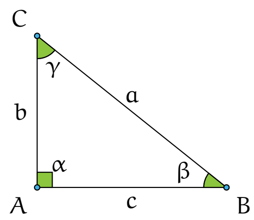
Trigonometria G

G.1 Prime definizioni

L'etimologia della parola "trigonometria" dal greco *trígonon* (triangolo) e *métron* (misura) chiarisce in cosa consiste questa parte della matematica che ci accingiamo ad affrontare. La *trigonometria* nasce dal problema di *risolvere un triangolo*, cioè di ricavare la misura di alcuni suoi elementi incogniti date le misure di altri elementi. Dal momento che gli elementi di un triangolo sono sei, i tre lati e i tre angoli, vedremo come, date le misure di almeno tre di questi elementi di cui almeno uno sia un lato, sia possibile determinare la misura degli altri tre elementi mancanti.

Disegniamo un triangolo rettangolo, retto in A, avendo cura di indicare con la stessa lettera vertice e lato opposto, come nella figura a fianco. Ricordiamo che tra i lati sussiste la relazione del teorema di Pitagora $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$ e che ciascun cateto è minore dell'ipotenusa. Ricordiamo anche che gli angoli acuti sono complementari $\widehat{C} + \widehat{B} = 90°$.



❑ **Osservazione** Basta conoscere la misura di due lati per determinare la misura del terzo lato, ma queste informazioni non ci permettono di determinare l'ampiezza degli angoli acuti se non in casi particolari. Se conosciamo un angolo acuto e la misura di un lato non possiamo determinare la misura degli altri elementi mancanti.

Riferendoci alla figura, chiamiamo cateto adiacente all'angolo acuto $\hat{\beta}$ il cateto AB indicato con c e cateto opposto all'angolo $\hat{\beta}$ il cateto AC indicato con b.

Definizione G.1. Seno, coseno, tangente

$$\sin(\beta) = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{ipotenusa}} = \frac{AC}{CB} = \frac{b}{a}, \text{ da cui } b = a \cdot \sin(\beta);$$
$$\cos(\beta) = \frac{\text{cateto adiacente}}{\text{ipotenusa}} = \frac{AB}{CB} = \frac{c}{a}, \text{ da cui } c = a \cdot \cos(\beta);$$
$$\tan(\beta) = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{cateto adiacente}} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}, \text{ da cui } b = c \cdot \tan(\beta).$$

Definizione G.2. Per l'angolo $\hat{\gamma} = 90° - \hat{\beta}$ complementare di $\hat{\beta}$:

$$\sin(\gamma) = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{ipotenusa}} = \frac{AB}{CB} = \frac{c}{a}, \text{ da cui } c = a \cdot \sin(\gamma);$$
$$\cos(\gamma) = \frac{\text{cateto adiacente}}{\text{ipotenusa}} = \frac{AC}{CB} = \frac{b}{a}, \text{ da cui } b = a \cdot \cos(\gamma);$$
$$\tan(\gamma) = \frac{\text{cateto opposto}}{\text{cateto adiacente}} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}, \text{ da cui } c = b \cdot \tan(\gamma).$$

Le definizioni sono ben poste: le funzioni *seno dell'angolo* (sen o sin), *coseno dell'angolo* (cos), *tangente dell'angolo* (tan o tg) dipendono solo dagli angoli e non dal particolare triangolo usato. Infatti angoli acuti della stessa misura appartengono a triangoli rettangoli tutti simili tra loro; siccome i lati di triangoli simili sono in proporzione, il rapporto tra i lati è invariato. Inoltre possiamo certamente affermare che le funzioni seno e coseno di angoli acuti assumono valori positivi minori di 1, poiché in un triangolo rettangolo il cateto è minore dell'ipotenusa.

Dal confronto delle definizioni notiamo che valgono le uguaglianze:

$$\sin(\gamma) = \cos(\beta); \quad \cos(\gamma) = \sin(\beta); \quad \tan(\gamma) = \frac{1}{\tan(\beta)},$$

per cui possiamo anche scrivere:

$$\sin(x) = \cos(90° - x); \quad \cos(x) = \sin(90° - x); \quad \tan(x) = \frac{1}{\tan(90° - x)}.$$

Esempio G.1. Nel triangolo rettangolo ABC i cateti misurano rispettivamente $AB = 4\,\text{m}$, $AC = 3\,\text{m}$ e l'ipotenusa misura $5\,\text{m}$. Possiamo determinare le funzioni goniometriche dei suoi angoli acuti semplicemente applicando le definizioni. Si ottiene

$$\sin(\beta) = \frac{b}{a} = \frac{3}{5}; \quad \cos(\beta) = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}; \quad \tan(\beta) = \frac{b}{c} = \frac{3}{4}.$$

Per l'angolo complementare lasciamo al lettore il completamento: $\sin(\gamma) = \ldots\ldots$; $\cos(\gamma) = \ldots\ldots$; $\tan(\gamma) = \ldots\ldots$.

❑ **Osservazione** Ancora non possiamo avere informazioni sull'ampiezza degli angoli acuti; vedremo in seguito come procedere nei calcoli e quindi concludere la risoluzione del triangolo.

✍ *Esercizio proposto:* G.1

G.2 Due identità fondamentali

Dalle definizioni date nella sezione precedente abbiamo queste due identità fondamentali:

$$\tan(\gamma) = \frac{a \cdot \sin(\gamma)}{a \cdot \cos(\gamma)} = \frac{\sin(\gamma)}{\cos(\gamma)}.$$

La tangente di un angolo è il rapporto tra il seno dell'angolo e il coseno dello stesso angolo. In generale:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}. \tag{G.1}$$

Dal teorema di Pitagora si ha $a^2 = b^2 + c^2$ da cui dividendo ambo i membri per a^2 si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a^2} &= \frac{b^2+c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \\ \Rightarrow 1 &= \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \\ \Rightarrow 1 &= (\cos(\gamma))^2 + (\cos(\gamma))^2 \\ \Rightarrow 1 &= \cos^2(\gamma) + \sin^2(\gamma). \end{aligned}$$

In generale, per qualunque angolo x vale

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1. \tag{G.2}$$

Si definiscono inoltre altre funzioni goniometriche che potranno servire nella risoluzione dei triangoli: $\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$; $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$; $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$.

Esempio G.2. In un triangolo rettangolo si sa che $\cos(\beta) = \frac{3}{4}$, determinare $\sin(\beta)$ e $\tan(\beta)$.

Strategia risolutiva: ricordando che per qualunque angolo x vale la G.2 possiamo sostituire il dato e calcolare $\sin(\beta) = \sqrt{1-\cos^2(\beta)} = \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Infine sapendo che per ogni angolo vale $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ ricaviamo:

$$\tan(\beta) = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Osserviamo che nella determinazione di $\sin(\beta)$ abbiamo trascurato il valore negativo in quanto abbiamo definito le funzioni goniometriche come rapporto delle misure di due segmenti.

✍ *Esercizio proposto:* G.2

G.3 Angoli particolari

Possiamo ricavare per via geometrica il valore esatto delle funzioni goniometriche di angoli particolari.

G.3.1 Angoli di 45°

Il triangolo rettangolo isoscele (figura G.1) i cui angoli acuti sono di 45° è la metà di un quadrato di lato 1. Sappiamo che $d = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$; poiché il calcolo delle funzioni goniometriche per un angolo non dipende dal particolare triangolo usato, possiamo concludere per le definizioni date: $\sin(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e anche $\cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e per la definizione di tangente dell'angolo $\tan(45°) = 1$.

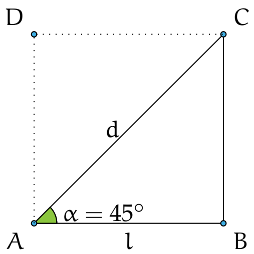


FIGURA G.1: Triangolo rettangolo isoscele.

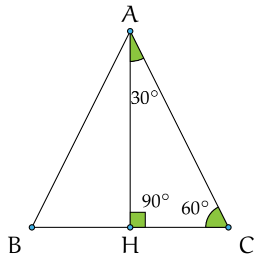


FIGURA G.2: Triangolo rettangolo con angoli di 30° e 60°.

G.3.2 Angoli di 30° e 60°

Il triangolo rettangolo con un angolo di 30° ha l'altro angolo acuto di 60° (figura G.2) pertanto possiamo trattare insieme la ricerca delle funzioni goniometriche di tali angoli.

Il triangolo rettangolo in questione è la metà di un triangolo equilatero di lato 1 e altezza h; poiché $\overline{HC}$ è metà del lato possiamo subito dire che $\cos(60°) = \frac{\overline{HC}}{1} = \frac{1}{2}$. Per le definizioni date si ha $\sin(60°) = \frac{\overline{AH}}{1}$. Applicando il teorema di Pitagora si ottiene

$$\overline{AH} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Infine $\tan(60°) = \frac{\sin(60°)}{\cos(60°)} = \sqrt{3}$.

Ricordando che per angoli complementari è $\sin(x) = \cos(90° - x)$ e $\cos(x) = \sin(90° - x)$ ed essendo $30° = 90° - 60°$ possiamo scrivere:

$$\sin(30°) = \cos(60°) = \frac{1}{2}; \qquad \cos(30°) = \sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e infine

$$\tan(30°) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

G.3.3 Angoli di 0° e 90°

Ovviamente non esiste un triangolo con un angolo di 0°: si tratta di un triangolo che degenera in un segmento. Possiamo pensare ad un triangolo rettangolo avente $a = 1$ e immaginare di muovere il vertice C in modo da rimpicciolire sempre più l'angolo $\hat{\beta}$; quando $\hat{\beta}$ diventa 0° il segmento b si riduce ad un punto e si ha $b = 0$ e quindi $\sin(0°) = 0$, l'ipotenusa a coincide con il cateto c quindi $\cos(0°) = 1$ e infine $\tan(0°) = 0$.

Allo stesso modo se deformiamo il triangolo fino ad avere l'angolo $\hat{\gamma}$ di 0° e pertanto $\hat{\beta}$ di 90° otteniamo che $\sin(90°) = 1$ e $\cos(90°) = 0$; applicando la formula della tangente si avrà una frazione con denominatore nullo e quindi diremo che $\tan(90°)$ non è definita.

Possiamo riassumere i valori trovati per questi angoli particolari in una tabella:

angolo x	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
$0°$	0	1	0
$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	1	0	non definita

Come possiamo ottenere i valori delle funzioni goniometriche per angoli diversi da quelli sopra considerati?

