13 Identità, equazioni, equivalenza

13.1 Identità ed equazioni

Analizziamo le proposizioni:

a) "cinque è uguale alla differenza tra sette e due";
b) "la somma di quattro e due è uguale a otto";
c) "il doppio di un numero naturale è uguale alla differenza tra nove e il numero stesso";
d) "la somma di due numeri interi è uguale a dieci".

Notiamo che sono tutte costruite con il predicato "essere uguale a". Riscriviamo in formula ciascuna di esse:

a) $5 = 7 - 2$; b) $4 + 2 = 8$; c) $2x = 9 - x$; d) $x + y = 10$.

Notiamo che le prime due contengono solamente numeri, le seconde contengono anche variabili.

Le formule del primo tipo si dicono *chiuse* e di esse si può subito stabilire se sono vere o false; così in $\mathbb{N}$ la formula $5 = 7 - 2$ è vera, mentre $4 + 2 = 8$ è falsa.

Definizione 13.1. Le *formule chiuse* costruite con il predicato «essere uguale» si chiamano *uguaglianze*; stabilito l'ambiente in cui vengono enunciate si può immediatamente stabilire il loro valore di verità.

Esempio 13.1. La formula chiusa $1 - 6 = -5$ è un'uguaglianza vera se la consideriamo nell'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi relativi, è falsa se la vediamo come sottrazione tra numeri naturali.

Le formule c) e d) che contengono variabili si dicono *aperte*; le variabili che compaiono sono chiamate *incognite*. Di tali formule non si può subito stabilire il valore di verità.

Quando alle incognite sostituiamo un numero, queste si trasformano in formule chiuse e allora possiamo stabilirne il valore di verità relativamente alla sostituzione effettuata.

Esempio 13.2. Nella formula $2x = 9 - x$ sostituiamo alla variabile x il valore 0; otteniamo: $2 \cdot 0 = 9 - 0 \Rightarrow 0 = 9$, falsa.

Sostituiamo ora alla variabile x il valore 3; otteniamo $2 \cdot 3 = 9 - 3 \Rightarrow 6 = 6$, vera.

Esempio 13.3. Nella formula $x + y = 10$ sostituiamo alle variabili coppie di numeri interi come $x = 2$ e $y = 5$; otteniamo $2 + 5 = 10 \Rightarrow 7 = 10$, falsa. Se sostituiamo $x = 4$ e $y = 6$ ci rendiamo subito conto che l'uguaglianza ottenuta è *vera*. Esistono molte altre coppie di numeri interi rendono vera l'uguaglianza.

Definizione 13.2. Le formule aperte costruite con il predicato essere uguale si chiamano *equazioni*; le due espressioni che compaiono a sinistra e a destra del segno di uguaglianza si chiamano rispettivamente *primo membro* e *secondo membro*.

L'insieme dei valori che sostituiti alle incognite trasformano l'equazione in un'uguaglianza vera costituisce l'*insieme soluzione* (I. S.) o più semplicemente la *soluzione* dell'equazione.

Affronteremo per ora equazioni in *una sola incognita* che, dopo aver svolto eventuali calcoli nei due membri, comparirà a *grado* 1 e i cui *coefficienti* sono *numeri razionali*. Cercheremo la sua soluzione nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, salvo esplicita indicazione differente.

Esempio 13.4. Cercare le soluzioni nell'insieme indicato.

a) $x^2 = 1$ con $x \in \mathbb{N}$. Risulta vera solo se a x sostituiamo il valore 1; infatti 1 è l'unico numero naturale il cui quadrato è 1. L'insieme soluzione è $\{1\}$.
b) $x^2 = 1$ con $x \in \mathbb{Z}$. Risulta vera se a x sostituiamo il valore 1 oppure il valore -1; infatti sia -1 che 1 elevati al quadrato danno 1. L'insieme soluzione è $\{-1, 1\}$.
c) $x^2 + 1 = 0$ con $x \in \mathbb{R}$. Essendo la formula a sinistra dell'uguale la somma di un quadrato con il numero 1, si ottiene sempre un numero $\geqslant 1$ e non si può ottenere 0, pertanto è impossibile trovare una soluzione.
d) $2x + 3 = (3 + x) + x$ con $x \in \mathbb{Q}$. Eseguendo il semplice calcolo al secondo membro, ci rendiamo conto che qualunque valore venga sostituito all'incognita l'uguaglianza risulta vera. L'insieme soluzione è $\mathbb{Q}$.

In generale un'equazione in una incognita può essere:

a) *determinata*, quando l'insieme soluzione è un sottoinsieme proprio dell'insieme numerico considerato;
b) *impossibile*, quando l'insieme soluzione è l'insieme vuoto $\emptyset$;
c) *indeterminata* o *identità*, quando l'insieme soluzione coincide con l'insieme considerato.

Esempio 13.5. Analizziamo le equazioni:

a) $3 \cdot x = 0$; b) $0 \cdot x = 5$; c) $0 \cdot x = 0$.

Tutte e tre hanno la stessa struttura: il primo membro è il prodotto di un coefficiente numerico per un valore incognito, il secondo membro è un numero.

a) Per trovare l'insieme soluzione della prima equazione cerchiamo in $\mathbb{Q}$ il numero che moltiplicato per 3 dà come prodotto 0. L'unico numero che rende vera l'uguaglianza è zero. Quindi l'insieme delle soluzioni è $\{0\}$. L'equazione è determinata.

b) Per trovare l'insieme soluzione della seconda equazione cerchiamo in $\mathbb{Q}$ il numero che moltiplicato per 0 dà come prodotto 5. Per la proprietà della moltiplicazione quando moltiplichiamo per 0 il prodotto è 0, non otterremo mai 5. Quindi l'insieme soluzione è l'insieme vuoto. L'equazione è impossibile.

c) Per trovare l'insieme soluzione della terza equazione cerchiamo in $\mathbb{Q}$ il numero che moltiplicato per zero dà come prodotto zero. Per la proprietà della moltiplicazione quando moltiplichiamo per 0 il prodotto è 0 qualunque sia l'altro fattore. Quindi l'insieme delle soluzioni è $\mathbb{Q}$. L'equazione è indeterminata.

