1 Numeri naturali

1.1 L'origine dei numeri

L'origine del sistema dei numeri naturali si perde nella notte dei tempi. Non abbiamo documenti sufficienti per capire come l'uomo li abbia costruiti o scoperti; è possibile che il nostro sistema di numerazione sia nato contemporaneamente al linguaggio stesso della specie umana. Sono stati ritrovati tronchi fossili risalenti a più di trentamila anni fa, recanti delle incisioni a distanza regolare. In particolare, è stato ritrovato un osso di babbuino, detto "Osso di Ishango" (figura 1.1) [1] in quanto è stato rinvenuto presso la città di Ishango nel Congo tra il Nilo e il lago Edoardo, che riporta delle tacche disposte in modo tale da farci pensare che rappresentino dei numeri o dei calcoli. L'osso risale a un periodo tra il 20 000 a.C. e il 18 000 a.C.

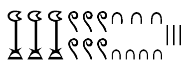
Possiamo immaginare che i pastori per contare i capi del proprio gregge, facessero delle tacche su dei bastoni mano a mano che le pecore entravano nel recinto una alla volta: una tacca per ogni pecora. Tuttavia, questo metodo di associazione uno ad uno (una tacca per una pecora) non è efficace per greggi, o oggetti da contare, di grandi dimensioni. Si immagini, per esempio, la difficoltà di tracciare cinquecento tacche su un bastone. È possibile allora che per rappresentare numeri grandi si siano cominciati a usare simboli specifici che richiamassero alla mente i numeri grandi e che contemporaneamente siano state fissate alcune regole per associare questi simboli.

FIGURA 1.1: Osso di Ishango

Sappiamo per certo che circa 6 000 anni fa gli antichi Egizi scrivevano, incidendo sulla pietra, i numeri utilizzando geroglifici per le potenze di 10:

𓁨	𓆐	𓂭	𓆼	𓍢	𓎆	𓏺
1 000 000	100 000	10 000	1 000	100	10	1

Ripetendo questi simboli è possibile scrivere, per esempio, il numero 3673 così:



I Romani usavano invece sette simboli con i quali, seguendo determinate regole, rappresentavano qualunque numero. I simboli sono I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000. Il numero MM rappresenta $1000 + 1000 = 2000$; il numero VI rappresenta $5 + 1 = 6$, mentre il numero IV rappresenta $5 - 1 = 4$.

[1] http://it.wikipedia.org/wiki/Osso_d'Ishango

1.2 Il sistema di numerazione decimale posizionale

Il modo di scrivere i numeri dei romani risultava piuttosto complicato sia nella scrittura dei numeri sia nell'esecuzione dei calcoli. Il sistema moderno di scrittura dei numeri fa uso dei soli dieci simboli 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, che vengono detti *cifre*. Un numero non è altro che una sequenza ordinata di cifre, eventualmente ripetute.

Per rappresentare il numero dieci che segue il 9 non si fa uso di un simbolo diverso ma si scrivono due cifre: il simbolo 1 a sinistra e il simbolo 0 a destra. Per chiarire questo metodo utilizziamo un pallottoliere (figura 1.2) con aste verticali capaci di contenere fino a 9 dischetti: per rappresentare il numero 10 dispongo un dischetto nell'asta a sinistra e vuoto la prima asta: il numero dieci viene rappresentato dalla scrittura 10.

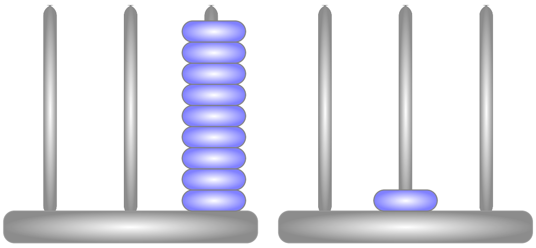


FIGURA 1.2: Il pallottoliere

I dischetti sull'ultima asta rappresentano il numero 9; un dischetto sulla penultima rappresenta il numero 10. Per rappresentare il numero cento si fa uso della scrittura 100. Ovvero si sposta il numero 1 ancora a sinistra ponendo uno zero nel posto lasciato vuoto. Questo metodo può essere ripetuto per rappresentare tutti i numeri che risultino potenza di dieci, ovvero dieci, cento, mille…

Le potenze di 10 sono importanti nel sistema decimale poiché rappresentano il peso di ciascuna cifra di cui è composto il numero. Nel pallottoliere ciascuna asta indica una potenza di dieci. Il valore di un numero si ottiene moltiplicando ciascuna cifra per il suo peso e sommando i valori ottenuti.

Per esempio, tre dischetti nella terza asta rappresentano il numero $3 \cdot 10^2 = 300$. Il numero 219 si rappresenta tenendo conto di questa scrittura $2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 9$.

Per quanto detto, il sistema di numerazione che usiamo è decimale o a base dieci, perché usiamo dieci simboli (cifre) per scrivere i numeri, posizionale perché una stessa cifra assume un peso (valore) diverso a seconda della posizione che occupa.

1.3 I numeri naturali

I primi numeri che abbiamo usato sin da bambini per contare gli oggetti o le persone si chiamano *numeri naturali*

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 \ldots$$

L'insieme di tutti questi numeri si indica con la lettera $\mathbb{N}$.

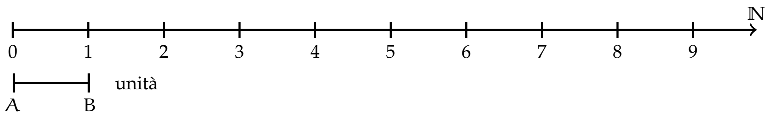
Cosa hanno in comune le dita di una mano, con 5 mele, 5 penne, 5 sedie? Evidentemente il numero 5. Una caratteristica cioè che è comune a tutti gli insiemi formati da 5 oggetti. Questa caratteristica può essere vista come un oggetto a sé stante, un oggetto astratto di tipo matematico.

Ma i numeri naturali non servono solo per indicare quanti oggetti ci sono (aspetto *cardinale* del numero), vengono usati anche per rappresentare l'ordine con cui si presentano gli oggetti, (aspetto *ordinale*), l'ordine per esempio con cui i corridori arrivano al traguardo: primo, secondo, terzo…

Nonostante i numeri naturali e le operazioni su di essi ci vengano insegnati fin da piccoli, e nonostante l'umanità li usi da tempi antichissimi una loro piena comprensione non è semplice, come dimostra il fatto che ancora oggi i matematici ne discutono. Il dibattito su cosa siano i numeri e su cosa si fondano è stato particolarmente animato nei primi decenni del XX secolo, quando ne hanno discusso matematici e filosofi come Frege, Peano, Russell, Hilbert e tanti altri. Oggi ci sono diversi punti di vista.

1.3.1 Rappresentazione geometrica

I numeri naturali possono essere rappresentati su una semiretta: si identifica il numero 0 con l'origine della semiretta, come verso di percorrenza si prende quello da sinistra verso destra e come unità di misura un segmento AB. Si riporta questa unità di misura più volte partendo dall'origine e a ogni passo si va al numero successivo.



Ogni numero naturale si costruisce a partire dal numero 0 e passando di volta in volta al numero successivo: 1 è il successore di 0, 2 è il successore di 1, 3 è il successore di 2, etc. Ogni numero naturale ha il successore e ogni numero, a eccezione di 0, ha il precedente. L'insieme $\mathbb{N}$ ha 0 come elemento minimo e non ha un elemento massimo.

I numeri rappresentati sulla retta sono sempre più grandi man mano che si procede da sinistra verso destra. Ogni numero è maggiore di tutti i suoi precedenti, quelli che stanno alla sua sinistra, e minore di tutti i suoi successivi, quelli che stanno alla sua destra. Tra i numeri naturali esiste quindi una relazione d'ordine, che si rappresenta con il simbolo di *disuguaglianza* ($\leqslant$ si legge "minore o uguale di") o *disuguaglianza stretta* ($<$ si legge "minore di"). Grazie a questo ordinamento, è sempre possibile confrontare due numeri naturali qualsiasi.

Legge 1.1 (di tricotomia)**.** *Dati due numeri naturali n, m vale sempre una delle seguenti tre relazioni:* $n>m$, $n<m$, $n=m$.