G.4 Usare la calcolatrice

Sul mercato ci sono vari tipi di calcolatrice scientifica, ciascuno dovrà familiarizzare con la propria calcolatrice per imparare ad impostare correttamente il calcolo da effettuare e i tasti da pigiare per ottenere il corretto risultato. Se non si digita in modo consapevole e se non si sanno leggere i risultati, la calcolatrice è uno strumento inutilizzabile e talvolta può anche essere dannoso.

Nel seguito faremo riferimento alla calcolatrice Kcalc, in dotazione all'ambiente di desktop KDE (Linux/Unix), cercando di dare riferimenti che si adattino a tutte le calcolatrici.

Passo I: scelta dell'unità di misura Sicuramente conosci già come unità di misura degli angoli il grado sessagesimale. Esistono però altre unità di misura utilizzate in contesti diversi: i gradi centesimali sono utilizzati principalmente in topografia, i radianti utilizzati in matematica specialmente in analisi. Su tutte le calcolatrici è possibile effettuare le operazioni sugli angoli scegliendo l'unità di misura:

Angolo	Sigla	Sigla abbreviata
gradi sessagesimali	$°$	
gradi centesimali	GRA	G
radianti	RAD	R

Impostiamo la calcolatrice in modo da ricevere in ingresso angoli misurati in gradi sessagesimali.

Passo II: calcolo del coseno di un angolo Ci proponiamo di determinare $\cos(60°)$.

Controllate di aver impostato l'input dell'angolo in gradi sessagesimali, digitate 60 premete il tasto *cos* la calcolatrice restituisce 0.5. Dunque $\cos(60°) = 0,5$.

Attenzione: nella scrittura dei numeri decimali useremo il "punto decimale" in sostituzione della virgola.

❑ **Osservazione**

a) La funzione coseno calcolata su angoli compresi fra $0°$ e $90°$ restituisce sempre numeri compresi fra 0 e 1.

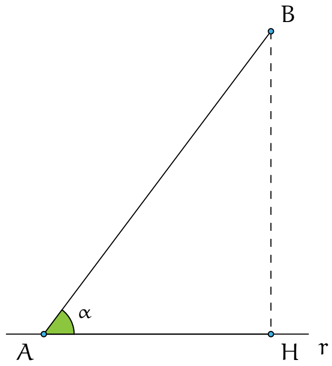


FIGURA G.3: Il segmento AB e la proiezione AH sulla r.

FIGURA G.4: Calcolatrice KCalc.

b) Il coseno vale 1 (il massimo) quando l'angolo di input è $0°$ e decresce fino a 0 man mano che l'angolo immesso cresce fino a $90°$. Detto in altre parole: il coseno di un angolo che cresce da $0°$ a $90°$ diminuisce dal valore 1 al valore 0.

c) La decrescita del coseno non è proporzionale all'aumento dell'angolo, tant'è vero che si ha: $\cos(60°) = 0,867$ ma $\cos(30°) = 0,5$ che evidentemente non è la metà di $\cos(30°)$.

Problema G.3. Il segmento AB (figura G.3) misura 5 m e la sua proiezione AH sulla retta r misura 3 m. Possiamo determinare la misura dell'angolo $\hat{\alpha}$ compreso tra r e il segmento AB?

Dati: $\overline{AB} = 5\,\text{m}$; $\overline{AH} = 3\,\text{m}$. *Obiettivo*: $\hat{\alpha}$.

Soluzione Partiamo dalla formula $\overline{AH} = \overline{AB} \cdot \cos(\alpha)$, da essa possiamo ottenere $\cos(\alpha) = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}$. Sostituendo i valori noti otteniamo $\cos(\alpha) = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \frac{3}{5} = 0,6$.

Per risalire dal valore del coseno al valore dell'angolo usiamo la calcolatrice attivando la funzione inversa di coseno; su molte calcolatrici tale funzione è indicata con $\cos^{-1}$, funzione che si attiva con il tasto *Shift* (figura G.4); nella calcolatrice di esempio pigiando il tasto *Shift* compare il tasto della funzione inversa *arccos*.

Calcoliamo la misura dell'angolo il cui coseno è 0,6 immettendo tale valore e attivando i tasti *Shift* e *arccos*. La calcolatrice restituisce $\hat{\alpha} = 53.13010235$. Questo risultato ci dice che l'angolo è di $53°$ più una parte decimale 0.13010235. Ricordiamo che i sottomultipli del grado vengono espressi in sessantesimi (1 grado = 60 primi), a loro volta suddivisi in sessantesimi (1 primo = 60 secondi). Dunque la parte decimale estratta dalla calcolatrice va adeguatamente modificata: al risultato della calcolatrice tolgo la parte intera (53) e moltiplico per 60; in questo caso ottengo 7.8061 ... la cui parte intera rappresenta i primi; tolgo ancora la parte intera (7) e moltiplico per 60 ottenendo i secondi 48.368 ... Arrotondiamo la parte intera e possiamo concludere $\hat{\alpha} \approx 53°\ 7'48''$. Alcune calcolatrici scientifiche fanno in automatico questi calcoli attivando un opportuno tasto.

Osserviamo che viene utilizzato il simbolo $\approx$ (uguale circa) per indicare che abbiamo usato valori approssimati. Ora sei in grado di determinare l'ampiezza degli angoli acuti attivando le funzioni inverse sulla tua calcolatrice.

♦

✍ *Esercizi proposti:* G.3, G.4, G.5

G.5 Operazioni con i gradi sessagesimali

Accenniamo alle addizioni e sottrazioni tra angoli.

Esempio G.4. Svolgiamo l'operazione $48° \; 45'52'' + 62° \; 27'22''$.

$$\begin{array}{rrrl} 48° & 45' & 52'' & + \\ 62° & 27' & 22'' & \\ \hline 110° & 72' & 74'' & \\ 111° & 13' & 14'' & \end{array}$$

Sommando termine a termine otteniamo $110° \; 72'74''$. Tenendo conto che 1 grado equivale a 60 primi e 1 primo equivale a 60 secondi, si ha che i $74°$ valgono $1'$ e $14''$, i $72'74''$ diventano allora $73'$ e $14''$. Trasformiamo poi i $73'$ in $1°$ e $13'$.

In definitiva si ha che $110° \; 72'74'' = 111° \; 13'14''$.

Esempio G.5. Svolgiamo ora una sottrazione: $90° - 45° \; 33'12''$.

$$\begin{array}{rrrl} 90° & & & - \\ 45° & 33' & 12'' & \\ \hline \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{rrrl} 89° & 59' & 60'' & - \\ 45° & 33' & 12'' & \\ \hline 44° & 26' & 48'' & \end{array}$$

Questa è una operazione molto comune, poiché capita abbastanza spesso di dover calcolare l'angolo complementare. Per svolgere la sottrazione conviene scrivere $90°$ come $89° \; 59'60''$ e svolgere la sottrazione avendo come risultato $44° \; 26'48''$.

Esempio G.6. Un'ultima sottrazione: $72° \; 20'40'' - 23° \; 40'52''$.

Per fare questa sottrazione parto dai secondi e non potendo fare 40 – 52, utilizzo il riporto trasformando in: $72° \; 20'40''$ in $72° \; 19'100''$. Ora posso eseguire agevolmente la sottrazione e ottengo $48''$; sottraggo poi i primi tra loro, aggiungendo il riporto ai $19'$ e ottengo $39'$; sottraggo poi i gradi: $71° - 23°$. Il risultato finale è $48° \; 39'48''$.

✍ *Esercizio proposto:* G.6

G.6 Risoluzione di triangoli rettangoli

Ricordiamo che risolvere un triangolo significa ricavare le misure di tutti i suoi elementi (lati e angoli) date le misure di alcuni dei suoi elementi.

Esempio G.7. Determinate l'area del triangolo rettangolo sapendo che $BC = 2\,\text{m}$ e $\hat{\beta} = 20°$.

Dati: $\widehat{BAC} = 90°$, $\overline{BC} = 2\,\text{m}$, $\hat{\beta} = 20°$.

Obiettivo: Area (ABC).

Procedura risolutiva: Area $(ABC) = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC}$.

Dobbiamo dunque determinare le misure dei cateti. Applicando le definizioni:

$$\overline{AB} = \overline{BC} \cdot \cos(\beta) = 2 \cdot \cos(20°) \approx 2 \cdot 0{,}9397 \approx 1{,}8794;$$

$$\overline{AC} = \overline{BC} \cdot \cos(\gamma) = 2 \cdot \cos(70°) \approx 2 \cdot 0,3420 \approx 0,6840;$$

pertanto, Area $\approx 0.6428\,(\mathrm{m}^2)$.

Esempio G.8. Un triangolo rettangolo ha il cateto AB di $5\,\mathrm{cm}$. e l'angolo acuto in C di $57°$; determinate l'altro angolo acuto, la misura del cateto AC e la misura dell'ipotenusa.

Dati: $\widehat{BAC} = 90°$, $\widehat{BCA} = 57°$, $\overline{AB} = 5\,\mathrm{cm}$.

Obiettivo: $\hat{\beta}$, $\overline{CA}$, $\overline{CB}$.

Procedura risolutiva: Essendo gli angoli acuti complementari si ottiene $\hat{\beta} = 90° - 57° = 33°$. Per la formula inversa:

$$\overline{CB} = \frac{\overline{AB}}{\cos(\beta)} = \frac{5}{\cos(33°)} \approx \frac{5}{0,8386} \approx 5,9618\,\mathrm{cm}.$$

Infine determiniamo l'altro cateto e osserviamo che possiamo procedere in due modi:

- con il Teorema di Pitagora:

$$\overline{CA} = \sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{AB}^2} \approx \sqrt{35,5432 - 25} \approx \sqrt{10,5432} \approx 3,2470\,\mathrm{cm};$$

- per definizione:

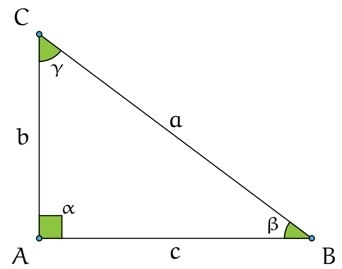
$$\overline{CA} = \overline{CB} \cdot \cos(\gamma) \approx 5,9618 \cdot \cos(57°) \approx 5,9618 \cdot 0,5446 \approx 3,2468\,\mathrm{cm}.$$

❑ Osservazione

a) Nei calcoli effettuati abbiamo operato un'approssimazione; per esempio il valore esatto di $\overline{CB}$ è rappresentato solo dall'espressione $\overline{CB} = \frac{\overline{AB}}{\cos(\beta)} = \frac{5}{\cos(33°)}$.

b) I risultati ottenuti con procedimenti diversi possono differire, se pur di poco, a causa dell'uso di valori approssimati nei calcoli che aumentano l'errore di approssimazione (propagazione dell'errore).