13.1.1 Ricerca dell'insieme soluzione

In alcuni casi la soluzione di un'equazione si può trovare applicando semplicemente le proprietà delle operazioni.

Esempio 13.6. Analizziamo lo schema operativo dell'equazione $3x - 1 = 17$ con $x \in \mathbb{N}$.

Si opera sul valore incognito x per ottenere 17:

$$\textit{entra } x, \text{ si moltiplica per tre} \rightarrow\ 3 \cdot x \text{ si sottrae } 1 \rightarrow\ 3 \cdot x - 1 \text{ si ottiene } 17.$$

Qual è il valore in ingresso?

Per determinare il valore in ingresso basterà ripercorrere lo schema effettuando le operazioni inverse:

$$\textit{da } 17 \text{ aggiungi } 1 \rightarrow\ 18 \text{ dividi per tre } \rightarrow\ 18 : 3 \rightarrow x.$$

La soluzione dell'equazione è $x = 6$ e I. S. (insieme soluzione) è $\{6\}$.

✍ *Esercizio proposto:* 13.1

Per risolvere un'equazione più complessa come $\left(\frac{1}{2}x + 3\right) \cdot (-5 + x) = 12x + \frac{1}{2}x^2$ con $x \in \mathbb{Q}$, non possiamo applicare il procedimento precedente; potremmo procedere per tentativi, sostituendo all'incognita alcuni valori scelti a caso e verificando se il valore assunto dal primo membro risulta uguale a quello assunto dal secondo membro. È evidente però che questo procedimento raramente porterà a trovare tutte le soluzioni di un'equazione.

❑ **Osservazione** Per risolvere un'equazione, cioè per determinare tutte le eventuali soluzioni, si procede applicando i principi d'equivalenza.

13.2 Prinicipi di equivalenza

Definizione 13.3. Due equazioni sono *equivalenti* se hanno lo stesso insieme soluzione.

Principio 13.1 (Primo principio di equivalenza). *Aggiungendo o sottraendo ad ambo i membri di un'equazione data uno stesso numero o una stessa espressione (definita per ogni valore dell'incognita) si ottiene un'equazione equivalente a quella data.*

Principio 13.2 (Secondo principio di equivalenza). *Moltiplicando o dividendo ambo i membri di un'equazione per uno stesso numero non nullo o per un'espressione non nulla (definita per ogni valore attribuito all'incognita) si ottiene un'equazione equivalente alla data.*

La forma più semplice di un'equazione di primo grado in un'incognita è del tipo:

$$x = \text{ numero.}$$

L'insieme soluzione di una equazione di questo tipo è semplicemente:

$$\text{I. S.} = \{\text{ numero}\}.$$

Per esempio, l'insieme delle soluzioni dell'equazione $x = -3$ è $\text{I. S.} = \{-3\}$.

I principi sopra enunciati permettono di trasformare qualunque equazione nella forma canonica che ha lo stesso insieme soluzione di quella assegnata.

13.2.1 Risoluzione di equazioni numeriche intere di primo grado

In questo paragrafo vedremo come usare i principi d'equivalenza prima enunciati per condurre un'equazione alla forma canonica e dunque determinarne la soluzione.

Definizione 13.4. Risolvere un'equazione significa determinare il suo Insieme Soluzione.

Cominciamo con alcuni esempi.

Esempio 13.7. Applicazione del 1° principio di equivalenza.

a) $x - 5 = 3$: aggiungiamo 5 a entrambi i membri: $x - 5 + 5 = 3 + 5 \Rightarrow x = 8$, $\text{I. S.} = \{8\}$.
b) $3x = 2 + 2x$: sottraiamo $2x$ a entrambi i membri: $3x - 2x = 2 + 2x - 2x \Rightarrow x = 2$, $\text{I. S.} = \{2\}$.

✍ *Esercizi proposti:* 13.2, 13.3, 13.4, 13.5

Esempio 13.8. Applicazione del 2° principio di equivalenza.

a) $3x = 12$ dividiamo entrambi i membri per 3, si ha

$$\frac{3}{3}x = \frac{12}{3} \Rightarrow x = 4 \rightarrow \text{I. S.} = \{4\}.$$

b) $\frac{1}{2}x = 2$ moltiplichiamo entrambi i membri per 2, si ha

$$2 \cdot \frac{1}{2}x = 2 \cdot 2 \Rightarrow x = 4 \rightarrow \text{I. S.} = \{4\}.$$

✍ *Esercizi proposti:* 13.6, 13.7, 13.8

Esempio 13.9. $-2x + 1 = 3x - 5$.

a) Sottraiamo 1 a entrambi i membri $-2x + 1 - 1 = 3x - 5 - 1$ quindi $-2x = 3x - 6$;
b) sottraiamo $3x$ a entrambi i membri $-2x - 3x = 3x - 3x - 6$ quindi $-5x = -6$;
c) dividiamo entrambi i membri per -5: $\frac{-5}{-5}x = \frac{-6}{-5} \Rightarrow x = \frac{6}{5} \rightarrow \mathrm{I.S.} = \left\{\frac{6}{5}\right\}$.

✍ *Esercizi proposti:* 13.9, 13.10, 13.11

Esempio 13.10. Prendiamo l'equazione $(x+1) + 3 \cdot (2+x) = 12x - 1$ nella sola incognita x di primo grado a coefficienti numerici interi. Cerchiamo di trasformarla nella forma canonica "$x =$ numero" applicando i principi di equivalenza.

Passo I: svolgiamo i calcoli al primo e al secondo membro: $x + 1 + 6 + 3x = 12x - 1$.

