Approfondimenti su relazioni e insiemi E

E.1 Particolari relazioni d'equivalenza

E.1.1 La costruzione dell'insieme dei numeri interi relativi

> Dio fece i numeri naturali, tutto il resto è opera dell'uomo.
>
> L. KRONECKER

Esempio E.1. Nell'insieme

$$A = \{(4,5), (7,8), (0,1), (2,3), (5,4), (12,13), (10,9), (5,5), (1,0), (4,4), (0,0)\}$$

sottoinsieme del prodotto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, considera in A la relazione $\mathfrak{R}$ così definita; "$(m,n)\mathfrak{R}(p,q)$ se e solo se la somma di m con q è uguale alla somma di n con p". In linguaggio matematico: $(m,n)\mathfrak{R}(p,q)$ se e solo se $m+q=n+p$.

- Completa il suo grafo (figura E.1) e deduci le proprietà;
- costruisci e rappresenta con diagrammi di Eulero-Venn la partizione $\wp(A)$ dell'insieme A e l'insieme quoziente $A/\mathfrak{R}$;
- quante classi d'equivalenza hai ottenuto?
- è vero che ciascuna di esse può essere rappresentata da una coppia avente almeno un elemento nullo?
- scrivi i rappresentanti delle classi d'equivalenza.

Proviamo ora a generalizzare quanto ottenuto. Nel prodotto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ consideriamo la relazione $\mathfrak{R}$ definita nell'esempio precedente; essendo $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ formato da infiniti

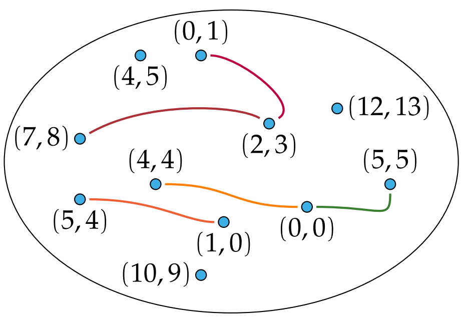

FIGURA E.1: Esempio E.1.

elementi non possiamo rappresentare il grafo della relazione, ma possiamo comunque studiarne le proprietà per stabilire se anche in questo insieme si mantengono le conclusioni raggiunte nell'esempio.

La relazione è riflessiva per qualunque coppia (m, n) di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si ha $(m, n)\mathfrak{R}(m, n)$.

Infatti applicando il predicato della relazione si ottiene l'uguaglianza $m + n = n + m$, vera qualunque siano i numeri naturali m ed n poiché l'addizione in $\mathbb{N}$ gode della proprietà commutativa. Con riferimento all'attività precedente hai potuto infatti mettere il cappio sopra ogni coppia: ad esempio è vero che $(4, 5)\mathfrak{R}(4, 5)$ poiché $4 + 5 = 5 + 4$.

La relazione è simmetrica per qualunque coppia (m, n) e (p, q) appartenenti a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se $(m, n)\mathfrak{R}(p, q)$ allora $(p, q)\mathfrak{R}(m, n)$.

Infatti se $(m, n)\mathfrak{R}(p, q)$ si ha $m + q = n + p$; per la proprietà commutativa dell'addizione in $\mathbb{N}$ si ha anche $p + n = q + m$, uguaglianza che assicura la validità della relazione tra la coppia (p, q) e (m, n).

Nell'esercizio precedente, ad esempio, la coppia $(5, 4)$ è in relazione con la coppia $(10, 9)$ perché è vero che $5 + 9 = 4 + 10$; da questa è anche vero che $10 + 4 = 9 + 5$, uguaglianza che assicura $(10, 9)\mathfrak{R}(5, 4)$: nel grafo hai usato archi per evidenziare coppie in relazione.

La relazione è transitiva se $(m, n)\mathfrak{R}(p, q)$ e $(p, q)\mathfrak{R}(s, t)$ allora $(m, n)\mathfrak{R}(s, t)$, per qualunque terna di coppie (m, n), (p, q), (s, t) appartenenti a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Infatti se $(m, n)\mathfrak{R}(p, q)$ e $(p, q)\mathfrak{R}(s, t)$ si ha $m + q = n + p$ e $p + t = q + s$; sommando membro a membro le precedenti uguaglianze si ottiene

$$\begin{aligned}
&m + q + p + t = n + p + q + s \\
&(m + t) + (q + p) = (n + s) + (q + p)
\end{aligned}$$

per le proprietà commutativa e associativa dell'addizione in $\mathbb{N}$. Confrontando i membri dell'uguaglianza si deduce che $m + t = n + s$, e quest'ultima assicura la verità dell'affermazione $(m, n)\mathfrak{R}(s, t)$.

Riferendoti all'esempio svolto sopra hai potuto stabilire che $(5, 4)\mathfrak{R}(10, 9)$ e $(10, 9)\mathfrak{R}(1, 0)$ poiché $5 + 9 = 4 + 10$ e $10 + 0 = 9 + 1$. Procediamo come nel ragionamento precedente e sommiamo membro a membro le due uguaglianze;

$$\begin{aligned}
&5 + 9 + 10 + 0 = 4 + 10 + 9 + 1 \\
&(5 + 0) + (9 + 10) = (4 + 1) + (10 + 9) \\
&5 + 0 = 4 + 1,
\end{aligned}$$

che assicura la verità di $(5, 4)\mathfrak{R}(1, 0)$.

❍ **Conclusione** La relazione $\mathfrak{R}$ così introdotta nell'insieme delle coppie ordinate di numeri naturali è una relazione d'equivalenza che determina una partizione in classi d'equivalenza dell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (figura E.2).

