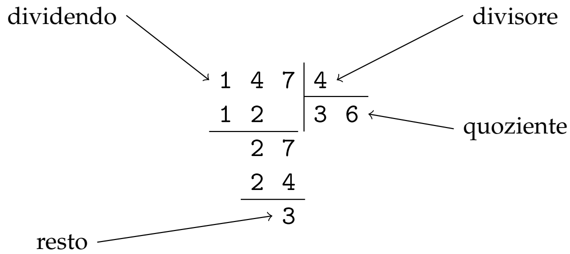
12 Divisione tra due polinomi

12.1 Polinomi in una sola variabile

Ricordiamo la divisione tra due numeri, per esempio 147 : 4. Si tratta di trovare un quoziente q e un resto $r < 4$, in modo che $147 = q \times 4 + r$. Un algoritmo per trovare questi due numeri è il seguente:



Verifichiamo che $147 = 36 \times 4 + 3$, dunque $q = 36$ e $r = 3$ soddisfano la nostra richiesta.

In questo paragrafo ci proponiamo di estendere questo algoritmo dal calcolo numerico al calcolo letterale, in particolare alla divisione tra polinomi.

Nell'insieme dei polinomi in una sola variabile, ad esempio x, vogliamo definire l'operazione di divisione, cioè, assegnati due polinomi, $A(x)$ *dividendo* e $B(x)$ *divisore*, vogliamo determinare altri due polinomi, $Q(x)$ *quoziente* e $R(x)$ *resto*, con grado di $R(x)$ minore del grado di $B(x)$, per i quali: $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$.

Per eseguire l'operazione si usa un algoritmo molto simile a quello usato per la divisione tra numeri interi. Illustriamo l'algoritmo con un esempio.

Esempio 12.1. Eseguire la divisione tra i polinomi $A(x) = 3x^4 + 5x - 4x^3 - 1$ e $B(x) = 3x^2 - 1$.

Prima di eseguire l'algoritmo dobbiamo sempre controllare che:

- il dividendo sia di grado maggiore o uguale a quello del divisore: $A(x)$ ha grado 4, $B(x)$ grado 2;
- i polinomi siano ordinati secondo le potenze decrescenti della variabile, in questo caso la x; poiché ciò non è vero, riscriviamo $A(x)$ ordinato: $A(x) = 3x^4 - 4x^3 + 5x - 1$;
- dividendo e divisore siano in forma completa, cioè abbiano i termini con tutti i gradi; nel nostro esempio, i due polinomi non sono in forma completa, quindi inseriamo i termini mancanti ponendo 0 come coefficiente delle potenze mancanti:

$$A(x) = 3x^4 - 4x^3 + 0x^2 + 5x - 1; B(x) = 3x^2 + 0x - 1.$$

Passo I Disponiamo i polinomi secondo il seguente schema, del tutto simile a quello usato per la divisione tra numeri.

$$
\begin{array}{ccccc|ccc}
 & & \text{dividendo} & & & & \text{divisore} & \\
3x^4 & -4x^3 & +0x^2 & +5x & -1 & 3x^2 & +0x & -1 \\ \cline{6-8}
 & & \text{Spazio per i calcoli} & & & & \text{Spazio per il quoziente} &
\end{array}
$$

Passo II Dividiamo il primo termine del dividendo per il primo termine del divisore, otteniamo x^2 che è il primo termine del quoziente; esso va riportato nello spazio dedicato al quoziente.

$$
\begin{array}{ccccc|ccc}
3x^4 & -4x^3 & +0x^2 & +5x & -1 & 3x^2 & +0x & -1 \\ \cline{6-8}
 & & & & & x^2 & &
\end{array}
$$

Passo III Moltiplichiamo il primo termine ottenuto per tutti i termini del divisore e trascriviamo il risultato del prodotto sotto il dividendo, avendo cura, per essere facilitati nel calcolo, di:

- incolonnare i termini con lo stesso grado, ossia scrivere i risultati del prodotto in ordine da sinistra verso destra;
- cambiare tutti i segni ottenuti, in questo modo risulta più pratico eseguire la somma algebrica dei polinomi invece della sottrazione.

$$
\begin{array}{ccccc|ccc}
3x^4 & -4x^3 & +0x^2 & +5x & -1 & 3x^2 & +0x & -1 \\ \cline{6-8}
-3x^4 & -0x^3 & +x^2 & & & x^2 & &
\end{array}
$$

