^4+10>0$;
f) $x^2+x^4+100<0$;
g) $-x+3>0$;
h) $-x-3 \leqslant 0$.

21.11 (*). Trova l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni.

a) $3+2x \geqslant 3x+2$;
b) $5x-4 \geqslant 6x-4$;
c) $-3x+2 \geqslant -x-8$;
d) $4x+4 \geqslant 2(2x+8)$;
e) $4x+4 \geqslant 2(2x+1)$;
f) $4x+4 \geqslant 2(2x+2)$;
g) $4x+4<2(2x+3)$;
h) $4x+4>2(2x+2)$.

21.12 (*). Trova l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni.

a) $4x+4<2(2x+2)$;
b) $x^2+4>3$;
c) $x^2+3<-1$;
d) $-3x-8 \geqslant 2$;
e) $-3x>0$;
f) $-3x \leqslant 0$;
g) $-3x+5 \geqslant 0$;
h) $-3x-8 \geqslant 0$.

21.13 (*). Trova l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni.

a) $4x + 4 \geqslant 3\left(x + \frac{4}{3}\right)$;

b) $-\dfrac{4}{3}x \geqslant 1$;

c) $-\dfrac{4}{3}x \geqslant 0$;

d) $-\dfrac{4}{3}x \geqslant \dfrac{2}{3}$;

e) $-\dfrac{2}{3}x \leqslant \dfrac{1}{9}$;

f) $-\dfrac{2}{3}x \leqslant 9$;

g) $\dfrac{x+5}{2} > -\dfrac{1}{5}$;

h) $x^2 + 1 \geqslant \dfrac{x^2+4x-1}{2} + 3x$.

21.14 (*). Trova l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni.

a) $x + \dfrac{1}{2} < \dfrac{(x+3)}{3} - 1$;

b) $\dfrac{(x+5)}{3} + 3 + 2\dfrac{(x-1)}{3} \leqslant x + 4$;

c) $(x+3)^2 \geqslant (x-2)(x+2)$;

d) $\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{4} < 5\left(\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{2}\right)$;

e) $1 - (2x-4)^2 > -x \cdot (4x+1) + 2$;

f) $(x+1)^2 \geqslant (x-1)^2$;

g) $\dfrac{3}{2} \cdot (x+1) - \dfrac{1}{3} \cdot (1-x) < x + 2$;

h) $\dfrac{x+0,25}{2} < 1,75 + 0,25x$.

21.15 (*). Trova l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni.

a) $\dfrac{1}{2}\left(3x - \dfrac{1}{3}\right) - \dfrac{1}{3}(1+x)(1-x) + 3\left(\dfrac{1}{3}x - 1\right)^2 \geqslant 0$;

b) $3\dfrac{(x+1)}{2} - \dfrac{x+1}{3} - \dfrac{1}{9} > -5x + \dfrac{1}{2}$;

c) $\left(\dfrac{x}{2} - 1\right)\left(1 + \dfrac{x}{2}\right) + x - \dfrac{1}{2} > x\dfrac{(x-1)}{4} + \dfrac{5x-6}{4}$;

d) $\dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{3}\left(x + \dfrac{1}{3}\right) > \dfrac{x - \frac{1}{2}}{3} + \dfrac{x - \frac{1}{3}}{2}$.

21.16 (*). Sommando un numero con il doppio del suo successivo si deve ottenere un numero maggiore di 17. Quali numeri verificano questa condizione?

21.17 (*). Sommando due numeri pari consecutivi si deve ottenere un numero che non supera la metà del numero più grande. Quali valori può assumere il primo numero pari?

21.18 (*). Il noleggio di una automobile costa € 55,00 al giorno, più € 0,085 per ogni chilometro percorso. Qual è il massimo di chilometri da percorrere giornalmente, per spendere non più di € 80,00 al giorno?

21.19. In una fabbrica, per produrre una certa merce, si ha una spesa fissa settimanale di € 413, ed un costo di produzione di € 2,00 per ogni kg di merce. Sapendo che la merce viene venduta a € 4,00 al kg, determinare la quantità minima da produrre alla settimana perché l'impresa non sia in perdita.

21.20 (*). Per telefonare in alcuni paesi esteri, una compagnia telefonica propone due alternative di contratto:

a) € 1,20 per il primo minuto di conversazione, € 0,90 per ogni minuto successivo;
b) € 1,00 per ogni minuto di conversazione.