Analizzando con attenzione $\wp(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, possiamo determinare quale coppia ci conviene assumere come rappresentante di ciascuna classe d'equivalenza. Si può osservare che:

- coppie formate da elementi uguali appartengono alla stessa classe d'equivalenza che può quindi essere rappresentata dalla coppia $(0, 0)$;

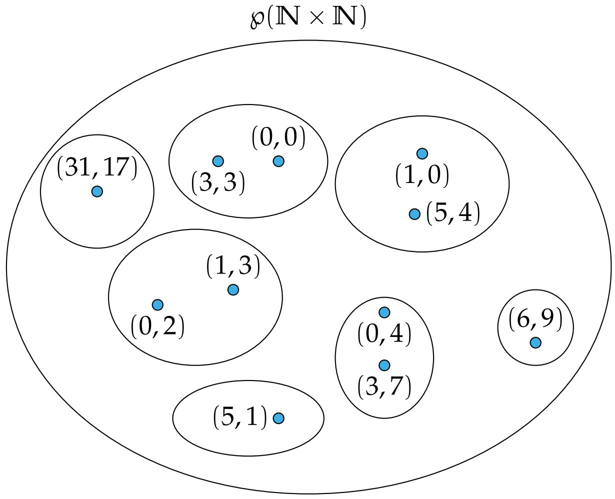

FIGURA E.2: Insieme delle parti $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathfrak{R}$.

- la coppia (m, n) con $m > n$ è equivalente alla coppia $(m - n, 0)$ essendo

$$m + 0 = n + m - n;$$

  pertanto la classe d'equivalenza della coppia (m, n) può essere rappresentata dalla coppia $(m - n, 0)$;
- la coppia (m, n) con $m < n$ è equivalente alla coppia $(0, n - m)$ essendo

$$m + n - m = n + 0;$$

  pertanto la classe d'equivalenza della coppia (m, n) può essere rappresentata dalla coppia $(0, n - m)$.

Per esercizio determina la coppia avente un elemento nullo, equivalente a $(31, 17)$ ......, $(6, 9)$ ......, $(5, 1)$ ......

❍ **Conclusione** Ciascuna classe d'equivalenza può essere rappresentata da una coppia di numeri naturali avente almeno un elemento nullo.

L'insieme quoziente $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathfrak{R}$ è pertanto rappresentato nella figura E.3.

Definizione E.1. Si chiama *numero intero relativo* ogni classe d'equivalenza ottenuta introducendo in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relazione $(m, n)\mathfrak{R}(p, q)$ se e solo se $m + q = n + p$.

Definizione E.2. Si chiama *forma canonica* del numero intero relativo la coppia scelta come rappresentante della classe d'equivalenza.

Possiamo ad esempio dire che la classe $[(3, 7)]$ è un numero intero relativo della classe $(0, 4)$.

Definizione E.3. Si chiama *numero intero positivo* la classe d'equivalenza $[(n, 0)]$ e si indica con il simbolo $+n$.

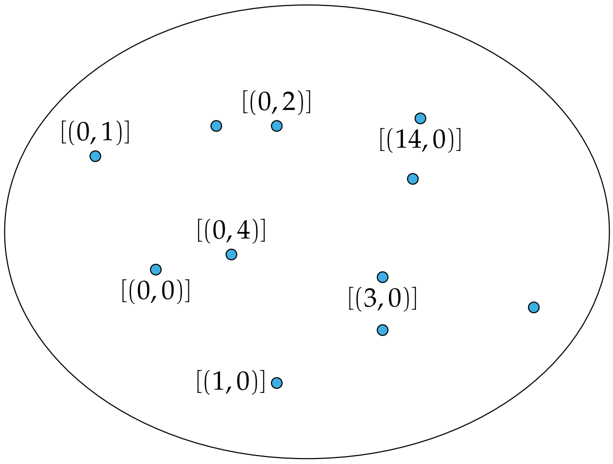

FIGURA E.3: L'insieme quoziente $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathfrak{R}$.

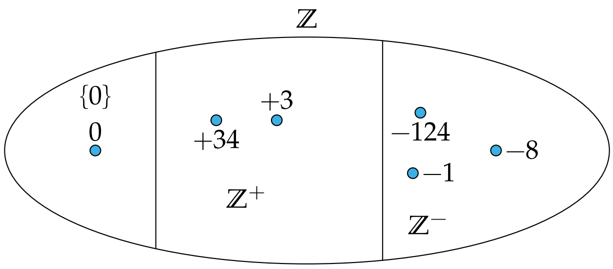

FIGURA E.4: L'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi.

Definizione E.4. Si chiama *numero intero negativo* la classe d'equivalenza $[(0, n)]$ e si indica con il simbolo $-n$.

Definizione E.5. Si chiama *zero* la classe d'equivalenza $[(0, 0)]$ e si indica con 0.

Definizione E.6. Si chiama *valore assoluto del numero intero relativo* il numero naturale diverso da zero che compare nella sua forma canonica.

Definizione E.7. L'insieme $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathfrak{R}$ è chiamato *insieme dei numeri interi relativi* e indicato con il simbolo $\mathbb{Z}$.

❑ **Osservazione** L'insieme dei numeri interi relativi viene semplicemente chiamato insieme dei numeri interi.

