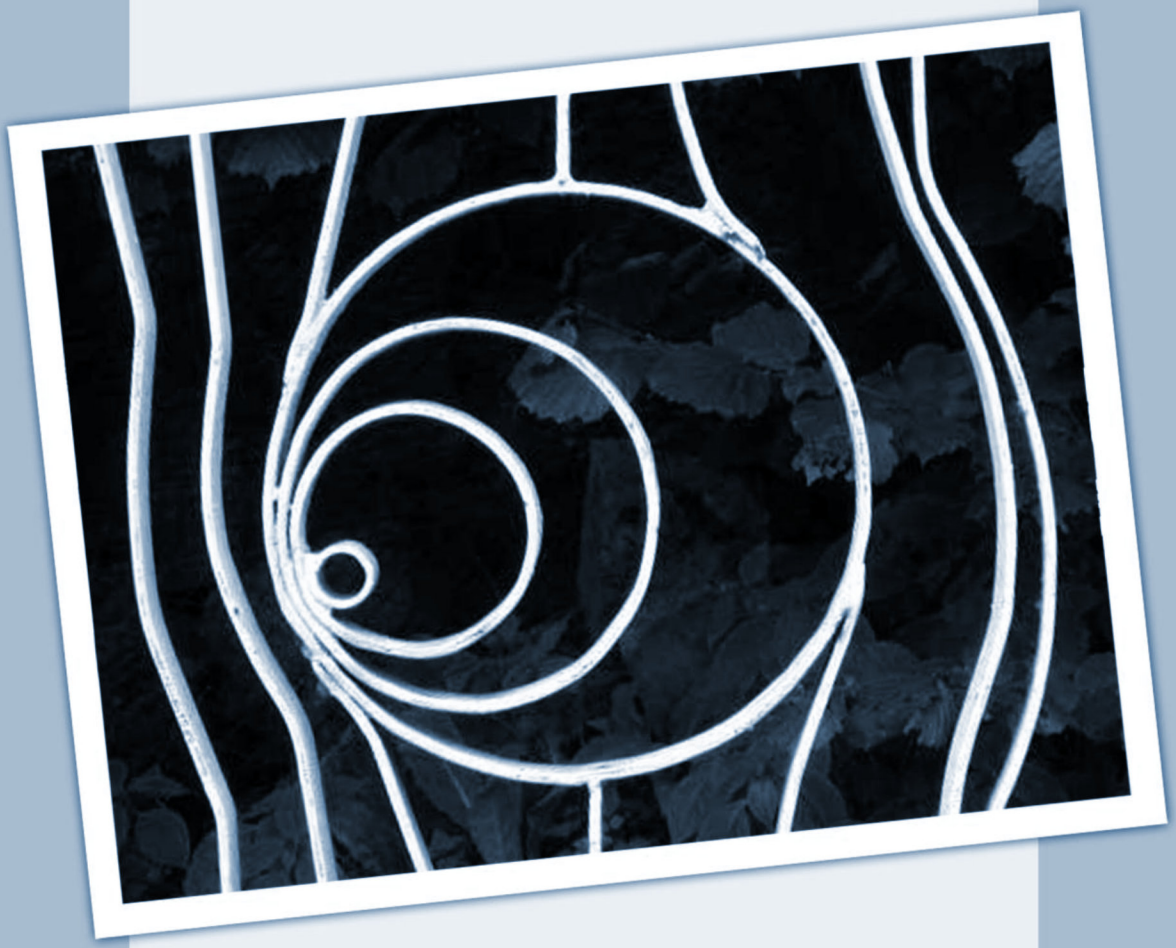
Matematicamente.it

Carmelo Di Stefano

Dal problema al modello matematico

Volume primo

Per il biennio



Creative Commons BY-NC-ND

Dal Problema al modello matematico
Volume 1

Questo libro è rilasciato con licenza
Creative Commons BY–NC–ND
Attribuzione – Non Commerciale – Non opere derivate
http://creativecommons.org/licenses/by–nc–nd/3.0/it/deed.it

Attribuzione — Devi attribuire la paternità dell'opera nei modi indicati dall'autore o da chi ti ha dato l'opera in licenza e in modo tale da non suggerire che essi avallino te o il modo in cui tu usi l'opera.
Non commerciale — Non puoi usare quest'opera per fini commerciali.
Non opere derivate — Non puoi alterare o trasformare quest'opera, né usarla per crearne un'altra.

Se vuoi contribuire a migliorare questo testo, invia segnalazioni di errori, mancanze, integrazioni all'autore carmelodst@alice.it. I proprietari di immagini, o di altri contenuti, che sono stati utilizzati impropriamente e inavvertitamente in questo libro, se ritengono di non essere stati citati correttamente sono pregati di mettersi in contatto con l'autore per gli interventi che si riterranno necessari; si fa presente che questo libro non ha scopo di lucro.

Presentazione

Nel corso della lettura dei volumi troverai diverse cose, che di seguito ti spiego brevemente.

- All'inizio di alcune unità trovi un breve ripasso di argomenti svolti negli anni precedenti che ti risultano utili per affrontare serenamente la stessa unità. Vanno sotto il nome di **Richiamiamo le Conoscenze**. In alcune unità vi sono anche argomenti di approfondimento, denominati con il titolo ***Quelli che … vogliono sapere di più***
- Le definizioni, i teoremi, i corollari e simili enti matematici, sono contenuti all'interno di appositi box di un uguale colore (verde per le definizioni, celeste per i teoremi e così via)
- Ogni tanto troverai anche un box che ti spiega il significato di alcuni vocaboli, si intitola **Che cosa significa?**
- Poi ci sono tre diversi tipi di box con diverse informazioni storiche, precisamente ci sono quelli intitolati **I Protagonisti**, che contengono informazioni relativamente a famosi matematici citati nelle stesse pagine; invece ne **L'angolo storico** ci sono informazioni di varia natura, su quando per la prima volta si sono incontrate le nozioni di cui si sta parlando e simili informazioni; infine in quelli dal titolo **L'antologia** sono riportati e commentati passi di famose opere matematiche.
- Vi sono anche dei box chiamati **Intervallo matematico** o **Giochiamo alla matematica**, che si riferiscono, i primi ad applicazioni della matematica e gli altri alla cosiddetta matematica ricreativa.
- Tenuto conto delle ultime riforme scolastiche, in particolare della prova multidisciplinare dell'Esame di Stato, che riguarda la matematica e la fisica, ogni tanto troverai anche **L'angolo della MateFisica**, in cui sono trattati argomenti di fisica attinenti quelli di matematica sviluppati nell'unità.
- Alla fine di ogni argomento vi sono le relative verifiche. In esse sono presenti esercizi di tre livelli di difficoltà, opportunamente indicati. Il Livello 1 è relativo a esercizi che sono spesso semplice applicazione di quanto detto nella teoria; quelli di Livello 2 o contengono calcoli più complicati, o hanno bisogno di un impegno maggiore; infine quelli di Livello 3 riguardano quesiti che devono essere impostati usando la fantasia e non in modo ripetitivo. Questi ultimi sono riferiti ai più volenterosi. Per quelli a cui piace veramente ragionare e impegnarsi, alla fine di ogni unità sono presenti alcuni esercizi molto complessi, che vanno sotto il nome di **La sfida**. Invece per aiutarti all'inizio di ogni gruppo di esercizi di livello 1 o 2 vi sono alcuni esercizi simili svolti. Inoltre, in alcuni casi è presente **L'angolo delle correzioni**, in cui vengono mostrati esercizi errati da correggere.
- Sono talvolta presenti box legati a importanti software matematici, quasi tutti di libero uso. In essi sono presenti dei link a delle applicazioni che descrivono come usare il software per comprendere meglio gli argomenti trattati o dei files che puoi usare solo se hai il software installato.
- Sono riportati quesiti assegnati nelle prove INVALSI e nelle prove OCSE PISA ((Programme for International Student Assessment) degli ultimi anni. In particolare si ricorda che le prove INVALSI dal 2003 al 2007, in via sperimentale furono assegnate agli alunni di prima superiore, successivamente, dal 2011 in poi a quelli di seconda superiore.
- Sono anche presenti dei quesiti tratti da gare matematiche italiane ed internazionali, alcuni quesiti sono anche enunciati in lingua inglese.
- Alla fine di ogni unità vi sono le attività di recupero, formate essenzialmente da una serie di esercizi svolti, da completare e da svolgere interamente.
- Infine sono proposti dei test in formato multimediale, almeno 10 di numero, relativi ai più importanti argomenti dell'unità didattica, essi sono utilizzabili solo on line dal sito http://mathinterattiva.altervista.org.
- Un altro sito da cui puoi scaricare molto materiale didattico gratuito è http://matdidattica.altervista.org.
- Vi sono anche diversi collegamenti multimediali che ti portano a pagine web o a files di qualcuno dei software liberi che sono descritti nel libro, o ancora delle applicazioni che mostrano meglio come si fa una certa procedura o come si dimostra un teorema o altro ancora.

Buon lavoro da Carmelo Di Stefano

Indice

1. Le basi del ragionamento

1.1 Concetti logici applicati alle matematiche

Enunciati logici Pag. 2
Verifiche 5
I quantificatori 6
Verifiche 8
I connettivi 11
Verifiche 17
Per la prova Invalsi 20
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali 21
Questions in English 22
Attività di recupero 24

1.2 Insiemi numerici fondamentali

Concetto di insieme Pag. 27
Verifiche 29
L'insieme dei numeri naturali 31
L'insieme dei numeri interi relativi 34
Verifiche 38
Intervallo matematico 42
Divisibilità e fattorizzazione nell'insieme dei numeri interi 43
Verifiche 49
L'insieme dei numeri razionali relativi 55
Verifiche 61
Operazioni con le frazioni 65
Verifiche 68
Giochiamo alla matematica 74
Per la prova Invalsi 75
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali 81
Questions in English 85
Attività di recupero 87

1.3 Insiemi astratti

Proprietà caratteristica di un insieme Pag. 96
Verifiche 99
L'operazione di intersezione insiemistica 104
L'operazione di unione insiemistica 105
L'operazione di differenza insiemistica 106
L'operazione di differenza simmetrica insiemistica 107
Verifiche 108
Sottoinsiemi di un insieme e insieme delle parti 116
Verifiche 121
Per la prova Invalsi 126
La sfida 126
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali 126
Questions in english 127
Attività di recupero 129

1.4 Le relazioni binarie

Richiamiamo le conoscenze Pag. 139
Prodotto cartesiano di insiemi 140
Verifiche 143
Concetti di relazione e funzione 145
Verifiche 150
Relazioni binarie 153
Verifiche 158
Giochiamo alla matematica 163
Relazioni di equivalenza 165
Verifiche 167
Relazioni di ordine 169
Verifiche 171
Per la prova Invalsi 172
La sfida 173
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali 173
Questions in english 174
Attività di recupero 176

2. Il Calcolo simbolico

2.1 Monomi

Concetto di monomio Pag. 184
Verifiche 187
Operazione di somma algebrica nell'insieme dei monomi 191
Verifiche 194
Per la prova Invalsi 197
La sfida 197
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali 198
Questions in english 198
Attività di recupero 200

2.2 Polinomi

Richiamiamo le conoscenze Pag. 204
Verifiche 205
Concetto di polinomio 206
Verifiche 209
Moltiplicazione nell'insieme dei polinomi 210
Verifiche 212
Prodotti notevoli 216
Verifiche 219
Potenze di binomi e triangolo di Tartaglia 228
Verifiche 231
Quelli che … vogliono saperne di più 237
Polinomi e notazione posizionale dei numeri. Cambiamenti di base
Verifiche 239
Giochiamo alla matematica 240
Per la prova Invalsi 242
La sfida 243
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali 243
Questions in english 244
Attività di recupero 245

2.3 La fattorizzazione dei polinomi

Operazione di divisione nell'insieme dei monomi Pag. 257
Verifiche 259
Operazione di divisione nell'insieme dei polinomi in una variabile 262
Verifiche 264
Operazione di divisione nell'insieme dei polinomi in più di una variabile 267
Verifiche 268
Teorema e regola di Ruffini 270
Verifiche 274
Scomposizione dei polinomi in fattori. Prodotti notevoli nelle scomposizioni 280
Verifiche 281
Messa in evidenza a fattor comune 286
Verifiche 288
Messa in evidenza con raggruppamenti parziali 292
Verifiche 293
Scomposizione di trinomi notevoli 296
Verifiche 298
Il teorema di Ruffini e la scomposizione di polinomi 304
Verifiche 305
Operazioni con le frazioni algebriche 308
Verifiche 311
Quelli che …vogliono saperne di più 316
Principio di identità dei polinomi e teorema fondamentale dell'algebra
Verifiche 318
Per la prova Invalsi 319
La sfida 320
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali 320
Questions in english 322
Attività di recupero 324

3. Geometria del piano

3.1 Prime nozioni di geometria

Postulati ed enti primitivi della geometria euclidea del piano. Le rette Pag. 340
Verifiche 351
Il concetto di isometria. Segmenti e poligoni 354
Verifiche 362
Concetto di angolo piano e sua misurazione in gradi sessagesimali 364
Verifiche 371
Per la prova Invalsi 373
La sfida 374
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali 374
Questions in english 375
Attività di recupero 376

3.2 La geometria del triangolo

Criteri di isometria dei triangoli Pag. 381
Verifiche 388
Rette parallele tagliate da una trasversale e classificazione dei triangoli rispetto agli angoli 391
L'angolo storico (V postulato) 398
Verifiche 400
Classificazione dei triangoli rispetto ai lati. Segmenti e punti notevoli 404
L'antologia 413
Verifiche 415
Giochiamo alla matematica 420
Per la prova Invalsi 421
La sfida 422
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali 423
Questions in english 425
Attività di recupero 427

3.3 La geometria dei poligoni con più di tre lati

Poligoni con più di tre lati Pag. 436
Verifiche 439
I parallelogrammi 443
Verifiche 447
Giochiamo alla matematica 452
Applicazioni ai triangoli. I trapezi. 453
L'Antologia 457
Verifiche 458
Quelli che ... vogliono sapere di più. Applicazioni di geometria analitica 462
Verifiche 464
Per la prova Invalsi 466
La sfida 468
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali 468
Questions in english 470
Attività di recupero 472

3.4 Trasformazioni isometriche nel piano

Concetto di trasformazione geometrica. Le traslazioni Pag. 480
Verifiche 485
Le simmetrie 489
Verifiche 492
La rotazione 496
Verifiche 499
Intervallo matematico 501
Per la prova Invalsi 502
La sfida 504
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali 505
Questions in english 506
Attività di recupero 507

4. Problemi lineari

4.1 Equazioni di I grado in una incognita

Il concetto di uguaglianza in matematica Pag. 511
Verifiche 514
Proprietà delle uguaglianze 516
Verifiche 520
Giochiamo alla matematica 521
Classificazione delle equazioni e risoluzione delle equazioni di primo grado 522
Verifiche 529
Equazioni fratte 535
Verifiche 536
Equazioni parametriche 538
Verifiche 539
Per la prova Invalsi 542
La sfida 544
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali 545
Questions in english 545
Attività di recupero 547

4.2 Risolvere problemi

Problemi risolubili per tentativi Pag. 555
Verifiche 557
Problemi risolubili con equazioni di primo grado o a esse riconducibili 561
L'Antologia 562
Verifiche 564
Giochiamo alla matematica 572
Per la prova Invalsi 572
La sfida 576
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali 576
Questions in english 578
Attività di recupero 580

4.3 Uguaglianze lineari in più variabili

I sistemi di equazioni. Risoluzione dei sistemi lineari: metodo di sostituzione Pag. 587
Verifiche 591
Risoluzione dei sistemi lineari: metodo e teorema di Cramer 601
Verifiche 606
Rette nel piano cartesiano 612
Verifiche 615
Problemi lineari in più incognite 617
Verifiche 619
Giochiamo alla matematica 626
Per la prova Invalsi 628
La sfida 632
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali 632
Questions in english 634
L'antologia 635
Attività di recupero 636

4.4 Disequazioni di primo grado in un'incognita

Proprietà delle disuguaglianze	Pag. 645
Verifiche	647
Disequazioni di primo grado in un'incognita	648
Verifiche	650
Giochiamo alla matematica	652
Disequazioni prodotto e disequazioni fratte	653
Verifiche	656
Sistemi di disequazioni in un'incognita	660
Verifiche	661
Equazioni e disequazioni di primo grado in valore assoluto	666
Verifiche	668
Quelli che … vogliono sapere di più	671
Problemi indeterminati	
Verifiche	673
Per la prova Invalsi	675
La sfida	677
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali	677
Questions in english	678
Attività di recupero	679

1. Le basi del ragionamento

1.1 Concetti logici applicati alle matematiche

Prerequisiti
- Possedere conoscenze grammaticali elementari.
- Sapere che cos'è una proposizione.
- Concetti di aritmetica e geometria elementare.

Obiettivi
- Riconoscere frasi coerenti.
- Distinguere proposizioni del linguaggio comune e proposizioni logiche.
- Determinare il valore di verità di enunciati logici.
- Sapere utilizzare scritte simboliche per rappresentare leggi di natura qualsiasi.
- Abituarsi alla precisione di linguaggio.
- Sapere negare enunciati logici semplici e composti, anche contenenti quantificatori.
- Sapere compilare e interpretare semplici tabelle di verità.

Contenuti
- Enunciati logici
- I quantificatori
- I connettivi
- L'implicazione materiale e la deduzione
- La doppia implicazione materiale

Parole Chiave
Congiunzione logica – Disgiunzione inclusiva ed esclusiva – Enunciato o proposizione – Esiste almeno – Implicazione e doppia implicazione materiale – Per ogni – Tabella di verità – Valore di verità

Simbologia

$\neg$	Indica la negazione di un enunciato
$\wedge$	Indica la congiunzione logica
$\vee$ o vel	Indica la disgiunzione logica inclusiva
$\dot{\vee}$ o aut	Indica la disgiunzione logica esclusiva
$\forall$	Per ogni
$\exists$	Esiste almeno uno

Enunciati logici

Quando si parla di matematica sembra che si debbano solo snocciolare numeri, fare calcoli e disegnare grafici. Non si pensa che, anche se ciò fosse vero, e non lo è, in ogni caso si usano delle parole che perciò debbono ubbidire a una serie di regole che non sono solo quelle grammaticali della lingua italiana. Anzi, nel caso della matematica, le frasi debbono essere più rigorose di quanto invece succede nel linguaggio di ogni giorno, in cui le frasi talvolta si lasciano in sospeso, si usano modi di dire, forme dialettali e così via. In matematica non si possono creare equivoci, quando si parla di qualcosa, tutti debbono avere in mente la stessa cosa. Ecco perché prima di cominciare a parlare di numeri e di figure dobbiamo chiarire alcune questioni sulla formazione delle frasi.
La lingua italiana come altre lingue, ma più in generale come i codici che permettono lo scambio di informazioni, come per esempio l'informatica, ma anche i segnali stradali o le note musicali, ha delle leggi che la regolamentano. Vi sono delle regole relative all'ortografia, altre alla pronuncia, altre ancora alla formazione delle frasi, quindi regole di tipo grammaticale o sintattico, e così via.

Esempio 1

Consideriamo alcune frasi intese nel senso largo di unione di simboli tratti dall'alfabeto latino allargato, ossia con 26 simboli per le lettere.

1. *Caro asdjasljdkla, come stai*?
2. *I love you*.
3. *Ti volio bene assai*.
4. *Se potrei avere mille euro al mese*.
5. *Triangolo lati tre ha*.

La prima frase contiene un vocabolo (*asdjasljdkla*) che non ubbidisce alle regole di formazione delle parole, non è perciò accettabile. La seconda frase anche se ormai usata correntemente non fa parte della lingua italiana. La terza frase contiene un errore ortografico nella seconda parola. La quarta frase è invece viziata da un errore di tipo grammaticale, dato che il tempo del verbo potere non è quello corretto (si dovrebbe dire *se potessi*). Infine la quinta frase contravviene alle regole di formazione di una frase coerente ed è quindi priva di significato.

Consideriamo altre frasi

1. *Karol Woytla è stato Papa con il nome di Giovanni Paolo II*.
2. *Cristiano Ronaldo, il vincitore del pallone d'oro del* 2015, *è brasiliano*.
3. *Nel* 2050 *l'altezza media degli uomini sarà di* 2 *metri*.
4. *Vasco Rossi è un cantante fortissimo*.
5. *Come va*?

In questo caso tutte le frasi dal punto di vista delle regole grammaticali sono corrette e hanno un senso. Però solo la prima è un'affermazione vera; la seconda è invece falsa (Cristiano Ronaldo è portoghese); sulla terza non sappiamo cosa dire perché nessuno può prevedere il futuro; la quarta è un'opinione, non possiamo dire che è vera, né che è falsa; l'ultima è una domanda.

Nell'esempio precedente abbiamo visto quindi che anche fra le frasi corrette grammaticalmente possiamo fare diverse distinzioni e alcune di queste sono importanti anche e soprattutto nelle loro applicazioni alle frasi della matematica. Infatti in questa materia dobbiamo usare sicuramente frasi corrette grammaticalmente, ma esse devono anche essere valide per tutti, non possono dipendere dall'opinione personale. Se affermiamo che *il doppio di un numero dispari è un numero pari*, questo non vale solo per noi o per i nostri amici, ma è un'affermazione vera per tutti, anche per quelli che non sanno cosa sono i numeri pari o i numeri dispari. Ovviamente gli ignoranti non possono dire che l'affermazione è vera né che è falsa, ma devono sapere che è

vera o falsa. Allo stesso modo se diciamo che *il quadrato di un numero negativo è un numero negativo*, questa è un'affermazione falsa per tutti.
Useremo indifferentemente i vocaboli *frase*, *affermazioni*, *enunciato* o *proposizione*.
Un'altra cosa che facciamo in matematica è definire, cioè assegnare dei nomi a degli oggetti, descrivendo gli stessi oggetti. Quello che in genere fa un vocabolario, quando appunto descrive il significato di un vocabolo. Allora cominciamo a definire quali sono le frasi di cui ci occuperemo in matematica.

Definizione 1

Una frase coerente per la quale si può dire in modo univoco che essa è vera o falsa, si chiama **enunciato logico** o **proposizione logica**.

Quindi, riferendoci all'esempio precedente, solo le prime due frasi sono enunciati logici, in particolare *Karol Woytla è stato Papa con il nome di Giovanni Paolo II* è un enunciato logico vero, mentre *Cristiano Ronaldo, il vincitore del pallone d'oro del* 2008*, è brasiliano* è un enunciato logico falso.

Esempio 2

Consideriamo degli enunciati logici di tipo matematico.

- *Un rettangolo è un poligono con* 4 *lati* è un enunciato logico vero.
- *Un rettangolo è l'unico poligono con* 4 *lati* è un enunciato logico falso.

Alla base degli enunciati logici ci sono due principi fondamentali, che enunciamo di seguito.

PRINCIPIO DI NON CONTRADDIZIONE
Se un enunciato logico è vero non è falso e viceversa.

PRINCIPIO DEL TERZO ESCLUSO
Un enunciato logico qualunque o è vero o è falso, non vi sono altre possibilità.

I principi precedenti affermano che ogni enunciato, anche se noi non siamo in grado di provarlo, può essere solo vero o falso, non possono esistere enunciati contemporaneamente veri e falsi, né enunciati che non sono né veri e né falsi. Ciò non significa che l'affermazione *Nel* 2050 *l'altezza media degli uomini sarà di* 2 *metri*, anche se oggi non lo sappiamo è vera o falsa, anche se dovremmo aspettare fino al 2050 per poterlo stabilire. Vi sono anche enunciati dei quali forse non sapremo mai se sono veri o falsi.

Esempio 3

È stato osservato che i numeri primi dispari ogni tanto sono consecutivi, cioè differiscono fra loro di due unità. Per esempio 5 e 7, 11 e 13, 17 e 19. Coppie di numeri primi di questo tipo si chiamano *numeri primi gemelli*. Ovviamente non è vero che *Ogni numero primo dispari ha un gemello*, perché 9, consecutivo dispari del numero primo 7, non è un numero primo. Qualcuno però ha affermato che *I numeri primi gemelli sono infiniti*. Ma questa affermazione non è stata mai provata, almeno fino al momento in cui scriviamo queste pagine, né se è vera, né se è falsa.

Enunciati come quelli visti nell'esempio precedente sono logici anche se non sappiamo se sono veri o falsi, perché non sono opinioni personali ma fatti dei quali ignoriamo la verità o falsità che deve esserci per forza. Quindi conviene distinguerli dagli enunciati per così dire *sicuri*.

Definizione 2

Un enunciato logico per il quale non si può dire in modo univoco né che esso è vero né che è falso, si chiama **congettura**.

Ovviamente una congettura rimane tale finché non si prova la sua verità o la sua falsità.

Esempio 4

Verso la metà del 1600 il giurista Pierre de Fermat, appassionato di matematica, affermò che l'uguaglianza $x^n + y^n = z^n$ era sempre falsa, se n era un numero intero maggiore di 2, e x, y e z erano numeri interi positivi. Per parecchio tempo nessuno riuscì a provare che ciò fosse vero o falso. Quindi questa era una congettura. Nel 1994 il matematico inglese Andrew Wiles ha però dimostrato che l'affermazione è corretta, quindi da quel momento l'enunciato di Fermat è divenuto un enunciato logico vero, o come talvolta si dice in matematica, un Teorema.

Un'altra cosa importante è che ovviamente non possiamo spiegare tutti i vocaboli, alcuni di essi li dobbiamo accettare come sono, cercando solo di far capire cosa intendiamo con essi. Questi li chiameremo **enti primitivi**.

Esempio 5

- I punti e le rette sono **enti primitivi** della geometria. Mediante essi possiamo definire, come vedremo in seguito, i segmenti, le semirette, i poligoni e così via.
- I numeri naturali sono gli enti primitivi dell'aritmetica e così via.

Altri importanti concetti matematici sono i **postulati** o **assiomi**, che sono degli enunciati logici che prendiamo come punto di partenza, che perciò accettiamo così come sono senza discuterli. Questi ci servono perché non possiamo dimostrare ogni cosa, ma abbiamo bisogno di punti di partenza. Invece gli enunciati logici che dobbiamo provare essere veri li chiameremo **Teoremi**.

Esempio 6

L'enunciato *Il tutto è maggiore di ogni sua parte* è un'affermazione con cui siamo tutti d'accordo (anche se dobbiamo fare attenzione a usarlo). Ci rendiamo conto che certamente se prendiamo tutti gli studenti, maschi e femmine, di una classe, questi sono più dei soli maschi o delle sole femmine. Questo fatto non lo dimostriamo, ma lo accettiamo.

Un'altra tipicità della matematica, che qualcuno dice che è come cercare il pelo nell'uovo, è il fatto che quando affermiamo qualcosa dobbiamo essere il più precisi possibile, diversamente quello che diciamo può non essere chiaro.

Esempio 7

Consideriamo le seguenti moltiplicazioni: $3 \cdot 3 = 9$, $5 \cdot 5 = 25$, $(-2) \cdot (-2) = 4$. Esse ci suggeriscono di affermare che *moltiplicando un numero per se stesso otteniamo sempre un numero positivo*. Sembra che tutto funzioni, e quindi siamo tentati di dire che esso sia un enunciato logico vero. Ma osserviamo che $0 \cdot 0 = 0$, che non è un numero positivo. Quindi ci rendiamo conto che se vogliamo che l'enunciato sia vero, dobbiamo essere più precisi, cioè dobbiamo dire: *moltiplicando un numero per se stesso otteniamo sempre un numero positivo o lo zero*.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo stabilire quali fra le seguenti frasi sono enunciati logici, determinando il relativo valore di verità per quelli che lo sono.

- *Il numero* 14 *è divisibile per* 2.
  Dato che l'enunciato non è equivoco e si riferisce a una proprietà verificabile, esso è logico; il suo valore di verità è vero.
- *Nel* XXI *secolo un astronave con a bordo esseri umani raggiungerà il pianeta Marte*.
  Abbiamo a che fare con un enunciato logico che si riferisce a fatti futuri, che perciò non potranno essere verificati prima che accadano o, se non accadono, prima di una data che in questo caso è il 31 dicembre 2099. Abbiamo perciò a che fare con una congettura.
- *La matematica è una materia difficile*.
  Stavolta abbiamo a che fare con un parere personale, non importa quanto condivisibile, non è perciò un enunciato logico.

Stabilire quali fra le seguenti frasi sono enunciati logici e quali sono congetture. Per gli enunciati logici stabilire se sono veri o falsi

Livello 1

1. Pelè è stato il più grande calciatore di tutti i tempi [No]
2. Un triangolo equilatero ha gli angoli uguali [Sì, vero]
3. Il numero tre è il numero più perfetto di tutti [No]
4. La popolazione mondiale ha superato i 6 miliardi [Sì, vero]
5. L'Etna è il vulcano più alto del mondo; Quanti anni hai? [Sì, falso; No]
6. Eminem è il nome di un cantante di rap; Un triangolo è [Sì, vero; No]
7. Kennedy è stato il presidente statunitense più famoso [No]
8. La somma di due numeri dispari è un numero pari [Sì, vero]
9. Qualche pianeta di qualche lontana galassia ha l'atmosfera come quella terrestre [Congettura]
10. Il cerchio è la parte di piano racchiusa dalla circonferenza [Sì, vero]
11. Un giorno ci saranno calcolatrici in grado di eseguire 1000 miliardi di operazioni in un micro secondo [Congettura]
12. Il cane è l'amico più fedele dell'uomo [No]
13. Nel 3000 la popolazione dell'Italia sarà superiore ai 100 milioni [Congettura]
14. Un numero intero moltiplicato per 5 finisce per 0 per 5 [Sì, vero]
15. Il prodotto di un numero è un numero; Fumare è una pessima abitudine [No; No]
16. Se un numero è pari non può avere divisori dispari [Sì, falso]
17. Il teorema di Pitagora si applica solo ai triangoli rettangoli [Sì, vero]
18. Lanciando un dado regolare ho una probabilità su sei di ottenere 1 [Sì, vero]
19. I cubi sono i solidi più regolari; Domani sulla città di Roma ci sarà il sole [No; Congettura]
20. Siccome sono nato di domenica camperò cent'anni [Congettura]
21. Solo chi nasce di domenica campa cent'anni [Si, falso]
22. Tanto va la gatta al lardo che ci lascia lo zampino [No]
23. I promessi sposi è il titolo di un romanzo scritto da Alessandro Manzoni [Sì, vero]
24. La Gioconda è un quadro di Leonardo da Vinci che si trova al museo degli Uffizi [Sì, falso]
25. Esistono numeri interi che hanno più di un milione di cifre [Sì, vero]
26. Una frazione non può essere un numero intero [Sì, falso]

I quantificatori

In matematica gli enunciati spesso sono riferiti non a un solo oggetto, ma a più. Per esempio quando enunciamo il Teorema di Pitagora nella forma seguente *In un triangolo rettangolo il quadrato dell'ipotenusa è somma dei quadrati dei cateti*. Anche se non lo stiamo dicendo esplicitamente, esso si riferisce a *tutti* i triangoli rettangoli non solo a quello i cui lati misurano 3, 4 e 5 ($3^2 + 4^2 = 5^2$), ma anche a quello che ha i lati lunghi 0,5, 1,2 e 1,3 ($0{,}5^2 + 1{,}2^2 = 1{,}3^2$) e così via.
Abbiamo già visto che ci sono però anche enunciati che si riferiscono solo ad alcuni elementi. Per esempio quando diciamo *Almeno un numero primo è pari*, stiamo dicendo che fra i numeri primi uno di essi, come minimo, è pari. In questo caso è uno solo, ma potrebbero essere di più.
Per esempio se diciamo *Almeno un numero intero minore di* 20 *è divisibile per* 3. In questo caso i numeri sono ben 6 (3, 6, 9, 12, 15, 18), ma l'enunciato è vero perché afferma che ce ne sarà come minimo uno. Definiamo allora questi particolari enunciati.

Definizione 3

- Un'espressione che si riferisce a tutti gli elementi di un certo insieme si chiama **quantificatore universale**. Un enunciato logico con un quantificatore universale si dice **enunciato universale**.
- Un'espressione che si riferisce ad almeno un elemento di un insieme si chiama **quantificatore esistenziale**. Un enunciato logico con un quantificatore esistenziale si chiama **enunciato particolare**.

Esempio 8

- L'affermazione *Ogni cittadino italiano è europeo*, è un enunciato universale vero.
- La frase *Tutti i numeri pari sono divisibili per* 4, è un enunciato universale falso.
- *Esistono uomini alti più di* 2 *metri*, è un enunciato particolare vero.
- *Vi sono alcune automobili che viaggiano a velocità superiori ai* 10000 *kilometri al secondo*, è un enunciato particolare falso.
- *Alcuni animali vivono più di* 1000 *anni*, è una congettura di tipo particolare.

Possiamo osservare che, ovviamente, i quantificatori universali ed esistenziali sono aggettivi o pronomi che si riferiscono appunto a tutti o a una parte di elementi. Perciò come quantificatori universali possiamo usare indifferentemente altri aggettivi o pronomi indefiniti come *tutti, ognuno, per ogni* e così via; e come quantificatori esistenziali *esiste, almeno, qualcuno, …*
Concludiamo osservando che se un certo enunciato universale è vero, dato che è vero per tutti sarà vero anche per alcuni. Perciò dall'enunciato vero *Ogni x è y* segue l'enunciato vero *Almeno un x è y*.

Esempio 9

L'enunciato vero *Ognuno che ha la patente automobilistica da più di* 5 *anni è maggiorenne*, ovviamente rende vero anche l'enunciato *Qualcuno di coloro che hanno la patente automobilistica da più di* 5 *anni è maggiorenne*.

Non è vero il contrario, cioè da un enunciato particolare vero non segue per forza la verità dello stesso enunciato universale. Cioè dalla verità di *Almeno un x è y* non segue la verità di *Ogni x è y*.

Esempio 10

L'enunciato particolare vero *Almeno un italiano è nato a Milano*, non permette di dire che è vero l'enunciato universale *Tutti gli italiani sono nati a Milano*.

Come possiamo negare un enunciato? Cosa significa che non è vero che vale una certa proprietà, che ne vale un'altra? No, che vale la sua contraria. Vediamo qualche esempio a chiarimento.

Esempio 11

- Se è vero che 8 è un multiplo di 4, sarà ovviamente falso che 8 non è un multiplo di 4. Ma è anche falso che 8 è un multiplo di 5. Quindi possiamo dire che entrambi gli enunciati sono negazioni del primo? Ovviamente no, il terzo enunciato non ha niente a che vedere con il primo, mentre il secondo sì, che afferma che non è vera la proprietà e quindi è la corretta negazione.
- È vero che $2 + 2 = 4$. Come possiamo negare tale enunciato? Non certo scrivendo $2 + 2 = 5$, che è falso, ma non è la negazione, che è invece $2 + 2 \neq 4$.
- La negazione di $7 > 2$ è $7 < 2$? No, perché dire che non è vero che un numero è più grande di un altro vuol dire che è più piccolo o uguale. Dire che Diana non è più alta di Giorgia non significa che è più bassa, ma che o è più bassa o ha la stessa altezza. Quindi la negazione di $7 > 2$ è $7 \leq 2$.

Quindi negare un enunciato logico non significa semplicemente considerare un enunciato falso simile a quello dato, ma considerare lo stesso enunciato e negare la sua proprietà. Così se c'è il segno di uguale esso si sostituirà con ≠; se c'è un verbo gli si premetterà la particella *non* e così via.

Notazione 1

La negazione di un enunciato logico si indica con il simbolo ¬

Così scrivere ¬ (2 + 2 = 4), significa appunto dire che non è vero che 2 + 2 fa 4. Possiamo compilare una tabella che metta in relazione un generico enunciato logico con la sua negazione.

p	$\neg p$
V	F
F	V

La leggiamo nel seguente modo, se p è vero, allora la sua negazione $\neg p$ è falsa e viceversa.
Un po' più complicato risulta negare gli enunciati che contengono quantificatori.

Esempio 12

Consideriamo l'enunciato *Tutti i numeri primi sono dispari*, che sappiamo essere falso, come lo possiamo negare, arrivando così a un enunciato vero? Dicendo per esempio *Non tutti i numeri primi sono dispari*. Però riflettiamo un attimo, che significa dire *Non tutti*? Vuol dire per caso *Nessuno*?, cioè possiamo scrivere anche *Nessun numero primo è dispari*? Ovviamente no, anche perché il precedente enunciato è falso. *Non tutti* significa che fra tutti i numeri primi *almeno uno* non è dispari.

Quindi possiamo enunciare la seguente

Regola di negazione di un enunciato universale

La negazione di un enunciato universale è lo stesso enunciato reso particolare la cui azione è negata. Cioè la negazione dell'enunciato universale *Tutti gli x sono y* è *Alcuni x non sono y.*

La precedente regola ci suggerisce che ce ne sarà una analoga per la negazione degli enunciati particolari.

Esempio 13

Qual è la negazione dell'enunciato falso *Qualche triangolo rettangolo è equilatero*?
Ancora una volta chiediamoci cosa significa negare l'enunciato, che *non è vero che esistono triangoli rettangoli che sono anche equilateri*, che è lo stesso che dire: *Nessun triangolo equilatero è rettangolo*, oppure *Tutti i triangoli rettangoli non sono equilateri*.

Vale cioè la

Regola di negazione di un enunciato particolare

La negazione di un enunciato particolare è lo stesso enunciato reso universale la cui azione è negata. Cioè la negazione dell'enunciato particolare *Alcuni x sono y* è *Tutti gli x non sono y.*

Verifiche

Lavoriamo insieme

- Vogliamo stabilire il valore di verità dell'enunciato particolare *Alcuni animali sono quadrupedi*. Poiché sappiamo che il cane è un quadrupede, possiamo affermare che l'enunciato è vero, senza bisogno di considerare altri casi. Viceversa, se avessimo detto *Tutti gli animali sono quadrupedi* avremmo avuto bisogno o di considerare tutti gli animali possibili, verificando caso per caso che hanno quattro zampe o dare un esempio di animale non quadrupede per stabilire che l'enunciato è falso. Poiché l'uomo è anch'esso un animale e non è un quadrupede, possiamo dire che l'enunciato universale è falso. Abbiamo usato quello che si chiama un *contro esempio*, cioè un esempio contrario a quanto volevamo provare.
- Consideriamo l'enunciato *Ogni numero intero è anche una frazione*, cosa possiamo dire del suo valore di verità? Poiché sappiamo che ogni numero intero si può sempre scrivere come frazione, per esempio $2=\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{100}{50}=...$, l'enunciato è vero. In questo caso è vero anche l'enunciato particolare *Alcuni numeri interi sono frazioni*.

Stabilire il valore dei seguenti enunciati logici contenenti quantificatori (V = Vero, F = falso)

***Livello* 1**

1. Ogni europeo è un italiano ; Alcuni felini sono tigri ; Tutti i rettili sono anfibi [F; V ; F]
2. Ogni libro scritto da Tolstoj è composto da più di 100 pagine [Non enunciato logico]
3. Vi sono numeri razionali che sono numeri naturali. [V]
4. Qualche squadra italiana di calcio ha giocatori brasiliani [V]
5. Tutti i maggiorenni sanno guidare l'automobile [F]
6. In Italia tutti coloro che sanno guidare l'automobile sono maggiorenni [F]
7. Esistono persone che sanno parlare 5 lingue [V]
8. Tutte le parole della lingua inglese sono usate nel linguaggio quotidiano in Italia [F]
9. Almeno un numero intero di una cifra è un quadrato perfetto [V]
10. Qualche numero intero che finisce per 3 è un quadrato perfetto [F]
11. Tutti i fiumi europei sono più corti di 1000 *Km* [F]
12. Alcuni esseri umani vivono più di 100 anni [V]
13. Comunque si sceglie un numero primo questo è dispari [F]
14. Esistono triangoli in cui un lato è doppio di un altro lato [V]
15. Ci sono quadrilateri facili da disegnare [Non enunciato logico]
16. Ogni squadra di calcio di serie A rappresenta una diversa città italiana [F]
17. Almeno due squadre di calcio di serie A rappresentano la stessa città [V]
18. Tutte le partite di calcio a 11 durano non più di 90 minuti [F]

Lavoriamo insieme

- Consideriamo il seguente enunciato logico vero: *Alcune squadre italiane di calcio hanno vinto più di* 10 *scudetti*. Possiamo renderlo più preciso dicendo quante sono queste squadre, sappiamo che sono 3, cioè, in ordine alfabetico, Inter , Juventus e Milan.
- Invece per l'enunciato *Lanciamo un dado per* 100 *volte, qualche volta otterremo* 6, non solo non possiamo precisare quante volte ciò succederà, se non effettuiamo realmente i lanci, ma non possiamo neanche dire se è vero, perché potrebbe capitare che qualche volta, anche se può sembrare improbabile, il 6 non uscirà in nessuno dei 100 lanci.

Dati i seguenti enunciati stabilire se essi possono essere resi più precisi, ossia se può dirsi esattamente quanti elementi verificano la data proprietà

***Livello* 2**

19. Vi sono numeri interi minori di 100 che sono quadrati perfetti e cubi perfetti [3: 0, 1 e 64]

20. Almeno un numero primo è compreso tra 20 e 30 [2: 23 e 29]
21. Dividendo 12 per tutti i numeri interi da 2 a 10 qualche volta si ottengono risultati maggiori di 0,5 [4 volte: per 2, 3, 4 e 5]
22. Alcuni scrittori italiani hanno vinto il premio Nobel per la letteratura nel XX secolo [6: G. Carducci, G. Deledda, L. Pirandello, S. Quasimodo, E. Montale, D. Fo]
23. Almeno un angolo di un triangolo equilatero è acuto [3]
24. Alcune delle operazioni seguenti sono prive di senso: $0^0, 0:0, 1:0, 0:1, 0-0, 0\cdot 0$ [2: 0^0 e 0:0]
25. Qualche papa eletto fra il 1900 e il 2010 non è nato in Italia [2: Giovanni Paolo II e Benedetto XV]
26. Alcuni numeri interi minori di 20 sono divisori di 72 [9: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18]
27. Esistono numeri interi il cui quadrato è compreso tra 30 e 50 [2: 6 e 7]
28. Certi atleti italiani hanno vinto la medaglia d'oro alle Olimpiadi di Pechino del 2008. [8: Cainero, Cammarelle, Minguzzi, Pellegrini, Quintavalle, Schwazer, Tagliariol, Vezzali]

Lavoriamo insieme

Il Consiglio comunale della cittadina di Matlandia è composto da 10 persone: 3 aritmetici, 3 geometri e 4 algebristi. Viene messa in votazione la norma secondo la quale tutti i cittadini ogni mattina dovranno ripetere la tabellina del 2, prima di andare a lavoro. 7 votano a favore, due sono contrari e uno si astiene. Cosa possiamo dedurre da questi dati?

Dato che 7 hanno votato a favore, e poiché gli aritmetici più gli algebristi sono in totale 6, vuol dire che *almeno un algebrista ha votato a favore*. Non possiamo dire altro. Infatti non possiamo dire che *almeno un aritmetico ha votato a favore*, né che *almeno un geometra ha votato a favore*. Poiché i 7 favorevoli potrebbero essere 4 algebristi e 4 aritmetici oppure 4 algebristi e 3 geometri.

Dai dati forniti esprimere delle deduzioni possibili

Livello 2

29. Ad una elezione sono candidati 12 maschi e 10 femmine. Vengono elette 11 persone, cosa possiamo dedurre? [Almeno un eletto è maschio]
30. Se nell'esercizio precedente avessimo avuto 11 candidati maschi e 11 femmine, cosa avremmo potuto dedurre? [Nulla]
31. In una classe di prima superiore ci sono 10 studenti nati in Italia, 2 in Francia, 3 in Marocco e 4 in Romania. Scegliendo a caso 15 studenti, di cosa possiamo essere sicuri? [Almeno 6 sono italiani e almeno 5 non sono italiani]
32. Se nell'esercizio precedente avessimo scelto 10 studenti? [Almeno uno è italiano]
33. In una classe di prima superiore ci sono 8 studenti nati in Italia (5 maschi e 3 femmine) e 6 nati in altre nazioni (2 maschi e 4 femmine). Scegliendo a caso 10 studenti, di cosa possiamo essere sicuri? [Almeno 4 sono italiani, almeno 2 non sono italiani, almeno uno è maschio e italiano]
34. Se nell'esercizio precedente avessimo scelto 12 studenti, di cosa possiamo essere sicuri? [Almeno 6 sono italiani, almeno 4 non lo sono, almeno 3 sono maschi e italiani, almeno 1 è femmina e italiana]
35. Il professore di matematica assegna un compito composto di 10 domande, scelte a caso da un campione di 8 domande di aritmetica, 6 di geometria e 4 di algebra. Di cosa possiamo essere sicuri? [Di niente]
36. Se nell'esercizio precedente avessimo scelto 12 domande, di cosa possiamo essere sicuri? [Almeno 2 sono di aritmetica]
37. Con riferimento al quesito sul professore di matematica, quante domande, minimo, avrebbe dovuto assegnare per essere sicuro di estrarre a sorte almeno una domanda per argomento? [15]
38. E per essere sicuro che vi siano almeno due domande per argomento? [16]

Lavoriamo insieme

- Vogliamo negare l'enunciato vero *Rita Levi Montalcini ha vinto il premio Nobel per la medicina nel* 1986. Ovviamente non dobbiamo cambiare né il soggetto (*Rita Levi Montalcini*), né l'azione (*ha vinto il premio Nobel per la medicina*), né il tempo (1986), perché in questi casi otterremo altri enunciati falsi nessuno dei quali è però la negazione cercata. Ne mostriamo qualcuno.

Italo Calvino ha vinto il premio Nobel per la medicina nel 1986
Rita Levi Montalcini ha partecipato alle Olimpiadi nel 1986
Rita Levi Montalcini ha vinto il premio Nobel per la letteratura nel 1986
Rita Levi Montalcini ha vinto il premio Nobel per la medicina nel 1989
Negare non significa semplicemente passare da un enunciato vero a uno falso, ma passare da un enunciato vero riferito a un certo soggetto e a una certa azione a uno falso con lo stesso soggetto e la stessa azione. Quindi la corretta negazione è

Rita Levi Montalcini non ha vinto il premio Nobel per la medicina nel 1986

- In alcuni casi possiamo evitare di premettere un non al verbo. Per esempio la negazione dell'enunciato *Carlotta è maggiorenne*, può anche essere *Carlotta è minorenne*, piuttosto che *Carlotta non è maggiorenne*. Perché in questo caso dire *non maggiorenne* è lo stesso che dire *minorenne*.

Costruire le negazioni degli enunciati seguenti

***Livello* 1**

39. 73 è un numero primo [73 non è un numero primo, o anche 73 è un numero composto]
40. I Beatles erano formati da 4 persone [I Beatles non erano formati da 4 persone]
41. Picasso è stato un esponente del movimento cubista
[Picasso non è stato un esponente del movimento cubista]
42. $7 + 5 = 12$; $15 - 1 \neq 4$; $8 \cdot 5 > 21$; $4 - 1 < 12$; $7 : 3 \leq 4$; $8 + 5 \geq 7$
[$7 + 5 \neq 12$; $15 - 1 = 4$; $8 \cdot 5 \leq 21$; $4 - 1 \geq 12$; $7 : 3 > 4$; $8 + 5 < 7$]
43. Un rombo è un quadrilatero con tutti i lati della stessa misura
[Un rombo è un quadrilatero con almeno due lati di diversa misura]
44. Il rapporto fra la misura della circonferenza e la misura del diametro è costante
[Il rapporto fra la misura della circonferenza e la misura del diametro non è costante]
45. Un cubo è un poliedro con 6 facce quadrate [Un cubo non è un poliedro con 6 facce quadrate]
46. Un triangolo ha tre altezze ; x è un numero positivo
[Un triangolo non ha tre altezze ; x è zero o un numero negativo]
47. Filippo pesa più di 70 Kg [Filippo pesa 70 Kg o meno]

Lavoriamo insieme

Consideriamo il famoso detto: *Tutte le strade portano a Roma*. Quale sarà la sua negazione?
Tenuto conto di quanto detto, basta sostituire al quantificatore universale l'esistenziale e negare l'azione. Cioè *Alcune strade non portano a Roma.*

Costruire le negazioni dei seguenti enunciati, per quelli matematici stabilire il valore di verità

***Livello* 2**

48. Chi non risica non rosica ; Agli uomini piacciono le bionde
[Alcuni che non risicano rosicano ; Ad alcuni uomini non piacciono le bionde]
49. A qualcuno piace caldo ; Tutti i tedeschi sono biondi
[A ognuno non piace caldo ; Alcuni tedeschi non sono biondi]
50. Tutte le potenze di 10 sono numeri pari ; Qualche numero intero è pari
[V, Qualche potenza di 10 non è pari ; V, Tutti i numeri interi sono dispari]
51. Alcuni quadrilateri sono rettangoli ; Nessun poliedro con 10 facce è regolare
[V, Nessun quadrilatero è rettangolo ; V, Esiste almeno un poliedro regolare che ha 10 facce]
52. Non tutti gli italiani sono siciliani ; Tutti i numeri primi sono dispari
[Tutti gli italiani sono siciliani ; F, Alcuni numeri primi sono pari]
53. Tutti i quadrati sono rombi ; Alcuni triangoli rettangoli sono isosceli
[V, Alcuni quadrati non sono rombi ; V, Tutti i triangoli rettangoli non sono isosceli]
54. Alcuni triangoli isosceli sono rettangoli ; Alcuni triangoli equilateri sono isosceli
[V, Tutti i triangoli isosceli non sono rettangoli ; V, Tutti i triangoli equilateri non sono isosceli]
55. Alcuni triangoli isosceli sono equilateri ; Tutti i triangoli isosceli sono acutangoli
[F, Tutti i triangoli isosceli non sono equilateri ; F, Alcuni triangoli isosceli non sono acutangoli]

I connettivi

Sia in matematica che nel linguaggio comune si usano le congiunzioni come e, o, le quali servono appunto a congiungere più enunciati fra loro. Così possiamo dire *Domani andrò allo stadio e in pizzeria*; *All'Università Gianni si iscriverà a legge o a medicina*. E in matematica avremo affermazioni come 24 *è divisibile per* 3 *e per* 4 oppure 18 *è divisibile per* 2 *o per* 5.
Come si vede abbiamo unito due distinte proposizioni, formandone una terza. Quello che ci dobbiamo chiedere è cosa deve accadere del valore di verità delle proposizioni componenti, affinché la proposizione composta sia vera.

Esempio 14

- Supponiamo che l'insegnante dica ai suoi studenti *domani sarete interrogati di aritmetica e di geometria*. Per non essere impreparati i ragazzi dovranno studiare entrambe le discipline, o una sola di esse? Ovviamente tutte e due, perché nella lingua italiana la congiunzione *e* ha appunto il significato di entrambe.
- Allo stesso modo è vero che 24 è divisibile per 3 e per 4? Sì, perché 24 è divisibile per 3 ed è divisibile per 4. Mentre non è vero che 24 è divisibile per 3 e per 5, perché 24 non è divisibile per 5. È analogamente falso che 24 è divisibile per 5 e per 7, perché 24 non è divisibile per nessuno dei due numeri.

Tenuto conto di quanto visto nell'esempio possiamo allora dire che la congiunzione *e* riferita a due enunciati logici veri permette di costruire un enunciato logico vero, mentre riferita a due enunciati, uno almeno dei quali è falso, costruisce un enunciato composto falso.

Notazione 2

La congiunzione di due enunciati logici si indica con il simbolo $\wedge$

Possiamo visualizzare più facilmente quanto detto costruendo le cosiddette tabelle di verità. Cioè compiliamo la seguente tabella

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La tabella si legge facilmente. Intanto nelle prime due colonne abbiamo tutti i quattro possibili casi, ossia che gli enunciati siano entrambi veri, uno solo dei due vero o entrambi falsi. La terza colonna fornisce invece il valore di verità dell'enunciato composto.
Così per esempio la prima riga dice che se consideriamo due enunciati logici entrambi veri, la loro congiunzione mediante *e*, è vera; la seconda riga dice che se il primo enunciato è vero e il secondo è falso la loro congiunzione è falsa; e così via.
Adesso consideriamo la congiunzione *o*, cominciando a osservare che in effetti in italiano questa ha due diversi significati.

Esempio 15

- La congiunzione *o* nell'affermazione *Quest'anno Gianni si iscriverà a legge o a medicina*, ha un significato esclusivo, nel senso che non è possibile che Gianni nello stesso anno sia iscritto a legge e a medicina. Quindi l'avverarsi di una delle condizioni esclude l'altra. Sarà possibile che Gianni non si iscriva né a legge, né a medicina, ma non potrà accadere che si iscriva a legge e a medicina, tranne che ciò avvenga in anni diversi, quest'anno è iscritto a legge e l'anno prossimo lascia legge e si iscrive a medicina.
- Invece la congiunzione *o* dell'affermazione *Stasera studierò italiano o matematica*, ha un senso *inclusivo*, poiché nella stessa serata è possibile studiare solo italiano o solo matematica, ma è anche possibile studiare entrambe le discipline, anche se non contemporaneamente.

Quindi possiamo dare le seguenti definizioni.

Definizione 4

Se la proposizione composta *p* o *q*,
- può essere vera anche se entrambe le proposizioni sono vere, diremo che o è usato in senso **inclusivo**.
- è falsa se entrambe le proposizioni sono vere, allora diciamo che o è usato in senso **esclusivo**

Per brevità quando useremo *o* in senso inclusivo lo chiameremo **vel**, mentre chiameremo **aut** quello usato in senso esclusivo.

Notazione 3

La disgiunzione inclusiva si indica con il simbolo $\vee$

Notazione 4

La disgiunzione esclusiva si indica con il simbolo $\dot{\vee}$

Quindi le tabelle di verità della congiunzione *o* nei due significati, sono le seguenti.

p	q	$p \vee q$	$p \dot{\vee} q$
V	V	V	F
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	F

Esempio 16
- Cosa possiamo dire dell'enunciato 17 *è un numero primo o un numero dispari*? Intanto dobbiamo stabilire in che senso è usata la congiunzione *o*. È possibile che vi siano numeri primi e dispari contemporaneamente? Sì, anzi tutti i numeri primi, a parte il 2, sono dispari. Quindi siamo in presenza di una *o* usata in senso inclusivo. Perciò la proposizione è falsa solo se entrambe le proposizioni componenti lo sono. Poiché sono entrambe vere, 17 è un numero primo ed è un numero dispari anche la composizione è un enunciato vero. Saranno vere anche le proposizioni 17 *è un numero primo o un numero pari* e 17 *è un numero composto o un numero dispari*, perché una delle due proposizioni è vera (osserviamo che dire *numero non primo* e dire *numero composto* per i numeri interi maggiori di 1, è la stessa cosa). È invece falsa la proposizione 17 *è un numero composto o un numero pari*, perché entrambe le proposizioni sono false.
- Vediamo invece l'enunciato *Il triangolo ABC è acutangolo o ottusangolo*. In questo caso la congiunzione *o* è usata in senso esclusivo, perché non esistono triangoli contemporaneamente acutangoli e ottusangoli. Quindi l'affermazione sarà vera solo se *ABC* è un triangolo *acutangolo e non ottusangolo,* o un triangolo *ottusangolo e non acutangolo*. Mentre sarà falsa se *ABC* non sarà né acutangolo, né ottusangolo, cioè se sarà un triangolo rettangolo.

Come si fa a negare una proposizione composta con le congiunzioni *e* od *o*?

Esempio 17
- Cosa vuol dire che è falso l'enunciato *Il poeta Giacomo Leopardi è nato a Recanati ed è morto a Milano*? Che non è nato a Recanati e non è morto a Milano? No, semplicemente che almeno una delle due affermazioni è falsa, anche se potrebbero essere false entrambe. In effetti è vero che Leopardi è nato a Recanati, è falso che è morto a Milano, poiché è morto a Napoli.
- Se l'enunciato *Il triangolo ABC è acutangolo o scaleno* è falso, quale enunciato è vero? Stavolta entrambi i componenti debbono essere falsi, perché esistono triangoli contemporaneamente acutangoli e scaleni, quindi o è usato in senso inclusivo. Perciò sarà vero che *Il triangolo ABC non è né acutangolo né scaleno*.

Del resto se neghiamo la tabella di verità della congiunzione *e*, cioè sostituiamo V con F e viceversa, otteniamo la tabella seguente

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Ma anche la tabella seguente ha lo stesso andamento

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Perciò possiamo dire che $\neg(p \wedge q)$ e $\neg p \vee \neg q$, sono lo stesso enunciato, cioè

Regola di negazione di una proposizione composta con il connettivo e

Negare una proposizione composta con e, equivale a comporre con o (vel) le negazioni delle singole proposizioni

Esempio 18

Perciò *Non è vero che mi piace la musica rock e i libri d'avventure* o *Non mi piace la musica rock o non mi piacciono i libri di avventure*, sono enunciati che hanno lo stesso significato.

Analogamente dall'uguaglianza delle seguenti tabelle di verità.

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Possiamo enunciare la seguente regola

Regola di negazione di una proposizione composta con il connettivo vel

Per negare una proposizione composta con vel, basta comporre con e le negazioni delle singole proposizioni

Esempio 19

Quindi *Non è vero che mi piace la musica rock o i libri d'avventure* ha lo stesso significato di *Non mi piace la musica rock e non mi piacciono i libri di avventure*.

In effetti possiamo congiungere proposizioni logiche anche in altro modo.

Esempio 20

- Il seguente enunciato è anch'esso composto, anche se non usiamo nessuna delle congiunzioni *e*, *o*. *Se* 24 *è divisibile per* 3 *allora è anche divisibile per* 4.
- Così come è composto l'enunciato *Solo se* 24 *è divisibile per* 3 *allora è anche divisibile per* 4. Proposizioni di questo tipo sono molto comuni in matematica, perché si usano spesso negli enunciati dei teoremi.

Definizione 5

Un enunciato del tipo *Se p allora q*, con *p* e *q* proposizioni logiche si dice **implicazione materiale**. In una implicazione materiale l'enunciato *p* si chiama **antecedente** e l'enunciato *q* **conseguente**.

Definizione 6

Un enunciato del tipo *Solo se p allora q*, con *p* e *q* proposizioni logiche si dice **doppia implicazione materiale**.

Notazione 5

L'implicazione materiale si indica con il simbolo $\Rightarrow$

Notazione 6

La doppia implicazione materiale si indica con il simbolo $\Leftrightarrow$

Esempio 21

Consideriamo il teorema che afferma *Se la cifra delle unità di un numero è* 5*, allora il numero è divisibile per* 5. Cosa significa? Che se prendiamo per esempio il numero 124785, questo è certamente divisibile per 5. E questo fatto lo sappiamo senza bisogno di fare i calcoli, basta solo vedere che la cifra delle unità è 5, e siamo sicuri che il numero è divisibile per 5. Usando solo questo teorema possiamo dire che il numero 23460 non è divisibile per 5 perché la sua cifra delle unità non è 5? No, perché il teorema si applica solo ai numeri che hanno la cifra delle unità uguale a 5, agli altri numeri non si può applicare, così può capitare che 23460, pur non finendo per 5 sia divisibile per 5, ma anche che 2879, che non finisce per 5, non sia divisibile per 5. Invece se sappiamo che un certo numero non è divisibile per 5 possiamo essere sicuri che non ha la cifra delle unità uguale a 5, perché se l'avesse, per il teorema dovrebbe essere divisibile per 5.

L'esempio precedente quindi ci dice che l'implicazione materiale è falsa solo se accade antecedente vero e conseguente falso. Quindi la tabella di verità dell'implicazione materiale è la seguente

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

I teoremi sono deduzioni logiche, cioè nel caso dell'esempio precedente, noi abbiamo dedotto che 124785 è divisibile per 5 dal fatto che la sua cifra delle unità è 5. La tabella vista sopra si può applicare però a qualsiasi coppia di enunciati, anche se questi non hanno alcuna relazione l'uno con l'altro e quindi non possono essere dedotti uno dall'altro. Ecco perché abbiamo chiamato la composizione implicazione materiale e non deduzione.

Esempio 22

L'enunciato *Se* 24 *è un numero pari allora Roma è capitale d'Italia*, è un'implicazione materiale vera con antecedente e conseguente entrambi veri. Ma ovviamente non è una deduzione, cioè il fatto che Roma è capitale d'Italia non dipende dal fatto che 24 è un numero pari; Roma sarebbe stata capitale d'Italia anche se 24 fosse stato un numero dispari o non fosse un numero affatto.
Anche le seguenti implicazioni materiali sono vere *Se* 24 *è un numero dispari allora Roma è capitale d'Italia*; *Se* 24 *è un numero dispari allora Roma è capitale di Francia*, perché hanno antecedente falso, ma ovviamente non sono deduzioni.

Consideriamo le doppie implicazioni materiali, quelle cioè che si possono invertire, passando dal conseguente all'antecedente.

Esempio 23

Nel caso precedente il teorema *Se la cifra delle unità di un numero è* 5*, allora il numero è divisibile per* 5 non è invertibile, perché non è vero che *Se il numero è divisibile per* 5*, allora la cifra delle unità di un numero è* 5. Infatti per esempio il numero 10 è divisibile per 5, ma la sua cifra delle unità non è 5 ma è 0. Invece il teorema *Ogni numero pari innalzato al quadrato è un numero divisibile per* 4 è invertibile, perché stavolta è vero anche l'enunciato *Se il quadrato di un numero intero è divisibile per* 4 *allora il numero è pari*. Infatti se prendiamo per esempio il numero pari 6, il suo quadrato, cioè 36, è certamente divisibile per 4. E questo fatto lo sappiamo senza bisogno di fare i calcoli, solo dal sapere che 6 è pari possiamo essere sicuri che 36 è divisibile per 4. E allo stesso modo sapendo che il quadrato perfetto 100 è multiplo di 4, possiamo essere sicuri che 10, di cui 100 è quadrato, è pari. Quindi potremmo enunciare i due teoremi come l'unico teorema *Solo se un numero è pari, il suo quadrato è divisibile per* 4. Pertanto siccome 12 è pari 144 è multiplo di 4, ma anche siccome 144 è multiplo di 4, 12 è pari, ossia 12 è pari solo perché 144 è multiplo di 4 e viceversa.

Tenuto conto del precedente esempio, la doppia implicazione materiale conduce a un enunciato vero solo se antecedente e conseguente hanno lo stesso valore di verità, sono cioè entrambi veri o entrambi falsi. Quindi la relativa tabella di verità è la seguente.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ovviamente anche la doppia implicazione materiale non è in generale una doppia deduzione.

Esempio 24

La doppia implicazione materiale *Solo se* 24 *è un numero pari allora Roma è capitale d'Italia*, è vera, perché antecedente e conseguente sono entrambi veri; così come è vero l'enunciato *Solo se* 24 *è un numero dispari allora Roma è capitale di Francia*, perché stavolta entrambe le proposizioni sono false. Ma ovviamente i due enunciati non hanno alcuna relazione l'uno con l'altro.

Chiudiamo il capitolo considerando due altre nozioni. Consideriamo le implicazioni che sono deduzioni. Per esempio abbiamo visto che una di queste è *Se la cifra delle unità di un numero è* 5*, allora il numero è divisibile per* 5. Cosa ci dice questa affermazione? Che è sufficiente sapere che un numero intero finisce per 5, per sapere immediatamente che il numero è multiplo di 5. Così il numero 1234567895 è certamente divisibile per 5, non è necessario che andiamo a verificarlo. Questo fatto però non è necessario, cioè non deve accadere per forza che un numero finisca per 5 perché sia multiplo di 5. Per esempio 10 è multiplo di 5 ma non finisce per 5.
Allora poniamo le seguenti definizioni.

Definizione 7

Dati due enunciati logici, p e q, diciamo che p è una **condizione necessaria** per q se ogniqualvolta q è falso anche p lo è.

Definizione 8

Dati due enunciati logici, p e q, diciamo che p è una **condizione sufficiente** per q se ogniqualvolta q è vero anche p lo è.

Anche nella lingua italiana, necessario significa che deve accadere per forza. È necessario nutrirsi se si vuole vivere. Analogamente il vocabolo *sufficiente* vuol dire che basta, il voto sufficiente è quello che consente allo studente di non essere bocciato.