Passo IV Sommiamo il dividendo con il polinomio sottostante e riportiamo il risultato in un'altra riga. Questo polinomio si chiama primo resto parziale. Notiamo che ha grado 3, maggiore del grado 2 del divisore, pertanto la divisione va continuata.

$$
\begin{array}{ccccc|ccc}
3x^4 & -4x^3 & +0x^2 & +5x & -1 & 3x^2 & +0x & -1 \\ \cline{6-8}
-3x^4 & -0x^3 & +x^2 & & & x^2 & & \\ \cline{1-5}
 & -4x^3 & +x^2 & +5x & -1 & & &
\end{array}
$$

Passo V Ripetiamo il procedimento tra il resto parziale ottenuto, $-4x^3 + x^2 + 5x - 1$ e il divisore $3x^2 + 0x - 1$. Dividiamo il primo termine del resto che è $-4x^3$ per il primo termine del divisore che è $3x^2$. Otteniamo $-\frac{4}{3}x$ che è il secondo termine del quoziente.

$$
\begin{array}{rrrrr|rrr}
3x^4 & -4x^3 & +0x^2 & +5x & -1 & 3x^2 & +0x & -1 \\ \cline{6-8}
-3x^4 & -0x^3 & +x^2 & & & x^2 & -\frac{4}{3}x & \\ \cline{1-5}
 & -4x^3 & +x^2 & +5x & -1 & & &
\end{array}
$$

Passo VI Proseguiamo moltiplicando $-\frac{4}{3}x$ per $B(x)$, riportiamo il risultato del prodotto, con segno opposto, sotto i termini del primo resto parziale e addizioniamo i due polinomi.

$$
\begin{array}{rrrrr|rrr}
3x^4 & -4x^3 & +0x^2 & +5x & -1 & 3x^2 & +0x & -1 \\ \cline{6-8}
-3x^4 & -0x^3 & +x^2 & & & x^2 & -\frac{4}{3}x & \\ \cline{1-5}
 & -4x^3 & +x^2 & +5x & -1 & & & \\
 & -4x^3 & +0x^2 & -\frac{4}{3}x & & & & \\ \cline{2-5}
 & & x^2 & +\frac{11}{3}x & -1 & & &
\end{array}
$$

Passo VII Possiamo ripetere per l'ultima volta il procedimento precedente tra il resto parziale $R_p(x) = x^2 + \frac{11}{3}x - 1$ e il divisore $B(x)$ in quanto hanno lo stesso grado. Dividendo il termine di grado maggiore di $R_p(x)$, che è x^2, per il termine di grado maggiore di $B(x)$ che è $3x^2$ si ottiene $\frac{1}{3}$ che è il terzo termine del polinomio quoziente.

$$
\begin{array}{rrrrr|rrr}
3x^4 & -4x^3 & +0x^2 & +5x & -1 & 3x^2 & +0x & -1 \\ \cline{6-8}
-3x^4 & -0x^3 & +x^2 & & & x^2 & -\frac{4}{3}x & +\frac{1}{3} \\ \cline{1-5}
 & -4x^3 & +x^2 & +5x & -1 & & & \\
 & +4x^3 & +0x^2 & -\frac{4}{3}x & & & & \\ \cline{2-5}
 & & x^2 & +\frac{11}{3}x & -1 & & & \\
 & & -x^2 & +0x & +\frac{1}{3} & & & \\ \cline{4-5}
 & & & +\frac{11}{3}x & -\frac{2}{3} & & &
\end{array}
$$

Non possiamo più ripetere l'algoritmo poiché il resto ottenuto ha grado minore del grado del divisore.

In conclusione $A(x) : B(x)$ ha quoziente $Q(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$ e resto $R(x) = +\frac{11}{3}x - \frac{2}{3}$.

Verifica Verifichiamo se abbiamo svolto correttamente i calcoli; dovrebbe risultare, come detto sopra: $A(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x)$.

$$\begin{aligned}\left(3x^2-1\right)\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}\right)+\frac{11}{3}x &= 3x^4-4x^3-x^2+\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}+\frac{11}{3}x-\frac{2}{3}\\ &= 3x^4-4x^3+\frac{15}{3}x-\frac{3}{3}\\ &= x^4-4x^3+5x-1\\ &= A(x).\end{aligned}$$

I polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ soddisfano quindi le nostre richieste. Ma sono unici? È sempre possibile trovarli? A queste domande risponde il seguente teorema.