Quanti minuti deve durare una telefonata perché convenga la seconda alternativa?

21.21 (*). Il prezzo di un abbonamento mensile ferroviario è di € 125,00. Sapendo che il prezzo di un singolo biglietto sulla stessa tratta è di € 9,50, trovare il numero minimo di viaggi per cui l'abbonamento mensile risulta conveniente, e rappresentare grafica-mente la soluzione.

21.22. Al circolo tennis i soci pagano € 12 a ora di gioco, i non soci pagano € 15. Sapendo che la tessera annuale costa € 150, dopo quante partite all'anno conviene fare la tessera di socio?

21.23 (*). In montagna l'abbonamento per due settimane allo skipass costa € 220 mentre il biglietto giornaliero costa € 20. Andando a sciare ogni giorno, dopo quanti giorni conviene fare l'abbonamento?

21.24 (*). Marco ha preso alle prime tre prove di matematica i seguenti voti: 5; 5,5; 4,5. Quanto deve prendere alla quarta e ultima prova per avere almeno 6 di media?

21.25. Per produrre un tipo di frullatore un'azienda ha dei costi fissi per € 12 000 a settimana e riesce a produrre 850 frullatori a settimana, ognuno dei quali ha un costo di produzione pari a € 34. L'azienda concorrente riesce a vendere un frullatore analogo a € 79. A quanto devono essere venduti i frullatori in modo che l'azienda abbia un utile e che il prezzo di vendita non sia superiore a quello del prodotto concorrente?

21.26 (*). Per noleggiare un'auto una compagnia propone un'auto di tipo citycar al costo di € 0,20 per km percorso e una quota fissa giornaliera di € 15,00, un'auto di tipo economy al costo di € 0,15 per km e una quota fissa giornaliera di € 20,00. Dovendo noleggiare l'auto per 3 giorni quanti km occorre fare perché sia più conveniente l'auto di tipo economy?

21.27. Alle 9.00 di mattina sono in autostrada e devo raggiungere una città che dista 740 km entro le 17.00 poiché ho un appuntamento di lavoro. Prevedendo una sosta di mezzora per mangiare un panino, a quale velocità devo viaggiare per arrivare in orario?

21.28 (*). Quanto deve essere lungo il lato di un triangolo equilatero il cui perimetro deve superare di 900 cm il perimetro di un triangolo equilatero che ha il lato di 10 cm?

21.29 (*). I lati di un triangolo sono tali che il secondo è doppio del primo e il terzo è più lungo del secondo di 3 cm. Se il perimetro deve essere compreso tra 10 cm e 20 cm, tra quali valori può variare il lato più piccolo?

21.30 (*). In un triangolo isoscele l'angolo alla base deve essere minore della metà dell'angolo al vertice. Tra quali valori deve essere compresa la misura dell'angolo alla base?

21.31 (*). Un trapezio rettangolo l'altezza che è il triplo della base minore, mentre la base maggiore è 5 volte la base minore. Se il perimetro del trapezio non deve superare i 100 m, quali valori può assumere la lunghezza dell'altezza del trapezio?

21.32 (*). Un rettangolo ha le dimensioni una doppia dell'altra. Si sa che il perimetro non deve superare 600 m e che l'area non deve essere inferiore a 200 m^2. Tra quali valori possono variare le dimensioni del rettangolo?

21.3 - Sistemi di disequazioni

21.33. Sulla retta reale rappresenta l'insieme soluzione S_1 dell'equazione:

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\cdot(5x+3)=2+\frac{2}{3}\cdot(x+1)$$

e l'insieme soluzione S_2 della disequazione:

$$\frac{1}{2}-2\cdot\left(\frac{1-x}{4}\right)\geqslant 3-\frac{6-2x}{3}-\frac{x}{2}.$$

È vero che $S_1 \subset S_2$?

21.34 (*). Determina i numeri reali che verificano il sistema: $\begin{cases} x^2 \leqslant 0 \\ 2-3x \geqslant 0 \end{cases}$.