Esso contiene tre sottoinsiemi $\mathbb{Z}^+ = \{x / x \text{ è intero positivo}\}$, $\mathbb{Z}^- = \{x / x \text{ è intero negativo}\}$ e l'insieme il cui unico elemento è lo zero $\{0\}$. Scriviamo quindi $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ e rappresentiamo con diagramma di Eulero-Venn (figura E.4)

Quando si debbano considerare solamente gli interi positivi e negativi si usa il simbolo $\mathbb{Z}_0$ col quale si indica che l'insieme dei numeri interi relativi è stato privato dello zero:

$$\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- = \mathbb{Z} - \{0\}.$$

✍ *Esercizi proposti:* E.1, E.2

E.1.2 La costruzione dell'insieme dei numeri razionali

Indichiamo con $\mathbb{N}_0$ l'insieme dei naturali privato dello zero, precisamente $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} - \{0\}$ e costruiamo l'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$; esso sarà costituito da tutte le coppie ordinate di numeri naturali di cui il secondo elemento è diverso da zero, cioè $(0,3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$ mentre $(5,0) \notin \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$. In questo insieme sia $\mathfrak{R}$ la relazione così definita $(m,n)\mathfrak{R}(p,q)$ se e solo se $m \cdot q = n \cdot p$.

Esempio E.2. Nella relazione definita sopra indica Vero o Falso e dai la motivazione di quanto affermi.

- $(3,5)\mathfrak{R}(15,25)$ V F . . . . ;
- $(3,9)\mathfrak{R}(1,3)$ V F . . . . ;
- $(8,9)\mathfrak{R}(7,8)$ V F . . . . ;
- $(0,6)\mathfrak{R}(0,1)$ V F . . . .

Analizziamo le proprietà della relazione:

La relazione è riflessiva per qualunque $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$ si ha $(m,n)\mathfrak{R}(m,n)$.

Infatti applicando il predicato della relazione si ottiene l'uguaglianza $m \cdot n = n \cdot m$, vera qualunque siano i numeri naturali m ed n poiché la moltiplicazione in $\mathbb{N}$ gode della proprietà commutativa.

La relazione è simmetrica per qualunque coppia (m,n) e (p,q) dell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$

$$\text{se } (m,n)\mathfrak{R}(p,q) \text{ allora } (p,q)\mathfrak{R}(m,n).$$

Infatti se $(m,n)\mathfrak{R}(p,q)$ si ha $m \cdot q = n \cdot p$; per la proprietà commutativa della moltiplicazione in $\mathbb{N}$ si ha anche $p \cdot n = q \cdot m$, uguaglianza che assicura la validità della relazione tra la coppia (p,q) e (m,n).

La relazione è transitiva se $(m,n)\mathfrak{R}(p,q)$ e $(p,q)\mathfrak{R}(s,t)$ allora $(m,n)\mathfrak{R}(s,t)$, per qualunque terna di coppie (m,n), (p,q), (s,t) appartenenti a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$.

Infatti, se $(m,n)\mathfrak{R}(p,q)$ e $(p,q)\mathfrak{R}(s,t)$ sappiamo che $m \cdot q = n \cdot p$ e che $p \cdot t = q \cdot s$; ora moltiplicando membro a membro le precedenti uguaglianze si ottiene

$$\begin{aligned} & m \cdot q \cdot p \cdot t = n \cdot p \cdot q \cdot s \\ \Rightarrow & (m \cdot t) \cdot (q \cdot p) = (n \cdot s) \cdot (q \cdot p) \end{aligned}$$

per le proprietà commutativa e associativa della moltiplicazione in $\mathbb{N}$. Confrontando i membri dell'uguaglianza e dividendo per i fattori uguali si deduce che $m \cdot t = n \cdot s$, che assicura la verità dell'affermazione $(m,n)\mathfrak{R}(s,t)$.

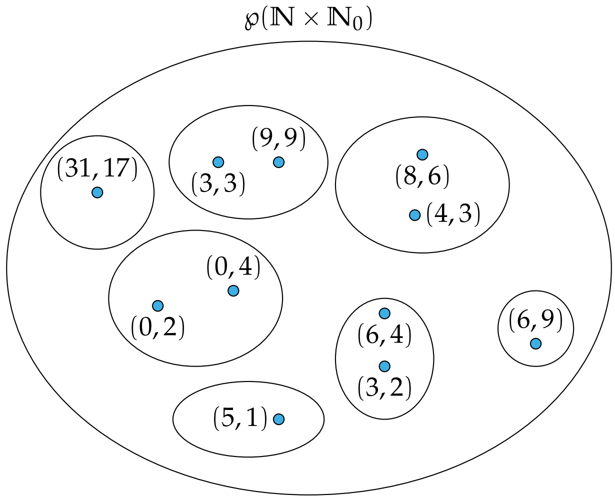

FIGURA E.5: Partizione in classi d'equivalenza dell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$.

❍ **Conclusione** Si può concludere che la relazione $\mathfrak{R}$ introdotta nell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$ è una relazione d'equivalenza che determina una partizione in classi d'equivalenza dell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$ (figura E.5).

Vogliamo determinare la coppia da assumere come rappresentante di ciascuna classe d'equivalenza. Per fare questo associamo a ciascuna coppia (a, b) di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$ la frazione $\frac{a}{b}$ e osserviamo che la relazione $\mathfrak{R}$ in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$ prende significato se trasferita nell'insieme delle frazioni dalla operazione che permette di costruire frazioni equivalenti.

Esempio E.3. Presa la coppia $(4, 3)$ ad essa associamo la frazione $\frac{4}{3}$; alla coppia $(8, 6)$ associamo la frazione $\frac{8}{6}$. Le coppie $(4, 3)$ e $(8, 6)$ stanno nella stessa classe d'equivalenza poiché $4 \cdot 6 = 3 \cdot 8$; le frazioni $\frac{4}{3}$ e $\frac{8}{6}$ sono equivalenti secondo l'usuale definizione.