Teorema 12.1 (Divisione euclidea). *Siano $A(x)$ e $B(x)$ due polinomi in una sola variabile, esistono e sono unici due polinomi $Q(x)$ e $R(x)$, con grado di $R(x)$ minore o uguale del grado di $B(x)$, tali che $A(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x)$.*

❑ **Osservazione** Nel caso in cui il grado di $A(x)$ sia minore del grado di $B(x)$ il teorema resta valido, in questo caso $Q(x) = 0$ e $R(x) = A(x)$. Nel caso di polinomi in più variabili il teorema della divisione euclidea non vale.

Definizione 12.1. Si dice che un polinomio A (dividendo) è divisibile per un polinomio B (divisore) se esiste un polinomio Q (quoziente) per il quale $A = Q \cdot B$.

Esempio 12.2. Eseguiamo la divisione tra $A(x) = x^3-2x^2+x-2$ e $B(x) = x^2+1$. I due polinomi sono ordinati secondo potenze decrescenti della variabile, il grado di A è maggiore del grado di B e quest'ultimo deve essere completo. Inseriamoli nello schema per eseguire l'algoritmo. Risulta: $\left(x^3-2x^2+x-2\right) : \left(x^2+1\right) = (x-2)$; il resto $R(x)$ è il polinomio nullo e $A(x)$ è divisibile per $B(x)$. Infatti $\left(x^2+1\right) \cdot (x-2) = \left(x^3-2x^2+x-2\right)$.

$$\begin{array}{rrrr|rrr} x^3 & -2x^2 & +x & -2 & x^2 & +0x & +1 \\ \cline{5-7} -x^3 & -0x^2 & -x & & x & -2 & \\ \cline{1-4} & -2x^2 & +0x & -2 & & & \\ & -2x^2 & +0x & -2 & & & \\ \cline{2-4} & & & 0 & & & \end{array}$$

In conclusione, se $A(x)$ è un polinomio di grado n e $B(x)$ un polinomio di grado m con $n \geqslant m$, quando si esegue la divisione tra A e B si ottiene un polinomio quoziente $Q(x)$ di grado $n-m$ e un polinomio $R(x)$ di grado $g < m$. Si dimostra che i polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ sono unici.

Se $R(x)$ è il polinomio nullo, la divisione è esatta e il polinomio A è divisibile per il polinomio B. Se $n < m$, allora la divisione non si può eseguire e si ottiene la frazione algebrica $\frac{A}{B}$.

✍ *Esercizi proposti:* 12.1, 12.2, 12.3, 12.4, 12.5

12.2 Polinomi in più variabili

Per la divisione tra polinomi in più variabili riportiamo soltanto qualche esempio

---

Esempio 12.3. Siano $A(a,b) = 3a^2b + 4ab^2 + 3a^3 - 2b^3$ e $B(a,b) = a - 3b$ rispettivamente dividendo e divisore di una divisione tra polinomi; essi sono due polinomi omogenei nelle due variabili a e b rispettivamente di grado 3 e grado 1.

Per eseguire la divisione procediamo come nel caso di polinomi in una sola variabile. Dividiamo il polinomio $A(a,b) = 3a^2b + 4ab^2 + 3a^3 - 2b^3$ per il polinomio $B(a,b) = a - 3b$ rispetto alla variabile a. Controlliamo le condizioni:

- A e B sono ordinati rispetto alla variabile a? No. A non lo è. Quindi ordiniamo A:

$$A(a,b) = 3a^3 + 3a^2b + 4ab^2 - 2b^3;$$

- il grado di A è maggiore o uguale al grado di B? Sì;
- A e B sono completi rispetto alla variabile a? Sì.

Costruiamo lo schema per eseguire l'algoritmo e procediamo:

$$\begin{array}{cccc|cc} 3a^3 & +3a^2b & +4ab^2 & -2b^3 & a & -3b \\ \cline{5-6} & \dots & & & 3a^2 & -\dots \end{array}$$

Il quoziente è $Q = \dots\dots\dots$; il resto $R = 118b^3$

Verifica ....