21.35. L'insieme soluzione del sistema: $\begin{cases} (x+3)^3-(x+3)\cdot(9x-2)>x^3+27 \\ \dfrac{x+5}{3}+3+\dfrac{2\cdot(x-1)}{3}<x+1 \end{cases}$ è:

- $\boxed{\text{A}}$ $\{x \in \mathbb{R} / x > 3\}$
- $\boxed{\text{B}}$ $\{x \in \mathbb{R} / x > -3\}$
- $\boxed{\text{C}}$ $\{x \in \mathbb{R} / x < -3\}$
- $\boxed{\text{D}}$ $\text{I. S.} = \emptyset$
- $\boxed{\text{E}}$ $\{x \in \mathbb{R} / x < 3\}$

21.36. Attribuire il valore di verità alle seguenti proposizioni:

a) il quadrato di un numero reale è sempre positivo;
b) l'insieme complementare di $A = \{x \in \mathbb{R}/x > -8\}$ è $B = \{x \in \mathbb{R}/x < -8\}$;
c) il monomio $-6x^3y^2$ assume valore positivo per tutte le coppie dell'insieme $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$;
d) nell'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi relativi il sistema $\begin{cases} x+1>0 \\ 8x<0 \end{cases}$ non ha soluzione;
e) l'intervallo $\left[-1,-\frac{1}{2}\right)$ rappresenta l'I. S. del sistema $\begin{cases} 1+2x<0 \\ \dfrac{x+3}{2}\leqslant x+1 \end{cases}$.

21.37 (*). Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni.

a) $\begin{cases} 3-x>x \\ 2x>3 \end{cases}$;
b) $\begin{cases} 3x\leqslant 4 \\ 5x\geqslant -4 \end{cases}$;
c) $\begin{cases} 2x>3 \\ 3x\leqslant 4 \end{cases}$;
d) $\begin{cases} 3x-5<2 \\ x+7<-2x \end{cases}$.

21.38 (*). Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni.

a) $\begin{cases} 3-x\geqslant x-3 \\ -x+3\geqslant 0 \end{cases}$;
b) $\begin{cases} -x-3\leqslant 3 \\ 3+2x\geqslant 3x+2 \end{cases}$;
c) $\begin{cases} 2x-1>2x \\ 3x+3\leqslant 3 \end{cases}$;
d) $\begin{cases} 2x+2<2x+3 \\ 2(x+3)>2x+5 \end{cases}$.

21.39 (*). Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni.

a) $\begin{cases} -3x>0 \\ -3x+5\geqslant 0 \\ -3x\geqslant -2x \end{cases}$;
b) $\begin{cases} -\dfrac{4}{3}x\geqslant\dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{2}{3}x\leqslant\dfrac{1}{9} \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 3+2x > 3x+2 \\ 5x-4 \leqslant 6x-4 \\ -3x+2 \geqslant -x-8 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 4x+4 \geqslant 3\cdot\left(x+\frac{4}{3}\right) \\ 4x+4 \geqslant 2\cdot(2x+2) \end{cases}$.

21.40 (*). Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni.

a) $\begin{cases} 3(x-1) < 2(x+1) \\ x-\frac{1}{2}+\frac{x+1}{2} > 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x+\frac{1}{2} < \frac{1}{3}(x+3)-1 \\ (x+3)^2 \geqslant (x-2)(x+2) \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 16(x+1)-2+(x-3)^2 \leqslant (x+5)^2 \\ \frac{x+5}{3}+3+2\cdot\frac{x-1}{3} \leqslant x+4 \end{cases}$; d) $\begin{cases} \frac{2x+3}{3} > x-1 \\ \frac{x-4}{5} < \frac{2x+1}{3} \end{cases}$.

21.41 (*). Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni.

a) $\begin{cases} 2\left(x-\frac{1}{3}\right)+x > 3x-2 \\ \frac{x}{3}-\frac{1}{2} \geqslant \frac{x}{4}-\frac{x}{6} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \frac{3}{2}x+\frac{1}{4} < 5\cdot\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right) \\ x^2-2x+1 \geqslant 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 3\left(x-\frac{4}{3}\right)+\frac{2-x}{3}+x-\frac{x-1}{3} > 0 \\ \left[1-\frac{1}{6}(2x+1)\right]+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 < (x+1)^2+\frac{1}{3}(1+2x) \end{cases}$;

d) $\begin{cases} \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) > \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \\ 2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right) < \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \end{cases}$.

21.4 - Disequazioni polinomiali di grado superiore al primo

21.42. Mediante il metodo 1 del problema 21.21 risolvi le seguenti disequazioni.

a) $(x+3)\cdot\left(\frac{1}{5}x+\frac{3}{2}\right) < 0$ e $\left(-\frac{6}{11}+2x\right)\cdot\left(-x+\frac{9}{2}\right)$;
b) $\left(x+\frac{3}{2}\right)\cdot\left(5x+\frac{1}{5}\right) < 0$ e $\left(-\frac{1}{10}x+2\right)\cdot(-3x+9) \geqslant 0$.