Esempio 25

- È sufficiente che un numero intero finisca per 5 perché il numero sia multiplo di 5.
- È necessario che un numero intero finisca per 0 o per 5 perché il numero sia multiplo di 5.
- È necessario e anche sufficiente che la somma delle cifre di un numero sia divisibile per 3, affinché il numero sia divisibile per 3. Cioè 123456 è divisibile per 3 perché 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21, che è divisibile per 3. E 123457 non è divisibile per 3 perché 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 = 22, che non è divisibile per 3

L'angolo storico

La logica ha origini molto antiche. Cominciò a svilupparsi parallelamente alla filosofia in Grecia intorno al V secolo a.C. Il primo a scrivere di logica come scienza della deduzione fu il famoso filosofo Aristotele (384 – 322), scrivendo fra le varie cose gli *Analitici primi* e gli *Analitici secondi*. Da allora la logica, soprattutto nella sua interpretazione di famosi paradossi, come quello detto del mentitore [(1)], fu oggetto di studio soprattutto per i filosofi. Fra questi per esempio il grande filosofo e matematico tedesco Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 – 1716), che pensava che un giorno ogni proposizione del linguaggio comune si sarebbe tradotta in espressione matematica, in modo tale che ogni discussione si sarebbe risolta considerandola dal punto di vista matematico. Nel XIX secolo l'inglese George Boole (1815 – 1864), scrisse il testo *An investigation into the laws of Thought, on which are founded the Mathematical theories of logic and probabilities*, pubblicato nel 1854, che è considerato il primo della logica matematica. Da allora la logica matematica si è sviluppata enormemente, grazie all'apporto di validissimi studiosi fra i quali è importante ricordare Gottlob Frege, David Hilbert, Giuseppe Peano, Bertrand Russell.

[(1)] Il paradosso cosiddetto del mentitore o anche di Epimenide il cretese, chiede di stabilire se chi dice la frase "Io mento", dica o no la verità. Non è difficile capire che la frase è paradossale. Infatti se fosse vera, sarebbe vero che è falsa e viceversa se fosse falsa, cioè se chi paral mente, allora dovrebbe essere vera.

I protagonisti



Aristotele Nacque a Stagira in Macedonia, nel 384 a.*C*. Poiché suo padre era amico e medico personale del re di Macedonia, egli trascorse parte della giovinezza a corte. A 17 anni si recò a studiare alla famosa Accademia di Platone ad Atene. All'inizio abbracciò interamente le idee platoniche, ma verso la fine della sua vita sviluppò punti di vista originali. Nel 342 a.*C*., Filippo II di Macedonia lo invitò a fare da tutore a suo figlio tredicenne, quello che divenne poi il famoso Alessandro Magno. Le sue opere più importanti, fra quelle ritrovate, sono *Organon* (un trattato di logica), la *Retorica*, la *Poetica*, la *Metafisica*. Aristotele morì a Calcide nell'Eubea nel 322 a.*C*.



Gottfried Wilhelm von Leibniz Nacque a Leipzig il primo luglio del 1646 da un professore di filosofia morale all'Università. Autodidatta, imparò Latino e Greco in giovane età. Si iscrisse alla facoltà di legge dell'Università della sua città natale, ma conseguì il titolo all'Università di Altdorf nel 1667. Cominciò a interessarsi del nascente calcolo differenziale verso il 1673; sono celebri le sue diatribe con l'altro grande genio dell'epoca Isaac Newton, su chi per primo sviluppò il calcolo differenziale e integrale. Nel 1700 fondò l'Accademia di Berlino, di cui fu primo presidente. Morì ad Hannover il 14 Novembre 1716.



George Boole. Nacque a Lincoln il 2 Novembre del 1815. Ben presto mostrò le sue capacità culturali, traducendo, a 12 anni, un ode di Orazio così bene da far ritenere che non potesse essere opera di un così giovane studioso. Non studiò all'Università, ma continuò per tutta la vita ad apprendere in modo autonomo. Cominciò così a pubblicare lavori matematici che ben presto gli diedero la fama. Nel 1854 il suo capolavoro, le *Investigations*, gli diede fama imperitura. La sua algebrizzazione della logica fu di importanza fondamentale anche in altre discipline scientifiche, quali la teoria dei circuiti elettrici e l'Informatica. La sua crescente celebrità, dovuta alle opere di logica che continuava a pubblicare, lo portò a essere eletto alla Royal Society. Morì l'8 dicembre 1864 a Ballintemple, nella contea di Cork in Irlanda.

Verifiche

Lavoriamo insieme

- Consideriamo l'enunciato composto *Michelangelo Buonarroti ha scolpito il David e il Mosè*. Cosa possiamo dire degli enunciati componenti? Che sono entrambi veri, perché Michelangelo ha scolpito il David custodito nella Galleria dell'Accademia di Firenze e il Mosè posto in San Pietro in Vincoli a Roma. Quindi l'enunciato è vero.
- Sono invece falsi gli enunciati *Michelangelo Buonarroti ha scolpito il David e progettato il Colosseo*; *Michelangelo Buonarroti ha dipinto La Gioconda e scolpito il Mosè*; *Michelangelo Buonarroti è nato negli U.S.A. e morto nel* XIX *secolo*; poiché ciascun enunciato è composto da almeno un enunciato falso.

***Stabilire il valore di verità dei seguenti enunciati composti mediante il connettivo* et (∧)**

***Livello* 1**

1. Giuseppe Verdi ha musicato *Aida* e *Turandot*; Dan Brown ha scritto *Angeli e Demoni* e *Harry Potter*; Il fiume Po attraversa il Piemonte e l'Emilia Romagna. [F; F ;V]
2. L'Italia ha vinto la I e la II guerra mondiale; La squadra italiana di calcio ha vinto i mondiali del 2002 e del 2006; Il lettore mp3 e il lettore DVD non esistevano nel 1970. [F; F; V]
3. Facebook è stato costituito nel 2000 e Twister nel 2005; Pitagora ed Euclide sono vissuti prima di Cristo; Il numero 123123 è multiplo di 3 e di 11. [F; V; V]
4. Il numero 20 è divisibile per 5 e ha esattamente 4 divisori; Il numero 20 è divisibile per 5 e ha almeno 4 divisori ; Il quadrato e il cubo di un numero pari sono numeri pari. [F; V; V]
5. Il quadrato e il cubo di un numero negativo sono numeri positivi ; Un rombo ha i lati uguali e gli angoli interni uguali ; Il triangolo rettangolo i cui cateti sono 3 *cm* e 4 *cm*, ha l'ipotenusa di 5 *cm* e l'area di 6 cm^2. [F ; F ; V]

Lavoriamo insieme

- Consideriamo la proposizione logica *Stasera andrò a ballare o al teatro*, con che significato è usato in essa il connettivo *o*? Dato che è possibile nella stessa sera andare a ballare e poi al teatro o viceversa, abbiamo a che fare con un *o* inclusivo, che corrisponde al latino *vel*, quindi al connettivo ∨.
- Sia l'enunciato *Oggi alle* 8 *prenderò l'aereo che va da Roma a Madrid o quello che va da Roma a Londra*. Stavolta il senso del connettivo *o* è esclusivo, non è possibile prendere un aereo che vada a Madrid e a Londra, almeno la tratta *Roma – Madrid – Londra* non è una di quelle *standard*.

Nelle seguenti proposizioni logiche composte determinare se o è utilizzato in senso inclusivo (vel) o esclusivo (aut)

***Livello* 1**

6. Il mio insegnante di matematica è maschio o femmina; In discoteca non pagano le ragazze o i minorenni; Nei musei statali l'ingresso è gratuito per gli italiani che hanno meno di 18 anni o più di 65 ; A pranzo mangerò spaghetti o riso. [aut; vel; aut ; vel]
7. Devi pensare a un numero pari o a un numero dispari ; Marco è cattolico o musulmano ; Stasera esco con Carla o con Fabiola ; Max è nato a Milano o in Lombardia. [aut ; aut ; vel ; vel]
8. L'aereo arriverà a Milano Linate o a Milano Malpensa ; Questo quadrilatero ha i lati uguali o gli angoli uguali ; Il numero estratto alla lotteria era maggiore di 100 o minore di 200; Lanciando un dado esce un numero maggiore di 3 o minore e uguale a 3. [aut ; vel; vel ; aut ; aut]
9. Lanciando una moneta esce testa o croce ; Quest'anno la squadra di calcio per cui tifo ha vinto il campionato o la Champions League; L'anno prossimo la squadra di calcio per cui tifo vincerà il campionato o scenderà nella serie inferiore. [aut ; vel ; aut]

Lavoriamo insieme

- Consideriamo l'enunciato composto *L'attore Daniel Radcliffe ha partecipato al film Harry Potter e il principe mezzosangue o al film Il codice da Vinci*. In che senso usiamo *o*? In senso inclusivo, poiché un attore può anche fare più film. Quindi l'enunciato è vero se Radcliffe ha partecipato ad almeno uno dei

due film. Poiché ha partecipato al primo, è vero quanto affermato. Non è vero invece che *L'attore Daniel Radcliffe ha partecipato al film Via col vento o al film Il codice da Vinci* perché non ha fatto parte di nessuno dei due.

- L'enunciato 12 *è un multiplo di* 4 *o un numero dispari*, usa il connettivo o in senso esclusivo, dato che non vi sono multipli di 4 dispari. Pertanto esso è vero solo se una sola delle affermazioni è vera, cosa che accade perché 12 è multiplo di 4.

Stabilire il valore di verità dei seguenti enunciati composti mediante il connettivo o nei suoi diversi significati, inclusivo o esclusivo

***Livello* 1**

10. Giuseppe Verdi ha musicato *Aida* o *Turandot* ; Dan Brown ha scritto *Angeli e Demoni* o *Harry Potter* ; Il fiume Tevere nasce dal Monviso o sfocia in Adriatico [V; V; F]
11. Il Danubio attraversa Vienna o Budapest ; Dante Alighieri è nato a Firenze o a Siena [V; V]
12. La squadra italiana di calcio ha vinto i mondiali del 2002 o del 2010; Le Olimpiadi si sono svolte nel 2000 o nel 2002 ; Il campionato italiano di calcio 2008/2009 è stato vinto dalla Juve o dal Milan. [F; V; F]
13. Pitagora è vissuto prima di Cristo o Euclide è morto nel 1900 ; Il numero 123123 è multiplo di 3 o di 11; Il numero 20 è divisibile per 5 o ha esattamente 4 divisori. [V; V; V]
14. Un numero primo ha almeno 3 o al più 5 divisori; Il quadrato o il cubo di un numero pari sono numeri pari ; Il quadrato o il cubo di un numero negativo sono numeri positivi. [V; V ; V]
15. Un rombo ha i lati uguali o gli angoli interni uguali; Il triangolo rettangolo i cui cateti sono 3 *cm* e 4 *cm*, ha l'ipotenusa di 5 *cm* o ha l'area di 6 cm^2 ; Un quadrilatero convesso o è inscrivibile o è circoscrivibile a una circonferenza. [V; V; F]

Lavoriamo insieme

- Consideriamo l'enunciato *Se* 27 *è un cubo perfetto allora* 16 *è un quadrato perfetto*. Abbiamo a che fare con un'implicazione materiale vera perché antecedente e conseguente sono entrambi veri. Ma ovviamente non è una deduzione. 16 non è un quadrato perfetto perché 27 è un cubo perfetto.
- Analogamente risultano vere le seguenti implicazioni materiali, perché hanno l'antecedente falso. *Se* 27 *è un quadrato perfetto allora* 16 *è un numero pari*; *Se* 27 *è un quadrato perfetto allora* 16 *è un numero dispari*.
- Risulta invece falsa l'implicazione materiale, perché ha antecedente vero e conseguente falso *Se* 27 *è un cubo perfetto allora* 16 *è un numero dispari*.

Stabilire il valore di verità delle seguenti implicazioni materiali. Stabilire anche quali implicazioni vere sono deduzioni

***Livello* 2**

16. Se l'Italia è una repubblica allora la Francia è una monarchia [F]
17. Se il Nilo è lungo più di 5000 Km allora il Po è lungo più di 1000 *Km* [F]
18. Se l'Italia è una penisola allora la Sicilia è un'isola [V]
19. Se Giulio Cesare è morto di morte naturale allora Napoleone è vissuto 100 anni [V]
20. Se i libri di Harry Potter hanno venduto meno di un milione di copie allora Milano è capoluogo della Lombardia [V]
21. Se ci sono più di 5 numeri primi minori di 20 allora ci sono almeno 6 numeri primi minori di 20 [V, deduzione]
22. Se 27 è dispari allora il suo quadrato è pari [F]
23. Se 5 e 7 sono dispari allora la loro somma è pari [V, deduzione]
24. Se *n* ha tutte le cifre uguali a 7 allora *n* non è divisibile per 7 [F]
25. Se 144 è divisibile per 9 allora 12 è divisibile per 3 [V, deduzione]
26. Se 12 è divisibile per 3 allora 144 è divisibile per 9 [V, deduzione]
27. Se il triangolo di lati (3, 4, 5) è rettangolo allora il triangolo di lati (1, 1, 1) è equilatero [V]
28. Se il triangolo di lati (3, 4, 5) è rettangolo allora il triangolo di lati (1, 2, 3) è scaleno [F]

29. Se il triangolo di lati (3, 4, 4) è rettangolo allora il triangolo di lati (1, 1, 1) è equilatero [V]
30. Se il triangolo di lati (3, 4, 6) è rettangolo allora il triangolo di lati (1, 2, 3) è equilatero [V]

Lavoriamo insieme

- Consideriamo la doppia implicazione materiale *Solo se Kennedy è stato presidente degli U.S.A. Michelangelo ha dipinto la Gioconda*. Dato che la prima proposizione è vera, mentre la seconda è falsa, l'intera proposizione è falsa.
- Analogamente falsa sarà *Solo se Kennedy è stato presidente dell'Italia Michelangelo ha affrescato la Cappella Sistina*. Perché stavolta falso implica vero.
- Sono invece vere le doppie implicazioni seguenti: *Solo se Kennedy è stato presidente dell'Italia Michelangelo ha dipinto la Gioconda*; *Solo se Kennedy è stato presidente degli U.S.A. Michelangelo ha affrescato la Cappella Sistina*; perché formate da enunciati rispettivamente falsi e veri. Ovviamente non abbiamo a che fare con deduzioni, dato che gli eventi non hanno alcuna relazione fra loro.

Stabilire quali fra le seguenti doppie implicazioni materiali sono vere. Stabilire anche quali doppie implicazioni vere sono deduzioni

Livello 2

31. Solo se l'Italia è una monarchia anche la Francia lo è [V]
32. Solo se il Tevere attraversa Roma, la Senna attraversa Milano [F]
33. Solo se l'Italia è una penisola anche la Sicilia lo è [F]
34. Solo se Giulio Cesare è vissuto prima di Cristo Napoleone è vissuto dopo Cristo [V]
35. Solo se come Presidente della Camera viene eletta una donna allora come Presidente del Senato deve essere eletto un uomo [F]
36. Solo se ci sono numeri primi maggiori di 50, uno di questi è 61 [V]
37. Solo se 123 è divisibile per 3 anche la somma delle sue cifre è divisibile per 3 [V, deduzione]
38. Solo se 5 e 7 sono dispari il loro prodotto è pari [F]
39. Solo se n è formato da tutte cifre pari allora n è divisibile per 4 [F]
40. Solo se 144 è divisibile per 9 ,12 è divisibile per 3 [V, deduzione]
41. Solo se 12 non è divisibile per 5, 144 non è divisibile per 5 [V, deduzione]
42. Solo se il triangolo di lati (3, 3, 3) è equilatero, il triangolo di lati (3, 3, 4) è isoscele [V]
43. Solo se il triangolo di lati (3, 4, 5) è rettangolo, anche il triangolo di lati (6, 8, 10) lo è [V, deduzione]
44. Solo se il triangolo di lati (3, 4, 4) è isoscele,l il triangolo di lati (1, 2, 3) è scaleno [F]
45. Solo se il triangolo di lati (3, 4, 6) è rettangolo, il triangolo di lati (1, 2, 3) è equilatero [V]

Lavoriamo insieme

- Sappiamo che ogni quadrato è un rettangolo. È necessario che un quadrilatero sia un quadrato perché sia un rettangolo? Cioè ci sono rettangoli che non sono quadrati? Ovviamente sì, quindi la condizione non è necessaria, non deve accadere per forza.
- La stessa condizione invece è sufficiente, dato che se *ABCD* è un quadrato è ovviamente un rettangolo.
- Essere maggiorenne è una condizione necessaria o sufficiente per avere conseguito la patente automobilistica in Italia? La condizione è necessaria, perché se non si è maggiorenni non si può avere la patente. Non è però sufficiente, perché esistono diversi maggiorenni che non hanno la patente.

***Stabilire se la prima condizione è necessaria, sufficiente, necessaria e sufficiente o niente di tutto ciò, per la seconda condizione* (*Nelle risposte N, S, NS*, ∅)**

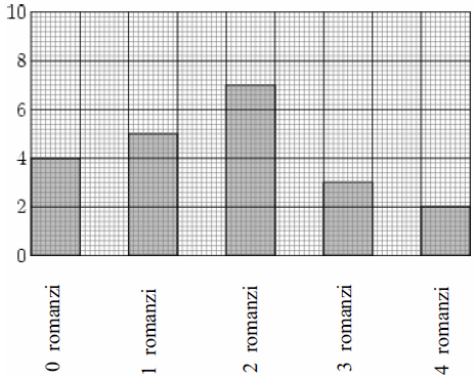
Livello 3

46. Condizione ..... per essere promossi è avere la sufficienza in tutte le materie [S]
47. Condizione ..... affinché ci siano numeri primi maggiori di 60 è che 67 sia primo [S]
48. Condizione ..... affinché un numero abbia 0 come cifre delle unità è che sia pari [N]
49. Condizione ..... affinché un numero sia pari è che il suo quadrato sia multiplo di 4 [NS]
50. Condizione ..... perché domani vi sia il sole è che stasera non piova [∅]
51. Condizione ..... per essere europei è essere italiani [S]

52. Condizione ..... per essere italiani è essere europei [N]
53. Condizione ..... per essere un numero quadrato perfetto è essere un numero positivo [N]
54. Condizione ..... per essere un numero positivo è essere un numero quadrato perfetto [S]
55. Condizione ..... per essere un triangolo isoscele è essere un triangolo equilatero [S]
56. Condizione ..... per essere un triangolo equilatero è essere un triangolo isoscele [N]
57. Condizione ..... per essere un triangolo isoscele è essere un triangolo rettangolo [∅]
58. Condizione ..... per essere eletto presidente della Repubblica Italiana è avere la cittadinanza italiana e avere più di 50 anni [N]
59. Condizione ..... per essere eletto presidente della Repubblica Italiana è essere senatore del Parlamento italiano [∅]
60. Condizione ..... per essere Presidente del Consiglio della Repubblica Italiana è essere maschio [∅]

Per la prova Invalsi

1. (Invalsi 2003) Quale delle seguenti affermazioni è falsa? [C]
   A) Alcuni multipli di 4 sono anche multipli di 8 B) Tutti i multipli di 8 sono anche multipli di 4. C) Tutti i numeri pari sono fra i multipli di 8 D) Alcuni numeri pari non sono multipli di 8 E) Alcuni numeri pari sono multipli di 8
2. (Invalsi 2004) Quale tra le seguenti proposizioni è FALSA? [D]
   A) La somma di due numeri dispari è un numero pari B) Il prodotto di un numero dispari per un numero pari è un numero pari C) Il prodotto di due numeri dispari è un numero dispari D) Il prodotto di due numeri dispari è un numero pari
3. (Invalsi 2004) La figura indica quanti romanzi leggono gli alunni di una classe in un mese. Quanti sono gli alunni che leggono almeno 2 romanzi? [12]



4. (Invalsi 2012) Quale tra le seguenti frasi è la negazione della proposizione "*Tutti i numeri naturali sono dispari*"? [C]
   A) *Tutti i numeri naturali sono pari* B) *Nessun numero naturale è dispari* C) *Almeno un numero naturale non è dispari* D) *Qualche numero naturale è dispari*
5. 4 persone sospettate di omicidio sono interrogate. Aldo dice: *Il colpevole è Dino*; Dino risponde: *Non è vero, è stato Tony*; questo a sua volta afferma: *Dino mente*; infine Giorgio afferma: *Non sono stato io*. Se uno solo dei quattro dice la verità, chi è il colpevole? [Giorgio]
6. Se è falso che *Non andrò a vedere l'ultimo concerto dei Negramaro*, allora è vero A) Andrò a vedere il concerto dei Negramaro B) Andrò a vedere il concerto di Jovanotti C) Non andrò a vedere alcun concerto D) Non mi piace la musica dei Negramaro [A]
7. Se la negazione di $p \wedge q$ è $\neg p \vee \neg q$, allora la frase *Cesare e Carlo sono miei amici*, ha lo stesso significato di quale delle seguenti frasi? A) Né Cesare né Carlo sono miei amici B) Uno almeno fra Cesare o Carlo non sono miei amici C) Solo uno fra Cesare e Carlo sono miei amici D) Non ho amici [B]
8. Fra i seguenti fatti quali sono necessari e quali sufficienti, affinché si sia promossi a giugno in seconda superiore? A) Sufficienza in matematica B) Media del 6 C) Non più di una materia insufficiente D) Il voto più basso deve essere 6 [Nessuno necessario; D sufficiente]

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
A = Abacus gara on line gestita dalla Grace Church School
K = Kangarou
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
OMI = Olimpiadi della Matematica.

Lavoriamo insieme

Il seguente quesito è stato assegnato nei Giochi di Archimede, selezione delle Olimpiadi della matematica, del 2013, categoria biennio.
In una conversazione tra due matematici il primo dice al secondo: "Ieri ho mentito". L'altro risponde: "Anch'io ieri ho mentito". Sapendo che uno dei due mente il lunedì, il martedì e il mercoledì (e solo in questi giorni), mentre l'altro mente il giovedì, il venerdì e il sabato (e solo in questi giorni), in quale giorno della settimana è avvenuta la conversazione?
Cominciamo a stabilire che se i due dicono entrambi la verità deve esistere un giorno in cui entrambi non mentono e il giorno prima mentono. L'unico giorno in cui entrambi dicono la verità è la domenica, ma il sabato il primo non mente, quindi non dicono entrambi la verità e non è domenica. Quindi siamo in un giorno in cui uno mente e l'altro no. Se il primo dice la verità lo può fare solo di giovedì, in questo giorno il secondo mente e così dicendo che ieri, cioè mercoledì ha mentito, effettivamente dice il falso. Se invece dicesse la verità il secondo potrebbe farlo solo la domenica, ma abbiamo visto che ciò non è possibile. Quindi è giovedì.

1. (OMI1992) Si consideri la seguente frase. "*Tutte le volte che ho preso l'ombrello non è piovuto*". Quale delle seguenti frasi è la negazione della frase precedente? A) *Quando esco con l'ombrello piove* B) *Tutti i giorni in cui esco senza ombrello piove* C) *Almeno una volta sono uscito con l'ombrello ed è piovuto* D) *Tutti i giorni in cui non piove esco con l'ombrello* E) *Tutti i giorni in cui è piovuto sono uscito con l'ombrello*. [C]
2. (OMI 2011) Dopo una rissa in campo l'arbitro vuole espellere il capitano di una squadra di calcio. È uno tra Paolo, Andrea e Gabriele ma, siccome nessuno ha la fascia al braccio, non sa qual è dei tre. Paolo dice di non essere il capitano; Andrea dice che il capitano è Gabriele; Gabriele dice che il capitano è uno degli altri due. Sapendo che uno solo dei tre dice la verità, quale delle affermazioni seguenti è sicuramente vera? A) Gabriele non è il capitano B) Andrea dice la verità C) Paolo dice la verità D) Andrea è il capitano E) Gabriele mente. [A]

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato agli Abacus del 1997.
Tre persone fanno le seguenti dichiarazioni: A: "B mente"; B: "C mente"; C: "A e B mentono entrambi". Chi mente dei tre?
Se è vero ciò che dice C, allora sarebbe vero ciò che dice B, cioè mente C. Ovviamente questo non può essere, C o dice la verità o non la dice. Perciò C sta mentendo. Ma allora è vero quello che dice B e, nello stesso tempo deve essere falso quello che dice A.

3. (A2003) La gente con gli occhi verdi dice la verità, quelle con gli occhi azzurri mentono. In un gruppo di 5 persone ciascuna riesce a vedere gli occhi degli altri. Essi fanno le seguenti affermazioni: A: "*Vedo tre persone con gli occhi verdi e una con gli occhi blu*"; B: "*Vedo quattro persone con gli occhi blu*"; C: "*Vedo tre persone con gli occhi blu e una con gli occhi verdi*"; D non dice niente; E: "*Vedo quattro persone con gli occhi verdi*". Dire il colore di ciascuno dei cinque.
[C e D hanno gli occhi verdi e gli altri li hanno blu]
4. (A2003) Chiediamo a tre persone se mentono o dicono la verità, non sentiamo la risposta della prima persona, la seconda dice: "*Ha detto che dice la verità*", la terza persona si rivolge alla seconda dicendole: "*Sei un bugiardo*!". La terza persona mente o dice la verità? [Mente]
5. (K 2008) Una scatola contiene sette carte numerate da 1 a 7. Due saggi pescano a caso delle carte dalla scatola: il primo ne prende tre, il secondo due delle rimanenti; le ultime due restano chiuse nella scatola. Il primo saggio, dopo aver guardato solo i numeri scritti sulle carte da lui pescate, dice al secondo: "*Conosco la somma dei numeri riportati sulle tue carte*" Qual è questa somma? [12]

6. (OMI 2010) a, b e c sono numeri reali tali che comunque se ne scelgano due la loro somma è maggiore o uguale a zero. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera? [E]
A) $a \cdot b \cdot c \geq 0$, B) almeno uno dei tre numeri è zero C) almeno uno dei tre numeri è strettamente minore di zero D) a, b e c sono tutti maggiori o uguali a zero E) $a + b + c \geq 0$.
7. (K 2010) In una città vivono solo gentiluomini e bugiardi. Ogni singola affermazione pronunciata da un gentiluomo è vera, mentre ogni singola affermazione pronunciata da un bugiardo è falsa. Alcuni abitanti sono riuniti in una stanza e tre di loro fanno, una per ciascuno, le seguenti coppie di affermazioni: 1: "*Non ci sono più di tre persone in questa stanza*"; "*Tutti noi mentiamo*". 2: "*Non ci sono più di quattro persone in questa stanza*" ; "*Non siamo tutti bugiardi*". 3: "*Ci sono cinque persone in questa stanza*" ; "*Tre di noi sono bugiardi*". Quante persone ci sono nella stanza e quanti bugiardi ci sono tra di loro? [4 persone, 2 bugiardi]
8. (A1998) Pete sceglie due numeri naturali consecutivi e li scrive su due distinti fogli, che da uno ad Andrew e l'altro a Tom. Per cercare di indovinare l'uno il numero dell'altro fanno le seguenti dichiarazioni, per 10 volte di fila. Andrew: "*Non so che numero hai*". Tom: "*Neanch'io so che numero hai*"- L'undicesima volta Andrew dice: "*Adesso so che numero hai*". Quale numero ha Tom? [12]

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato all'AHSME del 1978.
Su un foglio sono scritte soltanto le quattro frasi seguenti:
A) *Esattamente* 1 *delle frasi scritte su questo foglio è falsa*.
B) *Esattamente* 2 *delle frasi scritte su questo foglio sono false*.
C) *Esattamente* 3 *delle frasi scritte su questo foglio sono false*.
D) *Esattamente* 4 *delle frasi scritte su questo foglio sono false*.
Tenuto conto che ciascuna delle frasi può essere sia falsa sia vera, quante di esse sono false?
È facile capire che la A) è certamente falsa, perché allora dovrebbero essere vere tutte le altre e quindi le frasi false dovrebbero essere esattamente 1 ma anche più di una, il che non è possibile. Ragionando allo stesso modo si capisce che anche le frasi B) e D) sono false. L'unica vera è perciò la C), in questo caso infatti è l'unica affermazione vera e le altre tre sono false.

9. (A1998) 4 ragazze partecipano ad una gara. Alla fine fanno le seguenti dichiarazioni: Anna: "*Non sono arrivata né prima e né ultima*"; Bella: "*Non sono arrivata prima*"; Cecilia: "*Sono arrivata prima*"; Dory: "*Sono arrivata ultima*". Se solo una delle 4 ha mentito, chi è arrivata prima? [Dory]
10. (OMI 2010) Un celebre investigatore sta cercando il colpevole di un omicidio tra cinque sospettati: Anna, Bruno, Cecilia, Dario ed Enrico. Egli sa che il colpevole mente sempre e gli altri dicono sempre la verità. Anna afferma: "*Il colpevole è un maschio*!". Cecilia dice: "*è stata Anna oppure è stato Enrico*". Infine Enrico dice: "*Se Bruno è colpevole allora Anna è innocente*". Chi ha commesso l'omicidio? [Anna]
11. Quali delle tre affermazioni seguenti sono vere e quali false? 1. Ci sono tre affermazioni numerate. 2. Due delle affermazioni numerate non sono vere. 3. Questa affermazione è vera. [2, la 1 e la 3]

Questions in English

Working together

The following question was posed at AHSME in 1999. *A sealed envelope contains a card with a single digit*[1] *on it. Three of the following statements are true, and the other is false*. I. *The digit is* 1; II. *The digit is not* 2; III. *The digit is* 3; IV. *The digit is not* 4. *Which one of the following must necessarily be correct*?
A) I *is true* B) I *is false* C) II *is true* D) III *is true* E) IV *is false*
The correct answer is C). In fact, since both I and III cannot be false, the digit must be 1 or 3. So either I orv III is the false statement. Thus II and IV must be true and C) is necessarily correct. For the same reason, E) must be incorrect. If the digit is 1, B) and D) are incorrect, and if the digit is 3, A) is incorrect, too.

[1] cifra

12. (AHSME1989) Let a, b, c and d be positive integers with $a < 2b$, $b < 3c$, and $c < 4d$. If $d < 100$, the largest possible value for a is A) 2367 B) 2375 C) 2391 D) 2399 E) 2400 [A]
13. (A1998) Three fortune–tellers[2], who look identical, sit in a raw answering questions: Truth (who always says the truth), Lie (who never says the truth), and Wise (who sometimes tells the truth, but other times he lies). A philosopher arrived to decide who is who in the group. He asked the person sitting on the left hand side: "*Who is sitting next to you*?" The answer was: "*Truth*." Then he asked the person sitting in the middle: "*Who are you*?" The answer was: "*Wise*." Finally, he asked the person sitting on the right: "*Who is sitting next to you*?" The answer was: "*Lie*." So, who is sitting where? [Wise, Lie, Truth]
14. (A2000) You visit an island where the inhabitants are divided into two groups, those that always tell the truth and those that always lie. You meet three people: Tom, Dick and Harry. Tom says "*All three of us are liars*". Dick says "*Not so, only two of us are liars*". Harry says "*Not so, the other two are lying*". Which, if any, of these three people is telling the truth? [Only Dick is telling the truth]
15. (A2003) Of the following statements, the one that is false is: A) The product of two integers is an integer; B) The sum of two natural numbers is a natural number; C) The product of two irrational numbers is an irrational number; D) The difference of two rational numbers is a rational number; E) None of these. [C]
16. (A2004) By using the answers to the following questions, Patrick determines Sam's secret whole number. "*Is it a factor of* 30?", "*Yes*"; "*Is it a prime number*?", "*No*"; "*Is it a multiple of* 3?", "No"; "*Is it less than* 3?", "No". What is Sam's secret number? [10]
17. (A2006) Exactly one of the statements A, B, C is true and the other two are false. Also, suppose that exactly one of the following statements a,b,c,d,e below is true. Which is it? a) B is true, b) A is false and B is true, c) C is false and A is true, d) C is true, and e) B is false and A is true. [d]
18. (AHSME1965) Given the true statement: *The picnic on Sunday will not be held only if the weather is not fair*. We can then conclude that: A) *If the picnic is held, Sunday's weather is undoubtedly fair* B) *If the picnic is not held, Sunday's weather is possibly unfair* C) *If it is not fair Sunday, the picnic will not be held* D) *If it is fair Sunday, the picnic may be held* E) *If it is fair Sunday, the picnic must be held*. [E]
19. (AHSME1974) Which of the following is equivalent to *If P is true, then Q is false*? A) *P is true or Q is false* B) *If Q is false then P is true* C) *If P is false then Q is true* D) *If Q is true then P is false* E) *If Q is true then P is true* [D]
20. (AHSME1998) Three cards, each with a positive integer written on it, are lying face-down on a table. Casey, Stacy, and Tracy are told that A) the numbers are all different; B) they sum to 13, and C) they are in increasing order, left to right. First, Casey looks at the number on the leftmost card and says "*I don't have enough information to determine the other two numbers*". Then Tracy looks at the number on the rightmost card and says "*I don't have enough information to determine the other two numbers*". Finally, Stacy looks at the number on the middle card and says "*I don't have enough information to determine the other two numbers*". Assume that each person knows that the other two reason perfectly and hears their comments. What number is on the middle card? [4; possible triples are (1, 4, 8) or (2, 4, 7)]
21. (AHSME2000) If all alligators are ferocious creatures and some creepy crawlers[3] are alligators, which statement(s) must be true? I. All alligators are creepy crawlers. II. Some ferocious creatures are creepy crawlers. III. Some alligators are not creepy crawlers. [B]
A) I only B) II only C) III only D) II and III only E) None must be true

[2] chiromanti
[3] bestia che fa paura

Attività di recupero

Proposizioni logiche e connettivi

Fase 1: Osserva

- Consideriamo la seguente proposizione *La squadra italiana di calcio è la migliore del mondo*. Questa non è una proposizione logica, perché stiamo esprimendo un nostro parere personale. Le proposizioni logiche invece sono frasi vere o false per tutti.
- Invece l'enunciato *La squadra italiana di calcio ha vinto i campionati del mondo del* 2006, è un fatto assodato e vero per tutti, per chi tifa Italia e per chi tifa Brasile o un'altra squadra; per chi capisce di calcio e chi non se ne intende.
- Allo stesso modo la proposizione *La squadra italiana di calcio non ha vinto i campionati del mondo del* 2006 è un enunciato logico falso. Del resto non potrebbe essere vero, dato che era vero il primo enunciato.
- La proposizione logica *L'Italia confina con la Svizzera e il Giappone* è falsa perché l'Italia confina con la Svizzera ma non con il Giappone.
- Se avessimo scritto invece *L'Italia confina con la Svizzera o con il Giappone*, questa sarebbe stata una proposizione logica vera, perché una delle due proposizioni è vera.
- Analogamente sarebbe stata vera la proposizione *L'Italia confina o con la Svizzera o con il Giappone*, in cui stavolta la congiunzione *o* ha un significato esclusivo, se è vera un'affermazione deve essere falsa l'altra. Ciò significa che l'affermazione *L'Italia confina con la Svizzera o con la Francia*, in cui *o* è usato in senso inclusivo è vera, mentre la proposizione *L'Italia confina o con la Svizzera o con la Francia*, in cui il significato di *o* è esclusivo, risulta falsa perché l'Italia confina con entrambe le nazioni.
- L'enunciato *Tutti gli stati europei sono bagnati dal mare* è un enunciato universale falso, poiché ci sono paesi europei come la Repubblica Ceca che non ha sbocchi sul mare. Poiché però ci sono paesi europei come l'Italia che si affacciano sul mare, l'enunciato seguente, che è particolare, è vero *Alcuni stati europei sono bagnati dal mare*.

Fase 2: Completa …

1. L'enunciato *Il sole è un pianeta* …. un enunciato logico perché è un'affermazione ……
2. L'enunciato *L'aria è formata solo da Ossigeno* è un'affermazione ……, quindi la possiamo considerare un enunciato …….
3. L'enunciato *La velocità del suono nell'aria è di circa* 340 *metri al secondo* è un enunciato ……. perché è un'affermazione ……..
4. Consideriamo i seguenti due enunciati logici: *Luciano Ligabue è un cantante emiliano* e *Vasco Rossi è un cantante emiliano*. I rispettivi valori di verità dei precedenti enunciati sono …… e ……. Quindi gli enunciati composti mediante i connettivi *e, o* (vel), *o* (aut), *se allora* e *solo se*, sono: a) *Sia Luciano Ligabue che Vasco Rossi sono cantanti emiliani*; b) *Luciano Ligabue o Vasco Rossi* ……..; c) *… Luciano Ligabue … Vasco Rossi, ma non …….. sono cantanti emiliani*; d) *Se ……. allora ……..*; e) *Solo se* ……
5. Nel precedente quesito possiamo dire che le funzioni vere sono quelle contrassegnate dalle lettere ……, le altre sono false. Ciò è dovuto alle seguenti ragioni:
   Per la a) …….
   Per la b) …….
   Per la c) …….
   Per la d) …….
   Per la e) …….
6. Consideriamo gli enunciati *x è un numero pari*, *y è un numero dispari*. Mediante essi possiamo costruire gli enunciati universali seguenti: a) *Tutti i numeri sono pari*; b) …… *i numeri* ……. Che sono entram-

bi[4] …… Possiamo anche costruire gli enunciati particolari seguenti: c) *Alcuni numeri sono* ……. d) *Qualche* …… ……. Che sono enunciati logici ……. Perché sia vero l'enunciato *x è un numero pari*, al posto di *x* dobbiamo mettere …….. Se *x è un numero pari* è vero allora *x è un numero dispari* è un enunciato sicuramente ……. perché ….....…….

Fase 3: Prova!

Stabilire quali delle seguenti proposizioni possono considerarsi enunciati logici; per gli enunciati logici stabilire il valore di verità

1. Tutti i poligoni regolari hanno i lati e gli angoli di uguale misura [V]
2. Alcuni numeri interi le cui cifre sono tutte dispari sono numeri pari [F]
3. Tutti i numeri interi le cui cifre sono tutte pari sono numeri pari [V]
4. Solo i migliori numeri interi sono pari [No E.L.]
5. Il 200 a.C. ha preceduto il 100 a.C. [V]
6. Alcuni numeri interi innalzati al quadrato sono negativi [F]
7. Alcuni numeri interi innalzati al quadrato non sono positivi [V]
8. Tutti i laureati in matematica sono insegnanti [F]
9. Alcuni laureati in matematica sono insegnanti di fisica [V]
10. L'Informatica è una materia affascinante [No E.L.]
11. Gli Stati Uniti d'America sono una confederazione di più di 50 stati [V]
12. La capitale d'Italia è sempre stata Roma dal 1870 in poi [F]
13. Archimede Pitagorico è stato un famoso scienziato vissuto a Siracusa prima di Cristo [F]
14. L'Olanda è il paese più libero del mondo [No E.L.]
15. Un triangolo con due angoli ottusi non esiste [V]

Comporre le seguenti coppie di enunciati logici mediante i cinque operatori presentati e stabilirne il relativo valore di verità **($\wedge$, $\vee$, $\veebar$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$)**

16. 37 è un numero primo; 37 è un numero le cui cifre sono entrambe dispari [V; V; F; V; V]
17. 31 è un numero primo; 31 è un numero la somma delle cui cifre è dispari [F; V; V; F; F]
18. 123 è un numero primo; 123 è un numero la somma delle cui cifre è pari [F; V; V; V; F]
19. 117 è un numero primo; 117 al quadrato ha più di 6 cifre [F; F; F; V; V]
20. L'Italia prima del 2006 aveva vinto 4 campionati del mondo di calcio; Il Brasile prima del 2006 aveva vinto 4 campionati del mondo di calcio [F; V; V; V; F]
21. Istanbul si trova in Iraq; Teheran si trova in Iran [F; V; V; V; F]
22. Le piramidi egizie sono state costruite più di 3000 anni fa; il Colosseo è stato costruito più di 2000 anni fa [V; V; F; V; V]
23. Facebook è un libro che contiene fotografie; Google è un software del tipo motore di ricerca [F; V; V; V; F]
24. Internet è una squadra di calcio di serie A; l'Atalanta è una squadra di calcio della città di Arezzo [F; F; F; V; V]
25. 1 miglio inglese è più lungo di 1 Kilometro; 1 libbra è meno di 1 Kg [V; V; F; V; V]
26. Un lettore mp3 serve a leggere 3 libri alla volta; un lettore DVD serve a leggere Due Volte Due [F; F; F; V; V]
27. Enrico Fermi ha vinto il Premio Nobel per la fisica; Guglielmo Marconi ha vinto il Premio Nobel per la fisica [V; V; F; V; V]
28. Alcuni felini sono gatti; Tutti i leoni sono felini [V; V; F; V; V]
29. Alcuni ciclisti italiani hanno vinto le Olimpiadi; Tutti i ciclisti che hanno vinto le Olimpiadi sono italiani [F; V; V; F; F]
30. Alcuni pugili sono della categoria massimi; Alcuni pugili hanno vinto le Olimpiadi [V; V; F; V; V]

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito

http://mathinterattiva.altervista.org/volume_1_1.htm

[4] Devi scrivere veri o falsi

1. Le basi del ragionamento

1.2 Insiemi numerici fondamentali

Prerequisiti
- Nozioni elementari di aritmetica
- Nozioni elementari di geometria
- Enunciato logico
- Nozione di raggruppamento di oggetti in base a una loro caratteristica o prerogativa

Obiettivi
- Riconoscere l'opportunità di raggruppare sotto un unico nome oggetti che hanno qualcosa che li accomuna

Contenuti
- Concetto di insieme
- L'insieme dei numeri naturali
- L'insieme dei numeri interi relativi
- Divisibilità e fattorizzazione nell'insieme dei numeri interi
- L'insieme dei numeri razionali relativi
- Operazioni con le frazioni

Parole Chiave
Appartiene – Divisibile – Divisore – Insieme vuoto – Massimo comune divisore – Minimo comune multiplo – Multiplo – Numero primo – Proprietà caratteristica

Simbologia

$\in$	Indica l'appartenenza di un elemento a un insieme
$\notin$	Indica la non appartenenza di un elemento a un insieme
{ }	Racchiude gli elementi di un insieme separati da virgole
$\varnothing$	Indica l'insieme vuoto, ossia un insieme senza elementi
$\mathbb{N}$	Indica l'insieme dei numeri naturali {1, 2, 3, …}
$\mathbb{Z}$	Indica l'insieme dei numeri interi relativi {…, – 2, –1, 0, 1, 2, 3, …}
$\mathbb{Q}$	Indica l'insieme dei numeri razionali relativi, cioè di tutte le frazioni di numeri interi
%	Indica la percentuale
MCD	Indica il massimo comune divisore di due o più numeri interi
mcm	Indica il minimo comune multiplo di due o più numeri interi

Concetto di insieme

Nel linguaggio quotidiano si usano spesso dei vocaboli che hanno lo scopo di riferirsi a intere classi di oggetti o di persone. Parliamo così di studenti, cittadini, siciliani, maschi, calciatori, mele, alberi e così via. Questi sono nomi collettivi, ossia si riferiscono non a un solo elemento ma a in generali a più di uno, che però sono accomunati da qualcosa. Ciò ha ovvi vantaggi. Per esempio dicendo che non si può conseguire la patente automobilistica se non si sono compiuti i 18 anni, evitiamo di dovere precisare che essa si applica anche per Federico e Michela, per esempio, che hanno 15 e 17 anni, dato che è valida per tutti quelli che hanno meno di 18 anni. Addirittura per semplificare ulteriormente chiamiamo *maggiorenni* tutti coloro che hanno 18 anni o più, e poi enunciamo la regola nel seguente modo più sintetico: *Per conseguire la patente automobilistica è necessario essere maggiorenni*. Come si vede abbiamo effettuato due operazioni. Intanto abbiamo stabilito una proprietà coerente e certa, *avere almeno* 18 *anni*, quindi abbiamo assegnato un nome a tutti coloro che verificano questa proprietà. Per potere ripetere questa procedura in altri casi dobbiamo avere a che fare con proprietà che devono essere enunciati logici, cioè proposizioni coerenti a cui si può assegnare un valore di verità.

Definizione 1

Diciamo **insieme** la totalità degli elementi che verificano una proprietà logica.

Notazione 1

Un insieme si indica con una lettera latina maiuscola seguita da una coppia di parentesi graffe, al cui interno sono elencati tutti i suoi elementi o la proprietà che essi verificano.

Notazione 2

Per indicare che un elemento a fa parte di un insieme A scriviamo $a \in A$, per indicare che non vi appartiene $a \notin A$.

Esempio 1

- Possiamo parlare dell'insieme A = {i numeri interi che hanno fra le loro cifre il 7} che contiene per esempio i numeri 74, 107 e 2377401 ma non contiene il numero 21 né il numero 1,7.
- Non possiamo parlare dell'insieme dei numeri belli, perché questa proprietà non è logica, dato che è un'opinione personale, supposto che qualcuno possa considerare bello un numero.
- Possiamo parlare dell'insieme B = {Aldo, Andrea, Bice, Carlo} delle 4 persone di cui abbiamo indicato i nomi.
- L'insieme dei premi Nobel italiani della fisica fino al 2015 lo possiamo indicare per esempio con C = {Guglielmo Marconi, Enrico Fermi, Emilio Segrè, Carlo Rubbia, Riccardo Giacconi}.
- Può sembrare strano ma possiamo anche parlare dei numeri pari non divisibili per 2. Infatti la proprietà è un enunciato logico, anche se non è verificata da alcun numero. Analogamente non vi sono elementi nell'insieme degli esseri umani più alti di 3 metri.

In vista di quello detto alla fine dell'esempio possiamo porre la seguente definizione.

Definizione 2

Un insieme la cui proprietà non è verificata da alcun elemento si chiama **insieme vuoto**.

Notazione 3

L'insieme vuoto si indica con $\varnothing$ oppure con {}.

Esempio 2

Considerando l'insieme C dei premi Nobel italiani della fisica fino al 2015, possiamo scrivere Guglielmo Marconi $\in C$ e Albert Einstein $\notin C$.

Una delle prime cose che si impara da bambini è il contare, cioè associare dei nomi a delle quantità. Ciò non è semplice come potrebbe pensarsi, poiché il riconoscere che due mele e due gatti hanno in comune il fatto

che le mele sono *tante quante* i gatti, non è facile come potrebbe sembrare. È probabile che siano passate migliaia di anni prima che l'essere umano primitivo si sia reso conto di ciò e abbia così cominciato a contare. Si capisce però che la questione era molto importante, poiché per esempio il pastore doveva essere in grado di capire se le pecore che erano uscite a pascolare erano tante quante quelle che erano ritornate.
Visto che il contare è considerato quindi una necessità, che oramai è insita in ciascuno di noi, che probabilmente abbiamo ereditata dai nostri antichi progenitori, chiameremo **numeri naturali** quelli che servono appunto a contare e che indichiamo con i simboli 1, 2, 3, 4, ... e che chiamiamo *uno*, *due*, *tre*, *quattro* e così via. Non abbiamo considerato lo 0 un numero naturale, dato che in genere non si ha la necessità di contare il nulla. Comunque alcuni considerano anche lo 0 come numero naturale, senza che ciò rappresenti un grave problema.

Notazione 4

Indichiamo l'*insieme dei numeri naturali* con $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \ldots\}$.

Come si vede non abbiamo scritto tutti i numeri naturali, poiché sono infiniti, ma abbiamo usato dei puntini di sospensione come si fa nella grammatica italiana quando si deve indicare che una frase rimane in sospeso. Nel nostro caso significa appunto che gli elementi dell'insieme non hanno fine e che proseguono utilizzando la stessa regola che ha portato alla costruzione degli elementi precedenti. Abbiamo separato i numeri con ; piuttosto che con la virgola, per evitare incomprensioni, perché quando considereremo i numeri decimali indicheremo i singoli numeri con la virgola.
Non sempre è facile capire quale regola applicare per generare gli elementi di un insieme infinito o comunque con molti elementi.

Esempio 3

- L'insieme A dei numeri interi di 5 cifre contiene tutti i numeri da 10000 a 99999, che sono ben 90000, invece che scriverli tutti possiamo scriverne solo alcuni, i primi due, tre e gli ultimi due o tre, separando i gruppi con dei puntini di sospensione e facendo capire qual è la regola che verificano tutti. Cioè $A = \{10000; 10001; 10002; \ldots; 99998; 99999\}$.
- Ovviamente se scrivessi $B = \{2; 4; 6; \ldots; 24; 26\}$ lo leggerei come l'insieme dei numeri pari compresi tra 2 e 26. Quindi se per caso ciò non fosse vero, nel senso che per esempio a B non appartiene 14 o appartiene 17 dovrei scrivere tutti i suoi elementi, oppure dovrei dire la proprietà che essi verificano.
- Nel caso dell'insieme dei numeri interi relativi i puntini di sospensione li dobbiamo mettere anche all'inizio: $\{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$
- L'insieme $\{3; 5; 7; \ldots; 31\}$, si riferisce ai numeri dispari da 3 a 31 o ai numeri primi da 3 a 31? Nel primo caso l'insieme completo sarebbe $\{3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19; 21; 23; 25; 27; 29; 31\}$, nel secondo $\{3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31\}$. Quindi nel primo caso potremmo scrivere $\{3; 5; 7; 9; \ldots; 31\}$e nel secondo $\{3; 5; 7; 11; \ldots; 31\}$

L'angolo storico

Il termine *insieme vuoto* si trova per la prima volta in matematica in un articolo del 1906 di *W.H.* Young e *G.C.* Young. Il simbolo è invece dovuto ufficialmente a uno dei maggiori matematici del XX secolo: André Weil, il quale dice che gli fu suggerito da una lettera dell'alfabeto norvegese.

Verifiche

Lavoriamo insieme

L'insieme dei numeri simpatici compresi tra 123 e 340 non esiste perché la proprietà che lo definisce non è una proposizione logica. Se però definiamo *simpatici* quei numeri interi che hanno la proprietà di avere almeno una cifra uguale a 2, allora possiamo dire che l'insieme cercato è
{123; 124; …; 129; 132; 142; 152; …; 192; 200; 201; …; 299; 302; 312; 320; 321; …; 329; 332} Come si vede abbiamo usato più volte i puntini di sospensione perché gli elementi sono parecchi e quindi abbiamo cercato di scrivere solo quelli sufficienti a farci capire come si trovano gli altri che non abbiamo riportato.

Rappresentare mediante elenco gli insiemi i cui elementi sono quelli di seguito descritti

Livello 1

1. I numeri interi positivi minori di 41 [{1; 2; …; 40}]
2. I numeri interi che hanno la prima cifra uguale a 0 [{0}]
3. I numeri interi compresi tra 15 e 32 che hanno solo cifre dispari [{17; 19; 31}]
4. I numeri interi pari che hanno la cifra delle unità uguale a 3 [∅]
5. Le città italiane con più di un milione di abitanti [{Roma, Napoli, Milano, Torino}]
6. I vulcani italiani attivi;I fiumi italiani più lunghi di 1000 Km [{Etna, Stromboli, Vulcano}; ∅]
7. Gli italiani che hanno vinto più di un Oscar, come regista, fino al 2015 [{De Sica, Fellini}]
8. I premi Nobel italiani per la chimica, fino al 2015 [{Natta}]
9. I numeri naturali di 4 cifre che contengono la sequenza 111 [{1110; 1112; …; 1119; 2111; 3111; …;9111}]
10. I numeri naturali di due cifre fra di loro uguali [{11; 22; 33; …; 99}]
11. I numeri naturali di 2 cifre entrambe dispari [{11; 13; …; 19; 31; 33; …; 39; …; 91; 93; …; 99}]
12. I numeri naturali di due cifre la cui somma è 6 [{15; 24; 33; 42; 51; 60}]
13. I possibili punteggi ottenibili lanciando due dadi regolari a forma di cubo [{2; 3; 4; …; 12}]
14. I numeri naturali di due cifre, una pari e l'altra dispari (si consideri 0 una cifra pari) [{10; 12; …; 18; 21; 23; …; 29; …; 90; 92; …; 98}]

Livello 2

15. I numeri naturali compresi tra 125 e 278 in cui la somma delle cifre è 3 o 4 [{130; 201; 202; 210; 211; 220}]
16. I numeri naturali compresi tra 514 e 758, in cui la somma delle cifre è 4 oppure 7 [{520; 601; 610; 700}]
17. I numeri naturali compresi tra 1012 e 1057, in cui la somma delle cifre è minore di 3 o maggiore di 8 [{1017; 1018; 1019; 1026; 1027; 1028; 1029; 1035; 1036; 1037; 1038; 1039; 1044; 1045; 1046; 1047; 1048; 1049; 1053; 1054; 1055; 1056; 1057}]
18. I numeri naturali compresi tra 245 e 301, in cui il prodotto delle cifre è 4 [∅]
19. I numeri naturali compresi tra 512 e 687, in cui il prodotto delle cifre è compreso tra 5 e 9 [{611}]
20. I numeri naturali compresi tra 247 e 369, le cui cifre hanno somma maggiore di 5 e prodotto minore di 8 [{250; 260; 270; 280; 290; 303; 304; 305; 306; 307; 308; 309; 312; 321; 330; 340; 350; 360}]
21. I numeri naturali compresi tra 247 e 369, le cui cifre hanno somma minore di 5 e prodotto maggiore di 8 [∅]

Livello 3

22. I numeri naturali compresi tra 123 e 234, in cui la somma delle cifre è compresa tra 7 e 9 o (vel) il prodotto è compreso tra 8 e 12 [{124; 125; 126; 133; 134; 135; 142; 143; 144; 151; 152; 153; 160; 161; 162; 170; 171; 180; 181; 191; 205; 206; 207; 214; 215; 216; 222; 223; 224; 225; 232; 233; 234}]
23. I numeri naturali compresi tra 123 e 234, in cui la somma delle cifre è compresa tra 7 e 9 o (aut) il prodotto è compreso tra 8 e 12 [{135; 144; 151; 153; 160; 161; 170; 171; 180; 181; 191; 205; 206; 207; 222; 224; 225; 233; 234}]
24. I numeri naturali compresi tra 123 e 234, in cui la somma delle cifre è compresa tra 7 e 9 e il prodotto è compreso tra 8 e 12 [{124; 125; 126; 133; 134; 142; 143; 152; 162; 214; 215; 216; 223; 232}]

Lavoriamo insieme

L'insieme degli esseri umani viventi nati prima del 1500 è definito da una proprietà coerente, ma non ha elementi, quindi è l'insieme vuoto.

Stabilire quali delle seguenti proprietà definiscono insiemi vuoti

Livello 2

25. Attori che hanno vinto venti premi Oscar; Attrici mitiche [Sì; Non è un insieme]
26. Vincitori delle Olimpiadi del 1940; Cantanti di belle canzoni [Sì; Non è un insieme]
27. Calciatori non nati in Italia che hanno giocato per l'Italia; Svedesi di nome Mustafa [No; No]
28. Città belghe con più di 5 milioni di abitanti; Fiumi italiani lunghi più di 2000 Km [Sì; Sì]
29. Vulcani europei attivi alti più di 3000 *m*; Vulcani attivi presenti in Lombardia [No; Sì]
30. Quadrati perfetti che hanno 3 come cifra delle unità; Numeri primi compresi tra 24 e 28 [Sì; Sì]
31. Rettangoli con le diagonali di diversa misura; Rombi con le diagonali uguali [Sì; No]
32. Poligoni con tanti lati; Quadrilateri convessi con due angoli ottusi [Non è un insieme; No]
33. Eventi che hanno probabilità 150% di succedere; Eventi che hanno probabilità zero [Sì; No]
34. Numeri interi pari e multipli di 3; Numeri interi dispari e multipli di 4 [No; Sì]
35. Numeri interi multipli di 6 ma non di 18; Numeri interi multipli di 18 ma non di 6 [No; Sì]

L'insieme dei numeri naturali

L'insieme dei numeri naturali è ordinato, nel senso che numeri che vengono scritti dopo indicano insiemi più numerosi. In effetti vale il seguente principio intuitivo

Assioma di Kuratowski
Scelti due numeri naturali a caso, che indichiamo con m e n, possono accadere solo i tre fatti seguenti:
1. m e n occupano la stessa posizione, quindi sono uguali e scriviamo $m = n$.
2. il numero m è scritto prima del numero n, diciamo che m è minore di n e scriviamo $m < n$.
3. il numero m è scritto dopo del numero n, diciamo che m è maggiore di n e scriviamo $m > n$.

Il discorso che stiamo facendo può sembrare pedante, ma non lo è. Infatti se può sembrare inutile dire che 17 è minore di 32 e maggiore di 12 o addirittura che è uguale a 17; se, come spesso accade, lavoriamo non con numeri fissati, ma con numeri qualsiasi, che perciò indichiamo con simboli la questione appare più delicata. Così alcune volte siamo interessati a stabilire se un numero è non maggiore o non minore di un altro.

Esempio 4
Che significato hanno i seguenti segnali stradali?



Sono tutti dei divieti, ossia delle limitazioni, che impongono che, rispettivamente, un peso, due lunghezze e una velocità non superino i valori indicati. Ovviamente ci riferiamo a dati della vita reale, non del mondo matematico; pertanto la strada su cui si dovrà passare deve essere in grado di sostenere pesi superiori ai 6,5 tonnellate, sarà più ampia di 2,30 metri e più alta di 3,50 metri, e anche la velocità misurata con un'apposita strumentazione ha una soglia di tolleranza, quindi chi andrà a 50,1 Km/h non riceverà una multa. In ogni caso però sono indicatori che matematicamente devono essere letti come *peso non superiore a* 6,5 *tonnellate*, *larghezza non superiore a* 2,30 *m, altezza non superiore a* 3,50 *m, velocità non superiore a* 50 *km/h*.

Definizione 3
- Diremo che un numero naturale m è **maggiore o uguale** di un numero naturale n se i due sono lo stesso numero, oppure se m è maggiore di n.
- Diremo che un numero naturale m è **minore o uguale** di un numero naturale n se i due sono lo stesso numero, oppure se m è minore di n.

Notazione 5
- Per dire che m è maggiore o uguale a n scriveremo $m \geq n$.
- Per dire che m è minore o uguale a n scriveremo $m \leq n$.

Una volta che abbiamo gli elementi dobbiamo poterli combinare fra loro per ottenerne altri, come abbiamo già visto con gli enunciati logici che abbiamo composto con i connettivi.

Definizione 4
Diciamo **operazione binaria interna ad un insieme** una legge coerente che permette di associare a due elementi di un insieme al massimo un elemento dello stesso insieme.

Poiché i numeri naturali nascono dall'esigenza di contare, l'operazione più comune è quella di *continuare a contare*, che appunto permette di passare da un numero più piccolo, che viene prima, a uno più grande, che viene dopo. Cioè se abbiamo i numeri 6 e 10 per esempio, dopo avere raggiunto il 6, continuiamo a contare altri 10 numeri e vediamo dove siamo arrivati.

Definizione 5

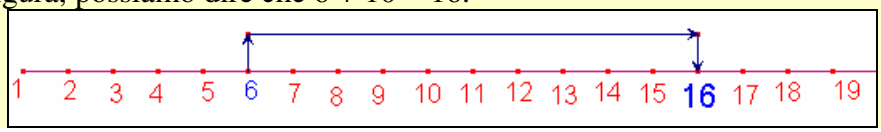
Diciamo **addizione** di due numeri naturali *m* e *n*, il numero naturale *s* che si ottiene contando altri *n* numeri naturali successivi al numero *m*. Entrambi i numeri *m* e *n* si chiamano **addendi**, il numero risultato *s* si dice loro **somma**.

Notazione 6

L'addizione di *m* e *n* si indica con il simbolo $m + n$.

Esempio 5

Come mostrato in figura, possiamo dire che $6 + 10 = 16$.



Che cosa significa?

Addendo. I vocaboli che in italiano finiscono con *ando*, *endo* derivano dal cosiddetto *gerundivo latino* che indica una cosa che deve farsi. Così per esempio il laureando è colui che si deve laureare, l'operando colui che deve essere operato e così via. Quindi l'addendo è *ciò che deve essere aggiunto.*

Cominciamo a chiederci come funziona questa operazione. Comunque scegliamo un numero naturale e comunque gliene aggiungiamo un altro, il risultato, la somma, sarà sempre un numero naturale? Possiamo certamente rispondere di sì, dato che aggiungere significa solo spostarsi in avanti, senza *uscire* dai numeri naturali.

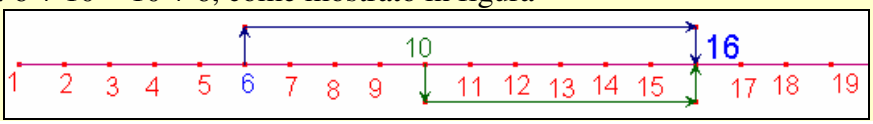
Definizione 6

Un'operazione in cui il risultato appartiene allo stesso insieme degli operandi si dice **interna** in quell'insieme.

Quindi l'addizione è interna nell'insieme dei numeri naturali.Un altro quesito è: possiamo dire che $6 + 10$ e $10 + 6$ hanno la stessa somma? Cioè che $6 + 10 = 10 + 6$ è un enunciato logico vero? Ma soprattutto possiamo dirlo solo per 6 e 10 oppure per altre coppie di numeri, o, ancora meglio, per *qualsiasi* coppia di numeri?

Esempio 6

Effettivamente si ha: $6 + 10 = 10 + 6$, come mostrato in figura



In effetti non è difficile capire che non importa con quale numero iniziamo a contare, ma quanti numeri contiamo complessivamente. Quindi possiamo affermare che è vero il seguente risultato.

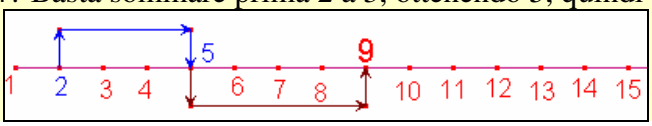
Teorema 1 (Legge commutativa della somma).

La somma di due numeri naturali non dipende dall'ordine in cui si presentano gli addendi. In simboli: $m + n = n + m$, qualunque numero naturale rappresenti ciascun simbolo.

Un'altra cosa che ci dobbiamo chiedere è: la somma è un'operazione binaria, cioè interviene fra due numeri, come ci si comporta allora se sommiamo più di due numeri?

Esempio 7

Qual è il risultato di $2 + 3 + 4$? Basta sommare prima 2 a 3, ottenendo 5, quindi sommare questo numero a 4.

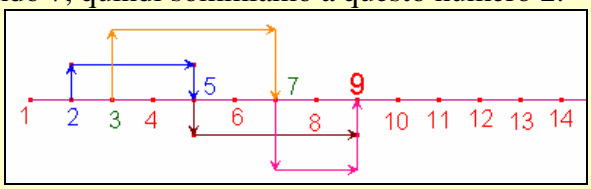


In pratica abbiamo contato complessivamente 2, 3 e 4 volte. Quindi non è difficile capire che avremmo po-

tuto anche contare in modo diverso.

Esempio 8

Sommiamo prima 3 e 4, ottenendo 7, quindi sommiamo a questo numero 2.



Ovviamente il risultato è ancora 9, perché abbiamo contato sempre 2, 3 e 4 unità, anche se in modo diverso dal precedente.

Il risultato precedente vale comunque si scelgono tre numeri naturali, come attestato dal seguente teorema.

Teorema 2 (Legge associativa della somma)

La somma di tre numeri naturali non dipende dalla scelta di quali addendi sommare per primi. In simboli: $(m + n) + p = m + (n + p)$, qualunque numero naturale rappresenti ciascun simbolo.

Che cosa significa?

Associativo. Deriva chiaramente dal verbo associare, mettere insieme. Fu usato per la prima volta solo nel 1844 da William Rowan Hamilton, un famoso algebrista inglese del XIX secolo.
Commutativo. È un aggettivazione del verbo commutare che vuol dire *scambiare*. Fu usato per la prima volta dal matematico francese François Joseph Servois in un articolo pubblicato nel 1814.

Alcune somme possono semplificarsi, definendo una nuova operazione.

Esempio 9

La somma $4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$, è ottenuta sommando 5 volte lo stesso addendo 4.

Definiamo allora una nuova operazione che semplifica le somme in cui gli addendi sono tutti uguali fra loro.

Definizione 7

Diciamo **moltiplicazione** del numero naturale m per il numero naturale n, il numero naturale p, che si ottiene addizionando n addendi tutti uguali a m. m e n si chiamano **fattori**, p si chiama **prodotto.**

Notazione 7

La moltiplicazione di m per n si indica con il simbolo $m \times n$, oppure con $m \cdot n$

Che cosa significa?

Moltiplicazione. Essenzialmente significa *ottenere molto*, e in effetti se i fattori sono numeri naturali il loro prodotto è sempre superiore ai singoli fattori.

Esempio 10

Quindi la somma vista nel precedente esempio, $4 + 4 + 4 + 4 + 4$, si può scrivere $4 \cdot 5$, oppure 4×5.

Ovviamente essendo la moltiplicazione una particolare somma verifica analoghe proprietà.

Teorema 3

La moltiplicazione è interna nei naturali e gode delle proprietà commutativa e associativa.

L'insieme dei numeri interi relativi

Possiamo costruire nuove operazioni a partire da quelle note.

Esempio 11

Se sappiamo che 5 sommato a un altro numero fornisce come risultato 12, qual è questo numero? Ossia, quanti numeri dobbiamo contare, a partire da 5, per arrivare a 12? Non è difficile trovare che ne dobbiamo contare 7, cioè 5 + 7 = 12.

La precedente, ovviamente è un'operazione diversa dalla somma.

Definizione 8

Diciamo **sottrazione** di due numeri naturali m e n, con $m > n$, il numero naturale d che sommato a n ha per risultato m. Il numero m si chiama **minuendo**, n **sottraendo**, d **differenza**.