Passo II: sommiamo in ciascun membro i termini simili (se ce ne sono): $4x + 7 = 12x - 1$.

Passo III: sottraiamo ad ambo i membri il monomio $12x$, applicando il primo principio: $4x - 12x + 7 = 12x - 1 - 12x$, sommiamo i monomi simili al primo e al secondo membro e otteniamo $-8x + 7 = -1$.

Passo IV: sottraiamo ad ambo i membri il numero 7, applicando il primo principio e sommiamo i termini simili: $-8x + 7 - 7 = -1 - 7 \Rightarrow -8x = -8$.

Passo V: dividiamo ambo i membri per -8, applicando il secondo principio: $\frac{-8}{-8}x = \frac{-8}{-8} \Rightarrow x = 1$.

L'equazione assegnata $(x+1) + 3 \cdot (2+x) = 12x - 1$ risulta equivalente all'ultima trovata x=1, pertanto il suo insieme soluzione è $\mathrm{I.S.} = \{1\}$.

✍ *Esercizi proposti:* 13.12, 13.13

❑ **Osservazione** La trasformazione di un'equazione nella forma canonica prevede che il termine con l'incognita sia collocato da una parte del segno uguale mentre dall'altra parte sia posto il termine numerico.

Enunciamo alcune *regole pratiche* che ci possono aiutare nella procedura risolutiva e che discendono direttamente dal primo principio d'equivalenza.

a) Spostando da un membro all'altro un addendo occorre cambiargli il segno; l'equazione ottenuta è equivalente a quella data.

$2x - 3 = 2$, per lasciare da sola la x al primo menbro devo aggiungere $+3$ al primo e al secondo membro, ottengo $2x - 3 + 3 = 2 + 3$ da cui $2x = 2 + 3$.

L'effetto che si ha è che si è spostato il -3 al secondo membro cambiandolo di segno.

b) Se in entrambi i membri dell'equazione compare uno stesso addendo con lo stesso segno, esso può essere cancellato da entrambi i membri: l'equazione che si ottiene è equivalente a quella data.

Infatti: $2x-3+x=2+x$. La x che sta al secondo membro va portata al primo, cambiandola di segno $2x-3+x-x=2$ da cui $2x-3=2$.

L'effetto che si ha è che si possono eliminare le due x che stanno una al primo membro e una al secondo membro.

c) Se il coefficiente dell'incognita è -1, l'equazione si presenta nella forma $-x=n$, si può cambiare di segno ai termini del primo e del secondo membro, per ottenere la forma $x=-n$. Cambiare di segno equivale a moltiplicare per -1 i due membri dell'equazione.

Infatti:

$x-3=2x+1$. Dobbiamo portare $2x$ al primo membro e -3 al secondo membro, otteniamo $x-2x=3+1$ da cui $-x=4$.

Poiché il coefficiente della x è negativo moltiplichiamo per -1 primo e secondo membro $-1\cdot(-x)=-1\cdot(4)$ da cui $x=-4$.

Problema 13.11. Risolvi la seguente equazione applicando queste regole pratiche.

$$5x+2\cdot(3-x)+1=-(4x-1)+2\cdot(6-x).$$

Soluzione I passi da effettuare sono

a) svolgiamo i calcoli: $5x+6-2x+1=-4x+1+12-2x$;
b) eliminiamo i termini uguali che compaiono nei due membri:

$$5x+6\cancel{-2x}\cancel{+1}=-4x\cancel{+1}+12\cancel{-2x}\Rightarrow\;5x+6=-4x+12;$$

c) spostiamo il monomio $-4x$ del secondo membro a sinistra del segno uguale e il numero $+6$ da sinistra a destra, ottenendo: $5x+4x=-6+12$;
d) sommando i termini simili nei due membri, otteniamo $9x=+6$ da cui divedendo per nove ambo i membri si ottiene

$$x=\frac{2}{3}\rightarrow \mathrm{I.S.}=\left\{\frac{2}{3}\right\}.$$

♦

✍ *Esercizi proposti:* 13.14, 13.15, 13.16, 13.17, 13.18

13.3 Equazioni a coefficienti frazionari

Vediamo, illustrando qualche esempio, come si procede.

Esempio 13.12. $\frac{2}{3}x+4-\frac{1}{2}+2x=\frac{x+2}{3}-\frac{5}{2}x+1.$

Sappiamo che il secondo principio d'equivalenza ci permette di moltiplicare ambo i membri per uno stesso numero diverso da zero per ottenere un'equazione equivalente alla data.

Passo I Calcoliamo il mcm tra i denominatori: in questo caso mcm(2,3) = 6

Passo II Moltiplichiamo per 6 ambo i membri dell'equazione:

$$6\left(\frac{2}{3}x+4-\frac{1}{2}+2x\right)=6\left(\frac{x+2}{3}-\frac{5}{2}x+1\right).$$

Passo III Eseguiamo i calcoli: $4x+24-3+12x=2x+4-15x+6$.

I coefficienti dell'equazione sono ora numeri interi, puoi procedere da solo come abbiamo visto negli esempi precedenti. Il risultato è $x=-\dfrac{11}{25}$.

✍ *Esercizio proposto:* 13.19

13.3.1 Equazioni in cui l'incognita compare con grado maggiore di 1

Esempio 13.13. $(2x+1)\cdot(x-2)=2\cdot(x+1)^2-5x$.

Prima di iniziare la procedura risolutiva analizziamo i membri dell'equazione: al primo membro compare il prodotto di due polinomi di primo grado, nel secondo il quadrato di un binomio di primo grado, pertanto l'incognita comparirà a grado due. Apparentemente l'equazione è di secondo grado. Iniziamo la procedura risolutiva:

Passo I svolgiamo i calcoli e otteniamo: $2x^2-4x+x-2=2x^2+4x+2-5x \Rightarrow 2x^2-3x-2=2x^2-x+2$.