21.43. Il metodo 1 del problema 21.21 si complica se il prodotto ha più di due fattori. Prova infatti ad applicarlo alla seguente disequazione: $(x-3)\cdot(2x-9)\cdot(4-5x) > 0$.

21.44 (*). Trovare l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni.

a) $(x+2)(3-x) \leqslant 0$; c) $(3x+2)(2-3x) < 0$;
b) $x(x-2) > 0$; d) $-3x(2-x)(3-x) \geqslant 0$.

21.45 (*). Trovare l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni.

a) $(x+1)(1-x)\left(\frac{1}{2}x-2\right) \geqslant 0$;
b) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) < 0$;
c) $x^2-16 \leqslant 0$;
d) $4x^2-2x < 0$.

21.46 (*). Trovare l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni.

a) $x^4-81 \geqslant 0$;
b) $x^2+17x+16 \leqslant 0$;
c) $16-x^4 \leqslant 0$;
d) $x^2+2x+1 < 0$.

21.47 (*). Trovare l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni.

a) $x^2+6x+9 \geqslant 0$;
b) $x^2-5x+6 < 0$;
c) $x^2+3x-4 \leqslant 0$;
d) $x^3 > x^2$.

21.48 (*). Trovare l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni.

a) $x^2(2x^2-x)-(2x^2-x) < 0$;
b) $x^2-2x+1+x(x^2-2x+1) < 0$;
c) $x^3-2x^2-x+2 \geqslant 0$;
d) $x^4+4x^3+3x^2 > 0$.

21.49 (*). Trovare l'Insieme Soluzione delle seguenti disequazioni.

a) $(6x^2-24x)(x^2-6x+9) < 0$;
b) $(x^3-8)(x+2) < (2-x)(x^3+8)$;
c) $(2a+1)(a^4-2a^2+1) < 0$;
d) $x^3-6x^2+11 > 1-3x$;
e) $x^6-x^2+x^5-6x^4-x+6 < 0$.

21.50 (*). Determinare i valori che attribuiti alla variabile y rendono positivi entrambi i polinomi seguenti: $p_1 = y^4-13y^2+36$; $\quad p_2 = y^3-y^2-4y+4$.

21.51 (*). Determinare i valori di a che rendono $p = a^2+1$ minore di 5.

21.52 (*). Determina I. S. dei seguenti sistemi di disequazioni.

a) $\begin{cases} x^2-9 \geqslant 0 \\ x^2-7x+10 < 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^2+3x-18 \geqslant 0 \\ 12x^2+12x+3 > 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 16x^4-1 < 0 \\ 16x^3+8x^2 \geqslant 0 \end{cases}$.

21.53 (*). Determina I. S. dei seguenti sistemi di disequazioni.

a) $\begin{cases} 49a^2-1 \geqslant 0 \\ 9a^2 < 1 \\ 1-a > 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x^2-13x+6 < 0 \\ (2x^2-5x-3)(1-3x) > 0 \\ x^2+7 > 1 \end{cases}$.

21.54. Studia il segno della frazione

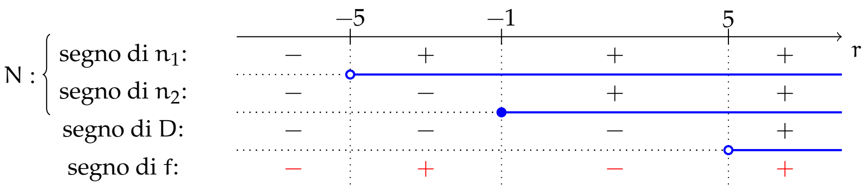
$$f = \frac{x^3+11x^2+35x+25}{x^2-25}.$$

Traccia di svolgimento. Scomponi in fattori numeratore e denominatore, otterrai

$$f = \frac{(x+5)^2(x+1)}{(x+5)(x-5)}.$$

Poniamo le C. E. e semplifica la frazione: ....