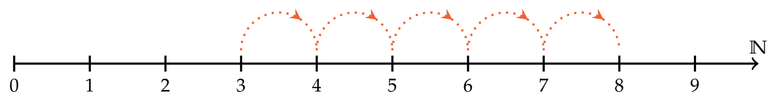
1.4 Operazioni con i numeri naturali

1.4.1 Addizione e moltiplicazione di numeri naturali

Tra i numeri naturali è definita l'operazione di addizione come segue:

Definizione 1.1. Dati due numeri naturali n e m, detti *addendi*, l'operazione di *addizione* associa ai due addendi un terzo numero s, detto *somma*, che si ottiene partendo da n e procedendo verso i successivi di n tante volte quante indica il secondo addendo m. Si scrive $n+m=s$.

Ad esempio se vogliamo eseguire la somma $3+5$, dobbiamo partire da 3 e contare 5 numeri successivi:



Definizione 1.2. Dati due numeri naturali n, m, detti *fattori*, l'operazione di *moltiplicazione* associa ai due fattori un terzo numero p, detto *prodotto*, che si ottiene sommando n addendi tutti uguali a m.

L'operazione di moltiplicazione si indica con diversi simboli:

$$p = n \times m, \qquad p = n \cdot m, \qquad p = n * m.$$

Per eseguire la moltiplicazione $4 \cdot 2$ dobbiamo addizionare $2+2+2+2$, otteniamo 8.

Le operazioni di addizione e moltiplicazione si dicono *operazioni interne* all'insieme dei numeri naturali, esse infatti danno sempre come risultato un numero naturale.

✍ *Esercizio proposto:* 1.1

1.4.2 Sottrazione e divisione di numeri naturali

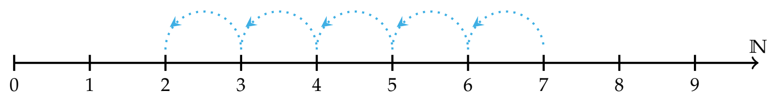
Diamo la seguente definizione:

Definizione 1.3. Dati due numeri naturali n e m, il primo detto *minuendo* e il secondo *sottraendo*, si dice *differenza* il numero naturale d, se esiste, che aggiunto ad m dà come somma n. Si scrive $n - m = d$.

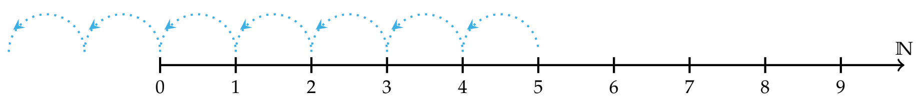
Per esempio, $7 - 5 = 2$ perché $5 + 2 = 7$.

Non esiste invece la differenza tra 5 e 7, in quanto nessun numero naturale aggiunto a 7 può dare 5.

Ritornando alla rappresentazione dei numeri naturali sulla semiretta orientata, la differenza tra i numeri 7 e 5 si può trovare partendo da 7 e procedendo a ritroso di 5 posizioni.



Diventa allora evidente perché non è possibile trovare la differenza tra 5 e 7, infatti partendo dal 5 non è possibile andare indietro di 7 posizioni, poiché non è possibile andare oltre il numero 0 che è il più piccolo dei numeri naturali.



Si può osservare allora che in $\mathbb{N}$ la sottrazione $a - b$ è possibile solo se $b \leqslant a$.

Definizione 1.4. Dati due numeri naturali n e m, con $m \neq 0$, il primo detto *dividendo* e il secondo *divisore*, si dice *quoziente esatto* un numero naturale q, se esiste, che moltiplicato per m dà come prodotto n. Si scrive $n : m = q$.

Se il quoziente esiste, il numero m si dice *divisore* di n, oppure si dice che n è *divisibile* per m.

Definizione 1.5. Un numero naturale m si dice *multiplo* di un numero naturale n se esiste un numero p che moltiplicato per n dà m, cioè $m = n \cdot p$.

Esempio 1.1. $12 : 3 = 4$ perché $3 \times 4 = 12$. Quindi, 12 è divisibile per 3; 3 è un divisore di 12; 12 è un multiplo di 3.

Esempio 1.2. 20 è divisibile per 4 perché $20 : 4 = 5$.

Esempio 1.3. 7 è divisore di 35 perché $35 : 7 = 5$.

Esempio 1.4. 6 è multiplo di 3 perché $6 = 2 \times 3$.

Esempio 1.5. 5 non è multiplo di 3, non esiste alcun numero naturale che moltiplicato per 3 dà 5.

❑ **Osservazione** In $\mathbb{N}$ la divisione tra due numeri m e n, è possibile solo se m è multiplo di n.

✍ *Esercizio proposto:* 1.2

Come hai potuto notare dagli esercizi precedenti la divisione tra due numeri naturali non è sempre possibile. Con i numeri naturali però è sempre possibile eseguire la divisione con il resto.

Definizione 1.6. Dati due numeri naturali n e m, con $m \neq 0$, si dice *quoziente* tra n e m, il più grande numero naturale q che moltiplicato per m dà un numero minore o uguale a n. Si dice *resto* della divisione tra n e m la differenza r tra il dividendo n e il prodotto tra il divisore m e il quoziente q. In simboli $n = m \times q + r$ o anche $r = n - m \times q$.

Esempio 1.6. Nella divisione con resto tra 25 e 7 si ha quoziente 3 (infatti $7 \times 3 = 21$, mentre $7 \times 4 = 28$ supera il dividendo) e resto 4 (infatti $25 - 21 = 4$). Pertanto si può scrivere $25 = 7 \times 3 + 4$.

$$\begin{array}{rr|ll}
\text{dividendo} \longrightarrow & 25 & 7 & \longleftarrow \text{divisore} \\ \cline{3-3}
 & 21 & 3 & \longleftarrow \text{quoziente} \\ \cline{2-2}
\text{resto} \longrightarrow & 4 & &
\end{array}$$

Esempio 1.7. $0 : 2 = 0$.

Esempio 1.8. $1 : 2 = 0$ con resto 1.

Esempio 1.9. $5 : 2 = 2$ con resto 1.

❑ **Osservazione** Nella definizione di quoziente abbiamo sempre richiesto che il divisore sia diverso da zero. In effetti, se il divisore è 0 non c'è nessun numero che moltiplicato per 0 ci possa dare un dividendo diverso da zero. Per esempio, nella divisione $5 : 0$ dobbiamo ottenere un numero che moltiplicato per 0 dia 5; ciò non è possibile in quanto qualsiasi numero moltiplicato per 0 dia 0. Invece nella divisione $0 : 0$ un qualsiasi numero è adatto come quoziente, infatti qualsiasi numero moltiplicato per 0 dà 0 come prodotto.

Nel linguaggio matematico diciamo che una divisione del tipo $n : 0$, con $n \neq 0$, è *impossibile*; mentre la divisione $0 : 0$ è *indeterminata*.

Definizione 1.7. Dati due numeri naturali n e m, con $m \neq 0$, la *divisione intera* $n \operatorname{div} m$ è l'operazione che dà il più grande numero naturale q (il quoziente) per il quale si ha $q \times m \leqslant n$.

Esempio 1.10. $0 \operatorname{div} 5 = 0$.

Esempio 1.11. $9 \operatorname{div} 2 = 4$.

Esempio 1.12. $3 \operatorname{div} 5 = 0$.

Esempio 1.13. Non è possibile, invece, la divisione intera per 0.

$$3 \operatorname{div} 0 = \text{ non si può fare.}$$

Definizione 1.8. Dati due numeri naturali n e m, con $m \neq 0$, l'operazione che restituisce il resto della divisione intera tra n e m si chiama *modulo* di n rispetto a m e viene indicata con $n \bmod m$.

Esempio 1.14. $3 \bmod 0 =$ non si può fare; $0 \bmod 5 = 0$.

Esempio 1.15. $9 \bmod 5 = 1$; $10 \bmod 5 = 0$.

Esempio 1.16. $3 \bmod 5 = 3$; $11 \bmod 5 = 1$.

✍ *Esercizi proposti:* 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6

Ripassiamo l'algoritmo della divisione intera per numeri a più cifre; questo algoritmo risulterà particolarmente utile nel seguito.

$$\begin{array}{rrr|rr}
3 & 2 & 7 & 2 & 3 \\ \cline{4-5}
-2 & 3 & & 1 & 4 \\ \cline{1-2}
 & 9 & 7 & & \\
- & 9 & 2 & & \\ \cline{2-3}
 & & 5 & &
\end{array}$$

(a)

$$\begin{array}{rrrr|rrr}
1 & 3 & 2 & 9 & 1 & 0 & 7 \\ \cline{5-7}
-1 & 0 & 7 & & 1 & 2 & \\ \cline{1-3}
 & 2 & 5 & 9 & & & \\
- & 2 & 1 & 4 & & & \\ \cline{2-4}
 & & 4 & 5 & & &
\end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rrrrrr|rrr}
1 & 2 & 5 & 9 & 4 & 3 & 1 & 7 & 1 \\ \cline{7-9}
-1 & 1 & 9 & 7 & & & 7 & 3 & 6 \\ \cline{1-4}
 & & 6 & 2 & 4 & & & & \\
 & - & 5 & 1 & 3 & & & & \\ \cline{3-5}
 & & 1 & 1 & 1 & 3 & & & \\
 & - & 1 & 0 & 2 & 6 & & & \\ \cline{3-6}
 & & & & 8 & 7 & & &
\end{array}$$

(c)

a) $327 : 23 =$ quoziente 14 e resto 5;
b) $1329 : 107 =$quoziente 12 e resto 45;
c) $125943 : 171 =$ quoziente 736 e resto 87.