Esempio G.9. Risolvi il triangolo rettangolo della figura sapendo che $c = 20\,\mathrm{cm}$ e $\sin(\beta) = \frac{3}{5}$.



Usiamo l'identità fondamentale per determinare $\cos(\beta)$:

$$\cos(\beta) = \sqrt{1 - \sin^2(\beta)} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25-9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5};$$

$$\cos(\beta) = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{c}{\cos(\beta)} = \frac{20}{\frac{4}{5}} = \frac{20 \cdot 5}{4} = 25\,\mathrm{cm}.$$

Per il teorema di Pitagora $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15\,\mathrm{cm}$; $\hat{\beta} \approx 36°\ 52'12''$ (calcolato con la calcolatrice e arrotondato), $\hat{\gamma} \approx 90° - \hat{\beta} = 53°\ 07'48''$.

Esempio G.10. Risolvere il triangolo rettangolo ABC, retto in A (quello della figura precedente) sapendo che $b = 2\,\text{cm}$ e $\sin(\beta) = 0,2$.

Dati: $b = 2\,\text{cm}, \quad \sin(\beta) = 0,2.$

Obiettivo: $a, \quad c, \quad \hat{\beta}, \quad \hat{\gamma}.$

Procedura risolutiva: Dalle definizioni si ha

$$\sin(\beta) = \frac{b}{a} \Rightarrow 0,2 = \frac{2}{a} \Rightarrow a = \frac{2}{0,2} = 10\,\text{cm}.$$

Con il teorema di Pitagora possiamo ricavare l'altro cateto

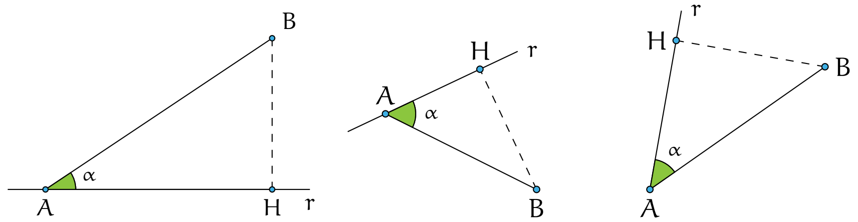
$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{100 - 4} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6} \approx 9,7980\,\text{cm}.$$

Infine con la funzione inversa ricaviamo l'angolo $\hat{\beta}$: $\sin^{-1}(0,2) \approx 11,5369\ldots$ e procedendo come spiegato in precedenza otteniamo: $\hat{\beta} \approx 11°\ 32'13''$ e in seguito $\hat{\gamma} \approx 90° - \hat{\beta} \approx 78°\ 27'47''$.

✍ *Esercizi proposti:* G.7, G.8, G.9, G.10

G.6.1 Proiezione di un segmento lungo una direzione

È dato un segmento AB ed una retta r che passa per un suo estremo (A, per fissare le idee). La *proiezione del segmento* AB *sulla retta* r è il segmento AH dove H è l'intersezione fra r e la perpendicolare alla retta r passante per B (si vedano i tre esempi in figura).



✍ *Esercizi proposti:* G.11, G.12, G.13, G.14, G.15, G.16, G.17, G.18, G.19, G.20, G.21

G.7 Risoluzione di un triangolo qualsiasi con triangoli rettangoli

Per risolvere i triangoli qualsiasi, tramite l'altezza, bisogna ricercare nella figura triangoli rettangoli. Nel seguito saranno indicati altri teoremi che permettono di risolvere tutti i tipi di triangoli.

Esempio G.11. Risolvi il triangolo acutangolo della figura G.5 con $\hat{\beta} = 57°$, $\hat{\alpha} = 39°$, $\overline{CH} = 11\,\text{m}$.

Ricordando che la somma degli angoli di un triangolo è $180°$ ricaviamo $\hat{\gamma}$:

$$\hat{\gamma} = 180° - \hat{\alpha} - \hat{\beta} = 180° - 39° - 57° = 84°.$$

Individuiamo ora i triangoli rettangoli nella figura in modo da poter applicare le formule.

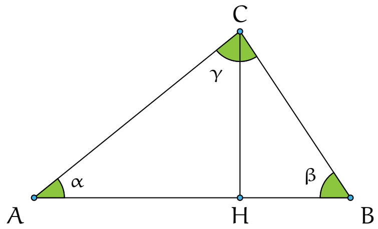


FIGURA G.5: Triangolo acutangolo.

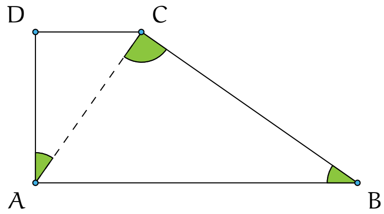


FIGURA G.6: Trapezio rettangolo.

Con il triangolo rettangolo CHB:

$$\sin(\beta) = \frac{\overline{CH}}{\overline{CB}} \Rightarrow \overline{CB} = \frac{\overline{CH}}{\sin(\beta)} = \frac{11}{\sin(57^\circ)} \approx 13{,}2\,\text{m};$$
$$\tan(\beta) = \frac{\overline{CH}}{\overline{BH}} \Rightarrow \overline{BH} = \frac{\overline{CH}}{\tan(\beta)} = \frac{11}{\tan(57^\circ)} \approx 7{,}15\,\text{m}.$$

Con il triangolo rettangolo AHC:

$$\sin(\alpha) = \frac{\overline{CH}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{AC} = \frac{\overline{CH}}{\sin(\alpha)} = \frac{11}{\sin(39^\circ)} \approx 17{,}46\,\text{m};$$
$$\tan(\alpha) = \frac{\overline{CH}}{\overline{AH}} \Rightarrow \overline{AH} = \frac{\overline{CH}}{\tan(\beta)} = \frac{11}{\tan(39^\circ)} \approx 13{,}75\,\text{m}.$$

Infine calcolo $\overline{AB} = \overline{AH} + \overline{BH} \approx 7{,}15 + 13{,}75 \approx 20{,}9\,\text{m}$.

✍ *Esercizi proposti:* G.22, G.23, G.24, G.25

G.7.1 Quadrilateri

Esempio G.12. Nel trapezio rettangolo ABCD (figura G.6) il lato obliquo BC forma un angolo di 35° con la base maggiore AB, inoltre la diagonale AC è perpendicolare a BC. Calcola il perimetro e l'area del trapezio sapendo che la sua altezza è 10 cm.

Ricordando che la somma degli angoli di un triangolo è 180° ricaviamo $\widehat{CAB} = 55^\circ$. Siccome il trapezio è rettangolo $\widehat{DAC} = \widehat{DAB} - \widehat{CAB} = 90^\circ - 55^\circ$. Calcoliamo ora CB, AB e DC:

$$\sin(\widehat{ABC}) = \frac{\overline{AD}}{\overline{CB}} \Rightarrow \overline{CB} = \frac{\overline{AD}}{\sin(\widehat{ABC})} = \frac{10}{\sin(35^\circ)} \approx 17{,}43\,\text{cm};$$
$$\overline{AB} = \frac{\overline{CB}}{\cos(\widehat{ABC})} \approx \frac{17{,}43}{\cos(55^\circ)} \approx 21{,}28\,\text{cm};$$
$$\frac{\overline{DC}}{\overline{AD}} = \tan(\widehat{DAC}) \Rightarrow \overline{DC} = \overline{AD} \cdot \tan(\widehat{DAC}) = 10\tan(35^\circ) \approx 7{,}00.$$

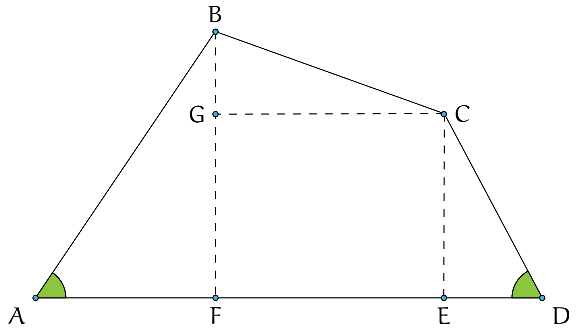


FIGURA G.7: Il quadrilatero ABCD.

Da cui:

$$2p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{DC} + \overline{DA} \approx 21,28 + 17,43 + 7,00 + 10 \approx 55,71\,\text{cm};$$
$$\text{Area} = \frac{(\overline{AB} + \overline{DC}) \cdot \overline{AD}}{2} \approx \frac{(21,28 + 7,00) \cdot 10}{2} \approx 141,40\,\text{cm}^2.$$

✍ *Esercizi proposti:* G.26, G.27, G.28, G.29,G.30, G.31, G.32, G.33

G.7.2 Applicazioni alla topografia

La topografia è una disciplina che studia gli strumenti ed i metodi operativi, sia di calcolo sia di disegno, che sono necessari per ottenere una rappresentazione grafica di una parte della superficie terrestre. La topografia ha carattere applicativo e trae la sua base teorica dalla matematica, dalla geometria e dalla trigonometria.

Esempio G.13. Risolvere il quadrilatero della figuraG.7 sapendo che $AB = 42,5\,\text{m}$, $BC = 32,18\,\text{m}$, $CD = 27,6\,\text{m}$, $B\widehat{A}D = 56°$, $A\widehat{D}C = 62°$.

Dati: $\overline{AB} = 42,5\,\text{m}$, $\overline{BC} = 32,18\,\text{m}$, $\overline{CD} = 27,6\,\text{m}$, $B\widehat{A}D = 56°$, $A\widehat{D}C = 62°$.

Obiettivo: $\overline{AD}$, $A\widehat{B}C$, $C\widehat{D}A$.

Procedura risolutiva: Suddividiamo il quadrilatero in tre triangoli rettangoli e in un rettangolo, come nella figura riportata sotto e risolviamo i triangoli.