Se avessimo eseguito la divisione rispetto alla variabile b, avremmo ottenuto stesso quoziente e stesso resto? Proviamo. Controlliamo le condizioni:

- A e B sono ordinati rispetto alla variabile b? No. Ordinando A, risulta:

$$A(a,b) = -2b^3 + 4ab^2 + 3a^2b + 3a^3 + 3a^2b;$$

  e ordinando B, risulta

$$B(a,b) = -3b + a;$$

- il grado di A è maggiore o uguale al grado di B? Sì;
- A e B sono completi rispetto alla variabile b? Sì.

Costruisci lo schema dell'algoritmo e concludi.

✍ *Esercizi proposti:* 12.6, 12.7

12.3 Regola di Ruffini

Per eseguire la divisione tra due polinomi, *nel caso in cui il divisore sia di grado 1* si può applicare una regola nota come regola di Ruffini e che si basa sui seguenti teoremi.

Teorema 12.2. *Il resto della divisione di un polinomio* $A(x)$ *per un binomio del tipo* $x - k$ *è uguale al valore che* $A(x)$ *assume quando al posto della variabile x si sostituisce il valore k,* $R = A(k)$.

Dimostrazione. Dalla divisione di $A(x)$ per $x-k$ otteniamo la seguente uguaglianza:

$$A(x) = (x-k) \cdot Q(x) + R$$

in cui si è scritto R anziché $R(x)$, poiché è una costante.

Essendo tale relazione valida per qualsiasi valore che si attribuisce alla variabile x, sostituiamo al suo posto il valore k e otteniamo:

$$A(k) = \underbrace{(k-k)}_{0} \cdot Q(k) + R = R.$$

Ciò vuol dire che il valore assunto da $A(x)$ quando $x = k$ è proprio uguale al resto della divisione. □

Teorema 12.3 (di Ruffini)**.** *Condizione necessaria e sufficiente affinché un polinomio $A(x)$ sia divisibile per un binomio del tipo $x-k$ è che risulti $A(k) = 0$.*

Dimostrazione. Prima implicazione: $A(x)$ divisibile per $x-k \Rightarrow A(k) = 0$.

Poiché $A(x)$ è divisibile per $x-k$, per definizione di divisibilità deve essere $R = 0$. Ma, per il teorema del resto, $A(k) = R = 0$, quindi, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, $A(k) = 0$.

Seconda implicazione: $A(k) = 0 \Rightarrow A(x)$ divisibile per $x-k$.

Il resto della divisione del polinomio $A(x)$ per il binomio $x-k$, per il teorema del resto risulta $R = A(k)$ e per ipotesi $A(k) = 0$, ne segue che $R = 0$. Per definizione di divisibilità, essendo il resto della divisione zero, segue che $A(x)$ è divisibile per $x-k$. □

Procedura 12.4. *Dividere un polinomio con la regola di Ruffini:*

a) *calcolo del resto;*
b) *applicazione del procedimento di divisione;*
c) *verifica.*

Esempio 12.4. $\left(a^2-3a+1\right) : (a-1)$.

Dividiamo con la regola di Ruffini il polinomio $A(a) = a^2-3a+1$ per il binomio $B(a) = a-1$; cerchiamo quoziente $Q(a)$ e resto $R(a)$.

Passo I *Calcolo del polinomio resto.*

Si considera il termine numerico del polinomio divisore cambiato di segno (nell'esempio è 1) e si sostituisce alla lettera del polinomio dividendo $A(a)$: $(1)^2-3(1)+1 = 1-3+1 = -1$.

Il resto della divisione è -1.

Passo II *Applicazione del procedimento di divisione.*

Disegnare il seguente schema di Ruffini: scrivere i coefficienti numerici del polinomio dividendo, secondo le potenze decrescenti della variabile. Se manca un termine occorre mettere 0. L'ultimo termine numerico è messo esternamente alla griglia. Nell'angolo a sinistra dello schema si pone il termine numerico del polinomio divisore cambiato di segno, nell'esempio è 1.