Passo II applichiamo le regole pratiche eliminando i monomi uguali con l'incognita al secondo grado e otteniamo $-3x+x=+2+2$.

Abbiamo ottenuto un'equazione di primo grado; puoi procedere da solo e determinare la forma canonica e I. S..

Passo III ....

13.3.2 Equazioni in cui l'incognita scompare

Esempio 13.14. $\dfrac{4}{5}-\dfrac{x}{2}=\dfrac{2-5x}{10}$.

Passo I Calcoliamo il mcm tra i denominatori: in questo caso $\text{mcm}(5,2,10)=10$.

Passo II Moltiplichiamo per 10 ambo i membri dell'equazione: $10\left(\dfrac{4}{5}-\dfrac{x}{2}\right)=10\left(\dfrac{2-5x}{10}\right)$.

Passo III Eseguiamo i calcoli: $8-5x=2-5x$.

Passo IV Applichiamo la regola pratica: $-5x+5x=2-8$ i monomi in x si annullano!

Passo V Sommando i monomi simili si ottiene: $0 \cdot x = -6$.

Il coefficiente dell'incognita è zero; non possiamo applicare il secondo principio e dividere ambo i membri per zero. D'altra parte non esiste nessun numero che moltiplicato per zero dia come prodotto -6. Quindi $\text{I. S.} = \emptyset$, l'equazione risulta impossibile.

Esempio 13.15. $\dfrac{x}{6} - \dfrac{2x}{3} = -\dfrac{x}{2}$.

Passo I Calcoliamo il mcm tra i denominatori: in questo caso $\text{mcm}(6,3,2) = 6$.

Passo II Moltiplichiamo per 6 ambo i membri dell'equazione: $6\left(\dfrac{x}{6} - \dfrac{2x}{3}\right) = 6\left(-\dfrac{x}{2}\right)$.

Passo III Eseguiamo i calcoli: $x - 4x = -3x$.

Passo IV Applicando il primo principio si ottiene $0 \cdot x = 0$.

Il coefficiente dell'incognita è zero; non possiamo applicare il secondo principio e dividere ambo i membri per zero. D'altra parte per la proprietà della moltiplicazione qualunque numero moltiplicato per zero dà come prodotto zero. Quindi $\text{I. S.} = \mathbb{Q}$, l'equazione è indeterminata (identità).

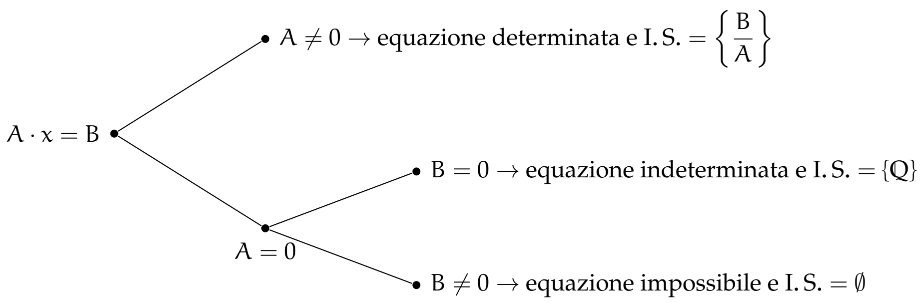
13.3.3 Riassunto

$A \cdot x = B$ con A e B numeri razionali è la forma canonica dell'equazione di primo grado in una incognita a coefficienti numerici.

Possono presentarsi i casi:

- se $A \neq 0$ possiamo applicare il secondo principio d'equivalenza dividendo ambo i membri per A quindi $\text{I. S.} = \left\{\dfrac{B}{A}\right\}$. L'equazione è determinata.
- se $A = 0$ non possiamo applicare il secondo principio d'equivalenza e dividere ambo i membri per A e si presentano due casi:
  - $B = 0$ allora $\text{I. S.} = \mathbb{Q}$. L'equazione è indeterminata.
  - $B \neq 0$ allora $\text{I. S.} = \emptyset$. L'equazione è impossibile.

Lo schema precedente si può rappresentare anche con un grafo ad albero:



✍ *Esercizi proposti:* 13.20, 13.21, 13.22, 13.23, 13.24, 13.25, 13.26, 13.27, 13.28, 13.29, 13.30, 13.31, 13.32, 13.33, 13.34, 13.35, 13.36, 13.37, 13.38, 13.39, 13.40, 13.41, 13.42, 13.43, 13.44, 13.45, 13.46, 13.47, 13.48, 13.49,13.50

13.4 Esercizi

13.4.1 Esercizi dei singoli paragrafi

13.2 - Identità ed equazioni

13.1. Risolvi in $\mathbb{Z}$ la seguente equazione: $-x+3=-1$.

Suggerimento. Lo schema operativo è: entra x, cambia il segno in $-x$, aggiunge 3, si ottiene -1. Ora ricostruisci il cammino inverso: da -1 togli 3 ottieni ... cambia segno ottieni come soluzione $x = \ldots$.

13.3 - Risoluzione di equazioni numeriche intere di primo grado

13.2. Risolvi le seguenti equazioni applicando il 1° principio di equivalenza.

a) $x+2=7$; b) $2+x=3$; c) $16+x=26$; d) $x-1=1$; e) $3+x=-5$; f) $12+x=-22$.

13.3. Risolvi le seguenti equazioni applicando il 1° principio di equivalenza.

a) $3x=2x-1$; b) $8x=7x+4$; c) $2x=x-1$; d) $5x=4x+2$; e) $3x=2x-3$; f) $3x=2x-2$.

13.4. Risolvi le seguenti equazioni applicando il 1° principio di equivalenza.

a) $7+x=0$; b) $7=-x$; c) $-7=x$; d) $1+x=0$; e) $1-x=0$; f) $0=2-x$.