Triangolo FBA:

$$F\widehat{B}A = 90° - B\widehat{A}D = 90° - 56° = 34°;$$
$$\overline{AF} = \overline{AB}\cos(B\widehat{A}D) = 42,5\cos(56°) \approx 23,77\,\text{m};$$
$$\overline{BF} = \overline{AB}\sin(B\widehat{A}D) = 42,5\sin(56°) \approx 35,23\,\text{m}.$$

Triangolo DCE:

$$D\widehat{C}E = 90° - A\widehat{D}C = 90° - 62° = 28°;$$
$$\overline{DE} = \overline{CD}\cos(F\widehat{B}A) = 27,6\cos(62°) \approx 12,96\,\text{m};$$
$$\overline{CE} = \overline{CD}\sin(A\widehat{D}C) = 27,6\sin(62°) \approx 24,37\,\text{m}.$$

Triangolo GBC:

$$\overline{BG} = \overline{BF} - \overline{GF} = \overline{BF} - \overline{CE} \approx 35,23 - 24,37 \approx 10,86\,\text{m};$$
$$\cos(\widehat{CBG}) = \frac{\overline{GB}}{\overline{CB}} = \frac{10,86}{32,18} \approx 0,34 \Rightarrow \cos^{-}1(0,34) \approx 70°\ 16'36'';$$
$$\widehat{BCG} = 90° - \widehat{CBG} \approx 90° - 70°\ 16'36'' \approx 19°\ 43'24'';$$
$$\overline{GC} = \overline{BC}\sin(70°\ 16'36'') = 30,29\,\text{m}.$$

Calcoliamo ora gli elementi incogniti del quadrilatero:

$$\overline{DA} = \overline{AF} + \overline{FE} + \overline{ED} \approx 23,77 + 30,29 + 12,96 \approx 67,02\,\text{m};$$
$$\widehat{ABC} = \widehat{ABF} + \widehat{FBC} \approx 34° + 70°\ 16'36'' \approx 104°\ 16'36'';$$
$$\widehat{BCD} = \widehat{BCG} + \widehat{GCE} + \widehat{ECD} \approx 19°\ 43'24'' + 90° + 34° \approx 143°\ 43'24''.$$

✍ *Esercizi proposti:* G.34, G.35, G.36, G.37, G.38, G.39, G.40, G.41, G.42

G.43, G.44, G.45, G.46

G.8 Risoluzione di un triangolo qualunque

Le funzioni trigonometriche possono essere calcolate anche su angoli maggiori di 90°. Poiché, al momento, siamo interessati alle applicazioni sui triangoli, ci basterà estendere le nostre considerazioni agli angoli compresi fra 90° e 180°, essendo 180° la misura limite superiore di un angolo interno di un triangolo.

Esempio G.14. Analizziamo la tabella con i valori approssimati alla quarta cifra decimale delle funzioni seno e coseno per alcuni angoli da 0° a 180°.

angolo	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin(\alpha)$	0	0,5	0,7071	0,8660	1	0,8660	0,7071	0,5	0
$\cos(\alpha)$	1	0,8660	0,7071	0,5	0	−0,5	−0,7071	−0,8660	−1

Dalla tabella si nota che la funzione seno si mantiene positiva nell'intervallo (0°; 180°), nei cui estremi si annulla. Inoltre essa assume il valore massimo, uguale a 1, quando l'angolo è di 90°. La funzione coseno, invece, è negativa per angoli compresi tra 90° e 180°. Precisamente: essa decresce da 1 a 0 man mano che l'angolo su cui è calcolata cresce da 0° a 90°, dopodiché continua a decrescere, da 0 a −1, man mano che l'angolo passa da 90° a 180°, si annulla 90°. Osserviamo anche che angoli supplementari hanno lo stesso seno e coseno opposto. Queste considerazioni saranno chiarite con lo studio delle funzioni circolari.

Affrontiamo ora il problema di risolvere un triangolo qualsiasi. Come sappiamo, gli elementi caratteristici di un triangolo sono le misure dei suoi lati e dei suoi angoli. Sappiamo anche che per determinare univocamente un triangolo sono, in linea di massima, necessari solo tre di questi elementi purché uno almeno di questi sia un lato. Ciò deriva dai tre criteri di congruenza dei triangoli che andiamo a ricordare.

Primo criterio di congruenza Due triangoli che abbiano rispettivamente congruenti due lati e l'angolo tra essi compreso sono congruenti.

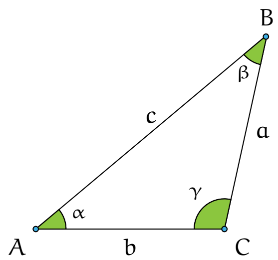
Secondo criterio di congruenza Due triangoli che abbiano rispettivamente congruenti un lato e due angoli ugualmente posti rispetto al lato sono congruenti.

Terzo criterio di congruenza Due triangoli che abbiano rispettivamente congruenti i tre lati sono congruenti.

Ricordiamo che due triangoli che abbiano ordinatamente uguali tutti gli angoli non sono, in generale, congruenti, bensì sono *simili*.

Quello che ci chiediamo è se la trigonometria, finora usata solo per i triangoli rettangoli, ci possa venire in aiuto per la determinazione delle misure degli elementi incogniti di un triangolo qualunque, quando conosciamo i tre elementi che lo determinano univocamente. Ad esempio, se è assegnata la lunghezza di due lati e l'ampiezza dell'angolo compreso, la geometria euclidea, ci aiuta a costruire il suddetto triangolo tramite riga e compasso ma non ci dice nulla delle misure degli elementi incogniti.

Disegniamo un triangolo avendo cura di indicare con la stessa lettera vertice e lato opposto e di nominare con $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ le ampiezze degli angoli di vertice rispettivamente A, B, C.



G.8.1 Caso I: due lati e l'angolo compreso congruenti

Come abbiamo premesso, assegnati due lati e l'angolo tra essi compreso, la geometria euclidea ci assicura l'esistenza di un solo triangolo che soddisfi i dati, ma non ci permette di determinare la misura del terzo lato, né le ampiezze degli altri angoli.

Teorema G.1 (del coseno o di Carnot). *In un triangolo qualsiasi di cui siano note le lunghezze di due lati e l'ampiezza dell'angolo compreso, il quadrato della lunghezza del lato incognito è uguale alla somma dei quadrati delle lunghezze note diminuita del loro doppio prodotto per il coseno dell'angolo compreso. A seconda di quali siano i due lati noti, traducendo in linguaggio matematico quanto afferma l'enunciato si ha:*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma);$$
$$a^2 = c^2 + b^2 - 2 \cdot c \cdot b \cdot \cos(\alpha);$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta).$$

Problema G.15. Risolvete il triangolo ABC dati $a = 20\,\text{cm}$, $b = 10\,\text{cm}$, $\hat{\gamma} = 36°$.

Dati: $a = 20\,\text{cm}$, $\quad b = 10\,\text{cm}$, $\quad \hat{\gamma} = 36°$.
Obiettivo: c, $\quad \hat{\alpha}$, $\quad \hat{\beta}$.
Procedura risolutiva: per il teorema di Carnot possiamo scrivere

$$\begin{aligned} &c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) \\ \Rightarrow &c^2 = 20^2 + 10^2 - 2 \cdot 20 \cdot 10 \cdot \cos(36°) \approx 400 + 100 - 400 \cdot 0,8090 \approx 176,4 \\ \Rightarrow &c \approx \sqrt{176,4} \approx 13,2815\,\text{cm}. \end{aligned}$$

Ora dobbiamo determinare gli altri due angoli; utilizzando ancora il teorema di Carnot nella formula $a^2 = c^2 + b^2 - 2 \cdot c \cdot b \cdot \cos(\alpha)$ conoscendo i tre lati ci rimane come incognita il $\cos(\alpha)$. Sostituiamo i valori noti: $20^2 = 176,4 + 10^2 - 2 \cdot 13,2815 \cdot 10 \cdot \cos(\alpha)$, eseguiamo i calcoli $400 \approx 276,4 - 265,63 \cdot \cos(\alpha)$ e da questa ricaviamo $\cos(\alpha) \approx \frac{276,4-400}{265,63} \approx -0,4653$ da cui $\hat{\alpha} \approx \cos^{-1}(-0,4653) \approx 117°$. Il triangolo è ottusangolo i suoi lati misurano rispettivamente $a = 20\,\text{cm}$, $b = 10\,\text{cm}$, $c = 13.2815\,\text{cm}$; i suoi angoli hanno ampiezza $\hat{\alpha} = 117°$, $\hat{\beta} = 36°$, $\hat{\gamma} = 27°$.

G.8.2 Caso II: tre lati congruenti

Sappiamo dalla geometria euclidea che assegnati tre segmenti affinché si possa costruire il triangolo che li ha come lati deve essere verificato il teorema della disuguaglianza triangolare: "in ogni triangolo ogni lato deve essere minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza".

Problema G.16. Determinate le ampiezze degli angoli di un triangolo note le misure dei suoi lati $a = 5\,\text{m}$, $b = 12\,\text{m}$, $c = 13\,\text{m}$.

Dati: $a = 5\,\text{m}$, $\quad b = 12\,\text{m}$, $\quad c = 13\,\text{m}$.
Obiettivo: $\hat{\alpha}$, $\quad \hat{\beta}$, $\quad \hat{\gamma}$.
Procedura risolutiva: utilizziamo almeno due volte il teorema del coseno per determinare due angoli. Per trovare $\cos(\gamma)$ utilizziamo $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$, sostituendo i dati si ottiene $13^2 = 5^2 + 12^2 - 2 \cdot 5 \cdot 12 \cdot \cos(\gamma)$, da cui $\cos(\gamma) = \frac{25+144-169}{120} = 0$. Per trovare $\cos(\alpha)$ utilizziamo ancora il teorema di Carnot nella formula $a^2 = c^2 + b^2 - 2 \cdot c \cdot b \cdot \cos(\alpha)$. Sostituiamo i valori noti: $25 = 169 + 144 - 312 \cdot \cos(\alpha)$, da cui $\cos(\alpha) = \frac{169+144-25}{312} = 0,9230$. Quindi $\hat{\gamma} = \cos^{-1}(0) = 90°$, $\hat{\alpha} \approx \cos^{-1}(0,9230) \approx 22°$, $\hat{\beta} = 180° - 90° - 22° = 68°$.

G.8.3 Caso III: un lato e gli angoli congruenti

Occorre un altro teorema per il problema della risoluzione di un triangolo qualunque.