✍ *Esercizio proposto:* 1.7

1.5 Proprietà delle operazioni

1.5.1 Proprietà commutativa

Un'operazione gode della proprietà commutativa se, cambiando l'ordine dei numeri sui quali essa va eseguita, il risultato non cambia.

La proprietà commutativa *vale* per le seguenti operazioni:

addizione $a + b = b + a$. Es. $3 + 5 = 5 + 3 = 8$;
moltiplicazione $a \cdot b = b \cdot a$. Es. $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3 = 15$.

La proprietà commutativa *non vale* per le seguenti operazioni:

sottrazione $a - b \neq b - a$. Es. $8 - 3 = 5 \neq 3 - 8$ non si può fare in $\mathbb{N}$;
divisione $a : b \neq b : a$. Es. $8 : 4 = 2 \neq 4 : 8$ non si può fare in $\mathbb{N}$;
divisione intera $a \operatorname{div} b \neq b \operatorname{div} a$. Es. $17 \operatorname{div} 5 = 3 \neq 5 \operatorname{div} 17 = 0$;
modulo $a \bmod b \neq b \bmod a$. Es. $9 \bmod 2 = 1 \neq 2 \bmod 9 = 2$;
potenza $a^b \neq b^a$. Es. $3^2 = 9 \neq 2^3 = 8$.

1.5.2 Proprietà associativa

Un'operazione gode della proprietà associativa se, presi arbitrariamente tre numeri legati da due operazioni, è indifferente da quale operazione si inizia, in quanto il risultato che si ottiene è sempre lo stesso.

La proprietà associativa *vale* per le seguenti operazioni:

addizione $(a + b) + c = a + (b + c)$. Es. $(3 + 5) + 2 = 3 + (5 + 2) = 10$;
moltiplicazione $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Es. $(3 \cdot 5) \cdot 2 = 3 \cdot (5 \cdot 2) = 30$.

La proprietà commutativa *non vale* per le seguenti operazioni:

sottrazione $(a - b) - c \neq a - (b - c)$. Es. $(10 - 5) - 2 = 3 \neq 10 - (5 - 2) = 7$;
divisione $(a : b) : c \neq a : (b : c)$. Es. $(16 : 4) : 2 = 2 \neq 16 : (4 : 2) = 8$;
divisione intera $(a \operatorname{div} b) \operatorname{div} c \neq a \operatorname{div}(b \operatorname{div} c)$. Es. $(17 \operatorname{div} 5) \operatorname{div} 2 = 1 \neq 17 \operatorname{div}(5 \operatorname{div} 2) = 8$;
modulo $(a \bmod b) \bmod c \neq a \bmod (b \bmod c)$.
Es. $(17 \bmod 7) \bmod 1 = 1 \neq 17 \bmod (7 \bmod 2) = 0$.

1.5.3 Elemento neutro

Un'operazione ha un elemento neutro se composto con qualsiasi altro numero lo lascia invariato, sia quando il numero è a destra, sia quando è a sinistra. L'elemento neutro dell'addizione è 0, sia che si trovi a destra che a sinistra:

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

L'elemento neutro della moltiplicazione è 1, sia che si trovi a destra sia che si trovi a sinistra:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

La divisione ha l'elemento neutro a destra, che è 1, ma non ha elemento neutro a sinistra:

$$a : 1 = a, \qquad 1 : a \neq a, \text{ se } a \neq 1.$$

1.5.4 Proprietà distributiva

La proprietà distributiva coinvolge due operazioni differenti.

Proprietà distributiva della moltiplicazione

Rispetto all'addizione Moltiplicare il risultato dell'addizione di più numeri per un altro numero dà lo stesso risultato che moltiplicare ogni addendo per il fattore e addizionare i prodotti ottenuti. Questa proprietà vale sia se la somma è a destra sia se è a sinistra.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$
$$3 \cdot (2 + 4) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 18 \qquad (2 + 4) \cdot 3 = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 18.$$

Rispetto alla sottrazione In maniera analoga:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c \qquad (a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$$
$$6 \cdot (10 - 4) = 6 \cdot 10 - 6 \cdot 4 = 36 \qquad (10 - 4) \cdot 6 = 10 \cdot 6 - 4 \cdot 6 = 36.$$

Proprietà distributiva della divisione

Rispetto all'addizione Solo se le somme sono a sinistra:

$$(a + b + c) : d = a : d + b : d + c : d \qquad (20 + 10 + 5) : 5 = 20 : 5 + 10 : 5 + 5 : 5 = 7.$$

Verifichiamo con un esempio che non vale la proprietà distributiva se le somme si trovano a destra: $120 : (3 + 5)$ Eseguendo prima l'operazione tra parentesi si ottiene correttamente $120 : 8 = 15$. Se si prova ad applicare la proprietà distributiva si ottiene $120 : 3 + 120 : 5 = 40 + 24 = 64$. Il risultato corretto è il *primo*.

Rispetto alla sottrazione Solo se la sottrazione è a sinistra:

$$(a - b) : c = a : c - b : c \qquad (20 - 10) : 5 = 20 : 5 - 10 : 5 = 4 - 2 = 2$$

Se, però, la sottrazione è a destra:

$$120 : (5 - 3) = 120 : 2 = 60 \neq 120 : 5 - 120 : 3 = 24 - 40 = \text{ non si può fare.}$$

Legge 1.2 (Annullamento del Prodotto). *Il prodotto di due o più numeri naturali si annulla se almeno uno dei fattori è nullo.*

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \textit{ oppure } b = 0.$$

✍ *Esercizi proposti:* 1.8, 1.9

1.6 Potenza

La *potenza* di un numero naturale è una moltiplicazione che ha tutti i fattori uguali.

Definizione 1.9. Dati due numeri naturali a e b, con $b > 1$ il primo detto *base*, il secondo *esponente*, la potenza di a con esponente b è il numero p che si ottiene moltiplicando fra loro b fattori tutti uguali ad a. Si scrive $a^b = p$ e si legge "a *elevato a* b *uguale a* p".

Per esempio $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$.

$$\underset{\text{base}}{5}^{\overset{\text{esponente}}{3}} = \underbrace{5 \times 5 \times 5}_{3 \text{ volte}} = \underset{\text{potenza}}{125}$$

Alla definizione precedente vanno aggiunti i seguenti casi particolari che completano la definizione:

$$\begin{aligned} a^1 &= a, \\ a^0 &= 1, \text{ se } a \neq 0, \\ 0^0 &= \text{ non ha significato.} \end{aligned}$$

Queste definizioni trovano giustificazione nelle proprietà delle potenze.

1.6.1 Proprietà delle potenze

I Il prodotto di due potenze con la stessa base è uguale a una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti.

$$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$$

$$2^5 \cdot 2^6 = 2^{5+6} = 2^{11}.$$

La proprietà segue da questa osservazione:

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ volte}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ volte}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a)}_{n+m \text{ volte}} = a^{n+m}.$$

II Il quoziente di due potenze con la stessa base, la prima con esponente maggiore o uguale all'esponente della seconda, è uguale a una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti.

$$\boxed{a^n : a^m = a^{n-m}}$$

$$4^5 : 4^3 = 4^{5-3} = 4^2.$$

La proprietà segue da questa osservazione:

$$a^n : a^m = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ volte}} : \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ volte}} \tag{1.1}$$

$$= \underbrace{(a : a) \cdot (a : a) \cdot \ldots \cdot (a : a)}_{n \text{ volte}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n-m \text{ volte}} \tag{1.2}$$

$$= a^{n-m}. \tag{1.3}$$

Il passaggio dalla (1.1) alla (1.2) avviene per via della proprietà invariantiva della divisione.