Studia separatamente il segno di tutti i fattori che vi compaiono. Verifica che la tabella dei segni sia:



La frazione assegnata, con la C. E. : $x \neq -5$ e $x \neq 5$, si annulla se $x = -1$; è positiva nell'insieme $A^+ = \{x \in \mathbb{R} / -5 < x < -1 \vee x > 5\}$, è negativa in $A^- = \{x \in \mathbb{R}/x < -5 \vee -1 < x < 5\}$.

21.55 (*). Determinate I. S. delle seguenti disequazioni fratte.

a) $\dfrac{x-2}{3x-9} > 0$;

b) $\dfrac{3x+12}{(x-4)(6-3x)} \geqslant 0$;

c) $\dfrac{x+2}{x-1} < 2$;

d) $\dfrac{4-3x}{6-5x} \geqslant -3$.

21.56 (*). Determinate I. S. delle seguenti disequazioni fratte.

a) $\dfrac{x+8}{x-2} \geqslant 0$;

b) $\dfrac{3x+4}{x^2+1} \geqslant 2$;

c) $\dfrac{4}{x+4} + \dfrac{2}{x-3} \leqslant 0$;

d) $\dfrac{7}{x+3} - \dfrac{6}{x+9} \geqslant 0$.

21.57 (*). Determinate I. S. delle seguenti disequazioni fratte.

a) $\dfrac{3}{2-x} \leqslant \dfrac{1}{x-4}$;

b) $\dfrac{2}{4x-16} < \dfrac{2-6x}{x^2-8x+16}$;

c) $\dfrac{x-3}{x^2-4x+4} - 1 < \dfrac{3x-3}{6-3x}$;

d) $\dfrac{2}{x-2} > \dfrac{2x-2}{(x-2)(x+3)}$.

21.58 (*). Determinate I. S. delle seguenti disequazioni fratte.

a) $\dfrac{5}{2x+6} \geqslant \dfrac{5x+4}{x^2+6x+9}$;

b) $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{1}{x^3+1} \leqslant 0$;

c) $\dfrac{(x+3)(10x-5)}{x-2} < 0$;

d) $\dfrac{4-3x}{x-2} < \dfrac{3x+1}{x-2}$.

21.59 (*). Determinate I. S. delle seguenti disequazioni fratte.

a) $\dfrac{5x-4}{3x-12} \geqslant \dfrac{x-4}{4-x}$;

b) $\dfrac{2-x}{5x-15} \leqslant \dfrac{5x-1}{2x-6}$;

c) $\dfrac{(3x-12)(6-x)}{(24-8x)(36-18x)} \leqslant 0$;

d) $\dfrac{(x-2)(5-2x)}{(5x-15)(24-6x)} \geqslant 0$.

21.60 (*). Determinate I. S. delle seguenti disequazioni fratte.

a) $\dfrac{(x-2)(x+4)(x+1)}{(x-1)(3x-9)(10-2x)} \leqslant 0$;

b) $\dfrac{(5-x)(3x+6)(x+3)}{(4-2x)(x-6)x} \leqslant 0$;

c) $\dfrac{(x-5)(3x-6)(x-3)}{(4-2x)(x+6)x} \leqslant 0$;

d) $\dfrac{(x-3)(x+2)(15+5x)}{x^2-5x+4} \geqslant 0$.

21.61 (*). Determinate I. S. delle seguenti disequazioni fratte.

a) $\dfrac{(x-4)^2(x+3)}{x^2+5x+6} \geqslant 0$;

b) $\dfrac{x}{1-x^2} > \dfrac{1}{2x+2} - \dfrac{2}{4x-4}$;

c) $\dfrac{3-x}{x-2} < \dfrac{x-1}{x+3} + \dfrac{2}{x^2+x-6}$;

d) $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x+1} \geqslant \dfrac{3}{2x+2}$.

21.62 (*). Determinate I. S. delle seguenti disequazioni fratte.

a) $\dfrac{3}{2x-1} \leqslant \dfrac{2x^2}{2x^2-x} - \dfrac{x+1}{x}$;

b) $\dfrac{2x^2}{2x^2-x} > 1$;

c) $\dfrac{2x}{2x-1} + \dfrac{x+2}{2x+1} > \dfrac{3}{2}$;

d) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12} \leqslant 1$.