Teorema G.2 (dei seni o di Euler). *In un triangolo qualsiasi risulta costante il rapporto fra la lunghezza di un lato e il seno dell'angolo che gli è opposto. In formule:*

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}.$$

Problema G.17. Risolvete il triangolo ABC sapendo che $a = 7,52\,\text{m}$, $\hat{\beta} = 98°$, $\hat{\gamma} = 27°$.

Dati: $a = 7,52\,\text{m}, \quad \hat{\beta} = 98°, \quad \hat{\gamma} = 27°.$
Obiettivo: $b, \quad c, \quad \hat{\alpha}.$
Procedura risolutiva: Possiamo immediatamente determinare il terzo angolo:

$$\hat{\alpha} = 180° - (98° + 27°) = 55°.$$

Per determinare i lati b e c applichiamo il teorema di Euler.
Per la prima uguaglianza del teorema otteniamo:

$$\frac{7,52}{\sin(55°)} = \frac{b}{\sin(98°)} \Rightarrow b = \frac{7,52}{\sin(55°)} \cdot \sin(98°) \approx \frac{7,52}{0,8192} \cdot 0,9902 \approx 9,0897\,\text{m}.$$

Considerando l'uguaglianza tra il primo e l'ultimo rapporto del teorema otteniamo:

$$\frac{7,52}{\sin(55°)} = \frac{c}{\sin(27°)} \Rightarrow c = \frac{7,52}{\sin(55°)} \cdot \sin(27°) \approx 4,1674\,\text{m}.$$

G.8.4 Riflessioni sull'uso del teorema dei seni

Problema G.18. Risolvete il triangolo ABC sapendo che $a = 20\,\text{cm}$, $c = 13\,\text{cm}$, $\hat{\gamma} = 36°$.

Dati: $a = 20\,\text{cm}, \quad c = 13\,\text{cm}, \quad \hat{\gamma} = 36°.$
Obiettivo: $b, \quad \hat{\alpha}, \quad \hat{\beta}.$

Gli elementi noti non rispecchiano le condizioni sufficienti di alcuno dei criteri di congruenza, ma possiamo usare il teorema dei seni che ci assicura che in qualunque triangolo si ha

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

e quindi

$$\frac{20}{\sin(\alpha)} = \frac{13}{\sin(36°)} \Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{20 \cdot \sin(36°)}{13} \approx 0,9043,$$

e dunque con la funzione inversa $\sin^{-1}(0,9043)$ possiamo ricavare l'angolo $\hat{\alpha} \approx 64°$ e dunque $\hat{\beta} \approx 80°$.

Sembrerebbe tutto corretto, ma abbiamo trascurato il fatto che angoli supplementari hanno lo stesso seno dunque da $\sin^{-1}(0,9043)$ si può ottenere $\hat{\alpha} \approx 64°$ oppure $\hat{\alpha} \approx 116°$, e dunque il triangolo non è univocamente determinato. Proseguendo nel ragionamento avremmo:

Caso I $\hat{\alpha} \approx 64°$, quindi il triangolo è acutangolo e $\hat{\beta} \approx 80°$; possiamo determinare b applicando nuovamente il teorema dei seni

$$\frac{13}{\sin(36°)} = \frac{b}{\sin(80°)} \Rightarrow b = \frac{13 \cdot 0,9848}{0,5877} \approx 21\,\text{cm}.$$

Caso II $\hat{\alpha} \approx 116°$, quindi il triangolo è ottusangolo e $\hat{\beta} \approx 28°$; possiamo determinare b con il teorema dei seni

$$\frac{13}{\sin(36°)} = \frac{b}{\sin(28°)} \Rightarrow b = \frac{13 \cdot 0,4694}{0,5877} \approx 10\,\text{cm}.$$

Il problema ha due soluzioni.

Problema G.19. Risolvete il triangolo ABC sapendo che $a = 26\,\text{m}$, $b = 12\,\text{m}$, $\hat{\alpha} = 124°$.

Dati: $a = 26\,\text{m}, \quad b = 12\,\text{m}, \quad \hat{\alpha} = 124°$.
Obiettivo: $c, \quad \hat{\beta}, \quad \hat{\gamma}$.
Applichiamo il teorema dei seni:

$$\frac{13}{\sin(124°)} = \frac{12}{\sin(\beta)} \Rightarrow \sin(\beta) = \frac{12 \cdot \sin(124°)}{26} \approx \ldots\ldots\ldots$$

In questo caso non ci sono dubbi: un triangolo non può avere due angoli ottusi. Potete completare voi la soluzione e otterrete $\beta \approx \ldots\ldots$ quindi $\hat{\gamma} \approx \ldots\ldots$ e infine $c \approx \ldots\ldots$

Problema G.20. Risolvete il triangolo ABC sapendo che $a = 9\,\text{m}$, $b = 2\sqrt{3}\,\text{m}$, $\hat{\beta} = 30°$.

Come nel caso precedente abbiamo la misura di due lati e l'angolo opposto ad uno di essi; dunque per il teorema dei seni si ha

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} \Rightarrow \frac{9}{\sin(\alpha)} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin(30°)} \Rightarrow \frac{9}{\sin(\alpha)} = \frac{2\sqrt{3}}{0,5},$$

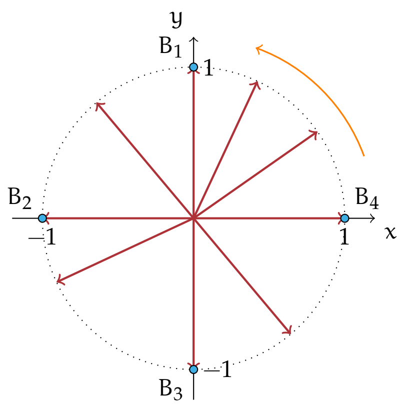
da cui $\sin(\alpha) = 1,29$, impossibile! Il seno di un angolo ha come valore massimo 1. Il problema non ha alcuna soluzione.

✍ *Esercizi proposti:* G.68, G.69, G.70, G.71, G.72, G.73, G.74

G.9 Le funzioni circolari

Nel riferimento cartesiano ortogonale è assegnato il vettore $\vec{u}$ di modulo unitario ($|\vec{u}| = 1$), applicato nell'origine del riferimento e con direzione e verso coincidenti con quelle dell'asse x. Il suo estremo libero è il punto $B(1,0)$.

Facciamo ruotare $\vec{u}$ intorno all'origine in senso antiorario finché torna ad occupare la posizione iniziale, cioè quando ha compiuto una rotazione di 360°. Movendosi con continuità, l'estremo B descrive la circonferenza con centro nell'origine tratteggiata nella figura; le componenti del vettore cambiano con continuità e dipendono dall'angolo che, in una certa posizione, il vettore stesso forma con l'asse delle x. Ad esempio quando $\vec{u}$ ha descritto nella rotazione un angolo di 90°, l'estremo B si trova in $B_1(0,1)$; quando $\vec{u}$ ha descritto nella rotazione un angolo di 180°, l'estremo B si trova in $B_2(-1,0)$; quando $\vec{u}$ ha descritto nella rotazione un angolo di 270°, l'estremo B si trova in $B_3(0,-1)$; e dopo una rotazione completa (360°) torna a coincidere con la posizione iniziale $B_4 \equiv B(1,0)$.



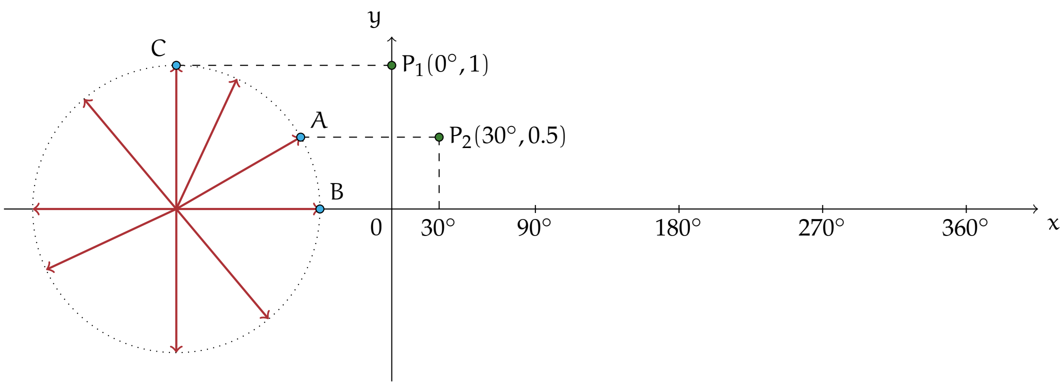
Definizione G.3. La *componente orizzontale* u_x del vettore unitario inclinato dell'angolo $\hat{\alpha}$ sull'asse x, si chiama *coseno dell'angolo* $\hat{\alpha}$; in simboli $u_x = \cos(\alpha)$. Chiamiamo *seno dell'angolo* α la *componente verticale* u_y del vettore unitario inclinato dell'angolo α sull'asse x; in simboli $u_y = \sin(\alpha)$. Scriviamo $\vec{u} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ o anche $B = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$.

Confrontando questa definizione con quanto descritto sopra possiamo innanzitutto affermare che seno e coseno di un angolo sono numeri reali positivi, negativi o nulli a seconda dell'angolo formato dal vettore e quindi della posizione del punto B sulla circonferenza:

- se $\hat{\alpha} = 0°$ allora $B(1;0)$ e $\vec{u} = (\cos(0°);\sin(0°))$. Quindi $\cos(0°) = 1$ e $\sin(0°) = 0$;
- se $\hat{\alpha} = 90°$ allora $B(0;1)$ e $\vec{u} = (\cos(90°), \sin(90°))$. Quindi $\cos(90°) = 0$ e $\sin(90°) = 1$;
- se $\hat{\alpha} = 180°$ allora $B(-1;0)$ e $\vec{u} = (\cos(180°), \sin(180°))$. Quindi $\cos(180°) = -1$ e $\sin(180°) = 0$;
- se $\hat{\alpha} = 270°$ allora $B(0;-1)$ e $\vec{u} = (\cos(270°), \sin(270°))$. Quindi $\cos(270°) = 0$ e $\sin(270°) = -1$;
- se $\hat{\alpha} = 360°$ allora $B(1;0)$ e $\vec{u} = (\cos(360°);\sin(360°))$.
  Quindi $\cos(360°) = 1$ e $\sin(360°) = 0$.