❍ **Conclusione** Tutte le coppie appartenenti ad una classe d'equivalenza risultano associate ad una stessa frazione; scegliamo dunque come rappresentante di ciascuna classe la frazione ridotta ai minimi termini.

L'insieme quoziente $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0/\mathfrak{R}$ è rappresentato nella figura E.6.

Definizione E.8. L'insieme quoziente $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0/\mathfrak{R}$ si chiama *insieme dei numeri razionali assoluti* e si indica con il simbolo $\mathbb{Q}_A$.

Definizione E.9. Si chiama *numero razionale assoluto* ogni classe d'equivalenza ottenuta introducendo in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0$ la relazione $\mathfrak{R} : (m, n)\mathfrak{R}(p, q)$ se e solo se $m \cdot q = n \cdot p$; esso viene rappresentato da una frazione ridotta ai minimi termini.

Quanto abbiamo detto ci permette di passare dall'insieme delle frazioni ad un insieme di numeri che, benché scritti con il simbolo m/n, lo stesso usato per rappresentare una parte di una grandezza, hanno un significato completamente diverso dalla frazione. D'altra parte, hai

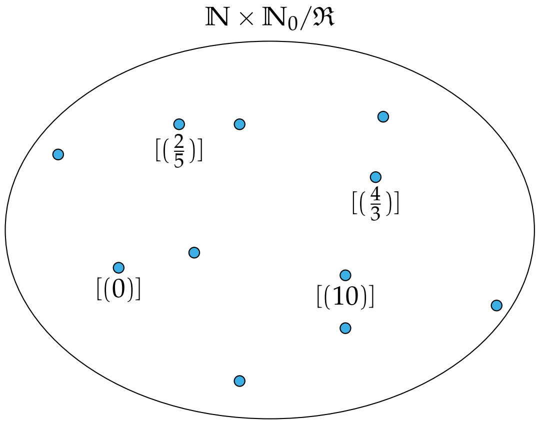

FIGURA E.6: L'insieme quoziente $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_0/\mathfrak{R}$.

già visto nella secondaria di primo grado che al simbolo m/n si può attribuire il significato di quoziente della divisione tra il numeratore e il denominatore e che i numeri razionali sono tutti quelli che si possono scrivere sotto forma di frazione.

Esempio E.4. Completa la tabella e verifica se le coppie appartengono alla stessa classe di equivalenza, in questo caso indica il rappresentante della classe. Le coppie rappresentano lo stesso numero razionale? In caso affermativo scrivi il simbolo del numero razionale.

Coppie	Stessa classe?	Rappr. classe	Stesso numero?	Simbolo numero
$(1,2);(3,2)$	Si	$[\frac{1}{2}]$	Si	$\frac{1}{2}$
$(2,7);(4,49)$				
$(8,5);(40,25)$				
$(60,12);(5,0)$				
$(20,2);(10,1)$				

❍ **Conclusione** Se introduciamo la stessa relazione $\mathfrak{R}$ nell'insieme $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0$, possiamo ottenere le seguenti definizioni.

Definizione E.10. Si chiama *insieme dei numeri razionali relativi* l'insieme quoziente $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0)/\mathfrak{R}$; esso si indica con il simbolo $\mathbb{Q}$.

Definizione E.11. Si chiama *numero razionale relativo* ogni classe d'equivalenza ottenuta introducendo in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0$ la relazione $\mathfrak{R} : (m,n)\mathfrak{R}(p,q)$ se e solo se $m \cdot q = n \cdot p$; esso viene rappresentato da una frazione ridotta ai minimi termini dotata di segno.

❑ **Osservazione** L'insieme dei numeri razionali relativi viene semplicemente chiamato insieme dei numeri razionali.

Esso contiene tre sottoinsiemi $\mathbb{Q}^+ = \{x/\, x \text{ è razionale positivo}\}$, $\mathbb{Q}^- = \{x/\, x \text{ è razionale negativo}\}$ e l'insieme il cui unico elemento è lo zero $\{0\}$. Scriviamo quindi $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$ e rappresentiamo con diagramma di Eulero-Venn (figura E.7).

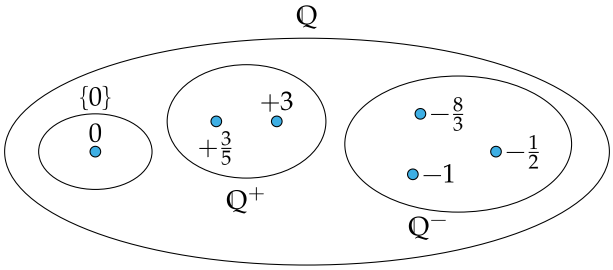

FIGURA E.7: L'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$.

Quando si debbano considerare solamente gli interi positivi e negativi si usa il simbolo $\mathbb{Q}_0$ col quale si indica che l'insieme dei numeri interi relativi è stato privato dello zero:

$$\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- = \mathbb{Q} - \{0\}.$$

✍ *Esercizi proposti:* E.3, E.4, E.5

E.1.3 Classi di resti modulo n

Esempio E.5. Considera la relazione $\mathfrak{R}$: "avere lo stesso resto nella divisione per 3" introdotta nell'insieme $A = \{n \in \mathbb{N} / 0 \leqslant n \leqslant 13\}$ e studiamone le proprietà.