Notazione 8

La sottrazione di n da m si indica con il simbolo $m - n$.

Che cosa significa?

Sottraendo. Il suo significato è *che deve essere sottratto*.
Minuendo. Significa che deve essere diminuito.
Differenza. È la quantità che, se diversa da zero, dice di quanto i due numeri differiscono, cioè quale numero misura la loro diversità.

Abbiamo definito la sottrazione fra numeri naturali in modo che il sottraendo sia maggiore del minuendo, ossia in modo che non togliamo più di ciò che abbiamo, ciò per far sì che l'operazione risulti interna nei naturali. Se vogliamo eliminare questa condizione, dobbiamo perciò definire un nuovo insieme di numeri, che contiene i naturali.

Definizione 9

Chiameremo insieme dei numeri **interi negativi** l'insieme {...; –3; –2; –1}, ossia l'insieme formato dai numeri naturali, ciascuno preceduto dal segno – e scritti in ordine inverso.

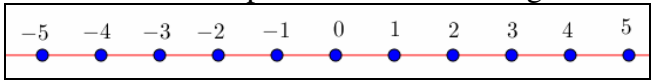
Definizione 10

Chiameremo insieme dei numeri **interi relativi** l'insieme dei numeri interi negativi, di quelli positivi e dello zero, cioè {...; –3; –2; –1; 0; 1; 2; 3; 4; ...}.

Notazione 9

L'insieme dei numeri interi relativi si indica con il simbolo $\mathbb{Z}$, che è l'iniziale della parola tedesca Zahlen, che significa numero, ma anche contare.

Costruire i numeri interi relativi è molto semplice, basta porre lo zero a sinistra del primo numero naturale e poi ricopiare in ordine inverso i numeri naturali premettendo loro il segno meno.



Ovviamente l'insieme dei numeri interi relativi non ha né un elemento più grande di tutti gli altri, come accadeva anche per $\mathbb{N}$, ma neanche un numero più piccolo, mentre 1 è il più piccolo, il primo, dei numeri naturali.

Teorema 4

Nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi, la somma è interna e gode delle proprietà commutativa e associativa. La sottrazione è interna.

Poniamo anche la seguente definizione.

Definizione 11

Il numero naturale n e il numero intero negativo $-n$, si chiamano numeri fra loro **opposti**.

Vale la seguente intuitiva proprietà.

Teorema 5

Nell'insieme $\mathbb{Z}$ la somma di due numeri è zero se e solo se i numeri sono fra loro opposti. Cioè si ha: $x + (-x) = 0$ e se $x + y = 0$, allora $x = -y$ e $y = -x$.

La sottrazione non è commutativa. Infatti se $m \neq n$ allora $(m - n)$ e $(n - m)$ sono numeri fra loro opposti. La sottrazione non è neppure associativa.

Esempio 12

- Si ha $7 - 3 = 4$ 3 $3 - 7 = -4$.
- Abbiamo $4 - (3 - 2) = 4 - 1 = 3$. Invece $(4 - 3) - 2 = 1 - 2 = -1$.

Osserviamo che la sottrazione non è altri che una somma, quindi quando nel seguito parleremo di somma intenderemo in generale l'addizione o la sottrazione.

La moltiplicazione si può definire anche in $\mathbb{Z}$, con le stesse regole se uno dei due fattori è positivo.

Esempio 13

Moltiplicare 7 per – 3 equivale a moltiplicare – 3 per 7, quindi a sommare 7 addendi uguali a – 3, ottenendo ovviamente – 21.

Per completezza dobbiamo definire il prodotto di due numeri interi negativi.

Definizione 12

Il prodotto fra i numeri interi negativi $(-m)$ e $(-n)$ è il numero intero positivo $m \cdot n$.

Esempio 14

Moltiplicare (–3) per (–5) non è sommare *meno* tre unità uguali a (–5), poiché tale espressione non ha significato, ecco perché definiamo la moltiplicazione fra numeri negativi. A questo punto si capisce anche perché la definiamo come numero positivo, proprio per distinguere il risultato dall'operazione diversa, ma significativa, $(-3) \cdot 5$. In effetti vedremo in seguito che vi è un ragione più importante per fare ciò.

Un'altra questione importante si ha quando in una moltiplicazione uno dei due fattori è lo zero.

Esempio 15

Moltiplicare 4 per 0 vuol dire sommare 4 addendi nulli e quindi ovviamente come risultato ha zero. Del resto se sommiamo due o più addendi uguali nessuno dei quali è zero, ovviamente non possiamo ottenere mai zero, quindi se $x \cdot y = 0$, x o y, o anche tutti e due devono essere uguali a zero.

Tenuto conto dell'esempio precedente, enunciamo il seguente risultato.

Teorema 6 (Principio di annullamento del prodotto)

La moltiplicazione fra due numeri interi ha come risultato zero solo se almeno uno dei due fattori è lo zero.

Adesso dobbiamo imparare ad eseguire espressioni in cui contemporaneamente abbiamo moltiplicazione e somma.

Esempio 16

Come possiamo svolgere operazioni del tipo $3 \cdot (4 + 5)$? Possiamo eseguire nel modo seguente: $3 \cdot (4 + 5) = 3 \cdot 9 = 27$; ma anche: $3 \cdot (4 + 5) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 12 + 15 = 27$.

Quanto visto nell'esempio precedente in effetti vale in generale per numeri interi qualsiasi.

Teorema 7 (Legge distributiva del prodotto rispetto alla somma)

Comunque si considerano tre numeri interi relativi si ha:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c; a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

Che cosa significa?

Distributiva. Perché eseguiamo la moltiplicazione *distribuendola* su ciascuno dei due addendi.

Grazie alla legge distributiva possiamo dare significato al prodotto fra due numeri negativi.

Esempio 17

Abbiamo $-3 \cdot 0 = 0$. Ma possiamo anche scrivere $0 = 5 - 5$ (o come qualsiasi altra sottrazione di due numeri uguali). Quindi abbiamo: $(-3) \cdot 0 = -3 \cdot (5 - 5) = -3 \cdot 5 + (-3) \cdot (-5) = -15 + (-3) \cdot (-5)$. Ma allora scriviamo: $-15 + (-3) \cdot (-5) = 0$. Poiché la somma di due numeri è zero solo se i numeri sono opposti, ciò significa che deve essere $(-3) \cdot (-5) = +15$.

Generalizzando l'esempio precedente giustifichiamo la Definizione 6 che afferma appunto che il prodotto di due numeri negativi è un numero positivo.
La proprietà distributiva si rivela molto utile nel calcolo mentale

Esempio 18

- Se volessimo moltiplicare a mente $23 \cdot 14$, applicando la proprietà distributiva penseremmo la moltiplicazione come $23 \cdot (10 + 4)$. Moltiplicare per 10 è molto semplice, basta aggiungere uno zero, 230. Moltiplicare per 4 non è complicatissimo, così senza grossi problemi e senza usare strumenti meccanici abbiamo: $23 \cdot (10 + 4) = 230 + 92 = 322$.
- La proprietà distributiva si applica anche nella consueta moltiplicazione in colonna. Infatti quando eseguiamo $157 \cdot 238$ nel modo seguente

$$\begin{array}{r} 157\times \\ 238 \\ \hline 1256 \\ 471 \\ 314 \\ \hline 37366 \end{array}$$

gli spazi che abbiamo lasciato in realtà possono riempirsi con degli zeri

$$\begin{array}{r} 157\times \\ 238 \\ \hline 1256 \\ 4710 \\ 31400 \\ \hline 37366 \end{array}$$

perché dipendono dal fatto che, applicando la proprietà distributiva abbiamo:

$$157 \cdot 238 = 157 \cdot (200 + 30 + 8) = 157 \cdot 200 + 157 \cdot 30 + 157 \cdot 8.$$

Solo che la moltiplicazione la stiamo eseguendo al "contrario", partendo cioè da 8 e finendo con 200, il che può sempre farsi perché vale la proprietà associativa.

Visto che abbiamo definito come nuova operazione la somma di addendi ripetuti, risulta naturale fare lo stesso con i fattori ripetuti.

Definizione 13

Dati il numero intero m e il numero naturale n, diciamo **elevamento** di **m** alla **potenza** n, il numero che si ottiene moltiplicando m per sé stesso n volte. m lo chiamiamo **base** e n **esponente**.

Notazione 10

L'elevamento di m all'esponente n si scrive m^n e si legge *m alla n-esima* (seconda, terza, …)

Esempio 19

Quindi la moltiplicazione $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ la indichiamo brevemente con 7^4 e lo leggiamo *sette alla quarta*. E poiché $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 49 \cdot 49$, anche con 49^2 (*quarantanove alla seconda* o *al quadrato*). Perciò $7^4 = 49^2 = 2401$.

Tenuto conto delle regole per moltiplicare numeri negativi fra loro risulta evidente il seguente teorema.

Teorema 8

Se m è un numero intero e n un numero naturale, allora m^n è un numero intero

- positivo se m è positivo o se m è negativo e n è un numero pari.
- negativo se m è negativo e n è un numero dispari.

Esempio 20

- Si ha $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$.
- Invece $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16$.

Per la stessa definizione valgono i seguenti risultati.

Teorema 9

Se m è un numero intero, n e p due numeri naturali, allora valgono le seguenti uguaglianze:

$$m^n \cdot m^n = m^{n+p}; \qquad (m^n)^p = m^{n \cdot p}.$$

Esempio 21

- Che significa $2^3 \cdot 2^4$? Moltiplicare 2 per se stesso 3 volte e poi altre 4 volte, cioè moltiplicare 2 per se stesso 7 volte. Ossia $(2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^7$.
- Che vuol dire $(2^3)^4$? Moltiplicare per 4 volte per se stesso il fattore (2^3), quindi $(2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3)$, ossia $(2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^{12}$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

- Utilizzando le nozioni sull'aritmetica nell'insieme dei numeri interi possiamo risolvere diversi problemi. Vediamone uno. Supponiamo che un postino sia entrato per consegnare la posta in un grattacielo, salendo subito al 34° piano, poi sia sceso di 8 piani, salito di 15 piani, ancora salito di 9 piani, sceso di 7 piani, ancora sceso di 13 piani, salito di 11 piani e infine si sia riposato. A che piano si è riposato?
  La soluzione è data dalla seguente espressione: $+ 34 - 8 + 15 + 9 - 7 - 13 + 11 = 69 - 28 = 41$. Cioè il postino si è riposato al 41° piano.
- Dobbiamo stare attenti però al fatto che i dati siano coerenti. Infatti supponiamo che le successive mosse del postino avessero condotto alla seguente espressione risolutrice:
  $$+ 24 - 8 - 18 + 2 + 12 - 10 + 16 = 54 - 36 = 18.$$
  Sembrerebbe che perciò in questo secondo caso il postino si fosse fermato al 18° piano. Non è così perché le operazioni aritmetiche sono binarie, cioè si effettuano per due elementi alla volta. Così abbiamo che la seconda posta la consegna al 16° piano, e la terza al piano $16 - 18 = -2$. Quindi o il postino è sceso in un eventuale sotterraneo o i dati sono incoerenti.

Tradurre in espressioni numeriche i seguenti problemi, quindi risolverli

***Livello* 1**

1. Un antico problema di aritmetica ricreativa. Una lumaca deve raggiungere la cima di un muro alto 7 metri, ma la sua autonomia è di soli 4 metri, che compie in un giorno. Così si ferma a riposarsi la notte, in tal modo però scivola di 3 metri. Quindi riprende il suo cammino ogni giorno salendo di 4 metri e riposandosi, il che comporta lo scivolare di 3 metri. Si chiede in quanti giorni raggiunge la cima.
   [6 giorni]
2. Carletto per gioco sale sull'ascensore del suo palazzo al terzo piano e comincia a premere i tasti a caso. Prima di essere sgridato dalla mamma è salito di 4 piani, sceso di 2, sceso di 1, salito di 5, sceso di 4, salito di 8. A che piano è stato sorpreso dalla mamma? [Decimo]
3. Nella seguente tabella sono riportate le entrate e uscite di una famiglia nei primi sei mesi dell'anno. Sapendo che il saldo finale è di € 849,00, vogliamo sapere qual era il saldo all'inizio di Gennaio.
   [Negativo per €1057,00]

Mese	Entrate	Uscite
Gennaio	€ 1245,00	€ 848,00
Febbraio	€ 2078,00	€ 1574,00
Marzo	€ 1745,00	€ 2074,00
Aprile	€ 1625,00	€ 985,00
Maggio	€ 1582,00	€ 1354,00
Giugno	€ 1490,00	€ 1024,00

4. Nella seguente tabella sono riportate le entrate e uscite di una famiglia nei primi sei mesi dell'anno. Sapendo che il saldo finale è di € 1058,00 e quello iniziale era di € 856,00, stabilire il valore delle entrate nel mese di Marzo. [€1793,00]

Mese	Entrate	Uscite
Gennaio	€ 3048,00	€ 2574,00
Febbraio	€ 2548,00	€ 2941,00
Marzo	€	€ 1985,00
Aprile	€ 2684,00	€ 2548,00
Maggio	€ 2745,00	€ 2516,00
Giugno	€ 2154,00	€ 2206,00

5. Gianna non ricorda quanti euro ha speso per comprare uno zaino. Ricorda però di essere uscita con €75,00 in tasca, ha speso € 2,00 per la metropolitana, dove ha trovato per terra una banconota da €10,00. Poi ha comprato dei giornali per € 7,00 e un paio di jeans per € 37,00; quindi ha comprato lo zaino. Tornando a casa ha incontrato Wilma che le ha restituito un prestito di € 13,00. A questo punto in tasca si è ritrovata € 24,00. Quanto è costato lo zaino? [€28,00]

6. Nella seguente tabella sono riportate le entrate e uscite di una famiglia nei primi sei mesi dell'anno. Sapendo che il saldo finale è di € 754,00 e quello iniziale era di € 1248,00, stabilire il valore delle entrate nel mese di Maggio. [Dati incoerenti]

Mese	Entrate	Uscite
Gennaio	€ 2154,00	€ 1814,00
Febbraio	€ 2012,00	€ 1725,00
Marzo	€ 2301,00	€ 1365,00
Aprile	€ 2001,00	€ 1958,00
Maggio	€ ……	€ 2032,00
Giugno	€ 2245,00	€ 2102,00

7. Se un numero n è pari, come si indica il successivo numero pari? [$n + 2$]
8. Se un numero n è pari, come si indica il successivo numero dispari? [$n + 1$]
9. Se un numero n è dispari, come si indica il precedente numero dispari? [$n - 2$]
10. Per potere assistere ad uno spettacolo teatrale, gli adulti pagano 10 euro a testa, un solo bambino accompagnato da due adulti non paga, invece un bambino non accompagnato paga 5 euro. La famiglia Fibonacci, formata da 7 adulti e 5 bambini, si reca a teatro. Quanto pagheranno? [80 euro]
11. Nel campionato di calcio chi vince prende 3 punti, chi pareggia 1 punto e chi perde 0 punti. Ad un certo punto del torneo la squadra del Fibonacci ha 9 punti. Sapendo che non ha mai pareggiato e che ha perso un numero doppio di partite rispetto a quante ne ha vinte, quante partite ha giocato? [9]
12. Martedì la temperature massima fu 4°C più alta di quella di lunedì. Mercoledì invece la temperatura massima fu 6°C più fredda di quella di lunedì. Se Martedì la temperatura massima fu 22°C, quale fu la massima di mercoledì? [12° C]
13. Alessia e Mattia fanno un gioco a due, in cui non è previsto il pareggio, il vincitore guadagna 2 punti e il perdente ne perde 1. Se Alessia vince 3 partite e Mattia alla fine ha 5 punti, quante partite hanno giocato? [8]

Livello 2

14. Un coltello pesa quanto due cucchiai, tre cucchiai pesano quanto un coltello e una forchetta, un mestolo pesa quanto un coltello e un cucchiaio. Se una forchetta pesa 40 grammi, quanto pesano le altre posate? [Cucchiaio 40 g, Coltello 80g, Mestolo 120 g]
15. Un pastore disse a un altro: *Se mi darai otto pecore avremo lo stesso numero di animali*. Rispose l'altro: *Dammene tu otto e io ne avrò il doppio delle tue*. Quante pecore aveva ciascuno dei due pastori? [56 e 40]
16. Tre amici Alberto, Bice e Carlo sono andati insieme a pescare. Alberto e Bice insieme hanno preso 14 pesci; Bice e Carlo, insieme, ne hanno presi 20; Alberto e Carlo 18. Quanti pesci hanno preso, complessivamente, i cinque amici? [26]
17. In una gara sui 450 metri, Alice parte con 100 metri di vantaggio su Carla, che è più veloce di Alice, dato che nel tempo in cui Alice percorre 10 metri lei ne percorre 15. Alla fine della gara chi arriva prima e con quanto vantaggio sull'altra? [Carla, 50 metri]
18. Alcuni amici vanno a fare una gita in montagna e portano ciascuno un panino. Due di questi mangiano il panino prima di pranzo. A pranzo uno degli zaini, che contiene 5 panini, cade in un torrente e non può più recuperarsi. Allora gli amici dividono a metà i panini rimasti e ciascuno, tranne i due che hanno già mangiato, mangia metà panino. Quanti sono gli amici? [12]
19. Il grillo parlante quando è arrabbiato fa salti lunghi 2 metri indietro, quando non lo è i suoi salti sono lunghi 1 metro e vanno in avanti. Un giorno parte dalla casa di Geppetto e fa in totale 15 salti. Se 6 di questi salti sono fatti quando è arrabbiato, di quanti metri si è allontanato dalla casa di Geppetto? [1 *m* all'indietro]
20. Il doppio del triplo di un numero e il triplo del doppio dello stesso numero, danno luogo allo stesso risultato? [Sì]
21. Un milione di miliardi e un miliardo di milioni rappresentano numeri diversi? [No]

Lavoriamo insieme

Le calcolatrici tascabili sono spesso utili, ma come per tutte le macchine non si deve abusare del loro uso. Per esempio è utile ma non necessario usarle per calcolare 73 · 15. Infatti sfruttando la proprietà distributiva possiamo dire: 73 · 15 = 73 · (10 + 5) = 73 · 10 + 73 · 5, ma calcolare le due moltiplicazioni mentalmente è abbastanza semplice: 730 + 365 = 1095.

Effettuare le seguenti moltiplicazioni con l'ausilio delle proprietà distributive, in modo da ottenere solo moltiplicazioni il cui risultato è noto a mente

22. a) 8 · 21; b) 5 · 24; c) 3 · 19 ; d) 15 · 32; e) 47 · 13; f) 18 · 51
23. a) 33 · 42; b) 20 · 59; c) 62 · 101; d) 43 · 43; e) 111 · 27; f) 19 · 102
24. a) 64 · 120; b) 24 · 61; c) 101 · 202; d) 111 · 42; e) 1001 · 27; f) 10001 · 73

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente antico problema.
Un avaro disse ad un ingenuo: *Ti farò arricchire rapidamente. Fammi vedere quanto denaro hai in tasca, poiché io te ne darò altrettanto ma poi tu dovrai darmi* € 16,00. *Continueremo in questo modo quante volte vorrai*. L'ingenuo accettò e accecato dalla prospettiva di arricchire facilmente e dall'illusione di vedersi raddoppiare ogni volta quanto aveva in tasca, non si accorse che dopo avere raddoppiato per quattro volte il denaro che aveva in tasca, gli rimasero solo € 16,00 che dovette perciò dare all'avaro, rimanendo senza soldi. Quanto denaro aveva in tasca prima di iniziare?
Se alla fine aveva € 16,00, vuol dire che prima ne aveva € 8,00 e l'avaro glieli ha raddoppiati. Ma ancora prima gli aveva tolto € 16,00, perciò ne aveva € 24,00. Quindi ragionando a ritroso la catena completa è la seguente: $16 \xrightarrow{/2} 8 \xrightarrow{+16} 24 \xrightarrow{/2} 12 \xrightarrow{+16} 28 \xrightarrow{/2} 14 \xrightarrow{+16} 30 \xrightarrow{/2} 15$. Quindi all'inizio l'ingenuo aveva 15 euro.

Livello 2

25. Un problema adattato da Eulero. Tre ragazzi Aldo, Giovanni e Giacomo giocano a biglie tre partite; poiché la posta è in palline, chi vince raddoppia il numero di quelle che già possiede. In ogni partita, uno dei tre giocatori a turno, secondo l'ordine alfabetico dei nomi, perde e gli altri due vincono, così alla fine, tutti e tre hanno 24 palline. Si vuol sapere quante ne aveva ciascuno prima di iniziare a giocare. [12, 21, 39]
26. Aldo esce a passeggio con Bruna e Carla. Aldo ha lo stesso denaro di Bruna e paga il biglietto per la discoteca per tutti e tre, che costa 10 euro per ciascuno. Dopo avere pagato si accorge di avere la metà dei soldi di Bruna. Quanti soldi aveva Aldo quando è uscito? [60 euro]
27. Hansel e Gretel per non perdersi nel bosco lasciano 1 sassolino ogni 10 metri. Dopo che hanno lasciato cadere 25 sassolini, si accorgono che gliene sono rimasti solo altri 15, quindi ne lasciano cadere uno ogni 20 metri. Quando hanno finito i sassolini, raccolgono 10 rami secchi e li lasciano cadere uno ogni 30 metri. Quando il papà li lascia nel bosco sono rimasti 3 rametti. Quanta strada hanno fatto finora? [760 m]

L'angolo delle correzioni

Le seguenti operazioni sono errate, correggerle.

1. $1 + 2 \cdot (3 + 4) = 1 + 6 + 4 = 7 + 4 = 11$.
2. $5 – 4 – 3 = 5 – 1 = 4$.
3. $8 + 5 \cdot 3 = 13 \cdot 3 = 39$.
4. $(–3 – 2) \cdot (5 + 1) = 5 \cdot (5 + 1) = 25 + 1 = 26$.
5. $4 \cdot (–5 + 2) = 4 \cdot 5 + 4 \cdot 2 = 20 + 8 = 28$.
6. $(4 – 6) \cdot (2 – 2) = 4 \cdot 2 – 6 \cdot (–2) = 8 + 12 = 20$.
7. $2 + (7 \cdot 3) = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 3 = 14 + 6 = 20$.
8. $(3 \cdot 8) – 3 = (3 – 3) + (8 – 3) = 0 + 5 = 5$.
9. $7 – (4 – 1) = 7 – 4 – 1 = 3 – 1 = 2$.
10. $5 – (4 \cdot 2) = 5 – 4 – 5 \cdot 2 = 20 – 10 = 10$.

Lavoriamo insieme

Vogliamo semplificare la seguente espressione nel modo più rapido, ossia eseguendo solo quelle potenze che risultano necessarie: $\left(\left(2^2\cdot 3^2\right)^3\cdot 6^2\cdot 3^3\cdot\left(6^4\cdot 6^3\right)^5\right.$. Cominciamo ad applicare le proprietà enunciate nella teoria.

$$\left[\left(2\cdot 3\right)^2\right]^3\cdot 6^2\cdot 3^3\cdot\left(6^{4+3}\right)^5=\left(6^2\right)^3\cdot 6^2\cdot 3^3\cdot\left(6^7\right)^5=6^6\cdot 6^2\cdot 3^3\cdot 6^{35}=6^{6+2+35}\cdot 3^3=6^{43}\cdot 3^3$$

Non riusciamo a semplificare ulteriormente l'espressione.

Utilizzando i Teoremi enunciati nella teoria, semplificare le seguenti espressioni

Livello 1

28. $2^3\cdot 2^5\cdot 2^7\cdot 2^4$; $3^2\cdot 3^3\cdot\left(3^4\right)^2$; $\left(5\cdot 5^2\right)^3\cdot\left(5^4\cdot 5\right)^4$; $7^2\cdot\left(7\cdot 7^2\right)^3\cdot\left(7^4\cdot 7\right)$ $[2^{23}; 3^{13}; 5^{29}; 7^{16}]$

29. ; $2\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot 2^4$; $2^2\cdot 2^3\cdot\left(2^3\right)^4\cdot\left(2^4\right)^4$; $\left(3\cdot 5^2\right)^3\cdot\left(3^2\cdot 3\right)^3$; $\left[\left(3^2\right)^3\right]^4\cdot\left[\left(3^3\right)^2\right]^4$ $[2^{10}; 2^{11}; 3^9\cdot 5^6; 3^{48}]$

30. $2^4\cdot\left(2^2\right)^2\cdot\left(2^3\right)^4\cdot\left(2^4\right)^3$; $3^2\cdot 5^2\cdot 3^3\cdot 2^3$; $3\cdot 2\cdot 5\cdot 2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 5$ $[2^{32}; 2^3\cdot 3^5\cdot 5^2; 2^4\cdot 3^3\cdot 5^2]$

31. $-2\cdot 7\cdot 11\cdot 7^4\cdot 11^3\cdot 13^2$; $2\cdot 3\cdot 2^2\cdot 5^2\cdot\left(-2\cdot 3^3\right)\cdot\left(-2\cdot 5^2\right)\cdot\left(-2^2\cdot 3^2\cdot 5^3\right)$ $[2\cdot 7^5\cdot 11^4\cdot 13^2; -2^7\cdot 3^6\cdot 5^7]$

32. $\left[\left(2^2\cdot 5^2\right)^3\cdot 3^3\right]^4\cdot\left[\left(2^4\cdot 3^4\right)^2\cdot 5^2\right]^4$; $\left\{\left[\left(2^2\right)^3\right]^4\right\}^5\cdot\left\{\left[\left(2^5\right)^4\right]^3\right\}^2$ $[2^{40}\cdot 3^{44}\cdot 5^{32}; 2^{240}]$

33. $\left(2^2\right)^3\cdot\left(2^3\right)^2\cdot\left(2^6\right)^2\left\{\left[\left(5^2\cdot 7^2\right)^3\cdot 2^3\right]^4\cdot 3^4\right\}^5\cdot\left\{\left[\left(2^3\cdot 5^3\right)^4\cdot 3^4\right]^3\cdot 7^3\right\}^5$ $[2^{24}; 2^{111}\cdot 3^{200}\cdot 5^{420}\cdot 7^{165}]$

Livello 2

34. Un'azienda ha avuto una produzione di 2^{17} chicchi di riso. Nel giro di tre anni si prevede di raddoppiare la produzione. Il tecnico del marketing dice che quindi si devono raccogliere 2^{34} chicchi; la segretaria di produzione afferma che dovranno essere invece 4^{17}; il direttore del settore vendite non è d'accordo, saranno 2^{18}; infine il responsabile pubblicitario afferma che il risultato corretto è invece 4^{34}. Chi ha ragione e perché? [Direttore settore vendite]

35. Chi è più grande, 2^{3^4} oppure $\left(2^3\right)^4$? Giustificare la risposta $\left[2^{3^4}\right]$

36. Tenuto conto che $2^{10} = 1024$, cioè $2^{10} \approx 10^3$, quale potenza di 2 è circa 10^9? $[2^{30}]$

37. Possiamo dire che $2^3\cdot 3^3 = 6^3$? [Sì]

38. Possiamo dire che $2^3 + 3^3 = 5^3$? [No]

L'angolo delle correzioni

Le seguenti operazioni sono errate, correggerle.

1. $11\cdot(2+1)^2 = 11\cdot 2^2 + 11\cdot 1 = 44 + 11 = 55$.
2. $3^2\cdot 3^3 = 3^6$.
3. $3^2\cdot 4^2 = 12^4$.
4. $3^2 + 3^3 = 3^5$.
5. $3^2\cdot 2^3 = 6^6$.
6. $(3^2 + 3^3)\cdot 3^4 = 3^7 + 3^2 = 3^9$.
7. $(4^8)^2\cdot 4^2 - 4 = 4^{64}\cdot 4^2 - 4 = 4^{66} - 4 = 4^{65}$.
8. $(2^9)^2\cdot 2^8\cdot 2^7\cdot(2^6)^3 = (2^9)^2\cdot 2^{15}\cdot(2^6)^3 = (2^{30})^6 = 2^{180}$.

Intervallo matematico

Diverse sono le questioni che hanno un fondo giocoso e che riguardano le potenze. Una delle più famose e interessanti è quella relativa alla leggenda che si narra sull'inventore degli scacchi. In effetti vi sono molte versioni che riferiscono la stessa storia, ambientandola in paesi diversi, la Cina, l'India e altri paesi esotici. La struttura è però comune a tutte le leggende.

Si narra che un re o imperatore di un grande e ricco paese fu così contento di apprendere il gioco degli scacchi che decise di accogliere qualsiasi richiesta del suo inventore, un tale Sessa. Il re naturalmente si aspettava che fossero richieste ori o pietre preziose, rimase quindi sorpreso che Sessa chiedesse di ricevere soltanto 1 chicco di riso per la prima casella del gioco degli scacchi, 2 per la seconda, 4 per la terza, 8 per la quarta e così via, raddoppiando sempre il numero di chicchi presenti nella casella precedente, fino ad arrivare a 2^{63} chicchi di riso. Il re sorrise e accolse volentieri la richiesta, felice di essersela cavata con un così povero compenso.

Ben presto però cominciò a preoccuparsi un po' di più, dato che i contabili della corte dopo diversi giorni non erano ancora riusciti a calcolare il numero esatto di chicchi di riso. Si sentì veramente male il giorno in cui gli fu comunicato che non si poteva accogliere la richiesta di Sessa, poiché gli immensi magazzini reali non possedevano neanche un millesimo di quanto si doveva.

Vediamo di contare quanti sono effettivamente questi chicchi di riso. Dobbiamo calcolare la seguente somma: $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{63}$. Potremmo calcolare la precedente somma con l'aiuto di una calcolatrice, diciamo però che si può far vedere, con tecniche che ancora non siamo in grado di capire, che essa risulta uguale a $2^{64} - 1 = 18446744073709551615$ e fin qui nulla di particolare. Infatti, quanti sono questi chicchi? Un milione, un miliardo? Di più di meno? Il numero ha 20 cifre, tenuto conto che un miliardo ha 10 cifre, noi abbiamo più di dieci miliardi di miliardi di chicchi. Credo che già questo numero ci impressioni un po'. Ma rendiamolo più reale, quanti chili di riso sono, all'incirca? Il peso di un chicco di riso dipende ovviamente dalla varietà, uno dei più grandi è il cosiddetto Arborio, 1000 chicchi pesano circa 38 grammi (Fonte Ente Nazionale Risi), quindi i chicchi di Sessa pesano circa 701 miliardi di tonnellate (li raggruppiamo in gruppi da mille, cioè dividiamo per 1000, poi moltiplichiamo per 0,038 chilogrammi e dividiamo per un milione per portare in tonnellate). Tanto per avere un idea, nel 2015 nel mondo si sono prodotti circa 734 milioni di tonnellate di riso. Era veramente troppo, anche per un grande imperatore!

Divisibilità e fattorizzazione nell'insieme dei numeri interi

Secondo la fisica tutti i corpi sono costituiti da particelle elementari, detti atomi, la cui parola significa *indivisibili*, in effetti gli stessi atomi sono costituiti da particelle più piccole, come elettroni e protoni o ancora più piccole come i cosiddetti quark. Anche i numeri interi sono composti da parti indivisibili. Cominciamo a porre qualche definizione.

Definizione 14

Diciamo che il numero intero m è **multiplo** del numero intero n se esiste un numero intero p tale che $m = n \cdot p$. Se m è multiplo di n, n si dice **divisore** di m.

Questa nozione è fondamentale nelle ripartizioni in parti uguali.

Esempio 22

Giacomo ha acquistato 12 penne uguali spendendo € 7,30. Il suo amico Augusto, patito della matematica, lo rimprovera dicendo che è stato imbrogliato perché il prezzo che ha pagato non può essere corretto. Augusto sostiene che, dato che le penne sono uguali, hanno lo stesso prezzo, ma allora il totale deve essere un multiplo di 12, mentre non è possibile in alcun modo ottenere 730 (cioè i centesimi di euro) come prodotto di 12 per un numero intero. Infatti $12 \cdot 60 = 720$ e $12 \cdot 61 = 732$. Quindi le penne potevano costare 60 centesimi l'una e il totale doveva essere € 7,20; oppure 61 centesimi l'una, per un totale di € 7,32.

L'esempio precedente ci suggerisce che stabilire se un numero è o no multiplo di un altro è importante in tutti i casi in cui vogliamo dividere in parti uguali.
Nel caso di due numeri, uno multiplo dell'altro, possiamo definire una nuova operazione.

Definizione 15

Dati i numeri naturali m ed n, con m multiplo di n, diciamo **divisione** di m per n, l'operazione di determinare un numero intero p per cui si ha: $m = n \cdot p$. m si chiama **dividendo**, n **divisore** e p **quoziente**.

Notazione 11

La divisione di m per n si indica con $m : n$ p con m/n.

Ovviamente la divisione fra due numeri naturali, uno multiplo dell'altro, non gode né della proprietà commutativa, né di quella associativa.

Esempio 23

- 16 è multiplo di 2, quindi $16 : 2 = 8$, ma ovviamente 2 non è multiplo di 16 e quindi l'operazione $2 : 16$, che non abbiamo ancora definito, non può avere lo stesso risultato.
- Allo stesso modo possiamo calcolare $12 : 2 : 3$ solo nell'ordine naturale, cioè $(12 : 2) : 3 = 6 : 3 = 2$, mentre non sappiamo ancora come eseguire $12 : (2 : 3)$.

Vediamo come possiamo trovare i divisori di un numero naturale.

Esempio 24

Cerchiamo i divisori di 24. Facilmente si vede che $24 = 2 \cdot 12$, quindi 2 e 12 sono due divisori di 24. Ma poiché $12 = 2 \cdot 6$, utilizzando la proprietà associativa possiamo anche scrivere:

$$24 = 2 \cdot 12 = 2 \cdot (2 \cdot 6) = 4 \cdot 6$$

Cioè anche 4 e 6 sono divisori di 24. Ancora $6 = 2 \cdot 3$, quindi scriviamo:

$$24 = 4 \cdot 6 = 4 \cdot (2 \cdot 3) = 8 \cdot 3$$

Cioè anche 3 e 8 sono divisori di 24. Fino adesso abbiamo trovato i seguenti divisori:

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$$

Possiamo dire che non vi sono altri divisori di 24? Sì perché abbiamo visto che i divisori si trovano a coppie, quindi l'unica possibilità che rimane, dopo il 4, è che 5 sia divisore di 24, ma ciò non accade.

Sembrerebbe, dal precedente esempio che si possa dire che i divisori di un numero sono sempre in numero pari, perché appunto si trovano a coppie. Vediamo se ciò è vero.

Esempio 25

Quali sono i divisori di 4? Facilmente si vede che sono solo 1, 2, 4. Cioè sono in numero dispari. Come mai ciò accade? Perché le coppie sono (1, 4) e (2, 2), cioè la seconda coppia ha gli elementi uguali e quindi non possiamo contare due volte lo stesso numero.

Non è difficile capire che quanto visto nell'esempio precedente vale per tutti i numeri che sono quadrati perfetti, come 9, 16, 25, … Quindi vale il seguente risultato

Teorema 10

Un numero naturale ha un numero dispari di divisori solo se è un quadrato perfetto.

Ovviamente ogni numero ha due divisori, che sono il numero 1 e lo stesso numero, dato che, per esempio, $12 = 12 \cdot 1 = 1 \cdot 12$. Possiamo dire che ogni numero naturale ha almeno due divisori? No, perché il numero 1 ha un solo divisore, dato che in questo caso il divisore "se stesso" coincide con 1. Non è difficile capire che ciò accade solo per il numero 1. Gli altri numeri naturali hanno effettivamente almeno due divisori. È però possibile che vi siano numeri che hanno **solo** due divisori.

Esempio 26

Il numero 17 si può scrivere solo come $1 \cdot 17$ oppure come $17 \cdot 1$.

I numeri come 17 meritano una definizione, perché sono gli *atomi* che cercavamo.

Definizione 16

- Un numero naturale p che ha solo due divisori distinti (1 e p) si chiama numero **primo**.
- Un numero naturale che ha più di due divisori si chiama numero **composto**.

Quindi il numero 1 non è né primo, né composto. Abbiamo la validità del seguente fondamentale risultato.

Teorema 11 (di Euclide)

L'insieme dei numeri primi è infinito.

Abbiamo visto che i numeri composti si possono scrivere in diversi modi come prodotto di fattori, per esempio $12 = 1 \cdot 12$, ma anche $12 = 2 \cdot 6$. Se però imponiamo che i fattori siano solo numeri primi o loro potenze, allora ogni numero si può scrivere in un solo modo. Così possiamo scrivere 12 solo come $3 \cdot 4$, dato che 3 è un numero primo e $4 = 2^2$. Vale il seguente importantissimo risultato.

Teorema 12 (Fondamentale dell'aritmetica)

Ogni numero naturale può scomporsi in un solo modo come prodotto di potenze di fattori primi.

Esempio 26

Il numero 24 si può scrivere come prodotto di fattori che sono potenze di numeri primi solo nel modo seguente: $24 = 8 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$. Ovviamente la scrittura $24 = 3 \cdot 2^3$, è considerata equivalente alla precedente. È invece diversa la scritta: $24 = 1^5 \cdot 2^3 \cdot 3$. Ma ciò non costituisce una negazione del precedente teorema perché 1 non è un numero primo e quindi questa non è una scomposizione di 24 in fattori primi, solo la prima lo è.

L'esempio ci fa capire perché non consideriamo 1 un numero primo, dato che diversamente il teorema fondamentale dell'aritmetica non sarebbe stato vero.
Dato che è importante scomporre i numeri naturali in fattori, dobbiamo cercare dei metodi che facilitino questa ricerca.
Ricordiamo che l'ultima cifra a destra di un numero naturale si chiama *cifra delle unità*.

Esempio 27

I possibili prodotti di 2 per le 10 cifre sono:
$2 \cdot 0 = 0$, $2 \cdot 1 = 2$, $2 \cdot 2 = 4$, $2 \cdot 3 = 6$, $2 \cdot 4 = 8$, $2 \cdot 5 = 10$, $2 \cdot 6 = 12$, $2 \cdot 7 = 14$, $2 \cdot 8 = 16$, $2 \cdot 9 = 18$
Come si vede tutti i prodotti hanno come cifra delle unità 0, 2, 4, 6 o 8. Ma se moltiplichiamo un qualsiasi numero per 2, la cifra delle unità si ottiene dal prodotto fra 2 e la cifra delle unità del numero. Così quando moltiplichiamo 126743 per 2, la cifra delle unità è la stessa di quella di $3 \cdot 2$, cioè 6. Quindi un numero intero moltiplicato per 2 ha come cifra delle unità un numero dell'insieme $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.

Quanto visto nell'esempio precedente può racchiudersi nel seguente risultato.

Teorema 13 (Criterio di divisibilità per 2)

Un numero naturale è divisibile per 2 solo se la sua cifra delle unità appartiene a $\{0, 2, 4, 6, 8\}$.

Valgono anche altri criteri, più difficili da dimostrare e che quindi ci limitiamo ad enunciare.

Teorema 14 (Criterio di divisibilità per 3)

Un numero naturale è divisibile per 3 solo se la somma delle sue cifre è un numero divisibile per 3.

Teorema 15 (Criterio di divisibilità per 5)

Un numero naturale è divisibile per 5 solo se la sua cifra delle unità appartiene all'insieme $\{0, 5\}$.
Dimostrazione
Se moltiplichiamo un numero pari per 5 la sua cifra delle unità sarà 0, dato che $2 \cdot 5 = 10$, e moltiplicare per esempio per 4 equivale a moltiplicare il precedente risultato per 2, quindi finirà ancora per 0. Se invece moltiplichiamo per un numero dispari la cifra delle unità sarà 5, poiché

$$5 \cdot 1 = 5,\ 5 \cdot 3 = 15,\ 5 \cdot 5 = 25,\ 5 \cdot 7 = 35 \text{ e } 5 \cdot 9 = 45.$$

Teorema 16 (Criterio di divisibilità per 11)

Un numero naturale è divisibile per 11 solo se la differenza fra la somma delle sue cifre di posto pari e la somma delle cifre di posto dispari è un numero divisibile per 11.

Si tenga conto che 0 è divisibile per qualunque numero, quindi nel criterio precedente la differenza può anche fare 0. Inoltre i criteri sono condizioni necessarie e sufficienti, quindi se non sono verificate le proprietà enunciate i numeri non sono divisibili per 2, 3, 5 o 11.
Vediamo qualche esempio di applicazione dei precedenti criteri.

Esempio 28

- 276 è divisibile per 3 perché la somma delle sue cifre è $2 + 7 + 6 = 15$, che è divisibile per 3.
- 235 non è divisibile per 3 perché la somma delle sue cifre è $2 + 3 + 5 = 10$, che non è divisibile per 3.
- 235 è divisibile per 5 perché finisce per 5, 276 no perché finisce per 6.
- 1353 è divisibile per 11 perché le somme alternate $1 + 5 = 6$ e $3 + 3 = 6$, sono uguali, quindi la loro differenza è 0.
- Anche 5170 è divisibile per 11 perché le somme alternate sono $5 + 7 = 12$ e $1 + 0 = 1$, e la loro differenza è $12 – 1 = 11$.
- Non è invece divisibile per 11, il numero 54762, perché $(5 + 7 + 2) – (4 + 6) = 11 – 10 = 1$, che non è divisibile per 11.

Vale il seguente importante risultato.

Teorema 17

Se la somma di alcuni numeri è divisibile per un certo numero n e tutti gli addendi tranne uno sono divisibili per n, anche l'addendo rimanente deve esserlo.

Esempio 29

- La somma 3 + 6 + 9 + 12, deve fornire per forza un numero divisibile per 3, perché tutti gli addendi sono divisibili per 3. Infatti si ha: 3 + 6 + 9 + 12 = 30.
- La somma 3 + 6 + 9 + 11, deve fornire per forza un numero non divisibile per 3, perché solo 3 dei 4 addendi sono divisibili per 3, quindi se la somma lo fosse, per il teorema precedente anche il quarto addendo dovrebbe essere divisibile per 3. Infatti si ha: 3 + 6 + 9 + 11 = 29, che non è divisibile per 3.
- Invece la somma 3 + 6 + 9 + 7 + 5 può essere divisibile per 3, anche se tutti gli addendi non sono divisibili per 3, perché in questo caso i non divisibili sono più di uno. Infatti la somma è 30.

Con i criteri precedenti possiamo scomporre più facilmente in fattori primi.

Esempio 30

Vogliamo scomporre il numero 12600. Osserviamo che è divisibile per 2, quindi scriviamo: $12600 = 2 \cdot 6300$. Anche 6300 è pari, quindi $12600 = 2 \cdot 2 \cdot 3150 = 2^2 \cdot 3150$. Anche 3150 è pari: $12600 = 2^3 \cdot 1575$. Invece 1575 non è divisibile per 2, ma è divisibile per 3, perché 1 + 5 + 7 + 5 = 18 è divisibile per 3. Quindi $12600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 525$. Anche 525 è divisibile per 3, perché 5 + 2 + 5 = 12, perciò si ha: $12600 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 175$. Ora, 175 non è divisibile per 3, perché 1 + 7 + 5 = 13, ma lo è per 5, da cui si ha: $12600 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 35$; 35 è divisibile per 5. $12600 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$. Questa è la scomposizione definitiva perché 7 è un numero primo.

Potevamo mettere il tutto nel seguente schema

12600	2
6300	2
3150	2
1575	3 .
525	3
175	5
35	5
7	7

Può essere interessante cercare gli eventuali divisori comuni a due o più numeri.

Esempio 31

Per i prossimi giochi studenteschi ogni scuola deve formare squadre formate dallo stesso numero di atleti, nei tre settori di età: fino a 14 anni, da 15 a 17 anni e oltre i 17 anni. Tenuto conto che in ogni settore si hanno rispettivamente a disposizione 18, 24 e 30 atleti, vogliamo sapere quanti atleti devono comporre ciascun gruppo.
La richiesta equivale a cercare, fra tutti i divisori dei numeri 18, 24 e 30, il più grande dei divisori comuni. Non è difficile vedere che tale numero è 6. Infatti: $18 = 6 \cdot 3$; $24 = 6 \cdot 4$; $30 = 6 \cdot 5$.

L'esempio visto ci permette di enunciare il seguente risultato.

Teorema 18

L'insieme dei divisori comuni a dati numeri interi ha sempre un massimo.

Definizione 17

Il maggiore dei divisori comuni a due o più numeri interi si chiama loro **massimo comune divisore**.

Notazione 12

Il massimo comune divisore si indica con il simbolo *MCD*

Vi è un metodo più veloce per trovare il massimo comune divisore di due o più numeri interi?

Esempio 32

Scomponiamo in fattori primi i tre numeri dell'esempio precedente:

$$18 = 2 \cdot 3^2;\ 24 = 2^3 \cdot 3;\ 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Osserviamo che tutti e tre i numeri contengono i fattori 2 e 3, i divisori comuni sono {1, 2, 3, 6} e il più grande è ovviamente 6.

Il precedente esempio ci permette di enunciare il seguente risultato.

Teorema 19

Il massimo comune divisore di due o più numeri naturali si ottiene moltiplicando le potenze dei fattori primi che i numeri hanno in comune.

Ovviamente due o più numeri possono avere in comune solo il divisore 1, per esempio il 10 e il 21, dato che $10 = 2 \cdot 5$ e $21 = 3 \cdot 7$. A numeri del generi diamo un nome particolare.

Definizione 18

Due numeri che hanno massimo comune divisore uguale a 1, si dicono **coprimi** o **primi fra loro**.

Consideriamo un'altra questione.

Esempio 33

Dal piazzale antistante la stazione di Smallville, alle 7:30 di ogni giorno feriale partono 3 autobus diretti alle tre scuole della cittadina. A causa delle diverse distanze gli autobus hanno una periodicità diversa. In particolare la successiva corsa parte, rispettivamente ogni 8, 10 e 12 minuti. Vogliamo sapere quando sarà la prossima volta in cui gli autobus partiranno insieme. In pratica dovremmo costruire le tabelle orarie delle linee di bus, cercando un numero comune a tutte e tre, come mostrato accanto, ma ciò equivale a cercare un multiplo comune ai numeri 6, 8 e 12, anzi a cercare il più piccolo di essi, che è proprio 24. Quindi 24 sono i minuti che passano prima che i tre bus ripartano insieme.

Bus A	Bus B	Bus C
7:30	7:30	7:30
7:36	7:38	7:42
7:42	7:46	**7:54**
7:48	**7:54**	8:06
7:54	8:04	8:24

In vista del precedente esempio enunciamo il seguente risultato.

Teorema 20

L'insieme dei multipli comuni a dati numeri ha sempre un minimo.

Definizione 19

Il minore dei multipli comuni a due o più numeri interi si chiama loro **minimo comune multiplo**

Notazione 13

Il minimo comune multiplo si indica con *mcm*.

Vediamo come calcolare il minimo comune multiplo.

Esempio 34

Consideriamo i numeri del precedente esempio: 6, 8 e 12. Scomponiamoli in fattori primi.

$$6 = 2 \cdot 3;\ 8 = 2^3;\ 12 = 2^2 \cdot 3$$

Ovviamente un multiplo comune deve contenere tutti i fattori di tutti i numeri, quindi non è difficile capire che esso è: $mcm(6; 8; 12) = 2^3 \cdot 3 = 24$.

Quindi, tenuto conto del precedente esempio possiamo enunciare il seguente risultato.

Teorema 21

Il minimo comune multiplo di due o più numeri è dato dal prodotto di tutte le massime potenze dei fattori primi distinti contenute nei numeri.

Vi è una semplice relazione fra *mcm* e *MCD* di una stessa coppia di numeri.

Esempio 35

Consideriamo i numeri 8 e 12. Abbiamo $8 = 2^3$; $12 = 2^2 \cdot 3$ e $mcm(8; 12) = 2^3 \cdot 3$; $MCD(8; 12) = 2^2$.
cioè $8 \cdot 12 = 2^3 \cdot 2^2 \cdot 3 = mcm(8; 12) \cdot MCD(8; 12)$.

Quanto visto nell'esempio precedente non è casuale, ma accade sempre, come afferma il seguente teorema.

Teorema 22

Dati due numeri naturali p e q si ha: $mcm(p; q) \cdot MCD(p; q) = p \cdot q$.
Dimostrazione
Per esercizio

La proprietà precedente non è però generalizzabile a più di due numeri.

Esempio 36

Si ha: $8 = 2^3$; $10 = 2 \cdot 5$; $12 = 2^2 \cdot 3$; $mcm(8; 10; 12) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$; $MCD(8; 10; 12) = 2$. Ma si ha
$8 \cdot 10 \cdot 12 = 960$ e $(2^3 \cdot 3 \cdot 5) \cdot 2 = 240$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Cerchiamo i divisori di 40. Sappiamo che sono a coppie, la prima delle quali è ovviamente (1, 40). Il numero è pari, quindi la successiva coppia sarà (2, 20). Non è divisibile per 3, ma lo è per 4, quindi abbiamo (4, 10). Abbiamo poi (5, 8), e abbiamo finito perché 40 non è divisibile né per 6 né per 7, ed è inutile proseguire perché con il secondo fattore siamo già arrivati ad 8, quindi abbiamo concluso le verifiche. In totale abbiamo quindi gli 8 divisori seguenti: {1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40}.

Trovare tutti i divisori dei seguenti numeri

Livello 1

1. 28 ; 30; 33 [{1, 2, 4, 7, 14, 28}; {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}; {1, 3, 11, 33}]
2. 36; 42; 49 [{1, 2, 3, 6, 12, 18, 36}; {1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42}; {1, 7, 49}]
3. 51; 60; 72 [{1, 3, 17, 51};{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60};{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72}]

Livello 2

4. 10 ha 4 divisori, possiamo dire che 100 ha 8 o 16 divisori o nessuna delle due? [Ne ha 9]
5. 10 ha 4 divisori, 20 ne ha 6, possiamo dire che per ogni numero che ha 4 divisori, il suo doppio ne ha 6? [No, 15 ha 4 divisori ma 30 ne ha 8]
6. I quadrati perfetti hanno un numero dispari di divisori, i cubi perfetti non quadrati, come 27, ne hanno un numero dispari o pari? [Pari]

Livello 3

7. Un numero come 7 ha solo 2 divisori, il suo quadrato quanti ne ha? La proprietà vale per qualsiasi numero che ha solo 2 divisori? [3; Sì]
8. 7 ha solo 2 divisori, il suo cubo quanti ne ha? La proprietà vale per qualsiasi numero che ha solo 2 divisori? [4; Sì]
9. Se n ha 4 divisori e m ne ha 6, possiamo dire che $m \cdot n$ ha 24 divisori? [No 10 ha 4 divisori, 30 ne ha 6, 300 ne ha 18]
10. La risposta al quesito precedente, è sempre 18? [No, $8 \cdot 32$ ha 9 divisori]
11. Quando accade che se un numero ha 4 divisori, il suo doppio ne ha 6? [Quando il numero è pari ma diverso da 8]

Lavoriamo insieme

Per verificare se un numero è o no primo, quanti tentativi dobbiamo fare? Per esempio per verificare se 113 è primo, dovremmo fare in teoria 111 tentativi, verificando se i numeri da 2 a 112 sono divisori di 113 o no? Ciò non è necessario, infatti intanto non ha senso vedere se il numero è divisibile per 4 se non lo è per 2, oppure se lo è per 9, dato che non lo è per 3. Quindi in effetti basta solo vedere se qualcuno dei numeri primi che lo precedono è o no un suo divisore. In effetti possiamo ancora diminuire il numero delle verifiche. Consideriamo alcuni casi:

$$113 = 2 \cdot 56 + 1 = 3 \cdot 37 + 2 = 5 \cdot 22 + 3 = 7 \cdot 16 + 1 = 11 \cdot 10 + 3$$

A questo punto possiamo fermarci concludendo che 113 è primo. Ciò perché osserviamo che in ogni successiva uguaglianza il secondo fattore diminuisce, mentre il primo aumenta. Ciò significa che nel momento in cui otteniamo un secondo fattore minore o uguale del primo abbiamo finito. In effetti basta controllare fino al più grande intero contenuto nella radice quadrata del numero, nel nostro caso al massimo fino a 10, poiché $\sqrt{113} \approx 10,6$.

Verificare, usando il minor numero possibile di verifiche, quali fra i seguenti numeri sono primi

Livello 2

12. 43 ; 207 ; 111 ; 403 ; 319 ; 727 ; 1223 ; 1143 [Sì; No; No; No ; Sì ; Sì; No]
13. 747 ; 1023 ; 1237 ; 4321 ; 12349 ; 54321 ; 13579 [No; No; Sì ; No ; No; No ; No]
14. 24681 ; 11111 ; 110111 ; 135531 ; 123457 ; 333337 [No; No; No ; No ; Sì; Sì]

Livello 3

15. I numeri le cui cifre sono tutte uguali a 1 si chiamano *repunit*, alcuni di essi sicuramente non sono

primi, quali? [Con un numero di cifre pari, tranne 11, o multiplo di 3]

16. A partire da 11111 costruiamo altri 5 numeri inserendo la cifra 0 in una posizione a piacere, quali di tali numeri sono primi? [Solo 101111]
17. Usando tutte le cifre 1, 2, 3, 4, 5 e 6 si possono costruire ben 720 numeri, per esempio 123456 o 635421, quanti di essi sono primi? Giustificare la risposta. [Nessuno]

Lavoriamo insieme

Il crivello di Eratostene è un metodo per determinare numeri primi. Consiste nella seguente procedura, si scrivono tutti i numeri che vogliamo testare, per esempio i numeri da 215 a 261. Eliminiamo subito i numeri pari, che non sono primi.

215	~~216~~	217	~~218~~	219	~~220~~	221	~~222~~	223	~~224~~	225	~~226~~
227	~~228~~	229	~~230~~	231	~~232~~	233	~~234~~	235	~~236~~	237	~~238~~
239	~~240~~	241	~~242~~	243	~~244~~	245	~~246~~	247	~~248~~	249	~~250~~
251	~~252~~	253	~~254~~	255	~~256~~	257	~~258~~	259	~~260~~	261	

Ora togliamo i multipli di 3, partendo dal primo di essi, cioè 216, anche se lo avevamo già tolto

215	~~216~~	217	~~218~~	~~219~~	~~220~~	221	~~222~~	223	~~224~~	~~225~~	~~226~~
227	~~228~~	229	~~230~~	~~231~~	~~232~~	233	~~234~~	235	~~236~~	~~237~~	~~238~~
239	~~240~~	241	~~242~~	~~243~~	~~244~~	245	~~246~~	247	~~248~~	~~249~~	~~250~~
251	~~252~~	253	~~254~~	~~255~~	~~256~~	257	~~258~~	259	~~260~~	~~261~~	

Passiamo ai multipli di 5, partendo da 215

~~215~~	~~216~~	217	~~218~~	~~219~~	~~220~~	221	~~222~~	223	~~224~~	~~225~~	~~226~~
227	~~228~~	229	~~230~~	~~231~~	~~232~~	233	~~234~~	~~235~~	~~236~~	~~237~~	~~238~~
239	~~240~~	241	~~242~~	~~243~~	~~244~~	~~245~~	~~246~~	247	~~248~~	~~249~~	~~250~~
251	~~252~~	253	~~254~~	~~255~~	~~256~~	257	~~258~~	259	~~260~~	~~261~~	

Adesso i multipli di 7, il primo dei quali è $217 = 7 \cdot 31$

~~215~~	~~216~~	~~217~~	~~218~~	~~219~~	~~220~~	221	~~222~~	223	~~224~~	~~225~~	~~226~~
227	~~228~~	229	~~230~~	~~231~~	~~232~~	233	~~234~~	~~235~~	~~236~~	~~237~~	~~238~~
239	~~240~~	241	~~242~~	~~243~~	~~244~~	~~245~~	~~246~~	247	~~248~~	~~249~~	~~250~~
251	~~252~~	253	~~254~~	~~255~~	~~256~~	257	~~258~~	~~259~~	~~260~~	~~261~~	

Per i multipli di 11 partiamo da $221 = 13 \cdot 17$.

~~215~~	~~216~~	~~217~~	~~218~~	~~219~~	~~220~~	~~221~~	~~222~~	223	~~224~~	~~225~~	~~226~~
227	~~228~~	229	~~230~~	~~231~~	~~232~~	233	~~234~~	~~235~~	~~236~~	~~237~~	~~238~~
239	~~240~~	241	~~242~~	~~243~~	~~244~~	~~245~~	~~246~~	~~247~~	~~248~~	~~249~~	~~250~~
251	~~252~~	253	~~254~~	~~255~~	~~256~~	257	~~258~~	~~259~~	~~260~~	~~261~~	

Adesso abbiamo finito perché il successivo numero primo è 17 e $17 \cdot 17 = 289 > 261$. Quindi i numeri rimasti sono primi.

Livello 2

18. Utilizzando il crivello di Eratostene determinare tutti i numeri primi compresi tra
a)125 e 173; b) 193 e 231; c) 264 e 312; d) 327 e 413.

Lavoriamo insieme

Troviamo scritto su un foglio macchiato d'olio il seguente numero X24X42X, in esso con delle X abbiamo indicato le cifre illeggibili. Sappiamo che tutte le cifre illeggibili sono uguali fra loro e che il numero è divisibile per 33, vogliamo sapere qual è il numero. Utilizziamo le nozioni sulla divisibilità. Dato che esso è divisibile per 33 è divisibile sia per 3 che per 11, deve perciò verificare entrambe le regole di divisibilità. Quindi la somma delle sue cifre deve essere un numero divisibile per 3. Sommando le cifre otteniamo 12 + 3X, quale che sia la cifra rappresentata da X questo numero è sempre divisibile per 3. Adesso consideriamo la divisibilità per 11.

Sommiamo le cifre di posto dispari: 2X + 8 e quelle di posto pari: 4 + X. Effettuiamo la differenza fra queste somme: 2X + 8 – (4 + X) = 2X + 8 – 4 – X = X + 4, questo numero deve essere zero, ma non vi sono cifre che aggiunte a 4 danno zero. C'è però il 7 che aggiunto fornisce 11, quindi il numero misterioso è 7247427.

Determinare tutti i valori che possono assumere le cifre mascherate con una X, nei numeri seguenti affinché essi risultino divisibili per i numeri a fianco segnati

Livello 1

19. 369X per 3 ; 123X45 per 2; 54X21 per 11 [{0, 3, 6, 9}; ∅; 0]
20. 123X56768 per 8 ; 492X5709 per 11 ; 123X5678 per 4 [qualsiasi; 8; ∅]
21. 24X578 per 6 ; 102536X per 9 ; 245578X64 per 5 [{1, 4, 7}; 1; ∅]

Livello 2

22. X1X1 per 11 ; X213X per 22 ; 20X0X1230X per 10 [qualsiasi tranne 0; 2; 0]
23. 2451X12X3X per 44 ; 234X5125XX per 12 ; 2X1354X56 per 3 [6; ∅; {2, 5, 8}]

24. Simone ha comprato una scatola di pupazzi a 9 euro l'uno e li ha spediti al suo socio Attilio che ha un negozio di giocattoli. Sulla scatola ha scritto il prezzo complessivo che ha speso, solo che il postino aveva le mani sporche di grasso, così si legge 11X4, dove con X intendiamo che la cifra non si legge. Quanti sono i pupazzi? [3]
25. Marcus e i suoi amici hanno ordinato 12 pizze, ognuna delle quali ha lo stesso costo. Il fattorino che le consegna ha le mani sporche di grasso, così nello scontrino si legge € 68,X8, con X intendiamo dire che la cifra non si legge. Quanto costa ciascuna pizza? [€ 5,69 ∨ € 5,74]
26. In realtà i mille di Garibaldi erano più di mille ma meno di 1100, precisamente erano un numero divisibile per 9 che ha la proprietà di avere la somma delle prime tre cifre uguale alla quarta. Quanti erano? [1089]
27. Osserviamo che $143 \cdot 7 = 1001$, $143 \cdot 14 = 2002$, $143 \cdot 21 = 3003$, $143 \cdot 28 = 4004$. Senza effettuare i calcoli, quanto fa $143 \cdot 63$? [9009]

Livello 3

28. Con riferimento al problema precedente trovare una regola generale. Cioè se $143 \cdot n = abba$, con a e b cifre generiche, che tipo di numero deve essere n? [Multiplo di 7]
29. Sempre con riferimento al problema precedente, può accadere che si abbia $143 \cdot n = abcabc$? [Sì, per n multiplo di 7 maggiore di 99]
30. Se $143 \cdot n = 123123$, quanto fa n? [861]
31. Determinare i valori delle cifre x e y in modo che $81y1058294x$ sia divisibile per 33. [Tutte le cifre per cui $x + y = 10$]

Lavoriamo insieme

Vogliamo scomporre in fattori primi il numero 752. Possiamo usare il seguente schema

752	2
376	2
188	2
94	2
47	47
1	

in cui abbiamo scritto, a sinistra i risultati delle divisioni per il fattore primo di destra. In tal modo basta contare ciascun fattore primo, scrivendo quindi $752 = 2^4 \cdot 47$

Scomporre in fattori primi i seguenti numeri naturali

Livello 2

32. 124; 272; 315 ; 1023; 1122 [$2^2 \cdot 31$; $2^4 \cdot 17$; $3^2 \cdot 5 \cdot 7$; $3 \cdot 11 \cdot 31$; $2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 17$]
33. 1245 ; 2015; 3027; 4026 ; 5001 [$3 \cdot 5 \cdot 83$; $5 \cdot 13 \cdot 31$; $3 \cdot 1009$; $2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 61$; $3 \cdot 1667$]
34. 6584; 7364 ; 9875; 12345; 13579 [$2^3 \cdot 823$; $2^2 \cdot 7 \cdot 263$; $5^3 \cdot 79$; $3 \cdot 5 \cdot 823$; $37 \cdot 367$]

Lavoriamo insieme

Vogliamo determinare *MCD* e *mcm* dei numeri 612 e 3570. Scomponiamo i due numeri:

612	2		3570	2
306	2		1785	3
153	3	e	595	5
51	3		119	7
17	17		17	17
1			1	

Abbiamo perciò $612 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 17;\ 3570 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17$. Quindi

$$MCD(612;\ 3570) = 2 \cdot 3 \cdot 17 = 102 \text{ e } mcm(612;\ 3570) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17 = 21420$$

Verifichiamo la validità della regola che lega fra loro *MCD* e *mcm* di due numeri:

$$MCD(612;3570) = \frac{612 \cdot 3570}{mcm(612;3570)} = \frac{\left(\cancel{2^2} \cdot \cancel{3^2} \cdot \cancel{17}\right) \cdot \left(2 \cdot 3 \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{7} \cdot 17\right)}{\cancel{2^2} \cdot \cancel{3^2} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{17}} = 2 \cdot 3 \cdot 17 = 102$$

Determinare MCD e mcm dei seguenti numeri, verificando la validità della relazione $MCD(a,b) = \dfrac{a \cdot b}{mcm(a,b)}$ ***; provare altresì che la detta relazione non vale per più di 2 numeri***

Livello 1

35. (12; 36) ; (32; 24) ; (18; 48) ; (100; 110) [(12; 36) ; (8; 96) ; (6; 144) ; (10; 1100)]
36. (124; 241) ; (123; 234) ; (123; 321) [(1; 29884) ; (3; 9594) ; (3; 13161)]
37. (505;404) ; (10;12;14) ; (48;96;124) ; (32;40;56) [(101;2020) ; (2; 420) ; (4; 2976) ; (8; 1120)]
38. (32; 128; 1024) ; (143; 1815; 132) ; (120; 504; 1440) [(32 ; 1024) ; (11; 94380) ; (24; 10080)]
39. $(2^2 \cdot 3^3 ; 2^2 \cdot 3^4 ; 2^5 \cdot 3^7 ; 2 \cdot 3^8)$; $(2^4 \cdot 5^2 ; 2^{12} ; 2 \cdot 5^7 ; 3 \cdot 11^8)$ [$(24; 2^5 \cdot 3^8)$; $(1; 2^{12} \cdot 3 \cdot 5^7 \cdot 11^8)$]
40. $(5^2 \cdot 13^3 ; 5 \cdot 7^4 \cdot 17^4 ; 2^5 \cdot 5^2 ; 2 \cdot 3 \cdot 5^4 ; 5^3)$; $(2^4 \cdot 3^3 ; 2^3 \cdot 3^4 ; 2^5 \cdot 5^2 ; 2^8 \cdot 13^4 ; 2^7 \cdot 7^2)$
[$(1 ; 2^5 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 7^4 \cdot 13^3 \cdot 17^4)$; $(2^4 ; 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13^4)$]

Livello 2

41. (2486; 3784) ; (3315; 4199) ; (7936; 11904) [(22; 427592) ; (221; 62985) ; (3968; 23808)]
42. (15400; 18800) ; (123456; 246912) ; (93; 8649) [(200;1447600);(123456;246912);(93; 8649)]
43. (4199; 741; 1105) ; (234; 3456; 7890) [(13; 62985) ; (6; 59080320)]
44. (122; 244; 366) ; (13; 169; 2197) (56; 88; 200) [122; 732) ; (13; 2197) ; (8; 15400)]
45. (24 ; 32 ; 36 ; 40) ; (28; 49; 63; 70) ; (32; 64; 128; 256; 512) [(4; 1440) ; (7; 8820) ; (32; 512)]

Lavoriamo insieme

Mattia non ricorda quanti francobolli possiede. Ricorda però che prima li aveva in classificatori tutti pieni, ciascuno dei quali ne conteneva 20 e che poi li ha messi in nuovi classificatori da 31, sempre tutti pieni. Ricorda poi di avere certamente più di 1000 francobolli. Qual è il minimo numero di francobolli posseduti da Mattia?