Per alcuni valori intermedi dell'angolo si possono calcolare seno e coseno dell'angolo usando metodi geometrici, per altri valori si può far uso della calcolatrice scientifica. Comunque dai risultati sopra ottenuti, soprattutto riguardando la figura, possiamo affermare che qualunque sia l'angolo si hanno le disuguaglianze: $-1 \leqslant \sin(\alpha) \leqslant 1$ e $-1 \leqslant \cos(\alpha) \leqslant 1$.

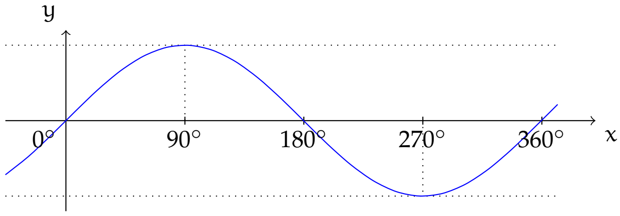
Ci proponiamo ora di tracciare il grafico della funzione $y = sin(x)$. A questo scopo fermiamo la rotazione del vettore unitario ogni 30° (completate il disegno) e segniamo i punti A, C, ecc.



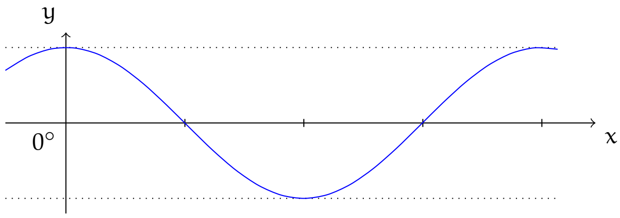
Accanto alla rotazione del vettore unitario abbiamo tracciato un riferimento cartesiano dove sull'asse x riportiamo le misure in gradi degli angoli descritti dal vettore unitario e sull'asse y è segnato il punto P di ascissa 0° e di ordinata 1. Ricordiamo che $\sin(x)$ è l'*ordinata* dell'estremo libero del vettore unitario.

Per ogni angolo x descritto riporteremo nel riferimento cartesiano $\sin(x)$. Il punto B ha ordinata nulla dunque il primo punto che dobbiamo segnare nel riferimento cartesiano per costruire il grafico di $y = sin(x)$ è l'origine; per segnare il punto di coordinate (30°, sin(30°)) da A tracciamo la parallela all'asse x fino ad incontrare la parallela all'asse y tracciata da 30°. Proseguite in questo modo per tutti gli altri punti della circonferenza. Unendo i punti trovati si giunge a rappresentare il grafico della funzione $y = sin(x)$.

Noi l'abbiamo tracciato con Geogebra. Notiamo che il valore massimo 1 si ha per l'angolo di 90° mentre il minimo -1 si ha per l'angolo di 270°. Se il vettore unitario dopo un giro completo ricominciasse nuovamente a ruotare in senso antiorario (positivo), descrivendo angoli maggiori di 360°, il grafico si ripeterebbe identico al tratto compreso tra 0° e 360°. Per questo motivo diciamo che la funzione $y = sin(x)$ ha un andamento periodico.



Sempre con Geogebra tracciamo il grafico della funzione $y = \cos(x)$; sfruttando quanto fatto all'inizio del paragrafo;lasciamo al lettore di segnare sul grafico i valori dell'angolo per cui il coseno è nullo, il valore per cui il coseno assume il valore minimo -1, il punto del grafico di ascissa $= 360°$. Per lo stesso discorso fatto sopra possiamo dire che la funzione $y = \cos(x)$ ha un andamento periodico.

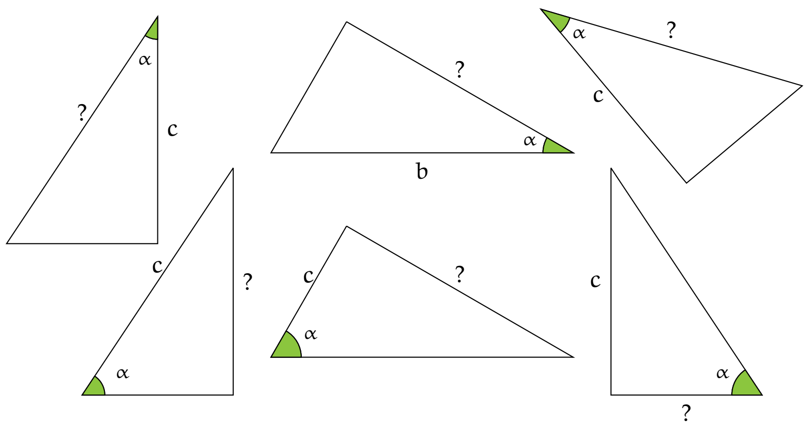


G.10 Esercizi

G.10.1 Esercizi dei singoli paragrafi

G.1 - Prime definizioni

G.1. Completate la figura mettendo le opportune lettere ai vertici dei triangoli rettangoli assegnati e, applicando le definizioni, scrivete la formula che permette di ricavare l'elemento incognito indicato con un punto interrogativo a partire dagli elementi noti indicati con una lettera.



G.2 - Due identità fondamentali

G.2. Nel triangolo rettangolo ABC sappiamo che $\sin(\gamma) = \frac{5}{7}$. Determinare le altre funzioni goniometriche dell'angolo $\hat{\gamma}$ e quelle del suo complementare.

G.4 - Usare la calcolatrice

G.3. Completare la tabella inserendo nelle caselle vuote misure di angoli acuti a piacere, approssimando alla quarta cifra decimale.

angolo $\hat{\alpha}$	$0°$	...	$30°$	...	$45°$	...	$60°$	...	$90°$
$\cos(\alpha)$									

G.4. Completare la tabella inserendo nelle caselle vuote misure di angoli acuti a piacere.

angolo $\hat{\alpha}$	$0°$	...	$30°$	...	$45°$	...	$60°$	...	$90°$
$\sin(\alpha)$									
$\tan(\alpha)$									

Quali osservazioni si possono fare per la funzione $\sin(\alpha)$?

G.5. Nel primo esempio avevamo trovato per le funzioni goniometriche degli angoli acuti del triangolo rettangolo di lati $5\,\text{m}$, $4\,\text{m}$, $3\,\text{m}$, i seguenti valori: $\sin(\beta) = \frac{b}{a} = \frac{3}{5}$, $\cos(\beta) = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$, $\tan(\beta) = \frac{b}{c} = \frac{3}{4}$. Determina l'ampiezza degli angoli acuti attivando le funzioni inverse sulla tua calcolatrice.

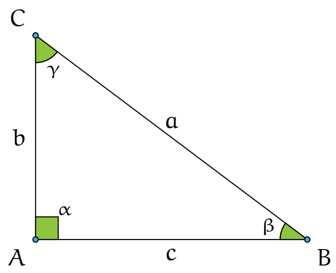
G.5 - Operazioni con i gradi sessagesimali

G.6. Esegui le seguenti operazioni con gli angoli.

a) Calcola il complementare di $25° \; 30'58''$;
b) Calcola il supplementare di $118° \; 59'5''$;
c) Calcola il doppio di $45° \; 45'45''$;
d) Calcola la metà di $128° \; 57'30''$;
e) $16° \; 29'32'' + 95° \; 57'31''$;
f) $127° \; 50'32'' + 27° \; 51'42''$.

G.6 - Risoluzione di triangoli rettangoli

G.7. Risolvere il triangolo rettangolo a partire dai dati a disposizione.



a) $a = 30\,\text{cm}$, $\hat{\beta} = 25° \; 30'$;
b) $a = 1,25\,\text{m}$, $\hat{\gamma} = 75°$;
c) $a = 15\,\text{cm}$, $\hat{\beta} = 30°$;
d) $a = 36\,\text{cm}$, $\sin(\beta) = \frac{2}{3}$;
e) $c = 12\,\text{m}$, $\cos(\beta) = \frac{1}{4}$;
f) $c = 12\,\text{m}$, $\tan(\beta) = 2$;
g) $b = 40\,\text{cm}$, $\tan(\beta) = 1$;
h) $c = 12\,\text{cm}$, $a = 20\,\text{cm}$;
i) $b = 30\,\text{cm}$, $c = 40\,\text{cm}$.

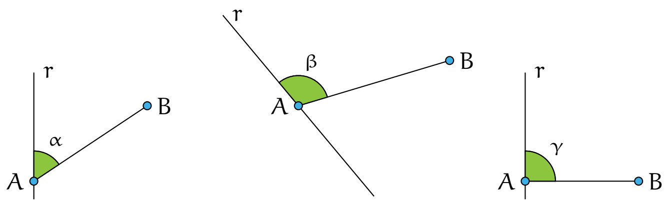
G.8. Nel triangolo rettangolo ABC, retto in A, determina l'altezza relativa all'ipotenusa sapendo che il cateto $AB = 20\,\text{cm}$ e l'angolo $\hat{\beta} = 25°$.

G.9. Sapendo che $\cos(\gamma) = \frac{5}{12}$ e che il cateto b misura $20\,\text{cm}$, calcola area e perimetro del triangolo rettangolo.

G.10. Determinare perimetro e area del triangolo rettangolo ABC retto in A sapendo che l'altezza relativa all'ipotenusa misura $0,5\,\text{cm}$ e l'angolo $\hat{\alpha}$ è di $30°$.

Proiezione di un segmento lungo una direzione

G.11. Costruite la proiezione del segmento AB sulla retta r in ciascuna delle figure seguenti e descrivete i passi effettuati.



G.12. Il segmento AB misura $2\,\text{m}$ (figura G.8). Determinare la misura della sua proiezione AH sulla retta r sapendo che l'angolo tra retta e segmento è di $72°$ Determinare infine perimetro e area del triangolo AHB.

G.13. Della figura G.9 sappiamo che: $AB = 2\,\text{m}, DC = 2,52\,\text{m}, AC = 3,76\,\text{m}$. Indicate con H e K rispettivamente le proiezioni di B e D sulla retta r, determinate l'area del poligono $ACDB$.

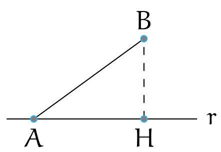


FIGURA G.8: Es. 26.12.

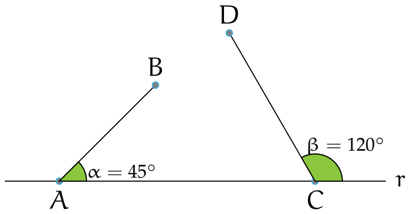


FIGURA G.9: Es. 26.13.