III La potenza di una potenza è uguale a una potenza che ha la base della prima potenza e per esponente il prodotto degli esponenti.

$$\boxed{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$$

$$(6^2)^5 = 6^{2 \cdot 5} = 6^{10}.$$

La proprietà segue da questa osservazione:

$$(a^n)^m = \overbrace{a^n \cdot a^n \cdot \ldots \cdot a^n}^{m \text{ volte}} = \overbrace{\underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ volte}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ volte}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ volte}}}^{m \text{ volte}} = a^{n \cdot m}.$$

IV Il prodotto di potenze con lo stesso esponente è uguale al prodotto delle potenze dei singoli fattori.

$$\boxed{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$$

$$(2 \cdot 5)^8 = 2^8 \cdot 5^8.$$

La proprietà segue da questa osservazione:

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ volte}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ volte}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{n \text{ volte}} = a^n \cdot b^n.$$

V La potenza di un quoziente è uguale al quoziente delle potenze dei singoli fattori.

$$\boxed{(a : b)^n = a^n : b^n}$$

$$(4 : 2)^8 = 4^8 : 2^8.$$

Le definizioni dei casi particolari di potenze si giustificano nel seguente modo:

$$a^0 = a^{5-5} = a^5 : a^5 = 1,$$
$$a^1 = a^{5-4} = a^5 : a^4 = a.$$

Alla potenza 0^0 non si assegna nessun valore perché applicando la definizione di a^0 si dovrebbe avere 1; applicando la definizione 0^a si dovrebbe avere 0.

✍ *Esercizi proposti:* 1.10, 1.11, 1.12, 1.13, 1.14, 1.15

1.7 Numeri Primi

Osserva il seguente schema

$$\boxed{18} \xrightarrow[\text{è divisibile per}]{\text{è multiplo di}} \boxed{6} \xrightarrow[\text{è divisore di}]{\text{è sottomultiplo di}} \boxed{18}$$

In esso sono descritte alcune caratteristiche del numero 18 e i suoi legami con il numero 6.

Definizione 1.10. Chiamiamo *divisore proprio* di un numero un divisore diverso dal numero stesso e dall'unità.

Osserva ora il seguente schema

$$\boxed{31} \xrightarrow[\text{è divisibile per}]{\text{è multiplo di}} \boxed{\cdots} \xrightarrow[\text{è divisore di}]{\text{è sottomultiplo di}} \boxed{31}$$

Nella casella centrale, al posto dei puntini, puoi inserire soltanto i numeri 31 o 1.

Definizione 1.11. Un numero $p > 1$ si dice *primo* se è divisibile solo per se stesso e per l'unità. Un numero naturale maggiore di 1 si dice *composto* se non è primo.

0 non è primo né composto	5 è primo	10 è composto
1 non è primo né composto	6 è composto	11 è primo
2 è primo	7 è primo	12 è composto
3 è pimo	8 è composto	13 è primo
4 è composto	9 è composto	...

✍ *Esercizio proposto:* 1.16

Ma quanti sono i numeri primi? La risposta a questa domanda venne data da Euclide con il seguente teorema che porta il suo nome:

Teorema 1.3 (di Euclide). *I numeri primi sono infiniti.*

Euclide ci ha fatto vedere come sia possibile costruire numeri primi comunque grandi. Dato un numero primo, è sempre possibile costruirne uno più grande.

✍ *Esercizio proposto:* 1.17

Esempio 1.17. Per verificare se 31 è primo, calcolo il valore approssimato $\sqrt{31} \simeq 5,5$ e verifico se è divisibile per i numeri primi $\leqslant 5$, cioè 2, 3, 5. Allora 31 è primo, in quanto non è divisibile per 2 in quanto è dispari, non è divisibile per 3 poiché la somma delle sue cifre è 4 che non è divisibile per 3, non è divisibile per 5 in quanto non finisce per 0 o 5.

Esempio 1.18. Per verificare se 59 è un numero primo calcolo $\sqrt{59} \simeq 7,6$ e verifico se 59 è divisibile per un numero primo $\leqslant 7$, cioè per 2, 3, 5, 7. Eseguendo le divisioni si vede che 59 non è divisibile per nessuno di questi numeri, quindi è primo.

❑ **Osservazione** Un numero è primo quando non è divisibile per nessun numero primo compreso tra 2 e la radice quadrata del numero.

1.8 Criteri di divisibilità

Per verificare se un numero è divisibile per i primi numeri interi si possono applicare i seguenti criteri di divisibilità.

Divisibilità per 2 Un numero è divisibile per 2 se e solo se la sua ultima cifra, quella delle unità, è un numero pari, cioè è 0, 2, 4, 6, 8.

- ➡ 1236 finisce per 6 quindi è divisibile per 2;
- ➡ 109230 finisce per 0 quindi è divisibile per 2;
- ➡ 10923 finisce per 3 quindi non è divisibile per 2.

Divisibilità per 3 Un numero è divisibile per 3 se e solo se la somma delle cifre che lo compongono è divisibile per 3.

- ➡ 24 è divisibile per 3, infatti la somma delle sue cifre è $2+4=6$, dato che 6 è divisibile per 3 anche 24 è divisibile per 3;
- ➡ 1236 è divisibile per 3, infatti la somma delle sue cifre è $1+2+3+6=12$; 12 è divisibile per 3 dato che la somma delle sue cifre è $1+2=3$, quindi anche 1236 è divisibile per 3;
- ➡ 31 non è divisibile per 3, infatti la somma delle sue cifre è $3+1=4$, dato che 4 non è divisibile per 3 neanche 31 è divisibile per 3.

Divisibilità per 5 Un numero è divisibile per 5 se la sua ultima cifra è 0 o 5.

- ➡ 1230 finisce per 0 quindi è divisibile per 5;
- ➡ 59235 finisce per 5 quindi è divisibile per 5;
- ➡ 109253 finisce per 3 quindi non è divisibile per 5;
- ➡ 5556 finisce per 6 quindi non è divisibile per 5.

Divisibilità per 7 Un numero (maggiore di 10) è divisibile per 7 se la differenza (in valore assoluto) fra il numero ottenuto togliendo la cifra delle unità e il doppio della cifra delle unità è 7 o un multiplo di 7.

- ➡ 252 è divisibile per 7, infatti $|25-2\cdot 2|=21$ è multiplo di 7;
- ➡ 49 è divisibile per 7, infatti $|4-2\cdot 9|=14$ è multiplo di 7;
- ➡ 887 non è divisibile per 7, infatti $|88-2\cdot 7|=74$ non è divisibile per 7.

Divisibilità per 11 Un numero è divisibile per 11 se e solo se la differenza, in valore assoluto, fra la somma delle cifre di posto pari e la somma delle cifre di posto dispari è 0, 11 o un multiplo di 11.

- ➡ 253 è divisibile per 11, infatti $|5-(2+3)|=0$;
- ➡ 9482 è divisibile per 11, infatti $|(9+8)-(4+2)|=11$;
- ➡ 887 non è divisibile per 11, infatti $|8-(8+7)|=7$.

✍ *Esercizi proposti:* 1.18, 1.19

1.9 Scomposizione in fattori primi

Scomporre in fattori un numero significa scriverlo come prodotto di altri numeri naturali.

✍ *Esercizi proposti:* 1.20, 1.21

Teorema 1.4 (fondamentale dell'Aritmetica)**.** *Ogni numero naturale* $n > 1$ *si può scrivere in modo unico come prodotto di numeri primi.*

Esempio 1.19. Scomporre in fattori primi il numero 630.

630	2	630 è divisibile per 2 perché l'ultima cifra è pari;
315	3	315 è divisibile per 3, la somma delle sue cifre è 9 divisibile per 3;
105	3	105 è divisibile per 3, la somma delle sue cifre è 6 divisibile per 3;
35	5	35 è divisibile per 5 perché l'ultima cifra è 5.
7	7	
1		

$$630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7.$$

In generale, un numero può essere scomposto in fattori in più modi. Per esempio, $12 = 3 \cdot 4$, ma anche $12 = 6 \cdot 2$. Il teorema fondamentale dell'aritmetica ci assicura che, se si scompone un numero in fattori primi, questa scomposizione è unica, a meno dell'ordine con cui si scrivono i fattori. Tornando all'esempio precedente $12 = 2^2 \cdot 3$ è l'unico modo in cui il 12 si può scomporre in fattori primi, a meno che non si scambino di posto i fattori $12 = 3 \cdot 2^2$.

✍ *Esercizio proposto:* 1.22, 1.23, 1.24

1.10 Massimo Comune Divisore e minimo comune multiplo

Definizione 1.12. Il *massimo comune divisore* di numeri naturali a e b, viene indicato con $\mathrm{MCD}(a, b)$, è il più grande tra tutti i divisori comuni ad a e b.