21.63 (*). Determinate I. S. delle seguenti disequazioni fratte.

a) $\dfrac{\frac{2}{x+1}}{x^2-1} < 0$;

b) $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{4-x}{x+2} \geqslant \dfrac{2x+1}{x^2+3x+2}$;

c) $\dfrac{3}{2x^2-4x-6} - \dfrac{x-2}{3x+3} < \dfrac{x-1}{2x-6}$;

d) $\dfrac{1}{2-2x} \cdot \left(\dfrac{x(x-2)}{x-1} - \dfrac{3}{3-3x}\right) > -1$.

21.64 (*). Determinate I. S. delle seguenti disequazioni fratte.

a) $-\dfrac{2}{27-3x^2} - \dfrac{x+1}{2x-6} + \dfrac{3-2x}{6x-18} < -\dfrac{3}{x^2-9} + 4\dfrac{x-3}{18-2x^2}$;

b) $\dfrac{2}{x^2-3x+2} - \dfrac{x}{x-2} < \dfrac{x-1}{x-1} - \dfrac{1}{3x-x^2-2} + \dfrac{2-x}{4x-4}$;

c) $\dfrac{(x-2)(x+4)(x^2+5x+6)}{(x^2-9)(-4-7x^2)(x^2-6x+8)(x^2+4)} < 0$.

21.65. Dopo aver ridotto ai minimi termini la frazione $f = \dfrac{3x^4-2x^3+3x^2-2x}{6x^2-x-7}$, completa;

a) $f > 0$ per $x < -1$ oppure ....

b) $f = 0$ per ....

c) $f < 0$ per ....

21.66. Determinate il segno delle frazioni, dopo averle ridotte ai minimi termini.

$$f_1 = \frac{1-a^2}{2+3a}; \quad f_2 = \frac{a^3-5a^2-3+7a}{9-6a+a^2}; \quad f_3 = \frac{11m-m^2+26a}{(39-3m)(m^2+4m+4)}.$$

21.67 (*). Determinate I. S. delle seguenti disequazioni fratte.

a) $\begin{cases} \dfrac{2-x}{3x^2+x} \geqslant 0 \\ x^2-x-6 \geqslant 0 \\ x^2-4 \leqslant 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \dfrac{x^2-4x+4}{9-x^2} > 0 \\ x^2-3x \leqslant 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \dfrac{1}{x-2}+\dfrac{3}{x+2} < 0 \\ \dfrac{2-x}{5x-15} \leqslant \dfrac{5x-1}{2x-6} \end{cases}$;

d) $\begin{cases} \dfrac{4}{8-4x}-\dfrac{6}{2x-4} < 0 \\ \dfrac{x}{x-2}-\dfrac{6}{x^3-8} > 1 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} \left(1+\dfrac{2}{x-2}\right)\left(1-\dfrac{2}{x-2}\right) < \dfrac{x-4}{2-x} \\ \left(\dfrac{2-x}{x^2-6x+9}+\dfrac{2+x}{x^2-9}\right)\cdot\dfrac{x^3-27}{2x} > 0 \end{cases}$.

21.68 (*). Determinate I. S. delle seguenti disequazioni fratte.

a) $\begin{cases} \left(1-\dfrac{1}{x}\right)+3\left(\dfrac{2}{x}+1\right) > \dfrac{13}{2} \\ \dfrac{7+x}{2x} > \dfrac{2-x}{1-2x} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \dfrac{x^2-2x-3}{2x^2-x-1} \geqslant 0 \\ \dfrac{4x-1-3x^2}{x^2-4} \leqslant 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x^2-3x+2 \leqslant 0 \\ \dfrac{6}{2+x}-\dfrac{x+2}{x-2} > \dfrac{x^2}{4-x^2} \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x^2+1 \leqslant -2x \\ 3x-1 < 2\left(x-\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$.

21.69. Motivare la verità o la falsità delle seguenti proposizioni riferite alle frazioni.

$$f_1 = \frac{a^3-81a}{81-a^2}, \qquad f_3 = \frac{20a-50a^2-2}{4a-20a^2}, \qquad f_5 = \frac{1-4a^2}{2-8a+8a^2},$$

$$f_2 = \frac{7a^2+7}{3+3a^4+6a^2}, \qquad f_4 = \frac{a^4}{2a^4+a^2}, \qquad f_6 = \frac{2a^2+a^3+a}{2a^2-a^3-a}.$$

a) f_1 per qualunque valore positivo della variabile è negativa V F

b) f_2 è definita per qualunque valore attribuito alla variabile V F

c) f_3 è positiva nell'insieme I. S. $= \left\{a \in \mathbb{R} / a < 0 \vee a > \frac{1}{5}\right\}$ V F

d) f_4 è positiva per qualunque valore reale attribuito alla variabile V F

e) nell'intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, f_5 non si annulla $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
f) f_6 è negativa per qualunque valore dell'insieme $K = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

21.6.2 Risposte

21.10. a) $x < \frac{3}{2}$, b) $x > \frac{3}{2}$, c) $x \leqslant \frac{4}{3}$, d) $x \geqslant -\frac{4}{5}$, e) $\mathbb{R}$, f) $\emptyset$, g) $x < 3$, h) $x \geqslant -3$.