Cerchiamo un numero multiplo contemporaneamente di 20 e 31 e maggiore di 1000. Il primo di questi multipli è 20 · 31 = 620 che non va bene, perché non è il più grande. Quindi va bene il successivo, cioè 620 · 2 = 1240.

Livello 1

46. Un mattone pesa 2 Kg più mezzo mattone. Quanto pesano due mattoni? [8 Kg]
47. Arianna ha 28 biglie, di colore rosso, blu o verde. Se le biglie verdi sono il doppio delle rosse e la metà di quelle blu. Scrivi i numeri delle biglie blu, verdi e rosse, nell'ordine. [16; 2; 4]
48. Elio dice a suo fratello: *pensa un numero intero, aggiungigli* 2, *il risultato moltiplicalo per* 3, *togli* 4 *e dividi per* 11. *Che numero hai ottenuto*? Se il fratello risponde 4, che numero ha pensato? [14]
49. Carmen riesce a sistemare i propri DVD in contenitori da 5, 7 e 11. Qual è il minimo numero di DVD che ha? [385]
50. Helen colleziona monete che custodisce in classificatori da 13 per quelle di diametro inferiore a *cm* 1,

da 12 per quelle di diametro tra *cm* 1 e *cm* 2, da 7 per quelle di diametro superiore ai *cm* 2. Se i suoi classificatori sono tutti pieni e ne ha certamente più di 5 del primo tipo, più di 8 del secondo e più di 6 del terzo, quante monete ha al minimo? [228]

51. Per una gita scolastica i partecipanti possono essere distribuiti in pullman da 52 posti e pullman da 25, in modo che non vi siano posti vuoti. Sapendo che si prenotano non più di 5 pullman grandi e non più di 3 di quelli piccoli, quanti sono al massimo i partecipanti? [335]
52. Un autobus può contenere 52 viaggiatori seduti e non permette che vi siano viaggiatori in piedi. Se una comitiva di 213 persone vuole affittare degli autobus, quanti ne deve affittare? [5]
53. Se abbiamo a disposizione 60 caramelle, qual è il più piccolo numero di bambini che dobbiamo avere perché non possiamo dare a tutti lo stesso numero di caramelle? [7]
54. Nel gioco *Regina, reginella*, ciascuno deve arrivare dalla Regina facendo passi di animale. Sappiamo che Sharon arriva dalla regina con 10 passi da tartaruga, 2 da lepre e 1 da canguro. Sappiamo inoltre che un passo di canguro è lungo quanto 2 da lepre e quanto 6 da tartaruga. Se Stefania arriva dalla regina facendo solo passi da tartaruga, quanti passi fa? [22]
55. La sirenetta ha trovato in fondo al mare meno di 20 gioielli. Vuole dividerle in parti uguali fra le sue sette sorelle, ma non può farlo perché ne mancano due. Per fortuna una delle sorelle decide di rinunciare alla sua parte, così Ariel può dividere i gioielli in parti uguali fra le rimanenti sorelle. Quanti sono i gioielli? [12]

Livello 2

56. Con riferimento al quesito precedente sui DVD, se li sistemiamo in contenitori da 13 rimangono 2 posizioni vuote, cambia la risposta? [Sì; 1155]
57. Con riferimento al quesito dei pullman, se non riusciamo a sistemare tutti i partecipanti solo in pullman da 50, perché rimangono 8 persone senza posto, quanti sono i partecipanti? [258]
58. In un campionato di calcio a 8 squadre per ogni partita si assegnano 3 punti alla squadra vincente e 0 a quella perdente, in caso di pareggio si assegna 1 punto a ciascuna squadra. A fine campionato (di andata e ritorno), sommando tutti i punteggi ottenuti dalle squadre, qual è il massimo punteggio che si può ottenere? [336]

Lavoriamo insieme

Supponiamo di avere tre forme di grana che pesano 52, 68 e 76 chilogrammi; poiché esse sono difficilmente commercializzabili, il commerciante decide di dividerle in pezzi più piccoli, ma tutte di uguale peso. Quanto deve pesare ciascuno dei pezzi in chili interi se il loro numero totale deve essere il più piccolo possibile?

Poiché vogliamo dividere le forme in parti tutti uguali e senza spreco è evidente che andiamo a cercare un divisore comune ai tre numeri; inoltre poiché vogliamo ottenere il minor numero possibile di pezzi dobbiamo cercare il loro massimo comune divisore.

Cominciamo a scomporre i numeri dei tre pesi: $52 = 2^2 \cdot 13$, $68 = 2^2 \cdot 17$, $76 = 2^2 \cdot 19$. Quindi il loro *MCD* è 4. Perciò suddividiamo le tre forme in $(52 + 68 + 76) : 4 = 196 : 4 = 49$ pezzi da 4 kg. ciascuno.

Livello 1

59. Brenda ha comprato 24 praline al cioccolato, 32 torroncini e 20 caramelle per fare delle confezioni contenenti lo stesso numero di dolci, sia per tipo che in totale. Quante confezioni può fare mettendo in ognuno il massimo numero di dolci di ogni tipo? Quanti dolci di ciascun tipo vi saranno in ogni confezione? [4; (6, 8, 5)]
60. Ho a disposizione 24 mazzi di carte, 40 pupazzi, 16 palle e 32 soldatini. Quanti pacchi regalo contenenti gli stessi oggetti posso formare al più? [8]
61. Le figurine da basket sono in buste da 6, quelle da calcio in buste da 8, quelle da baseball in buste da 12 e quelle di tennis in buste da 9. Quante buste di ogni sport devo comprare come minimo per avere lo stesso numero di figurine per sport? [12; 9; 6; 8]
62. Federico, Tiziana e Amos frequentano lo stesso dentista. Ciascuno dei tre ritorna sempre dopo lo stesso numero di giorni, rispettivamente 6, 8 e 12 giorni. Se oggi si sono incontrati nella sala d'aspetto, fra quanti giorni si rivedranno? (Si suppone che il dentista riceva ogni giorno compresi i festivi) [24]
63. Tre navi il primo gennaio partono da A per andare a B dove effettuano un nuovo carico. Lo stesso giorno di arrivo ripartono per A dove scaricano e ancora lo stesso giorno di arrivo ripartono per B) Continuano questo andirivieni per tutto l'anno. Sapendo che la prima nave compie un tragitto di andata e ritorno in 12 giorni, la seconda in 16 giorni e la terza in 20, fra quanti giorni ripartiranno da A lo

stesso giorno? [240]

Livello 2

64. Caterina ha invitato 8 suoi amici per il giorno di Pasqua e a ognuno vuole regalare lo stesso numero di ovetti. Non tutti però sono certi di poter venire: Giulio verrà solo se lo farà Giada, mentre Anna, Carlo e Tommaso forse andranno insieme a Parigi. Quanti ovetti deve comprare almeno perché possa darne a tutti lo stesso numero, quanti che siano gli intervenuti? [120]
65. Erika ha più di 50 ma meno di 90 caramelle. Si accorge che mentre è insieme ad Alice e Bob potrebbe dividerle in parti uguali con loro. Ne frattempo arriva Tom ed Erika adesso non può più dividere le caramelle in parti uguali fra tutti. Dopo qualche minuto arriva Dalila e perciò lo può fare di nuovo. Quante caramelle ha Erika? [75]
66. Mathias può sistemare le sue figurine a gruppi di 2, di 3, di 4, di 5 e di 6, ma non a gruppi di 7 perché gliene avanzano 4, quante figurine ha, se sono più di 100 ma meno di 1000? [480]

L'insieme dei numeri razionali relativi

Abbiamo già notato che non sappiamo come calcolare 2 : 16 o 3 : 2, perché non abbiamo definito l'operazione di divisione di due numeri, in cui il primo non è multiplo del secondo. Vediamo quindi come possiamo generalizzare l'operazione di divisione nell'insieme dei numeri interi.

Esempio 37

I numeri 18 e 4 non sono uno multiplo dell'altro, ma vi è un multiplo di 4 più "vicino" e più piccolo di 18. Esso è il numero 16. Quindi potremmo scrivere $18 = 4 \cdot 4 + 2$.
Questo fatto vale in effetti per qualsiasi coppia di numeri interi. Per esempio possiamo scrivere

$$2 = 0 \cdot 3 + 2,\ 8 = 2 \cdot 4 + 0,\ 19 = 3 \cdot 6 + 1,\ \ldots$$

Quello che si osserva è che in ogni caso ciò che dobbiamo aggiungere al prodotto per ottenere il dividendo è sempre più piccolo del divisore.

Tenuto conto dell'esempio precedente possiamo enunciare il seguente risultato.

Teorema 23

Dati due numeri naturali m e n, con $n \neq 0$, esistono sempre due numeri naturali q ed r, con q tale che $q \cdot n$ sia il più grande dei multipli di n che non supera m e con $r < n$, per cui si ha: $m = n \cdot q + r$.

Definizione 20

Nella divisione $m : n$, in cui si ha $m = n \cdot q + r$

- m si chiama **dividendo**;
- n si chiama **divisore**;
- q si chiama **quoziente;**
- r si chiama **resto**.

Notazione 14

La divisione di m per n si indica in uno dei seguenti modi: $m : n$, m/n, $\frac{m}{n}$. Quando la scriviamo nell'ultima forma la chiamiamo **frazione**, mentre chiamiamo il numero m **numeratore** e il numero n **denominatore**

Che cosa significa?

Quoziente. Derivato dal latino *quotus* che ha il significato di *quanto*. In generale il quoziente è una quantità. L'etimologia della parola non fornisce informazioni più precise sul suo significato.
Frazione. Dal latino *fractionis* che significa *rottura*. Frazionare significa quindi spezzare e in effetti il procedimento ingenuo della frazione è appunto quello di dividere una quantità in un certo numero di parti uguali.
Numeratore. Equivale a *numero*. Esprime il numero di frazioni unitarie: per esempio 7/5 indica 7 volte la frazione 1/5.
Denominatore. Il prefisso *de* in generale si riferisce a qualcosa posto in basso (per esempio deporre o declinare), quindi in qualche modo esprime la posizione di tale quantità nella frazione.

Così abbiamo esteso l'operazione di divisione a numeri interi qualsiasi. Adesso cerchiamo di capire perché abbiamo detto che il divisore o il denominatore di una frazione non può essere zero.

Esempio 38

- Consideriamo i numeri 7 e 0. Possiamo scrivere $0 = 7 \cdot 0 + 0$, cioè $0 : 7 = 0$.
- Invece non possiamo calcolare $7 : 0$, perché $7 = 0 \cdot 0 + 7 = 0 \cdot 1 + 7 = 0 \cdot 548 + 7$, … cioè ci sarebbero troppi risultati, mentre il nostro calcolo deve essere univoco.

Nel momento in cui dividendo e divisore non sono uno multiplo dell'altro, non siamo più nell'ambito dei numeri interi. Perciò l'operazione di divisione di due numeri interi non è interna in tale insieme. Quindi, come abbiamo fatto per la sottrazione nei naturali, dobbiamo considerare un nuovo insieme numerico, che

contenga i numeri interi e anche i risultati di tutte le divisioni fra interi. Per fare ciò dobbiamo innanzitutto cercare di scrivere i risultati delle divisioni sotto forma di numero. Per fare ciò facciamo come mostrato nell'esempio successivo.

Esempio 39

Consideriamo la divisione 13 : 5. Possiamo scrivere $13 = 5 \cdot 2 + 3$. Ciò significa che il numero 13/5 è un numero più grande di 2 ma più piccolo di 3. Per indicare un numero del genere scriviamo la virgola dopo il 2. Adesso dobbiamo stabilire cosa scrivere dopo questa virgola. Teniamo conto della notazione posizionale dei numeri, secondo cui $13 = 10 + 3$. Allora il resto, 3, lo moltiplichiamo per 10 e lo dividiamo per il divisore, ottenendo $30 = 5 \cdot 6 + 0$. Dato che in questo caso 30 e 5 sono uno multiplo dell'altro, diciamo che la divisione è conclusa e scriviamo 13/5 = 2,6.

Abbiamo perciò creato nuovi numeri, che scriviamo usando la virgola e le consuete cifre. Dobbiamo chiederci però se, considerati due numeri interi qualsiasi, quello che abbiamo visto nell'esempio possa sempre farsi e conduca sempre a risultati simili a quelli visti.

Esempio 40

Vogliamo cercare il numero associato a 13/7. Avremo $13 = 7 \cdot \mathbf{1} + 6$. allora moltiplichiamo il resto per 10 e consideriamo 60/7, ottenendo: $60 = 7 \cdot \mathbf{8} + 4$. Continuiamo il procedimento

$$40 = 7 \cdot \mathbf{5} + 5;\ 50 = 7 \cdot \mathbf{7} + 1;\ 10 = 7 \cdot \mathbf{1} + 3;\ 30 = 7 \cdot \mathbf{4} + 2;\ 20 = 7 \cdot \mathbf{2} + 6;\ 60 = 7 \cdot \mathbf{8} + 4;\ \ldots$$

sembra che il nostro procedimento stavolta non finisca mai. Ed in effetti così è. Però dovremmo accorgerci che siamo entrati in un ciclo, cioè rifaremo sempre le stesse operazioni. Quindi dovremmo scrivere: 13/7 = 1,857142857142…

Abbiamo effettivamente trovato che i risultati delle divisioni fra interi qualsiasi sono nuovi numeri. Non è difficile capire che in effetti la divisione di due numeri interi deve per forza condurre al ripetersi di operazioni già fatte, perché il resto di una divisione è sempre minore del divisore, quindi, per esempio nel caso precedente in cui abbiamo diviso per 7, al massimo dopo 6 volte dovremmo ottenere un resto già ottenuto e quindi ripeteremo sempre le stesse operazioni. In effetti vi sono anche altri numeri un po' diversi dai due visti prima.

Esempio 41

Che numero è 13/6? Abbiamo $13 = 6 \cdot \mathbf{2} + 1$; $10 = 6 \cdot \mathbf{1} + 4$; $40 = 6 \cdot \mathbf{6} + 4$; $40 = 6 \cdot \mathbf{6} + 4$; … Cioè siamo entrati in un ciclo, ma non subito dopo la virgola. Il nostro numero sarà 13/6 = 2,16666….

Non è difficile capire che non ci sono altre possibilità.

Definizione 21

L'insieme dei risultati delle divisioni di due numeri interi con il divisore non nullo, cioè l'insieme delle frazioni, si chiama anche **insieme dei numeri razionali**. Essi si possono scrivere con il quoziente seguito da una virgola e da infinite cifre formate da un primo gruppo di cifre, che può anche mancare, che non si ripete e si chiama **antiperiodo** e un secondo gruppo di cifre che si ripete all'infinito e si chiama **periodo**. In particolare chiamiamo

- **decimali limitati** quelli che hanno periodo zero;
- **periodici semplici**, quelli che non hanno l'antiperiodo e hanno il periodo diverso da zero;
- **periodici misti**, quelli che hanno l'antiperiodo e il periodo diverso da zero.

Notazione 15

- L'insieme dei numeri razionali si indica con il simbolo $\mathbb{Q}$.
- Il periodo dei numeri periodici si indica con un tratto orizzontale che lo sovrasta.

Esempio 42

- Il numero $13:5=13/5=\frac{13}{5}=2,6$ è un numero decimale limitato, dato che il suo periodo è formato dallo zero, potremmo infatti scrivere 2,60000000…..
- Il numero $13:6=13/6=\frac{13}{6}=1,2\overline{6}$ è un numero periodico misto, di antiperiodo 2 e periodo 6.
- Il numero $13:7=13/7=\frac{13}{7}=1,\overline{857142}$ è un numero periodico semplice di periodo 857142.

Che cosa significa?

Periodo. Dal greco *periodos* che vuol dire *circuito*, composto da *peri* che vuole dire *intorno*, e *hodòs* che significa *strada*. Dato che i circuiti sono curve chiuse, spesso circonferenze, e che in un circuito i corridori ripassano per gli stessi punti, il significato è stato esteso appunto a qualcosa che si ripete nel tempo o nello spazio.

Vale il seguente ovvio risultato.

Teorema 24

Il numero m/n ha periodo che può essere al massimo formato da $(n-1)$ cifre.

Dimostrazione

Abbiamo già osservato che dividendo m per n i resti successivi sono tutti minori di n e una volta che uno di essi si ripete, tutto il gruppo si ripeterà, pertanto non possiamo averne più di $n-1$.

Ovviamente i numeri interi sono decimali limitati.

Esempio 43

Abbiamo visto che: $\frac{13}{5}=2,6$. Moltiplichiamo numeratore e denominatore per 3, ottenendo $\frac{39}{15}$. Abbiamo: $39 = 15 \cdot \mathbf{2} + 9$; $90 = 15 \cdot \mathbf{6} + 0$, cioè anche $\frac{39}{15}=2,6$. Chiaramente lo stesso numero, dato che le due operazioni effettuate si sono annullate a vicenda.

In vista del precedente esempio poniamo la seguente definizione.

Definizione 22

Due frazioni che rappresentano lo stesso numero razionale si dicono **equivalenti**.

Quindi ci sono infinite frazioni che rappresentano lo stesso numero razionale.

Esempio 44

Tutte le seguenti infinite frazioni, $\frac{13\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{13\cdot 3}{5\cdot 3}=\frac{13\cdot 4}{5\cdot 4}=\frac{13\cdot 5}{5\cdot 5}=\frac{13\cdot 6}{5\cdot 6}=\ldots$, sono equivalenti a $\frac{13}{5}=2,6$.

Dato che vi sono infinite frazioni fra loro equivalenti, possiamo considerare solo una rappresentante di esse.

Definizione 23

Una frazione in cui numeratore e denominatore sono numeri coprimi fra loro, si dice **ridotta ai minimi termini**.

Infatti se numeratore e denominatore non hanno fattori in comune non possiamo ulteriormente ridurle.

Esempio 45

La frazione 4005/3285 è ridotta ai minimi termini? Certamente no, perché numeratore e denominatore son

entrambi divisibili per 5. Allora scomponiamo in fattori primi: $\frac{4005}{3285}=\frac{3^2\cdot 5\cdot 89}{3^2\cdot 5\cdot 73}$. Si vede che *MCD*(4005; 3285) = $3^2 \cdot 5 = 45$, quindi possiamo eliminare questo fattore comune, ottenendo: $\frac{89}{73}$, che è ovviamente ridotta ai minimi termini.

La riduzione ai minimi termini permette anche di confrontare due frazioni.

Esempio 46

- Le frazioni $\frac{1}{2},\frac{3}{2}$, sono certamente diverse, perché hanno uguale denominatore ma diverso numeratore. Anzi possiamo anche dire che si ha: $\frac{1}{2}<\frac{3}{2}$;
- Cosa possiamo dire delle frazioni $\frac{3}{5},\frac{5}{8}$? Non hanno lo stesso denominatore, ma possiamo ottenerlo nel modo più semplice cioè moltiplicando il numeratore e il denominatore della prima frazione per il denominatore della seconda e numeratore e denominatore della seconda per il denominatore della prima. Cioè $\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 8}{5\cdot 8}=\frac{24}{40},\frac{5}{8}=\frac{5\cdot 5}{8\cdot 5}=\frac{25}{40}$. Adesso possiamo dire che si ha: $\frac{3}{5}=\frac{24}{40}<\frac{25}{40}=\frac{5}{8}$.

Possiamo allora enunciare il seguente risultato.

Teorema 25

Si ha $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$ se e solo se $m\cdot q=p\ \cdot n$; $\frac{m}{n}>\frac{p}{q}$ se e solo se $m\cdot q=p\ \cdot n$.

È interessante vedere come si possa passare da un numero razionale alla frazione che lo rappresenta.

Esempio 47

Che frazione rappresenta il numero decimale limitato 3,78? Possiamo moltiplicare e dividere per una stessa quantità senza che ciò cambi il numero. Così possiamo scrivere: $3,78=\frac{378}{100}$. Quindi abbiamo ottenuto facilmente la frazione associata al numero, che possiamo anche scrivere: $3,78=\frac{2\cdot 189}{2\cdot 50}=\frac{189}{50}$.

Dal precedente esempio si ha il seguente immediato risultato.

Teorema 26

Ogni numero decimale limitato è associato a una frazione il cui numeratore è il numero scritto senza virgola e il denominatore è una potenza di 10 di esponente il numero di cifre dopo la virgola.

Anche per i numeri periodici vi sono delle regole simili, più difficili da dimostrare e che perciò ci limitiamo a riportare.

Teorema 27

Ogni numero periodico semplice è associato a una frazione il cui numeratore è la differenza fra il numero senza la virgola e il numero prima della virgola, e il denominatore è un numero formato da tanti 9 quante sono le cifre del periodo.

Per capire la regola enunciata nel teorema precedente vediamo un esempio.

Esempio 48

Al numero periodico semplice $7,\overline{123}$ associamo la frazione $7,\overline{123}=\frac{7123-7}{999}=\frac{7116}{999}=\frac{2372}{333}$.

Vediamo un analogo risultato per i periodici misti.

Teorema 28

Ogni numero periodico misto è associato a una frazione il cui numeratore è la differenza fra il numero senza la virgola e il numero formato dalle cifre non periodiche, e il denominatore è un numero formato da tanti 9 quante sono le cifre del periodo seguito da tanti 0 quante quelle dell'antiperiodo.

Vediamo l'esempio chiarificatore.

Esempio 49

Si ha: $7,45\overline{123}=\frac{745123-745}{99900}=\frac{744378}{99900}=\frac{6\cdot 124063}{6\cdot 16650}=\frac{124063}{16650}$.

Vi è anche la possibilità di effettuare la procedura inversa, ossia capire che tipo di numero razionale rappresenta una frazione, senza dovere effettuare la divisione.

Teorema 29

Una frazione ridotta ai minimi termini rappresenta

- un numero decimale limitato solo se il suo denominatore contiene solo fattori di 2 o di 5;
- un numero periodico semplice solo se il suo denominatore contiene solo fattori diversi da 2 e 5;
- un numero periodico misto solo se il suo denominatore contiene fattori di 2 o di 5 e fattori diversi da questi.

Vediamo degli esempi riferiti al precedente risultato.

Esempio 50

- Consideriamo la frazione $\frac{13}{20}$, poiché il suo denominatore contiene solo fattori di 2 o 5, $20=2^2\cdot 5$, essa rappresenta un numero decimale limitato. Infatti $\frac{13}{20}=\frac{13\cdot 5}{20\cdot 5}=\frac{65}{100}=0,65$.
- La frazione $\frac{14}{33}$ rappresenta un numero periodico semplice, poiché il suo denominatore contiene solo fattori diversi da 2 e 5, $33 = 3 \cdot 11$. Infatti $\frac{14}{33}=0,\overline{42}$.
- La frazione $\frac{21}{52}$ rappresenta un numero periodico misto, poiché il suo denominatore contiene fattori di 2 o 5 e fattori diversi da 2 e 5, $52=2^2\cdot 13$. Infatti $\frac{21}{52}=0,40\overline{384615}$.
- Non possiamo dire che $\frac{25}{35}$ è periodico misto, infatti anche se il suo denominatore contiene fattori di 5 e 7, la frazione non è ai minimi termini. Quando la riduciamo essa diviene $\frac{5}{7}$ e rappresenta invece un periodico semplice.

Un'altra cosa interessante da osservare è che abbiamo difficoltà a esprimere tabularmente $\mathbb{Q}$, perché in tale insieme non esiste il concetto di successivo e di precedente. Cioè date due frazioni siamo in grado di confrontarle, ossia sappiamo se sono uguali o chi è la più grande e chi la più piccola, ma non siamo in grado di

trovare la successiva di una frazione. Se possiamo dire che il successivo del numero naturale 7 è 8, perché fra i due numeri non vi sono altri numeri naturali, non possiamo indicare il successivo del numero 12,3, perché per esempio fra 12,3 e 12,4 ci sono infiniti altri numeri: 12,34; 12,33331; 12,30000001;..... Ciò vale qualunque altra coppia di numeri razionali venga scelta.

Questa proprietà di $\mathbb{Q}$ di poter trovare fra due numeri razionali almeno un altro numero razionale, e quindi infiniti altri, si esprime dicendo che $\mathbb{Q}$ è un **insieme denso**.

Concludiamo considerando quelle particolari frazioni che vanno sotto il nome di percentuali, ossia frazioni di denominatore 100. La loro particolarità consiste nel fatto che talvolta risulta interessante distinguere una porzione di qualcosa, quantificando quanta parte del totale essa comprende. Ovviamente ciò può farsi dividendo in un numero di parti uguali a piacere, ma a causa del fatto che i nostri numeri sono scritti in base 10 e per avere un numero di parti "sufficiente" si è deciso di dividere in 100 parti uguali, ottenendo così le percentuali. Le usiamo per indicare l'aumento o la diminuzione di un prezzo o di una popolazione o di altro.

Esempio 51

- Un paio di pantaloni costano 40 euro, per i saldi il loro prezzo è scontato del 30%, qual è il nuovo prezzo? Lo sconto del 30% equivale a moltiplicare il totale per 30/100 = 0,3, pertanto lo sconto è di $40 \cdot 0{,}3 = 12$ euro e il prezzo scontato è perciò $(40 – 12) = 28$ euro. In effetti un metodo più veloce consiste nel calcolare il 70% del prezzo, cioè ciò che rimane dopo lo sconto. Infatti $40 \cdot 0{,}7 = 28$.
- Lo scorso anno il prezzo medio della benzina era di € 1,653 quest'anno è diventato € 1,412. Di quanto è diminuito in percentuale? La diminuzione assoluta è stata pari a € (1,653 – 1,412) = €0,241. Per determinare che parte del prezzo iniziale è effettuiamo la divisione $0{,}241/1.653 \approx 0{,}146 = 14{,}6\%$.
- Un certo giorno un titolo in borsa è aumentato del 3,42%, se all'inizio valeva € 1,45, quale sarà il suo prezzo finale? Dobbiamo calcolare $1{,}45 + 1{,}45 \cdot 0{,}0342 \approx 1{,}50$. Poteva ottenere lo stesso risultato più velocemente con l'operazione $1{,}45 \cdot 1{,}0342$.

Tenendo conto degli esempi precedenti possiamo enunciare i seguenti risultati.

Teorema 30

- Per calcolare la diminuzione del $p\%$ di una quantità x basta moltiplicare x per $(1 – p/100)$.
- Per calcolare l'aumento del $p\%$ di una quantità x basta moltiplicare x per $(1 + p/100)$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo ridurre ai minimi termini la frazione $\frac{66}{1287}$. Scomponiamo in fattori numeratore e denominatore: $\frac{66}{1287}=\frac{2\cdot 3\cdot 11}{2\cdot 3^2\cdot 11\cdot 13}$. Adesso eliminiamo i fattori comuni: $\frac{66}{1287}=\frac{\cancel{2}\cdot 3\cdot \cancel{11}}{\cancel{2}\cdot 3^{\cancel{2}}\cdot \cancel{11}\cdot 13}=\frac{1}{3\cdot 13}=\frac{1}{39}$.

Ridurre ai minimi termini le seguenti frazioni

Livello 2

1. $\frac{1245}{2365}\ ;\ \frac{375}{450}\ ;\ \frac{572}{1287}\ ;\ \frac{38250}{34425}\ ;\ \frac{23400}{1560}\ ;\ \frac{32760}{1716}$ $\left[\frac{249}{473}\ ;\ \frac{5}{6}\ ;\ \frac{4}{9}\ ;\ \frac{146}{153}\ ;\ 15\ ;\ \frac{210}{11}\right]$

2. $\frac{132496}{127764};\frac{139536}{217056};\frac{12480}{262080};\frac{127050}{131285};\frac{35784}{46176};\frac{2^3\cdot 3^4\cdot 5^6\cdot 7^8}{2^4\cdot 3^3\cdot 5^5\cdot 7^9}$ $\left[\frac{28}{27}\ ;\ \frac{9}{14}\ ;\ \frac{1}{21}\ ;\ \frac{30}{31}\ ;\ \frac{783}{962}\ ;\ \frac{15}{14}\right]$

3. $\frac{3378375}{13513500}\ ;\ \frac{3599024}{6380088}\ ;\ \frac{12000}{67500}\ ;\ \frac{2\cdot 3\cdot 7}{3\cdot 5\cdot 7}\ ;\frac{3^2\cdot 5\cdot 13}{3\cdot 5\cdot 17}\ ;\frac{2^2\cdot 3^3\cdot 5^5}{2^3\cdot 3^2\cdot 5^5}$ $\left[\frac{1}{4}\ ;\ \frac{22}{39}\ ;\ \frac{8}{45}\ ;\ \frac{2}{5}\ ;\ \frac{39}{17}\ ;\ \frac{3}{2}\right]$

4. $\frac{2^2\cdot 2^3\cdot 2^4}{2^3\cdot 2^5\cdot 2}\ ;\ \frac{2^3\cdot 6^2\cdot 8^4}{3^3\cdot 4^4\cdot 10^2}\ ;\ \frac{2^5\cdot 3^4\cdot 5^3}{2^6\cdot 3^5\cdot 5^3};\frac{2^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11^2}{5\cdot 7^2\cdot 11};\frac{(2^2)^3\cdot(3^3)^2\cdot(5^2)^4}{(2^3)^2\cdot(3^2)^3\cdot(5^4)^2}$ $\left[1\ ;\ \frac{128}{75}\ ;\ \frac{1}{24}\ ;\ \frac{44}{7}\ ;\ 1\right]$

Livello 2

5. $\frac{121^2\cdot 49^3\cdot 64^4}{132^3\cdot 28^3\cdot 128^2}\ ;\ \frac{10^2\cdot 12^3\cdot 14^4\cdot 16^5}{20^2\cdot 24^2\cdot(28\cdot 30^2)^2}\ ;\ \frac{12^2\cdot 15^3\cdot 18^2}{10^3\cdot 9^2\cdot 16^4}\ ;\ \frac{16^3\cdot 27^4\cdot 25^6}{32^2\cdot 9^6\cdot 75^3}$

$\left[\frac{3773}{108}\ ;\ \frac{802816}{16875}\ ;\ \frac{243}{8192}\ ;\ \frac{62500}{27}\right]$

6. $\frac{3630312}{3169320};\frac{(2+3)^3\cdot(3+4)^2\cdot(4+5)^4}{(2+4)^3\cdot(3+5)^4\cdot(5+2)^2};\frac{(3+5)^{2+4}\cdot(5+7)^{3+4}\cdot(7+9)^{2+3}}{(3+7)^{3+2}\cdot(3+9)^{2+4}\cdot(5+9)^{4+3}}$ $\left[\frac{63}{55};\frac{30375}{32768};\frac{2^{28\cdot 3}}{5^5\cdot 7^7}\right]$

Lavoriamo insieme

- Vogliamo scrivere la frazione generatrice del numero decimale limitato 12,34. Dato che il numero è decimale limitato, basta scrivere al numeratore il numero senza virgola e al denominatore 1 seguito da tanti zeri quante sono le cifre decimali, cioè $\frac{1234}{100}=\frac{617}{50}$.
- Scrivere la frazione generatrice del numero periodico semplice $0,\overline{987}$. La regola da applicare consiste nel porre al numeratore la differenza fra il numero senza virgola e la parte intera e al denominatore il numero formato da tanti 9 quante sono le cifre del periodo, cioè $\frac{987-0}{999}=\frac{329}{333}$.
- Scrivere la frazione generatrice del numero periodico misto $1,35\overline{790}$. Modifichiamo leggermente la regola precedente. Al numeratore poniamo la differenza fra il numero senza virgola e il numero composto dalla parte intera e dall'antiperiodo, al denominatore il numero formato da tanti 9 quante le cifre del periodo, seguiti da tanti zero quanto quelle dell'antiperiodo. Quindi: $\frac{135790-135}{99900}=\frac{135655}{99900}=\frac{27131}{19980}$.

Scrivere la frazione generatrice dei seguenti numeri razionali

Livello 1

7. $0,708\overline{3}\ ;\ 1,\overline{09}\ ;\ 6,8\overline{3}\ ;\ 15,\overline{6}\ ;\ 137,0\overline{3}\ ;\ 234,\overline{567}$ $\left[\frac{7013}{9900}\ ;\ \frac{12}{11}\ ;\ \frac{41}{6}\ ;\ \frac{47}{3}\ ;\frac{4111}{30};\frac{8679}{37}\right]$

8. $74,51\overline{42}\ ;\ 1246,9\overline{1}\ ;\ 3,6677\overline{8}\ ;\ 6,88\overline{6}\ ;\ 9,1\overline{2}\ ;\ 3,9\overline{28}$ $\left[\frac{245897}{3300};\frac{56111}{45};\frac{121037}{33000};\frac{1033}{150};\frac{821}{39};\frac{3839}{990}\right]$

9. $0,\overline{8977}$; $1,45\overline{126}$; $1,\overline{23696}$; $0,35\overline{303}$; $2,13\overline{3304}$; $3,7\overline{84}$

$$\left[\frac{8977}{9999};\frac{5747}{3960};\frac{123695}{99999};\frac{233}{660};\frac{2131171}{99900};\frac{1249}{330}\right]$$

Giustificare le risposte ai seguenti quesiti

Livello 2

10. I numeri $0,\overline{77}$ e $0,\overline{7}$ sono fra loro uguali o diversi? [Uguali]
11. Il numero $7,\overline{9}$ è razionale non intero? [No, intero, è 8]
12. Tenuto conto del precedente quesito provare che i numeri periodici semplici di periodo 9 sono numeri interi.
13. Il numero $2,1\overline{9}$ è decimale limitato? [Sì, è 2,2]
14. Tenuto conto del precedente quesito provare che i numeri periodici misti di periodo 9 sono numeri decimali limitati, la cui parte decimale è il numero successivo dell'antiperiodo.
15. Fra $0,1\overline{23}$ e $0,\overline{123}$, chi è il maggiore? $\left[0,\overline{123}\right]$
16. Fra $0,9\overline{87}$ e $0,\overline{987}$, chi è il maggiore? $\left[0,\overline{987}\right]$

Lavoriamo insieme

Consideriamo la frazione $\frac{13}{24}$, ci chiediamo che tipo di numero decimale rappresenta. Possiamo utilizzare il Teorema 29. Dato che la frazione è ridotta ai minimi termini e si ha: $24=2^3\cdot 3$, per il detto teorema la frazione rappresenta un numero periodico misto. Verifichiamo: $\frac{13}{24}=0,541\overline{6}$.

Date le seguenti frazioni, utilizzando il Teorema 29, dire che tipo di numero razionale rappresenta ciascuna di esse

Livello 1

17. $\frac{1}{13}$; $\frac{19}{24}$; $\frac{1}{17}$; $\frac{13}{144}$; $\frac{2}{15}$; $\frac{27}{42}$; $\frac{44184}{789}$; $\frac{13}{38}$ [p.s.; p.m.; p.s.; p.m.; p.m.; p.m.; p.m.; p.m.]
18. $\frac{12}{25}$; $\frac{21}{20}$; $\frac{3}{40}$; $\frac{11}{101}$; $\frac{28}{73}$; $\frac{7}{24}$; $\frac{1}{52}$; $\frac{1}{32}$ [d.l.; d.l.; d.l.; p.s.; p.s.; p.m.; p.m.; d.l.]

Livello 2

19. $\frac{4}{46}$; $\frac{27}{24}$; $\frac{12}{34}$; $\frac{13}{169}$; $\frac{3}{30}$; $\frac{21}{35}$; $\frac{44}{5500}$; $\frac{17}{68}$ [p.s.; d.l.; p.s.; p.s.; d.l.; d.l.; d.l.; d.l.]

Lavoriamo insieme

Vogliamo ordinare le frazioni $\frac{5}{7}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{13}{19}$. Possiamo confrontarle a due a due con il metodo cosiddetto del prodotto in croce, ossia moltiplichiamo numeratore dell'una per il denominatore dell'altra, il prodotto maggiore dice che è più grande la frazione che ha il numeratore in tale prodotto. Non è altro che la riduzione a un denominatore comune, che non è per forza il minimo. Per esempio, poiché $5\cdot 4<7\cdot 3$, allora $\frac{5}{7}<\frac{3}{4}$, poiché è come se avessimo scritto $\frac{5}{7}=\frac{5\cdot 4}{7\cdot 4}=\frac{20}{28}<\frac{3\cdot 7}{4\cdot 7}=\frac{21}{28}=\frac{3}{4}$, in questo caso il denominatore è anche *mcm*. A questo punto confrontiamo un'altra coppia, per esempio $\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 19}{4\cdot 19}=\frac{57}{76}>\frac{13\cdot 4}{19\cdot 4}=\frac{52}{76}$, per stabilire che $\frac{3}{4}$ è la maggiore delle frazioni. Infine, poiché $\frac{5}{7}=\frac{5\cdot 19}{7\cdot 19}=\frac{95}{133}>\frac{13\cdot 7}{19\cdot 7}=\frac{91}{133}$, possiamo dire che si ha: $\frac{3}{4}>\frac{5}{7}>\frac{13}{19}$. In alternativa effettuiamo il *mcm* dei denominatori: $\frac{5}{7}=\frac{380}{532}$; $\frac{3}{4}=\frac{399}{532}$; $\frac{13}{19}=\frac{273}{532}$. Oppure

scriviamo i numeri in forma decimale: $\frac{5}{7}=0,\overline{714285}$; $\frac{3}{4}=0,75$; $\frac{13}{19}\approx 0,68$

Ordinare i seguenti gruppi di frazioni

Livello 1

20. $\left(\frac{1}{4},\frac{7}{27}\right);\left(\frac{2}{3},\frac{3}{5}\right);\left(\frac{5}{8},\frac{11}{18}\right);\left(-\frac{3}{4},-\frac{7}{9}\right)$ $\left[\left(\frac{1}{4}<\frac{7}{27}\right);\left(\frac{3}{5}<\frac{2}{3}\right);\left(\frac{11}{18}<\frac{5}{8}\right);\left(-\frac{7}{9}<-\frac{3}{4}\right)\right]$

21. $\left(\frac{9}{11},\frac{4}{5}\right);\left(-\frac{7}{9},-\frac{4}{5}\right);\left(\frac{6}{19},\frac{1}{3}\right);\left(-\frac{11}{3},-\frac{18}{5}\right)$ $\left[\left(\frac{4}{5}<\frac{9}{11}\right);\left(-\frac{4}{5}<-\frac{7}{9}\right);\left(\frac{6}{19}<\frac{1}{3}\right);\left(-\frac{11}{3}<-\frac{18}{5}\right)\right]$

22. $\left(\frac{4}{7},\frac{3}{5},\frac{8}{13}\right);\left(\frac{2}{3},\frac{11}{17},\frac{5}{8}\right);\left(-\frac{2}{3},-\frac{3}{4},-\frac{4}{5}\right)$ $\left[\left(\frac{4}{7}<\frac{3}{5}<\frac{8}{13}\right);\left(\frac{5}{8}<\frac{11}{17}<\frac{2}{3}\right);\left(-\frac{2}{3}<-\frac{3}{4}<-\frac{4}{5}\right)\right]$

23. $\left(\frac{16}{17},\frac{14}{15},\frac{28}{31}\right);\left(\frac{42}{35},\frac{51}{47},\frac{63}{56}\right);\left(-\frac{147}{18},-\frac{214}{37},-\frac{55}{7}\right)$

$\left[\left(\frac{28}{31}<\frac{14}{15}<\frac{16}{17}\right);\left(\frac{51}{47}<\frac{63}{56}<\frac{42}{35}\right);\left(-\frac{147}{18}<-\frac{55}{7}<-\frac{214}{37}\right)\right]$

Livello 2

24. $\left(\frac{11}{12},\frac{15}{16},\frac{18}{19},\frac{21}{23}\right);\left(-\frac{15}{17},-\frac{19}{22},-\frac{31}{34},-\frac{62}{65}\right)$ $\left[\left(\frac{21}{23}<\frac{11}{12}<\frac{15}{16}<\frac{18}{19},\right);\left(-\frac{62}{65}<-\frac{31}{34}<-\frac{15}{17}<-\frac{19}{22}\right)\right]$

Livello 3

25. Fra $\frac{m}{n}$ e $\frac{m+1}{n+1}$, con $m, n\in\mathbb{N}$, si può stabilire chi è maggiore? $\left[m>n\Rightarrow\frac{m}{n}>\frac{m+1}{n+1};m<n\Rightarrow\frac{m}{n}<\frac{m+1}{n+1}\right]$

26. Se $m>n>0$ e $p>q>0$, è vero che $\frac{m}{p}>\frac{n}{q}$? $\left[\text{No},\frac{3}{2}>\frac{4}{3}\right]$

27. Se $m>n>0$ e $p>q>0$, è vero che $\frac{m}{q}>\frac{n}{p}$? [Sì]

Lavoriamo insieme

- Sappiamo che su 20 studenti della I H, 13 praticano sport, che percentuale di studenti pratica uno sport? Dobbiamo fare in modo di scrivere la frazione $\frac{13}{20}$, come una frazione equivalente ma con denominatore 100. Basta quindi moltiplicare numeratore e denominatore per 5: $\frac{13}{20}=\frac{13\cdot 5}{20\cdot 5}=\frac{65}{100}=65\%$.
- Se la I H avesse avuto 21 studenti non saremmo riusciti a scrivere la frazione $\frac{13}{21}$ in una frazione equivalente con denominatore 100, dato che 21 non è un divisore di 100. Allora avremmo trovato un valore approssimato. In particolare, poiché 21 · 4 = 84 e 21 · 5 = 105, possiamo dire che la percentuale cercata è compresa tra 4 · 13 = 52% e 5 · 13 = 65%. Oppure possiamo esprimere la frazione in numero decimale: $\frac{13}{21}=0.\overline{6190476}$, dicendo quindi che essa è circa il 62%, valore più preciso dei precedenti.

Livello 1

28. Che percentuale rappresenta uno sconto di € 15,00 su un prezzo iniziale di € 40,00? [37,5]
29. Il prezzo della benzina è aumentato del 2,5%, se prima costava e 1,300 al litro, che prezzo ha adesso? Il risultato va approssimato a 3 cifre decimali. [€ 1,333]
30. Dopo uno sconto del 20% un articolo costa € 44,80, quanto costava prima? [€ 56,00]
31. Il 30% degli abitanti di un grosso palazzo, è formato da 87 persone, quanti sono tutti gli abitanti? [290]
32. Su 1250 persone, il 42% sono maschi, il 40% di questi sono stranieri. Quanti italiani maschi ci sono? [315]

Livello 2

33. Un ragazzo va al cinema e, fra il prezzo del biglietto, gelati e altri dolci che compra, spende 1/3 dei soldi che ha con sé; tornando a casa non si accorge di avere un buco in tasca e perde i 2/3 del denaro che gli era rimasto. Alla fine si accorge di avere solo 12 euro; quanti soldi aveva con sé? [€ 54,00]
34. Marco ha comprato alcune caramelle, una la ha mangiata subito, metà delle rimanenti le ha messe in tasca e le rimanenti le ha nascoste. Suo fratello Luca le ha trovate, e ha ripetuto ciò che aveva fatto Marco, ne ha mangiata una e ne ha prese metà delle rimanenti. Lo stesso ha poi fatto il terzo fratello Matteo. Quando l'ultimo fratello, Giovanni, ha trovato le caramelle ne erano rimaste solo 7, che egli ha preso tutte. Quante erano le caramelle inizialmente? [63]

Livello 3

35. Il costo di un quadro è stato dimezzato per 4 volte di fila, perché non si trovavano venditori. Alla fine che percentuale di sconto è stata applicata? [93,75%]
36. Un'azione, un certo giorno perde il 15% del suo valore, il giorno dopo invece aumenta del 15%. Possiamo dire che alla fine ha lo stesso valore iniziale? [No, ha perso il 2,25%]

Operazioni con le frazioni

Passiamo adesso alle operazioni con le frazioni.

Esempio 52

- Come si calcola $\frac{3}{4}+\frac{5}{4}$? Che significa questa somma? $\frac{3}{4}$ si ottiene dividendo un oggetto in 4 parti uguali e prendendone 3. Ma anche $\frac{5}{4}$ si ottiene dividendo in 4 parti uguali, anche se poi se ne prendono 5 della stessa grandezza. Ciò significa che $\frac{3}{4}+\frac{5}{4}$ equivale a sommare 3 e 5 oggetti uguali, ottenendo 8 oggetti uguali ciascuno a $\frac{1}{4}$. perciò ovviamente $\frac{3}{4}+\frac{5}{4}=\frac{8}{4}=2$.
- Come si calcola $\frac{3}{4}+\frac{7}{6}$? Basta ricondurre ciascuna delle due frazioni a una con lo stesso denominatore. Dato che $\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 6}{4\cdot 6}=\frac{18}{24};\frac{7}{6}=\frac{7\cdot 4}{6\cdot 4}=\frac{28}{24}$ si ha: $\frac{3}{4}+\frac{7}{6}=\frac{18}{24}+\frac{28}{24}=\frac{46}{24}=\frac{23}{12}$.

In effetti però potremmo scrivere due frazioni con lo stesso denominatore, in modo che questo sia il minimo possibile.

Esempio 53

$\frac{3}{4}$ e $\frac{7}{6}$ possono scriversi con lo stesso denominatore, considerando il *mcm*(4; 6) = 12, cioè avremo: $\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{9}{12};\frac{7}{6}=\frac{7\cdot 2}{6\cdot 2}=\frac{14}{12}$, quindi $\frac{3}{4}+\frac{7}{6}=\frac{9}{12}+\frac{14}{12}=\frac{23}{12}$.

Possiamo allora enunciare il seguente risultato.

Teorema 31

Si ha: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot m+c\cdot n}{mcm(b,d)}$, con $m=\frac{mcm(b,d)}{b}, n=\frac{mcm(b,d)}{d}$.

Passiamo alla moltiplicazione fra frazioni.

Esempio 54

La moltiplicazione di due frazioni è ovvia, dalla stessa definizione di frazione. Abbiamo: $\frac{3}{5}\cdot\frac{8}{7}=\frac{3\cdot 8}{5\cdot 7}=\frac{24}{35}$.

Dall'esempio precedente abbiamo il caso generale.

Teorema 32

Si ha: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$.

Più delicata appare la trattazione della divisione fra frazioni.

Esempio 55

Cosa significa: $\frac{8}{3}:\frac{5}{4}$? Che significa 8 : 4? Suddividere 8 oggetti in 4 parti uguali. Così 8 : 4 = 2. Si può però

scrivere anche $\frac{8}{4}=8\cdot\frac{1}{4}=2$. Allora $8:\frac{5}{4}=8:\left(5\cdot\frac{1}{4}\right)=8:5:\frac{1}{4}=\frac{8}{5}:\frac{1}{4}=\frac{8}{5}\cdot 4=\frac{32}{5}$. Infine si ha: $\frac{8}{3}:\frac{5}{4}=\frac{8}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{32}{15}$

Quanto visto nell'esempio ci permette di enunciare il seguente risultato generale.

Teorema 33

Si ha: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$.

Poniamo una definizione.

Definizione 24

Dato un numero *N* diverso da zero, diciamo suo **inverso** o suo **reciproco**, il numero *M* per cui si ha: $N \cdot M = 1$. La reciproca della frazione $\frac{n}{m}, n\neq 0$ è la frazione $\frac{m}{n}$.

Possiamo ora considerare una proprietà per la divisione di potenze che hanno la stessa base.

Esempio 56

Come possiamo scrivere $\frac{2^5}{2^3}$? Scriviamo $\frac{2^5}{2^3}=\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot 2\cdot 2}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}}=2^2$. Cioè $\frac{2^5}{2^3}=2^{5-3}=2^2$.

Possiamo quindi enunciare il seguente risultato.

Teorema 34

Vale la seguente formula: $m^n : m^p = m^{n-p}, m\in\mathbb{Z},\ n, p\in\mathbb{N}$.

La precedente regola permette di dare significato anche a potenze con esponente negativo o nullo.

Esempio 57

Che significa 5^0? Per il teorema precedente possiamo scrivere: $5^0=5^{1-1}=\frac{5}{5}=1$

Tenuto conto dell'esempio precedente poniamo la seguente definizione.

Definizione 25

Diciamo che la scritta n^0, $n\neq 0$, rappresenta il numero 1.

Non diamo alcun senso alla scritta 0^0, perché dovrebbe essere allora $0^0=0^{1-1}=\frac{0}{0}$, ma in precedenza non avevamo dato significato alla divisione al secondo membro.
Avendo definito le potenze ad esponente zero, possiamo osservare che la notazione esponenziale permette di scomporre ogni numero naturale nella **notazione posizionale decimale**. Così il numero 1234 si può scrivere come $1234=1\cdot 10^3+2\cdot 10^2+3\cdot 10^1+4\cdot 10^0$.
Adesso vediamo di dare significato anche alle potenze con esponente negativo.

Esempio 58

Che significa 5^{-2}? Abbiamo: $5^{-2}=5^{0-2}=\frac{5^0}{5^2}=\frac{1}{5^2}=\left(\frac{1}{5}\right)^2$

Possiamo allora porre la seguente definizione.

Definizione 26

Diciamo che la scritta m^{-n}, con $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}$, rappresenta il numero $\frac{1}{m^n}$.

L'angolo storico

- I simboli che usiamo per le cifre sono detti indo–arabi, perché risultano una sistemazione da parte degli arabi di un'invenzione indiana. Ciò è avvenuto in un'epoca a noi abbastanza vicina, cioè il IX secolo d. C. In questa stessa epoca è nato lo zero sia come simbolo, sia come cifra, sia soprattutto come concetto. In effetti lo zero, nella cultura occidentale non appare prima del 1200, importato dalla matematica araba da Leonardo Pisano detto il Fibonacci (figlio di Bonaccio), il quale lo ha anche "battezzato", chiamandolo *zefiro* che con variazioni è poi diventato zero.
- Anche i simboli < e >, sono sorti nel panorama matematico in epoca relativamente recente, essi infatti si trovano per la prima volta nella letteratura matematica in un'opera di Thomas Harriot, *Artis analyticae praxis ad aequationes algebraicas resolvendas*, pubblicata postuma nel 1641.
- Pure i simboli + e – hanno origini abbastanza recenti, dato che apparvero per la prima volta in stampa, in un libro di aritmetica pratica pubblicato a Leipzig nel 1489. Il loro uso non è divenuto norma fino al XIX secolo.
- Il simbolo moderno del prodotto (cioè ·) è dovuto al grande filosofo e matematico tedesco Gottfried Wilhelm von Leibniz che lo usò in una lettera del 1698 indirizzata al matematico svizzero Johan Bernoulli. Il simbolo $\times$ fu invece usato da William Oughtred nel 1628.
- La regola che usiamo di solito per moltiplicare due numeri è abbastanza recente. In antichità venivano usate molte altre regole. In particolare Luca Pacioli nel 1494, nel *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, ne presenta ben 8: per *scachieri*, *castellucio*, *a travelletta* o *per colona*, *per quadrilatero*, *per crocetta*, *per gelosia* o *graticola*, *per reppiego* e *a scapezza*. Mostriamo per esempio quella *per castellucio*.

$$\begin{array}{r} 234 \quad \times \\ 567 \\ \hline 2\ 0^{a} \\ 1\ 4^{b} \\ 1\ 5^{c}2\ 4^{d} \\ 1\ 2^{e}2\ 1^{f} \\ \underline{10^{g}1\ 8^{h}28^{i}} \\ 13\ 2\ 6\ 7\ 8 \end{array}$$

  Abbiamo usato delle lettere per spiegare da cosa derivano i numeri scritti:

$$^{a}5\times 4;^{b}7\times 2;^{c}5\times 3;^{d}6\times 4;^{e}6\times 2;^{f}7\times 3;^{g}5\times 2;^{h}6\times 3;^{i}7\times 4$$

  Come si vede una struttura alquanto laboriosa.
- L'uso di un punto o una virgola per separare la parte intera di un numero da quella decimale è abbastanza recente. Il belga Simon Stevin (1548 – 1620) usava una curiosa notazione, per esempio 27.549 lo indicava con 27 (0) 5 (1) 4 (2) 9 (3). Successivamente lo svizzero Jorst Bürgi (1552 – 1632) introdusse un pallino sopra la cifra delle unità della parte intera, scrivendo $2\overset{\circ}{7}\,549$. Curiosamente fu un italiano, tale Magini, a introdurre il virgola. La virgola è invece dovuta all'olandese Willebrord Snellius.

I protagonisti

Eratostene. Matematico greco nato a Cirene nel 276 a.C. e morto nel 194 a.C. Fu bibliotecario della famosa biblioteca di Alessandria, è noto per aver determinato con buona approssimazione la misura del raggio terrestre. È anche famoso poiché risulta il "destinatario" de Il metodo, opera minore di Archimede in cui questi descrive il suo metodo di scoperta di molte formule per il calcolo dei volumi di alcuni corpi rotondi.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo semplificare la seguente espressione:

$$\frac{4}{25}\cdot\left(\frac{4}{25}-1+\frac{25}{4}\right)\cdot\left(\frac{6}{5}-\frac{5}{2}\right)-\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\left[3\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3-\left(\frac{5}{2}\right)^3\right]+4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}-\frac{5}{2}\right).$$

Procediamo con ordine, sviluppando intanto le espressioni all'interno delle parentesi tonde.

$$\frac{4}{25}\cdot\frac{16-100+625}{100}\cdot\frac{12-25}{10}-\frac{4}{25}\cdot\left[3\cdot\frac{8}{125}-\frac{125}{8}\right]+4\cdot\frac{8}{27}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{4-25}{10}.$$

Sempre lavorando all'interno delle parentesi sommiamo i numeri al numeratore ed effettuiamo le moltiplicazioni legittime: $\frac{4}{25}\cdot\frac{541}{100}\cdot\frac{-13}{10}-\frac{4}{25}\cdot\left[\frac{24}{125}-\frac{125}{8}\right]+\frac{32}{27}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{-21}{10}$.

Moltiplichiamo, laddove possibile, semplificando con il cosiddetto metodo a croce, cioè numeratore con denominatore.

$$\frac{\cancel{4}^{1}}{25}\cdot\frac{541}{\cancel{100}^{25}}\cdot\frac{-13}{10}-\frac{4}{25}\cdot\frac{192-15625}{1000}+\frac{\cancel{32}^{8}}{\cancel{27}^{9}}\cdot\frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{2}^{1}}\cdot\frac{\cancel{-21}^{7}}{\cancel{10}^{1}}=-\frac{7033}{6250}-\frac{4}{25}\cdot\frac{-15433}{1000}-\frac{56}{9}=$$

$$=-\frac{7033}{6250}-\frac{\cancel{4}^{1}}{25}\cdot\frac{-15\,433}{\cancel{1000}^{250}}-\frac{56}{9}=-\frac{7033}{6250}+\frac{15\,433}{6250}-\frac{56}{9}.$$

Adesso effettuiamo l'ultimo minimo comune denominatore:

$$\frac{-63\,297+138\,897-350\,000}{56\,250}=-\frac{274\,400}{56\,250}=-\frac{2^{\cancel{5}^{4}}\cdot\cancel{5}^{2}\cdot 7^3}{\cancel{2}\cdot 3^2\cdot\cancel{5}^{3}}=-\frac{2^4\cdot 7^3}{3^2\cdot 5^3}=-\frac{5488}{1125}.$$

Semplificare le seguenti espressioni

Livello 1

1. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{4}{3}\ ;\ \frac{5}{4}-\frac{4}{5}+\frac{5}{6}-\frac{6}{5}\ ;\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$ $\left[-\frac{1}{12};\frac{1}{12};\frac{31}{16}\right]$
2. $\frac{7}{5}+\frac{2}{9}-4-\frac{14}{5}+\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{5}{8}:\frac{1}{4}+\frac{3}{5}-\frac{1}{10}+\frac{3}{2}-1$ $\left[-\frac{247}{90};-\frac{1}{24};\frac{5}{4}\right]$
3. $-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{4}{6}-\frac{5}{8}+\frac{1}{12}\ ;\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\ ;\ 1-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$ $\left[-\frac{11}{24};2;\frac{5}{4}\right]$
4. $\frac{4}{5}+\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{3}{10}\right)+\frac{1}{12}-\frac{1}{6}$ $\left[\frac{37}{20}\right]$
5. $\frac{5}{8}-\frac{2}{3}+\frac{2}{5}-\frac{3}{4}+\frac{1}{6}-\left(\frac{8}{5}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\ ;\ \frac{5}{6}+\frac{6}{5}+\frac{5}{4}-\left(\frac{2}{3}+\frac{7}{10}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{7}{12}\right)$ $\left[-\frac{103}{40};1\right]$
6. $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\left(1+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{10}+\frac{2}{3}-\left(\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\right)$ $\left[-\frac{27}{20}\right]$
7. $-\frac{1}{2}+\frac{6}{5}-\frac{3}{4}-\frac{14}{15}-\left(\frac{4}{9}+\frac{3}{2}+\frac{8}{3}+\frac{5}{3}\right)-\left(\frac{1}{18}+\frac{7}{10}\right)-\frac{7}{12}+\frac{3}{5}$ $[-8]$

Livello 2

8. $\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{11}{4}-\frac{3}{2}\right)\ ;\ \left(\frac{1}{2}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)+\frac{3}{4}$ $\left[\frac{11}{32};0\right]$
9. $\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)-6\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{5}\right)$ $\left[\frac{86}{225}\right]$

10. $\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{2}{3}\cdot 2-1;\ \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$ $\left[\frac{25}{48};-\frac{1}{9}\right]$

11. $\left(\frac{1}{4}\right)^3-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4}\cdot 3+5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5;\ \left(\frac{2}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{4}{9}+\frac{2}{3}+1\right)-\left(\frac{2}{3}-1\right)^3$ $\left[\frac{113}{192};-\frac{2}{3}\right]$

12. $\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{9}{16}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{9}{16}-\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\right)$ $\left[-\frac{1}{4}\right]$

13. $\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right)^2$ $\left[-\frac{29}{72}\right]$

14. $\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}-1\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)^2\right]\cdot\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]$ $\left[\frac{145}{432}\right]$

15. $\left(\frac{2}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{2}{3}+1\right)+\left[\frac{1}{3}-2-\left(\frac{1}{2}+1\right)\right]^2;\ \left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}-1\right)-\left(\frac{2}{3}+2\right)^3$ $\left[\frac{605}{36};-\frac{502}{27}\right]$

16. $\left\{\frac{2}{5}-\left[\frac{5}{2}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\right]\cdot\frac{1}{4}\right\}\cdot\frac{3}{8};\ \frac{1}{4}-\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{2}{3}-1-\left(\frac{1}{4}-2\right)\right]\cdot\frac{1}{2}\right\}\cdot\frac{1}{2}$ $\left[-\frac{1}{160};-\frac{3}{32}\right]$

17. $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right);\ \left\{\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)-1\right]\right\}\cdot\frac{4}{3}$ $\left[-\frac{13}{840};-\frac{41}{54}\right]$

18. $\left\{\frac{2}{5}-\left[\frac{3}{4}+\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\right]\right\}\cdot\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{3}$ $\left[\frac{213}{800}\right]$

19. $\left(\frac{1}{4}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{4}+1\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)^2;\ \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-1\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-1\right)^2$ $\left[-\frac{139}{144};-\frac{2}{9}\right]$

20. $\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)^2$ $\left[-\frac{533}{720}\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo semplificare la seguente espressione: $\frac{\frac{4}{7}-\left(\frac{3}{4}\right)^2-\frac{5}{8}}{\frac{1}{56}+\frac{1}{28}-\frac{5}{7}}$. Lavoriamo innanzitutto sulle espressioni poste a numeratore e denominatore della linea di frazione più lunga: $\frac{\frac{4}{7}-\frac{9}{16}-\frac{5}{8}}{\frac{1+2-40}{56}}=\frac{\frac{64-63-70}{112}}{\frac{1+2-40}{56}}=\frac{-\frac{69}{112}}{\frac{-37}{56}}$.

Adesso teniamo conto che una frazione è una divisione e ricordiamo la regola: *la divisione fra due frazioni equivale al prodotto della prima per l'inversa della seconda*. Quindi $-\frac{69}{112}\cdot\frac{-56}{37}=-\frac{69}{\cancel{112}^{2}}\cdot\frac{-\cancel{56}^{1}}{37}=\frac{69}{74}$.

Semplificare le seguenti espressioni frazionarie

Livello 1

21. $\frac{\frac{11}{13}+\frac{13}{11}-2}{\frac{13}{11}-\frac{11}{13}};\ \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}:\frac{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}};\ \frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+1}\cdot\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-1}{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-1};\ \frac{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)^2}\cdot\left(\frac{5}{2}+\frac{2}{9}\right)$ $\left[\frac{1}{12};\frac{1}{85};-\frac{49}{221};\frac{1}{18}\right]$

22. $\left(-3\cdot\dfrac{\frac{3}{2}-2}{1-\frac{1}{2}}+1\right)\cdot\dfrac{9}{2}\ ;\ \dfrac{\frac{7}{3}-1}{-\frac{5}{9}}\ ;\ \left(\dfrac{\frac{1}{8}+1}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1}+\dfrac{\frac{5}{3}+1}{-\frac{1}{5}-3}\right)\cdot\left(\dfrac{-30}{7}\right)$ $\left[18;\frac{2}{5};-\frac{20}{7}\right]$

23. $\dfrac{\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\right)\right]^2}{\frac{1}{4}+\frac{4}{25}+\frac{2}{5}}\ ;\ 1-\frac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{2}{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}-\dfrac{2}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}\right)\ ;\ \dfrac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\right)}{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{36}}$ $\left[\frac{1}{100};\frac{41}{5};\frac{1}{6}\right]$

24. $\dfrac{1+\frac{\frac{3}{5}}{8}}{\frac{5}{8}+2-3\cdot\frac{8}{5}}\ ;\ \dfrac{\frac{1}{4}+2-\frac{1}{\frac{1}{4}+2}}{\frac{1}{4}+4-\frac{3}{\frac{1}{4}+2}}\ ;\ \dfrac{\left(1+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-1\right)}{\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{3}}$ $\left[-\frac{43}{57};\frac{13}{21};\frac{5}{16}\right]$

25. $\dfrac{\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+1-\frac{1}{8}\right)}{\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right)}\ ;\ \dfrac{\frac{4}{9}+\frac{9}{16}-3}{\left(\frac{2}{3}-2\right)\cdot\left(\frac{4}{9}+\frac{4}{3}+4\right)}\cdot\dfrac{3\cdot\frac{4}{9}+16}{16+\frac{9}{2}}$ $\left[-\frac{161}{10};\frac{7}{32}\right]$

26. $\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{5}+3}+\dfrac{6}{\frac{1}{5}-3}-\dfrac{\frac{3}{5}+2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2+9}{\left(\frac{1}{5}-3\right)\cdot\left(\frac{1}{5}+3\right)}\cdot\dfrac{\frac{1}{25}+39}{5-\frac{3}{25}}\ ;\ \dfrac{\frac{1}{4}+\frac{4}{9}-3-\frac{5}{36}}{\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+1\right)}\cdot\dfrac{23}{1+\frac{9}{2}}$ $\left[\frac{107}{16};\frac{32}{3}\right]$

27. $\dfrac{\frac{7}{2}+\frac{7}{4}-1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-2}\cdot\dfrac{\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+2\right)}{\frac{3}{4}-3}\ ;\ \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-1-\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-1}\cdot\dfrac{\frac{1}{4}-1}{\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)}\cdot\dfrac{\frac{1}{2}+1}{3\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}$ $\left[-\frac{25}{9};-\frac{7}{5}\right]$

Livello 2

28. $\dfrac{\frac{\frac{8}{3}+\frac{11}{5}}{\frac{3}{8}+\frac{5}{11}}}{\left(\frac{5}{11}+\frac{11}{5}\right)\cdot\frac{121}{146}}\ ;\ \dfrac{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}{\left(\frac{2}{3}-1\right)^2}+\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1}{\left(\frac{1}{2}-3\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+3\right)}-\dfrac{\frac{2}{5}-\frac{1}{4}+1}{\frac{2}{5}+\frac{1}{4}-1}$ $\left[\frac{8}{3};\frac{709}{84}\right]$

29. $1-\dfrac{1}{\frac{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}}}}+1-\frac{1}{2}-\dfrac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{1}{3}\ ;\ \dfrac{\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}-\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}}{\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}-1}\cdot\left(1-\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}\right)$ $\left[\frac{1}{36};\frac{12}{25}\right]$

30. $\dfrac{\left(\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}-\frac{1}{4}}+\dfrac{\frac{1}{5}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}\right)\cdot\dfrac{\frac{2}{5}-\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}+\frac{3}{4}}}{\frac{1}{10}-\frac{2}{5}+\frac{3}{10}-\frac{7}{20}}+1\ ;\left(1-\dfrac{1-\frac{1}{3}}{\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)^2}\cdot\dfrac{\frac{1}{3}-1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)}\right)\cdot\dfrac{\frac{3}{2}-\frac{1}{4}}{\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{2}\right)^2}$ $\left[-\frac{1433}{207};\frac{931}{2535}\right]$

31. $\frac{1}{3}\cdot\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}+\frac{7}{2}-1}-\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}}\cdot\dfrac{\frac{7}{3}}{\frac{3}{4}-1}\ ;\ \dfrac{\frac{1}{4}+6}{\frac{1}{4}+\frac{5}{2}+4}-\dfrac{7-\frac{1}{2}}{9}-\dfrac{\frac{3}{2}+1}{6-\frac{3}{2}}-\dfrac{\frac{3}{4}+7}{\frac{1}{2}-14}$ $\left[-\frac{1094}{117};\frac{2}{9}\right]$

32. $\dfrac{1}{\frac{3}{4}+\frac{4}{3}-3}+\dfrac{1}{\frac{3}{4}+\frac{4}{3}+3}-\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{4}{3}}{\left(\frac{3}{4}+\frac{4}{3}\right)^2-9}\cdot\dfrac{\left(\frac{3}{4}+\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{4}{3}-3\right)}{\left(\frac{25}{12}\right)^2}$ $\left[-\frac{12}{11}\right]$

Livello 3

33. $\dfrac{\dfrac{\frac{1}{5}+1}{\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}+3\right)}+\dfrac{\frac{1}{5}-1}{\left(\frac{1}{5}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{5}-3\right)}-\dfrac{1-\frac{2}{5}}{\frac{1}{5}\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)}}{\dfrac{-\frac{4}{5}}{3-\frac{4}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2}-\left[\dfrac{\frac{6}{5}}{\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}-3\right)}+\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{25}}\right]}\ ;\ \dfrac{\frac{2}{\frac{7}{4}-2}-\frac{3}{\frac{7}{4}+4}}{\frac{2}{\left(\frac{7}{4}\right)^2+\frac{7}{4}-2}-\frac{3}{\left(\frac{7}{4}+4\right)\cdot\left(\frac{7}{4}-1\right)}}$ $\left[\frac{5}{6};-\frac{63}{8}\right]$

34. $\left(\dfrac{\frac{1}{3}+4}{\frac{1}{3}+1}-\dfrac{\frac{1}{3}+3}{\frac{1}{3}+1}\right)\cdot\left(1-\dfrac{\frac{1}{3}+2}{\frac{1}{3}+1}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{20}{71}\right);\left(\dfrac{\frac{11}{3}+\frac{3}{11}}{\frac{11}{3}-\frac{3}{11}}+\dfrac{1}{1+\frac{3}{11}}-\dfrac{1}{1-\frac{3}{11}}\right)\cdot\dfrac{3\cdot\left(\frac{12}{8}-1\right)}{1-\frac{2}{14}}$ $\left[\frac{1}{16};1\right]$

Lavoriamo insieme

Spesso abbiamo a che fare con problemi che riguardano la suddivisione in parti proporzionali di una certa quantità. Vediamo per esempio un problema proposto da un indiano vissuto nel IX secolo, un tale Mahavira. 20 *uomini dovevano portare un palanchino per una lunghezza di due yojana in cambio di una somma di* 720 *dinari. Due uomini stanchi lasciarono perdere dopo* 2 *krosa, dopo altri due krosa lasciarono altri* 3 *uomini e dopo metà del rimanente tragitto abbandonarono* 5 *uomini. I rimanenti conclusero il viaggio e ricevettero l'intero compenso, come doveva essere diviso fra i* 20 *uomini*?