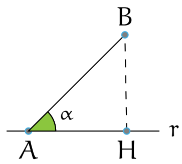


FIGURA G.10: Es. 26.14.

G.14. La proiezione AH è di 2 metri (figura G.10). Determinate la misura del segmento "proiettante" AB nei seguenti casi: $\hat{\alpha} = 28°$; $\hat{\alpha} = 45°$; $\hat{\alpha} = 60°$; $\hat{\alpha} = 88°$ (con l'approssimazione alla quarta cifra decimale).

G.15. In un triangolo rettangolo conoscendo il coseno dell'angolo acuto $\hat{\alpha} = 0,3$; calcola $sin(\alpha)$ e $tan(\alpha)$. Calcola, inoltre, il valore dell'angolo acuto $\hat{\alpha}$ in gradi e decimali di grado.

G.16. In un triangolo rettangolo di angolo acuto x, calcola $\cos(x)$, $\tan(x)$ e x sapendo che $\sin(x) = 0,2$.

G.17. In un triangolo rettangolo di angolo acuto x, calcola $\sin(x)$, $\cos(x)$ e x sapendo che $\tan(x) = 1,5$.

G.18. In un triangolo rettangolo conoscendo il coseno dell'angolo acuto $\hat{\alpha}$, $\cos(\alpha) = 0,7$ calcola $\sin(\alpha)$ e $\tan(\alpha)$. Calcola, inoltre, il valore dell'angolo acuto $\hat{\alpha}$ in gradi e decimali di grado.

G.19. Trova area e perimetro del triangolo rettangolo ABC retto in A sapendo che $AB = 50\,\text{cm}$.

G.20. Risolvi il triangolo rettangolo che ha un cateto di 25 cm e il seno dell'angolo ad esso adiacente pari a 0, 28.

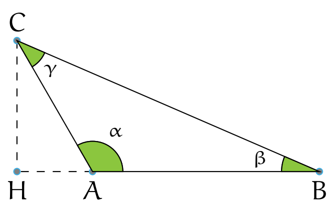
G.21. In un triangolo rettangolo conoscendo il coseno dell'angolo acuto $\hat{\alpha}$, $\cos(\alpha) = 0,2$ calcola $\sin(\alpha)$ e $\tan(\alpha)$. Calcola, inoltre, la misura dei restanti lati sapendo che il cateto opposto ad $\hat{\alpha}$ misura 66 cm.

G.7 - Risoluzione di un triangolo qualsiasi con triangoli rettangoli

G.22. Risolvi il triangolo acutangolo ABC nei seguenti casi.

a) $CH = 20\,\text{cm}$, $\hat{\alpha} = 45°$, $\hat{\beta} = 62°\ 20'$;
b) $AC = 20\,\text{cm}$, $\hat{\alpha} = 60°$, $\hat{\beta} = 35°$;
c) $BH = 12\,\text{cm}$, $\hat{\alpha} = 35°$, $\hat{\beta} = 40°\ 30'$;
d) $AH = 22,25\,\text{cm}$, $\hat{\alpha} = 20°$, $\hat{\beta} = 65°$;
e) $CH = 10\,\text{cm}$, $\hat{\alpha} = 42°$, $\hat{\beta} = 53°$.

G.23. In riferimento alla seguente figura risolvi il triangolo ABC, conoscendo gli elementi indicati.



a) $AB = 2\,\text{cm}$, $BC = 6\,\text{cm}$, $\hat{\beta} = 30°$;

b) $CH = 50\,\text{cm}$, $AB = 76\,\text{cm}$, $\hat{\alpha} = 120°$.

G.24. Risolvere un triangolo isoscele nota la base$= 4\sqrt{2}\,\text{cm}$ e l'Area $= 32\,\text{cm}^2$.

G.25. Un triangolo isoscele ha l'altezza relativa alla base lunga $120\,\text{cm}$ e il seno dell'angolo alla base è uguale a $\frac{2}{3}$. Calcola perimetro e area del triangolo.

Quadrilateri

G.26. Nel trapezio $ABCD$ isoscele sulla base maggiore AB, la base minore misura $30\,\text{cm}$, i lati obliqui $20\,\text{cm}$ e il seno degli angoli acuti è $0,6$. Trova la misura del perimetro e dell'area.

G.27. Trova l'area di un rombo di perimetro $120\,\text{cm}$ e con angolo ottuso pari a $100°$.

G.28. Trova la misura del lato e dell'altezza del rombo con diagonale maggiore di $20\,\text{cm}$ e con uno dei due angoli acuti di $30°$.

G.29. Trova le due altezze del parallelogramma di lati $10\,\text{cm}$ e $15\,\text{cm}$ e con i due angoli acuti di $20°$.

G.30. Trova l'area di un parallelogramma sapendo che i lati sono lunghi $12,5\,\text{cm}$ e $7,8\,\text{cm}$ e l'angolo tra essi compreso è $44°\ 30'$.

G.31. Calcola l'area di un rombo sapendo che il lato è $12\,\text{cm}$ e l'angolo ottuso di $120°$.

G.32. Calcola l'area e il perimetro di un rettangolo sapendo che le sue diagonali misurano $10\,\text{cm}$ e che gli angoli che esse formano con la base sono di $35°30'$.

G.33. L'area di un trapezio isoscele è $28\,\text{cm}^2$ e il suo perimetro è $24\,\text{cm}$. Determina gli angoli del trapezio, sapendo che la sua altezza è $4\,\text{cm}$.

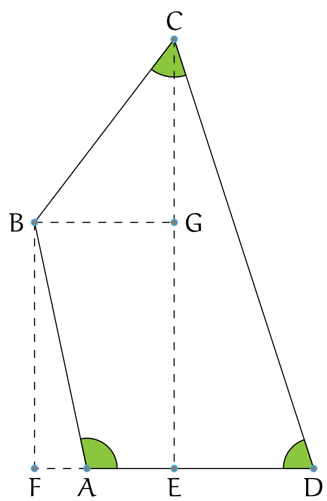
Applicazioni alla topografia

G.34. Risolvere il quadrilatero $ABCD$ sapendo che $AB = 8,01\,\text{m}$, $BC = 5,54\,\text{m}$, $CD = 4,63\,\text{m}$, $\widehat{BAD} = 40°$, $\widehat{ADC} = 50°$.

G.35. Risolvere il quadrilatero $ABCD$ sapendo che $AB = 5,8\,\text{m}$, $BC = 6,24\,\text{m}$, $CD = 12,81\,\text{m}$, $\widehat{BAD} = 45°$, $\widehat{ADC} = 65°$ (attenzione: in questo problema $CD > AB$, quindi la figura va disegnata diversamente).

G.36. Risolvere il quadrilatero $ABCD$ della figura sapendo che $AB = 33,28\,\text{m}$, $CD = 59,7\,\text{m}$, $\widehat{BAD} = 102°$, $\widehat{DCB} = 63°$, $\widehat{ADC} = 72°$.

Suggerimento: tracciare i segmenti come nella figura sotto e osservare i triangoli e il rettangolo che si forma.



Applicazioni alla fisica

G.37. Un vettore velocità $\vec{v}$ ha modulo 12 cm/sec. Posto su un piano cartesiano O_{xy}, forma un angolo di 30° con l'asse delle ascisse. Trova le componenti di $\vec{v}$, $\vec{v}_x$ e $\vec{v}_y$ sugli assi.

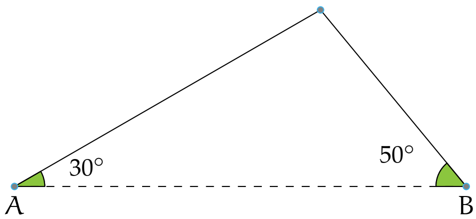
G.38. Un piano inclinato forma col piano d'appoggio un angolo di 16°. Determina la forza non equilibrata che farà scivolare un corpo di 12 kg lungo un piano inclinato.

G.39. Calcola la forza necessaria per mantenere in stato di quiete un corpo del peso di 25 kg su un piano inclinato con la pendenza di 20° 15′.

G.40. Calcola la lunghezza del vettore $\vec{v}(3;4)$ e gli angoli che esso forma con gli assi cartesiani. Calcola inoltre l'equazione della retta che ha la stessa direzione del vettore $\vec{v}$ e passa per il punto $A(0;1)$.

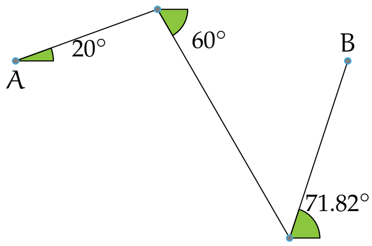
G.41. Un aereo viaggia da A a B che distano 1000 km, in assenza di vento l'aereo impiega un'ora per effettuare il percorso. Quel giorno però sulla tratta AB soffia un vento costante di intensità 100 km/ora e direzione di 240 gradi rispetto alla direzione AB. Calcola il tempo impiegato e l'angolo di rotta necessario per mantenere la direzione AB.

G.42 (*). Parto da una località A ai piedi di una collina per raggiungere una località B che si trova nell'altro versante della collina, alla stessa quota di A. Per fare questo percorro per 467 m una dritta mulattiera che sale con pendenza costante di 30°. Poi percorro in discesa 300 m lungo un dritto sentiero scalinato con pendenza costante di 50° e giungo alla località B. Quanto sarebbe lungo un tunnel che congiungesse A con B?

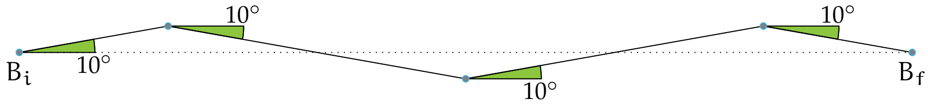


G.43 (*). Per andare da una località A ad una località B poste in una pianura mi muovo, in aereo e sempre alla stessa quota, di 20 Km nella direzione che forma un angolo di 20° rispetto alla direzione AB. Poi, per riavvicinarmi alla congiungente AB, mi muovo di 35 Km lungo la direzione che forma un angolo di 60° rispetto ad AB. Infine percorro 24,7 Km nella direzione che forma un angolo di 71,82° (ovvero 71° 49′12″) rispetto ad AB giungendo finalmente sopra a B. Quanto dista A da B?