21.11. a) $x \leqslant 1$, b) $x \leqslant 0$, c) $x \leqslant 5$, d) $\emptyset$, e) $\mathbb{R}$, f) $\mathbb{R}$, g) $\mathbb{R}$, h) $\emptyset$.

21.12. a) $\emptyset$, b) $\mathbb{R}$, c) $\emptyset$, d) $x \leqslant -\frac{10}{3}$, e) $x < 0$, f) $x \geqslant 0$, g) $x \leqslant \frac{5}{3}$, h) $x \leqslant -\frac{8}{3}$.

21.13. a) $x \geqslant 0$, b) $x \leqslant -\frac{3}{4}$, c) $x \leqslant 0$, d) $x \leqslant -\frac{1}{2}$, e) $x \geqslant -\frac{1}{6}$, f) $x \geqslant -\frac{27}{2}$, g) $x > -\frac{27}{5}$, h) $\mathbb{R}$.

21.14. a) $x < -\frac{3}{4}$, b) $\mathbb{R}$, c) $x \geqslant -\frac{13}{6}$, d) $x > \frac{3}{2}$, e) $x > 1$, f) $x \geqslant 0$, g) $\{x \in \mathbb{R} / x < 1\} = (-\infty, 1)$, h) $x < \frac{13}{2}$.

21.15. a) $\mathbb{R}$, b) $x > -\frac{10}{111}$, c) $\emptyset$, d) $\mathbb{R}$.

21.16. $x > 5$.

21.17. $x \leqslant -2/3$.

21.18. Massimo 294 km.

21.20. Meno di 3 minuti.

21.21. 14

21.23. $x > 11$.

21.24. Almeno 9.

21.26. Più di 300 km.

21.28. $x > 310$ cm.

21.29. $\frac{7}{5}$ cm $< x < \frac{17}{5}$ cm.

21.30. $0° < \alpha < 45°$.

21.31. $h \leqslant \frac{150}{7}$ m.

21.32. Il lato minore tra 10 m e 100 m, il lato maggiore tra 20 m e 200 m.

21.34. $x = 0$.

21.37. a) $\emptyset$, b) $-\frac{4}{5} \leqslant x \leqslant \frac{4}{3}$, c) $\emptyset$, d) $x < -\frac{7}{3}$.

21.38. a) $x \leqslant 3$, b) $-6 \leqslant x \leqslant 1$, c) $\emptyset$, d) $\mathbb{R}$.

21.39. a) $x < 0$, b) $\emptyset$, c) $0 \leqslant x < 1$, d) $x \geqslant 0$.

21.40. a) $0 < x < 5$, b) $\mathbb{R}$, c) $-\frac{13}{6} \leqslant x < -\frac{3}{4}$, d) $-\frac{17}{7} < x < 6$.

21.41. a) $x \geqslant 2$, b) $x > \frac{3}{2}$, c) $x > \frac{9}{10}$, d) $x > \frac{1}{2}$.

21.44. a) $x \leqslant -2 \vee x \geqslant 3$, b) $x < 0 \vee x > 2$, c) $x < -\frac{2}{3} \vee x > \frac{2}{3}$, d) $x \geqslant 0 \vee 2 \leqslant x \leqslant 3$.

21.45. a) $x \leqslant -1 \vee 1 \leqslant x \leqslant 4$, b) $1 < x < 2 \vee 3 < x < 4$, c) $-4 \leqslant x \leqslant 4$, d) $0 < x < \frac{1}{2}$.

21.46. a) $x \leqslant -3 \vee x \geqslant 3$, b) $-16 \leqslant x \leqslant -1$, c) $x \leqslant -2 \vee x \geqslant 2$, d) $\emptyset$.

21.47. a) $\mathbb{R}$, b) $2 < x < 3$, c) $-4 \leqslant x \leqslant 1$, d) $x > 1$.