Non ci lasciamo impressionare dagli yojana e dai krosa, sono antiche unità di misura di lunghezza, quello che a noi interessa è solo sapere che 4 krosa equivalgono a 1 yojana. Quindi abbiamo 10 uomini che percorrono l'intero tragitto, 5 che ne fanno i $\frac{3}{4}$, 3 metà e 2 solo $\frac{1}{4}$. Il problema è perciò quello di ripartire in parti proporzionali al lavoro svolto i 720 dinari. Ora per ogni quarto di viaggio la somma è di $\frac{720}{4} = 180$ dinari, che deve essere ripartita fra 20 persone, quindi la somma da dare ai primi due è solo di $\frac{180}{20} = 9$

dinari ciascuno. I 3 devono ricevere invece i 9 dinari per la prima parte e $\frac{180}{18} = 10$ dinari per la seconda parte di viaggio, cioè 19 dinari ciascuno. Allo stesso modo i 5 riceveranno 19 dinari più $\frac{180}{15} = 12$ dinari per la terza parte, cioè 31 dinari ciascuno. Infine i 10 rimasti avranno $31 + \frac{180}{10} = 49$ dinari.

Verifichiamo: $2 \cdot 9 + 3 \cdot 19 + 5 \cdot 31 + 10 \cdot 49 = 720$.

Livello 2

35. Un problema tratto dal Lilavati, un testo indiano del XII secolo. *Dimmi, matematico, come dobbiamo dividere i guadagni fra tre commercianti che hanno messo rispettivamente* 51, 68 *e* 85 *in una stessa operazione commerciale da cui si sono ottenuti* 200? [75, 100, 125]
36. Un problema di Chaturveda, un matematico indiano del XII secolo. *Il prezzo di cento mattoni, la cui lunghezza, spessore e larghezza sono rispettivamente* 16, 8 *e* 10 *è di* 6 *dinari. Abbiamo ricevuto* 100000 *mattoni le cui dimensioni sono tutte* 1/4 *in meno del previsto. Quanto dovremmo pagare*? [2531,25 dinari]
37. In una strana ditta lavorano il bisnonno, il nonno, il padre e il figlio. Il guadagno viene diviso in modo tale che il padre prenda il doppio rispetto al proprio figlio. Se il guadagno è stato di €120000, quanto ha avuto ciascuno? [€8000; €16000; €32000; €64000]
38. Per costruire un muro si impiegano tre operai. I primi due lavorano insieme per 5 ore, poi uno dei due si riposa e subentra il terzo che lavora per 3 ore con il secondo e per altre 4 ore solo con il primo. Se il compenso totale è di € 300, come deve essere suddiviso fra i tre? [€ 112,50; € 100,00; € 87,50]
39. Con riferimento al precedente quesito. Se gli ultimi due avessero lavorato insieme per tre ore e l'ultima ora avessero lavorato tutti insieme, la ripartizione del compenso sarebbe cambiata? [Sì; € 108,00; € 108,00; € 84,00]

Lavoriamo insieme

Vogliamo semplificare la seguente espressione: $\dfrac{\dfrac{3^2 \cdot 9^{-3}}{27^{-4}} + 3}{\dfrac{9 + 3 \cdot 3^{-2}}{3^{-4} \cdot 27}}$. Ci accorgiamo che tutte le potenze possono essere ricondotte alla base comune 3, quindi effettuiamo intanto questa operazione: $\dfrac{\dfrac{3^2 \cdot \left[3^2\right]^{-3}}{\left[3^3\right]^{-4}} + 3}{\dfrac{9 + 3^{-1}}{3^{-4} \cdot 3^3}}$.

Osserviamo che non abbiamo ricondotto il 9 a 3^2 perché in quel caso è un addendo e non un fattore, pertanto non avremmo ricevuto alcun vantaggio da questa espressione, non potendo applicare nessuna delle regole valide per le moltiplicazioni e le divisioni fra potenze. Continuiamo: $\dfrac{\dfrac{3^2 \cdot 3^{-6}}{3^{-12}} + 3}{\dfrac{9 + 3^{-1}}{3^{-1}}} = \dfrac{\dfrac{3^{-4}}{3^{-12}} + 3}{\dfrac{9 + \frac{1}{3}}{3^{-1}}} = \dfrac{3^{-4-(-12)} + 3}{\dfrac{27+1}{3} \cdot 3}$.

Notiamo che abbiamo trasformato una frazione in moltiplicazione e a un'altra abbiamo applicato la proprietà della divisione fra potenze aventi la stessa base: $\dfrac{3^{-4+12} + 3}{\dfrac{27+1}{3^1} \cdot 3^1} = \dfrac{3^8 + 3}{28} = \dfrac{3^8 + 3}{28} = \dfrac{6561 + 3}{28} = \dfrac{6564}{28} = \dfrac{1641}{7}$.

Applicando le proprietà delle potenze semplificare le seguenti espressioni

Livello 1

40. $2^{-2} \cdot 2^3 \cdot 2^{-4} \cdot 2^5 \cdot 2^0$; $2^{-2} \cdot 4^3 \cdot 8^{-4} \cdot 16^5 \cdot 32^{-6} \cdot 64^7$; $3^3 \cdot 3^{-4}$; $3^5 \cdot 3^2$ [2^2 ; 2^{24} ; 3^{-4}]

41. $3^5 \cdot 3^{-3} \cdot 2^{-8} \cdot 8^{-1}$; $\left(6^2 \cdot 12^{-3}\right)^{-1} : \left(18^{-3} : 16^4\right)^2$; $\left(5^3\right)^2 \cdot \left(5^2\right)^{-3} : 25^3$ $[2^{-11} \cdot 3^2 ; 2^{42} \cdot 3^{13} ; 5^{-6}]$

42. $\left(4^2 : 8^3\right)^{-4} \cdot \left(2^{-2} : 2^3\right)^4 \cdot 16$; $\dfrac{7^2 \cdot 7^{-3} \cdot 49^5}{343 \cdot 7^{-2}}$; $\dfrac{3^2 \cdot 5 \cdot 3^{-3} \cdot 5^{-2}}{3 \cdot 5^2 \cdot 3^{-2} \cdot 5^{-3}}$ $[2^4 ; 7^8 ; 1]$

43. $\dfrac{\dfrac{3^{-7}}{3^{-4}}}{\dfrac{3^{-3}}{3^{-2}}}$; $2^3 \cdot 3^{-2} \cdot 4^3 \cdot 6^{-2} \cdot 8^5 \cdot 9^{-4}$; $\dfrac{2^3 \cdot 4^{-2} \cdot 8^3}{4^{-2} \cdot 16^2}$; $\dfrac{3^{-2} \cdot 9^{-3} \cdot 18^5}{12^{-4} \cdot 18^2}$ $[3^{-2} ; 2^{22} \cdot 3^{-12} ; 2^4 ; 2^{11} \cdot 3^2]$

Livello 2

44. $\left(4^{-2} + 3^{-1}\right) \cdot \left(4^{-2} - 3^{-1}\right)$; $\left(2^{-1} + 1 - 2^{-2}\right) \cdot \left(2^{-1} + 1 - 2^{-2}\right)$ $[2^{-8} - 3^{-2} ; 2^{-4} \cdot 5^{-2}]$

45. $\left(3^{-1} + 3^{-2} - 3^{-3}\right) \cdot \left(3^{-1} + 3^{-2} - 3^{-3}\right)$; $\left(2 \cdot 3^{-1} - 3 \cdot 2^{-2}\right) \cdot \left(2 \cdot 3^{-2} - 3 \cdot 2^{-1}\right)$ $[3^{-6} \cdot 11^{-2} ; 2^{-3} \cdot 3^{-3} \cdot 23]$

46. $\dfrac{(2^{-2}+1) \cdot (2^{-2}-1)}{2^{-2} + 2 \cdot 2^{-2} + 1}$; $\dfrac{(3^{-3} + 9^{-2}) \cdot \left[\left(3^{-3}\right)^2 - 3^{-3} \cdot 9^{-2} + \left(9^{-2}\right)^2\right]}{\left[\left(3^3\right)^{-2} - \left(9^{-2}\right)^2\right]^2}$ $[-2^{-2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^{-1} ; 2^{-4} \cdot 3^4 \cdot 7]$

47. $\dfrac{\left(2^{-3}\right)^2}{\left(2^{-2} - 6^{-1}\right) \cdot \left(2^{-2} - 3^{-2}\right)} + \dfrac{\left(6^{-1}\right)^3}{\left(6^{-1} - 3^{-2}\right) \cdot \left(6^{-1} - 2^{-2}\right)} + \dfrac{\left(3^3\right)^{-2}}{\left(3^{-2} - 2^{-2}\right) \cdot \left(3^{-2} - 6^{-1}\right)}$ $[2^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 19]$

48. $\dfrac{\left(3^{-3} \cdot 6^{-2} + 4^{-1} \cdot 2^{-2}\right)^2 + \left(3^{-3} \cdot 2^{-2} - 4^{-1} \cdot 6^{-2}\right)^2}{\left(3^{-3} \cdot 12^{-1} + 4^{-1} \cdot 18^{-1}\right)^2 + \left(3^{-3} \cdot 18^{-1} - 4^{-1} \cdot 12^{-1}\right)^2}$; $\dfrac{\left(10^{-2} + 15^{-1} - 6^{-2}\right) \cdot \left(10^{-2} - 15^{-1} + 6^{-2}\right)}{\left(10^{-2}\right)^2 - \left(15^{-1} - 6^{-2}\right)^2}$

$[2 \cdot 13^{-1} \cdot 41 ; 2^{42} \cdot 3^{13} ; 1]$

49. $\dfrac{1 + 2 \cdot 4^{-2} - \left(2^{-3}\right)^2 - 2 \cdot 2^{-3} \cdot (-1) + \left(4^{-2}\right)^2 - (-1)^2}{1 - 2^{-3} + 4^{-2} + 1}$ $[2^{-4} \cdot 3]$

50. Aldo e i suoi tre amici Bice, Claudio e Dora sono alle prese con il problema di dimezzare il numero 4^{756}. Aldo dice che fa 2^{378}, poiché secondo lui deve dimezzarsi sia la base che l'esponente. Bice invece afferma che fa 2^{1511},perché il numero iniziale può scriversi come 2^{1512}. Claudio asserisce che la corretta metà è 2^{756}, dato che deve dimezzarsi solo la base e Dora infine assicura che ha ragione lei, indicando in 4^{378} il risultato esatto. Chi ha ragione e perché? [Bice]

Lavoriamo insieme

La notazione esponenziale è molto usata nelle scienze, per esempio in fisica o in chimica. Ciò infatti rende più semplice risolvere certi problemi. Sappiamo per esempio che la distanza media della terra dal sole è 150 milioni di chilometri, mentre la velocità della luce è di 300000 Km al secondo, cioè in un secondo la luce percorre 300000 Km. Se volessimo determinare in quanto tempo la luce del sole arriva fino a noi dovremmo semplificare la frazione $\dfrac{150\,000\,000}{300\,000}$, che non è difficile da ridurre. Se scriviamo però i due numeri nella notazione esponenziale in base 10: $\dfrac{15 \cdot 10^7}{3 \cdot 10^5} = 5 \cdot 10^2$, troveremmo più semplicemente il risultato. Sono perciò necessari 500 secondi. Quanti minuti rappresentano? In un minuto ci sono 60 secondi, quindi $\dfrac{500}{60} = \dfrac{50}{6} \approx 8,3 = 8^m 48^s$.

Usando la notazione esponenziale e la seguente tabella in cui sono riportati i dati sui pianeti del nostro sistema solare, risolvere i seguenti problemi.

Pianeta	**Distanza media dal sole (in *Km*)**	**Raggio medio (in *Km*)**	**Massa (in *Kg*)**
Mercurio	$5,79 \cdot 10^{10}$	$2,433 \cdot 10^3$	$3,18 \cdot 10^{23}$
Venere	$1,082 \cdot 10^{11}$	$6,08 \cdot 10^3$	$4,881 \cdot 10^{24}$
Terra	$1,496 \cdot 10^{11}$	$6,378 \cdot 10^3$	$5,976 \cdot 10^{24}$
Marte	$2,28 \cdot 10^{11}$	$3,386 \cdot 10^3$	$6,41 \cdot 10^{23}$

Giove	$7{,}783 \cdot 10^{11}$	$7{,}137 \cdot 10^{4}$	$1{,}9 \cdot 10^{27}$
Saturno	$1{,}429 \cdot 10^{12}$	$6{,}037 \cdot 10^{4}$	$5{,}681 \cdot 10^{26}$
Urano	$2{,}875 \cdot 10^{12}$	$2{,}56 \cdot 10^{14}$	$8{,}678 \cdot 10^{25}$
Nettuno	$4{,}504 \cdot 10^{12}$	$2{,}27 \cdot 10^{4}$	$1{,}026 \cdot 10^{26}$
Plutone	$5{,}91 \cdot 10^{12}$	$1{,}1 \cdot 10^{3}$	$1{,}3 \cdot 10^{26}$

Livello 2

51. Determinare quante volte il raggio della Terra è più grande di quello di Mercurio [$\approx 2{,}6$]
52. Determinare quante volte il raggio di Saturno è più grande di quello di Plutone [≈ 55]
53. Determinare quante volte il raggio di Venere è più piccolo di quello di Nettuno [$\approx 3{,}7$]
54. Determinare quante volte il pianeta Giove è più pesante di Venere [≈ 389]
55. Determinare quante volte il pianeta Urano è più leggero di Giove [≈ 185]
56. Determinare dopo quanti minuti la luce del sole raggiunge Mercurio [$\approx 3{,}26$]
57. Determinare dopo quante ore la luce del sole raggiunge Saturno [$\approx 1{,}3$]
58. Determinare dopo quante ore la luce del sole raggiunge Plutone [$\approx 5{,}5$]
59. L'elettrone ha una massa di circa $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ *Kg* Determinare un valore approssimato della massa del protone sapendo che essa è circa 1800 volte quella dell'elettrone [$\approx 1{,}6 \cdot 10^{-27}$ *Kg*]
60. Diciamo anno luce la distanza che la luce percorre in un anno Stabilire quanto vale in *Km*. [$\approx 9{,}46 \cdot 10^{15}$]

L'angolo delle correzioni

Correggere gli errori commessi in ciascuna delle seguenti espressioni.

1. $2^3 \cdot 2^{-3} = 2^6 \,;\; 3^2 \cdot 3^{-3} : 3^{-4} = 3^{-1} : 3^{-4} = 3^{-5} \,;\; 2^3 \cdot 8^{-2} : 4^7 = 2^3 \cdot 2^6 : 2^{14} = 2^9 \cdot 2^{14} = 2^{23}$
2. $2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^{-2} : 2^{-3} = 2^1 \cdot 2^{-1} = 2^0 = 1 \,;\; 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^{-2} = 6^2 \cdot 5^{-2} = 30^0 = 1$
3. $7^4 \cdot 7^{-2} \cdot 7^3 \cdot 7^{-5} = 7^{-8} \cdot 7^{-15} = 7^{-23} \,;\; 4^2 \cdot 2^{-4} = 8^{-2} = \dfrac{1}{64}$
4. $3^3 + 3^{-3} = 3^0 = 1 \,;\; 5^3 - 5^2 : 5^{-3} \cdot 5^4 = 5 : 5 = 1 \,;\; \left(3^2\right)^{-2} \cdot \left(3^{-3}\right)^3 = 3^{-1} \cdot 3^{-1} = 3^{-2} = \dfrac{1}{9}.$

Giochiamo alla matematica

Diversi sono i cosiddetti trucchi che vengono fatti utilizzando le frazioni. Uno dei più noti è il seguente.

- *Un mandriano morì lasciando in eredità ai suoi tre figli* 17 *vacche, da dividersi con il seguente criterio. Metà dovevano andare al primo, un terzo al secondo e un nono al terzo. Era anche scritto che ciascuno dei tre doveva ricevere vacche vive e intere, non parti di esse.*
  La questione apparve immediatamente molto complessa, dato che a voler fare le cose così come era stato detto il primo figlio doveva ricevere $\dfrac{17}{2} = 8{,}5$ vacche, il secondo $\dfrac{17}{3} = 5{,}\overline{6}$ e il terzo $\dfrac{17}{9} = 1{,}\overline{8}$. Quindi apparentemente il problema è irrisolvibile, almeno lasciando le vacche intere. Il notaio che lesse il testamento si offrì però di risolverlo, proponendo il seguente procedimento. Poiché anch'egli possedeva delle vacche, aggiunse una sua vacca alle 17 lasciate in eredità. Questo rendeva più semplice la divisione, dato che 18 è multiplo di 2, 3 e 9. Pertanto applicò le frazioni scritte nel testamento a questa mandria modificata, dando al primogenito $\dfrac{18}{2} = 9 > 8{,}5$ vacche, al secondo $\dfrac{18}{3} = 6 > 5{,}\overline{6}$ e all'ultimo $\dfrac{18}{9} = 2 > 1{,}\overline{8}$. Così facendo divise esattamente le 17 vacche e poté recuperare la propria. In effetti ciascuno dei figli ebbe più di quel che gli spettava, fu quindi contento e non protestò. Qui l'apparente magia consiste nel fatto che le proporzioni stabilite nel testamento non erano corrette, nel senso che la somma delle parti non equivaleva all'intera mandria. Infatti abbiamo che si ha: $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} = \dfrac{9+6+2}{18} = \dfrac{17}{18} < \dfrac{18}{18} = 1$, pertanto in questo modo doveva rimanere $\dfrac{1}{18}$ di vacca da non dare a nessuno dei tre.
- Ancora un altro interessante quesito è il seguente. *Una bottiglia contiene un litro di acqua, una fiasca un litro di vino. Dalla fiasca togliamo dieci centilitri di vino e li riversiamo nella bottiglia, mescoliamo in modo da ottenere una miscela omogenea e poi ne togliamo un decilitro che versiamo nella fiasca del vino.*

Adesso abbiamo due miscele, vogliamo sapere se vi è più acqua nella miscela del fiasco o più vino nella bottiglia. Seguiamo cosa è accaduto. All'inizio abbiamo 1 litro di acqua nella bottiglia e 1 litro di vino nella fiasca. Al primo travaso avremo 0,9 ℓ di acqua nella bottiglia e 1 ℓ di vino e 0,1 ℓ di acqua nella fiasca. Quindi nella fiasca vi sono 1,1 ℓ di miscela, formata da $\frac{1}{1,1}\ell=\frac{10}{11}\ell$ di vino e $\frac{0,1}{1,1}\ell=\frac{1}{11}\ell$ di acqua. Se perciò togliamo un decilitro di miscela stiamo togliendo $\left(\frac{1}{10}\cdot\frac{10}{11}\right)\ell=\frac{1}{11}\ell$ di vino e $\left(\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{11}\right)\ell=\frac{1}{110}\ell$ di acqua. Quindi al secondo travaso avremo, nella bottiglia, $\left(\frac{9}{10}+\frac{1}{110}\right)\ell=\frac{99+1}{110}\ell=\frac{100}{110}\ell=\frac{10}{11}\ell$ di acqua e $\frac{1}{11}\ell$ di vino; nella fiasca invece avremo $\left(1-\frac{1}{11}\right)\ell=\frac{10}{11}\ell$ di vino e $\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{110}\right)\ell=\frac{11-1}{110}\ell=\frac{10}{110}\ell=\frac{1}{11}\ell$ di acqua. Come si vede, e forse non ce lo aspettavamo, la quantità di vino nella bottiglia è la stessa quantità di acqua nella fiasca.

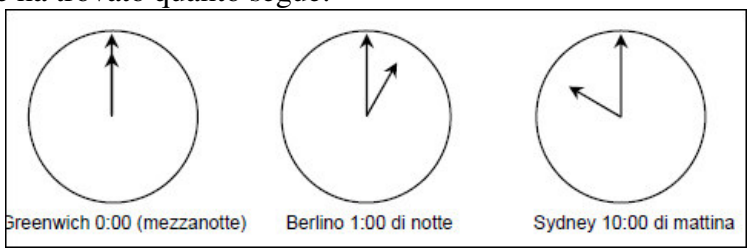
Per la prova Invalsi

Quesiti sui numeri naturali e interi relativi

Lavoriamo insieme

Il seguente quesito fu assegnato alle prove Invalsi del 2005, per studenti della prima Superiore.
Si vuole suddividere, se possibile, un rettangolo avente le dimensioni di 24 *cm e* 36 *cm, in quadrati che siano tutti uguali tra loro, e i più grandi possibili. Quanto dovrà misurare il lato di ogni quadrato*? A) 4 *cm* B) 6 *cm* C) 12 *cm* D) *Non è possibile suddividere*
In pratica dobbiamo dividere ciascun lato del rettangolo in modo che sia la base che l'altezza siano formati da segmenti di uguale lunghezza, cioè dobbiamo considerare il MCD(24, 36) = 12. In questo modo dividiamo il lato di 24 *cm* in 2 parti uguali e quello da 36 *cm* in 3 parti uguali. Il rettangolo perciò sarà diviso in $24 \cdot 36 / 12^2 = 6$ quadrati di lato appunto 12 *cm*. Ovviamente questi sono i maggiori possibili, la risposta è perciò la C.

1. (OCSE-PISA) Chiacchierata via internet. Mark (da Sydney, Australia) e Hans (da Berlino, Germania) comunicano spesso tra loro utilizzando le «chat» su Internet. Per poter chattare devono collegarsi a Internet nello stesso momento. Per trovare un'ora appropriata per chattare Mark ha consultato una tabella dei fusi orari e ha trovato quanto segue:

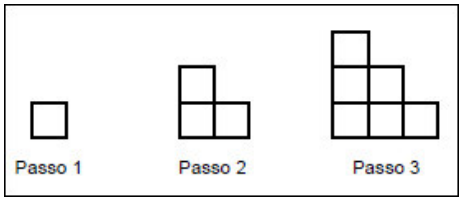


Quando sono le 19:00 a Sydney, che ora è a Berlino? [10:00 di mattina]

2. (OCSE-PISA) Mark e Hans non possono chattare tra le 9:00 e le 16:30 della loro rispettiva ora locale, perché devono andare a scuola. Inoltre, dalle 23:00 alle 7:00 ora locale non possono chattare perché stanno dormendo. Qual è un'ora giusta per Mark e Hans per chattare?
[Sydney: dalle 16:30 alle 18:00, dalle 7:00 alle 8:00;
Berlino: dalle 7:30 alle 9:00, dalle 22:00 alle 23:00]

3. (OCSE-PISA) Tasso di cambio. Mei-Ling, una studentessa di Singapore, si prepara ad andare in Sudafrica per 3 mesi nell'ambito di un piano di scambi tra studenti. Deve cambiare alcuni dollari di Singapore (SGD) in rand sudafricani (ZAR). Mei-Ling ha saputo che il tasso di cambio tra il dollaro di Singapore e il rand sudafricano è: 1 SGD = 4,2 ZAR. Mei-Ling ha cambiato 3.000 dollari di Singapore in rand sudafricani a questo tasso di cambio. A) Quanti rand sudafricani ha ricevuto Mei-Ling? B) Quando Mei-Ling torna a Singapore dopo 3 mesi, le restano 3.900 ZAR. Li cambia di nuovo in dollari di

Singapore, notando che il nuovo tasso di cambio è: 1 SGD = 4,0 ZAR. Quanti dollari di Singapore riceve Mei-Ling? C) Durante questi 3 mesi il tasso di cambio è passato da 4,2 a 4,0 ZAR per 1 SGD. Per Mei-Ling è più vantaggioso che il tasso di cambio sia 4,0 ZAR invece di 4,2 ZAR nel momento in cui cambia i suoi rand sudafricani in dollari di Singapore? Spiega brevemente la tua risposta.
[12.600; 975; No]

4. (OCSE-PISA) Motivi a scaletta Roberto costruisce dei motivi a scaletta usando dei quadrati. Procede per passi successivi: 

Come puoi vedere, usa un quadrato per il Passo 1, tre quadrati per il Passo 2 e sei quadrati per il Passo 3. Quanti quadrati dovrà usare per il quarto passo? [10]
5. (Invalsi 2003) Un ascensore parte dal secondo piano, sale di tre piani, scende di due e poi di altri quattro, infine sale di due piani. A che piano è arrivato? [B]
A) Al piano terra. B) Al primo. C) Al secondo. D) Al terzo. E) Al quarto.
6. (Invalsi 2004) Quale tra le seguenti proposizioni è vera? [B]
A) Ogni numero intero divisibile per tre è divisibile per nove B) Ogni numero intero divisibile per 4 è divisibile per due C) Se il prodotto di due numeri interi è divisibile per 5, ognuno dei due interi è divisibile per 5 D) Se la somma di due numeri interi è divisibile per 5, ognuno degli addendi è divisibile per 5.
7. (Invalsi 2004) Siano m ed n due numeri naturali diversi da zero. Se si scambia m con n, quale delle seguenti espressioni modifica il proprio valore? A) $m + n$ B) $m \cdot n$ C) m^n D) $m^0 - n^0$ [C]
8. (Invalsi 2007) a, b e c sono tre numeri interi positivi tali che: a è multiplo di b, e c è multiplo di a. Quale delle seguenti terne soddisfa le condizione date? [D]
A) $a = 12$; $b = 6$; $c = 3$ B) $a = 12$; $b = 3$; $c = 6$ C) $a = 6$; $b = 6$; $c = 3$ D) $a = 6$; $b = 3$; $c = 12$
9. (Invalsi 2011) L'insegnante chiede: "*Se n è un numero naturale qualsiasi, cosa si ottiene addizionando i tre numeri* $2n + 1$, $2n + 3$ *e* $2n + 5$?" Mario afferma: "*Si ottiene sempre il triplo di uno dei tre numeri*". Luisa risponde: "*Si ottiene sempre un numero dispari*". Giovanni dice: "*Si ottiene sempre un multiplo di* 3". Chi ha ragione? [Tutti e tre]
10. (Invalsi 2011) In un torneo di calcio fra scuole una squadra guadagna 3 punti se vince, 1 punto se pareggia e nessun punto se perde. Una squadra ha vinto tante partite quante ne ha pareggiate. Quale dei seguenti punteggi non può aver totalizzato la squadra? A) 24 B) 28 C) 30 D) 32 [C]

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato alle prove Invalsi del 2011, per la seconda Superiore.
Considera l'affermazione: "Per ogni numero naturale n, $2^n + 1$ *è un numero primo". Mostra con un esempio che l'affermazione è falsa.*
Basta considerare $n = 3$, dato che $2^3 + 1 = 8 + 1 = 9 = 3 \cdot 3$. In effetti questo è il primo numero naturale per cui la proprietà è falsa infatti abbiamo: $2^1 + 1 = 3$; $2^2 + 1 = 5$. La proprietà è vera ancora per $n = 4$: $2^4 + 1 = 17$, mentre è falsa per $n = 5$: $2^5 + 1 = 32 + 1 = 33$. Non sappiamo se vi sono infiniti numeri naturali per cui la proprietà è vera, mentre può dimostrarsi che vi sono infiniti numeri naturali per cui è falsa. Infatti può mostrarsi che se n è un numero dispari, $2^n + 1$ è un numero multiplo di 3.

11. (Invalsi 2013) La stampante laser L in un minuto stampa il triplo delle pagine della stampante deskjet D. Quando L e D lavorano contemporaneamente stampano in tutto 24 pagine al minuto. Se D viene sostituita con una stampante laser identica a L, quante pagine potranno essere stampate complessivamente in un minuto? A) 24 B) 30 C) 36 D) 48 [C]
12. (Invalsi 2013) In un quartiere di una città, il calendario della raccolta differenziata (carta, vetro e plastica) prevede che la raccolta della carta avvenga ogni 28 giorni, quella del vetro ogni 21 giorni e quella della plastica ogni 14 giorni. Oggi sono state effettuate le raccolte di carta, vetro e plastica. La prossima volta in cui la raccolta di carta, vetro e plastica verrà fatta contemporaneamente sarà tra quanti giorni? [84]

13. (Invalsi 2013) Un gruppo di biologi, per stimare quante trote ci sono in un lago, ne pesca 200 e, dopo averle marcate, le rigetta nel lago. Dopo qualche giorno, utilizzando la stessa rete, vengono pescate 720 trote e solo 12 di esse sono marcate. In base a queste informazioni, quante trote possiamo pensare che ci siano all'incirca nel lago? A) 2000 B) 9000 C) 12000 D) 144000 [C]
14. (Invalsi 2014) Marco afferma che, per ogni numero naturale n maggiore di 0, $n^2 + n + 1$ è un numero primo. Marco ha ragione? Giustifica la risposta. [No, per n dispari maggiore di 1 sono tutti composti]
15. (Invalsi 2014) Se k è un numero intero negativo, qual è il maggiore tra i seguenti numeri? [C]
A) $5 + k$ B) $5 \cdot k$ C) $5 - k$ D) 5^k
16. (Invalsi 2017) Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni relative a numeri interi è vera (V) o falsa
17. (F). A) Se $a + b$ è divisibile per 2, allora sia a sia b sono divisibili per 2 B) Se il prodotto di due numeri è divisibile per 6, allora almeno uno dei due fattori è divisibile per 6 C) Se a è un multiplo di 3 e b è un multiplo di 4, allora $a \cdot b$ è un multiplo di 6. [F; F; V]
18. Gianluca va a trovare un amico che abita in un paese che dista 40 *km* dal suo a una velocità media di 75 *km/h*. Al ritorno, a causa della nebbia, deve rallentare e la sua velocità media diventa 60 *km/h*. Qual è stata la velocità media del viaggio di andata e ritorno? Se il paese fosse stato distante 50 *km*, il risultato precedente sarebbe variato? Giustificare la risposta. [≈ 66,7 *Km/h*; No]

Quesiti sui numeri razionali

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato nelle prove Invalsi del 2011, per la seconda superiore.
L'età della Terra è valutata intorno ai $4{,}5 \times 10^9$ *anni. L'Homo Erectus è comparso circa* 10^6 *anni fa. Qual è la stima che più si avvicina all'età che la Terra aveva quando è comparso l'Homo Erectus*? A) $4{,}5 \times 10^9$ *anni* B) $3{,}5 \times 10^9$ *anni* C) $4{,}5 \times 10^6$ *anni* D) $4{,}5 \times 10^3$ *anni*
La terra aveva un'età di circa $4{,}5 \times 10^9 - 10^6$ anni, che è circa $4{,}5 \times 10^9$, infatti togliere da un numero dell'ordine dei miliardi, un numero che è dell'ordine dei milioni è come togliere un chilo da una tonnellata, cioè non ci si accorge neanche. Pertanto la risposta corretta à la A)

19. (Invalsi 2003) $0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}2 =$ A) 0,8 B) 0,6 C) 0,06 D) 0,08 E. 0,008 [E]
20. (Invalsi 2003) Qual è la millesima parte di 10^{15}? A) 10^5 B) 10^{12} C) $10^{\frac{15}{1000}}$ D) $\left(\frac{1}{100}\right)^{15}$ E) 10^{18} [B]
21. (Invalsi 2004) Quale dei seguenti numeri NON è compreso tra 2 e 3? [C]
A) 15/7 B) 63/27 C) 39/12 D) 7/3
22. (Invalsi 2004) Il quoziente di 11 diviso 4 è 2 con resto 3. Quale delle seguenti espressioni è corretta?
A) $11/4 = 2 \cdot ¾$ B) $11/4 = 2 + ¾$ C) $11/4 = 2 + 3$ D) $11/4 = 2/3$ [B]
23. (Invalsi 2004) Quanti numeri razionali sono compresi tra 2,4 e 2,85? [A]
A) Infiniti B) Quattro C) Quarantacinque D) Ottantuno
24. (Invalsi 2004) Un numero decimale è composto da 5 cifre e gode delle seguenti proprietà: la cifra dei centesimi è 2; la cifra delle decine è uguale alla cifra dei centesimi aumentata di 7; la cifra delle unità è il doppio della cifra dei decimi; la cifra dei decimi è uguale alla cifra delle decine diminuita di 6; la cifra delle centinaia è uguale alla cifra delle unità. Qual è il numero? [D]
A) 292,32 B) 292,12 C) 484,82 D) 696,32
25. (Invalsi 2005) Sostituendo ad a il numero 0,000375 e a b il numero 3,75, quale delle seguenti relazioni è vera? A) $10^3 \cdot a = b$ B) $a = b \cdot 10^4$ C) $b = a \cdot 10^{-4}$ D) $a = b \cdot 10^{-4}$ [D]
26. (Invalsi 2005) Se al numero 0,999 si aggiunge 1 centesimo, che cosa si ottiene? [B]
A) 1 B) 1,009 C) 1,99 D) 1,999
27. (Invalsi 2007) Luca ha 9 anni, esattamente i 3/14 dell'età di suo padre. Quanti anni ha il padre di Luca? A) 42 B) 33 C) 26 D) 23 [A]
28. (Invalsi 2011) La dimensione di un televisore è la misura della diagonale dello schermo espressa in pollici (1 pollice = 2,54 cm). Nei televisori di nuova generazione il rapporto tra la larghezza e l'altezza dello schermo è 16:9. a) Se la larghezza dello schermo di uno di questi televisori è circa 57,5 *cm*, qual è all'incirca la sua altezza? b) Da quanti pollici è il televisore? A) 20 (= 50,80 *cm*) B) 26 (= 66,04 *cm*) C) 28 (= 71,12 *cm*) D) 32 (= 81,28 *cm*) [32,3 *cm*; B]

29. (Invalsi 2011) Qual è la metà di $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$? A) $\left(\frac{1}{4}\right)^{50}$ B) $\left(\frac{1}{2}\right)^{25}$ C) $\left(\frac{1}{2}\right)^{51}$ D) $\left(\frac{1}{2}\right)^{49}$ [D]

30. (Invalsi 2011) L'espressione $\frac{9}{10}+\frac{8}{10^2}+\frac{7}{10^4}+\frac{2}{10^5}$ si può rappresentare mediante il numero decimale
A) 98,72 B) 9,8072 C) 0,9872 D) 0,98072 [D]

31. (Invalsi 2011) Si sa che $2^{10} = 1024$. Quale fra le seguenti potenze del 10 è quella che più si avvicina a 2^{70}? A) 10^{24} B) 10^{21} C) 10^{14} D) 10^{7} [B]

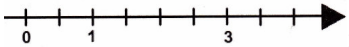
32. (Invalsi 2012) Giovanni afferma che $\left(\frac{3}{40}\right)^{80}$ è maggiore di $\left(\frac{3}{40}\right)^{81}$. Ha ragione? [C]
A) Giovanni ha ragione perché quando si eleva a potenza una qualsiasi frazione il risultato diminuisce all'aumentare dell'esponente; B) Giovanni non ha ragione perché l'esponente della seconda frazione è maggiore dell'esponente della prima ; C) Giovanni ha ragione perché moltiplicando $\left(\frac{3}{40}\right)^{80}$ per $\frac{3}{40}$, che è minore di 1, si ottiene un numero minore di $\left(\frac{3}{40}\right)^{80}$; D) Giovanni non ha ragione perché calcolando $\left(\frac{3}{40}\right)^{81}$ si ottiene una frazione con un numeratore maggiore di quello di $\left(\frac{3}{40}\right)^{80}$.

33. (Invalsi 2012) Un turista italiano in viaggio in Svizzera, prima di cambiare i suoi euro in franchi, esamina le seguenti proposte fatte da due banche: Banca A: 1 euro viene scambiato con 1,412 franchi senza spese. Banca B: 1 euro viene scambiato con 1,416 franchi con una commissione fissa di 2 franchi. A) Se il turista cambia 300 euro, quanti franchi ottiene presso la banca A? B) Carlo afferma che, qualunque sia la somma che si vuole cambiare, è sempre più conveniente la banca A. Ha ragione?
[423,60; No fino a 500 euro, poi conviene B]

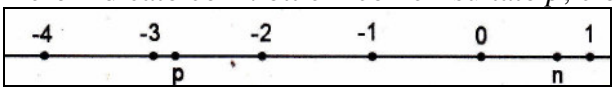
34. (Invalsi 2013) Un atomo di idrogeno contiene un protone la cui massa m_p è $2\cdot10^{-27}$ *kg*, all'incirca, e un elettrone la cui massa *me* è all'incirca $9 \cdot 10^{-31}$ kg. Quale tra i seguenti valori approssima meglio la massa totale dell'atomo di idrogeno (cioè $m_p + m_e$)? [A]
A) $2 \cdot 10^{-27}$ *kg* B) $11 \cdot 10^{-31}$ *kg* C) $11 \cdot 10^{-58}$ *kg* D) $18 \cdot 10^{-58}$ *kg*

35. (Invalsi 2013) Quale tra le seguenti sequenze di numeri è ordinata in modo crescente? A) -10^4, $-4\cdot10^{-4}$, 10^{-4}, $1/10^{-4}$; B) $-4\cdot10^{-4}$, -10^4, $1/10^{-4}$, 10^{-4}; C) -10^4, 10^{-4}, $1/10^{-4}$, $-4\cdot10^{-4}$; D) $-4\cdot10^{-4}$, -10^4, 10^{-4}, $1/10^{-4}$ [A]

36. (Invalsi 2014) Il risultato di $16^{100} : 2$ è uguale a A) 8^{99} B) 8^{100} C) 16^{50} D) 2^{399}. [D]

37. (Invalsi 2017) Posiziona sulla retta i seguenti numeri 

: 4; 2,5; 3/2; 5/10
[5/10; 3/2; 2,5; 4]

38. (Invalsi 2017) Sulla seguente retta orientata sono riportati alcuni numeri. Se moltiplichi *n* per un numero indicato con *k* ottieni come risultato *p*, cioè $n \cdot k = p$. Quale tra i seguenti può essere il valore di *k*?


A) 1/4 B) –1/4 C) –4 D) 4

39. (Invalsi 2017) Calcola l'espressione $\frac{1-\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{7}}$ e scrivi il risultato sotto forma di un'unica frazione. $\left[\frac{3}{4}\right]$

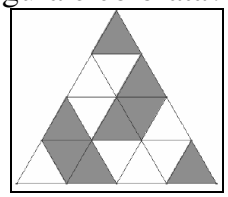
Quesiti sulle percentuali

Lavoriamo insieme

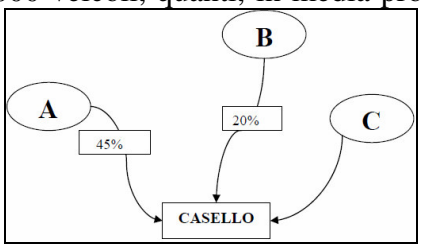
Il seguente quesito è stato assegnato nelle prove Invalsi del 2012.
Nelle ultime elezioni svoltesi in un paese europeo è andato a votare il 70% *degli aventi diritto al voto. Di questi il* 20% ha *votato per il partito A. Quale percentuale di aventi diritto al voto ha votato per il partito A*?
A) 60% B) 50% C) 20% D) 14%

Per il partito A non ha votato non il 20% dei votanti, bensì il 20% di quelli che hanno votato, cioè il 20% del 70%, che è il 14%. Infatti supposto che gli aventi diritto fossero stati 100, 70 di questi hanno votato e il 20% di 70 è $70 \cdot 0{,}2 = 14$, che è appunto il 14% degli aventi diritto. Pertanto la risposta corretta è D.

40. (Invalsi 2003) Marco ha acquistato un libro con lo sconto del 25% e lo ha pagato 24 euro. Qual è il prezzo di copertina del libro, in euro? A) 6 B) 30 C) 32 D) 34 E. 36 [C]
41. (Invalsi 2004) Un paio di scarpe costa 75 €. Se il negoziante decide di applicare uno sconto del 20%, a quale prezzo verranno vendute? A) 50 € B) 55 € C) 60 € D) 65 € [C]
42. (Invalsi 2005) Quale percentuale della figura è colorata? A) 80% B) 50% C) 45% D) 40% [B]



43. (Invalsi 2007) In figura è rappresentato il flusso verso un casello autostradale dei veicoli provenienti dalle località A, B, C, con le relative percentuali medie, riferite ad un qualsiasi giorno feriale. Se ogni giorno feriale arrivano al casello 2000 veicoli, quanti, in media provengono da C? A) 900 B) 700 C) 400 D) 350 [B]



44. (Invalsi 2007) Matteo vuole comperare un CD del suo cantante preferito. Il costo del CD è di € 26,50. Quanto spende Matteo se ottiene uno sconto del 10%? A) €2,65 B) €16,50 C) €23,85 D) €26,40 [C]
45. (Invalsi 2011) Per l'acquisto di un computer sono stati spesi 300 euro. Il prezzo è composto dal costo base più l'IVA, pari al 20% del costo base. Quanto è stato pagato di IVA? [50 euro]
46. (Invalsi 2012) Luigi e Paolo investono la stessa somma di denaro. Dopo il primo anno, la somma investita da Luigi è aumentata del 10% e quella investita da Paolo è diminuita del 5%. Luigi e Paolo decidono di reinvestire per un altro anno ancora le somme ottenute dopo il primo anno. Nel secondo anno Luigi perde il 5%, mentre Paolo guadagna il 10%. Se Luigi e Paolo hanno investito inizialmente una somma di 1000 euro ciascuno, quanto avrà ciascuno dei due alla fine del secondo anno? Scrivi i calcoli che fai per trovare la risposta e infine riporta i risultati. [Luigi 1045; Paolo 1094,50]
47. (Invalsi 2012) La seguente tabella riporta il numero di occupati, in migliaia, in Italia in ciascuno degli anni dal 1995 al 2005.

Anni	Occupati (in migliaia)
1995	20240
1996	20326
1997	20384
1998	20591
1999	20847
2000	21210
2001	21604
2002	21913
2003	22241
2004	22404
2005	22563

a. Quale tra le seguenti espressioni dà come risultato l'aumento percentuale del numero di occupati nel 2001 rispetto al numero di occupati nel 2000? A) 21604/21210 × 100 B) 394/21210 × 100 C) 21210/21604 × 100 D) 394/21604 × 100 Di quanto sono aumentati gli occupati dal 1995 al 2005? c. Qual è stato l'aumento medio annuo del numero di occupati nei dieci anni dal 1995 al 2005?
[a. B; b. 2323 migliaia; c. 21302 migliaia]

48. (Invalsi 2012) La tabella seguente riporta alcune informazioni nutrizionali stampate su tre confezioni di cereali per la prima colazione:

	Confezione 1	Confezione 2	Confezione 3
grammi di cereali	100	200	70
percentuale di zucchero	20%	10%	20%

Sulla base dei dati in tabella, indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.
a. La quantità di zucchero contenuta nella confezione 2 è uguale alla quantità di zucchero contenuta nella confezione 3. b. La quantità di zucchero contenuta nella confezione 1 è maggiore della quantità di zucchero contenuta nella confezione 2. c. La quantità di zucchero contenuta nella confezione 1 è maggiore della quantità di zucchero contenuta nella confezione 3. [F; F; V]

49. (Invalsi 2012) In un negozio un abito è messo in vendita con uno sconto del 30% sul prezzo originario. Durante la stagione dei saldi il prezzo già scontato viene ancora abbassato del 10%. Qual è la percentuale complessiva di sconto sul prezzo originario dell'abito? A) 20% B) 33% C) 37% D) 40% [C]

50. (Invalsi 2013) Considera un quadrato di lato a. Se si aumenta il lato a del 20%, si ottiene un nuovo quadrato di lato b. a) Quale delle seguenti espressioni rappresenta la misura di b? A) $20\,a$ B) $1{,}20\,a$ C) $a + 20$ D) $a + 0{,}20$ b) Di quanto aumenta in percentuale l'area del quadrato di lato b rispetto all'area del quadrato di lato a? A) Del 20% B) Del 40% C) Del 44% D) Del 120% [B; C]

51. (Invalsi 2013) L'ISTAT, nelle "Previsioni della popolazione italiana per l'Anno 2020", prevede che in quell'anno i quindicenni italiani saranno circa 592000, cioè lo 0,95% della popolazione italiana del 2020. Calcola qual è, secondo l'ISTAT, il numero stimato di italiani nel 2020. Esprimi il risultato con un numero intero. [62315789]

52. (Invalsi 2013) La seguente tabella riporta il numero di vittime per incidenti stradali dal 2001 al 2007 in una regione italiana.

Anno	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Numero di vittime	792	776	700	681	635	539	531

(Fonte: Eurostat, Regional Transport Statistics)

a) In quale dei seguenti periodi si è avuta la diminuzione più consistente del numero di vittime per incidenti stradali? A) tra il 2001 e il 2002 B) tra il 2002 e il 2003 C) tra il 2003 e il 2004 D) tra il 2004 e il 2005. b) Di quale percentuale è diminuito il numero di vittime per incidenti stradali dal 2001 al 2007? Scrivi i calcoli che fai per trovare la risposta e infine riporta il risultato. [B; 33%]

53. (Invalsi 2013) Marco vuole acquistare un nuovo motorino e un amico gli offre 400 euro per il vecchio. Due rivenditori gli fanno le seguenti offerte per lo stesso modello di motorino: Offerta A: prezzo di 2500 euro e il 10% di sconto se consegna al rivenditore il vecchio motorino. Offerta B: prezzo di 2950 euro, sul quale è praticato uno sconto del 20%. Che cosa conviene fare a Marco?
[Accettare l'offerta B e vendere il vecchio motorino all'amico]

54. (Invalsi 2014) A una corsa campestre partecipa il 60% degli alunni di una scuola. Dopo i primi 3 km il 30% degli alunni partecipanti si ritira e, dopo altri 5 km, si ritira il 40% dei restanti. Tutti gli altri arrivano al traguardo. Se gli alunni della scuola sono 1000, quanti arrivano al traguardo? Scrivi i calcoli che hai fatto per trovare la risposta e poi riporta il risultato. [420]

55. (Invalsi 2015) Nella seguente tabella, d rappresenta la distanza in metri fra l'abitazione e la scuola di ciascuno degli alunni di una classe.

Distanza in metri dalla scuola	$100 \le d < 500$	$500 \le d < 1000$	$1000 \le d < 1500$	$1500 \le d < 2000$	$2000 \le d < 2500$
Numero di alunni	2	8	5	7	3

a) Quanti sono gli alunni che abitano a meno di 1 *km* dalla scuola? B) Qual e la percentuale di alunni che abitano a meno di 1,5 *km* dalla scuola? A) 15% B) 20% C) 40% D) 60% [10; D]

56. (Invalsi 2015) Su un vasetto di yogurt alla vaniglia da 125 g, sono indicati gli ingredienti. In particolare, si legge: "preparazione dolciaria alla vaniglia: 11%. a) Quanti grammi di preparazione dolciaria alla vaniglia sono presenti, all'incirca, nel vasetto? A) 13,8 B) 1,3 C) 11,0 D) 11,4. b) Sulla confezione dello yogurt e riportata anche la seguente tabella dei valori medi nutrizionali, per ogni 100 g di yogurt

alla vaniglia. Quanti grammi di carboidrati, all'incirca, sono presenti in un vasetto di yogurt alla vaniglia da 125 g? A) 20,4 B) 13,0 C) 16,3 D) 7,7 [A; A]

Proteine	2,8 g
Carboidrati	16,3 g
Grassi	3,2 g

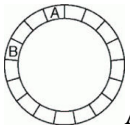
57. (Invalsi 2017) Ai soci di un supermercato un detersivo è venduto, con lo sconto del 20%, al prezzo di 1,40 €. Quanto costa quel detersivo ai clienti che non sono soci del supermercato e che pertanto non hanno diritto allo sconto? A) 1,12 € B) 2,80 € C) 1,68 € D) 1,75 € [D]

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica
A = Abacus gara on line gestita dalla Grace Church School
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
OMI = Olimpiadi della Matematica italiane
B = Giochi organizzati dall'Università Bocconi
MT = Mathematics Teacher, rivista della NCTM

Lavoriamo insieme

Consideriamo un quesito assegnato alla semifinale italiana dei giochi della Bocconi del 1996.
Scrivo il numero 1996 *su un foglio bianco. Essendo pari lo divido per* 2 *ottenendo, con calcoli mentali o con l´aiuto della calcolatrice*, 998, *che scrivo sul foglio. Continuo allora con queste regole*: a) *se l´ultimo numero scritto è pari, lo divido per* 2 *e scrivo il risultato*; b) *se il numero è dispari, gli aggiungo* 1 *e scrivo il risultato ottenuto. Dopo un po' di passaggi, ottengo il numero* 2 *che scrivo sul foglio. Quanti numeri sono stati scritti sul foglio*?
Vediamo la successione di operazioni: 1996 → 998 → 499 → 500 → 250 → 125 →126 → 63 → 64 → 32 → 16 → 8 → 4 → 2. Quindi abbiamo scritto un totale di 14 numeri.

1. (B1996) Sul bordo di uno stagno circolare sono piantati 5 magnifici salici sui cui rami si trovano dei passeri il cui numero totale è inferiore a 30. Ad un certo momento, un passero è passato dal primo al secondo salice. Due passeri sono in seguito passati dal secondo al terzo salice, poi tre dal terzo al quarto, quattro dal quarto al quinto ed infine cinque passeri si sono spostati dal quinto salice al primo. Dopo questi trasferimenti, vi era lo stesso numero di passeri su ciascuno dei cinque salici. Quanti sono i passeri posati su ciascuno dei cinque salici prima di tutti i trasferimenti? [1, 6, 6, 6, 6]
2. (B1996) Nella lista dei numeri seguenti: {6, 7, 29, 4, 13, 5, 2, 8, 9} eliminate due numeri la cui somma è 12 e la cui differenza vale 2. Poi, eliminate due numeri la cui somma vale 12 e il cui prodotto vale 32. In seguito, eliminate due numeri la cui differenza vale 7 e il cui prodotto vale 78. Infine, eliminate due numeri tali che, quando si divide l´uno per l´altro, il quoziente vale 3 ed il resto 2. Quale numero rimane? [2]
3. (B2000) I miei quattro cugini arrivano a casa nostra domenica mattina all´ora della colazione e si fermano per dodici giorni di vacanza. Sono molto golosi, come noi del resto! Per fortuna la mamma, previdente, ha comperato 168 barrette di cioccolato in modo che ognuno possa, durante i dodici giorni, mangiarne una a colazione e una a merenda. Purtroppo, alla sera del nono giorno, i nostri cugini devono interrompere il loro soggiorno e rientrare a casa. Noi continuiamo, malgrado la loro assenza, a gustarci le barrette di cioccolato con la stessa frequenza. In quale giorno della settimana mangeremo l´ultima barretta? [Lunedì]
4. (B2002) Nella pista in figura si muovono 2 pulci. 

Ad ogni secondo, la pulce A si sposta di 3 caselle in senso orario mentre la pulce B si sposta di 2 caselle in senso contrario. Dopo quanti secondi le due pulci si poseranno per la prima volta contemporaneamente sulla stessa casella? [13]
5. (B2007) Una scatola contiene delle caramelle gialle (al limone) e delle caramelle verdi (alla menta). Se aggiungessimo una caramella gialla, le caramelle gialle rappresenterebbero un quarto del contenuto della scatola mentre, se ne togliessimo una, sarebbero solo il quinto del contenuto della scatola. Quante caramelle verdi contiene la scatola? [24]

Lavoriamo insieme

Vediamo un quesito assegnato ai Giochi Bocconi del 2003.
Cinque amici (Alberto, Carlo, Davide, Edoardo, Filip) sono andati insieme a pescare. Alberto e Carlo, messi insieme, hanno preso 14 *pesci; Carlo e Davide, insieme, ne hanno presi* 20; *Davide ed Edoardo, insieme*, 18; *Edoardo e Filip*, 12; *infine, Alberto e Filip ne hanno presi* 16. *Quanti pesci hanno preso, complessivamente, i cinque amici*?
Se sommiamo i sei numeri otteniamo il doppio dei pesci presi, quindi il numero richiesto è

$$(14 + 20 + 18 + 12 + 16) / 2 = 80 / 2 = 40$$

6. (B2008) Jacob, in vacanza al mare, si dedica al suo hobby preferito: la pesca. Il primo giorno pesca 1 pesce; il secondo giorno, 2 pesci; il terzo giorno, 3 pesci. Nei giorni successivi pesca 4 pesci al giorno fino al terzultimo giorno della sua vacanza, quando Jacob pesca soltanto 3 pesci. Il penultimo giorno, 2; l'ultimo giorno, solo 1. Durante l'intera vacanza, Jacob ha pescato in tutto 52 pesci. Quanti giorni è durata la vacanza al mare di Jacob? [16]
7. (OMI2007) Allo stadio gli spettatori entrano attraverso cinque cancelli, posti uno di fianco all'altro, secondo questa regola: viene fatta entrare una persona dal primo cancello, poi due persone dal secondo cancello, poi tre persone dal terzo, poi quattro persone dal quarto e infine cinque persone dal quinto. Poi si ricomincia procedendo allo stesso modo e si va avanti finché non sono entrati tutti. Sapendo che Raffaele sarà la 2007–esima persona ad entrare, da quale cancello entrerà? [Quinto]
8. (OMI2007) Sul pianeta Uru le settimane durano 8 giorni, i mesi (tutti indistintamente) durano 34 giorni e in un anno ci sono 14 mesi. Quando il primo giorno dell'anno cade di domenica (ultimo giorno della settimana) si celebra la Festa del Pianeta. Sapendo che oggi su Uru è la Festa del Pianeta, tra quanti giorni sarà la prossima? [952]
9. (B1996) Tom si diverte con la sua enciclopedia dei giochi matematici. Questo libro è composto di 4 pagine di copertina non numerate e 256 pagine numerate nell´ordine da 1 a 256. Le pagine a sinistra portano un numero pari mentre quelle a destra hanno un numero dispari. Tom ha aperto a caso una pagina dell´enciclopedia. Calcola la somma delle sei cifre dei numeri di pagina che ha davanti. Questa somma è la più grande possibile. Qual è il numero della pagina a sinistra? [198]
10. (AHSME1979) Trovare la somma delle cifre del più grande numero pari di tre cifre che non cambia se scambiamo fra loro le cifre delle unità e delle centinaia. [25]
11. (OMI2003) Quante cifre ha il più grande numero primo palindromo con un numero pari di cifre? (Nota: un numero si dice palindromo se può essere letto indifferentemente da sinistra a destra o da destra a sinistra. Per esempio, 141 e 2552 sono palindromi, mentre 1231 no). [2: Il numero 11]

Lavoriamo insieme

Vediamo un quesito assegnato ai giochi della Bocconi del 2008.
Una calcolatrice ha solo due tasti: il tasto "–1" (*meno* 1) *e il tasto* ":3" (*diviso* 3). *Al momento dell'accensione, sullo schermo compare il numero* 2008. *Quante volte bisogna premere complessivamente, al minimo, i tasti* "–1" *e* ":3" *per poter leggere il risultato* "1" *sullo schermo*? Poiché le divisioni devono risultare esatte, possiamo eseguirle solo se il dividendo è un multiplo di 3. Quindi l'unica sequenza possibile è la seguente:

$$2008 \xrightarrow{-1} 2007 \xrightarrow{:3} 669 \xrightarrow{:3} 223 \xrightarrow{-1} 222 \xrightarrow{:3} 74 \xrightarrow{-1} 73 \xrightarrow{-1} 72 \xrightarrow{:3}$$
$$\xrightarrow{:3} 24 \xrightarrow{:3} 8 \xrightarrow{-1} 7 \xrightarrow{-1} 6 \xrightarrow{:3} 2 \xrightarrow{-1} 1$$

Quindi in totale 13 volte.

12. (A1998) Scriviamo il seguente numero decimale infinito: 0,14916253649… in cui scriviamo i quadrati perfetti uno accanto all'altro. Quale sarà la centesima cifra dopo la virgola? [9]
13. (B2003) Ad un concorso di Matematica le ragazze erano il doppio dei maschi. Ognuno dei partecipanti ha ottenuto 8, 9 o 10 punti e tutti insieme hanno totalizzato 156 punti. Quanti ragazzi (maschi) hanno partecipato al concorso? [6]
14. (AHSME1978) Quattro ragazzi comprano una barca per 60 euro. Il primo paga metà della somma pagata dagli altri ragazzi, il secondo paga un terzo della somma pagata dagli altri e il terzo paga un quarto della somma pagata dagli altri. Quanto paga il quarto ragazzo? [€ 13,00]

15. (B1996) L´ultimo CD dei Math–Singer costa un numero intero di franchi. Pur non avendo il portafoglio vuoto, Matteo non può acquistarlo poiché gli mancano 47 franchi. Anche Matilde non può comprarlo in quanto le mancano 2 franchi per pagarlo. Matilde e Matteo decidono allora di mettere in comune i loro franchi, ma anche in questo caso non hanno sufficienti franchi per comprarlo. Quanti franchi costa il CD dei Math–Singer? [48 franchi]
16. (B1999) Messer Tobia, che non è mai stato una spia, possiede un terreno rettangolare "quasi" quadrato: la sua lunghezza e la sua larghezza, che sono numeri interi espressi in metri, differiscono esattamente di 1 metro. L´area del terreno di Tobia, espresso in metri quadrati, è un numero di 4 cifre: la cifra delle migliaia e quella delle centinaia sono uguali; lo stesso dicasi per la cifra delle decine e quella delle unità. Qual è la larghezza del terreno di Tobia? Nota: il problema ammette tre soluzioni. [1122, 4422, 9900]
17. (B1999) La Signora e il Signor Settimi hanno 7 figli nati tutti, stranamente, il 7 luglio. Ogni anno, per il loro compleanno la signora Settimi offre ad ogni figlio una torta con tante candeline quanti sono i suoi anni. Giovanni Settimi, il più giovane, si ricorda che 5 anni fa le candeline erano, in totale, la metà di quelle di quest´anno. Quante candeline saranno accese quest´anno? [70]

Lavoriamo insieme

Consideriamo un quesito assegnato alle Olimpiadi della matematica del 2006.
Laura sta leggendo un libro e nota che il numero della pagina a cui è arrivata è divisibile per 3, 4 *e* 5. *Qual è la cifra delle unità del numero della pagina successiva*?
Un numero divisibile per 4 e per 5 è divisibile per 20, quindi anche per 10, cioè ha cifra delle unità uguale a zero. Perciò la cifra delle unità del numero successivo è 1.

18. (AHSME1967) La somma $2a3 + 326$, fornisce il numero $5b9$, che è divisibile per 9. Quant'è $a + b$? [6]
19. (AHSME1951) Formiamo un numero di sei cifre ripetendo un numero di tre cifre, per esempio 256256 oppure 678678. Qual è il più grande numero per cui ogni numero di questa forma è divisibile? [1001]
20. (B2000) In un dado "normale", la somma dei punti su due facce opposte è sempre uguale a 7. Enrico ha messo su un tavolo tre dadi "normali", uno sopra l´altro a formare una torre. Sulla faccia superiore del dado in cima alla torre c´è un 4. Quanto vale la somma dei punti nelle cinque facce nascoste (comprese tra due dadi o il tavolo)? [17]
21. (B1996) Le 3 coppie Angelo e Chiara, Enrico e Simonetta, Guido e Marina totalizzano in sei 137 anni. Enrico e sua moglie hanno 47 anni in due; Chiara è la più anziana delle tre signore ed ha 4 anni in più della più giovane, mentre ogni marito ha 5 anni più della rispettiva moglie. Qual è l´età dei tre mariti? [27, 26, 23]
22. (AHSME1951) Quanti interi positivi minori di 50 hanno un numero dispari di divisori? [7]
23. (A1998) Trova il più piccolo numero intero che non contiene la cifra 9, ma è divisibile per 999. [111888]

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato all' AHSME 1975.
Determinare la somma delle cifre del numero $\left(10^{408}+1\right)^2$.

Sviluppiamo: $\left(10^{408}+1\right)^2 = (10^{408} + 1) \cdot (10^{408} + 1) = 10^{816} + 10^{408} + 10^{408} + 1 = 10^{816} + 2 \cdot 10^{408} + 1.$

Adesso chiediamoci che tipo di numero è il risultato. 10^{816} è formato da 1 e 816 zeri, allo stesso modo $2 \cdot 10^{408}$ è formato da 2 seguito da 408 zeri. Quando sommiamo questi due numeri avremo ancora un numero con 817 cifre, che sono 1 (la prima), 2 (quella di posto 409 dalla fine) e poi tutti zeri. Sommando 1 a questo numero otterremo $1\underbrace{0\ldots0}_{407}2\underbrace{0\ldots0}_{407}1$, la somma delle cifre è 1 + 2 + 1 = 4.