Applicando la definizione, il massimo comune divisore tra 18 e 12 si ottiene prendendo tutti i divisori di 18 e 12:

$$\begin{aligned} &\text{divisori di } 18: && 18,\ 9,\ 6,\ 3,\ 2,\ 1; \\ &\text{divisori di } 12: && 12,\ 6,\ 4,\ 2,\ 1. \end{aligned}$$

I divisori comuni sono 6, 2, 1. Il più grande dei divisori comuni è 6.

✍ *Esercizio proposto:* 1.25

Per calcolare il massimo comune divisore di due o più numeri si può applicare la seguente procedura:

Procedura 1.5. *Calcolo del* MCD *di due o più numeri naturali:*

a) si scompongono i numeri in fattori primi;
b) si moltiplicano tra loro i fattori comuni, presi una sola volta e con il minore esponente.

Esempio 1.20. Calcolare $\text{MCD}(60, 48, 36)$.

Si scompongono in fattori i singoli numeri $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $48 = 2^4 \cdot 3$, $36 = 2^2 \cdot 3^2$. I fattori comuni sono 2 e 3, il 2 compare con l'esponente minimo 2; il 3 compare con esponente minimo 1.

Pertanto $\text{MCD}(60, 48, 36) = 2^2 \cdot 3 = 12$.

Esempio 1.21. Calcolare $\text{MCD}(60, 120, 90)$.

Si scompongono in fattori i singoli numeri $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ e $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$. I fattori in comune sono 2, 3, 5. L'esponente minino è 1 per tutti.

Pertanto $\text{MCD}(60, 120, 90) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.

Definizione 1.13. Due numeri a e b si dicono *primi tra loro* o *coprimi* se $\text{MCD}(a, b) = 1$.

Esempio 1.22. Numeri primi tra loro:

- 12 e 25 sono primi tra loro. Infatti il $\text{MCD}(12, 25) = 1$ dato che nelle loro scomposizioni in fattori non si hanno fattori comuni: $12 = 2^2 \cdot 3$ e $25 = 5^2$;
- 35 e 16 sono primi tra loro. Infatti $35 = 5 \times 7$, $16 = 2^4$. I due numeri non hanno divisori comuni e il loro $\text{MCD} = 1$;
- 11 e 19 sono primi tra loro infatti il $\text{MCD}(11, 19) = 1$ dato che 11 e 19 sono numeri primi;
- 12 e 15 non sono primi tra di loro in quanto hanno 3 come divisore comune.

Definizione 1.14. Il *minimo comune multiplo* di due numeri naturali a e b, si indica con $\text{mcm}(a, b)$, è il più piccolo tra tutti i multipli comuni di a e di b.

Per calcolare il minimo comune multiplo tra 6 e 15 applicando la definizione occorre calcolare i primi multipli dei due numeri:

$$\begin{aligned} \text{multipli di } 6: &\quad 6,\ 12,\ 18,\ 24,\ 30,\ 36,\ 42,\ 48,\ 54,\ 60, \ldots; \\ \text{multipli di } 15: &\quad 15,\ 30,\ 45,\ 60,\ 75,\ 90, \ldots \end{aligned}$$

Sono multipli comuni 30, 60, 90,... Il più piccolo dei multipli comuni è 30.

Per calcolare il minimo comune multiplo tra due o più numeri si può applicare la seguente procedura:

Procedura 1.6. *Calcolo del* mcm *di due o più numeri naturali:*

a) *si scompongono i numeri in fattori primi;*
b) *si moltiplicano tra loro i fattori comuni e non comuni, presi una sola volta, con il maggiore esponente.*

Esempio 1.23. Calcolare il $\text{mcm}(60, 48, 36)$.

Scomponendo in fattori i numeri si ha $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$; $48 = 2^4 \cdot 3$; $36 = 2^2 \cdot 3^2$. Tutti i fattori comuni e non comuni presi una sola volta con l'esponente più grande con cui compaiono sono: 2^4, 3^2, 5.

Il mcm è $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$.

Esempio 1.24. Calcolare il $\text{mcm}(20, 24, 450)$.

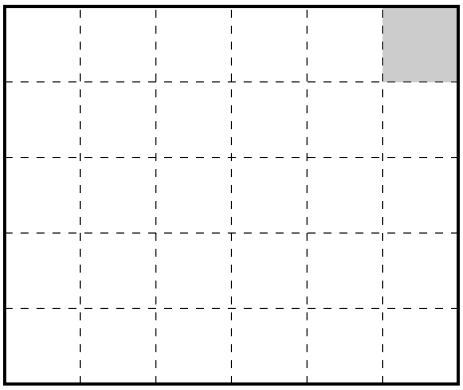
Scomponendo in fattori si ha: $20 = 2^2 \cdot 5$; $24 = 2^3 \cdot 3$; $450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. Moltiplicando i fattori comuni e non comuni con il massimo esponente si ha $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 1800$.

Esempio 1.25. Si vuole pavimentare una stanza a pianta rettangolare di 315 cm per 435 cm con mattonelle quadrate le più grandi possibili, senza sprecarne alcuna. Quali sono le dimensioni delle mattonelle? Quante mattonelle sono necessarie?

Poiché le mattonelle devono essere quadrate devono avere il lato tale che entri un numero intero di volte sia nel 315 sia nel 435, pertanto la dimensione delle mattonelle deve essere un divisore comune di 315 e di 435. Poiché è richiesto che le mattonelle siano quanto più grandi possibile, la dimensione deve essere il massimo divisore comune.

$$\begin{array}{r|l} 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 435 & 3 \\ 145 & 5 \\ 29 & 29 \\ 1 & \end{array}$$

$$315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$
$$435 = 3 \cdot 5 \cdot 29$$



La soluzione del problema è data quindi dal $\text{MCD}(315, 435) = 3 \cdot 5 = 15$. Le mattonelle devono avere il lato di 15 cm. Ci vogliono $435 : 15 = 29$ mattonelle per ricoprire il lato di 435 cm e $315 : 15 = 21$ mattonelle per ricoprire il lato da 315 cm. In tutto occorrono $29 \cdot 21 = 609$ mattonelle.

✍ *Esercizi proposti:* 1.26, 1.27, 1.28, 1.29, 1.30, 1.31, 1.32

1.11 Espressioni numeriche

Nel linguaggio comune alcune frasi possono risultare ambigue. Per esempio «Luca ha detto Mario è stato promosso» può avere due significati diversi a seconda di come si inserisce la punteggiatura: scrivendo «Luca, ha detto Mario, è stato promosso» significa che è stato promosso Luca; scrivendo «Luca ha detto: Mario è stato promosso» significa che è stato promosso Mario.

Anche nella matematica, quando abbiamo più operazioni da eseguire, dobbiamo chiarire l'ordine con cui si devono eseguire le operazioni. Per esempio, l'espressione $2 + 3 \cdot 4$ può valere 20 oppure 14, infatti:

- eseguendo per prima la moltiplicazione si ha $2+3\cdot 4=2+12=14$;
- eseguendo per prima l'addizione si ha $2+3\cdot 4=5\cdot 4=20$.

Per eliminare queste ambiguità sono state fissate alcune regole che bisogna rispettare nell'esecuzione dei calcoli. Intanto diamo la seguente definizione:

Definizione 1.15. Un'espressione aritmetica è una successione di operazioni da eseguire su più numeri.

1.11.1 Regole per semplificare le espressioni

I Se un'espressione contiene solo addizioni, le operazioni si possono eseguire in qualsiasi ordine, grazie alla proprietà associativa dell'addizione.

Esempio 1.26. $3+2+5$.

- $3+2+5=5+5=10$. In questo caso si sono eseguite le operazioni nell'ordine in cui compaiono;
- $3+2+5=3+7=10$. In questo caso si è eseguita per prima l'ultima addizione indicata. Il risultato ottenuto è lo stesso;
- $5+6+15 = 6+20 = 26$. In questo caso abbiamo applicato anche la proprietà commutativa.

II Se un'espressione contiene solo moltiplicazioni, le operazioni si possono eseguire in qualsiasi ordine, anche in questo caso grazie alla proprietà associativa della moltiplicazione.

Esempio 1.27. Dovendo moltiplicare $2\cdot 3\cdot 4$ si può procedere in più modi.

- $2\cdot 3\cdot 4=6\cdot 4=24$. In questo caso si è seguito l'ordine in cui compaiono;
- $2\cdot 3\cdot 4=2\cdot 12=24$. In questo caso si è seguito l'ordine opposto; il risultato è lo stesso.

III Se un'espressione, senza parentesi, contiene più sottrazioni, si deve procedere eseguendole nell'ordine in cui sono scritte, la sottrazione infatti non gode né della proprietà associativa né di quella commutativa.