Ricordiamo che il resto della divisione si calcola con l'operazione mod; completiamo dunque le seguenti operazioni:

$0 \bmod 3 = 0;$	$4 \bmod 3 = \dots;$	$8 \bmod 3 = \dots;$	$12 \bmod 3 = \dots;$
$1 \bmod 3 = \dots;$	$5 \bmod 3 = \dots;$	$9 \bmod 3 = \dots;$	$13 \bmod 3 = \dots$
$2 \bmod 3 = \dots;$	$6 \bmod 3 = 0;$	$10 \bmod 3 = \dots;$	
$3 \bmod 3 = \dots;$	$7 \bmod 3 = \dots;$	$11 \bmod 3 = 2;$	

- La relazione $\mathfrak{R}$ è d'equivalenza; infatti ....
- completa l'insieme $\wp(A)$ partizione dell'insieme A e l'insieme quoziente $A/\mathfrak{R}$;
- quali sono i rappresentanti delle classi d'equivalenza?
- sarebbe cambiato qualcosa se avessimo introdotto la stessa relazione nell'insieme N?
- se sostituissimo $\mathbb{N}$ con $\mathbb{Z}$ cosa cambierebbe?

Esempio E.6. Nell'insieme $\mathbb{N}$ considera la relazione d'equivalenza $\mathfrak{R}$: "avere lo stesso resto nella divisione per 2".

Quante classi d'equivalenza puoi formare? Rappresenta l'insieme $\wp(\mathbb{N})$. Quali sono i rappresentanti di ciascuna classe? Riconosci in queste classi, particolari sottoinsiemi dell'insieme $\mathbb{N}$?

Generalizziamo ora l'esercizio. Fissato un numero naturale $n > 1$, considera la relazione $\mathfrak{R}$: "avere lo stesso resto nella divisione intera per n" introdotta nell'insieme $\mathbb{N}$, studiane le proprietà e stabilisci se è d'equivalenza. Osserviamo innanzitutto che nella divisione intera per n il resto si ottiene con l'operazione mod e si ha come resto $0, 1, 2, \dots, n-1$ cioè n resti.

La relazione è riflessiva infatti per qualunque $m \in \mathbb{N}$ si ha $m\mathfrak{R}m$;

La relazione è simmetrica infatti per qualunque p e q dell'insieme $\mathbb{N}$ se $p\mathfrak{R}q$ allora $q\mathfrak{R}p$. Precisamente, se $p\mathfrak{R}q$ significa che $p \bmod n = q \bmod n$ e per la proprietà simmetrica dell'uguaglianza possiamo scrivere $q \bmod n = p \bmod n$, uguaglianza che assicura la validità della relazione tra q e p;

La relazione è transitiva se $p\mathfrak{R}q$ e $q\mathfrak{R}s$ allora $p\mathfrak{R}s$, per qualunque terna di naturali. Infatti se $p\mathfrak{R}q$ significa $p \bmod n = q \bmod n$ e se $q\mathfrak{R}s$ significa che $q \bmod n = s \bmod n$; per la proprietà transitiva dell'uguaglianza si ha $p \bmod n = s \bmod n$, uguaglianza che assicura la validità della relazione tra p e s.

❍ **Conclusione** La relazione $\mathfrak{R}$: "avere lo stesso resto nella divisione intera per n", introdotta nell'insieme dei numeri naturali, è una relazione d'equivalenza e permette quindi una partizione dell'insieme $\mathbb{N}$ in n classi d'equivalenza aventi come rappresentanti tutti e soli i possibili resti della divisione intera per n. L'insieme quoziente è formato da n elementi, viene rappresentato come nella figura E.8 e viene chiamato *insieme delle classi di resti modulo* n.

L'insieme quoziente $\mathbb{N}/\mathfrak{R}$ si indica anche col simbolo N_n dove l'indice n indica il numero rispetto al quale si è eseguita l'operazione mod.

✍ *Esercizi proposti:* E.6, E.7, E.8, E.9

E.2 Insiemi finiti e insiemi infiniti

Il concetto di "corrispondenza biunivoca" permette di affrontare il problema del confronto tra insiemi.

Definizione E.12. Due insiemi A e B si dicono *equipotenti* se è possibile stabilire tra essi una corrispondenza biunivoca.

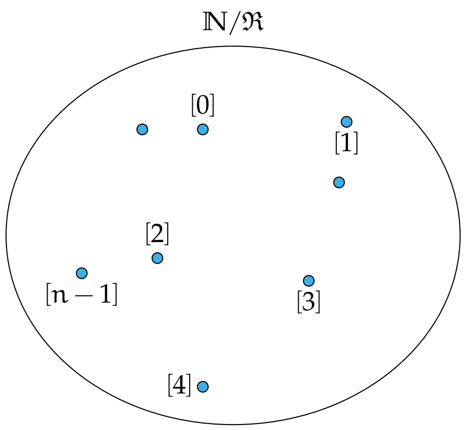

FIGURA E.8: L'insieme delle classi di resti modulo n.

Esempio E.7. Sia S l'insieme dei giorni della settimana e H l'insieme delle note musicali. Sistemando gli elementi dei due insiemi come visualizzato nella seguente tabella ci rendiamo conto che tra di essi si può stabilire una corrispondenza biunivoca, ottenuta semplicemente associando ad ogni giorno della settimana una e una sola nota musicale.

S	lunedì	martedì	mercoledì	giovedì	venerdì	sabato	domenica
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
H	do	re	mi	fa	sol	la	si

Possiamo procedere anche scrivendo i giorni della settimana ciascuno su un foglietto da inserire in un'urna A_1 e facendo altrettanto con gli elementi dell'insieme H inseriti in un'urna A_2; pescando alternativamente un foglietto da A_1 e uno da A_2, ci accorgiamo che, esauriti i foglietti in A_1 sono contemporaneamente esauriti quelli in A_2.