13.5. Risolvi le seguenti equazioni applicando il 1° principio di equivalenza.

a) $3x-1=2x-3$; b) $7x-2x-2=4x-1$; c) $-5x+2=-6x+6$; d) $-2+5x=8+4x$; e) $7x+1=6x+2$; f) $-1-5x=3-6x$.

13.6. Risolvi le seguenti equazioni applicando il 2° principio di equivalenza.

a) $2x=8$; b) $2x=3$; c) $6x=24$; d) $0x=1$; e) $\frac{1}{3}x=-1$; f) $\frac{1}{2}x=\frac{1}{4}$.

13.7. Risolvi le seguenti equazioni applicando il 2° principio di equivalenza.

a) $\frac{3}{2}x=12$; b) $2x=-2$; c) $3x=\frac{1}{6}$; d) $\frac{1}{2}x=4$; e) $\frac{3}{4}x=\frac{12}{15}$; f) $2x=\frac{1}{2}$.

13.8. Risolvi le seguenti equazioni applicando il 2° principio di equivalenza.

a) $3x = 6$;
b) $\frac{1}{3}x = \frac{1}{3}$;
c) $\frac{2}{5}x = \frac{10}{25}$;
d) $-\frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}$;
e) $0,1x = 1$;
f) $0,1x = 10$;
g) $0,1x = 0,5$;
h) $-0,2x = 5$.

13.9. Risolvi le seguenti equazioni applicando entrambi i principi.

a) $2x + 1 = 7$;
b) $3 - 2x = 3$;
c) $6x - 12 = 24$;
d) $3x + 3 = 4$;
e) $5 - x = 1$;
f) $7x - 2 = 5$.

13.10. Risolvi le seguenti equazioni applicando entrambi i principi.

a) $2x + 8 = 8 - x$;
b) $2x - 3 = 3 - 2x$;
c) $6x + 24 = 3x + 12$;
d) $2 + 8x = 6 - 2x$;
e) $6x - 6 = 5 - x$;
f) $-3x + 12 = 3x + 18$.

13.11. Risolvi le seguenti equazioni applicando entrambi i principi.

a) $3 - 2x = 8 + 2x$;
b) $\frac{2}{3}x - 3 = \frac{1}{3}x + 1$;
c) $\frac{6}{5}x = \frac{24}{5} - x$;
d) $3x - 2x + 1 = 2 + 3x - 1$;
e) $\frac{2}{5}x - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}x + \frac{1}{10}$;
f) $\frac{5}{6}x + \frac{3}{2} = \frac{25}{3} - \frac{10}{2}x$.

13.12. Risolvi l'equazione $10x + 4 = -2 \cdot (x + 5) - x$ seguendo la traccia:

1. svolgi i calcoli al primo e al secondo membro: . . . . ;
2. somma i monomi simili in ciascun membro dell'equazione: . . . . ;
3. applica il primo principio d'equivalenza per lasciare in un membro solo monomi con l'incognita e nell'altro membro solo numeri: . . . . ;
4. somma i termini del primo membro e somma i termini del secondo membro: . . . . ;
5. applica il secondo principio d'equivalenza dividendo ambo i membri per il coefficiente dell'incognita: . . . . in forma canonica: . . . . ;
6. scrivi l'Insieme Soluzione: I. S. = ...

13.13. Risolvi, seguendo la traccia, l'equazione $x - (3x + 5) = (4x + 8) - 4 \cdot (x + 1)$:

1. svolgi i calcoli: . . . . ;
2. somma i monomi simili: . . . . ;
3. porta al primo membro i monomi con la x e al secondo quelli senza: . . . . ;
4. somma i monomi simili al primo membro e al secondo membro: . . . . ;
5. dividi ambo i membri per il coefficiente dell'incognita: . . . . ;
6. l'insieme soluzione è: . . . .

13.14 (*). Risolvi le seguenti equazioni con le regole pratiche indicate.

a) $3(x-1)+2(x-2)+1=2x$;
b) $x-(2x+2)=3x-(x+2)-1$;
c) $-2(x+1)-3(x-2)=6x+2$;
d) $x+2-3(x+2)=x-2$.

13.15 (*). Risolvi le seguenti equazioni con le regole pratiche indicate.

a) $2(1-x)-(x+2)=4x-3(2-x)$;
b) $(x+2)^2=x^2-4x+4$;
c) $5(3x-1)-7(2x-4)=28$;
d) $(x+1)(x-1)+2x=5+x(2+x)$.

13.16 (*). Risolvi le seguenti equazioni con le regole pratiche indicate.

a) $2x+(x+2)(x-2)+5=(x+1)^2$;
b) $4(x-2)+3(x+2)=2(x-1)-(x+1)$;
c) $(x+2)(x+3)-(x+3)^2=(x+1)(x-1)-x(x+1)$;
d) $x^3+6x^2+(x+2)^3+11x+(x+2)^2=(x+3)\left(2x^2+7x\right)$.

13.17 (*). Risolvi le seguenti equazioni con le regole pratiche indicate.

a) $(x+2)^3-(x-1)^3=9(x+1)^2-9x$;
b) $(x+1)^2+2x+2(x-1)=(x+2)^2$;
c) $2(x-2)(x+3)-3(x+1)(x-4)=-9(x-2)^2+\left(8x^2-25x+36\right)$.

13.18. Risolvi le seguenti equazioni con le regole pratiche indicate.

a) $(2x-3)^2-4x(2-5x)-4=-8x(x+4)$;
b) $(x-1)\left(x^2+x+1\right)-3x^2=(x-1)^3+1$;
c) $(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)=(2x-1)^3-12x^2$.

13.4 - Equazioni a coefficienti frazionari

13.19. Risolvi l'equazione $\dfrac{3\cdot(x-11)}{4}=\dfrac{3\cdot(x+1)}{5}-\dfrac{1}{10}$.

1. calcola $\text{mcm}(4,5,10)=\ldots\ldots$;
2. moltiplica ambo i membri per ....e ottieni: ....;
3. ....