Esempio 1.28. $10-6-3$.

- $10-6-3=4-3=1$;
- $10-6-3=10-3=7$, errato!

IV Se un'espressione senza parentesi contiene solo addizioni e sottrazioni, le operazioni si devono eseguire nell'ordine con cui sono scritte.

Esempio 1.29. $12+6-5-1+2$.

$$12+6-5-1+2=18-5-1+2=13-1+2=12+2=14.$$

V Se un'espressione senza parentesi contiene solo divisioni, le operazioni si devono eseguire nell'ordine con cui sono scritte.

Esempio 1.30. $360 : 12 : 3$.

- ➡ $360 : 12 : 3 = 30 : 3 = 10$;
- ➡ $360 : 12 : 3 = 30 : 4 = 90$, errato!

VI Se un'espressione senza parentesi contiene addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni e potenze, si eseguono prima le potenze, poi moltiplicazioni e divisioni, rispettando l'ordine con cui sono scritte, e poi addizioni e sottrazioni, rispettando l'ordine.

Esempio 1.31. $18 : 2 : 9 + 5^2 - 2 \cdot 3^2 : 3 - 1$.

$$\begin{aligned}
18 : 2 : 9 + 5^2 - 2 \cdot 3^2 : 3 - 1 &= 18 : 2 : 9 + 25 - 2 \cdot 9 : 3 - 1 \\
&= 9 : 9 + 25 - 18 : 3 - 1 \\
&= 1 + 25 - 6 - 1 \\
&= 26 - 6 - 1 \\
&= 20 - 1 \\
&= 19.
\end{aligned}$$

VII Se l'espressione contiene una coppia di parentesi si devono eseguire prima le operazioni racchiuse nelle parentesi, rispettando le regole precedenti; si eliminano poi le parentesi e si ottiene un'espressione senza parentesi.

Esempio 1.32. $5 \cdot (4 + 3^2 - 1)$.

$$\begin{aligned}
5 \cdot (4 + 3^2 - 1) &= 5 \cdot (4 + 9 - 1) \\
&= 5 \cdot (13 - 1) \\
&= 5 \cdot 12 \\
&= 60.
\end{aligned}$$

VIII Se l'espressione contiene più ordini di parentesi, si eseguono per prima le operazioni racchiuse nelle parentesi tonde, rispettando le regole precedenti, si eliminano le parentesi tonde e si procede con le operazioni racchiuse nelle parentesi quadre. Dopo aver eliminato le parentesi quadre, si eseguono le operazioni nelle parentesi graffe. Si ottiene così un'espressione senza parentesi.

L'uso di parentesi di diverso tipo rende visivamente più semplice l'ordine da seguire nelle operazioni ma in un'espressione tutte le parentesi possono essere tonde. Ciò accade, per esempio, quando si usano gli strumenti di calcolo elettronico come il computer e la calcolatrice.

✍ *Esercizio proposto:* 1.33

1.12 Esercizi

1.12.1 Esercizi dei singoli paragrafi

1.4 - Operazioni con i numeri naturali

1.1. Rispondi alle seguenti domande:

a) Esiste il numero naturale che aggiunto a 3 dà come somma 6?
b) Esiste il numero naturale che aggiunto a 12 dà come somma 7?
c) Esiste il numero naturale che moltiplicato per 4 dà come prodotto 12?
d) Esiste il numero naturale che moltiplicato per 5 dà come prodotto 11?

1.2. Inserisci il numero naturale mancante, se esiste:

a) $7 - \ldots = 1$;
b) $3 - 3 = \ldots$;
c) $5 - 6 = \ldots$;
d) $3 - \ldots = 9$;
e) $15 : 5 = \ldots$;
f) $18 : \ldots = 3$;
g) $\ldots : 4 = 5$;
h) $12 : 9 = \ldots$;
i) $36 \cdot \ldots = 9$.

1.3. Vero o falso?

a) $5 : 0 = 0$ V F
b) $0 : 5 = 0$ V F
c) $5 : 5 = 0$ V F
d) $1 : 0 = 1$ V F
e) $0 : 1 = 0$ V F
f) $0 : 0 = 0$ V F
g) $1 : 1 = 1$ V F
h) $1 : 5 = 1$ V F

1.4. Se è vero che $p = n \times m$, quali affermazioni sono vere?

a) p è multiplo di n V F
b) p è multiplo di m V F
c) m è multiplo di p V F
d) m è multiplo di n V F
e) p è divisibile per m V F
f) m è divisibile per n V F
g) p è divisore di m V F
h) n è multiplo di m V F

1.5. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

a) 6 è un divisore di 3 V F
b) 3 è un divisore di 6 V F
c) 8 è un multiplo di 2 V F
d) 5 è divisibile per 10 V F

1.6. Esegui le seguenti operazioni:

a) $18 \operatorname{div} 3 = \ldots$;
b) $18 \bmod 3 = \ldots$;
c) $20 \operatorname{div} 3 = \ldots$;
d) $20 \bmod 3 = \ldots$;
e) $185 \operatorname{div} 7 = \ldots$;
f) $185 \bmod 7 = \ldots$;
g) $97 \operatorname{div} 5 = \ldots$;
h) $97 \bmod 5 = \ldots$;
i) $240 \operatorname{div} 12 = \ldots$;
j) $240 \bmod 12 = \ldots$.

1.7. Esegui le seguenti divisioni con numeri a più cifre, senza usare la calcolatrice.

a) $311 : 22$;
b) $429 : 37$;
c) $512 : 31$;
d) $629 : 43$;
e) $755 : 53$;
f) $894 : 61$;
g) $968 : 45$;
h) $991 : 13$;
i) $1232 : 123$;
j) $2324 : 107$;
k) $3435 : 201$;
l) $4457 : 96$;
m) $5567 : 297$;
n) $6743 : 311$;
o) $7879 : 201$;
p) $8967 : 44$;
q) $13455 : 198$;
r) $22334 : 212$;
s) $45647 : 721$;
t) $67649 : 128$.

1.5 - Proprietà delle operazioni

1.8. Stabilisci se le seguenti uguaglianze sono vere o false indicando la proprietà utilizzata:

a) $33 : 11 = 11 : 33$ proprietà .... V F
b) $108 - 72 : 9 = (108 - 72) : 9$ proprietà .... V F
c) $8 - 4 = 4 - 8$ proprietà .... V F
d) $35 \cdot 10 = 10 \cdot 35$ proprietà .... V F
e) $9 \cdot (2 + 3) = 9 \cdot 3 + 9 \cdot 2$ proprietà .... V F
f) $80 - 52 + 36 = (20 - 13 - 9) \cdot 4$ proprietà .... V F
g) $(28 - 7) : 7 = 28 : 7 - 7 : 7$ proprietà .... V F
h) $(8 \cdot 1) : 2 = 8 : 2$ proprietà .... V F
i) $(8 - 2) + 3 = 8 - (2 + 3)$ proprietà .... V F
j) $(13 + 11) + 4 = 13 + (11 + 4)$ proprietà .... V F
k) $0 + (100 + 50) = 100 + 50$ proprietà .... V F

1.9. Data la seguente operazione tra i numeri naturali $a \circ b = 2 \cdot a + 3 \cdot b$, verifica se è:

a) commutativa, cioè se $a \circ b = b \circ a$;
b) associativa, cioè se $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$;
c) 0 è elemento neutro.

1.6 - Potenza

1.10. Inserisci i numeri mancanti:

a) $3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 = 3^{\cdots+\cdots+\cdots} = 3^{\cdots}$;
b) $3^4 : 3^2 = 3^{\cdots-\cdots} = 3^{\cdots}$;
c) $(3 : 7)^5 = 3^{\cdots} : 7^{\cdots}$;
d) $6^3 : 5^3 = (6 : 5)^{\cdots}$;
e) $7^3 \cdot 5^3 \cdot 2^3 = (7 \cdot 5 \cdot 2)^{\cdots}$;
f) $(2^6)^2 = 2^{\cdots\cdot\cdots} = 2^{\cdots}$;
g) $(18^6) : (9^6) = (\ldots\ldots)^{\cdots} = 2^{\cdots}$;
h) $(5^6 \cdot 5^4)^4 : [(5^2)^3]^6 = \ldots\ldots\ldots = 5^{\cdots}$.

1.11 (*). Calcola applicando le proprietà delle potenze:

a) $2^5 \cdot 2^3 : 2^2 \cdot 3^6$;
b) $(5^2)^3 : 5^3 \cdot 5$;
c) $\{[(2^3)^2 : 2^3]^3 : 2^5\} : (2^8 : 2^6)^2$;
d) $[(2^1)^4 \cdot 3^4]^2 : 6^5 \cdot 6^0$.