Coefficienti numerici del divendo

Termine noto del divisore cambiato di segno

Termine noto del dividendo

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & -3 & 1 \\ 1 & & & \\ \hline & & & \end{array}$$

Il primo termine si riporta inalterato nella parte sottostante:

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & -3 & 1 \\ 1 & \downarrow & & \\ \hline & 1 & & \end{array}$$

Moltiplicare il termine noto del divisore (cambiato di segno) per il primo coefficiente appena trascritto e riportare il risultato sotto il secondo coefficiente

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & -3 & 1 \\ 1 & & 1 & \\ \hline & 1 & & \end{array}$$

Sommare i due termini appena incolonnati $-3+1=-2$.

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & -3 & 1 \\ 1 & & 1 & \\ \hline & 1 & -2 & \end{array}$$

Moltiplicare il termine noto del divisore (cambiato di segno) per la somma appena ottenuta $1 \cdot (-2) = -2$.

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & -3 & 1 \\ 1 & & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & \end{array}$$

Addizionare gli ultimi due numeri incolonnati $1 - 2 = -1$.

	1	-3	1
1		1	-2
	1	-2	-1

quoziente

resto

Infine si ricostruisce il polinomio quoziente, tenendo presente che i coefficienti numerici sono quelli trovati da questa divisione, cioè 1 e -2. Quoziente e resto sono allora $Q(x) = a - 2$ e $R = -1$.

Passo III *Verifica*

Come nella divisione con i numeri si moltiplica il polinomio risultato per il polinomio divisore e si somma il polinomio resto. Il risultato deve essere il polinomio dividendo.

$$(a-2)(a-1) + (-1) = a^2 - a - 2a + 2 - 1 = a^2 - 3a + 1.$$

Esempio 12.5. $(4x^3 - 5x + 6) : (x + 1)$.

Applicazione del procedimento di divisione

Termine noto del divisore cambiato di segno

	4	0	-5	6
-1		-4	$+4$	$+1$
	4	-4	-1	7

Resto

Coefficienti del polinomio quoziente

$$Q(x) = 4x^2 - 4x - 1 \qquad R = 7.$$

Verifica.

$$Q(x) \cdot B(x) + R = A(x)$$

$$\left(4x^2 - 4x - 1\right) \cdot (x+1) + 7 = 4x^3 + 4x^2 - 4x - x - 1 + 7 = 4x^3 - 5x + 6$$

Vediamo il caso in cui il binomio che fa da divisore ha coefficiente numerico della variabile diverso da 1.

Esempio 12.6. Dividere con la regola di Ruffini $\left(2x^4 - x^3 - 4x^2 + 2x + 7\right) : (2x - 1)$.

In questo tipo di esercizi si deve rendere il divisore del tipo $x + n$, quindi nel nostro caso si deve dividere sia il dividendo sia il divisore per 2; sappiamo, infatti, dalla proprietà invariantiva della divisione che dividendo per uno stesso numero dividendo e divisore il quoziente della divisione non cambia. Il resto invece risulterà diviso per 2. Quindi applichiamo l'algoritmo precedente e *ricordiamoci al termine della divisione di moltiplicare il resto per* 2.

La divisione allora diventa $\left(x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + x + \frac{7}{2}\right) : \left(x - \frac{1}{2}\right)$.

✍ *Esercizi proposti:* 12.8, 12.9, 12.10, 12.11, 12.12

12.3.1 Calcolo del resto

Si considera il termine numerico del polinomio divisore cambiato di segno (nell'esempio è $+\frac{1}{2}$) e si sostituisce alla lettera del polinomio dividendo. Il risultato che si ottiene è il resto della nuova divisione $\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = -\frac{1}{16} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = \frac{7}{2}$ resto della divisione.

Applicazione del procedimento di divisione.

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 1 & -\frac{1}{2} & -2 & +1 & \frac{7}{2} \\
\frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 \\
\hline
 & 1 & 0 & -2 & 0 & \frac{7}{2}
\end{array}$$

Adesso si pone la lettera per ogni termine del polinomio risultato partendo dal grado del polinomio dividendo diminuito di 1. Il risultato è quindi il polinomio $x^3 - 2x$, il resto è $\frac{7}{2} \cdot 2 = 7$.