13.20. Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme a fianco indicato.

a) $x+7=8$, $\mathbb{N}$;
b) $4+x=2$, $\mathbb{Z}$;
c) $x-3=4$, $\mathbb{N}$;
d) $x=0$, $\mathbb{N}$;
e) $x+1=0$, $\mathbb{Z}$;
f) $5x=0$, $\mathbb{Z}$.

13.21. Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme a fianco indicato.

a) $\frac{x}{4} = 0$, $\mathbb{Q}$;
b) $-x = 0$, $\mathbb{Z}$;
c) $7 + x = 0$, $\mathbb{Z}$;
d) $-2x = 0$, $\mathbb{Z}$;
e) $-x - 1 = 0$, $\mathbb{Z}$;
f) $\frac{-x}{4} = 0$, $\mathbb{Q}$.

13.22. Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme a fianco indicato.

a) $x - \frac{2}{3} = 0$, $\mathbb{Q}$;
b) $\frac{x}{-3} = 0$, $\mathbb{Z}$;
c) $2(x - 1) = 0$, $\mathbb{Z}$;
d) $-3x = 1$, $\mathbb{Q}$;
e) $3x = -1$, $\mathbb{Q}$;
f) $\frac{x}{3} = 1$, $\mathbb{Q}$.

13.23. Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme a fianco indicato.

a) $\frac{x}{3} = 2$, $\mathbb{Q}$;
b) $\frac{x}{3} = -2$, $\mathbb{Q}$;
c) $0x = 0$, $\mathbb{Q}$;
d) $0x = 5$, $\mathbb{Q}$;
e) $0x = -5$, $\mathbb{Q}$;
f) $\frac{x}{1} = 0$, $\mathbb{Q}$.

13.24. Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme a fianco indicato.

a) $\frac{x}{1} = 1$, $\mathbb{Q}$;
b) $-x = 10$, $\mathbb{Z}$;
c) $\frac{x}{-1} = -1$, $\mathbb{Z}$;
d) $3x = 3$, $\mathbb{N}$;
e) $-5x = 2$, $\mathbb{Z}$;
f) $3x + 2 = 0$, $\mathbb{Q}$.

13.25. Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $3x = \frac{1}{3}$;
b) $-3x = -\frac{1}{3}$;
c) $x + 2 = 0$;
d) $4x - 4 = 0$;
e) $4x - 0 = 1$;
f) $2x + 3 = x + 3$.

13.26. Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $4x - 4 = 1$;
b) $4x - 1 = 1$;
c) $4x - 1 = 0$;
d) $3x = 12 - x$;
e) $4x - 8 = 3x$;
f) $-x - 2 = -2x - 3$.

13.27. Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $-3(x - 2) = 3$;
b) $x + 2 = 2x + 3$;
c) $-x + 2 = 2x + 3$;
d) $3(x - 2) = 0$;
e) $3(x - 2) = 1$;
f) $3(x - 2) = 3$.

13.28. Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $0(x - 2) = 1$;
b) $0(x - 2) = 0$;
c) $12 + x = -9x$;
d) $40x + 3 = 30x - 100$;
e) $4x + 8x = 12x - 8$;
f) $-2 - 3x = -2x - 4$.

13.29. Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $2x+2=2x+3$;
b) $\frac{x+2}{2}=\frac{x+1}{2}$;
c) $\frac{2x+1}{2}=x+1$;
d) $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}=3x-\frac{1}{2}$;
e) $\pi x=0$;
f) $2\pi x=\pi$.

13.30. Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $0,12x=0,1$;
b) $-\frac{1}{2}x-0,3=-\frac{2}{5}x-0,15$;
c) $892x-892=892x-892$;
d) $892x-892=893x-892$;
e) $348x-347=340x-347$;
f) $340x+740=8942+340x$.

13.31. Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $2x+3=2x+4$;
b) $2x+3=2x+3$;
c) $2(x+3)=2x+5$;
d) $2(x+4)=2x+8$;
e) $3x+6=6x+6$;
f) $-2x+3=-2x+4$.

13.32. Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}=\frac{x}{4}-\frac{1}{2}$;
b) $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}=\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$;
c) $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}=3\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$;
d) $\frac{x}{200}+\frac{1}{100}=\frac{1}{200}$;
e) $1000x-100=2000x-200$;
f) $100x-1000=-1000x+100$.

13.33 (*). Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $x-5(1-x)=5+5x$;
b) $2(x-5)-(1-x)=3x$;
c) $3(2+x)=5(1+x)-3(2-x)$;
d) $4(x-2)-3(x+2)=2(x-1)$;
e) $\frac{x+1000}{3}+\frac{x+1000}{4}=1$;
f) $\frac{x-4}{5}=\frac{2x+1}{3}$.

13.34 (*). Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $\frac{x+1}{2}+\frac{x-1}{5}=\frac{1}{10}$;
b) $\frac{x}{3}-\frac{1}{2}=\frac{x}{4}-\frac{x}{6}$;
c) $8x-\frac{x}{6}=2x+11$;
d) $3(x-1)-\frac{1}{7}=4(x-2)+1$;
e) $537x+537\frac{x}{4}-\frac{537x}{7}=0$;
f) $\frac{2x+3}{5}=x-1$.

13.35 (*). Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $\frac{x}{2}-\frac{x}{6}-1=\frac{x}{3}$;

b) $\frac{4-x}{5}+\frac{3-4x}{2}=3$;

c) $\frac{x+3}{2}=3x-2$;

d) $\frac{x+0,25}{5}=1,75-0,\overline{3}x$;

e) $3(x-2)-4(5-x)=3x\left(1-\frac{1}{3}\right)$;

f) $4(2x-1)+5=1-2(-3x-6)$.