Attenzione: sulla calcolatrice si può digitare sia $\cos(71{,}82°)$ che $\cos(71°\ 49'12'')$ purché la calcolatrice sia impostata con i gradi (D o Deg sul display; G o Grad indica un'altra unità di misura!).

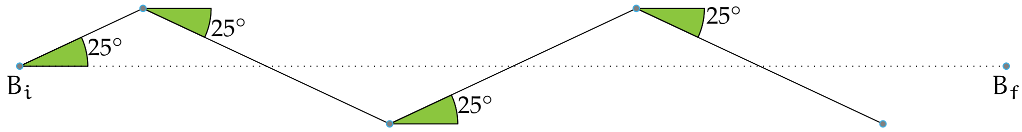


G.44 (*). Sono in barca a vela e parto dalla boa B_i per raggiungere la boa B_f. Inizio la navigazione percorrendo un tratto lungo 1 km nella direzione che forma un angolo di 10° rispetto al tratto B_iB_f. Poi viro per riavvicinarmi a B_iB_f e percorro un tratto di 2 Km nella direzione che forma un angolo di 10° rispetto a B_iB_f. Ripeto la virata di 10° per riavvicinarmi alla congiungente B_iB_f e percorro di nuovo 2 km. Faccio un'ultima virata di 10° che, percorrendo 1 Km, mi porta esattamente a B_f. Quanto dista B_i da B_f?

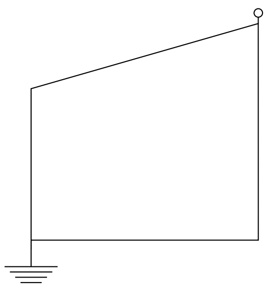


G.45 (*). Faccio una dritta salita che separa due località distanti in linea d'aria 5 Km. Se la pendenza della salita è di 8° costanti, qual'è (in metri) la differenza di quota delle due località?

G.46 (*). In barca a vela mi muovo dalla boa B_i alla boa B_f facendo un percorso a zig zag in cui ciascun tratto forma angoli di 25° rispetto al segmento B_iB_f. Dopo aver navigato per quattro tratti, di cui il primo lungo 4 Km e i restanti 8 Km, quanto percorso è stato fatto nella direzione B_iB_f?



G.47 (*). Devo stendere un cavo dell'impianto parafulmine lungo il tetto e la parete di una casa facendolo poi affondare nel terreno per 10 m. Quale deve essere la lunghezza minima del cavo sapendo che (vedi figura) il parafulmine è posto sul punto più alto del tetto e la casa è composta da un pian terreno ed un primo piano completi di altezza standard (cioè 3 m ciascuno), è larga 9 m, ha un tetto ad una falda inclinato di 16°? (La figura rappresenta la sezione della casa).



G.48 (*). Percorro una salita rettilinea con pendenza di 10° partendo da una località A posta a 400 m d'altezza e arrivando ad una località B posta a quota 700 m. Quanto dista A da B?

G.49 (*). Dalla cima di un palco alto 1,30 m un tizio alto 1,70 m osserva la punta di un obelisco sotto un angolo di 40°. Con un laser misura la distanza tra il suo occhio e la cima dell'obelisco e trova 74 m. Quanto è alto l'obelisco?

Attenzione: osservare un oggetto sotto un angolo $\hat{\alpha}$ significa che la retta congiungente il nostro occhio con l'oggetto osservato forma un angolo $\hat{\alpha}$ con una retta orizzontale.

G.50 (*). Una mansarda è alta 5 m e la sua sezione è un triangolo isoscele con angoli alla base di 50°. Quant'è larga la mansarda? (Ricorrere solo alla trigonometria; usare sia la formula diretta della proiezione sia la formula inversa.)

Problemi sulle forze

G.51 (*). Per trainare un vagone fermo su un binario uso un locomotore posto in un binario parallelo ed un cavo in acciaio che, in trazione, forma un angolo di 22° rispetto ai binari. Sapendo che l'intensità della forza di trazione lungo il cavo è di 35.000 N, qual è il modulo della forza che fa muovere il vagone?

G.52 (*). Per estrarre un manicotto (cioè un cilindro cavo) incastrato in un paletto esercito una forza di 150 N tramite un filo che, teso durante la trazione, forma un angolo di 20°

rispetto all'asse del paletto. Di che intensità è la forza che mi sarebbe bastato applicare per estrarre il manicotto se l'avessi esercitata lungo l'asse del paletto?

G.53 (*). Per trainare un vagone lungo un binario devo esercitare una forza minima di 20.000 N lungo la direzione del binario. Qual è l'intensità minima della forza che devo esercitare sul vagone perché si sposti sapendo che la direzione della forza che posso applicare forma un angolo di 40° con la direzione del binario?

G.54 (*). Una mansarda è alta 5 m e la sua sezione è un triangolo isoscele con angoli alla base di 50°. Quant'è larga la mansarda?

G.55. Come si può misurare l'altezza di un edificio, senza salirvi in cima, disponendo di un metro a nastro e di un teodolite in grado di misurare a vista angoli sul piano verticale?

G.56 (*). Dal tetto di una casa alta 9 m un bimbo alto 1m osserva sotto un angolo di 6° la punta di un obelisco che, in base ad una mappa, dista 232 m dalla casa. Quanto è alto l'obelisco?

G.57 (*). Nella capriata di una cattedrale la cui sezione è un triangolo isoscele, la lunghezza della catena (cioè della base del triangolo isoscele) è di 50 m e il tetto è inclinato di 15° rispetto al pavimento. Quanto è alta la capriata?

G.58 (*). La grande piramide di Cheope ha una base quadrata larga circa 230 m. Sapendo che le pareti sono inclinate di circa 52°, quanto è alta la piramide?

Attenzione: l'inclinazione cui si fa riferimento è quella delle apoteme delle facce laterali rispetto al terreno.

G.59 (*). Si attribuisce all'architetto dell'Antico Egitto *Imhotep* l'intuizione che l'inclinazione delle pareti di una piramide non deve superare i 53° per evitare problemi di slittamento dei blocchi del rivestimento sotto l'effetto di un sisma. Ammesso di usare l'inclinazione massima, quanto deve essere larga una piramide che debba raggiungere l'altezza di 70 m? E se, per sicurezza, si volesse usare un'inclinazione di 45°?

Suggerimento: questo problema si può risolvere usando l'angolo complementare a quello assegnato.

G.60 (*). Una mansarda avente per sezione un triangolo isoscele è alta 4 m e larga 15 m. Qual è l'inclinazione del tetto?

G.61 (*). La piramide di Meidum, così come modificata sotto Snefru, era alta 91,7 m e larga 144 m. Quanto erano inclinate rispetto al terreno le (apoteme delle) sue facce?

G.62 (*). Dall'Avenue des Champs-Élysées osservo la sommità dell'Arco di Trionfo napoleonico sotto un angolo di 36°. Sapendo che l'Arco è alto 50 m quanto disto dalla sua base? Se mi trovo a 1,2 Km dalla sua base, sotto che angolo ne osservo la sommità?

G.63 (*). Devo stendere un tirante che si aggancia a terra e ad un palo, ai $\frac{3}{5}$ della sua altezza. Sapendo che il palo è alto 3,34 m e che il cavo si aggancia al terreno a 3 m dalla sua base, che angolo forma il tirante rispetto al terreno?

G.64 (*). Su un cartello stradale vediamo l'indicazione di una salita del 10%. Sapendo che questo significa che ogni 100 m in orizzontale se ne percorrono 10 in verticale, calcola l'inclinazione in gradi della strada. È possibile superare salite del 100%?

G.65 (*). Una capriata ha una catena di 32 m ed è alta 8,9 m. Qual è l'inclinazione dei suoi puntoni?

Attenzione: la capriata è la struttura per le coperture a "capanna"; le travi che la costituiscono formano un triangolo isoscele; la catena è la trave di base, i puntoni sono le travi oblique.

G.66 (*). La facciata di un tempio greco ha un basamento largo 22 m e alto 3 m, colonne alte 7,40 m e il frontone, largo quanto il basamento, ha falde inclinate di 15°. Quanto è alto il punto più elevato del tempio? Volendo fargli raggiungere l'altezza di 14 m quale inclinazione bisognerebbe dare ai lati obliqui del frontone?

G.67 (*). Dall'alto di una rampa lunga 300 m misuro la distanza dalla sommità di una torre che si eleva dalla base della rampa e arriva alla stessa altezza della mia testa. Sapendo che la suddetta distanza vale 271 m, qual è l'inclinazione della rampa?

G.8 - Risoluzione di un triangolo qualunque

G.68. Determina gli elementi incogniti di un triangolo in cui $b = 5$, $c = 7$ e $\hat{\alpha} = 74°$.

G.69. In un triangolo sono noti: $b = 9$, $\hat{\alpha} = 20°$ e $\hat{\beta} = 44°$. Quanto vale la lunghezza a?

G.70. In un triangolo sono noti: $a = 20$, $c = 13$ e $\hat{\beta} = 75°$. Quanto vale b?

G.71. Determina l'angolo $\hat{\beta}$ di un triangolo in cui $a = 10\,\text{Km}$, $b = 8\,\text{Km}$, $c = 12\,\text{Km}$.

G.72. Determina gli elementi incogniti di un triangolo in cui $a = 12$, $c = 15$ e $\hat{\beta} = 65°$.

G.73. In un triangolo sono noti: $a = 20$, $\hat{\alpha} = 35°$ e $\hat{\beta} = 20°$. Quanto vale la lunghezza b?

G.74. In un triangolo sono noti: $b = 12$, $c = 4$ e $\hat{\alpha} = 40°$. Quanto vale a?

G.10.2 Risposte

G.42. 597,27 m.

G.43. 44 Km.

G.44. 5,91 Km.

G.45. 695,87 m.

G.46. 25,38 Km.

G.47. 25,36 m.

G.48. 2.303,50 m.

G.49. 59,68 m.

G.50. 8,39 m.

G.51. 32.451 N.

G.52. 140,95 N.

G.53. 26.108,95 N.

G.54. 8,39 m.

G.56. 34,38 m.

G.57. 6,70 m.

G.58. 147 m.

G.59. 105,50 m; 140 m.

G.60. 28°.

G.61. 51,86°.

G.62. 68,82 m; 2,39°.

G.63. 33,74°.

G.64. 5,71°.

G.65. 29,08°.

G.66. 13,35 m; 18,12°.

G.67. 25,4°.