24. (AHSME1995) Un campo rettangolare è largo 300 piedi e lungo 400 piedi. Mediamente si trovano tre formiche per ogni pollice quadrato [12 pollici = 1 piede]. Fra i seguenti numeri quale approssima meglio il numero di formiche in tutto il campo? [C]
    A) $5 \cdot 10^5$ B) $5 \cdot 10^6$ C) $5 \cdot 10^7$ D) $5 \cdot 10^8$ E) $5 \cdot 10^9$
25. (B2003) Leone è velocissimo nei calcoli e chiede a Paolo: "*Qual è l'ultima cifra di* 2003^{2003}?" Aiuta

Paolo. [7]

26. (B2008) Matteo e Rossella sono entrambi golosi e si contendono i cioccolatini che hanno. Matteo conta i suoi. "*Se ne avessi il triplo, ne avrei più di* 31 – dice a Rossella – *ma, se ne avessi il doppio, ne avrei meno di* 31!". Prende allora un cioccolatino di Rossella e confessa: "*anche adesso, se ne avessi il doppio, ne avrei sempre meno di* 31!". A questo punto, è Rossella a prendere 4 cioccolatini a Matteo – le piacciono troppo! – dicendogli poi: "*non ti lamentare! Anche adesso, se tu avessi il triplo dei cioccolatini che hai, ne avresti più di* 31!" Quanti cioccolatini aveva Matteo prima di questa accanita discussione? [14]
27. (A1998) Scriviamo 1, 9, 9, 8 e continuiamo scrivendo la cifra delle unità della somma delle 4 cifre precedenti. Così il quinto numero sarà 7 perché 1 + 9 + 9 + 8 = 27; il sesto numero sarà 3 perché 9 + 9 + 8 + 7 = 33, e così via. Possiamo ottenere la sequenza 1, 2, 3, 4? [No]

Lavoriamo insieme

Consideriamo un quesito proposto all'Università di Stanford negli Stati Uniti, dove si sono tenuti per molti anni delle famose gare matematiche.

Due amiche A e B si incontrano dopo tanto tempo. A chiede a B se ha figli e quanti anni hanno ciascuno di essi. B risponde dicendo che ha tre figli, i numeri che esprimono le loro età moltiplicati fra loro hanno un prodotto di 36 *e la somma di tali numeri corrisponde al numero civico della porta davanti la quale sono ferme a parlare. A dice che, pur essendo brava in matematica, non riesce a determinare le tre età, allora B aggiunge dicendo che il maggiore dei suoi figli ha gli occhi azzurri.*

Quest'ultima affermazione sembrerebbe priva di senso, vedremo invece che è effettivamente importantissima. Infatti la prima informazione ci dice che i figli possono avere una delle seguenti tre terne di età: (1, 1, 36), (1, 2, 18), (1, 2, 12), (1, 4, 9), (2, 2, 9), (1, 6, 6), (2, 3, 6), (3, 3, 4). Dato che esse sono le uniche terne il cui prodotto fornisce 36. Se le sommiamo otteniamo sempre risultati diversi, tranne nei casi: 2 + 2 + 9 = 1 + 6 + 6 = 13. Dato che A ha detto di non riuscire a determinare le età dei tre ragazzi esse devono essere ferme davanti ad una abitazione posta al numero 13. La terza informazione svela l'inghippo, dato che la mamma parla di un maggiore, i due gemelli che vi sono fra i tre figli non possono comprendere il primogenito, come accadrebbe nel caso (1, 6, 6). Quindi i bambini hanno 9, 2 e 2 anni.

28. (A1998) "*Quante persone abitano in questa casa*?" chiese un poliziotto. "*Tre*", fu la risposta. "*Quanti anni hanno*?", "*Il prodotto delle loro età è* 225, *e la somma è uguale al numero civico di questa casa*". Il poliziotto guardò e disse: "*Sei il più vecchio dei tre*?", "*Sì*", fu la risposta. "*Mi basta*!", disse il poliziotto. Quanti anni hanno gli abitanti della casa? [3, 3, 25]
29. (OMI2008) Pietro e Paolo festeggiano il loro onomastico in pizzeria con i loro amici. Alla fine della cena il conto viene diviso in parti uguali tra tutti i presenti e ciascuno dovrebbe pagare 12 Euro. Con grande generosità però, gli amici decidono di offrire la cena a Pietro e Paolo; il conto viene nuovamente diviso in parti uguali tra gli amici di Pietro e Paolo (cioè tutti i presenti esclusi Pietro e Paolo), e ciascuno di loro paga 16 Euro. Quanti sono gli amici? [8]
30. (OMI2008) Alberto, Barbara e Clara giocano in un grande piazzale dove ci sono 2008 birilli. Alberto butta giù il triplo dei birilli buttati giù da Barbara, che a sua volta butta giù il doppio dei birilli buttati giù da Clara. Quanti birilli al massimo può aver buttato giù Alberto? [1338]
31. (OMI2008) Quanti sono i numeri interi positivi multipli di almeno uno tra 5 e 7 e minori o uguali a 1000? [314]
32. (A2002) Un numero intero ha esattamente 8 divisori, fra i quali ci sono 35 e 77. Trovare il numero. [385]
33. (OMI2005) Quanti sono i numeri interi maggiori o uguali a 1 e minori o uguali a 100 che sono uguali al quadrato del numero dei propri divisori positivi? (Attenzione: tra i divisori di un numero vi sono anche 1 ed il numero stesso). [Solo il numero 9]
34. (A2003) Un insegnante scrive un numero sulla lavagna. Uno studente dice: "*Il numero è divisibile per* 31". Un altro dice: "*Il numero è divisibile per* 30". Ancora un altro "*Il numero è divisibile per* 29". E così via, ognuno dicendo la stessa frase con un numero in meno del precedente, finché il trentesimo studente dice: "*Il numero è divisibile per* 2". Alla fine l'insegnante dice che solo 2 delle 30 affermazioni sono sbagliate e sono state dette una dopo l'altra. Quali sono? ["*Il numero è divisibile per* 16" e "*Il numero è divisibile per* 17"]

Questions in English

Nota: Gli anglosassoni usano il punto come la nostra virgola e viceversa. 1.2 significa 1,2 e 1,000 mille

Working together

This is a question assigned at AHSME in 1996.

A father takes his twins and a younger child out to dinner on the twins' birthday. The restaurant charges \$4.95 *for the father and* \$0.45 *for each year of a child's age, where age is defined as the age at the most recent birthday. If the bill is* \$9.45, *which of the following could be the age of the youngest child*? A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

The sum of the children's ages is 10 because \$9.45 – \$4.95 = \$4.50 = 10·\$0.45. If the twins were 3 years old or younger, then the third child would not be the youngest. If the twins are 4, the youngest child must be 2.

35. (AHSME1999) Find the sum of all prime numbers between 1 and 100 that are simultaneously 1 greater than a multiple of 4 and 1 less than a multiple of 5. [118]
36. (AHSME1998) Letters a, b, c, and d represent four different digits selected from 0, 1, 2, . . . , 9. If $\frac{a+b}{c+d}$ is an integer that is as large as possible, what is the value of $a + b$? [17]
37. (AHSME1995) If M is 30% of Q, Q is 20% of P, and N is 50% of P, then M/N = ? [3/25]
38. (AHSME1999) Before Ashley started a three-hour drive, her car's odometer[1] reading was 29792, a palindrome. (A palindrome is a number that reads the same way from left to right as it does from right to left.) At her destination, the odometer reading was another palindrome. If Ashley never exceeded the speed limit of 75 miles per hour, which of the following was her greatest possible average speed?
A) $33+\frac{1}{3}$ B) $53+\frac{1}{3}$ C) $66+\frac{2}{3}$ D) $70+\frac{1}{3}$ E) $74+\frac{1}{3}$ [D]
39. (MT 1992) Dick, Roger and Kamal run laps every day after work. Dick runs one-third of a lap per minute, Roger runs one-fifth of a lap per minute, and Kamal runs one-sixth of a lap per minute. They start together and agree to continue running until they all reach the starting point at the same time. How many laps does each run? [Dick: 10; Roger: 6; Kamal: 5]

Working together

This is a question assigned at AHSME in 1995.

The addition below is incorrect. The display can be made correct by changing one digit[2] *d, wherever it occurs, to another digit e. Find the sum of d and e.*

$$\begin{array}{r} 742586 \\ +829430 \\ \hline 1212016 \end{array}$$

The addition in the columns containing the ten-thousands and hundredthousands[3] digits is incorrect. The only digit common to both these columns is 2. Changing these 2's to 6's makes the arithmetic correct. Changing the other two 2's to 6's has no effect on the correctness of the remainder of the addition, and no digit other than 2 could be changed to make the addition correct. Thus, $d = 2$, $e = 6$, and $d + e = 8$.

40. (MT1992) One invention saves[4] 30% on fuel[5]; a second saves 45%; a third 25%. If you use all three inventions at once, how much can you save? [71,125%]
41. (AHSME1996) The addition below is incorrect. What is the largest digit that can be changed to make

[1] contachilometri
[2] cifra
[3] centinaia di migliaia
[4] fa risparmiare
[5] carburante

the addition correct?
$$\begin{array}{r} 641 \\ 852 \\ +973 \\ \hline 2456 \end{array}$$
[7]

42. (AHSME1995) The total in-store price for an appliance is \$99.99. A television commercial advertises the same product for three easy payments of \$29.98 and a one-time shipping and handling charge[6] of \$9.98. How much is saved by buying the appliance from the television advertiser? [7 cents]
43. (AHSME1995) How many base 10 four-digit numbers, N = *abcd*, satisfy all three of the following conditions? i) $4{,}000 \le N < 6{,}000$; ii) N is a multiple of 5; iii) $3 \le b < c \le 6$ [24]
44. (AHSME1997) If *a* and *b* are digits for which
$$\begin{array}{r} 2a \\ \times b3 \\ \hline 69 \\ 92 \\ \hline 989 \end{array}$$
Then $a + b$ is? [7]

Working together

This question was assigned at AHSME in 1999.

What is the sum of the digits of the decimal form of the product $2^{1999} \cdot 5^{2001}$?

Note that $2^{1999} \cdot 5^{2001} = 2^{1999} \cdot 5^{1999} \cdot 5^2 = 25 \cdot 10^{1999}$. Hence the number is formed by 25 followed by 1999 zeros, the requested sum is 7.

45. (MT1992) Find the number *t* and the digit symbolized by *a* in: $[3 \cdot (230 + t)]^2 = 492a04$.
[$a = 8$, $t = 4 \vee -464$]
46. (MT1993) $\dfrac{2^1 + 2^0 + 2^{-1}}{2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4}}$ equals A) 6 B) 8 C) 31/2 D) 24 E) 512 [B]
47. (MT1994) 9A523176 is divisible by 8. Find A. [Can be any digit]
48. (AHSME1995) Anita attends a baseball game in Atlanta and estimates that there are 50,000 fans in attendance. Bob attends a baseball game in Boston and estimates that there are 60,000 in attendance. A league official who knows the actual numbers attending the two games notes that: i) The actual attendance in Atlanta is within 10% of Anita's estimate; ii) Bob's estimate is within 10% of the actual attendance in Boston. To the nearest 1,000, the largest possible difference between the numbers attending the two games is? [22,000]
49. (AHSME1997) Mientka Publishing Company prices its best seller "*Where's Walter?*" as follows:
$$C(n) = \begin{cases} 12n & \text{if } 1 \le n \le 24 \\ 11n & \text{if } 25 \le n \le 48 \\ 10n & \text{if } n \ge 49 \end{cases}$$
, where *n* is the number of books ordered, and *C*(*n*) is the cost in dollars of n books. Notice that 25 books cost less than 24 books. For how many values of *n* is it cheaper[7] to buy more than *n* books than to buy exactly *n* books? [6]
50. (MT1992) In 100 pound watermelon is 95% water. It is dehydrated until it is 90% water. What is its weight after dehydration? [50 pounds]
51. (AHSME1996) Given that $0 < a < b < c < d$, which of the following is the largest? [E]
$$A)\frac{a+b}{c+d} \quad B)\frac{a+d}{b+c} \quad C)\frac{b+c}{a+d} \quad D)\frac{b+d}{a+c} \quad E)\frac{c+d}{a+b}$$

[6] Spese di trasporto e consegna
[7] più economico

Attività di recupero

Concetto di insieme. L'insieme dei numeri naturali e dei numeri interi

Fase 1: Osserva

- L'insieme dei primi 7 numeri pari si può anche scrivere per elenco, scrivendo i suoi elementi fra parentesi graffe: $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$.
- L'insieme $B = \{12, 15, 18, 21\}$ indica i multipli di 3 compresi tra 12 e 21, o anche compresi tra 12 e 22, o tra 10 e 23 e in altri modi simili, dato che fra i numeri 10 e 23 i multipli di 3 sono gli stessi che fra i numeri 12 e 21.
- Per indicare i multipli di 5 compresi tra 100 e 1000 dovremmo elencare 181 numeri (da $5 \cdot 20$ a $5 \cdot 200$), otteniamo lo stesso scrivendo $C = \{100, 105, 110, \ldots, 990, 995,1000\}$, in cui i puntini indicano gli elementi mancanti, questi si capiscono guardando la evidente regola verificata dai numeri scritti.
- L'insieme dei numeri primi compresi tra 48 e 52 non ha elementi, quindi si indica con il simbolo $\{\}$ oppure con $\varnothing$ e lo chiamiamo insieme vuoto.
- La quarta potenza di 2 si scrive 2^4 ed indica il prodotto $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. Ma è anche uguale alla seconda potenza di 4, cioè a 4^2. In ogni caso rappresenta il numero 16.
- Il prodotto $5^7 \cdot 5^{12}$ è uguale a $5^{12+7} = 5^{19}$.
- Il prodotto $11^3 \cdot 6^3$ è uguale a $(11 \cdot 6)^3 = 66^3$.
- Il prodotto $12^5 \cdot 14^2$ non si semplifica in un'unica potenza.

Adesso, tenuto conto dei precedenti esempi ti vengono proposte delle attività parzialmente compilate che tu devi completare

Fase 2: Completa …

1. L'insieme dei primi 12 numeri dispari per elenco, si indica con $A = \{$…….$\}$.
2. L'insieme $B = \{23, 29, 31, 37, 41, 43\}$ indica i numeri …….. compresi tra 23 e 43, o anche compresi tra 20 e 44, e in altri modi simili, dato che fra i numeri 20 e … i numeri ……. sono gli stessi che fra i numeri 23 e ….
3. Per indicare i numeri di 3 cifre che hanno come cifra delle decine il 7, dovremmo elencare …. numeri (da 170 a …….), otteniamo lo stesso scrivendo $C = \{170, \ldots, 172, \ldots, 179, 270, \ldots, \ldots, 978, \ldots\}$, in cui i puntini indicano gli elementi mancanti.
4. L'insieme dei quadrati perfetti compresi tra 101 e … non ha elementi, quindi si indica con il simbolo … oppure con $\varnothing$ e lo chiamiamo ……..
5. La dodicesima potenza di 3 si scrive …. ed indica il prodotto ……... Ma è anche uguale alla …….. potenza di 9, cioè a ….. Ma anche alla quarta potenza di … o alla terza potenza di …..
6. Il prodotto $11^4 \cdot 11^{\cdots}$ è uguale a $11^{4+\cdots} = 11^{23}$.
7. Il prodotto $\ldots^5 \cdot 8^5$ è uguale a $(\ldots \cdot 8)^5 = 16^5 = 2^{\cdots}$.
8. La somma $2^5 + 2^2$ …….
9. La somma $2^5 + 3^5$ …….
10. La somma $3^5 + 4^2$ è uguale a $\ldots^2$, ma non rappresenta una regola generale.

E infine mettiti alla prova svolgendo degli esercizi completi.

Fase 3: Prova!

Scrivere per elenco i seguenti insiemi di cui è fornita una loro proprietà

1. L'insieme dei numeri multipli di 4 compresi tra 234 e 260. [{236, 240, 244, …,260}]
2. L'insieme dei numeri primi compresi tra 23 e 60. [{23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59}]
3. L'insieme delle coppie di numeri primi gemelli (differiscono di 2 unità) compresi tra 11 e 34. [{(11; 13), (17; 19), (29; 31)}]
4. L'insieme dei numeri interi che differiscono di 21 unità compresi tra – 17 e 1475. [{– 17, 4, 25, 46, …, 21453, 1474}]
5. L'insieme dei numeri interi il cui cubo è compreso tra – 170 e 541. [{– 5, – 4, …, 7, 8}]

Indicare una proprietà verificata dai seguenti insiemi espressi per elenco

6. $A = \{12, 16, 20, 24\}$, $B = \{11, 13, 17, 19\}$ [multipli di 4 tra 12 e 24; primi tra 11 e 19]
7. $C = \{121, 144, 169\}$, $D = \{50, 52, \ldots, 600, 602\}$ [quadrati di 11, 12 e 13; pari tra 50 e 602]
8. $E = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$, $F = \{14, 23, 32, 41\}$
   [interi formati con le cifre 1, 2 e 3 usate una sola volta; numeri di due cifre la cui somma è 5]
9. $G = \{10, 11, 14, 19, 40, 41, 44, 49, 90, 91, 94, 99\}$, $H = \{12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89\}$
   [interi di due cifre entrambe quadrati; interi di due cifre in cui le decine sono 1 in più delle unità]
10. $I = \{12, 24, 36, 48\}$, $L = \{12, 14, 16, 18, 21, 23, \ldots, 89, 92, 94, 96, 98\}$
    [interi di due cifre in cui le decine sono il doppio delle unità; interi di 2 cifre una pari e una dispari]

Quali dei seguenti insiemi sono vuoti?

11. A = multipli di 11 fra 100 e 109; B = interi il cui quadrato non è positivo. [Sì; No]
12. A = numeri primi fra 111 e 122; B = interi contemporaneamente quadrati e cubi fra 10 e 50. [No; Sì]
13. A = interi le cui cifre sommano 17 fra 25 e 88; B = interi fra 100 e 500, non divisibili per 3, le cui cifre sono uguali. [Sì; No]
14. A = multipli di 4 ma non di 8; B = multipli di 14 ma non di 7. [No; Sì]
15. A = uomini alti più di 3 m; B = stelle distanti dalla terra meno di 10^6 Km. [Sì; Sì]

Semplificare, ove possibile, le seguenti espressioni con le potenze

16. $2^4 \cdot 2^3$; $5^8 + 5^7$; $7^{24} \cdot 3^{24}$; $2^2 \cdot 2^5 \cdot 2^6 \cdot 2$ [2^7; $5^8 + 5^7$; 21^{24} ; 2^{12}]
17. $3^7 \cdot 5^7$; $2^3 + 2^3$; $2^4 \cdot 4^2$; $5^2 \cdot 5^3 \cdot 25^2$ [15^7; 2^4; 2^8 ; 5^9]
18. $3^4 \cdot 4^3$; $7^5 + 7^5$; $11^4 \cdot 22^2$; $3^2 \cdot 9^3 \cdot 27^4$ [$3^4 \cdot 4^3$; $7^5 + 7^5$; $11^4 \cdot 22^2$; 3^{20}]

Determinare, se esiste un valore intero di x per il quale le seguenti uguaglianze risultano vere

19. $x^4 \cdot 5^8 = 5^{12}$; $x^3 \cdot 4^5 = 4^{15}$; $x^2 \cdot 11^2 = 33^2$; $x \cdot x^{10} = x^{11}$ [5; $\varnothing$; 3, qualsiasi]
20. $x^4 \cdot 2^x = 2^6$; $x^3 \cdot 3^x = 3^5$; $x^3 \cdot 5^3 = 25^6$; $x^7 \cdot 11^{x+1} = 11^{19}$ [2; $\varnothing$; $\varnothing$, 11]

Divisibilità e fattorizzazione nell'insieme dei numeri interi

Fase 1: Osserva

- Vogliamo trovare tutti i divisori del 180. Sappiamo che sono a coppie, a partire da quella banale (1, 180). Il numero è pari, quindi c'è anche (2, 90); è divisibile per 3: (3, 60); per 4: (4, 45). Osserviamo che ogni volta il primo elemento della coppia aumenta e il secondo diminuisce, così come la differenza dei due. Passiamo a (5; 36), a (6, 30). Il numero non è divisibile per 7, né per 8 (dividendo per 4 abbiamo ottenuto 45). Lo è per 9: (9, 20) e per 10: (10, 18). Non per 11, ma per 12: (12, 15). A questo punto abbiamo finito perché non è divisibile per 13 e 14. L'ultimo trovato era 15, quindi se continuiamo ritroveremo le stesse copie scritte in ordine inverso.
- Abbiamo visto che il numero 180 ha 18 divisori. Del resto 180 si può scrivere $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Se aumentiamo di una unità ciascuno degli esponenti delle basi e li moltiplichiamo fra loro otteniamo: $(2 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 18$. Questo non è un caso, ma un risultato generale. Così se volessimo sapere quanti divisori ha $48 = 2^4 \cdot 3$, possiamo dire, senza calcolarli, che sono un totale di $(4 + 1) \cdot (1 + 1) = 10$. In effetti essi sono: (1, 48), (2, 24), (3, 16), (4, 12), (6, 8).
- Vogliamo verificare, usando il minor numero possibile di verifiche, se 1147 è primo oppure no. Non è divisibile per 2, 3 ($1 + 1 + 4 + 7 = 13$ non divisibile per 3) o 5. Dividiamo per 7 e otteniamo $1147 = 7 \cdot 163 + 6$. Non è divisibile per 11 ($(1 + 7) – (1 + 4) = 3$, non divisibile per 11). Dividiamo per 13: $1147 = 13 \cdot 88 + 3$. Passiamo al successivo numero primo: 17. si ha: $1147 = 17 \cdot 67 + 8$. Continuiamo: $1147 = 19 \cdot 60 + 7$; $1147 = 23 \cdot 49 + 20$; $1147 = 29 \cdot 39 + 16$; $1147 = 31 \cdot 37$. Quindi il numero non è primo. Se anche quest'ultima divisione non fosse stata esatta non avremmo continuato molto, poiché i due fattori erano molto vicini, avremmo controllato solo 37 e se non funzionava neanche con questo avremmo detto che il numero era primo.
- Sappiamo che il numero 4X21X111 è multiplo di 11, che cifra può nascondere il simbolo X? Se il numero è divisibile per 11 vuol dire che la differenza $(4 + 2 + X + 1) – (X + 1 + 1 + 1) = (7 + X) – (X + 3) = 4$, deve essere 0 o un numero divisibile per 11, ma ciò non accade per alcun valore di X, quindi la domanda è mal posta.
- Se il numero fosse stato invece 41X213X11 la differenza sarebbe diventata $(4 + X + 1 + X + 1) – (1 + 2 + 3 + 1) = (6 + 2X) – 7 = 2X – 1$. Non esiste alcun valore intero di X affinché essa faccia zero. Men-

tre se X = 6, diventa $2 \cdot 6 - 1 = 11$. Ed è l'unico valore per cui si ottiene un multiplo di 11. Pertanto X = 6 e 416213611 è divisibile per 11.

- Vogliamo scomporre in fattori primi 456. Costruiamo il seguente schema:

456	2
228	2
114	2
57	3
19	19
1	

. Quindi possiamo dire che si ha: $456 = 2^3 \cdot 3 \cdot 19$.
- Abbiamo a disposizione 10 nastri rossi, 8 verdi e 12 bianche, quante coccarde della bandiera italiana possiamo fare usando il massimo numero di nastri di ogni colore in ogni coccarda? Si tratta di determinare MCD(8, 10, 12) = 2. Quindi al massimo ogni coccarda sarà formata da 6 nastri, 2 per colore. Il numero totale di coccarde sarà perciò 4, cioè 8: 4, dato che esauriti i nastri verdi, anche se ne abbiamo ancora di rossi e bianchi non possiamo fare il tricolore.

Adesso, tenuto conto dei precedenti esempi ti vengono proposte delle attività parzialmente compilate che tu devi completare

Fase 2: Completa …

1. Per trovare tutti i divisori del 68, cominciamo dalla coppia banale (…, …). Il numero è pari, quindi c'è anche (…, …); non è divisibile per 3; è divisibile per …: (…, 17); non è divisibile per 6, 7, …, …. Dato che $9 \cdot 9 = 81 > 68$, possiamo concludere dicendo che ……. Infine i divisori cercati sono i seguenti: 1, 2, …, …, …, … .
2. Siccome $68 = 2^2 \cdot \ldots$, potevamo dire subito che i suoi divisori sarebbero stati un totale di: (… + 1) · (… + …) = …. Quindi possiamo dire che anche $45 = \ldots^{2} \cdot \ldots$ ha 6 divisori, mentre invece $24 = 2^3 \cdot 3$, ha un totale di (… + 1) · (… + …) = … divisori.
3. Vogliamo verificare, usando il minor numero possibile di verifiche, se 127 è primo oppure no. Non è divisibile per 2, 3 (1 + … + … = … non divisibile per 3) o 5. Dividiamo per 7 e otteniamo $127 = 7 \cdot \ldots$ + …. Non è divisibile per 11 ((1 + …) – …) = …, non divisibile per 11). Dividiamo per …: $127 = \ldots \cdot 9 + \ldots$. Dato che il quoziente ottenuto, 8, è minore del divisore, …, possiamo concludere che 127 … primo.
4. Sappiamo che il numero 14X3X2X45 è multiplo di 9, che cifra può nascondere il simbolo X? Se il numero è divisibile per 9 vuol dire che la …. (1 + 4 + …….) = …. + 3X, deve essere un numero divisibile per …, ma ciò non accade per alcun valore di X, perché la somma fra un multiplo di 3 e un non multiplo di 3, non è multiplo di …, quindi a maggior ragione di …, quindi la domanda è mal posta.
5. Se il numero fosse stato invece 14X3X245 la somma sarebbe diventata (……) = 2X + …. In questo caso invece se X = …, diventa … = 9. Ed è l'unico valore per cui si ottiene un multiplo di 9. Pertanto X = … e 14…3….245 è divisibile per ….
6. Vogliamo scomporre in fattori primi 476. Costruiamo il seguente schema:

476	2
238	...
119	...
...	...
...	...
1	

. Quindi possiamo dire che si ha: $476 = 2^{\cdots} \cdot \ldots \cdot \ldots$.
7. Abbiamo a disposizione 20 fette di salame, 15 di prosciutto e 25 di provola, quanti tramezzini uguali con il maggior numero di affettati dello stesso tipo possiamo fare? Si tratta di determinare …(15, 20, …) = …. Quindi al massimo ogni tramezzino conterrò … fette di prosciutto, … fette di salame e … fette di provola. Il numero totale di tramezzini sarà perciò …, cioè ……., dato che esaurite le fette di

…., anche se ne abbiamo ancora degli altri affettati non possiamo fare tramezzini con … tipi di affettati.

8. In un negozio pony express, alle 8:00 del mattino partono tre corrieri, uno che porta la posta prioritaria, uno le raccomandate e l'altro i pacchi. Tenuto conto delle consegne, essi impiegano in media, rispettivamente, 25, 30 e 40 minuti per fare il giro e partire per una nuova consegna. Se l'orario di lavoro è per ciascuno al massimo di 6 ore, a quali ore i tre ripartiranno ancora insieme? Stavolta dobbiamo calcolare il …(25, 30, 40) = … Quindi vuol dire che i tre dovrebbero ripartire insieme dopo … minuti, che sono però più di … ore, pertanto possiamo concludere che …… Invece potranno partire insieme di nuovo il primo e il secondo ogni …(25, 30) = … minuti, quindi alle ore …, … Il primo e il terzo dopo mcm(…, …) = … minuti, quindi alle ore …. Infine il secondo e il terzo dopo …….. = … minuti, cioè alle ore …, …, ….

E infine mettiti alla prova svolgendo degli esercizi completi.

Fase 3: Prova!

Trovare tutti i divisori dei seguenti numeri

1. 42, 65, 88 [{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42} ; {1, 5, 13, 65} ; {1, 2, 4, 8, 11, 22, 44, 88}]
2. 94, 121, 150 [{1, 2, 47, 94} ; {1, 11, 121} ; {1, 2, 3, 50, 5, 30, 6, 25, 10, 15, 75, 150}]

Scomponendo i numeri in fattori primi, determinare, senza trovarli, quanti divisori ha ciascuno

3. 110, 234, 300, 402, 501, 612, 784, 856, 948 [6; 12; 18; 6; 4; 18; 15; 8; 12]

Verificare, usando il minor numero possibile di verifiche, quali fra i seguenti numeri sono primi

4. 113, 203, 317, 421, 569, 601, 713, 827, 911 [Sì; No; Sì; Sì; Sì; Sì; No; Sì; Sì]

Determinare gli eventuali valori da assegnare alla cifra X, affinché il numero scritto sia divisibile per quanto assegnato

5. X123X per 3; 122XX34 per 11; XXX135 per 5; 2567X7652 per 3 [$3 \vee 6 \vee 9$; $\varnothing$; $\forall$ X; $5 \vee 8$]
6. 21X416X per 22; 1X454X per 6; X2X3X3X per 10; 25X2X0X per 15 [4; $2 \vee 8$; $\varnothing$; 5]
7. 1X2X3X4 per 66; 1X27X994 per 9; X142128 per 7; 13X639 per 13 [$\varnothing$; 2; 7; 2]

Scomporre in fattori primi i seguenti numeri, usando il consueto schema

8. 124, 255, 310, 406, 518 [$2^2 \cdot 31$; $3 \cdot 5 \cdot 17$; $2 \cdot 5 \cdot 31$; $2 \cdot 7 \cdot 29$; $2 \cdot 7 \cdot 37$]
9. 624, 745, 832, 996 [$2^4 \cdot 3 \cdot 13$; $5 \cdot 149$; $2^6 \cdot 13$; $2^2 \cdot 3 \cdot 83$]
10. Abbiamo a disposizione 100 bambole, 150 trenini e 200 trottole. Quanti pacchetti regalo contenenti ciascuno lo stesso numero di oggetti di ogni tipo, con il maggior numero di oggetti dello stesso tipo possiamo confezionare? [2]
11. Con riferimento al precedente quesito, restando inalterati il numero dei trenini e quello delle trottole, se fossimo riusciti a confezionare 4 pacchetti, quante sarebbero state almeno le bambole? [200]
12. Vogliamo dividere 3 cosce di prosciutto che pesano rispettivamente, in *Kg*, 4, 6 e 8, in pezzi più grandi possibili, ma dello stesso peso. Quanti pezzi in totale possiamo ottenere e quanto peserà ciascuno di essi? [9; 2 *Kg*]
13. Tre gufi in una foresta cominciano a emettere il loro grido insieme alla mezzanotte, poi ripetono il loro verso con cadenza periodica di 50, 70 e 90 minuti rispettivamente. Se all'alba, che in quel giorno è alle 6:00, smettono di emettere versi, a che ora canteranno di nuovo insieme? [Mai]
14. Con riferimento al precedente problema, cosa cambia se il secondo ripete il verso ogni 60 minuti e i gufi cantano anche durante il giorno? [Canteranno insieme alle 15:00 del giorno successivo]
15. Se invece i gufi cantano di nuovo insieme alle 7:30, ogni quanti minuti ripete il verso il secondo gufo? [Diverse possibilità: {1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 25, 30, 45, 50, 75, 90, 150, 225, 450} minuti]

L'insieme dei numeri razionali relativi. Operazioni con le frazioni

Fase 1: Osserva

- Vogliamo ridurre ai minimi termini la frazione $\frac{7956}{8892}$. Scomponiamo numeratore e denominatore in fattori primi, con uno dei metodi già visti: $\frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 17}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 19}$. Eliminiamo i fattori comuni, ottenendo quan-

to richiesto: $\frac{\cancel{2^2 \cdot 3^2 \cdot 13} \cdot 17}{\cancel{2^2 \cdot 3^2 \cdot 13} \cdot 19} = \frac{17}{19}$.

- Vogliamo scrivere la frazione generatrice di 13,24. Essendo un numero decimale, è sufficiente scrivere $\frac{1324}{100}$, in cui al denominatore gli zeri sono tanti quante le cifre decimali. Ovviamente possiamo anche semplificare: $\frac{\cancel{4} \cdot 331}{\cancel{4} \cdot 25} = \frac{331}{25}$. La controprova possiamo ottenerla semplicemente effettuando la divisione.
- Vogliamo scrivere la frazione generatrice di $11,\overline{721}$. Il numero è periodico semplice, pertanto la regola è la seguente: $\frac{11721-11}{999} = \frac{11710}{999}$, in cui al denominatore i 9 sono tanti quante le cifre del periodo. Non possiamo ulteriormente semplificare.
- Vogliamo scrivere la frazione generatrice del numero periodico misto $3,012\overline{34}$. La regola è adesso: $\frac{301234-3012}{99000} = \frac{298222}{99000}$, in cui al denominatore gli zeri sono tanti quante le cifre dell'antiperiodo e i 9 quante quelle del periodo. Stavolta possiamo semplificare: $\frac{149111}{49500}$.
- Grazie al risultato stabilito dal Teorema 29, possiamo dire che la frazione $\frac{17}{24}$ rappresenta un numero periodico misto, poiché essa è ridotta ai minimi termini e il suo denominatori contiene sia fattori 2 che fattori diversi da 2 e da 5. Infatti, se dividiamo avremo: 17:24 = $0,708\overline{3}$.
- Se ci offrono di scegliere fra i 17/73 e i 421/1800, cosa conviene fare? Potremmo effettuare le divisioni, oppure un metodo più è quello di moltiplicare fra loro numeratore dell'una per il denominatore dell'altra, in questo caso ottenendo: 17 · 1800 = 30600 e 73 · 421 = 30723. Dato che il secondo numero è maggiore del secondo, la frazione maggiore è quella che, in questo prodotto, ha messo il numeratore, cioè $\frac{17}{73}$. In effetti abbiamo $\frac{17}{73} \approx 0,232; \frac{421}{1800} \approx 0,234$.
- Nei grandi magazzini sono cominciati i saldi, tutto al 30%. Quanto costeranno dei pantaloni che prima erano prezzati € 48,75? Piuttosto che calcolare lo sconto, conviene calcolare quel che rimane da pagare, ossia (100 – 30) = 70%. E quindi basta effettuare la moltiplicazione € 48,75 · 0,7 = € 34,125. Che ovviamente non è un prezzo "reale", quindi probabilmente pagheremo o un prezzo al centesimo più vicino, € 34,13 o ai 5 centesimi, cioè € 34,15.
- L'attuale aliquota I.V.A. sulle acque minerali è del 22%, che significa che il venditore deve versare il 22% di quanto ha incassato allo stato. Così per una bottiglia venduta a € 1,00, € 0,22 andranno allo stato. Se lo stato incassa sul prezzo di una bottiglia di acqua minerale € 0,17, quanto è stato il prezzo di vendita? In pratica vogliamo sapere il 22% di quale quantità è 0,17? Quindi stavolta dobbiamo procedere all'inverso, dato che € 0,17 = P · 0,22, dove P è il prezzo da trovare, perciò dobbiamo non moltiplicare, ma dividere, cioè P = € 0,17/0,22 ≈ € 0,77.
- Vogliamo semplificare l'espressione $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{5}{6}+\frac{1}{8}$. Portiamo le frazioni allo stesso denominatore, che ovviamente sarà il loro *mcm*, cioè 24: $\frac{16+18-20+3}{24} = \frac{17}{24}$, non ulteriormente riducibile.
- Adesso vogliamo semplificare $\frac{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)^2}{\left(\frac{2}{5}-1\right)\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)^2}$. Cominciamo a ridurre allo stesso de-

nominatore all'interno delle singole parentesi: $\frac{\frac{3-4}{12}\cdot\frac{8+9}{12}-\left(\frac{3+2-1}{6}\right)^2}{\frac{2-5}{5}\cdot\frac{6+1}{4}+\left(\frac{6+5}{15}\right)^2}=\frac{-\frac{1}{12}\cdot\frac{17}{12}-\left(\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{6}^{3}}\right)^2}{-\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{4}+\left(\frac{11}{15}\right)^2}$, continuiamo ad eseguire i calcoli: $\frac{-\frac{17}{144}-\frac{4}{9}}{-\frac{21}{20}+\frac{121}{225}}=\frac{\frac{-17-64}{144}}{\frac{-945+484}{900}}=\frac{-\frac{\cancel{81}^{9}}{\cancel{144}^{16}}}{-\frac{461}{900}}=\frac{9}{\cancel{16}^{4}}\cdot\frac{\cancel{900}^{225}}{461}=\frac{2025}{1844}$.

- 3 amici comprano un biglietto della lotteria che costa € 5,00 mettendo rispettivamente € 1,50, € 2,50 ed € 1,00. Se vincessero un premio da € 1800,00 come dovrebbero dividerlo? Ovviamente ciascuno dovrà prendere proporzionalmente a quanto ha speso. Le relative proporzioni sono $\frac{1,5}{5}=\frac{\frac{3}{2}}{5}=\frac{3}{10};\frac{2,5}{5}=\frac{\frac{5}{2}}{5}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2};\frac{1}{5}$. Pertanto il secondo ovviamente dovrà avere metà del premio, € 900,00, il primo i 3/10, cioè € 540,00 e l'ultimo solo 1/5, ossia € 360,00.
- Applicando le proprietà delle potenze vogliamo semplificare $4^{-2}:2^5\cdot 8^{-3}:16\cdot 5^0$. A parte l'ultimo fattore abbiamo a che fare con potenze tutte riconducibili a base 2, e siccome $5^0 = 1$, possiamo quindi procedere trasformando tutto alla stessa base: $\left(2^2\right)^{-2}:2^5\cdot\left(2^3\right)^{-3}:2^4$, adesso possiamo applicare le proprietà delle potenze che affermano che la potenza di una potenza si ottiene moltiplicando fra loro gli esponenti: $2^{-4}:2^5\cdot 2^{-9}:2^4$. E infine le proprietà per le quali ogni moltiplicazione fra potenze di uguale base equivale a una somma fra gli esponenti e ogni divisione la differenza, quindi si ha: $2^{-4-5-9-4} = 2^{-22}$.

Fase 2: Completa …

1. Per ridurre ai minimi termini la frazione $\frac{1485}{4356}$, scomponiamo numeratore e denominatore in fattori …, ottenendo: $\frac{3^{\cdots}\cdot 5\cdot\ldots}{2^2\cdot\ldots\cdot\ldots\cdot\ldots}$. Eliminiamo i fattori comuni, ottenendo: $\frac{\ldots}{44}$.
2. Vogliamo scrivere la frazione generatrice di 7,154. Essendo un numero ……., basta scrivere $\frac{\ldots}{1\ldots}$, in cui al denominatore gli zeri sono tanti quante le cifre ……. Semplificando si ha: $\frac{\cdots}{\cdots}$.
3. Per scrivere la frazione generatrice del numero ……. $21,\overline{56}$, usiamo la regola seguente: $\frac{2156-\ldots.}{9\ldots..}$, in cui al denominatore i 9 sono tanti quante le cifre ….. La frazione ottenuta è $\frac{\cdots}{\cdots}$ che ….. essere semplificata.
4. Per scrivere la frazione generatrice del numero ……. $13,4178\overline{}$, applichiamo la regola: $\frac{\ldots\ldots\ldots-\ldots.}{9\ldots..0}$, in cui al denominatore gli zeri sono tanti quante le cifre del …… e i 9 quante quelle del ……... Otteniamo così la frazione: $\frac{\cdots}{\cdots}$, che …….. semplificata.
5. La frazione $\frac{19}{8}$ rappresenta un numero ……., poiché essa è ridotta ai minimi termini e il suo denominatori contiene …. fattori 2 ….. fattori diversi da 2 e da 5.
6. Per stabilire quale frazione fra $\frac{2}{11}$ e $\frac{13}{71}$ è maggiore, moltiplichiamo fra loro …….. dell'una per il …….. dell'altra, in questo caso ottenendo: … · … = … e … · … = …. Dato che il … numero è … del

secondo, possiamo dire che $\frac{2}{11}$ è la frazione … perché ……..

7. Il prezzo della benzina è aumentato del 3,5%, dato che costava € 1,572 al litro, adesso il suo prezzo è aumentato di € 1,572 · …, diventando quindi € 1,…..
8. Il prezzo del pane al *Kg* nel supermercato A è di € 3,12 mentre nel supermercato B è di € 2,85. Possiamo dire quindi che in percentuale il pane nel supermercato B costa …… per ottenere questo risultato abbiamo effettuato l'operazione …/… e poi abbiamo moltiplicato per …
9. Per semplificare l'espressione $\frac{2}{5}-\frac{3}{8}+\frac{4}{3}-1$, portiamo le frazioni allo stesso denominatore, che sarà …, ottenendo: $\frac{\ldots-\ldots+\ldots-\ldots}{\ldots}=\frac{\ldots}{\ldots}$.
10. Per semplificare $\frac{\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+1\right)^2}{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\right)}$ riduciamo allo stesso … all'interno delle singole parentesi, ottenendo: $\frac{\left(\frac{\ldots-\ldots}{12}\right)^2+\left(\frac{1+\ldots}{2}\right)^2}{\frac{\ldots-\ldots}{\ldots}\cdot\frac{\ldots+\ldots}{\ldots}}=\frac{\frac{\ldots}{\ldots}+\frac{\ldots}{\ldots}}{\frac{\ldots}{\ldots}}=\frac{\frac{\ldots}{\ldots}}{\frac{\ldots}{\ldots}}=\frac{\ldots}{\ldots}\cdot\frac{\ldots}{\ldots}=\frac{\ldots}{\ldots}$.
11. 3 operai svolgono rispettivamente i 2/7, i 3/8 e i 5/16 di un lavoro, la parte rimanente la finisce lo stesso proprietario. Se il costo dell'intero lavoro era previsto in € 4480,00, quanto riceve ciascun operaio e quanto risparmia il proprietario svolgendo da se l'ultima parte di lavoro? Portiamo le tre frazioni allo stesso denominatore, che è …, ottenendo così …/…, …/…, …/… A questo punto dividiamo 4480 per … e moltiplichiamo rispettivamente per …, …, …, ottenendo così i tre compensi, cioè € …,00, €…,00, €…,00. Ovviamente il proprietario ha risparmiato € (4480,00 - …..) = € ……
12. Vogliamo semplificare $3^{-4} : 9^4 \cdot 27^{-2} \cdot 81$. Abbiamo a che fare con potenze tutte riconducibili a base …, possiamo quindi procedere trasformando tutto alla stessa base: $3^{-4} : \ldots^{\cdots} \cdot \ldots^{\cdots} \cdot \ldots^{\cdots}$. Applichiamo le proprietà delle potenze che affermano che la potenza di una potenza si ottiene ……. fra loro gli esponenti: $3^{-4} : \ldots^{\cdots} \cdot \ldots^{\cdots} \cdot \ldots^{\cdots}$. E infine le proprietà per le quali ogni moltiplicazione fra potenze di uguale base equivale a una …….. fra gli esponenti e ogni ……. una loro differenza, quindi abbiamo: $3^{\cdots\cdots\cdots\cdots} = \ldots^{\cdots}$.

Fase 3: Prova!

Ridurre ai minimi termini le frazioni seguenti

1. $\frac{118}{340};\frac{240}{168};\frac{354}{560};\frac{820}{1024};\frac{1120}{476}$ $\left[\frac{59}{170};\frac{10}{7};\frac{177}{280};\frac{205}{256};\frac{40}{17}\right]$
2. $\frac{1156}{272};\frac{6669}{1976};\frac{2480}{80600};\frac{693}{735};\frac{7007}{4459}$ $\left[\frac{17}{4};\frac{27}{8};\frac{2}{65};\frac{33}{35};\frac{11}{7}\right]$

Scrivere le frazioni generatrici dei seguenti numeri decimali

3. $2{,}135\ ;\ 2{,}\overline{135}\ ;\ 21{,}\overline{35}\ ;2{,}1\overline{35}\ ;2{,}13\overline{5}$ $\left[\frac{427}{200},\frac{79}{37},\frac{2114}{99},\frac{1057}{495},\frac{961}{450}\right]$
4. $0{,}999\ ;\ 0{,}\overline{349}\ ;\ 5{,}23\overline{5}\ ;-13{,}00\overline{30}\ ;4{,}22\overline{010}$ $\left[\frac{999}{1000};\frac{349}{999};\frac{1178}{225};-\frac{4291}{330};\frac{105397}{24975}\right]$

Senza effettuare la divisione stabilire il tipo di numero decimale rappresentato dalle seguenti frazioni (nelle risposte: d.l. = decimale limitato; p.s. = periodico semplice; p.m. = periodico misto)

5. $\frac{1}{4};\frac{3}{8};\frac{5}{6};\frac{9}{11};\frac{1}{43}$ [*d.l.* ; *d.l.* ; *p.m.* ; *p.s.* ; *p.s.*]
6. $\frac{1}{34};\frac{2}{18};\frac{3}{56};\frac{8}{14};\frac{11}{47}$ [*p.s.* ; *p.s.* ; *p.m.* ; *p.s.* ; *p.s.*]

Ordinare le seguenti coppie di frazioni

7. $\left(\frac{15}{19},\frac{263}{333}\right);\left(\frac{213}{250},\frac{23}{27}\right);\left(\frac{35}{71},\frac{443}{900}\right);\left(\frac{59}{25},\frac{111}{47}\right);\left(\frac{626}{999},\frac{57}{91}\right)$ $\left[\frac{263}{333};\frac{213}{250};\frac{35}{71};\frac{111}{47};\frac{626}{999}\right]$

Risolvi i seguenti problemi sulle percentuali

8. Le fragole sono aumentate del 15%, se prima costavano € 1,15 al *Kg*, qual è il nuovo prezzo? [≈€1,17]
9. La popolazione di una città è passata da 23450 a 23128. Qual è la diminuzione percentuale? [≈ 1,4 %]
10. Ad un concerto rock hanno partecipato un totale di 1742 spettatori, sappiamo che circa il 31% di essi erano minorenni e perciò hanno pagato € 12,00 a testa. I maggiorenni hanno pagato invece € 18,00 a testa. Tenuto conto che ci sono stati degli ingressi gratuiti e che l'incasso è stato di € 26892, si vuol sapere quante gratuità ci sono state e che percentuale del totale rappresentano. [68; ≈ 3,9%]
11. Un paio di scarpe costavano € 75,00. In saldo hanno uno sconto del 30%, ma rimangono ugualmente invendute, quindi vengono scontate di un'ulteriore 25%. Si vuol sapere quanto costano le scarpe alla fine e qual è lo sconto percentuale rispetto al prezzo iniziale. [≈ € 39,38; 52,5%]
12. Una scatola di cioccolatini due anni fa costava € 12,50, l'anno scorso € 13,25 e quest'anno €14,00. Calcolare le percentuali di aumento annue e biennali. [6%; ≈ 5,7%; 12%]

Semplificare le seguenti espressioni frazionarie

13. $\frac{3}{5}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}+\frac{5}{3}\ ;\ 1-\frac{2}{5}+\frac{1}{4}-\frac{5}{9}+\frac{1}{2};\ \frac{3}{7}+\frac{1}{14}-\frac{3}{2}+1$ $\left[\frac{161}{60};\ \frac{143}{180};\ 0\right]$

14. $\frac{5}{9}-\frac{3}{4}+\frac{11}{3}-\left(\frac{3}{2}\right)^2\ ;\ \left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{13}{2}-\frac{3}{8}+\left(\frac{5}{2}\right)^3;\ \frac{2}{13}-\frac{5}{26}+\frac{7}{2}-1$ $\left[\frac{11}{9};\ \frac{349}{16};\ \frac{32}{13}\right]$

15. $\left(\frac{4}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)-\frac{3}{20}+\frac{13}{60}\ ;\ \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)-\frac{7}{6};\ \frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}-1}+\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{5}{8}-\frac{13}{4}\right)$ $\left[\frac{13}{60};-\frac{49}{36};-\frac{17}{6}\right]$

16. $\frac{\frac{5}{7}-\frac{3}{4}+1}{\frac{13}{8}-2+\frac{3}{2}}\cdot\frac{\left(\frac{7}{3}-1\right)^2-\frac{1}{9}}{\frac{2}{7}-\frac{7}{4}}\ ;\ \frac{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}-\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}\ ;\ \frac{\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}-\frac{1}{81}}}{\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\frac{1}{81}}}$ $\left[-\frac{40}{41};\frac{12}{7};\frac{72171}{3400}\right]$

Risolvi i seguenti problemi sulle proporzionalità

17. Un'eredità viene divisa fra i 3 eredi in modo che il primo prenda il doppio del secondo, il quale prende il triplo del terzo. Se l'eredità è di € 700000, quanto eredita ciascuno dei tre? [€ 420000; € 210000 ; € 70000]
18. Gianna ha i 2/3 dell'età di Matteo, che a sua volta ha i ¾ dell'età di Kriss. Se insieme hanno 90 anni, quanti anni ha ciascuno di essi? [20; 30; 40]
19. Jonathan e Jim partono contemporaneamente dalle loro case e si dirigono uno verso l'altro, viaggiando a velocità diverse ma costanti. Si incontrano dopo 15 minuti, si salutano e continuano finché non raggiungono la casa dell'amico. Se Jonathan raggiunge la casa di Jim dopo 20 minuti, quanto impiega Jim in totale a raggiungere la casa di Jonathan? [26^m15^s]

Applicando le proprietà delle potenze semplificare le seguenti espressioni

20. $2^{-5}\cdot 2^0\cdot 2^{-3}\cdot 16\ ;\ 3^2:27^{-1}\cdot 3^{-5}\cdot 243\ ;\ 5^2\cdot 25:125$ $[2^{-4};\ 3^5\ ;\ 5]$
21. $2^3\cdot 3^3\cdot 125\ ;\ 7^2:14^{-2}\cdot 8^2\cdot 36\ ;\ 24^3\cdot 125:8\cdot 64^{-1}$ $[30^3;\ 24^2\ ;\ 15^3]$
22. $(2^2)^3\cdot(4^3)^{-2}:(8^{-4})^{-2}\ ;\ (1+2^2)^3:25^{-4}\cdot(21-2^4)^{-2}\ ;\ 11^2\cdot(2+3^2)^{-3}:(3^3-2^4)^{-1}$ $[2^{-14};\ 5^9\ ;\ 1]$

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito

http://mathinterattiva.altervista.org/volume_1_1.htm

1. Le basi del ragionamento

1.3 Insiemi astratti

Prerequisiti
- Nozioni elementari di aritmetica
- Nozioni elementari di geometria
- Enunciato logico
- Nozione di raggruppamento di oggetti in base a una loro caratteristica o prerogativa
- Gli insiemi numerici fondamentali

Obiettivi
- Riconoscere l'opportunità di raggruppare sotto un unico nome oggetti che hanno qualcosa che li accomuna
- Indicare con simboli variabili gli elementi di un insieme
- Distinguere un insieme dai suoi elementi
- Orientarsi fra i diversi modi di rappresentazione degli insiemi
- Utilizzare opportune simbologie
- Determinare una proprietà caratteristica di un insieme a partire dalla sua rappresentazione per elenco
- Comprendere i simboli insiemistici più diffusi
- Utilizzare le diverse operazioni insiemistiche
- Comprendere il concetto di insieme vuoto

Contenuti
- Proprietà caratteristica di un insieme
- Operazioni elementari con gli insiemi
- Sottoinsiemi di un insieme e insieme delle parti

Quelli che … vogliono saperne di più
- Proprietà delle operazioni insiemistiche

Parole chiave
Cardinalità – Diagramma di Eulero–Venn – Differenza simmetrica –Equipotenti – Estensione Insiemi disgiunti – Intersezione – Proprietà caratteristica – Unione

Simbologia

$\lvert\ \rvert$	Indica la cardinalità di un insieme.
$\cup$	Indica l'unione insiemistica.
$\cap$	Indica l'intersezione insiemistica.
$\setminus$	Indica la differenza insiemistica.
Δ	Indica la differenza simmetrica insiemistica.
$\subset$	Indica l'inclusione fra insiemi diversi.
$\subseteq$	Indica l'inclusione fra insiemi diversi o uguali.

Proprietà caratteristica di un insieme

Abbiamo già fornito il concetto intuitivo di insieme come collezione di oggetti di qualsiasi natura, non sempre con una caratteristica comune facilmente determinabile. Abbiamo anche visto che uno dei modi migliori di descrivere l'insieme è quello di elencarne gli elementi, almeno quando ciò sia possibile. Adesso vogliamo usare un po' l'arma più efficace della matematica, cioè la simbologia, per indicare in modo più sintetico gli insiemi.

Esempio 1

Consideriamo l'insieme $A = \{2; 4; 6; 8; 10\}$. Esso è scritto in modo elenco, notiamo però che si può indicare anche come "l'insieme dei primi cinque numeri pari positivi". Dato che questa proprietà identifica esattamente *tutti e soli* gli elementi di A. Usando i simboli possiamo scrivere nel modo seguente:

$$A = \{a \in \mathbb{N}: a = 2 \cdot k, \text{ con } k \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq k \leq 5\}.$$

Spieghiamo passo per passo cosa abbiamo fatto.

- Abbiamo chiamato a il generico elemento dell'insieme.
- Usando il ben noto simbolo di appartenenza, $\in$, abbiamo detto che tutti gli elementi di A stanno anche in $\mathbb{N}$, quindi sono numeri naturali.
- I due punti si leggono *tale che*, e servono a spiegare le ulteriori proprietà che verificano gli elementi a.
- Questi elementi sono pari, cioè si trovano moltiplicando per 2 un generico numero naturale, che indichiamo con un simbolo diverso, k.
- Per concludere però dobbiamo dire che k non è un qualsiasi numero naturale, ma solo uno di quelli che vanno da 1 a 5, in modo che così a sarà uno dei numeri pari $2 \cdot 1$, $2 \cdot 2$, $2 \cdot 3$, $2 \cdot 4$ e $2 \cdot 5$. Ricordiamo che il simbolo $\wedge$ indica la congiunzione *e*.

Osserviamo che tutto quello che abbiamo usato nell'esempio precedente era indispensabile per determinare A, non abbiamo usato né più né meno delle informazioni utili. Non potevamo non dire che a e k erano numeri naturali, né che a fosse pari, né che k fosse compreso tra 1 e 5.

Definizione 1

Diremo che un insieme si rappresenta mediante una sua **proprietà caratteristica**, se indichiamo una legge che genera tutti e soli i suoi elementi.

Abbiamo già visto nell'unità precedente che non è sempre semplice individuare la proprietà che lega più oggetti di un insieme e che talvolta essa non è neanche unica.

Esempio 2

L'insieme $X = \{\text{semaforo}, 23, \text{libro}, \text{Carlo}\}$ non riesce a caratterizzarsi in alcun modo, se non come elenco. Invece nel caso dell'insieme $F = \{3; 5; 7\}$ abbiamo abbondanza di proprietà caratteristiche. Infatti possiamo indicarlo come *l'insieme dei primi tre numeri dispari maggiori di* 1; ma anche come *l'insieme dei primi tre numeri primi dispari*. Ovviamente cambiando la proprietà caratteristica cambia anche la rappresentazione simbolica.

Vediamo di chiarire il concetto di proprietà caratteristica.

Esempio 3

Consideriamo il seguente cruciverba.

- Supponiamo che il 10 verticale abbia la seguente definizione: "*Il vulcano più alto d'Europa*". Siamo aiutati dal fatto che vi sono presenti già due lettere, ma in ogni caso la definizione è caratterizzante: uno solo è il più alto vulcano d'Europa ed è l'Etna.
- Prendiamo adesso in considerazione il 4 verticale, in cui leggiamo "*Articolo determinativo*". Stavolta la definizione non è caratterizzante: in italiano vi sono diversi articoli determinativi: il, lo, la, i, gli, le; ci viene però in aiuto quel che è già scritto. Concludiamo quindi che la risposta corretta (se è corretto ciò

che è scritto all'1 orizzontale), non può essere che **IL**.

- Il problema non viene risolto invece, almeno con questi soli dati, al 15 orizzontale, dove si legge "*Sigla di una città toscana*". Non solo questa definizione non definisce e non caratterizza, ma non riusciamo a rispondere al quesito neanche con gli incroci, perché attualmente non abbiamo alcuna informazione su nessuna delle due caselle.

1T	2O	3R	4I	N	5O	■	6Q	7U	O	8Z	9I	10E	11N	12T	13E
14		*A*		■	15	16	■	N	■	17I	*T*	*T*	I	*C*	O
■	18	N	■	19A			20	O	21	*A*	■	22			L
23		*A*						■		■	24			■	O

Vediamo adesso il problema per così dire inverso, cioè data la rappresentazione simbolica dell'insieme vogliamo determinare i suoi elementi per elenco.

Esempio 4

- L'insieme $A = \{a \in \mathbb{P}: 1 < a < 15\}$, in cui $\mathbb{P}$ rappresenta l'insieme dei numeri primi, è l'insieme dei primi minori di 15, cioè $A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13\}$. In effetti questa rappresentazione per elenco vale anche per questi altri insiemi $B = \{a \in \mathbb{P}: 2 \le a < 15\}$; $C = \{a \in \mathbb{P}: 2 \le a < 14\}$; $D = \{a \in \mathbb{P}: 2 \le a \le 13\}$; e tanti altri formalmente diversi.
- $B = \{b \in \mathbb{N}: b^2 < 64\}$ non è altri che l'insieme dei numeri naturali il cui quadrato è minore di 64, pertanto si ha $B = \{1; 2; ...; 6; 7\}$.
- $C = \left\{\frac{2c-1}{c+3} : c \in \mathbb{Z} \wedge -4 \le c \le 1\right\}$, non dobbiamo fare altro che sostituire al posto di c i numeri interi da -4 a 1. Quindi si devono fare 6 sostituzioni per i diversi valori, non è detto però che si ottengano 6 valori diversi. $C = \left\{\frac{2\cdot(-4)-1}{-4+3}, \frac{2\cdot(-3)-1}{-3+3}, \frac{2\cdot(-2)-1}{-2+3}, \frac{2\cdot(-1)-1}{-1+3}, \frac{2\cdot 0-1}{0+3}, \frac{2\cdot 1-1}{1+3}\right\}$, Prima di fare i calcoli osserviamo che per $c = -3$ otteniamo una scritta priva di senso, dato che dovremmo dividere per zero. Pertanto l'insieme ha al massimo 5 elementi. Calcoliamoli. $C = \left\{\frac{-9}{-1}, \frac{-5}{1}, \frac{-3}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}\right\} = \left\{-5, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 9\right\}$.
- $D = \left\{\frac{d^2+1}{d^4-5} : d \in \mathbb{Z} \wedge d^2 < 5\right\}$, di numeri il cui quadrato è minore di 2, ci sono solo $\{-1, 0, 1\}$, dato che nell'espressione d è presente solo come base di potenze pari, è ovvio che sostituendo 1 o -1, si ottiene lo stesso valore, quindi: $D = \left\{\frac{1^2+1}{1^4-5} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}, \frac{0^2+1}{0^4-5} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}\right\} = \left\{-\frac{1}{5}, -\frac{1}{2}\right\}$, dato che non si accettano elementi ripetuti.

Abbiamo perciò visto quindi che non sempre vi è corrispondenza fra il numero dei valori sostituiti e il numero degli elementi dell'insieme.
Dato che abbiamo visto che uno stesso insieme può avere più rappresentazioni caratteristiche, chiariamo meglio alcuni concetti.

Definizione 2

Diremo **estensione** di un insieme gli elementi dell'insieme.

Definizione 3

Diremo **uguali** due insiemi che hanno la stessa estensione.

Esempio 5

Stabilire quali fra i seguenti insiemi sono uguali a $X = \{ 11; 13; 15; 17; 19\}$.

- $A = \{$insieme dei numeri dispari maggiori di 12$\}$;
- $B = \{$insieme dei numeri dispari maggiori di 10 e minori di 20$\}$;
- $C = \{$insieme dei numeri dispari maggiori di 11 e minori di 20$\}$;
- $D = \{$insieme dei numeri interi maggiori di 11 e minori di 19$\}$;
- E $= \{$insieme dei numeri primi maggiori o uguali a 12 e minori o uguali a 19$\}$;
- $F = \{$insieme dei numeri dispari maggiori o uguali ad 11 e minori di 20$\}$.

Per facilitare il riconoscimento dell'uguaglianza, scriviamo gli insiemi in formato elenco.
$A = \{13; 15; 17; 19; 21; ...\} \neq X$; $B = \{11; 13; 15; 17; 19\} = X$; $C = \{13; 15; 17; 19\} \neq X$; $D = \{12; 13; 14; ...; 18\} \neq X$; $E = \{13; 17; 19\} \neq X$; $F = \{11; 13; 15; 17; 19\} = X$.
Quindi degli insiemi dati solo B ed F sono uguali a X.

Poniamo ancora altre definizioni.

Definizione 4

Diremo **cardinalità** di un insieme il numero dei suoi elementi.

Definizione 5

Diremo **equipotenti** due insiemi che hanno la stessa cardinalità.

Notazione 1

Per indicare la **cardinalità** di un insieme A scriveremo $|A|$, oppure $\text{card}(A)$.

Che cosa significa?

Cardinalità. Il riferimento è ai numeri cardinali, contrapposti a quelli ordinali, cioè al numero come quantità, piuttosto che come indicatore di posizione.
Equipotenti. Cioè di uguale potenza; in questo caso la *potenza* è il numero di elementi dell'insieme.

Esempio 6

Stabilire quali fra i seguenti insiemi sono equipotenti a $Y = \{5; 8; 11; ...; 38\}$. $A = \{5; 6; 7; ...; 37; 38\}$; $B = \{1; 3; 5; 7; 9; ... \}$; $C = \{$insieme dei numeri pari maggiori di 11 e minori di 24$\}$; $D = \{$insieme dei numeri interi maggiori di 11 e minori di 24$\}$; $E = \{$insieme dei numeri interi maggiori o uguali a 12 e minori o uguali a 24$\}$.
Notiamo che un qualsiasi elemento dell'insieme Y si ottiene aggiungendo 2 unità (o togliendo una unità) a un multiplo di 3. Quindi possiamo scrivere: $Y = \{y \in \mathbb{N}: y = 2 + 3 \cdot k \wedge 1 \leq k \leq 12\}$, il che ci permette di dire che $|Y| = 12$. Calcoliamo adesso le cardinalità degli altri insiemi.
Facilmente si calcola che $|A| = 34$; B è un insieme infinito; $C = \{12; 14; 16; ...; 22\}$; perciò $|C| = 6$; per $D = \{12; 13; ...; 23\}$; quindi $|D| = 12$; infine $E = \{12; 13; ...; 24\}$, vale a dire $|E| = 13$.
In conclusione, solo D è equipotente a Y.

Abbiamo visto nell'esempio precedente che uno dei due insiemi era infinito, tale concetto è particolarmente delicato e lo consideriamo nella sua semplice accezione di *senza una fine*, diciamo che un insieme è finito se riusciamo a contare i suoi elementi, diversamente diremo che l'insieme è infinito. Ovviamente un insieme infinito non potrà mai essere equipotente a un insieme finito.

Verifiche

Lavoriamo insieme

- Vogliamo scrivere per elenco, l'insieme A dei numeri naturali minori di 200, la somma delle cui cifre è uguale a 4. Suddividiamo il problema in sottoproblemi. I numeri naturali minori di 200 possono avere, 1, 2, 3 o 4 cifre. Partiamo dai numeri con 1 cifra: solo il numero 4 risponde alla richiesta. Passiamo ai numeri a due cifre. Per ottenere 4 come somma di due numeri naturali, sono possibili solo i seguenti casi: $4 + 0 = 1 + 3 = 2 + 2$, che forniscono i numeri 40, 13, 31, 22. Ovviamente valendo la proprietà commutativa la coppia (1, 3) e la coppia (3, 1) danno la stessa somma. Escludiamo $0 + 4$, perché non individua un numero con due cifre. Per i numeri di 3 cifre dobbiamo invece sfruttare le seguenti uguaglianze: $0 + 1 + 3$ (103, 130 e 310), $1 + 1 + 2$ (112, 121 mentre 211 non si accetta). Non abbiamo considerato $2 + 2 + 0$, $4 + 0 + 0$, perché forniscono solo numeri maggiori di 200. Infine possiamo scrivere $A = \{4; 13; 22; 31; 40; 103; 112; 121; 130\}$.
- Lo stesso vogliamo fare con uno espresso in forma simbolica: $B = \{2h + 7, h \in \mathbb{N} \wedge 5 \le h \le 11\}$. Non dobbiamo fare altro che sostituire nell'espressione generica $2h + 7$, ad h tutti i numeri interi compresi tra 5 e 11. Otterremo così: $B = \{2 \cdot 5 + 7; 2 \cdot 6 + 7; 2 \cdot 7 + 7; 2 \cdot 8 + 7; 2 \cdot 9 + 7; 2 \cdot 10 + 7; 2 \cdot 11 + 7\} = \{17; 19; 21; 23; 25; 27; 29\}$.