13.36 (*). Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $\frac{3}{2}(x+1)-\frac{1}{3}(1-x)=x+2$;

b) $\frac{1}{2}(x+5)-x=\frac{1}{2}(3-x)$;

c) $(x+3)^2 = (x-2)(x+2)+\frac{1}{3}x$;

d) $\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{2+3x}{2} = \frac{(x-1)^2}{4}$;

e) $2\left(x-\frac{1}{3}\right)+x = 3x-2$;

f) $\frac{3}{2}x+\frac{x}{4} = 5\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)-x$.

13.37 (*). Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $(2x-3)(5+x)+\frac{1}{4}=2(x-1)^2-\frac{1}{2}$;

b) $(x-2)(x+5)+\frac{1}{4}=x^2-\frac{1}{2}$;

c) $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=x^2+\frac{1}{2}$;

d) $(x+1)^2=(x-1)^2$;

e) $\frac{(1-x)^2}{2}-\frac{x^2-1}{2}=1$;

f) $\frac{(x+1)^2}{3}=\frac{1}{3}(x^2-1)$.

13.38 (*). Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $4(x+1)-3x(1-x)=(x+1)(x-1)+4+2x^2$;

b) $\frac{1-x}{3}\cdot(x+1)=1-x^2+\frac{2}{3}\left(x^2-1\right)$;

c) $(x+1)^2=x^2-1$;

d) $(x+1)^3=(x+2)^3-3x(x+3)$;

e) $\frac{1}{3}x\left(\frac{1}{3}x-1\right)+\frac{5}{3}x\left(1+\frac{1}{3}x\right)=\frac{2}{3}x(x+3)$;

f) $\frac{1}{2}\left(3x+\frac{1}{3}\right)-(1-x)+2\left(\frac{1}{3}x-1\right)=-\frac{3}{2}x+1$.

13.39 (*). Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $3+2x-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+1\right)-\frac{3}{4}x=\frac{3}{4}x+\frac{x+3}{2}$;

b) $\frac{1}{2}\left[\frac{x+2}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{x+1}{2}\right]+\frac{1}{4}x=\frac{x-2}{4}-\left(x+\frac{2-x}{3}\right)$;

c) $2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=(x+1)(3x-1)-5x-\frac{1}{2}$;

d) $\dfrac{2(x-1)}{3}+\dfrac{x+1}{5}-\dfrac{3}{5}=\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{7}{15}x;$

e) $\dfrac{1}{2}(x-2)-\left(\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{1+x}{2}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2-x}{6}+\dfrac{1+x}{3};$

f) $-\left(\dfrac{1}{2}x+3\right)-\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{5}{2}\right)+\dfrac{3}{4}(4x+1)=\dfrac{1}{2}(x-1).$

13.40 (*). Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $\dfrac{(x+1)(x-1)}{9}-\dfrac{3x-3}{6}=\dfrac{(x-1)^2}{9}-\dfrac{2-2x}{6};$

b) $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^3-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-x(x+1)(x-1)=\dfrac{-5}{2}x(x+1);$

c) $\dfrac{1}{2}\left(3x-\dfrac{1}{3}\right)-\dfrac{1}{3}(1+x)(-1+x)+3\left(\dfrac{1}{3}x-1\right)^2=\dfrac{2}{3}x;$

d) $(x-2)(x-3)-6=(x+2)^2+5;$

e) $(x-3)(x-4)-\dfrac{1}{3}(1-3x)(2-x)=\dfrac{1}{3}x-5\left(\dfrac{2x-9}{6}\right);$

f) $\dfrac{2w-1}{3}+\dfrac{w-5}{4}=\dfrac{w+1}{3}-4.$

13.41 (*). Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $(2x-5)^2+2(x-3)=(4x-2)(x+3)-28x+25;$

b) $\dfrac{(x-3)(x+3)+(x-2)(2-x)-3(x-2)}{\dfrac{1}{3}-3}=\dfrac{\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{2}x}{2};$

c) $2\left(\dfrac{1}{2}x-1\right)^2-\dfrac{(x+2)(x-2)}{2}+2x=x+\dfrac{1}{2};$

d) $(0,\overline{1}x-10)^2+0,1(x-0,2)+\left(\dfrac{1}{3}x+0,3\right)^2=\dfrac{10}{81}x^2+0,07;$

e) $5x+\dfrac{1}{6}-\left(\dfrac{2x+1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3x-1}{3}\right)^2+\dfrac{1}{3}x+(2x-1)(2x+1)=(2x+1)^2+\dfrac{1}{36};$

f)

$$\left(1+\frac{1}{2}x\right)^3-2\left(\frac{1}{2}x-2\right)^2+\left(\frac{3x-1}{3}\right)^2-\left(1-\frac{1}{3}x\right)x+\frac{1}{3}x=\frac{1}{3}(2x+1)^2$$
$$+\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{9}+\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{2}x+1\right)\left(\frac{1}{2}x-1\right).$$

13.42 (*). Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)x=\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)^2;$

b) $\frac{3}{20}+\frac{6x+8}{10}-\frac{2x-1}{12}+\frac{2x-3}{6}=\frac{x-2}{4}$;

c) $\frac{x^3-1}{18}+\frac{(x+2)^3}{9}=\frac{(x+1)^3}{4}-\frac{x^3+x^2-4}{12}$;

d) $\frac{2}{3}x+\frac{5x-1}{3}+\frac{(x-3)^2}{6}+\frac{1}{3}(x+2)(x-2)=\frac{1}{2}(x-1)^2$;

e) $\frac{5}{12}x-12+\frac{x-6}{2}-\frac{x-24}{3}=\frac{x+4}{4}-\left(\frac{5}{6}x-6\right)$;

f) $\left(1-\frac{x+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)\left(1+\frac{\frac{1}{2}x+1}{\frac{1}{2}-1}\right)+\left(\frac{\frac{1}{2}x+1}{\frac{1}{2}+1}-1\right)\cdot\frac{\frac{1}{2}+x}{\frac{1}{2}-1}-\frac{x\left(\frac{1}{2}x+1\right)}{\frac{1}{2}+1}=x^2$.