Concludiamo: l'insieme S è *equipotente* all'insieme H. Per esercizio mostra che l'insieme dei mesi dell'anno è equipotente all'insieme dei segni zodiacali.

Esempio E.8. Consideriamo l'insieme $\mathbb{N}_7 = \{x \in \mathbb{N} / 0 < x \leqslant 7\}$ la cui rappresentazione per elencazione è $\mathbb{N}_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; come abbiamo fatto nell'esempio precedente, possiamo visualizzare la corrispondenza biunivoca che si stabilisce tra S, H e $\mathbb{N}_7$ per mezzo della seguente tabella.

S	lunedì	martedì	mercoledì	giovedì	venerdì	sabato	domenica
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
H	do	re	mi	fa	sol	la	si
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$\mathbb{N}_7$	1	2	3	4	5	6	7

Si verifica facilmente che il predicato "essere equipotente" è una relazione d'equivalenza: la classe d'equivalenza di insiemi equipotenti è il numero naturale cardinale che ne indica la numerosità.

Definizione E.13. Si chiama *cardinalità* di un insieme A e si indica con $|A|$, $\#A$ o $\operatorname{card} A$ la classe d'equivalenza degli insiemi equipotenti ad A; essa indica il numero degli elementi di A. L'insieme vuoto ha cardinalità 0.

Gli insiemi H, S, $\mathbb{N}_7$ appartengono alla stessa classe d'equivalenza, la caratteristica comune è il numero di elementi: $\#H = \#S = \#\mathbb{N}_7 = 7$.

Definizione E.14. Un insieme A si dice finito se esiste un n, naturale maggiore o uguale ad 1, tale che sussista una corrispondenza biunivoca tra A e $\mathbb{N}_n$. In tal caso scriviamo $\operatorname{card} A = n$.

Gli insiemi H e S di cui sopra sono insiemi finiti; gli insiemi M dei mesi dell'anno e O dei segni zodiacali hanno cardinalità 12 e sono insiemi finiti.

Prendiamo nuovamente in considerazione l'insieme $\mathbb{N}_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e un suo qualunque sottoinsieme proprio, ad esempio $\mathbb{N}_3 = \{1, 2, 3\}$; risulta evidente che non è possibile stabilire alcuna corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}_7$ e $\mathbb{N}_3$. Questo fatto può essere preso come caratteristica di un insieme finito.

In generale possiamo affermare che l'insieme $\mathbb{N}_n = \{x \in \mathbb{N} / 0 < x \leqslant n\}$ con $n \geqslant 1$ non ha sottoinsiemi propri che possano essere messi in corrispondenza biunivoca con esso: si dice che $\mathbb{N}_n$ è un insieme finito e un qualunque insieme A in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}_n$ è finito e ha cardinalità n.

Esistono insiemi che possono essere messi in corrispondenza biunivoca con un loro sottoinsieme proprio?

Esempio E.9. Consideriamo l'insieme $\mathbb{N}$ dei naturali e il suo sottoinsieme proprio dei numeri pari, che indichiamo con $\mathbb{P}$. Costruiamo una tabella: non possiamo inserire tutti i numeri naturali, quindi metteremo solo i primi dieci elementi

$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$\mathbb{P}$	0	1	4	6	8	10	12	14	16	18

Abbiamo pertanto costruito una *corrispondenza* tra l'insieme $\mathbb{N}$ (dominio) e l'insieme $\mathbb{P}$ (codominio) di tipo $1 \to 1$: ad ogni numero naturale abbiamo associato il suo doppio (quindi un numero pari) che evidentemente è unico e viceversa ogni pari è l'immagine di un unico naturale. Inoltre il dominio e l'insieme di definizione coincidono (ogni numero ha il doppio) e anche codominio e insieme immagine coincidono (ogni pari è immagine di un solo naturale). La corrispondenza è biunivoca, $\mathbb{N}$ e $\mathbb{P}$ sono equipotenti e la tabella va così modificata:

$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
$\mathbb{P}$	0	1	4	6	8	10	12	14	16	18

Questo fatto paradossale non si verifica solo per gli insiemi finiti. Riportiamo la seguente definizione che risale al matematico Richard Dedekind.

Definizione E.15. Un insieme è infinito se e solo se può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.

Esempio E.10. Considera la corrispondenza K che ad ogni numero naturale associa un numero intero relativo secondo la seguente regola:

- se $n \in \mathbb{N}$ è pari allora il suo corrispondente è $+\frac{n}{2}$;
- se $n \in \mathbb{N}$ è dispari allora il suo corrispondente è $-\frac{n+1}{2}$.

Completa:

$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
K	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
	0	-1	1							

- Qual è il numero naturale cui corrisponde il numero intero negativo -5?
- qual è l'immagine (il corrispondente) di 15?
- qual è l'insieme immagine dell'insieme $\mathbb{N}$?

- la legge definita genera una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$?
- quale conclusione puoi trarre?

Esempio E.11. Nel "Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo", Galileo Galilei pone attraverso la domanda di Salviati e la risposta di Simplicio il problema dell'infinità dei naturali:

Salviati «[...] se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima: non è così?»

Simplicio «Non si può dire altrimenti.»

Considera la corrispondenza $\mathbf{K}$ che ad ogni naturale associa il suo quadrato. Completa:

$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathbf{K}$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$\mathbb{N}^2$										

- Qual è l'immagine di 5?
- di quale naturale è immagine 121?
- $\mathbf{K}$ è una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}^2$?
- è vero che $\mathbb{N}^2$ è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{N}$?
- quale conclusione puoi trarre?