Verifica Per la proprietà della divisione si moltiplica il quoziente per il polinomio divisore e si somma il resto ottenuto. Il risultato deve essere il polinomio dividendo.

$$\left(x^3 - 2x\right)(2x - 1) + 7 = 2x^4 - x^3 - 4x^2 + 2x + 7.$$

In generale, se si vuole dividere il polinomio $A(x)$ per il binomio $(nx - \alpha)$, utilizzando la proprietà invariantiva della divisione, basta dividere dividendo e divisore per n. Si ottengono $Q(x)$ e resto. Per ottenere il resto della divisione di partenza occorre moltiplicare per il coefficiente n. Infatti si ha: $A(x) = (nx - \alpha)Q(x) + R$ e, dividendo ambo i membri per n, si ha:

$$\frac{A(x)}{n} = \left(x - \frac{\alpha}{n}\right) Q(x) + \frac{R}{n}.$$

✍ *Esercizi proposti:* 12.13, 12.14, 12.15, 12.16, 12.17, 12.18

12.4 Esercizi

12.4.1 Esercizi dei singoli paragrafi

12.1 - Divisioni in una variabile

12.1. Completa la divisione

$$
\begin{array}{ccccc|ccc}
7x^4 & +0x^3 & -5x^2 & +x & -1 & 2x^2 & +0x & -1 \\
\cline{6-8}
 & & \dots & & & \frac{7}{2}x & \dots & \\
\cline{1-5}
 & & -\frac{3}{2}x^2 & +x & -1 & & & \\
 & & & \dots & & & & \\
\cline{2-5}
 & & & x & -\frac{7}{4} & & &
\end{array}
$$

12.2 (*). Esegui le divisioni tra polinomi.

a) $\left(3x^2 - 5x + 4\right) : (2x - 2)$;
b) $\left(4x^3 - 2x^2 + 2x - 4\right) : (3x - 1)$;
c) $\left(5a^3 - a^2 - 4\right) : (a - 2)$;
d) $\left(6y^5 - 5y^4 + y^2 - 1\right) : \left(2y^2 - 3\right)$.

12.3 (*). Esegui le divisioni tra polinomi.

a) $\left(-7a^4 + 3a^2 - 4 + a\right) : \left(a^3 - 2\right)$;
b) $\left(x^7 - 4\right) : \left(x^3 - 2x^2 + 3x - 7\right)$;
c) $\left(x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{3}{2}\right) : \left(x^2 + 3x\right)$;
d) $\left(2x^4 + 2x^3 - \frac{15}{2}x^2 - 15x - 7\right) : (2x + 3)$.

12.4 (*). Esegui le divisioni tra polinomi.

a) $\left(6 - 7a + 3a^2 - 4a^3 + a^5\right) : \left(1 - 2a^3\right)$;
b) $\left(a^6 - 1\right) : \left(1 + a^3 + 2a^2 + 2a\right)$;
c) $\left(a^4 - \frac{5}{4}a^3 + \frac{11}{8}a^2 - \frac{a}{2}\right) : \left(a^2 - \frac{a}{2}\right)$;
d) $\left(2x^3 - 6x^2 + 6x - 2\right) : (2x - 2)$.

12.5. Esegui le divisioni tra polinomi.

a) $\left(2x^5 - 11x^3 + 2x + 2\right) : \left(x^3 - 2x^2 + 1\right)$;
b) $\left(15x^4 - 2x + 5\right) : \left(2x^2 + 3\right)$;
c) $\left(-\frac{9}{2}x^2 - 2x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{69}{8}x - \frac{9}{4} - \frac{4}{3}x^5\right) : \left(-2x^2 - 3x - \frac{3}{4}\right)$.

12.2 - Polinomi in più variabili

12.6. Dividi il polinomio $A(x,y) = x^3 + 3x^2y + 2xy^2$ per il polinomio $B(x,y) = x + y$ rispetto alla variabile x. Il quoziente è $Q(x,y) = \dots\dots\dots$, il resto è $R(x,y) = 0$.

Ordina il polinomio $A(x,y)$ in modo decrescente rispetto alla variabile y ed esegui nuovamente la divisione. Il quoziente è sempre lo stesso? Il resto è sempre zero?

12.7. Esegui le divisioni tra polinomi rispetto alla variabile x.

a) $\left(3x^4 + 5ax^3 - a^2x^2 - 6a^3x + 2a^4\right) : \left(3x^2 - ax - 2a^2\right)$;
b) $\left(-4x^5 + 13x^3y^2 - 12y^3x^2 + 17x^4y - 12y^5\right) : \left(2x^3 - 3yx^2 + 2y^2x - 3y^3\right)$;
c) $\left(x^5 - x^4 - 2ax^3 + 3ax^2 - 2a\right) : \left(x^2 - 2a\right)$.