13.43. Risolvi le seguenti equazioni nell'insieme $\mathbb{Q}$.

a) $x+\frac{1}{2}=\frac{x+3}{3}-1$;

b) $\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}x$;

c) $\frac{3}{2}=2x-\left[\frac{x-1}{3}-\left(\frac{2x+1}{2}-5x\right)-\frac{2-x}{3}\right]$;

d) $\frac{x+5}{3}+3+\frac{2\cdot(x-1)}{3}=x+4$;

e) $\frac{1}{5}x-1+\frac{2}{3}x-2=\frac{10}{15}+\frac{3}{5}x$;

f) $\frac{1}{2}(x-2)^2-\frac{8x^2-25x+36}{18}+\frac{1}{9}(x-2)(x+3)=\frac{1}{6}(x+1)(x-4)$.

13.44. Per una sola delle seguenti equazioni, definite in $\mathbb{Z}$, l'insieme soluzione è vuoto. Per quale?

$\boxed{A}$ $x=x+1$ $\boxed{B}$ $x+1=0$ $\boxed{C}$ $x-1=+1$ $\boxed{D}$ $x+1=1$

13.45. Una sola delle seguenti equazioni è di primo grado nella sola incognita x. Quale?

$\boxed{A}$ $x+y=5$ $\boxed{B}$ $x^2+1=45$ $\boxed{C}$ $x-\frac{7}{89}=+1$ $\boxed{D}$ $x+x^2=1$

13.46. Tra le seguenti una sola equazione non è equivalente alle altre. Quale?

$\boxed{A}$ $\frac{1}{2}x-1=3x$ $\boxed{B}$ $6x=x-2$ $\boxed{C}$ $x-2x=3x$ $\boxed{D}$ $3x=\frac{1}{2}(x-2)$

13.47. Da $8x=2$ si ottiene:

$\boxed{A}$ $x=-6$ $\boxed{B}$ $x=4$ $\boxed{C}$ $x=\frac{1}{4}$ $\boxed{D}$ $x=-\frac{1}{4}$

13.48. Da $-9x=0$ si ottiene:

$\boxed{A}$ $x=9$ $\boxed{B}$ $x=-\frac{1}{9}$ $\boxed{C}$ $x=0$ $\boxed{D}$ $x=\frac{1}{9}$

13.49. L'insieme soluzione dell'equazione $2 \cdot (x+1) = 5 \cdot (x-1) - 11$ è:

$\boxed{A}$ I.S. $= \left\{-6\right\}$ $\boxed{B}$ I.S. $= \left\{6\right\}$ $\boxed{C}$ I.S. $= \left\{\frac{11}{3}\right\}$ $\boxed{D}$ I.S. $= \left\{\frac{1}{6}\right\}$

13.50. Per ogni equazione, individua quali tra gli elementi dell'insieme indicato a fianco sono soluzioni:

a) $\frac{x+5}{2} + \frac{1}{5} = 0$, $\quad Q = \left\{1, -5, 7, -\frac{27}{5}\right\}$;

b) $x - \frac{3}{4}x = 4$, $\quad Q = \left\{1, -1, 0, 16\right\}$;

c) $x(x+1) + 4 = 5 - 2x + x^2$, $\quad Q = \left\{-9, 3, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right\}$.

13.4.2 Risposte

13.14 a) $x = 2$, b) $x = \frac{1}{3}$, c) $x = \frac{2}{11}$, d) $x = -\frac{2}{3}$.

13.15 a) $x = \frac{3}{5}$, b) $x = 0$, c) $x = 5$, d) Impossibile.

13.16 a) Indeterminata, b) $x = -\frac{1}{6}$, c) Impossibile, d) $x = -2$.

13.17 a) Indeterminata, b) $x = \frac{5}{2}$, c) Indeterminata.

13.33 a) $x = 10$, b) Impossibile, c) $x = \frac{7}{5}$, d) $x = -12$, e) $x = -\frac{6988}{7}$, f) $x = -\frac{17}{7}$.

13.34 a) $x = -\frac{2}{7}$, b) $x = 2$, c) $x = \frac{66}{35}$, d) $x = \frac{27}{7}$, e) $x = 0$, f) $x = \frac{8}{3}$.

13.35 a) Impossibile, b) $x = -\frac{7}{22}$, c) $x = \frac{7}{5}$, d) $x = \frac{51}{16}$, e) $x = \frac{26}{5}$, f) $x = 6$.

13.36 a) $x = 1$, b) Impossibile, c) $x = -\frac{39}{17}$, d) $x = -2$, e) Impossibile, f) $x = \frac{30}{7}$.

13.37 a) $x = \frac{65}{44}$, b) $x = \frac{37}{12}$, c) $x = -\frac{1}{4}$, d) $x = 0$, e) $x = 0$, f) $x = -1$.

13.38 a) $x = -1$, b) Indeterminata, c) $x = -1$, d) Impossibile, e) $x = 0$, f) $x = \frac{23}{28}$.

13.39 a) $x = 4$, b) $x = -\frac{5}{2}$, c) $x = -\frac{9}{8}$, d) $x = \frac{13}{3}$, e) Impossibile, f) $x = 2$.

13.40 a) $x = 1$, b) $x = \frac{3}{26}$, c) $x = \frac{19}{7}$, d) $x = -1$, e) $x = \frac{23}{20}$, f) $x = -\frac{25}{7}$.

13.41 a) Indeterminata, b) $x = \frac{63}{23}$, c) $x = \frac{7}{2}$, d) $x = \frac{9000}{173}$, e) $x = -6$, f) $x = 2$.

13.42 a) $x = -\frac{20}{3}$, b) $x = -2$, c) $x = -\frac{3}{7}$, d) $x = \frac{2}{7}$, e) $x = 12$, f) $x = -\frac{1}{5}$.