Rappresentare mediante elenco, gli insiemi verificanti le seguenti proprietà

Livello 1

1. Insieme dei numeri pari minori di 30 [{2; 4; 8; …; 26; 28}]
2. Insieme dei numeri interi il cui quadrato è compreso tra 15 e 73 [{4; 5; 6; 7; 8}]
3. Insieme dei numeri interi minori o uguali di 13 e maggiori di –4 [{–3; –2; …; 11; 12}]
4. Insieme dei numeri interi multipli di 5 compresi tra 50 e 97 [{50; 55; 60; …; 90; 95}]
5. Insieme dei numeri naturali dispari multipli di 5 minori di 62 [{5; 15; 25; 35; 45; 55}]
6. Insieme dei numeri primi minori di 43 e maggiori di 21 [{23; 29; 31; 37; 41}]
7. Insieme dei numeri interi minori di 113 multipli di 4 ma non di 2 [{}]
8. Insieme dei numeri interi minori di 113 multipli di 2 ma non di 4 [{2; 6; 10; …; 106; 110}]

Livello 2

9. Insieme delle frazioni con numeratore uguale a 7 e denominatore un numero pari di una cifra. $\left[\left\{\frac{7}{2}, \frac{7}{4}, \frac{7}{6}, \frac{7}{8}\right\}\right]$
10. Insieme delle frazioni in cui il numeratore è il successivo del denominatore, in cui il numeratore è compreso tra 3 e 11 $\left[\left\{\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{10}{11}, \frac{11}{12}\right\}\right]$
11. Insieme delle frazioni non intere, che ridotte ai minimi termini hanno il numeratore doppio del denominatore [{}]
12. Insieme dei numeri periodici semplici positivi e minori di 10, il cui periodo è formato da una sola cifra multipla di 4 $\left[\left\{0,\overline{4}; 0,\overline{8}; 1,\overline{4}; 1,\overline{8}; \ldots; 9,\overline{4}; 9,\overline{8}\right\}\right]$
13. Insieme dei numeri di 3 cifre tutte uguali [{111; 222; …; 999}]
14. Insieme dei numeri le cui cifre sono soltanto 2, 4 e 7, usate una sola volta. [{247; 274; 427; 472; 724; 742}]
15. Insieme dei numeri le cui cifre sono formate da un 3; due 5 e un 8. [{3558; 3585; 3855; 5358; 5385; 5538; 5583; 5835; 5853; 8355; 8535; 8553}]

Livello 3

16. $\left\{\frac{a^2+1}{a-1} : a \in \mathbb{N} \wedge 2 \le a \le 4\right\}$; $\left\{\frac{a^2-1}{a+1} : a \in \mathbb{N} \wedge 2 \le a \le 4\right\}$ $\left[\left\{5, \frac{17}{3}\right\}; \{1, 2, 3\}\right]$
17. $\{2h + 7, h \in \mathbb{N} \wedge 5 \le h \le 11\}$; $\{h^2 + 3, h \in \mathbb{N} \wedge 1 \le h \le 5\}$ [{17; 19; 21; …; 29} ; {4; 7; 12; 19; 28}]

18. $\{ab:\ a,b \in \mathbb{N} \wedge 1 \le a,\ b \le 9,\ a = 3b\};\{ab:\ a,b \in \mathbb{N} \wedge 1 \le a,\ b \le 9,\ b = 3a\}$ [{31; 62; 93}; {13; 26; 39}]

19. $\left\{\frac{a^3-a+1}{a^2+2} : a \in \mathbb{N} \wedge a^2 < 18\right\}$; $\left\{\frac{a^2-3}{a+1} : a \in \mathbb{N} \wedge 15 < a^3 < 71\right\}$ $\left[\left\{\frac{1}{3},\frac{7}{6},\frac{25}{11},\frac{61}{18}\right\};\left\{\frac{3}{2},\frac{13}{5}\right\}\right]$

20. $\{h \in \mathbb{N}: h = 1 + 2 + \ldots + n, h \in \mathbb{N} \wedge 3 < n < 7\}$; $\{h \in \mathbb{N}: h = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2, h \in \mathbb{N} \wedge 2 < n < 5\}$ [{;0}]

21. $\left\{\frac{p^2+1}{p^2+2} : p \in \wp \wedge 15 < p < 30\right\}$; $\left\{\frac{p^2-1}{p^2-2} : p \notin \wp \wedge 19 < p < 25\right\}$, $\wp$ indica l'insieme dei numeri primi.

$\left[\left\{\frac{290}{291},\frac{362}{363},\frac{530}{531},\frac{842}{843}\right\};\left\{\frac{399}{398},\frac{440}{439},\frac{483}{482},\frac{575}{574}\right\}\right]$

Lavoriamo insieme

Dati i seguenti numeri: $\frac{17}{13},\frac{4}{7},\frac{6}{19}$, vogliamo vedere quale di essi appartiene all'insieme seguente: $A = \left\{\frac{2x}{2y+1} : x, y \in \mathbb{N} \wedge 2x + (2y+1) = 5h, h \in \mathbb{N}\right\}$. Per rispondere alla domanda dobbiamo "tradurre" la scritta simbolica. In *A* ci sono delle frazioni il cui numeratore è un numero pari (è il prodotto di 2 per un numero naturale), il denominatore è un numero dispari (è il successivo di un numero pari) e la loro somma è un numero multiplo di 5. Adesso possiamo risolvere il problema.
Un elemento di questo insieme deve verificare **TUTTE** le tre proprietà, andiamo quindi a scartare quegli elementi, fra i quattro, che non verificano almeno una di queste proprietà.

- Cominciamo da $\frac{17}{13}$ che non ha il numeratore pari;
- $\frac{4}{7}$ si esclude perché non verifica l'ultima proprietà: 4 + 7 = 11 non è multiplo di 5;
- Infine $\frac{6}{19}$ appartiene all'insieme. Infatti 6 è pari, 19 e dispari e 6 + 19 = 25 è multiplo di 5.

Dato l'insieme di cui è specificata la proprietà verificata dai suoi elementi, indica, giustificando la risposta, quale dei numeri proposti vi appartiene. C = {0, 1, ..., 9}, indica l'insieme delle cifre

Livello 1

22. Insieme dei numeri decimali la cui parte intera è un numero multiplo di 5 e la parte decimale è formata da due cifre una doppia dell'altra; {12345,12; 5551,24; 120,68} [12345,12]
23. Insieme dei numeri decimali la cui parte intera è un numero multiplo di 7 e la parte decimale è formata da due cifre entrambe pari; {71428,12; 777,04; 343,22} [777,04; 343,22]
24. Insieme dei numeri decimali la cui parte intera è un numero multiplo di 3 e la parte decimale è formata da due cifre una tripla dell'altra; {12345,12; 555,62; 122,31} [555,62]
25. Insieme dei numeri decimali la cui parte intera è formata da cifre tutte dispari e la cui parte decimale è formata da due cifre una sola delle quali è multipla di 4; {13579,42; 335,48; 123,81} [13579,42]
26. Insieme dei numeri decimali la cui parte intera è formata da cifre pari e la cui parte decimale è formata da due cifre entrambe multiple di 3; {20401,36; 220,69; 468,13} [220,69]

Livello 2

27. Insieme dei numeri interi le cui cifre sono tutte numeri primi; {135; 2753; 55037} [2753]
28. Insieme dei numeri interi la somma dei cui divisori è il doppio del numero stesso; {6, 27, 36} [6]
29. Insieme delle frazioni il cui numeratore è un quadrato perfetto e il denominatore è il precedente di un cubo perfetto; $\left\{\frac{484}{7},\frac{625}{28},\frac{1024}{63}\right\}$. $\left[\frac{484}{7},\frac{1024}{63}\right]$

30. Insieme delle frazioni il cui numeratore è un multiplo di 7 ma non di 5, il denominatore è divisibile per 11; $\left\{\frac{777}{201},\frac{385}{22},\frac{71428}{33}\right\}$. $\left[\frac{71428}{33}\right]$
31. Insieme dei numeri interi in cui la somma dei quadrati delle cifre è un quadrato perfetto; {1202; 3040, 149} [1202; 3040]

Livello 3

32. $\left\{x=a,bc : a\in\mathbb{N}, b,c\in C \wedge a=4h \wedge \left(b=c+1\right)\vee\left(c=b+1\right)\right\}$; {12344,24; 554,56; 120,12} [120; 12]
33. $\left\{x=abc : a,b,c\in C \wedge a+b+c=6\right\}$; {123; 1023; 101} [123]
34. $\left\{x=\frac{a}{b} : a=2h, b=3k\right\};\left\{\frac{12}{13};\frac{22}{9};\frac{33}{8}\right\}$; $\left\{x=\frac{a}{b} : \frac{a+b}{a-b}\in\mathbb{N}\right\};\left\{\frac{12}{13};\frac{22}{9};\frac{33}{8}\right\}$ $\left[\frac{22}{9};\frac{12}{13}\right]$

Lavoriamo insieme

Qual è la cardinalità dell'insieme dei multipli di 4 ma non di 5 compresi tra 124 e 221? Cominciamo a osservare che i numeri da 1 a 23 sono 23, mentre quelli da 2 a 23 sono 22, cioè in generale i numeri da a a b sono in numero di $b - a + 1$. Ora i multipli di 4 sono numeri che si esprimono moltiplicando 4 per un numero intero qualsiasi. Il primo multiplo di 4 maggiore di 123 è $124 = 4 \cdot 31$, l'ultimo multiplo di 4 minore di 221 è $220 = 4 \cdot 55$. Quindi vi sono $55 - 31 + 1 = 25$ multipli di 4 compresi tra 124 e 221. Quanti di questi sono anche multipli di 5 e devono perciò essere eliminati? Affinché un numero sia multiplo sia di 4 che di 5, deve essere multiplo del loro minimo comune multiplo, cioè di 20. Dobbiamo quindi eliminare tutti i multipli di 20 compresi tra 124 e 221. Il più piccolo è $140 = 20 \cdot 7$, il più grande $220 = 20 \cdot 11$. Quindi sono solo in $11 - 7 + 1 = 5$. Infine il nostro insieme ha cardinalità $25 - 5 = 20$.

Stabilire fra i seguenti insiemi quali sono finiti, determinandone la loro cardinalità, e quali sono infiniti. Con la dicitura "compresi tra a e b" indichiamo anche gli estremi, a e b

Livello 1

35. Insieme dei numeri compresi fra 5 e 7 [Insieme infinito]
36. Insieme dei numeri interi compresi fra 5 e 7 [3]
37. Insieme dei numeri naturali il cui cubo è minore di 12000 [12]
38. Insieme dei numeri interi il cui cubo è minore di 12000 [Insieme infinito]
39. Insieme dei numeri interi multipli di 4 maggiori di 75 e minori di 346 [68]
40. Insieme dei numeri multipli di 3 maggiori od uguali a 234 e minori di 768 [179]
41. Insieme dei numeri interi il cui quadrato è minore di 100 [19]
42. Insieme dei numeri razionali il cui quadrato è minore di 100 [Insieme infinito]

Livello 2

43. Insieme delle frazioni ridotte ai minimi termini il cui denominatore è doppio del numeratore [0]
44. Insieme delle frazioni maggiori di 1 il cui numeratore è uguale a 7 [6]
45. Insieme delle frazioni positive e minori di 1 il cui numeratore è uguale a 7 [Insieme infinito]
46. Insieme dei multipli di 6 ma non di 12 compresi fra 1 e 100 [8]
47. Insieme dei numeri interi le cui cifre sono solo 1 o 2, che si possono ripetere al massimo due volte ciascuna [12]
48. Insieme dei numeri interi le cui cifre sono tutte pari [Insieme infinito]
49. Insieme delle persone vive alle ore 12:00 del 1/1/2020 nella città di Milano [Insieme finito di cardinalità misurabile solo all'ora e data indicate]

Livello 3

50. $\left\{x=abc : a,b,c\in C, a\neq 0 \wedge 3\le a+b+c<6\right\}$; $\left\{x=abc : a,b,c\in C, a\neq 0 \wedge a+b+c>27\right\}$ [13; 0]
51. $\left\{x=\frac{a^2+1}{a-2} : a\in\mathbb{N}\wedge 3\le a\le 10\right\}$; $\left\{x=\frac{a}{b} : 5<a^2+b<71, a,b\in\mathbb{N}\right\}$ [7; 226]

Lavoriamo insieme

L'insieme {7; 14; 21; …; 84} si può scrivere in forma simbolica come $\{7n : n \in \mathbb{N} \wedge 1 \le n \le 12\}$, ma anche come $\{7n : n \in \mathbb{N} \wedge 0 < n \le 12\}$, oppure $\{7n : n \in \mathbb{N} \wedge 1 \le n < 13\}$ e in altri modi simili.

Stabilire quali fra i seguenti insiemi sono uguali all'insieme dato H, giustificando la risposta
Livello 2

52. $H = \{h = 3k + 1 : k \in \mathbb{N} \wedge 3 \le k \le 8\}$ [A; E]

$A = \left\{\frac{9k^2-1}{3k-1} : k \in \mathbb{N} \wedge 4 < k < 9\right\}$; $B = \left\{\frac{9k^2-1}{3k+1} : k \in \mathbb{N} \wedge 3 \le k \le 9\right\}$; $C = \{10; 13; 16; 19; 22; 25; 28\}$;

$D = \left\{\frac{3k^2-8k-3}{k-3} : 3 < k \le 8\right\}$; $E = \left\{\frac{3k^2+k}{k} : k \in \mathbb{N} \wedge 3 \le k \le 8\right\}$

53. $H = \{h = 4k + 3 : k \in \mathbb{N} \wedge 3 < k \le 8\}$ [B; C]

$A = \left\{\frac{16k^2-9}{4k-3} : k \in \mathbb{N} \wedge 3 < k < 8\right\}$; $B = \left\{\frac{16k^2-32k+7}{4k-7} : k \in \mathbb{N} \wedge 4 < k \le 9\right\}$;

$C = \left\{\frac{12k^2+53k+55}{3k+5} : k \in \mathbb{N} \wedge 2 \le k < 7\right\}$; $D = \left\{\frac{16k^2+120k+81}{4k-9} : k \in \mathbb{N} \wedge 0 < k < 5\right\}$;

$E = \{19, 23, 27, 31, 35, 39\}$

Stabilire quali fra i seguenti insiemi sono equipotenti all'insieme S indicato giustificando la risposta
Livello 2

54. $S = \{2k – 2 : k \in \mathbb{N} \text{ e } 1 \le k \le 5\}$ [A; C]

A = {insieme dei numeri interi il cui quadrato è minore di 5}; B = {insieme dei numeri naturali il cui cubo è minore od uguale di 64}; C = {insieme dei numeri primi maggiori di 100 e minori di 122};

$D = \{k^2 + 3 : k \in \mathbb{Z} \wedge -2 \le k \le 2\}$; $E = \left\{\frac{k}{2} + 1 \in \mathbb{N} : k \in \mathbb{N} \wedge 1 \le k \le 9\right\}$

55. $S = \{7, 12, 17, 22, …, 57, 62\}$ [C]

$A = \left\{\frac{3x+1}{3x-1}, x \in \mathbb{N} \wedge 0 \le x \le 11\right\}$; $B = \{b \in \mathbb{Z} : b^2 < 50\}$; $C = \{c \in \mathbb{N} : c^2 < 150\}$;

$D = \{d \in \mathbb{N} : d^4 - 13 < 41\}$; $E = \left\{\frac{p-1}{p+1} : p \in \wp \wedge p < 21\right\}$

Lavoriamo insieme

Determiniamo una proprietà caratteristica dell'insieme $A = \left\{\frac{7}{13}, \frac{9}{17}, \frac{11}{21}, \frac{13}{25}, ..., \frac{73}{145}\right\}$. Osserviamo che i numeratori sono numeri dispari consecutivi da 7 a 73 compresi. Quindi simbolicamente potremo indicare tali numeratori con $2n + 1$, con n numero naturale che va da 3 (dato che $2 \cdot 3 + 1 = 7$), fino a 36 ($2 \cdot 36 + 1 = 73$). Per quanto riguarda il denominatore invece abbiamo ancora numeri dispari, ma differenti fra loro di 4 unità, quindi il corretto modo per indicarli è $4n + 1$, con n numero naturale che va sempre da 3 ($4 \cdot 3 + 1 = 13$), a 36 ($4 \cdot 36 + 1 = 145$). Possiamo perciò indicarlo simbolicamente con $A = \left\{\frac{2n+1}{4n+1} : n \in \mathbb{N} \wedge 3 \le n \le 36\right\}$.

Trovare una o più rappresentazioni caratteristiche per i seguenti insiemi espressi mediante elenco (℘ indica l'insieme dei numeri primi)
Livello 2

56. {11; 13; 15; 17} ; {4; 8; 12 ;... ; 64} [$\{2n + 1 : n \in \mathbb{N} \wedge 5 \le n \le 8\}$; $\{4n : n \in \mathbb{N} \wedge 1 \le n \le 16\}$]

57. $\{4; 9; 16; 25; ...; 100\}$; $\{3; 6; 9; 12; 15\}$ $[\{n^2: n \in \mathbb{N} \wedge 2 \le n \le 10\}$; $\{3n: n \in \mathbb{N} \wedge 1 \le n \le 5\}]$

58. $\{2; 4; 8; 16; 32\}$; $\{4; 9; 14; 19; 24\}$ $[\{2^n: n \in \mathbb{N} \wedge 1 \le n \le 5\}$; $\{5n - 1 : n \in \mathbb{N} \wedge 1 \le n \le 5\}]$

59. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ..., \frac{10}{11}\right\}$; $\left\{\frac{4}{7}, \frac{8}{9}, \frac{12}{11}, ..., \frac{32}{21}\right\}$ $\left[\left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \wedge 1 \le n \le 10\right\}; \left\{\frac{4n}{2n+5} : n \in \mathbb{N} \wedge 1 \le n \le 8\right\}\right]$

Livello 3

60. $\{0; 7; 26; 63; 124\}$; $\{ 14; 17; 20; 23; ...; 47\}$ $[\{n^3 - 1: n \in \mathbb{N} \wedge 1 \le n \le 5\}$; $\{11 + 3n: n \in \mathbb{N} \wedge 1 \le n \le 12\}]$

61. $\{ -13; -11; -7; -5; -3\}$; $\{31; 37; 41; 43; 47; ...; 91\}$
$[\{-p: p \in \wp \wedge 2 < n < 14\}$; $\{p: p \in \wp \wedge 31 \le p \le 91\}]$

62. $\{2; 6; 12; 20; 30; 42\}$; $\{6; 10; 14; 22; 26; 34\}$ $[\{n \cdot (n + 1): n \in \mathbb{N} \wedge 1 \le n \le 6\}$; $\{2p: p \in \wp \wedge 3 \le p \le 17\}]$

63. $\{5; 9; 17; 33; 65; 129\}$; $\{1, 7, 25, 79, 241\}$ $[\{2^n + 1: n \in \mathbb{N} \wedge 2 \le n \le 7\}$; $\{3^n - 2 : n \in \mathbb{N} \wedge 1 \le n \le 5\}]$

64. $\left\{\frac{1}{8}, \frac{4}{27}, \frac{9}{64}, \frac{16}{125}, \frac{25}{216}\right\}$; $\left\{\frac{48}{9}, \frac{63}{11}, \frac{80}{13}, ..., \frac{224}{25}\right\}$; $\left\{3, \frac{4}{3}, 1, \frac{6}{7}, \frac{7}{9}, ..., \frac{13}{21}\right\}$; $\left\{0, \frac{3}{5}, \frac{8}{10}, \frac{15}{17}, \frac{24}{26}\right\}$

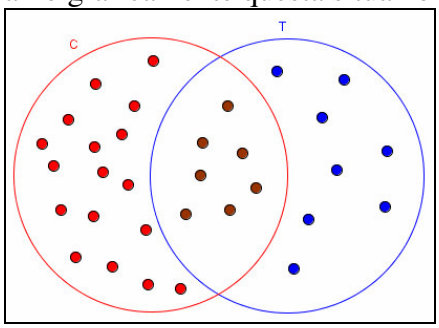
$$\left[\left\{\frac{n^2}{(n+1)^3} : n \in \mathbb{N} \wedge 1 \le n \le 5\right\}; \left\{\frac{n^2-1}{2n-5} : n \in \mathbb{N} \wedge 7 \le n \le 15\right\}; \left\{\frac{n}{2n-1} : n \in \mathbb{N} \wedge 3 \le n \le 13\right\}; \left\{\frac{n^2-1}{n^2+1} : n \in \mathbb{N} \wedge 1 \le n \le 5\right\}\right]$$

L'operazione di intersezione insiemistica

Il problema

Riccardo afferma: *Nella mia classe ci sono* 32 *studenti*, 24 *di questi giocano a calcio e* 15 *giocano a tennis*. Federica, dopo avere sentito la precedente frase, dice che Riccardo sta certamente sbagliando, dato che $24 + 15 > 32$. Riccardo controbatte che la sua affermazione è del tutto sensata, dato che egli non ha specificato che quei ragazzi della classe che giocano a calcio non possano anche saper giocare a tennis e viceversa.

Come facciamo a risolvere il problema appena impostato? Calcoliamo quanti studenti fanno tutte e due gli sport; nell'ipotesi che un qualunque studente pratichi uno almeno dei due sport, gli studenti in *più* rispetto ai 32 sono 7. Questo vuol dire che 7 studenti sono stati contati due volte e quindi 7 sono proprio quelli che praticano entrambi gli sport. Rappresentiamo graficamente questa situazione nel seguente modo)



È bene dare un significato a questa operazione di raccogliere gli elementi eventualmente comuni a due o più insiemi.

Definizione 6

Diciamo **intersezione** di due o più insiemi dati l'insieme formato dagli elementi a essi comuni.

Notazione 2

Indichiamo l'intersezione di A con B nel seguente modo: $A \cap B$.

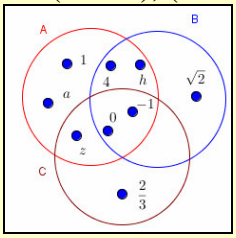
L'intersezione fra due insiemi è un'*operazione binaria*, vedremo in seguito quali proprietà essa verifica.

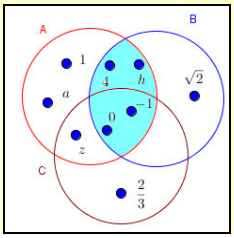
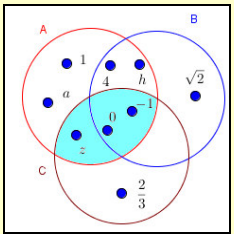
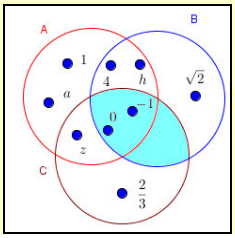
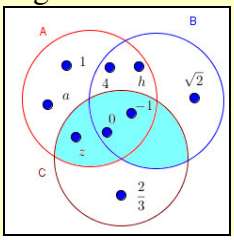
Esempio 7

Determiniamo l'intersezione degli insiemi: $A = \{2k + 3: k \in \mathbb{Z} \wedge -2 < k < 3\}$, $B = \{4k - 1: k \in \mathbb{Z} \wedge 1 \leq k \leq 5\}$. Esprimiamo gli insiemi in forma elenco, facilmente si ha: $A = \{1; 3; 5; 7\}$; $B = \{3; 7; 11; 15; 19\}$. Quindi ovviamente $A \cap B = \{3; 7\}$.

Vediamo un esempio con i diagrammi di Eulero – Venn.

Esempio 8

Determinare $(A \cap B)$, $(A \cap C)$, $(B \cap C)$ e $(A \cap B) \cap C$ dove gli insiemi sono rappresentati nel seguente diagramma.  Graficamente le intersezioni richieste sono le seguenti:

cioè $A \cap B = \{-1; 4; 0; h\}$; $A \cap C = \{-1; 0; z\}$; $B \cap C = \{-1; 0\}$; $(A \cap B) \cap C = \{-1; 0; z\}$. Per inciso osserviamo che $A \cap C = (A \cap B) \cap C$, che ovviamente non accade sempre.

Ancora un esempio.

Esempio 9

Consideriamo gli insiemi $A = \{5k: k \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{7k: k \in \mathbb{N}\}$, rispettivamente dei multipli di 5 e di 7. È abbastanza facile capire che $A \cap B = \{35k: k \in \mathbb{N}\}$, cioè l'insieme dei multipli di 35. Ossia l'intersezione dell'insieme dei multipli di 5 con l'insieme dei multipli di 7 è l'insieme dei multipli di 35; infatti 35 = *mcm*(5, 7). E questo invece è un fatto sempre vero, cioè l'intersezione fra l'insieme dei multipli di m e l'insieme dei multipli di n è l'insieme dei multipli di *mcm*(m, n).

Ovviamente l'intersezione di due insiemi che non hanno elementi in comune, come i pari e i dispari per esempio, sarà l'insieme vuoto, che possiamo definire quindi in altro modo.

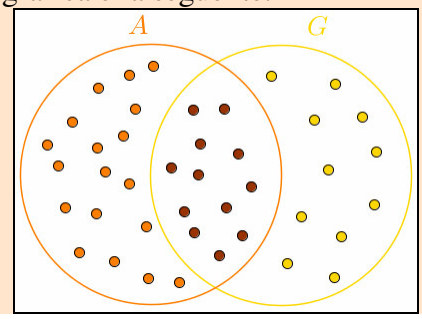
Definizione 7

Diremo che due insiemi A e B privi di elementi comuni individuano **l'insieme vuoto**; A e B si dicono fra loro **disgiunti**.

L'operazione di unione insiemistica

Il problema

In un parco sono piantati 30 cespugli formati da margherite arancione e 23 da margherite gialle. Sapendo che 12 dei cespugli sono formati da margherite sia bianche sia gialle, quanti cespugli di margherite sono piantati in tutto? La rappresentazione grafica è la seguente.



Nel problema precedente siamo interessati a stabilire il totale, l'unione dei cespugli di margherite (solo bianche, solo gialle e bianche e gialle).

Definizione 8

Diciamo **unione** di due o più insiemi dati, l'insieme formato considerando gli elementi di tutti gli insiemi e contando una sola volta gli elementi comuni ad almeno due di essi.

Notazione 3

Indichiamo l'**unione** di A e B con $A \cup B$.
Sia il simbolo di intersezione sia quello di unione sono stati introdotti da Giuseppe Peano nella sua opera *Calcolo geometrico* del 1888.

Anche l'unione fra insiemi è un'operazione binaria.

Esempio 10

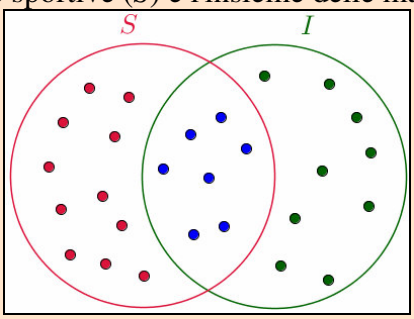
Siano $A = \{1; 2; 3; 4\}$; $B = \{2; 3; 4; 5\}$; $C = \{3; 4; 5; 6\}$. Vogliamo determinare $(A \cup B) \cup C$. Si ha: $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; quindi $(A \cup B) \cup C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

In caso di unione è chiaro che una semplice regola pratica da applicare è quella di scrivere **una sola volta**, tutti gli elementi degli insiemi da unire. Nel caso dei diagrammi di Eulero–Venn, l'unione è data da tutti gli insiemi tracciati.
Possiamo combinare le due operazioni fin qui introdotte.

Esempio 11
Siano $A = \{1; 2; 3; 4\}$; $B = \{2; 3; 4; 5\}$; $C = \{3; 4; 5; 6\}$. Vogliamo determinare $(A \cup B) \cap C$. Questo equivale a effettuare l'operazione $\{1; 2; 3; 4; 5\} \cap \{3; 4; 5; 6\} = \{3; 4; 5\}$.Potremmo pensare che le parentesi non siano necessarie. Osserviamo che si ha invece $A \cup (B \cap C) = \{1; 2; 3; 4\} \cup \{3; 4; 5\} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Cioè $(A \cup B) \cap C \neq A \cup (B \cap C)$. Quindi, in questo caso, le parentesi sono necessarie.

L'operazione di differenza insiemistica

Il Problema
Nel grafico seguente rappresentiamo l'insieme delle macchine parcheggiate in un posteggio pubblico in cui distinguiamo l'insieme delle macchine sportive (S) e l'insieme delle macchine di marca italiana (I).



Si vuol sapere quante sono le macchine sportive non italiane ferme nel parcheggio.
Dal grafico vediamo che ci sono 18 macchine sportive ($|S|$) e 16 macchine italiane ($|I|$), di queste 7 sono macchine sportive ed italiane ($|S \cap I|$). Allora la risposta alla questione è data dal numero di pallini rossi, cioè gli elementi di S che non stanno in I, che sono $18 – 7 = 11$.

Per risolvere il problema dobbiamo fare una sottrazione, dato che abbiamo tolto dall'insieme delle macchine sportive quelle che sono italiane.

Definizione 9
Diciamo **differenza** di due insiemi A e B (nell'ordine) dati l'insieme formato considerando gli elementi di A non appartenenti a B.

Notazione 4
Indichiamo la differenza di A con B nel seguente modo: $A \setminus B$.

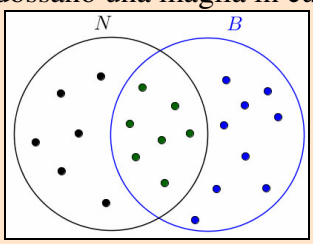
Anche la differenza fra insiemi è un'operazione binaria. Si noti che, in generale, $A \setminus B \neq B \setminus A$; ecco perché abbiamo precisato nella definizione che la differenza deve essere considerata nell'ordine.
Esempio 12
- Siano $A = \{1; 2; 3\}$ e $B = \{2; 3; 4\}$. Si ha $A \setminus B = \{1\}$, mentre $B \setminus A = \{4\}$.
- Siano $A = \{1; 2; 4; 5\}$; $B = \{4; 5; 6; 7\}$; $C = \{2; 3; 5; 6\}$, determinare $(A \setminus B) \setminus C$ e $A \setminus (B \setminus C)$. Si ha $(A \setminus B) \setminus C = \{1; 2\} \setminus \{2; 3; 5; 6\} = \{1\}$; mentre $A \setminus (B \setminus C) = \{1; 2; 4; 5\} \setminus \{4; 7\} = \{1; 2; 5\}$.
- Siano $A = \{1; 2\}$; $B = \{2; 3\}$; $C = \{3; 4\}$. Abbiamo $A \setminus (B \setminus C) = \{1; 2\} \setminus \{2\} = \{1\}$ e $(A \setminus B) \setminus C = = \{1\} \setminus \{3; 4\} = \{1\}$.

Questo esempio mostra che in generale $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$, ma esistono dei casi in cui le due espressioni coincidono.

L'operazione di differenza simmetrica insiemistica

Il problema

In un campionato di calcio parrocchiale tutte le squadre hanno maglie contenenti esattamente due colori. Il seguente grafico si riferisce all'insieme dei calciatori che indossano una maglia in cui è presente il colore nero (N) e all'insieme dei calciatori che indossano una maglia in cui è presente il colore blu (B).



Si vuol sapere quanti calciatori non indossano una maglia che contenga entrambi i colori blu e nero. Essi sono ovviamente quanti i puntini neri (6) aumentati dal numero dei puntini blu (9), cioè $6 + 9 = 15$.

Siamo perciò interessati a fare la seguente operazione: togliere dall'unione l'intersezione.

Definizione 10

Diciamo **differenza simmetrica** di due insiemi A e B dati l'insieme risultato delle seguenti operazioni $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Notazione 5

Indichiamo la **differenza simmetrica** di A con B nel seguente modo: $A \Delta B$.

Anche la differenza simmetrica fra insiemi è un'operazione binaria.

Esempio 13

- Siano $A = \{1; 2; 3; 4\}$ e $B = \{1; 5; 6\}$. Si ha $A \Delta B = \{2; 3; 4; 5; 6\}$.
- Siano $A = \{1; 2\}$; $B = \{2; 3; 4\}$; $C = \{3\}$; vogliamo determinare $(A \Delta B) \Delta C$ e $A \Delta (B \Delta C)$. Abbiamo $(A \Delta B) \Delta C = \{1; 3; 4\} \Delta \{3\} = \{1; 4\}$. Allo stesso modo $A \Delta (B \Delta C) = \{1; 2\} \Delta \{2; 4\} = \{1; 4\}$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Dati $A = \{0; 3; 54; 68; 78\}$; $B = \{-1; 0; 3; 5; 64; 68\}$; $C = \{-2; -1; 3; 5; 68; 78\}$; determinare $A \cap B \cap C$.
Dobbiamo cercare semplicemente gli elementi comuni ai tre insiemi; quindi: $A \cap B \cap C = \{3; 68\}$.

Determinare l'intersezione fra gli insiemi seguenti

Livello 1

1. $A = \{1; 2; 4; 6; 8\}$; $B = \{-1; 1; 3; 5; 7\}$; $A = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$; $B = \{-1; 1; 2; 3; 4\}$ [$\{1\}$; $\{-1; 1; 2; 3\}$]
2. $A = \{11; 13; 15; 17; 19; 21\}$; $B = \{13; 17; 21\}$ [$B = \{13; 17; 21\}$]
3. $A = \{1112; 1121; 1211; 2111\}$; $B = \{1111; 1112; 1113; 1114\}$ [$\{1112\}$]
4. $A = \{-5; -4; -3; -2; -1\}$; $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ [$\{\}$]
5. $A = \{13; 17; 19; 23; 29\}$; $B = \{13; 15; 17; 19; 21\}$ [$\{13; 17; 19\}$]
6. $A = \{123; 132; 213; 231; 312; 321\}$; $B = \{122; 123; 132; 133; 142; 143; 152; 153\}$ [$\{123; 132\}$]

Livello 2

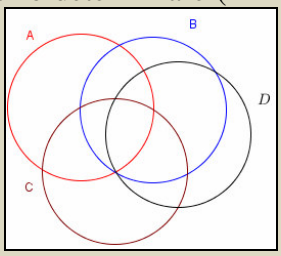
7. $A = \{\text{divisori di } 40\}$, $B = \{\text{divisori di } 72\}$ [$\{1; 2; 4; 8\}$]
8. $A = \{\text{divisori di } 12\}$, $B = \{\text{divisori di } 20\}$, $C = \{\text{divisori di } 18\}$ [$\{1; 2\}$]
9. $A = \{\text{divisori di } 10\}$, $B = \{\text{divisori di } 20\}$, $C = \{\text{divisori di } 30\}$ [$A = \{1; 2; 5; 10\}$]
10. $A = \{\text{divisori di } 12\}$, $B = \{\text{divisori di } 36\}$, $C = \{\text{divisori di } 25\}$ [$\{1\}$]
11. $A = \{\text{numeri primi minori di } 20\}$, $B = \{\text{numeri dispari fra } 10 \text{ e } 30\}$ [$\{11; 13; 17; 19\}$]
12. $A = \{-1; 4; 6; 8\}$; $B = \{-1; 1; 3; 5; 7\}$; $C = \{-2; -1; 0\}$ [$\{-1\}$]
13. $A = \{1; 2; 4; 6; 8\}$; $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; $C = \{1; 2; 3; 5; 7\}$; $D = \{1; 2; 3\}$ [$\{1; 2; 3\}$]
14. $A = \{\text{multipli di } 7\}$, $B = \{\text{multipli di } 14\}$, $C = \{\text{multipli di } 21\}$ [C]
15. $A = \{\text{multipli di } 2\}$, $B = \{\text{multipli di } 3\}$, $C = \{\text{multipli di } 5\}$ [multipli di 30]
16. $A = \left\{\frac{6h^2-11h+4}{2h-1} : h \in \mathbb{N} \wedge 0 < h \le 5\right\}, B = \left\{\frac{15h^2-17h-4}{3h-4} : h \in \mathbb{N} \wedge 1 < h \le 5\right\}$ [$\{11\}$]
17. $A = \left\{\frac{m^2+1}{m^2-1} : m \in \mathbb{N} \wedge 2 \le m \le 5\right\}, B = \left\{\frac{q+1}{q} : q \in \mathbb{N} \wedge 4 \le q \le 14\right\}$ $\left[\left\{\frac{5}{4}, \frac{13}{12}\right\}\right]$

Livello 3

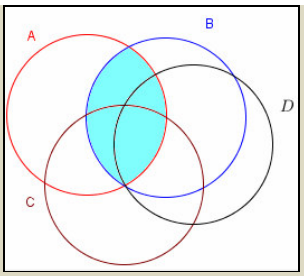
Scrivere l'intersezione fra gli insiemi seguenti in forma simbolica

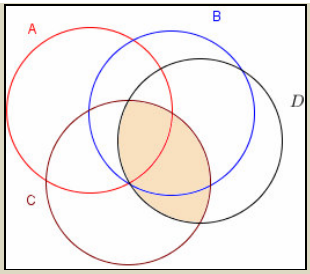
18. $A = \{2k + 1 : k \in \mathbb{Z} \wedge -1 < k < 5\}$, $B = \{2k + 1 : k \in \mathbb{Z} \wedge -2 \le k \le 3\}$ [$\{2k + 1 : k \in \mathbb{Z} \wedge -1 \le k \le 3\}$]
19. $A = \{2k : k \in \mathbb{Z} \wedge 0 < k < 8\}$, $B = \{4k : k \in \mathbb{N} \wedge 3 \le k \le 5\}$ [$\{4k : k \in \mathbb{N} \wedge 3 \le k \le 4\}$]
20. $A = \{3k : k \in \mathbb{N} \wedge 2 < k < 17\}$, $B = \{4k : k \in \mathbb{N} \wedge 1 \le k \le 15\}$ [$\{12k : k \in \mathbb{N} \wedge 1 \le k \le 4\}$]
21. $A = \{6k : k \in \mathbb{N} \wedge 2 < k < 25\}$, $B = \{8k : k \in \mathbb{Z} \wedge 0 \le k \le 34\}$ [$\{24k : k \in \mathbb{N} \wedge 1 \le k \le 24\}$]
22. $A = \{6k : k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{10k : k \in \mathbb{N}\}$, $C = \{4k : k \in \mathbb{N}\}$ [$\{60k : k \in \mathbb{N}\}$]
23. $A = \{n = 4k : k \in \mathbb{N}\}$, $B = \{n = 8k : k \in \mathbb{N}\}$, $C = \{n = 16k : k \in \mathbb{N}\}$ [C]

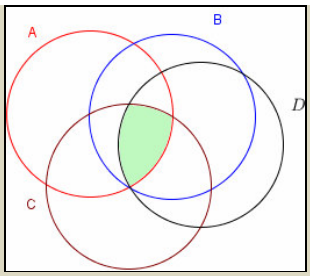
Lavoriamo insieme

Dati gli insiemi in figura, vogliamo determinare $(A \cap B) \cap (C \cap D)$ e vogliamo vedere se tale insieme è lo stesso di $A \cap (B \cap C) \cap D$. 

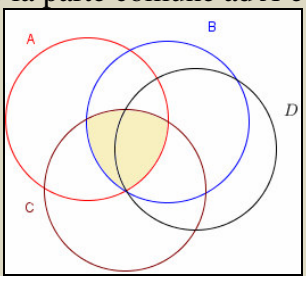
Rappresentiamo quanto richiesto. Nel primo caso abbiamo la sequenza di immagini, le prime due rispettivamente di $A \cap B$ e $C \cap D$, quindi il risultato finale.







In figura c'è $B \cap C$, facilmente si vede che la parte comune ad A e D, coincide con la precedente.

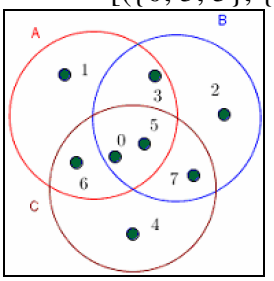


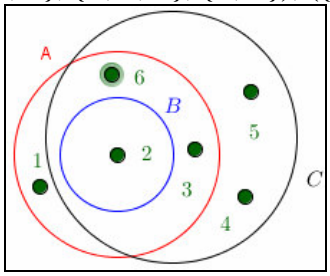
Livello 1

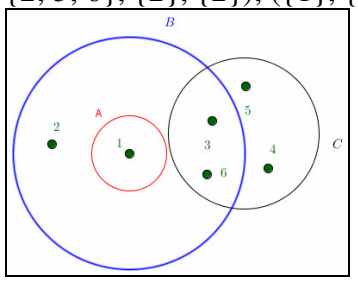
Con riferimento ai seguenti diagrammi, determinare quanto richiesto

24. $(A \cap B)$; $(A \cap C)$; $(B \cap C)$ e $(A \cap B \cap C)$

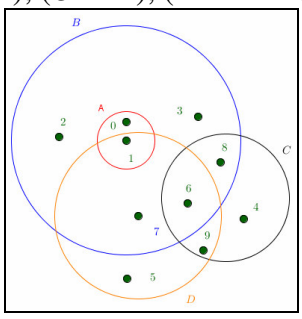
[({0; 3; 5}, {0; 5; 6}, {0; 3; 5}, {0; 5}); ({2}, {2; 3; 6}, {2}, {2}); ({1}, {}, {3; 6}, {}]

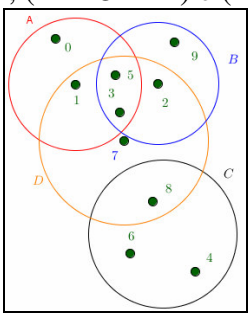


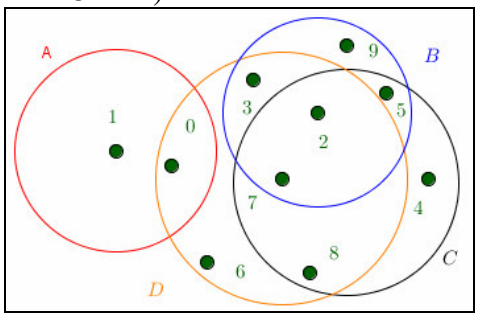




25. $(A \cap B)$; $(C \cap D)$; $(A \cap B \cap C)$; $(A \cap C \cap D)$ e $(A \cap B \cap C \cap D)$







[({0; 1}, {6; 9}, {1}, {}, {}) ; ({3; 5}, {8}, {}, {}, {}) ; ({}, {2; 7; 8}, {}, {}, {}]

Livello 2

***Il riferimento è all'esercizio* 25**

26. Nel primo diagramma, possiamo dire che {6} è intersezione di quali insiemi? [$B \cap C \cap D$]
27. Nel secondo diagramma, possiamo dire che {2; 3; 5} è intersezione di quali insiemi? [$B \cap D$]
28. Nel terzo diagramma, possiamo dire che {0} è intersezione di quali insiemi? [$A \cap D$]

Livello 3

29. Tenuto conto degli esercizi svolti, l'intersezione dell'insieme dei divisori di m e l'insieme dei divisori di n è l'insieme dei divisori di? Giustificare la risposta. [$mcm(m; n)$]
30. La proprietà precedente può estendersi anche a più di due insiemi? [Sì]
31. Tenuto conto degli esercizi svolti, l'intersezione dell'insieme dei multipli di m e l'insieme dei multipli di n è l'insieme dei multipli di? Giustificare la risposta. [$mcm(m; n)$]
32. La proprietà precedente può estendersi anche a più di due insiemi? [Sì]
33. Se $|A| = 5$ e $|B| = 3$, quando $|A \cap B| = 5$? Quando $|A \cap B| = 3$? Giustificare le risposte.

[Mai; Se tutti gli elementi di B sono anche elementi di A]

Lavoriamo insieme

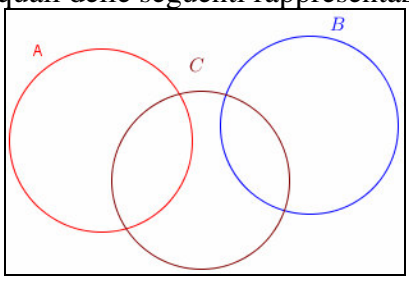
Stabiliamo se sono o no fra loro disgiunti gli insiemi: $A = \{n^2 - 1: n \in \mathbb{N} \wedge 5 < n < 9\}$, $B = \{n^3 - 1: n \in \mathbb{N} \wedge 1 < n < 7\}$. Determiniamo i loro elementi: $A = \{6^2 - 1; 7^2 - 1; 8^2 - 1\} = \{35; 48; 63\}$, $B = \{2^3 - 1; 3^3 - 1; 4^3 - 1; 5^3 - 1; 6^3 - 1\} = \{7; 26; 63; 124; 215\}$. Allora $A \cap B = \{63\}$, quindi non sono disgiunti.

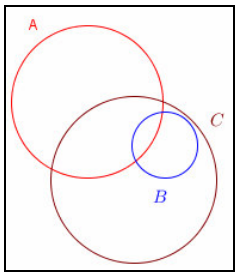
Livello 1

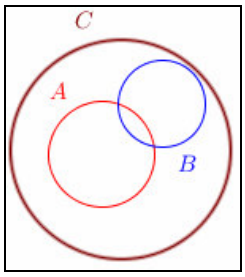
Determinare quali fra le seguenti coppie rappresentano insiemi fra loro disgiunti

34. A = insieme dei divisori di 7 e B = insieme dei divisori di 5; C = Insieme dei multipli di 15 minori di 50 e D = insieme dei divisori di 45; E = insieme dei divisori di 12 e F = insieme dei divisori di 15; $G=\{4n - 3: n \in \mathbb{N} \wedge 4 < n < 7\}$ e $H = \{4n - 1: n \in \mathbb{N} \wedge 3 < n < 8\}$ [G e H]

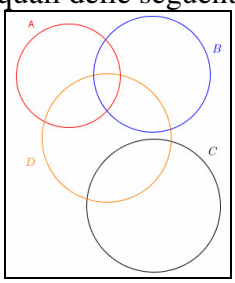
35. In quali delle seguenti rappresentazioni si ha : $A \cap B \cap C = \varnothing$? [A)]

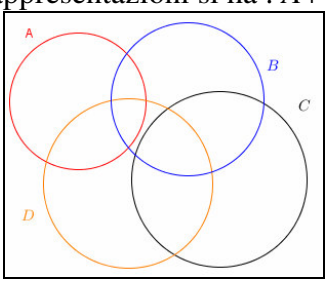
A) 

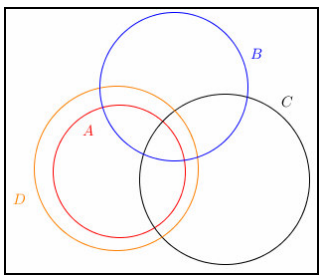
B) 

C) 

36. In quali delle seguenti rappresentazioni si ha : $A \cap B \cap C \cap D = \varnothing$? [A), B)]

A) 

B) 

C) 

Livello 2

37. Se $A \cap B = \varnothing$ e $B \cap C = \varnothing$ è sempre vero che $A \cap C = \varnothing$? Giustificare la risposta. [No]

Lavoriamo insieme

Determiniamo l'unione fra gli insiemi: $A = \left\{\frac{2k+1}{2k-1} : k \in \mathbb{N} \wedge 4 < k < 7\right\}, B = \left\{\frac{3k+2}{2k+3} : k \in \mathbb{N} \wedge 2 < k \le 5\right\}$.

Esprimiamoli per elenco: $A = \left\{\frac{2\cdot5+1}{2\cdot5-1}, \frac{2\cdot6+1}{2\cdot6-1}\right\} = \left\{\frac{11}{9}, \frac{13}{11}\right\}$, $B = \left\{\frac{3\cdot2+2}{2\cdot2+3}, \frac{3\cdot3+2}{2\cdot3+3}, \frac{3\cdot4+2}{2\cdot4+3}, \frac{3\cdot5+2}{2\cdot5+3}\right\} =$

$= \left\{\frac{8}{7}, \frac{11}{9}, \frac{14}{11}, \frac{17}{13}\right\}$. Dato che nell'unione si prendono tutti gli elementi una sola volta, il risultato è:

$A \cup B = \left\{\frac{8}{7}, \frac{11}{9}, \frac{14}{11}, \frac{13}{11}, \frac{17}{13}\right\}$.

Determinare l'unione fra gli insiemi seguenti

Livello 1

38. $A = \{1; 2; 4\}$; $B = \{3; 5; 7\}$; $C = \{-1; 0\}$; $D = \{3; 4\}$ [$\{1; 2; 3; 4; 5; 7\}$; $\{-1; 0; 3; 4\}$]

39. $E = \{13; 15; 21\}$; $F = \{13; 21\}$; $G = \{1112; 1211; 2111\}$; $H = \{1111; 1112; 1114\}$ [E ; $\{1111; 1112; 1114; 1211; 2111\}$]

40. $I = \{-5; -4\}$; $J = \{-4; -3; -2; 0\}$; $L = \{4; 6; 8\}$; $M = \{-1; 3; 5; 7\}$; $N = \{-2; -1\}$ [$\{-5; -4; -3; -2; 0\}$; $\{-2; -1; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$]

41. $P = \{0; 3; 68; 78\}$; $Q = \{0; 3; 64; 68\}$; $R = \{3; 5; 68; 78\}$ [$\{0; 3; 5; 64; 68; 78\}$]

42. $S = \{4; 6; 8\}$; $T = \{3; 4; 5\}$; $U = \{3; 5; 7\}$; $V = \{3\}$ [$\{3; 4; 5; 6; 7; 8\}$]

Livello 2

43. $A = \{2k+1 : k \in \mathbb{N} \wedge -1 < k < 5\}, B = \{2k+3 : k \in \mathbb{N} \wedge -2 \le k \le 3\}$ [{–1; 1; 3; 5; 7; 9}]

44. $C = \{2k : k \in \mathbb{N} \wedge 0 < k < 8\}, D = \{3k : k \in \mathbb{N} \wedge 3 \le k \le 5\}$ [{2; 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15}]

45. $E = \left\{\frac{3}{k} : k \in \mathbb{N} \wedge 2 < k < 7\right\}, F = \left\{\frac{4}{k} : k \in \mathbb{N} \wedge 1 \le k \le 5\right\}$ $\left[\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1, \frac{4}{3}, 2, 4\right\}\right]$

46. $G = \{3k+1 : k \in \mathbb{N} \wedge 2 < k < 5\}, H = \{4k+1 : k \in \mathbb{N} \wedge 3 \le k \le 4\}$ [{10; 13; 17}]

47. I = {multipli di 5 minori di 30}, J = {multipli di 6 minori di 40}
[{5; 6; 10; 12; 15; 18; 20; 24; 25; 30; 36}]

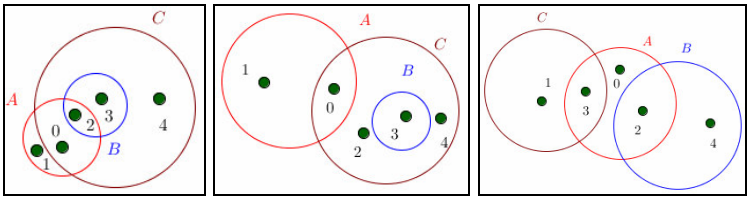
48. K = {multipli di 5}, L = {multipli di 15}, M = {divisori di 24}, N = {divisori di 36}
[L; {1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 18; 24; 36}]

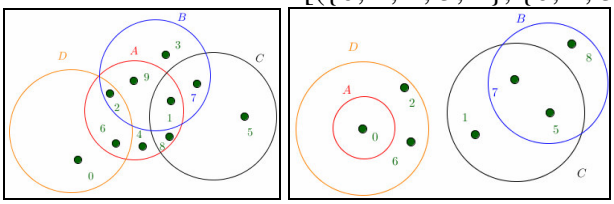
Livello 3

49. $A = \left\{\frac{k^2-9}{k+3} : k \in \mathbb{N} \wedge 1 \le k < 4\right\}, B = \left\{\frac{k^2-4}{k+2} : k \in \mathbb{N} \wedge 0 < k \le 3\right\}$ [{–2; –1; 0; 1}]

50. $C = \left\{\frac{k^2-5k+6}{k^2-7k+10} : k \in \mathbb{Z} \wedge -1 \le k \le 3\right\}, D = \left\{\frac{k^2+k-2}{k^2-k-2} : k \in \mathbb{Z} \wedge -3 < k < 1\right\}$ $\left[\left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, 0, 1\right\}\right]$

Con riferimento ai seguenti diagrammi, determinare quanto richiesto

51.  $(A \cup C)$, $(A \cup B) \cap C$ e $(A \cap B) \cup C$
[({0; 1; 2; 3; 4}, {0; 2; 3}, C); ({0; 1; 2; 3; 4}, {0; 3}, C) ; ({0; 1; 2; 3}, {3}, C)]

52.  $(A \cup B) \cap (C \cup D)$, $(A \cap B) \cup (C \cap D)$
[({1; 2; 6; 7; 8}, {1; 2; 9}) ; ({0; 5; 7}, {})]

Livello 3

53. Tenuto conto dei risultati dell'esercizio 51, possiamo dire che si ha sempre $(A \cap B) \cup C = C$? Giustificare la risposta. [No]

54. Quando accade che $A \cup B = \varnothing$? Giustificare la risposta. [Solo se $A = B = \varnothing$]

55. Se $A \cup B = C$ e $D \cup E = C$ è sempre vero che $A = D$ e $B = E$ oppure $A = E$ e $B = D$? Giustificare la risposta. [No]

56. Se $A \cup B = C$ e $A \cup D = C$ è sempre vero che $B = D$? Giustificare la risposta. [No]

57. Se $|A| = 7$ e $|B| = 4$, quando accade che $|A \cup B| = 7$? Quando accade che $|A \cup B| = 4$? quando accade che $|A \cup B| = 11$? Giustificare le risposte. [Se B è parte di A; Mai; Se $A \cap B = \varnothing$]

58. Dare un esempio per cui è vera l'uguaglianza $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$.

59. Dimostrare che l'unione di due o più insiemi, ciascuno multiplo di un numero naturale n, è l'insieme dei multipli del *MCD* dei numeri dati.

Lavoriamo insieme

Dati $A = \left\{\frac{2k+1}{2k-1} : k \in \mathbb{N} \wedge 1 < k < 9\right\}, B = \left\{\frac{3k+2}{2k+3} : k \in \mathbb{N} \wedge 1 \le k \le 9\right\}$, determinare $A \setminus B$ e $B \setminus A$,

Esprimiamo in formato elenco i due insiemi:

$$A = \left\{\frac{2\cdot2+1}{2\cdot2-1}, \frac{2\cdot3+1}{2\cdot3-1}, \frac{2\cdot4+1}{2\cdot4-1}, \frac{2\cdot5+1}{2\cdot5-1}, \frac{2\cdot6+1}{2\cdot6-1}, \frac{2\cdot7+1}{2\cdot7-1}, \frac{2\cdot8+1}{2\cdot8-1}\right\} = \left\{\frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{9}{7}, \frac{11}{9}, \frac{13}{11}, \frac{15}{13}, \frac{17}{15}\right\}$$

$$B=\left\{\frac{3\cdot1+2}{2\cdot1+3},\frac{3\cdot2+2}{2\cdot2+3},\frac{3\cdot3+2}{2\cdot3+3},\frac{3\cdot4+2}{2\cdot4+3},\frac{3\cdot5+2}{2\cdot5+3},\frac{3\cdot6+2}{2\cdot6+3},\frac{3\cdot7+2}{2\cdot7+3},\frac{3\cdot8+2}{2\cdot8+3},\frac{3\cdot9+2}{2\cdot9+3}\right\}=$$

$$=\left\{\frac{5}{5}=1,\frac{8}{7},\frac{11}{9},\frac{14}{11},\frac{17}{13},\frac{20}{15},\frac{23}{17},\frac{26}{19},\frac{29}{21}\right\}$$

Dato che i due insiemi hanno in comune il solo $\frac{11}{9}$ avremo: $A\setminus B=\left\{\frac{5}{3},\frac{7}{5},\frac{9}{7},\frac{13}{11},\frac{15}{13},\frac{17}{15}\right\}$ e $B\setminus A=\left\{1,\frac{8}{7},\frac{14}{11},\frac{17}{13},\frac{20}{15},\frac{23}{17},\frac{26}{19},\frac{29}{21}\right\}$.

Determinare le differenze* (*A* \ *B*) e (*B* \ *A*) *fra gli insiemi seguenti

Livello 1

60. $A = \{1; 2; 4\}, B = \{-1; 1; 3\}$; $A = \{0\}, B = \{1; 3; 4\}$ [{2; 4}, {–1; 3}; *A*, *B*]
61. $A = \{11; 13; 17; 19; 21\}, B = \{13; 17; 21\}$; $A = \{111; 121; 211\}, B = \{111; 112\}$ [{11; 19}, {}; {121; 211}, {112}]
62. $A = \{-5; -2; -1\}, B = \{1; 2; 5\}$; $A = \{0; 1; 2\}, B = \{0; 1; 2; 3\}$ [*A*, *B* ;{}, {3}]
63. A = {multipli di 12 compresi tra 10 e 65}, B = {multipli di 8 compresi tra 10 e 45} [{12; 36; 48; 60}, {16; 32; 40}]
64. A = {divisori di 36}, B = {divisori di 12} [{9; 18; 36}, {}]

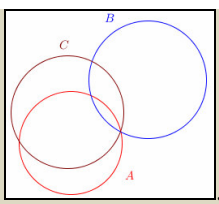
Livello 2

65. A = {numeri primi maggiori di 20 e minori di 33}, B = {numeri primi maggiori di 11 e minori di 27} [{29; 31}, {13; 17; 19}]
66. $A = \{2k + 1 : k \in \mathbb{N} \wedge -1 < k < 5\}, B = \{2k - 1: k \in \mathbb{N} \wedge 0 \le k \le 3\}$ [{7; 9}, {–1}]
67. $A = \{2k: k \in \mathbb{N} \wedge 0 < k < 8\}, B = \{4k: k \in \mathbb{N} \wedge 3 \le k \le 5\}$ [{2; 4; 6; 8; 10; 14}, {16; 20}]
68. $A = \{3k + 1: k \in \mathbb{N} \wedge 2 < k < 5\}, B = \{5k: k \in \mathbb{N} \wedge 0 \le k \le 4\}$ [{13}, {0; 5; 15; 20}]
69. $A = \{3h + 2: h \in \mathbb{N}, 5 \le h \le 8\}, B = \{3h - 10: h \in \mathbb{N}, 7 \le h \le 11\}$ [{26}, {11; 14}]

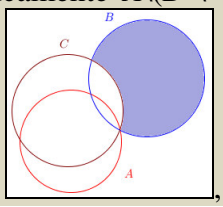
Livello 3

70. $A=\left\{\frac{k^2+2k+1}{k^2-2k+1}:k\in\mathbb{Z}\wedge-3\le k<1\right\},B=\left\{\frac{2k^2+1}{3k^2-k-1}:k\in\mathbb{N}\wedge1\le k\le4\right\}$ $\left[\left\{0,\frac{1}{9},\frac{1}{4}\right\},\left\{\frac{33}{43},\frac{19}{23},3\right\}\right]$
71. $A=\left\{\frac{3k+5}{3k-5}:k\in\mathbb{Z}\wedge-2<k<4\right\},B=\left\{\frac{9k^2-25}{9k^2-30k+25}:k\in\mathbb{Z}\wedge2\le k\le5\right\}$ $\left[\left\{-4,-1,-\frac{1}{4}\right\},\left\{2,\frac{17}{7}\right\}\right]$
72. $A=\left\{\frac{7k+1}{2k-3}:k\in\mathbb{N}\wedge1<k\le5\right\},B=\left\{\frac{14k^2-19k-3}{4k^2-12k+9}:k\in\mathbb{N}\wedge1\le k<5\right\}$ [{}, {–8; 15}]
73. $A=\left\{3+\frac{k^2-5}{k+2}:k\in\mathbb{Z}\wedge-2<k<4\right\},B=\left\{\frac{k^2-3k+1}{k-1}:k\in\mathbb{Z}\wedge-3<k<1\right\}$ $\left[\left\{\frac{1}{2},\frac{5}{3},\frac{11}{4},\frac{19}{5}\right\},\left\{-\frac{11}{3},-\frac{5}{2}\right\}\right]$

Lavoriamo insieme

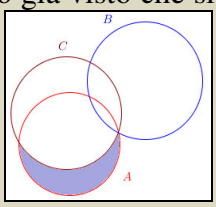
Vogliamo determinare graficamente $A\setminus(B \setminus C)$ tenendo conto del seguente diagramma 

.

Intanto determiniamo $B\setminus C$: 

, dato che A non ha elementi in comune con il precedente

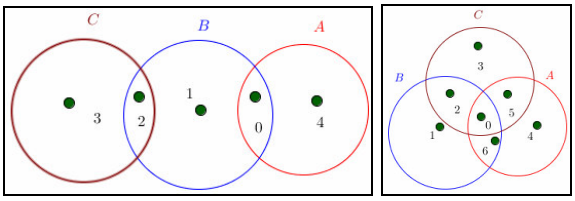
insieme, possiamo dire che $A \setminus (B \setminus C) = A$. Adesso vogliamo calcolare $(A \setminus B) \setminus C$. Abbiamo già visto che si ha: $A \setminus B = A$, quindi dobbiamo determinare semplicemente $A \setminus C$.



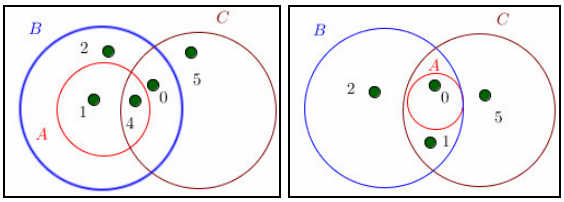
In questo modo abbiamo anche dimostrato che in generale la differenza insiemistica non gode della proprietà associativa, cioè che $(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$

Livello 2

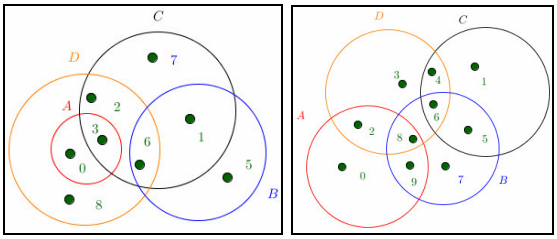
Con riferimento ai seguenti diagrammi, determinare quanto richiesto

74. 

$(A \setminus B)$, $(B \setminus C)$, $(A \cup B) \setminus C$ e $(C \setminus B) \cap A$
[$(\{4\}, \{0; 1\}, \{0; 1; 4\}, \{\})$; $(\{4; 5\}, \{1; 6\}, \{1; 4; 6\}, \{5\})$]

75. 

$(C \setminus B) \cup (A \cap C)$, $(A \cup B) \cap (A \setminus C)$, $(A \cap B) \setminus (B \cup C)$
[$(\{0; 4; 5\}, \{1\}, \{\})$; $(\{0; 5\}, \{\}, \{\})$]

76. 

$(A \setminus B) \cup (C \cap D)$, $(A \cup B) \cap (C \setminus D)$, $(A \cap B) \setminus (C \cup D)$
[$(\{0; 2; 3; 6\}, \{1\}, \{\})$; $(\{0; 2; 4; 6\}, \{5\}, \{9\})$]

Livello 3

77. Quando accade che $A \setminus B = B \setminus A$? Giustificare la risposta. [Solo se $A = B$]
78. Quando accade che $A \setminus B = A$? Giustificare la risposta. [Se $A \cap B = \varnothing$]
79. Quando accade che $A \setminus B = A \cap B$? Giustificare la risposta. [Mai]
80. Quando accade che $A \setminus B = A \cup B$? Giustificare la risposta.
81. Se $|A| = 7$ e $|B| = 4$, quando accade che $|A \setminus B| = 7$? Quando accade che $|A \setminus B| = 3$? Quando accade che $|A \setminus B| = 0$? Giustificare le risposte. [Se $A \cap B = \varnothing$; Se B è parte di A; Mai]

Lavoriamo insieme

Dati $A = \left\{ \frac{k}{k+1} : k \in \mathbb{N} \wedge 3 < k < 8 \right\}$, $B = \left\{ \frac{2k+1}{2k+2} : k \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq k \leq 3 \right\}$, vogliamo determinare la loro differenza simmetrica. Abbiamo: $A = \left\{ \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7} \right\}$ e $B = \left\{ \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8} \right\}$. Dato che i due insiemi hanno in comune gli elementi $\left\{ \frac{3}{4}, \frac{5}{6} \right\}$ e che la differenza simmetrica si ottiene togliendo dall'unione l'intersezione, scriveremo: $A \Delta B = \left\{ \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8} \right\}$. Naturalmente abbiamo lo stesso risultato per $B \Delta A$.