Definizione E.16. Un insieme X si dice *numerabile* quando è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra esso e l'insieme $\mathbb{N}$ dei naturali.

Dagli esempi precedenti possiamo concludere che l'insieme $\mathbb{N}$, l'insieme $\mathbb{P}$ dei pari, l'insieme $\mathbb{N}^2$ dei quadrati, l'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi, sono *insiemi numerabili*, hanno dunque tutti la stessa cardinalità. Ma quale valore possiamo attribuire alla cardinalità degli insiemi sopra elencati se essi sono infiniti?

La cardinalità dell'insieme dei numeri naturali viene indicata da Cantor con il simbolo $\aleph_0$ (si tratta della prima lettera dell'alfabeto ebraico con l'indice 0 e si legge aleph con 0). Nel 1874, attraverso un procedimento detto "diagonalizzazione", Cantor dimostra che anche l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è numerabile. Vediamo come possiamo ripercorrere la dimostrazione di questo fatto. Ricordiamo che ogni numero razionale può essere scritto sotto forma di frazione e che frazioni equivalenti sono lo stesso numero razionale. Costruiamo la seguente tabella (figura E.9) delle frazioni, infinite righe e infinite colonne: nella prima colonna tutte le frazioni con numeratore 1, nella seconda quelle con numeratore 2 e così via. Attribuiamo ai suoi elementi l'ordinamento indicato dalle frecce; esso ci permette di costruire una corrispondenza biunivoca tra le frazioni positive e $\mathbb{N}$; anzi considerando solamente quelle ridotte ai minimi termini, che rappresentano il numero razionale assoluto, si ottiene una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{Q}_A$ e $\mathbb{N}$ nel modo seguente:

$\mathbb{Q}_A$	1/1	2/1	1/2	1/3	3/1	4/1	3/2	2/3	1/4
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
$\mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Cantor nel 1874 enunciò il seguente teorema.

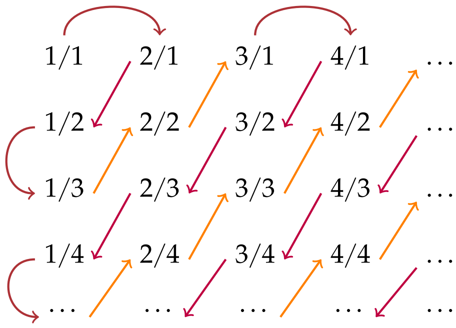

FIGURA E.9: Il procedimento di ”diagonalizzazione”.

Teorema E.1. *Non c'è corrispondenza biunivoca tra l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali e l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali.*

Determinò così un altro tipo di infinito la cui cardinalità denotò con il simbolo $\aleph_1$.

Noi tralasciamo la dimostrazione del teorema sopra enunciato per la sua complessità, qui abbiamo voluto mostrarvi che vi sono diversi gradi di infinito e che di fronte ad insiemi “infiniti” non possiamo affermare che “la parte è minore del tutto”.

✍ *Esercizi proposti:* E.10, E.11, E.12, E.13, E.14, E.15, E.16

E.3 Esercizi

E.3.1 Esercizi dei singoli paragrafi

E.1.1 - La costruzione dell'insieme dei numeri interi relativi

E.1. Completa la tabella.

Intero relativo	Elementi classe equivalenza	Forma canonica
$[(5,7)]$		
	$(7,5)(11,9)(34,32)(3,1)\ldots.$	
		$(7,0)$
$[(56,90)]$		
	$(3,3)(76,76)(9,9)(43,43)\ldots$	
		$(0,4)$
	$(4,9)(8,13)(57,62)\ldots\ldots\ldots$	

E.2. Completa la tabella.

Intero relativo	Forma canonica	Simbolo usuale	Valore assoluto
		$+6$	
	$(0,2)$		
$[(5,5)]$			
		-1	

E.1.2 - La costruzione dell'insieme dei numeri razionali

E.3. Completa il ragionamento: alla coppia $(6;4)$ viene associata la frazione $\ldots$; alla coppia $(\ldots,\ldots)$ è associata la frazione $\frac{3}{2}$. Le coppie ...... stanno nella ......; le frazioni ...... sono equivalenti secondo l'usuale definizione.

E.4. Ripeti l'esercizio prendendo coppie di $\mathbb{N}\times\mathbb{N}_0$ in relazione e mostrando la relazione di equivalenza tra le rispettive frazioni.

E.5. Completa la catena di trasformazioni.

Coppie	Razionale come frazione	Razionale come decimale
$(1,2)\mathfrak{R}(3,6)$	$\frac{1}{2}$	$0,5$
$(2,7)\mathfrak{R}(4,49)$		
$(8,5)\mathfrak{R}(40,25)$		
$(60,12)\mathfrak{R}(10,2)$		
$(2,3)\mathfrak{R}(12,18)$		

E.1.3 - Classi resto modulo 7

E.6. Determina gli elementi di $\mathbb{N}_7$.

Nell'insieme $\mathbb{N}$ si considera la relazione d'equivalenza $\mathfrak{R}$: "avere lo stesso resto nella divisone per 7". Le classi d'equivalenza sono: $[0], [\ldots], \ldots, [6]$. Nella classe $[0]$ stanno tutti i ...... che divisi per 7 danno ..., cioè ..... In quale classe sta il numero 427? E il numero 74?