1.12. Calcola:

a) $2^2 \cdot (2^3 + 5^2)$;
b) $[(3^6 : 3^4)^2 \cdot 3^2]^1$;
c) $4^4 \cdot (3^4 + 4^2)$;
d) $3^4 \cdot (3^4 + 4^2 - 2^2)^0 : 3^3 + 0 \cdot 100$.

1.13. Completa, applicando le proprietà delle potenze:

a) $7^4 \cdot 7^{\cdots} = 7^5$;
b) $3^9 \cdot 5^9 = (\ldots\ldots)^9$;
c) $5^{15} : 5^{\cdots} = 55$;
d) $(\ldots\ldots)^6 \cdot 5^6 = 15^6$;
e) $8^4 : 2^4 = 2^{\cdots}$;
f) $(18^5 : 6^5)^2 = 3^{\cdots}$;
g) $20^7 : 20^0 = 20^{\cdots}$;
h) $(\ldots^3)^4 = 1$;

1.14. Il risultato di $3^5 + 5^3$ è:

A 368 B $(3+5)^5$ C $15+15$ D 8^8.

1.15. Il risultato di $(73+27)^2$ è:

A 200 B $73^2 + 27^2$ C 10^4 D 1000.

1.7 - Numeri Primi

1.16. Per ognuno dei seguenti numeri indica i divisori propri

a) 15 ha divisori propri …,…,…,…;
b) 19 ha divisori propri …,…,…,…;
c) 24 ha divisori propri …,…,…,…;
d) 30 ha divisori propri …,…,…,…

1.17 (Crivello di Eratostene). Nella tabella che segue sono rappresentati i numeri naturali fino a 100. Per trovare i numeri primi, seleziona 1 e 2, poi cancella tutti i multipli di 2. Seleziona il 3 e cancella i multipli di 3. Seleziona il primo dei numeri che non è stato cancellato, il 5, e cancella tutti i multipli di 5. Procedi in questo modo fino alla fine della tabella. Quali sono i numeri primi minori di 100?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1.8 - Criteri di divisibilità

1.18. Per quali numeri sono divisibili? Segna i divisori con una crocetta.

a) 1320 è divisibile per	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
b) 2344 è divisibile per	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
c) 84 è divisibile per	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
d) 1255 è divisibile per	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
e) 165 è divisibile per	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
f) 720 è divisibile per	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

g) 792 è divisibile per $\boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{6}\ \boxed{7}\ \boxed{8}\ \boxed{9}\ \boxed{10}\ \boxed{11}$
h) 462 è divisibile per $\boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{6}\ \boxed{7}\ \boxed{8}\ \boxed{9}\ \boxed{10}\ \boxed{11}$

1.19. Determina tutti i divisori di:

a) 32 . . . ,. . . ,. . . ,. . . ,. . . ,. . . ,. . .
b) 18 . . . ,. . . ,. . . ,. . . ,. . . ,. . . ,. . .
c) 24 . . . ,. . . ,. . . ,. . . ,. . . ,. . . ,. . .
d) 36 . . . ,. . . ,. . . ,. . . ,. . . ,. . . ,. . .

1.9 - Scomposizione in fattori primi

1.20. I numeri sotto elencati sono scritti come prodotto di altri numeri: sottolinea le scritture in cui ciascun numero è scomposto in fattori primi.

a) $68 = 17 \cdot 4 = 17 \cdot 2^2 = 2 \cdot 34$;
b) $45 = 5 \cdot 9 = 15 \cdot 3 = 5 \cdot 3^2$;
c) $36 = 6 \cdot 6 = 6^2$;
d) $44 = 2 \cdot 22 = 4 \cdot 11 = 2^2 \cdot 11$;
e) $17 = 17 \cdot 1$;
f) $48 = 6 \cdot 8 = 12 \cdot 4 = 3 \cdot 2^4 = 16 \cdot 3$;
g) $60 = 2 \cdot 30 = 15 \cdot 4 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 10 \cdot 6$;
h) $102 = 6 \cdot 17 = 3 \cdot 34 = 2 \cdot 3 \cdot 17 = 2 \cdot 51$;
i) $200 = 2 \cdot 10^2 = 2^3 \cdot 5^2 = 2 \cdot 4 \cdot 25 = 2^2 \cdot 50$;
j) $380 = 19 \cdot 10 \cdot 2 = 19 \cdot 5 \cdot 2^2$.

1.21. Rispondi alle domande:

a) ci può essere più di una scomposizione in fattori di un numero?
b) ci può essere più di una scomposizione in fattori primi di un numero?
c) quando un numero è scomposto in fattori primi?

1.22. Descrivi brevemente la differenza tra le seguenti frasi

a) a e b sono due numeri primi;
b) a e b sono due numeri primi tra di loro.

Fai degli esempi che mettano in evidenza la differenza descritta.

1.23 (*). Scomponi i seguenti numeri in fattori primi:

a) 16; b) 18; c) 24; d) 30; e) 32; f) 36; g) 40; h) 42; i) 48; j) 52; k) 60; l) 72; m) 81; n) 105; o) 120; p) 135; q) 180; r) 225; s) 525; t) 360.

1.24 (*). Scomponi i seguenti numeri in fattori primi:

a) 675; b) 715; c) 1900; d) 1078; e) 4050; f) 4536; g) 12150; h) 15246; i) 85050; j) 138600; k) 234000; l) 255000; m) 293760; n) 550800; o) 663552.

1.10 - Massimo Comune Divisisore e minimo comune multiplo

1.25. Applicando la definizione 1.10 trova il MCD tra i numeri 54 e 132.

1.26. Calcola MCD e mcm dei numeri 180, 72, 90.
Scomponendo in fattori si ha $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$, $72 = 2^3 \cdot 3^2$, $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

$$\mathrm{MCD} = 2^{\cdots} \cdot 3^{\cdots} = \ldots;$$
$$\mathrm{mcm} = 2^{\cdots} \cdot 3^{\cdots} \cdot 5^{\cdots} = \ldots$$

1.27 (*). Calcola mcm e MCD tra i seguenti gruppi di numeri:

a) 6; 15
b) 12; 50
c) 1; 6; 10; 14
d) 15; 5; 10
e) 2; 4; 8
f) 2; 1; 4
g) 5; 6; 8
h) 24; 12; 16
i) 6; 16; 26
j) 6; 8; 12
k) 50; 120; 180
l) 20; 40; 60
m) 16; 18; 32
n) 30; 60; 27
o) 45; 15; 35

1.28 (*). Calcola mcm e MCD tra i seguenti gruppi di numeri:

a) 6; 8; 10; 12
b) 30; 27; 45
c) 126; 180
d) 24; 12; 16
e) 6; 4; 10
f) 5; 4; 10
g) 12; 14; 15
h) 3; 4; 5
i) 6; 8; 12
j) 15; 18; 21
k) 12; 14; 15
l) 15; 18; 24
m) 100; 120; 150
n) 44; 66; 12
o) 24; 14; 40

1.29 (*). Tre funivie partono contemporaneamente da una stessa stazione sciistica. La prima compie il tragitto di andata e ritorno in 15 minuti, la seconda in 18 minuti, la terza in 20. Dopo quanti minuti partiranno di nuovo insieme?

1.30 (*). Due aerei partono contemporaneamente dall'aeroporto di Milano e vi ritorneranno dopo aver percorso le loro rotte: il primo ogni 15 giorni e il secondo ogni 18 giorni. Dopo quanti giorni i due aerei si troveranno di nuovo insieme a Milano?

1.31. Disponendo di 56 penne, 70matite e 63 gomme, quante confezioni uguali si possono fare? Come sarà composta ciascuna confezione?

1.32. Una cometa passa in prossimità della Terra ogni 360 anni, una seconda ogni 240 anni e una terza ogni 750 anni. Se quest'anno sono state avvistate tutte e tre, fra quanti anni sarà possibile vederele di nuovo tutte e tre nello stesso anno?

1.11 - Espressioni numeriche

1.33. Esegui le seguenti operazioni rispettando l'ordine.

a) $15+7-2$;
b) $16-4+2$;
c) $18-8-4$;
d) $16\times 2-2$;
e) $12-2\times 2$;
f) $10-5\times 2$;
g) $20\times 4:5$;
h) $16:4\times 2$;
i) $2+2^2+3$;
j) $4\times 2^3+1$;
k) $2^4:2-4$;
l) $(1+2)^3-2^3$;
m) $(3^2)^3-3^2$;
n) 2^4+2^3;
o) $2^3\times 3^2$;
p) $3^3:3^2\times 3^2$.