12.3 - Regola di Ruffini

12.8. Completa la seguente divisione utilizzando la regola di Ruffini: $\left(x^2 - 3x + 1\right) : (x - 3)$.

- Calcolo del resto: $(+3)^2 - 3(+3) + 1 = \dots$;
- calcolo del quoziente: $Q(x) = 1x + 0 = x \quad R = \dots$;
- verifica: $(x-3)\cdot x + \dots = x^2 - 3x + 1$.

12.9 (*). Risolvi le seguenti divisioni utilizzando la regola di Ruffini.

a) $\left(3x^3 - 4x^2 + 5x - 1\right) : (x - 2)$;
b) $\left(x^5 - x^3 + x^2 - 1\right) : (x - 1)$;
c) $\left(x^4 - 10x^2 + 9\right) : (x - 3)$.

12.10 (*). Risolvi le seguenti divisioni utilizzando la regola di Ruffini.

a) $\left(x^4 + 5x^2 + 5x^3 - 5x - 6\right) : (x + 2)$;
b) $\left(4x^3 - 2x^2 + 2x - 4\right) : (x + 1)$;
c) $\left(\frac{4}{3}y^4 - 2y^2 + \frac{3}{2}y - 2\right) : \left(y + \frac{1}{2}\right)$.

12.11 (*). Risolvi le seguenti divisioni utilizzando la regola di Ruffini.

a) $\left(\frac{1}{3}x^5 - \frac{3}{2}x - 2\right) : (x + 2)$;
b) $\left(2a - \frac{4}{3}a^4 - 2a^2 - \frac{1}{3}\right) : \left(a - \frac{1}{2}\right)$;
c) $\left(\frac{4}{3}y^4 - \frac{3}{2}y^3 + \frac{3}{2}y - 2\right) : (y + 3)$.

12.12. Risolvi le seguenti divisioni utilizzando la regola di Ruffini.

a) $\left(27x^3 - 3x^2 + 2x + 1\right) : (x + 3)$;
b) $\left(2x^4 - 5x^3 - 3x + 2\right) : (x - 1)$;
c) $\left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{x^3}{3} + 2x^4\right) : \left(2x - \frac{3}{2}\right)$.

12.13. Risolvi le seguenti divisioni utilizzando la regola di Ruffini.

a) $\left(6a^3 - 9a^2 + 9a - 6\right) : (3a - 2)$;
b) $(2x^4 - 3x^2 - 5x + 1) : (2x - 3)$;
c) $\left(x^5 + \frac{1}{3}x^4 - 2x^2 - \frac{2}{3}x\right) : \left(x + \frac{1}{3}\right)$.

12.14 (*). Risolvi le seguenti divisioni utilizzando la regola di Ruffini.

a) $\left(x^3 - 2x^2 + 2x - 4\right) : (2x - 2)$;
b) $\left(3x^4 - 2x^3 + x - 1\right) : (2x - 3)$;
c) $\left(\frac{3}{2}a^4 - 2a^2 + a - \frac{1}{2}\right) : (3a - 1)$.

12.15 (*). Risolvi le seguenti divisioni nella variabile a.

a) $\left(3a^4b^4 + a^2b^2 + 2ab + 2\right) : (ab - 1)$;
b) $\left(3a^4b^2 - 2a^2b\right) : (a^2b - 3)$.

12.16 (*). Risolvi le seguenti divisioni nella variabile x utilizzando la regola di Ruffini.

a) $\left(x^4 - ax^3 - 4a^2x^2 + 7a^3x - 6a^4\right) : (x - 2a)$;
b) $\left(x^4 - 2ax^3 + 2a^3x - a^4\right) : (x + a)$.

12.17 (*). Risolvi utilizzando, quando puoi, il teorema di Ruffini.

a) Per quale valore di k il polinomio $x^3 - 2x^2 + kx + 2$ è divisibile per $x^2 - 1$?
b) Per quale valore di k il polinomio $x^3 - 2x^2 + kx$ è divisibile per $x^2 - 1$?
c) Per quale valore di k il polinomio $x^3 - 3x^2 + x - k$ è divisibile per $x + 2$?
d) Scrivi, se possibile, un polinomio nella variabile a che, diviso per $a^2 - 1$ dà come quoziente $a^2 + 1$ e come resto -1.