E.7. Nell'insieme $\mathbb{Z}_6$ delle classi di resto modulo 6 si può definire la somma e il prodotto ricalcandola dall'addizione e moltiplicazione dei numeri naturali. Si ha pertanto: $[1] + [2] = [3]$, $[4] + [5] = [3]$ infatti $4 + 5 = 9$ ma $[9] = [3]$.

Determina: $[5] + [3] = [\ldots]$; $[3] + [3] = [\ldots]$; $[1] + [0] = [\ldots]$.

Analogamente si può definire la moltiplicazione: $[5] \cdot [3] = [3]$ infatti $5 \cdot 3 = 15$ ma $15 : 6 = 2$ con il resto di 3, quindi ....

Determina: $[5] \cdot [2] = [\ldots]$; $[3] \cdot [1] = [\ldots]$; $[3] \cdot [0] = [\ldots]$.

E.8. Elenca e descrivi gli elementi dell'insieme Z_{12}.

Trovi qualche analogia con il disegno dell'orologio riprodotto nella figura E.10? Come rispondi alla domanda: "5 ore dopo le 9 di mattina dove si trova la lancetta delle ore?" È sbagliato dire "4 ore dopo le 9 di mattina sono le 2"?

E.9. Nel supermercato al banco della frutta la bilancia presenta una tastiera come quella nella figura E.11, premendo il bottone relativo alla frutta da pesare si ottiene l'adesivo con il prezzo. Sistema, senza contare casella per casella, il numero che corrisponde ai miei acquisti di oggi: zucchine al numero 75; arance al numero 63; spinaci al numero 48; patate al numero 56. Hai potuto sfruttare le classi di resti modulo 8?

E.2 - Insiemi finiti e insiemi infiniti

E.10. Stabilisci la cardinalità dell'insieme V delle vocali della lingua italiana e dell'insieme D delle dita di una mano.

Completa l'insieme V.

Stabilisci una corrispondenza .... tra ... e ...

Determina $\mathbb{N}_n$ .... Concludo: $\#V = \ldots = \ldots$

E.11. Negli insiemi "infiniti" non possiamo affermare che "la parte è minore del tutto". Prolungate i lati obliqui del trapezio ABCD (figura E.12) fino ad incontrarsi nel punto O. Le semirette di origine O e comprese tra OA e OB, proiettano il segmento DC nel segmento AB,

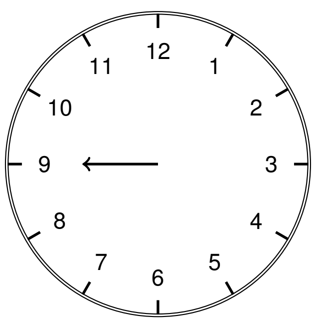

FIGURA E.10: Esercizio E.8.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27					

FIGURA E.11: Esercizio E.9.

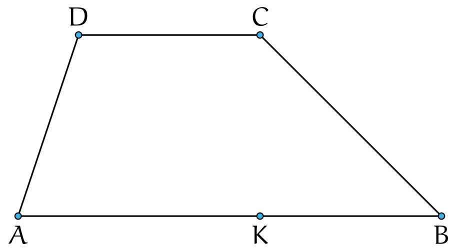

FIGURA E.12: Esercizio E.11.

facendo corrispondere ad un punto di DC un punto di AB. Direste vera o falsa l'affermazione: «i punti del segmento DC sono tanti quanti quelli del segmento AB»?

Seguite questi passaggi rispondendo ai quesiti:

a) quale punto corrisponde a D, e quale a C?
b) ogni punto di CD trova un corrispondente punto in AB?
c) di quale punto è immagine il punto K di AB?
d) ogni punto di AB è immagine di un solo punto di CD?
e) la proiezione costruita stabilisce una corrispondenza biunivoca tra CD e AB?
f) a quale conclusione vi ha condotto questo esercizio?

E.12. Gli insiemi $A = \{x / x = 2n^2 - 1 \text{ con } n \in \mathbb{N} \text{ e } 0 \leqslant n < 2\}$ e $B = \{y / y \in \mathbb{Z} / -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ si possono mettere in corrispondenza biunivoca?

E.13. Dato l'insieme $K = \{a, b, c, d\}$, costruite l'insieme $K \times K$. Considerate il suo sottoinsieme $H = \{(x, y) / x \text{ precede } y \text{ nell'ordine alfabetico}\}$. È vero che tale insieme è equipotente all'insieme formato dalle facce di un cubo?

E.14. Attraverso la costruzione di un grafo sagittale, attribuite il valore di verità alla proposizione: "il sottoinsieme T di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ formato dalle coppie i cui elementi danno come somma 3 è equipotente all'insieme F dei divisori di 14".

E.15. Attribuite il valore di verità alle seguenti proposizioni:

a) un insieme infinito è sempre numerabile $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
b) un insieme infinito può essere equipotente a un suo sottoinsieme proprio $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
c) la cardinalità dell'insieme $\mathbb{Q}$ è maggiore di quella dell'insieme $\mathbb{Z}$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
d) due insiemi equipotenti sono infiniti $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

E.16. Considerate l'insieme $P^* = \{2^n \text{ con } n \in \mathbb{N}\}$ delle potenze di 2, completa la tabella sottostante:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^n	1	2								

Qual'è il valore di verità delle seguenti proposizioni?

a) P^* è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ $\boxed{V}$ $\boxed{F}$
b) 0 appartiene a P^* $\boxed{V}$ $\boxed{F}$

c) P^* è numerabile $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
d) nessun elemento di P^* è maggiore di 2065438 $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Quali considerazioni potete fare sull'infinità di P^*?