1.12.2 Esercizi riepilogativi

1.34. Quali delle seguenti scritture rappresentano numeri naturali?

a) $5+3-1$; b) $6+4-10$; c) $5-6+1$; d) $7+2-10$; e) $2\cdot 5:5$; f) $2\cdot 3:4$; g) $3\cdot 4-12$; h) $12:4-4$; i) $11:3+2$; j) $27:9:3$; k) $18:2-9$; l) $10-1:3$.

1.35. Calcola il risultato delle seguenti operazioni nei numeri naturali; alcune operazioni non sono possibili, individuale.

a) $5:5=\ldots$; b) $5:0=\ldots$; c) $1\cdot 5=\ldots$; d) $1-1=\ldots$; e) $10:2=\ldots$; f) $0:5=\ldots$; g) $5\cdot 1=\ldots$; h) $0:0=\ldots$; i) $10:5=\ldots$; j) $1:5=\ldots$; k) $0\cdot 5=\ldots$; l) $5:1=\ldots$; m) $0\cdot 0=\ldots$; n) $1\cdot 0=\ldots$; o) $1:0=\ldots$; p) $1:1=\ldots$

1.36. Aggiungi le parentesi in modo che l'espressione abbia il risultato indicato.

$$2+5\cdot 3+2=35 \qquad\qquad 2+5\cdot 3+2=27$$

1.37 (*). Traduci in espressioni aritmetiche le seguenti frasi e calcola il risultato:

a) aggiungi 12 al prodotto tra 6 e 4;
b) sottrai il prodotto tra 12 e 2 alla somma tra 15 e 27;
c) moltiplica la differenza tra 16 e 7 con la somma tra 6 e 8;
d) al doppio di 15 sottrai la somma dei prodotti di 3 con 6 e di 2 con 5;
e) sottrai il prodotto di 6 per 4 al quoziente tra 100 e 2;
f) moltiplica la differenza di 15 con 9 per la somma di 3 e 2;
g) sottrai al triplo del prodotto di 6 e 2 il doppio del quoziente tra 16 e 4.
h) il quadrato della somma tra il quoziente intero di 25 e 7 e il cubo di 2;
i) la somma tra il quadrato del quoziente intero di 25 e 7 e il quadrato del cubo di 2;
j) la differenza tra il triplo del cubo di 5 e il doppio del quadrato di 5.

1.38 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni:

a) $(1+2\cdot 3):(5-2\cdot 2)+1+2\cdot 4$;
b) $(18-3\cdot 2):(16-3\cdot 4)\cdot(2:2+2)$;
c) $2+2\cdot 6-[21-(3+4\cdot 3:2)]:2$;
d) $\{[15-(5\cdot 2-4)]\cdot 2\}:(30:15+1)-\{[25\cdot 4]:10-(11-2)\}$.

1.39 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni:

a) $[6\cdot(2\cdot 4-2\cdot 3)-6]+\{3\cdot(21:7-2)\cdot[(6\cdot 5):10]-3\cdot 2\}$;
b) $100:2+3^2-2^2\cdot 6$;
c) $2^7:2^3-2^2$;
d) $30-5\cdot 3+7\cdot 2^2-2$.

1.40 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni:

a) $(3+4)^2-(3^2+4^2)$;
b) $5 \cdot 5^3 \cdot 5^4 : (5^2)^3 + 5$;
c) $32^5 : 16^4 - 2^9$;
d) $[3^0 + (2^4 - 2^3)^2 : (4^3 : 4^2) + 3] : (2^6 : 2^4)$.

1.41 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni:

a) $[(4^5 : 4^3) - 2^3] \cdot [(3^4 \cdot 3^3) : (3^2 \cdot 3)] : (2^2 + 2^0 + 3^1)$;
b) $(12 - 5^2 : 5) \cdot 4^2 : 2^3 + 2^2 - 1 + [(2^4 : 2^3)^3 + 4^3 : 4 + 2^5] : 7$;
c) $(5^2 \cdot 2^2 - (2^5 - 2^5 : (2^2 \cdot 3 + 4^2 : 4) + 2^3 \cdot (3^2 - 2^2))) : (3 \cdot 2) \cdot 5$;
d) $(3^4 \cdot 3^3 : 3^6)^2 + (7^2 - 5^2) : 2^2$.

1.42 (*). Calcola il valore delle seguenti espressioni:

a) $(3 \cdot 2^2 - 10)^4 \cdot (3^3 + 2^3) : 7 - 10 \cdot 2^3$;
b) $(195 : 15) \cdot \{[3^2 \cdot 6 + 3^2 \cdot 4^2 - 5 \cdot (6-1)^2]\} : (4^2 - 3)$;
c) $5 + [(16 : 8) \cdot 3 + (10 : 5) \cdot 3] \cdot (2^3 \cdot 5 - 1)^2 - [(3 \cdot 10) : 6 - 1]$;
d) $[4 \cdot (3 \cdot 2 - 3 \cdot 1^2) - 5] - \{2 \cdot (14 : 7 + 4) : [2 \cdot (3+2)^2 : 10 + 1 - 4^2 : 8]\}$.

1.43 (*). Un'automobile percorre 18 km con 1 litro di benzina. Quanta benzina deve aggiungere il proprietario dell'auto sapendo che l'auto ha già 12 litri di benzina nel serbatoio, che deve intraprendere un viaggio di 432 km e che deve arrivare a destinazione con almeno 4 litri di benzina nel serbatoio?

1.44 (*). Alla cartoleria presso la scuola una penna costa 3 euro più di una matita. Gianni ha comprato 2 penne e 3 matite e ha speso 16 euro. Quanto spenderà Marco che ha comprato 1 penna e 2 matite?

1.45. In una città tutte le linee della metropolitana iniziano il loro servizio alla stessa ora. La linea rossa fa una corsa ogni 15 minuti, la linea gialla ogni 20 minuti e la linea blu ogni 30 minuti. Salvo ritardi, ogni quanti minuti le tre linee partono allo stesso momento?

1.46. Tre negozi si trovano sotto lo stesso porticato, ciascuno ha un'insegna luminosa intermittente: la prima si spegne ogni 6 secondi, la seconda ogni 5 secondi, la terza ogni 7 secondi. Se le insegne vengono accese contemporaneamente alle 19.00 e spente contemporaneamente alle 21.00, quante volte durante la serata le tre insegne si spegneranno contemporaneamente?

1.47. In una gita scolastica ogni insegnante accompagna un gruppo di 12 studenti. Se alla gita partecipano 132 studenti, quanti insegnanti occorrono?

1.48. Un palazzo è costituito da 4 piani con 2 appartamenti per ogni piano. Se ogni appartamento ha 6 finestre con 4 vetri ciascuna, quanti vetri ha il palazzo?

1.49. Spiega brevemente il significato delle seguenti parole:

a) numero primo;
b) numero dispari;
c) multiplo;
d) cifra.

1.50. Rispondi brevemente alle seguenti domande:

a) cosa vuol dire scomporre in fattori un numero?
b) ci può essere più di una scomposizione in fattori di un numero?
c) cosa vuol dire scomporre in fattori primi un numero?

1.12.3 Risposte

1.11. a) 6^6, b)5^4, c) 1, d) 6^3.

1.23. s) $3 \cdot 5^2 \cdot 7$.

1.24. d) $2 \cdot 7^2 \cdot 11$, e) $2 \cdot 3^4 \cdot 5^2$, f) $2^3 \cdot 3^4 \cdot 7$, g) $2 \cdot 3^5 \cdot 5^2$, h) $2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11^2$, i) $2 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$, j) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$, k) $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 13$, l) $2^3 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 17$, m) $2^7 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 17$, n) $2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 17$, o) $2^1 3 \cdot 3^4$.

1.27. a) 30; 3, b) 300; 2, c) 210; 1, d) 5; 30, e) 2; 8, f) 1; 4.

1.28. m) 600; 10, n) 132; 2, o) 840; 2.

1.29. 3 ore.

1.30. 90 giorni.

1.37. a) 36, b) 18, c) 126, d) 2, e) 26, f) 30.

1.38. a) 16, b) 9, c) 8, d) 5.

1.39. a) 9, b) 35, c) 12, d) 41.

1.40. a) 24, b) 30, c) 0, d) 5.

1.41. a) 81, b) 25, c) 25, d) 15.

1.42. a) 0, b) 73, c) 18253, d) 4.

1.43. Almeno 16.

1.44. 9 euro.