12.18 (*). Risolvi utilizzando il teorema di Ruffini.

a) Trovare un polinomio di secondo grado nella variabile x che risulti divisibile per $(x - 1)$ e per $(x - 2)$ e tale che il resto della divisione per $(x - 3)$ sia uguale a -4;
b) Per quale valore di a la divisione $\left(2x^2 - ax + 3\right) : (x + 1)$ dà resto 5?
c) Per quale valore di k il polinomio $2x^3 - x^2 + kx - 3k$ è divisibile per $x + 2$?
d) I polinomi $A(x) = x^3 + 2x^2 - x + 3k - 2$ e $B(x) = kx^2 - (3k - 1)x - 4k + 7$ divisi entrambi per $x + 1$ per quale valore di k hanno lo stesso resto?

12.4.2 Risposte

12.2. a) $Q(x) = \frac{3}{2}x - 1; R(x) = 2$, b) $Q(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{16}{27}; R(x) = -\frac{92}{27}$, c) $Q(a) = 5a^2 + 9a + 18$; $R(a) = 32$, d) $Q(y) = 3y^3 - \frac{5}{2}y^2 + \frac{9}{2}y - \frac{13}{4}$; $R(y) = \frac{27}{2}y - \frac{43}{4}$.

12.3. a) $Q(a) = -7a; R(a) = 3a^2 - 13a - 4$, b) $Q(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 17$; $R(x) = 32x^2 - 30x + 115$, c) $Q(x) = x - \frac{7}{2}$; $R(x) = \frac{13}{2}x + \frac{3}{2}$, d) $Q(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x - 3$; $R(x) = 2$.

12.4. a) $Q(a) = 2 - \frac{1}{2}a^2; R(a) = \frac{7}{2}a^2 - 7a + 4$, b) $Q(a) = a^3 - 2a^2 + 2a - 1; R(a) = 0$, c) $Q(a) = a^2 - \frac{3}{4}a + 1; R(a) = 0$, d) $Q(x) = x^2 - 2x + 1; R(x) = 0$.

12.9. a) $Q(x) = 3x^2 + 2x + 9; R(x) = 17$, b) $Q(x) = x^4 + x^3 + x + 1; R(x) = 0$, c) $Q(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3; R(x) = 0$.

12.10. a) $Q(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3; R(x) = 0$, b) $Q(x) = 4x^2 - 6x + 8; R(x) = -12$, c) $Q(y) = \frac{4}{3}y^3 - \frac{2}{3}y^2 - \frac{5}{3}y + \frac{7}{3}; R(y) = -\frac{19}{6}$.

12.11. a) $Q(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{23}{6}; R(x) = -\frac{29}{3}$, b) $Q(a) = -\frac{4}{3}a^3 - \frac{2}{3}a^2 - \frac{7}{3}a + \frac{5}{6}$; $R(a) = \frac{1}{12}$, c) $Q(y) = \frac{4}{3}y^3 - \frac{11}{2}y^2 + \frac{33}{2}y - 48; R(y) = 142$.

12.14. a) $Q(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$; $R(x) = -3$, b) $Q(x) = \frac{3}{2}x^3 + \frac{5}{4}x^2 + \frac{15}{8}x + \frac{53}{16}$; $R(x) = \frac{143}{16}$, c) $Q(a) = \frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{6}a^2 - \frac{11}{18}a + \frac{7}{54}$; $R(a) = -\frac{10}{27}$.

12.15. a) $Q(a) = 3a^3b^3 + 3a^2b^2 + 4ab + 6$; $R(a) = 8$, b) $Q(a) = 3a^2b + 7$; $R(a) = 21$.

12.16. a) $Q(x) = x^3 + ax^2 - 2a^2x + 3a^3$; $R(x) = 0$ b) $Q(x) = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$; $R(x) = 0$.

12.17. a) $k = -1$, b) nessuno, c) $k = -22$, d) $a^4 - 2$.

12.18. a) $-2x^2 + 6x - 4$, b) $a = 0$, c) $k = -4$, d) $k = 2$.