21.48. a) $-1 < x < 0 \vee \frac{1}{2} < x < 1$, b) $x < -1$, c) $-1 \leqslant x \leqslant 1 \vee x \geqslant 2$, d) $x < -3 \vee x > -1 \wedge x \neq 0$.

21.49. a) $0 < x < 4 \wedge x \neq 3$, b) $-2 < x < 2$, c) $a < -\frac{1}{2} \wedge a \neq -1$, d) $-1 < x < 2 \vee x > 5$, e) $-3 < x < -1 \vee 1 < x < 2$.

21.50. $-2 < y < 1 \vee y > 3$.

21.51. $-2 < a < 2$.

21.52. a) $3 \leqslant x < 5$, b) $x \leqslant -6 \vee x \geqslant 3$, c) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

21.53. a) $-\frac{1}{3} < a \leqslant -\frac{1}{7} \vee \frac{1}{7} \leqslant a < \frac{1}{3}$, b) $\frac{1}{2} < x < 3$.

21.55. a) $x < 2 \vee x > 3$, b) $x \leqslant -4 \vee 2 < x < 4$, c) $x < 1 \vee x > 4$, d) $x < \frac{6}{5} \vee x \geqslant \frac{11}{9}$.

21.56. a) $x \leqslant -8 \vee x > 2$, b) $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2$, c) $x < -4 \vee \frac{2}{3} \leqslant x < 3$, d) $-45 \leqslant x < -9 \vee x > -3$.

21.57. a) $2 < x \leqslant \frac{7}{2} \vee x > 4$, b) $x < \frac{8}{13}$, c) $x < 2 \vee 2 < x < \frac{5}{2}$, d) $x < -3 \vee x > 2$.

21.58. a) $x \leqslant \frac{7}{5} \wedge x \neq -3$, b) $-1 < x \leqslant 1$, c) $x < -3 \vee \frac{1}{2} < x < 2$, d) $x < \frac{1}{2} \vee x > 2$.

21.59. a) $x \leqslant 2 \vee x > 4$, b) $x \leqslant \frac{1}{3} \vee x > 3$, c) $x < 2 \vee 3 < x \leqslant 4 \vee x \geqslant 6$, d) $x \leqslant 2 \vee \frac{5}{2} \leqslant x < 3 \vee x > 4$.

21.60. a) $x \leqslant -4 \vee -1 \leqslant x < 1 \vee 2 \leqslant x < 3 \vee x > 5$, b) $-3 \leqslant x \leqslant -2 \vee 0 < x < 2 \vee 5 \leqslant x < 6$, c) $x < -6 \vee 0 < x \leqslant 3 \vee x \geqslant 5$ con $x \neq 2$, d) $-3 \leqslant x \leqslant -2 \vee 1 < x \leqslant 3 \vee x > 4$.

21.61. a) $x > -2$, b) $x < -1$, c) $x < -3 \vee -1 < x < 2 \vee x > \frac{5}{2}$, d) $x \leqslant -6 \vee -2 < x < -1$.

21.62. a) $x < 0 \vee \frac{1}{4} \leqslant x < \frac{1}{2}$, b) $x < \frac{1}{2} \wedge x \neq 0$, c) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{10} \vee x > \frac{1}{2}$, d) $x < 4 \wedge x \neq 3$.

21.63. a) $x < -1 \vee -1 < x < 1$, b) $x < -2 \vee x \geqslant \frac{5}{2}$, c) $x < -1 \vee 0 < x < 2 \vee x > 3$, d) $\mathbb{R} - \{1\}$.

21.64. a) $x < -3 \vee x > 3$, b) $x < 0 \vee 1 < x < \frac{12}{7} \vee x > 2$, c) $x < -4 \vee -2 < x < 3 \vee x > 4$ con $x \neq 2$.

21.67 a) $\{x \in \mathbb{R} / x = -2\}$, b) $\{x \in \mathbb{R} / 0 \leqslant x < 3$ con $x \neq 2\}$, c) ,$x < -2$ d) $x > 2$, e) $1 < x < 3 \wedge x \neq 2$.

21.68 a) $0 < x < \frac{7}{17} \vee \frac{1}{2} < x < 2$, b) $x < -2 \vee \frac{1}{3} \leqslant x < 1 \vee x \geqslant 3$, c) $1 \leqslant x < 2$, d) $\emptyset$.