Determinare la differenza simmetrica fra gli insiemi seguenti

Livello 1

82. $A = \{1; 2; 6; 8\}$; $B = \{1; 3; 5\}$; $C = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$; $D = \{-1; 1; 2; 3; 4\}$ [$\{2; 3; 5; 8\}$; $\{0; 4\}$]
83. $E = \{11; 13; 15; 17; 19; 21\}$; $F = \{13; 17; 21\}$ [$\{11; 15; 19\}$]
84. $G = \{112; 112; 121; 211\}$; $H = \{111; 112; 113; 114\}$ [$\{111; 113; 114; 121; 211\}$]
85. $I = \{-5; -4; -3; -2; -1\}$; $J = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ [$\{-5; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5\}$]
86. $A = \{2k + 1: k \in \mathbb{Z} \wedge -1 < k < 5\}$, $B = \{2k + 1: k \in \mathbb{Z} \wedge -2 \le k \le 3\}$ [$\{-3; -1; 9\}$]
87. $C = \{2k: k \in \mathbb{N} \wedge 0 < k < 8\}$, $D = \{b = 4k: k \in \mathbb{N} \wedge 3 \le k \le 5\}$ [$\{2; 4; 6; 8; 10; 14; 16; 20\}$]
88. $E = \{3k + 1: k \in \mathbb{N} \wedge 2 < k < 5\}$, $F = \{b = 5k: k \in \mathbb{N} \wedge 0 \le k \le 4\}$ [$\{0; 5; 13; 15; 20\}$]

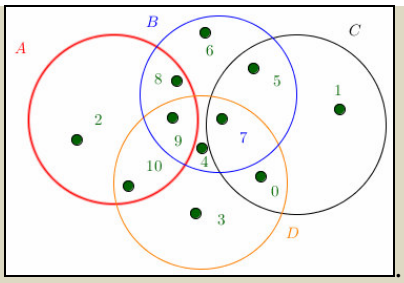
Livello 2

89. $G = \left\{\frac{2k+1}{2k-1} : k \in \mathbb{N} \wedge 2 < k < 7\right\}, H = \left\{\frac{3k+2}{2k+3} : k \in \mathbb{N} \wedge 0 \le k \le 3\right\}$ $\left[\left\{\frac{2}{3}, 1, \frac{8}{7}, \frac{13}{11}, \frac{9}{7}, \frac{7}{5}, 3\right\}\right]$
90. Esprimere in forma simbolica il risultato dell'esercizio 86 [$\{2k + 1: k \in \{-2; -1; 4\}$]
91. Determinare $(A \Delta B) \Delta C$, $A = \{-1; 4; 6; 8\}$, $B = \{-1; 1; 3; 5; 7\}$, $C = \{-2; -1; 0\}$ [$\{-2; 0; 1; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$]
92. Determinare $A \Delta (B \Delta C)$, $A = \{0; 3; 54; 68; 78\}$, $B = \{-1; 0; 3; 5; 64; 68\}$, $C = \{-2; -1; 3; 5; 68, 78\}$ [$\{-2; 3; 54; 68\}$]
93. Determinare $(A \Delta B) \Delta (C \Delta D)$, $A = \{1; 2; 4; 6; 8\}$; $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; $C = \{1; 2; 3; 5; 7\}$; $D = \{1; 2; 3\}$ [$\{3; 6; 7, 8\}$]

Livello 3

94. Dati $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $B = \{x: x$ è un divisore di $12\}$, $C = \{x: x$ è un multiplo di 3 minore di $28\}$; determinare $(A \Delta B) \setminus (C \cap (B \cup A))$ [$\{5\}$]
95. Dati $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $B = \{x: x$ è un divisore di $14\}$, $C = \{x: x$ è un multiplo di 4 minore di $38\}$; determinare $(A \cup C) \cap (C \Delta B)$ [$\{1; 2; 7; 14\}$]
96. Dati $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$, $B = \{x: x$ è un divisore di $8\}$, $C = \{x: x$ è un multiplo di 4 minore di $18\}$; determinare $(A \cup B) \setminus (B \Delta C)$ [$\{3; 4; 5; 7; 8; 9\}$]

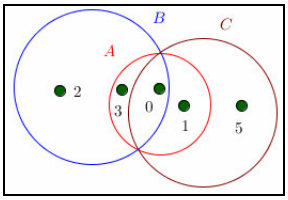
Lavoriamo insieme

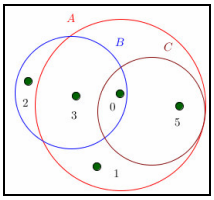
Dato il seguente diagramma determinare $(A \cap B) \setminus (C \cup D)$ 

.
Abbiamo $A \cap B = \{8, 9\}$; $C \cup D = \{1, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Quindi $(A \cap B) \setminus (C \cup D) = \{\}$.

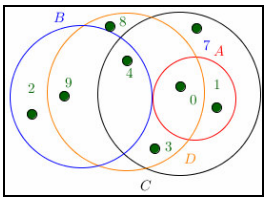
Con riferimento ai seguenti diagrammi, determinare quanto richiesto

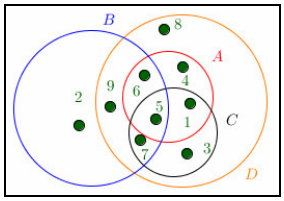
Livello 2

97. 



$(A \Delta B)$, $(A \Delta C) \cap (B \Delta C)$, $(A \cup B) \Delta C$ e $(B \setminus C) \Delta A$ [$(\{1; 2\}, \{2; 5\}, \{2; 3; 5\}, \{0; 1; 2\})$; $(\{1; 2; 5\}, \{2\}, \{1; 2; 3\}, \{0; 1; 5\})$]

98. 



$(A \Delta B) \cup (C \backslash D)$, $(A \cup B) \Delta (D \backslash C)$, $(B \setminus A) \cap (C \Delta D)$
[{}, {},{}; {}, {},{}]

Livello 3

99. Quando accade che $A \Delta B = A$? Giustificare la risposta. [Se $B = \varnothing$]
100. Quando accade che $A \Delta B = A \cup B$? Giustificare la risposta. [Se $A \cap B = \varnothing$]
101. Quando accade che $A \Delta B = \varnothing$? Giustificare la risposta. [Se $A = B$]
102. Se $|X| = 5$ e $|Y| = 3$, determinare quando si verifica $|X \Delta Y| = 8$; $|X \Delta Y| = 2$; $|X \Delta Y| = 3$.
[Se $X \cap Y = \varnothing$; Se Y è parte di X o viceversa; Mai]

Livello 2

Usando le operazioni insiemistiche risolvere i seguenti problemi

103. In un grattacielo di 45 piani vi sono due ascensori, uno che porta dal primo al 24° piano e un altro dal 18° piano alla cima. Determinare a) la parte di percorso comune ai due ascensori; b) la parte di percorso coperta solo dal primo ascensore; c) la parte di tragitto percorsa solo dal secondo ascensore.
[a) Dal 18° al 24°; b) Dal primo al 18°; c) Dal 25° al 45°]
104. In un grattacielo di 73 piani vi sono tre ascensori, uno che porta dal primo al 41° piano, un secondo dal 27° piano al 51° e il terzo dal 39° alla cima. Determinare a) la parte di percorso comune ai tre ascensori; b) la parte di percorso coperta solo da ciascuno dei tre ascensori; c) la parte di tragitto comune ai primi due ascensori ma non al terzo.
[a) Dal 39° al 41°; b) Dal 1° al 27°, nessuna, dal 42° al 73°; c) Dal 27° al 38°]

Livello 3

105. Se indichiamo con A, B e C rispettivamente gli insiemi dei piani raggiungibili da ciascuno dei tre ascensori del quesito precedente, caratterizzare i seguenti insiemi: a) $(A \Delta B) \setminus C$; b) $A \cap (B \setminus C)$; c) $A \cup (B \cap C)$; d) $A \Delta (B \cup C)$. [a) Al primo o (aut) al secondo e non al terzo; b) al primo e al secondo ma non al terzo; c) al primo o (vel) agli altri due insieme; d) O al primo o a uno degli altri due]

Sottoinsiemi di un insieme e insieme delle parti

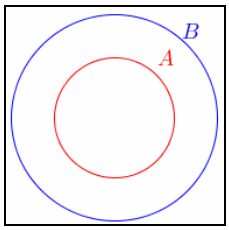
Abbiamo detto che i numeri interi sono formati dai numeri interi positivi (i naturali), dagli interi negativi e dallo zero. Ossia l'insieme $\mathbb{N}$ è una parte dell'insieme $\mathbb{Z}$. Allo stesso modo possiamo dire che l'insieme delle vocali è una parte dell'insieme delle lettere, o che l'insieme degli uomini è una parte dell'insieme dei mammiferi. Generalizziamo questo discorso.

Definizione 11

Diciamo che l'insieme A è un **sottoinsieme** dell'insieme B, o anche che A è contenuto in B, se per ogni elemento $a \in A$ si ha anche $a \in B$.

Notazione 6

Per indicare che A è un **sottoinsieme** di B, si scrive $A \subseteq B$ o anche $B \supseteq A$.



Graficamente avremo una rappresentazione come la precedente. Ci si chiede: l'insieme vuoto che non ha elementi può essere sottoinsieme di un altro insieme? A rigore non avrebbe senso dire che un insieme senza elementi possa far parte di un altro insieme. Consideriamo però il seguente ragionamento sui numeri interi positivi. Il numero 7 è una parte del numero 15? Sì perché il numero 15 si può pensare come 7 più qualcosa (7 + 8). Ma il numero 15 si può anche pensare come zero più qualcosa, perciò usando lo stesso ragionamento dobbiamo concludere che zero fa parte di ogni numero intero positivo (in effetti fa parte di ogni numero reale). Se allora ripetiamo il ragionamento sugli insiemi, e consideriamo l'insieme vuoto come il corrispondente dello zero, dobbiamo dire che l'insieme vuoto è sottoinsieme di qualunque altro insieme, infatti $A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$, per ogni insieme A. Con lo stesso ragionamento, poiché $A \cup A = A$, dobbiamo considerare anche lo stesso insieme come sottoinsieme di se stesso. In alcuni testi l'insieme vuoto e lo stesso insieme A vengono detti impropri, noi eviteremo l'uso di questo vocabolo. Si può osservare che, nel caso in cui A e B siano uguali, valgono contemporaneamente le due proprietà $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Esempio 14

Consideriamo l'insieme dei multipli di 8 e l'insieme dei multipli di 4. Il primo è un sottoinsieme del secondo; infatti ogni multiplo di 8 è anche multiplo di 4, non è invece vero il viceversa. Per esempio, il numero 12 è multiplo di 4 ma non di 8.

È facile capire che, se $A \subseteq B$, le operazioni insiemistiche fra A e B sono particolarmente semplici da effettuare. Vale infatti il seguente risultato.

Teorema 1

Se si ha $A \subseteq B$, allora valgono le seguenti uguaglianze.

$$A \cup B = A \; ; \; A \cap B = B \; ; \; B \setminus A = \varnothing \; ; \; A \,\Delta\, B = A \setminus B.$$

Dimostrazione

La dimostrazione segue immediatamente dalla rappresentazione grafica dei due insiemi.

Il problema

Alla fine di una serata nella quale la pizzeria "Da Gennaro", particolarmente piena di clienti, ha esaurito tutti gli ingredienti tranne il pomodoro, la mozzarella e il prosciutto, arriva un gruppo di 7 amici ciascuno dei quali ordina una pizza diversa. Riusciranno ad accontentarli?

Due pizze sono considerate diverse se hanno almeno un ingrediente che una ha e l'altra no, quindi dal punto

di vista matematico il problema può enunciarsi nel seguente modo: dato l'insieme {pomodoro, mozzarella, prosciutto}, esso ha almeno 7 sottoinsiemi? Infatti, gli ingredienti di una pizza, in questo caso, devono essere da un minimo di 0 (anche una pizza con la sola pasta, pur se "strana", può accettarsi) a un massimo di tre. In effetti le pizze possibili con 3 ingredienti sono le seguenti 8, scritte in forma insiemistica: { }, {pomodoro}, {mozzarella}, {prosciutto}, {pomodoro, mozzarella}, {pomodoro, prosciutto}, {mozzarella, prosciutto}, {pomodoro, mozzarella, prosciutto}.

Definizione 12

Diciamo **insieme delle parti** di un insieme A, l'insieme i cui elementi sono tutti i sottoinsiemi di A.

Notazione 7

L'**insieme delle parti** di A lo indichiamo con il simbolo $P(A)$ che si legge "*pi di a*".

Consideriamo qualche esempio.

Esempio 15

- Il cosiddetto *singoletto*, cioè un insieme con un solo elemento, per esempio $A = \{a\}$, ha evidentemente come sottoinsiemi solo quelli banali, { } e $\{a\}$.
- Nel caso dell'insieme con due elementi, per esempio $B = \{a, b\}$, invece abbiamo oltre i due sottoinsiemi banali anche quelli con un solo elemento: $\{a\}$ e $\{b\}$. Cioè 4 sottoinsiemi.
- Si vede facilmente che $P(\{1; 2; 3\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1; 2\}, \{1; 3\}, \{2; 3\}, \{1; 2; 3\}\}$, cioè ha 8 elementi.

Alla luce di quanto visto nell'esempio precedente, pensiamo che valga una semplice regola che lega il numero degli elementi di un insieme finito con il numero dei suoi sottoinsiemi. Infatti inseriamo i risultati trovati nella seguente tabella:

$\lvert A\rvert = 0$	$\lvert P(A)\rvert = 1 = 2^0$
$\lvert A\rvert = 1$	$\lvert P(A)\rvert = 2 = 2^1$
$\lvert A\rvert = 2$	$\lvert P(A)\rvert = 4 = 2^2$
$\lvert A\rvert = 3$	$\lvert P(A)\rvert = 8 = 2^3$

Ci sembra abbastanza evidente la relazione che dovrebbe esserci fra la cardinalità di un insieme e quella del suo insieme delle parti. Enunciamo allora il seguente risultato.

Teorema 2

Se un insieme finito ha n elementi, ha 2^n sottoinsiemi, cioè $\lvert A\rvert = n \Rightarrow \lvert P(A)\rvert = 2^n$.

Dimostrazione

Per capire come provare il teorema, chiediamoci come possiamo determinare i sottoinsiemi di un insieme di 4 elementi, conoscendo quelli di un sottoinsieme di 3. Nell'esempio abbiamo visto che

$$P(\{1; 2; 3\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1; 2\}, \{1; 3\}, \{2; 3\}, \{1; 2; 3\}\}.$$

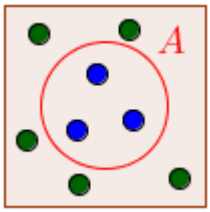
Se adesso consideriamo $B = \{1; 2; 3; 4\}$, ovviamente tutti i precedenti 8 insiemi sono sottoinsiemi di B, quali sono gli altri sottoinsiemi? Ovviamente quelli che contengono il nuovo elemento 4, e come si ottengono? Semplicemente aggiungendo il 4 in ciascuno dei precedenti sottoinsiemi, cioè sono i seguenti altri 8 sottoinsiemi, che completano tutti gli elementi di $P(B)$:

$$\{4\}, \{1; 4\}, \{2; 4\}, \{3; 4\}, \{1; 2; 4\}, \{1; 3; 4\}, \{2; 3; 4\}, \{1; 2; 3; 4\}.$$

Abbiamo cioè provato che $P(\{1; 2; 3; 4\})$ ha il doppio degli elementi di $P(\{1; 2; 3\})$, cioè 16. Ma il ragionamento visto si può ripetere per $P(\{1; 2; 3; 4; 5\})$ che avrà perciò 32 elementi e così via. Quindi in generale $\lvert A\rvert = n \Rightarrow \lvert P(A)\rvert = 2^n$.

Il teorema precedente non ha evidentemente senso per insiemi infiniti. Consideriamo ancora una questione. In figura il diagramma rappresenta le 8 macchinine di Roberto, 3 blu e 5 verdi. Piuttosto che rappresentare le macchinine di due colori come due insiemi diversi abbiamo considerato un quadrato a rappresentare l'insieme di tutte le macchinine, nell'insieme A abbiamo messo quelle blu e le verdi ovviamente rimangono fuori.

In questo modo le macchinine verdi servono a *completare* insieme con quelle blu, l'insieme di tutte le mac-



chinine.
Poniamo allora la seguente definizione.

Definizione 13

Dati due insiemi A e B, entrambi non vuoti, con $A \subset B$, diciamo **complementare** di A rispetto a B l'insieme $C = B \setminus A$.

Notazione 8

Il *complementare* di A rispetto a B si indica in uno dei seguenti modi: $\overline{A_B}$, $\mathbf{C}A_B$, $(A`)_B$.

Nel seguito, perché più semplice, useremo il simbolo $(A`)_B$ o semplicemente $A`$ se l'insieme ambiente è ben noto.

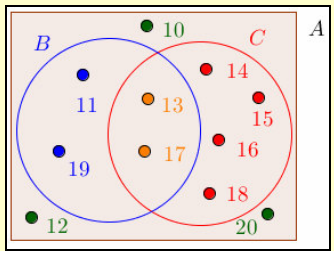
Esempio 16

Dati gli insiemi: $A = \{10; 11; 12; ...; 20\}$ e $B = \{x \in A : x \text{ è un numero primo}\} = \{11; 13; 17; 19\}$. È evidente che $B`_A = C = \{x \in A : x \text{ non è un numero primo}\} = \{10; 12; 14; 15; 16; 18; 20\}$. Così come è evidente che $|A| = |B`_A| + |B|$, e quest'ultimo è un risultato vero sempre, quali che siano A e B.

Ancora un esempio.

Esempio 17

Consideriamo la rappresentazione mostrata nella figura seguente, in cui A e B sono gli insiemi dell'esempio precedente e C è l'insieme dei numeri interi compresi tra 13 e 18.
Verifichiamo abbastanza facilmente che l'insieme dei numeri non primi compresi fra 10 e 12 o fra 19 e 20 (cioè il complementare di $B \cup C$) è formato da $\{10, 12, 20\}$. Notiamo però che avremmo ottenuto lo stesso risultato calcolando $B`_A = \{10; 12; 14; 15; 16; 18; 20\}$, $C`_A = \{10; 11; 12; 19; 20\}$ e determinando $B`_A \cap C`_A$.



Quanto visto nell'esempio precedente è un risultato generale, noto come **I legge di De Morgan**, che di seguito enunciamo.

Teorema 3 (I legge di De Morgan)

Qualunque siano gli insiemi A e B contenuti in uno stesso insieme ambiente C si ha: $(A \cup B)`_C = A`_C \cap B`_C$
Dimostrazione
Per una dimostrazione non grafica si procede nel modo seguente.
Se x è un elemento di $(A \cup B)`_C$, vuol dire che $x$ sta in $C \setminus (A \cup B)$, cioè $x$ appartiene a $C$ ma non ad $A$ (quindi a $A`_C$) e anche a $C \setminus B$ (cioè a $B`_C$). Pertanto $x \in A`_C \cap B`_C$.
In modo del tutto analogo si dimostra che, se x è un elemento dell'insieme $A`_C \cap B`_C$, è anche un elemento dell'insieme $(A \cup B)`_C$.

Vale anche la seguente analoga legge.

Teorema 4 (II legge di De Morgan)

Qualunque siano gli insiemi A e B contenuti in un insieme ambiente C, si ha: $(A \cap B)`_C = A`_C \cup B`_C$
Dimostrazione per esercizio.

I protagonisti


Leonhard Euler Nacque a Basilea il 15 Aprile 1707, figlio di un pastore protestante. Dall'intelligenza vivace e dagli interessi molteplici, è considerato uno dei più eminenti matematici di tutti i tempi. Per i suoi fondamentali risultati in diverse branche delle scienze è paragonato a Leonardo da Vinci ed è considerato l'ultimo grande uomo dagli interessi multiformi. Sin da giovane studiò matematica, teologia, medicina, astronomia, fisica, lingue orientali, sempre con brillanti risultati. Ebbe una famiglia numerosa, ben tredici figli. Fu scienziato di corte presso i più importanti regnanti della sua epoca, fra i quali Federico il Grande di Prussia e Caterina la Grande zarina di Russia. Vanta più di 500 pubblicazioni durante la sua vita ed è considerato uno degli scienziati più prolifici di tutti i tempi (la sua opera completa comprende più di settanta grossi volumi). Nonostante nel 1771 fosse diventato completamente cieco, grazie all'aiuto dei figli continuò a scrivere copiosamente fino alla morte avvenuta a San Pietroburgo il 18 settembre 1783. A lui si devono, oltre all'idea del cerchio per racchiudere gli insiemi, molti altri simboli usati nelle matematiche ancora oggi.


John Venn Nacque a Hull in Inghilterra il 4 Agosto 1834. Dopo la laurea conseguita nel 1857 prese gli ordini e divenne prete della Chiesa Evangelica. Per un anno fu anche curato a Mortlake. Nel 1862 ritornò all'Università di Cambridge, dove si era laureato, insegnandovi Logica e Calcolo delle Probabilità. Nel suo fondamentale testo Simbolic logic pubblicato nel 1881 suggerì di utilizzare i diagrammi che portano il suo nome, già usati in precedenza da Euler, nel trattamento dei sillogismi, piuttosto che per rappresentare gli insiemi. Morì a Cambridge il 4 aprile 1923.


Giuseppe Peano Nasce a Cuneo il 27 Agosto 1858 da una famiglia di agricoltori. Nei primi anni di vita vive in campagna e per andare a scuola compie ogni giorno a piedi un percorso di 10 Km fra andata e ritorno. Successivamente la famiglia si trasferisce a Cuneo. Si iscrive all'Università di Torino, dove si laurea nel 1880 e immediatamente inizia la sua carriera universitaria come assistente. Insieme ad altri brillanti algebristi e logici della fine dell'Ottocento (Richard Dedekind e Gottlob Frege fra gli altri), contribuisce a fondare il sistema dei numeri naturali. Famosi sono appunto i suoi assiomi che, partendo dai concetti primitivi di zero, numero e successore si propongono di essere i fondamenti dell'aritmetica. Suoi sono molti simboli dell'insiemistica: oltre al simbolo di appartenenza sono suoi anche quelli di unione e intersezione e quello di insieme contenuto in un altro. I suoi interessi travalicavano la matematica e vale la pena di segnalare il suo progetto di una nuova lingua universale, il cosiddetto *latino sine flexione*. Morì a Torino il 20 Aprile 1932.


George Cantor Nasce a Pietroburgo nel 1845 da genitori danesi emigrati in Russia. Nel 1856 si trasferisce con la famiglia in Germania. Ha diversi interessi, anche se tutti concentrati sul concetto di infinito, che egli comincia a studiare alle Università di Zurigo, Gottinga e Berlino dal punto di vista sia filosofico sia matematico e fisico. Si laurea nel 1867 a Berlino. In quegli anni conosce un altro grande matematico del periodo, Richard Dedekind, interessato anch'egli delle stesse questioni. I suoi studi lo portano a ottenere risultati davvero sorprendenti e paradossali. Più volte appare stupito egli stesso e sembra non credere a ciò che la ragione gli suggerisce. Continua però nelle sue ricerche fondando la teoria degli insiemi come una disciplina matematica a parte, la cosiddetta Mengenlehre o teoria degli aggregati. Nonostante i suoi contributi importantissimi rimane relegato all'insegnamento in una piccola e oscura università tedesca, quella di Halle. Ciò fu dovuto anche all'accanimento nei suoi confronti da parte di un autorevole matematico dell'epoca: Leopold Kronecker. Tali controversie, unite a problemi psicologici che lo avevano sempre tormentato, lo portarono alle soglie della pazzia. E fu proprio nel manicomio di Halle che morì nel 1918.

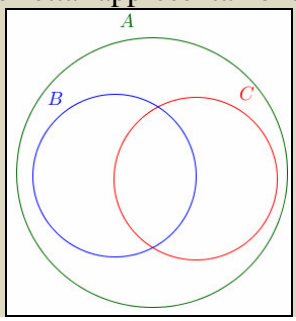

Augustus de Morgan Nacque a Madura il 27 giugno 1806 in India, dove il padre prestava servizio in qualità di tenente colonnello nell'allora colonia britannica. Perse la vista dall'occhio destro subito dopo la

nascita e all'età di sette mesi ritornò in Inghilterra. A causa del suo handicap fisico il giovane Augustus non eccelse a scuola, non praticò sport e fu spesso preso in giro dai compagni. Si iscrisse al famoso Trinity College dell'Università di Cambridge ma, poiché in questa università veniva richiesto un test teologico che egli rifiutò di affrontare, non concluse i suoi studi. Trasferitosi a Londra continuò gli studi e nel 1827 fu nominato professore al neonato University College. La sua carriera universitaria fu alquanto travagliata, infatti nel 1831 rassegnò le proprie dimissioni, fu riassunto nel 1836 e infine nel 1866 si allontanò definitivamente dall'Università. Sempre nel 1866 fu uno dei fondatori della London Mathematical Society. Si occupò prevalentemente di logica: le leggi che portano il suo nome sono fra i suoi più importanti contributi. Fu anche il primo a parlare esplicitamente di procedimento di induzione matematica. Morì a Londra il 18 marzo 1871.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Rappresentiamo graficamente gli insiemi dei multipli di 2, di 4 e di 6, che indichiamo rispettivamente con A, B e C. Un multiplo di 4 è anche multiplo di 2, ma non viceversa. Quindi $B \subseteq A$. Allo stesso modo un multiplo di 6 è multiplo di 2 ma non viceversa. Cioè $C \subseteq B$. invece vi sono multipli di 4 che sono multipli di 6 (12) e multipli di 4 che non sono multipli di 6 (8); analogamente vi sono multipli di 6 che non sono multipli di 4 (18). Perciò la seguente è la corretta rappresentazione grafica.



Livello 1

1. Costruire una rappresentazione grafica di Eulero–Venn degli insiemi numerici $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, mettendo in risalto le relazioni di contenuto.
2. Dati gli insiemi A dei triangoli, B dei triangoli con due lati uguali (triangoli isosceli), C dei triangoli rettangoli, rappresentarli graficamente evidenziando gli eventuali casi in cui uno è contenuto in un altro.
3. Quali dei seguenti possono considerarsi sottoinsiemi dell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali? Giustificare le risposte. A = numeri pari; B = le 10 cifre; C = numeri primi ; D = frazioni apparenti; E = numeri interi non negativi. [A, C]
4. Quali dei seguenti possono considerarsi sottoinsiemi dell'insieme {4; 5; 6; 7; 8; 9}? Giustificare le risposte. A = numeri naturali pari minori di 12 ; B = numeri naturali dispari minori di 10 ; C = numeri naturali il cui quadrato è maggiore di 20 e minore di 30 ; D = numeri naturali il cui quadrato è un numero negativo ; E = numeri naturali il cui cubo è minore di 100. [C]
5. Dato l'insieme A dei multipli di 3 e l'insieme B dei multipli di 9, uno dei due contiene l'altro, quale? [A]
6. Dato l'insieme A dei divisori di 18 e l'insieme B dei divisori di 36, uno dei due contiene l'altro, quale? [B]

Livello 2

7. Quali dei seguenti possono considerarsi sottoinsiemi dell'insieme dei numeri periodici semplici? $A=\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{7},\frac{1}{11},\frac{5}{17}\right\}, B=\left\{\frac{2}{3},\frac{3}{2},\frac{4}{5},\frac{5}{4}\right\}, C=\left\{\frac{11}{13},\frac{13}{15},\frac{15}{17},\frac{17}{19}\right\}, \quad D=\left\{\frac{20}{31},\frac{30}{33},\frac{40}{35},\frac{45}{37}\right\}, E=\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5}\right\}$
Giustificare le risposte. [A, D]
8. Determinare tutti i sottoinsiemi di cardinalità 2 dell'insieme $\{a, b, c\}$ [$\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$]
9. Determinare tutti i sottoinsiemi di cardinalità 2 dell'insieme {1; 2; 3; 4; 5}
[{1; 2}, {1; 3}, {1; 4}, {1; 5}, {2; 3}, {2; 4}, {2; 5}, {3; 4}, {3; 5}, {4; 5}]
10. Determinare tutti i sottoinsiemi di cardinalità 3 dell'insieme delle vocali dell'alfabeto italiano.
[$\{a, e, i\}$, $\{a, e, o\}$,$\{a, e, u\}$,$\{a, i, o\}$,$\{a, i, u\}$,$\{a, o, u\}$,$\{e, i, o\}$,$\{e, i, u\}$,$\{e, o, u\}$,$\{i, o, u\}$]
11. Avendo a disposizione l'insieme A = {25; 32; 41; 63; 72}, scrivere, in forma di insiemi, tutti i possibili ambi che si possono giocare prelevando i numeri da A.
[{25; 32}, {25; 41}, {25; 63}, {25; 72}, {32; 41}, {32; 63}, {32; 72}, {41; 63}, {41; 72}, {63; 72}]
12. Scrivere, in forma di insiemi, tutte le possibili coppie di punteggi formati da numeri diversi, che possono ottenersi lanciando due dadi. Quante sono?
[{1; 2}, {1; 3}, …, {1; 6}, {2; 3}, …, {2; 6}, …, {5; 6}; 15]

13. Determinare tutti i sottoinsiemi di cardinalità 5 e quelli di cardinalità 1 dell'insieme dei divisori di 12. [{1; 2; 3; 4; 6}, {1; 2; 3; 4; 12}, {1; 2; 3; 6; 12}, {1; 2; 4; 6; 12}, {1; 3; 4; 6; 12}, {2; 3; 4; 6; 12}, {1; 2; 3; 4; 6},{1}, {2}, {3}, {4}, {6}, {12}]
14. Determinare tutti i sottoinsiemi di cardinalità 2 dell'insieme dei numeri primi minori di 10. [{2; 3}, {2; 5}, {2; 7}, {3; 5}, {3; 7}, {5; 7}]
15. Scrivere, in forma di insiemi, tutte le possibili terne di punteggi la cui somma sia minore di 6, che possono ottenersi lanciando tre dadi con punteggi tutti diversi. [{}]

Lavoriamo insieme

Se $A \subseteq B \subseteq C$, quanto vale $(A \cap C) \Delta (B \cap C)$? Il Teorema 1 afferma che se $A \subseteq C$, allora $(A \cap C) = A$ e se $B \subseteq C$, allora $(B \cap C) = B$. Ciò significa che $(A \cap C) \Delta (B \cap C) = A \Delta B$. Lo stesso teorema dice anche che poiché $A \subseteq B$, la precedente scritta vale $B \setminus A$, che è perciò la semplificazione della nostra espressione.

Livello 3

Sapendo che $A \subseteq B \subseteq C$, semplificare le espressioni seguenti

16. $(A \cup B) \cap C$; $(A \setminus B) \cup C$; $(B \setminus A) \cap C$; $(B \Delta C) \cap (A \cap B)$; $(B \Delta C) \cup (A \Delta B)$ [B ; C ; $B \setminus A$; {} ; $C \setminus A$]

Sapendo che $A \subseteq B \subseteq C \subseteq D$, semplificare le espressioni seguenti

17. $(A \cap B) \cup (C \cap D)$; $(A \Delta B) \cap (C \Delta D)$; $(A \cap C) \setminus (B \cap D)$ [A ; {} ; {}]
18. $(D \cap C) \setminus (B \cap A)$; $(A \cup D) \Delta (B \setminus C)$ [$C \setminus B$; D]

Lavoriamo insieme

Possiamo dire che si ha: $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$? Siano $A = \{1; 3; 5\}$ e $B = \{1; 2; 3; 4\}$.
$P(A) = \{\{\}, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1; 3\}, \{1; 5\}, \{3; 5\}, \{1; 3; 5\}\}$ mentre $P(B) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1; 2\}, \{1; 3\}, \{1; 4\}, \{2; 3\}, \{2; 4\}, \{3; 4\}, \{1; 2; 3\}, \{1; 2; 4\}, \{1; 3; 4\}, \{2; 3; 4\}, \{1; 2; 3; 4\}\}$. Quindi $P(A) \cap P(B) = \{\{\}, \{1\}, \{3\}, \{1; 3\}\}$, e $P(A \cap B) = P(\{1; 3\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{3\}, \{1; 3\}\}$. Perciò l'uguaglianza è vera, almeno per l'esempio, lasciamo la risposta generale per esercizio.

Livello 1

19. Determinare l'insieme delle parti di $A = \{2; 7; 11\}$ [{}, {2}, {7}, {11}, {2; 7}, {2; 11}, {7; 11}, A]
20. Tenuto conto dell'esercizio precedente, determinare l'insieme delle parti di $A \cup \{0\}$
21. Determinare l'insieme delle parti dell'insieme dei divisori di 8 [{}, {1}, {2}, {4}, {8}, …,{1; 2; 4; 8}]
22. Determinare $P(A) \cup P(B)$, dove A è l'insieme dei numeri primi compresi tra 10 e 15 e B quello dei numeri primi compresi tra 15 e 20. [{{}, {11}, {11; 13}, {11; 13; 17}, {11; 13; 17; 19}, {11; 13; 19}, {11; 17}, {11; 17; 19}, {11; 19}, {13}, {13; 17}, {13; 17; 19}, {13; 19}, {17}, {17; 19}, {19}}]

Livello 2

23. Determinare $P(A) \cap P(B)$, con A insieme dei divisori di 10 e B insieme dei divisori di 15. Come si può caratterizzare tale intersezione? [Insieme delle parti dei divisori di 5]
24. Dati $A = \left\{\frac{m}{m+1}, m \in \mathbb{N}, 1 \le m \le 4\right\}, B = \left\{\frac{2^n - 1}{2^n}, n \in \mathbb{N}, 1 \le n \le 3\right\}$, quanti elementi ha $P(A) \Delta P(B)$? [16]
25. Può esistere un insieme il cui insieme delle parti è formato da 2050 elementi? Giustificare la risposta. [No]
26. Se $|P(A)| = 8192$, quanti elementi ha A? [13]
27. Se $|A| = 3$ e $|B| = 4$, quando $|P(A \cup B)| = 2^7$? Giustificare la risposta. [Se $A \cap B = \varnothing$]
28. Con un esempio provare che si ha $P(A) \cup P(B) \neq P(A \cup B)$
29. Con un esempio provare che si ha $P(A) \setminus P(B) \neq P(A \setminus B)$
30. Con un esempio provare che si ha $P(A) \Delta P(B) \neq P(A \Delta B)$

Livello 3

Negli esercizi seguenti gli insiemi sono sempre non vuoti

31. Provare che si ha $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$
32. Se si ha $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$, in che relazione sono A e B? [$A \subseteq B$ oppure $B \subseteq A$]

33. Se si ha $P(A) \setminus P(B) = P(A \setminus B)$, in che relazione sono A e B? [$A \subseteq B$]
34. Nel caso precedente quanto fa $P(A) \setminus P(B)$? [{}]
35. Se si ha $P(A) \Delta P(B) = P(A \Delta B)$, in che relazione sono A e B? [Non succede mai]

Lavoriamo insieme

L'insieme dei divisori di 12 è un sottoinsieme di quello dei divisori di 24, che perciò possiamo considerare come insieme ambiente. Vogliamo perciò determinare il complementare del primo insieme rispetto al secondo. Questo è ovviamente l'insieme dei divisori di 24 ma non di 12, cioè {24}.

Livello 1

36. Calcolare l'insieme complementare di $A = \{2; 5; 8; 9\}$ rispetto all'insieme $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. [{1; 3; 4; 5; 6}]
37. Calcolare l'insieme complementare dell'insieme delle vocali rispetto all'insieme delle lettere dell'alfabeto italiano. [Insieme delle consonanti]
38. Calcolare l'insieme complementare di $A = \{111; 222; 555\}$ rispetto all'insieme $B = \{111; 222; 333; 444; 555; 666; 777; 888; 999\}$. [{333; 444; 666; 777; 888; 999}]
39. Calcolare l'insieme complementare dei multipli di 3 minori di 24, rispetto all'insieme dei numeri interi positivi minori di 25. [{1; 2; 4; 5; 7; 8; …; 22}]
40. Calcolare l'insieme complementare dei numeri primi compresi fra 12 e 47, rispetto all'insieme dei numeri dispari minori di 50. [{1; 3; 5; 7; 9; 11; 15; 21; 25; 27; 33; 35; 39; 45; 49}]

Livello 2

41. Verificare le leggi di De Morgan per gli insiemi dei multipli di 4 minori di 34 e dei divisori di 48, rispetto all'insieme dei numeri interi positivi minori o uguali a 50.
42. Verificare le leggi di De Morgan per gli insiemi dei numeri dispari del tipo $8n - 1$, con n numero naturale inferiore a 5 e dei numeri dispari del tipo $4n - 1$, con n numero naturale inferiore a 10, rispetto all'insieme dei numeri dispari minori di 45.
43. Calcolare il complementare di $A = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \wedge 1 \le n \le 5 \right\}$ rispetto a $B = \left\{ \frac{n+3}{n+4} : n \in \mathbb{Z} \wedge -3 \le n \le 3 \right\}$.
44. Verificare le leggi di De Morgan per gli insiemi dei numeri primi minori di 100, la cui cifra delle unità è 7 e i numeri dispari minori di 100 la cui cifra delle decine è minore di quella delle unità, rispetto all'insieme dei numeri dispari minori di 100.

Livello 3

45. Dimostrare la II legge di De Morgan.
46. Se $X \subset Y \subset Z$, determinare $(X \cup Y)`_Z$ [$Z \setminus Y$]
47. Se $X \subset Y \subset Z$, determinare $(X \cap Y)`_Z$ [$Z \setminus X$]
48. Provare che se $X \subset Y \subset Z$, $(X \Delta Y)`_Z = (Y \setminus X)`_Z$

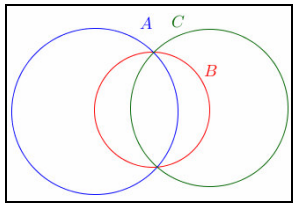
Lavoriamo insieme

Mostriamo che non è vera la proprietà distributiva della differenza rispetto all'intersezione fra insiemi, ossia che $A \setminus (B \cap C) \neq (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Siano $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 3; 4\}$ e $C = \{3; 4; 5\}$, si ha:

$$A \setminus (B \cap C) = \{1; 2; 3\} \setminus \{3; 4\} = \{1; 2\} \text{ mentre } (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = \{1\} \cap \{1; 2\} = \{1\}.$$

Livello 2

49. Dato il seguente diagramma di Eulero–Venn verificare mediante esso la validità della proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione fra insiemi.



50. Costruire il diagramma di Eulero–Venn degli insiemi $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2\}$, $C = \{2; 3; 4\}$ e mediante esso verificare la falsità della proprietà distributiva della differenza rispetto alla differenza simmetrica fra insiemi.
51. Costruire il diagramma di Eulero–Venn degli insiemi $A = \{1; 2\}$, $B = \{2; 3\}$, $C = \{4\}$ e mediante esso verificare la falsità della proprietà distributiva della differenza simmetrica rispetto all'intersezione fra insiemi.
52. Costruire il diagramma di Eulero–Venn degli insiemi $A = \{1; 2\}$, $B = \{2; 3; 4\}$, $C = \{4; 5\}$ e mediante esso verificare la falsità della proprietà distributiva della differenza rispetto all'unione fra insiemi.

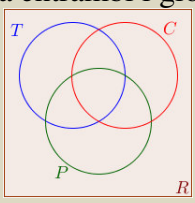
Livello 3

53. Dare un controesempio in forma elenco o in forma grafica, della non validità della proprietà distributiva dell'unione rispetto alla differenza fra insiemi.
54. Dare un controesempio in forma elenco o in forma grafica, della non validità della proprietà distributiva dell'unione rispetto alla differenza simmetrica fra insiemi.
55. Dare un controesempio in forma elenco o in forma grafica, della non validità della proprietà distributiva della differenza simmetrica rispetto alla differenza fra insiemi.
56. Dare un controesempio in forma elenco o in forma grafica, della non validità della proprietà distributiva della differenza simmetrica rispetto all'unione fra insiemi.
57. Provare che se $A \cap (B \cup C) = \varnothing$, allora si ha: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Lavoriamo insieme

Alcuni ragazzi hanno formato un club sportivo. Sapendo che 20 di essi giocano a calcio, 13 a tennis, 3 solo a pallavolo, solo 5 fanno tutti gli sport, 4 fanno solo gli arbitri, 10 fanno entrambi i giochi di squadra, solo 8 sono tennisti e calciatori e uno solo dei ragazzi sa giocare soltanto a tennis, determinare (costruendo un diagramma di Eulero Venn e indicando l'opportuna operazione insiemistica):

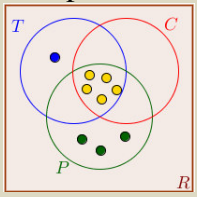
1. quanti sono i ragazzi;
2. quanti giocano solo a calcio;
3. quanti giocano a tennis e pallavolo;
4. quanti a calcio o pallavolo ma non a entrambi i giochi.

Il diagramma sarà del seguente tipo: 

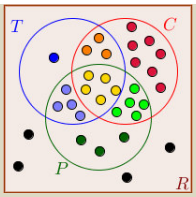
In esso vi sono 8 zone (detto R l'insieme ambiente di tutti i ragazzi, T l'insieme di quelli che giocano a tennis, P l'insieme di quelli che giocano a pallavolo e C l'insieme di quelli che giocano a calcio), ossia gli insiemi caratterizzati in uno dei seguenti modi:

- quelli che non fanno alcuno dei tre sport: $R \setminus (T \cup P \cup C)$;
- quelli che fanno uno solo dei tre sport: $T \setminus (P \cup C)$, $C \setminus (T \cup P)$, $P \setminus (T \cup C)$;
- quelli che fanno tutti e tre gli sport: $I = T \cap C \cap P$;
- quelli che fanno esattamente due sport: $(T \cap C) \setminus I$, $(T \cap P) \setminus I$, $(C \cap P) \setminus I$.

Le informazioni a nostra disposizione possono essere così formalizzate:
$|C| = 20$, $|T| = 12$, $|P \setminus (T \cup C)| = 3$, $|I| = 5$, $|R \setminus (T \cup P \cup C)| = 4$, $|C \cap P| = 10$, $|T \cap C| = 8$, $|T \setminus (P \cup C)| = 1$.
Inserendo i valori nel grafico precedente, laddove è possibile farlo, otteniamo l'ulteriore grafico seguente:



Se ora consideriamo quest'ultimo grafico unitamente alle altre informazioni scriviamo che $|(C \cap P) \setminus I| = 5$, $|(T \cap P) \setminus I| = 3$, $|C \setminus (T \cup P)| = 7$, $|(T \cap P) \setminus I| = 4$. Otteniamo così il grafico finale, di seguito riportato.



Da esso si evincono le risposte: 1) $|R| = 32$; 2) $|C\setminus(T \cup P)| = 7$; 3) $|T \cap P)| = 9$; 4) $|C\setminus(T \cup P)| + |P\setminus(T \cup C)| = 10$.

Risolvere i seguenti problemi utilizzando le nozioni sugli insiemi

Livello 2

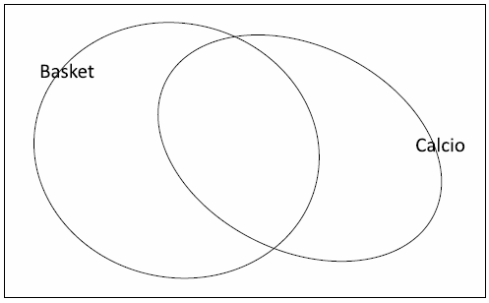
58. Guendalina ha quattro anelli diversi. In quanti modi diversi potrà mettere gli anelli, se dovrà averne sempre almeno uno? [15]
59. Mirko vuole giocare al lotto i numeri della sua data di nascita: 23/11/87. Quante diverse puntate potrà fare giocando uno almeno dei tre numeri? [7]
60. Un giornalaio vuole creare delle buste di giornali vecchi. Ha a disposizione giornali dei seguenti tipi: Topolino, Manga, fotoromanzi, giornali di videogames e Tex. Se in ciascuna busta inserisce almeno due dei predetti giornali, quante diverse buste potrà confezionare? Una busta è considerata diversa dall'altra se contiene giornali di tipo diverso. [24]
61. Quanti dei sottoinsiemi dell'insieme dei divisori di 12 contengono solo numeri dispari? [3]
62. Determinare tutti i sottoinsiemi dell'insieme {1; 2; ...; 9; 10} che contengono solo numeri primi. Quanti sono? [15]
63. Dato l'insieme dei divisori di 24, determinare tutti i suoi sottoinsiemi formati solo dai multipli di 3. Quanti sono? [15]

Livello 3

64. Dei ragazzi hanno formato un club musicale. Si sa che 15 suonano la tromba, 18 la batteria, 4 solo il sassofono, solo 2 sanno suonare tutti gli strumenti, 6 fanno solo i tecnici, 5 suonano entrambi gli strumenti a fiato, 7 dei sassofonisti suonano anche la batteria ed 8 dei ragazzi sanno suonare soltanto la batteria. Si vuol sapere: quanti sono i ragazzi; quanti suonano solo la tromba; quanti suonano il sassofono; quanti suonano batteria o sassofono ma non entrambi. [38; 7; 14; 18]
65. Dei ragazzi hanno formato un club di appassionati di fumetti, sapendo che 12 leggono Batman, 5 Batman e Topolino, 2 solo Snoopy, 5 altri fumetti, 5 solo Topolino, 3 tutti e tre i fumetti, 4 solo Topolino e Snoopy, 1 solo Snoopy e Batman, determinare: quanti sono i ragazzi; quanti leggono Topolino ma non Batman; quanti leggono Snoopy o Batman ma non entrambi. [25; 6; 11]
66. Dei ragazzi hanno formato un club sportivo. Si sa che 14 giocano a basket, 11 a pallamano, 4 solo pattinaggio, solo 1 pratica tutti i tre sport, 2 praticano esclusivamente altri sport, 5 fanno entrambi i giochi di squadra, 7 dei pattinatori giocano anche a basket e quelli che giocano soltanto a pallamano sono in 5. Determinare: quanti giocano solo a basket; quanti pattinaggio e pallamano; quanti basket o pallamano ma non entrambi. [3; 2; 15]
67. 28 ragazzi hanno formato un club artistico, sapendo che 11 ascoltano musica, 2 leggono e ascoltano musica soltanto, 7 leggono soltanto, 5 ascoltano solo musica, leggono e dipingono in 5, 1 solo è portato per tutte e tre le arti, e non vi sono ragazzi che prediligono altre arti. Determinare: quanti sono portati solo per una delle arti citate; quanti leggono o ascoltano musica; quanti dipingono o leggono ma non fanno entrambe le cose. [18; 18; 18]
68. 31 ragazzi hanno formato un club musicale. Si sa che 15 ascoltano musica rock, 9 musica rap, 5 solo musica classica, 7 solo rock, 10 di quelli che ascoltano rock non ascoltano classica, 2 ascoltano solo classica e rap, 3 solo rap. Si vuol sapere: quanti ascoltano musica diversa da quelle citate; quanti ascoltano rock o classica ma non entrambe; quanti esattamente due dei 3 tipi di musica citati. [6; 17; 9]

Per la prova Invalsi

1. (Invalsi 2014) Su 100 alunni di una scuola, 82 alunni si interessano di calcio, 26 si interessano di basket, 10 non si interessano né di calcio, né di basket. Scrivi nella opportuna zona del seguente diagramma il numero di studenti che si interessano sia di calcio sia di basket. [18]



2. 15 alunni di una classe amano ballare, 23 amano cantare. Quale fra le seguenti affermazioni è certamente vera? A) La classe ha almeno 23 alunni B) La classe ha 38 alunni C) Esattamente 8 alunni amano sia ballare che cantare D) Non ci sono alunni a cui non piace né cantare, né ballare [A]
3. Una scuola ha un totale di 25 classi, ciascuna delle quali ha un numero di alunni compresi tra 12 e 28 e ci sono almeno una classe che ha 12 alunni e una che ne ha 28. Il numero minimo di alunni che ospita la scuola è? A) 300 B) 316 C) 500 D) Non abbiamo dati a sufficienza per rispondere [B]
4. Detto X l'insieme degli italiani maschi e Y l'insieme degli italiani minorenni, possiamo dire che l'insieme $X \setminus Y$ rappresenta gli italiani A) maschi o minorenni B) femmine minorenni C) maschi che hanno più di 20 anni D) maschi maggiorenni [D]
5. Quanti sottoinsiemi formati solo da numeri pari ha l'insieme {1; 2; 3; 4}? A) 3 B) 4 C) 8 D) 16 [A]

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

1. È possibile che l'intersezione fra l'insieme dei divisori di m e l'insieme dei divisori di n sia l'insieme vuoto? Giustificare la risposta. [No, al minimo è {1}]
2. Con riferimento al precedente quesito, quando accade il caso minimo? [Se $MCD(m, n) = 1$]
3. È possibile che l'intersezione fra l'insieme dei multipli di m e l'insieme dei multipli di n sia un insieme finito? Giustificare la risposta. [No]

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
MT = Mathematics Teacher, rivista della NCTM
B = Giochi organizzati dall'Università Bocconi
OMI = Olimpiadi della Matematica italiane

Lavoriamo insieme

Ecco un quesito assegnato ai giochi della Bocconi nel 1997.
Tom colleziona farfalle. Tiene i suoi esemplari in undici scatole. Ciascuna delle 11 *scatole contiene almeno una farfalla*. 8 *di queste* 11 *scatole ne contengono ciascuna almeno* 2, 6 *ne contengono ciascuna almeno* 4 *e due ne contengono esattamente* 5 *ciascuna. Di quante farfalle, come minimo, si compone la collezione di Tom*?
Tom ha certamente più di $2 \cdot 5 = 10$ farfalle. Per avere il minimo dobbiamo supporre che delle 6 scatole che ne contengono almeno 4, due sono quelle che ne contengono 5 e le altre quattro ne contengono il minimo, cioè 4. E siamo così a $10 + 4 \cdot 4 = 26$ farfalle. Sempre per minimizzare supponiamo che le 8 scatole che ne contengono almeno due, sono formate dalle sei già considerate e da altre due che ne contengono esattamente 2. Siamo così a $26 + 2 \cdot 2 = 30$ farfalle. Infine le rimanenti tre scatole contengono una farfalla, per un totale minimo di $30 + 3 = 33$ farfalle.

1. (B2000) Ennio non ha voluto darmi il codice postale della sua città. Ecco come ha risposto alle mie domande in proposito: come ogni codice postale italiano, esso è composto da cinque cifre; la somma della prima cifra con la seconda è 17; la somma della seconda con la terza è 15, come anche la somma della terza con la quarta; la somma delle ultime due cifre è 9 ; la somma dell'ultima con la prima è 8. Qual è il numero di codice postale della città di Ennio? [89690]
2. (OMI1991) Si dica quanti sono i sottoinsiemi di {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7} tali che la somma dei propri elementi sia un numero dispari. [60]
3. (AHSME1959) Un club con x membri è diviso in 4 comitati mediante le seguenti regole: 1) Ogni membro appartiene esattamente a due comitati; 2) Ogni coppia di comitati ha esattamente un membro in comune. Tenuto conto di ciò possiamo dire che x A) è indeterminato B) è un numero compreso tra 8 e 16 C) può essere uno tra due numeri compresi tra 8 e 16 D) è un numero compreso tra 4 e 8 E) può essere uno tra due numeri compresi tra 4 e 8 [D]
4. (AHSME1965) In una classe 28 studenti seguono almeno una materia; quelli che seguono solo Matematica e Inglese sono tanti quelli che seguono solo Matematica. Non ci sono studenti che seguono solo Inglese o solo Storia. 6 seguono Matematica e Storia ma non Inglese. Quelli che seguono solo Inglese e Storia sono 5 volte tanti quelli che seguono le tre materie. Se questi ultimi sono in numero pari, quelli che seguono Inglese e Matematica sono A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9 [A]
5. (MT1993) A 100 studenti fu chiesto se gradivano rock and roll o musica classica. Risultò che a 5 non piaceva nessuna delle due, a 85 rock and roll e a 23 classica. A quanti studenti piacevano entrambe le musiche? [13]
6. (MT1995) Abbiamo intervistato 48 studenti sul riciclo della carta (C), bottiglie (B) e lattine (L). nella seguente tabella abbiamo riportato il numero di studenti che non riciclano uno o più dei precedenti materiali. Quanti studenti riciclano tutti i materiali? [32]

C	B	L	CB	CL	BL	CBL
13	6	9	3	7	4	2

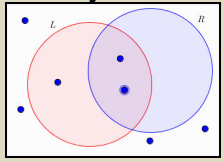
7. (MT1997) 100 studenti vanno a sentire uno almeno dei concerti di Pep Band, Country Sizzle e Blue Mood. Sappiamo che 48 vanno a sentire i Pep Band, 36 i Country Sizzle e 60 i Blue Mood; 12 i primi due concerti, 20 i secondi due e 16 gli altri due. Quanti sono andati a tutti i concerti? [4]
8. (AHSME1988) X, Y e Z sono insiemi a due a due disgiunti di persone. Nella tabella seguente vi è l'età media di alcuni insiemi formati con quelli dati. Determinare l'età media di $X \cup Y \cup Z$. [34]

Insieme	X	Y	Z	$X \cup Y$	$X \cup Z$	$Y \cup Z$
Età media	37	23	41	29	39,5	33

Questions in English

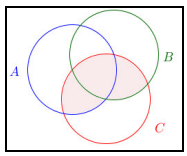
Working together

This question was printed in the magazine Mathematics Teacher, issue of January 1992.
In a certain cave two bats could see out of the right eye, three could see out of the left eye, exactly four could not see out of the left eye, and exactly five could not see out of the right eye. What is the least number of bats in the cave?
In the following Eulero–Venn diagram we show the minimum possibility. In fact, to mantain the least number of bats, we can suppose that who could not see of the left eye, also could not see of the right one, the maximum number is 4. Hence the fifth bat that could not see ouf the right eye, could see of the left one. The remaining two bats which could see of the left eye could see also of the right one. And the total number of bats is seven.



9. (MT1994) Four students belong to both the baseball and the basketball team at Euclid High School. These students represent 10% of the baseball team and 25% of the basketball team. How many students belong to only one team? [48]

10. (AHSME1999) A sealed envelope[1] contains a card with a single digit on it. Three of the following statements are true, and the other is false. I. The digit is 1; II. The digit is not 2; III. The digit is 3; IV.The digit is not 4. Which one of the following must necessarily be correct? [C]
A) I is true B) I is false C) II is true D) III is true E) IV is false
11. (AHSME1971) Each of a group of 5o girls is blonde or brunette and is blue or brown–eyed[2]. If 14 are blu eyed blondes, 31 are brunettes, and 18 are brown eyed, then the number of brown–eyed brunettes is A) 5 B) 7 C) 9 D) 11 E) 13 [E]
12. (AHSME1972) How many sets X verify the relation $\{1; 2\} \subseteq X \subseteq \{1; 2; 3; 4; 5\}$? A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) None of these [D]
13. (MT1994) Of ten boxes, five contain pencils, four contain pens, and two contain both pens and pencils. How many boxes contain neither pens nor pencils? [3]
14. (MT1994) Describe the shaded region in terms of union and intersections of regions A, B and C.
[$(A \cup B) \cap C$]

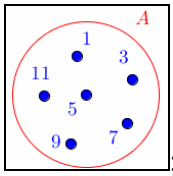


[1] busta sigillata
[2] occhi blu o marroni

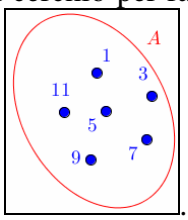
Attività di recupero

Rappresentazioni degli insiemi

Fase 1: Osserva

- Rappresentiamo nei quattro modi possibili uno stesso insieme.
  a) Per elenco: $A = \{1; 3; 5; 7; 9; 11\}$;
  b) Con un diagramma di Eulero – Venn 

  ;
  c) Con una proprietà caratteristica a parole: A è l'insieme dei primi 6 numeri naturali dispari;
  d) Con una proprietà caratteristica simbolica: $A = \{2h + 1: h \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq h \leq 5\}$.

  Fra le quattro proprietà la più *difficile* è l'ultima, perché in essa sono presenti dei simboli. È importante chiarire alcuni fatti.
  - Possiamo indicare lo stesso insieme precedente anche con un'altra lettera, per esempio B oppure Z senza che ciò lo faccia risultare un altro insieme.
  - Possiamo cambiare l'ordine degli elementi di A senza che ciò comporti un cambiamento nell'insieme, possiamo per esempio scrivere $A = \{1; 7; 11; 3; 5; 9\}$, oppure $A = \{11; 9; 1; 7; 5; 3\}$ e così via.
  - Possiamo usare una curva diversa da un cerchio per racchiudere gli elementi nella Notazione grafica, per esempio la seguente: 

  .
  - Possiamo usare diverse proprietà simboliche, per esempio possiamo scrivere

    $$A = \{2m - 1: m \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq m \leq 6\}, \text{ oppure } A = \{2k + 7: k \in \mathbb{Z} \wedge -3 \leq k \leq 2\}$$

    ricordiamo che il simbolo $\wedge$ indica la congiunzione **e**, quindi vuol dire che sono verificate più fatti contemporaneamente.
- Quanti elementi ha l'insieme dei divisori di 18, ossia qual è la sua cardinalità? I divisori di 18 sono: $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, quindi $|A| = 6$.

Fase 2: Completa …

- Sia l'insieme $A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \frac{11}{12}\right\}$, facilmente riconosciamo che i numeratori sono i successivi numeri dispari da 1 a 11 compresi e i denominatori i successivi numeri pari da 2 a 12 compresi. Quindi una rappresentazione caratteristica a parole è la seguente:
  A è l'insieme delle frazioni il cui numeratore è un numero dispari compreso tra 1 e 11 e il denominatore è …….
  Per la rappresentazione simbolica possiamo scrivere: $A = \left\{\frac{2h-1}{.....}: h \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq h..... \right\}$.
  Lascio a te il compito di rappresentare A mediante i diagrammi di Eulero – Venn.
- Quanti elementi ha l'insieme dei multipli di 6 compresi tra 31 e 187? Il primo multiplo di 6 che dobbiamo considerare è …, l'ultimo è … I due multipli possono scriversi 6 · … e 6 · … Quindi il numero totale degli elementi dell'insieme è dato dalla differenza fra … e …, aumentata di 1, cioè …….

Fase 3: Prova!

Rappresenta con una proprietà caratteristica, a parole o simbolica, i seguenti insiemi espressi per elencazione

1. $A = \{11; 12; 13; 14; 15\}$; $B = \{21; 31; 51; 71; 91\}$; $C = \{13; 19; 25; 31; 37; 43; 49\}$
2. $D = \{-7; -5; -3; -1; 1\}$; $E = \{10; 100; 1000; 10000; 100000\}$;
3. $F = \{1; 12; 123; 1234; 12345; 123456; 1234567\}$; $G = \{111; 1111; 11111; 111111\}$
4. $H = \{1; 22; 333; 4444; 55555; 666666; 7777777; 88888888; 999999999\}$
5. $I = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}$; $J = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}\right\}$

Determinare la cardinalità dei seguenti insiemi

6. Multipli di 4 compresi tra 25 e 74 ; Numeri pari compresi tra 13 e 41 [12; 14]
7. Insieme delle consonanti dell'alfabeto italiano [16]
8. Insieme dei punteggi ottenibili lanciando un dado [6]
9. Insieme delle nazioni europee che hanno aderito all'euro il primo gennaio 2002 [12]
10. Insieme delle montagne alpine italiane alte più di 4000 m [37]
11. Insieme dei fiumi europei più lunghi di 1000 km [21]
12. Insieme dei pianeti del sistema solare [8]
13. Insieme dei canti della Divina Commedia [100]
14. Insieme dei diversi tagli di banconote euro [7]
15. Insieme dei giocatori titolari di una squadra di calcio [11]
16. Insieme dei giocatori titolari di una squadra di pallavolo [6]
17. Insieme dei diversi esiti ottenibili lanciando due dadi regolari a sei facce [11]
18. Insieme dei numeri primi con 2 cifre [25]
19. Insieme degli elementi presenti nella Tavola Periodica [118]
20. Insieme dei satelliti del pianeta Giove scoperti da Galileo Galilei [4]

Proprietà caratteristica degli insiemi

Fase 1: Osserva

Ricordiamo che nelle matematiche un simbolo è un modo per indicare un qualcosa di generico. Questo modo di usare simboli è spesso usato anche nel linguaggio comune, per esempio in generale si parla di studenti, di candidati, di cittadini e così via, quando ci si deve riferire a un qualsiasi studente, candidato o cittadino. Se invece ci si deve riferire a un particolare studente, candidato o cittadino si useranno i loro nomi e cognomi che li identificano.

Non solo, ma anche nel linguaggio quotidiano si usano i sinonimi, ossia si usano vocaboli diversi che hanno lo stesso significato, esattamente come noi usiamo indifferentemente la lettera A o B o Z per indicare uno stesso insieme. Così parliamo indifferentemente di studente, alunno, allievo, …

Adesso ci chiediamo perché le precedenti proprietà caratteristiche simboliche rappresentano il nostro insieme? Perché se, nelle espressioni, sostituiamo alle lettere i valori che esse possono assumere otteniamo **tutti e soli** gli elementi di A. Proviamo

Se troviamo il seguente insieme: $A = \left\{\frac{3n+1}{4n-5} : n \in \mathbb{N} \wedge 3 \le n < 6\right\}$, cosa dobbiamo fare per ottenere l'elenco degli elementi di A? Semplicemente sostituire al posto della lettera simbolica n, nell'espressione che *genera* A, cioè in $\frac{3n+1}{4n-5}$, tutti i numeri che sono naturali e contemporaneamente verificano la scritta $3 \le n < 6$, cioè i numeri 3, 4, 5. Proviamo. Ricordiamo che la scritta $3n$ vuol dire 3 *moltiplicato* n. Per $n = 3$ si ha: $\frac{3n+1}{4n-5} = \frac{3\cdot 3+1}{4\cdot 3-5} = \frac{10}{7}$; per $n = 4$ si ha: $\frac{3n+1}{4n-5} = \frac{3\cdot 4+1}{4\cdot 4-5} = \frac{13}{11}$; per $n = 5$ si ha: $\frac{3n+1}{4n-5} = \frac{3\cdot 5+1}{4\cdot 5-5} = \frac{16}{15}$. Possiamo perciò concludere che $A = \left\{\frac{10}{7}, \frac{13}{11}, \frac{16}{15}\right\}$.

Fase 2: Completa …

Consideriamo le tre rappresentazioni mediante proprietà caratteristica simbolica dell'insieme A visto nell'attività 1, con lo scopo di scrivere lo stesso insieme nel formato elenco o mediante diagramma di Eulero – Venn.

- $A = \{2h + 1: h \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq h \leq 5\}$. Dobbiamo sostituire alla lettera h tutti i numeri interi da 0 a 5 compresi, quindi dobbiamo svolgere le seguenti espressioni:

$$2 \cdot 0 + 1 = 1,\ 2 \cdot 1 + 1 = 3,\ 2 \cdot 2 + 1 = 5,\ 2 \cdot 3 + 1 = 7,\ 2 \cdot 4 + 1 = 9,\ 2 \cdot 5 + 1 = 11.$$

Come si vede abbiamo ottenuto effettivamente tutti e soli gli elementi di A.
Continua tu le altre verifiche.

- $A = \{2m - 1: m \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq m \leq 6\}$……
- $A = \{2k + 7: k \in \mathbb{Z} \wedge -3 \leq k \leq 2\}$……

Fase 3: Prova!

Rappresentare per elenco gli insiemi di cui viene fornita una rappresentazione per proprietà caratteristica simbolica

1. $A = \{4h + 1 : h \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq h \leq 5\}$; $B = \{7h - 3 : h \in \mathbb{Z} \wedge -2 \leq h \leq 1\}$
   [{1; 5; 9; 13; 17; 21}; {–17; –10; –3; 4}]
2. $C = \{h^2 + 1: h \in \mathbb{N} \wedge 6 \leq h < 10\}$; $D = \{h^2 + h - 2 : h \in \mathbb{N} \wedge 3 < h \leq 7\}$
   [{37; 50; 65; 82; 101} ; {18; 28; 40; 54}]
3. $E = \left\{\frac{h+1}{h-2}:\ h \in \mathbb{N} \wedge 2 < h < 8\right\}$; $F = \left\{\frac{h-3}{h+3}:\ h \in \mathbb{Z} \wedge -3 < h \leq 2\right\}$ $\left[\left\{\frac{8}{5}, \frac{7}{4}, 2, \frac{5}{2}, 4\right\}; \left\{-5, -2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}\right\}\right]$
4. $G = \left\{\frac{2h+1}{h-1} : h \in \mathbb{Z} \wedge -2 < h < 4\right\}$; $H = \left\{\frac{h^2+h+1}{h^2+3} : h \in \mathbb{N} \wedge 1 < h < 5\right\}$ $\left[\left\{-1, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}, 5\right\}; \left\{1, \frac{13}{12}, \frac{21}{19}\right\}\right]$
5. $I = \left\{\frac{4h+1}{h^2-2} : h \in \mathbb{Z} \wedge -7 \leq h < -2\right\}$; $J = \left\{\frac{h^2-h+2}{h^2+3h-4} : h \in \mathbb{N} \wedge 4 < h < 7\right\}$
   $\left[\left\{-\frac{11}{7}, -\frac{15}{14}, -\frac{19}{23}, -\frac{23}{24}, -\frac{27}{47}\right\}; \left\{\frac{11}{18}, \frac{16}{25}\right\}\right]$

Operazioni insiemistiche

Fase 1: Osserva

Consideriamo gli insiemi $A = \{1; 4; 5; 7; 11\}$ e $B = \{1; 3; 5; 6; 8; 10; 12; 15\}$. Vogliamo applicare ai due insiemi i quattro operatori insiemistici elementari.

- $A \cup B$ è l'insieme degli elementi di A **o** di B presi una sola volta quelli comuni; sarà perciò il seguente insieme: $A \cup B = \{1; 4; 5; 7; 11;1; 3; 5; 6; 8; 10; 12; 15\}$ dal quale elimineremo una copia degli elementi ripetuti; ottenendo così: $A \cup B = \{1; 4; 5; 7; 11; 3; 6; 8; 10; 12; 15\}$. Non è obbligatorio. Ma è più conveniente; specie per riconoscere una eventuale proprietà caratteristica semplice scrivere gli elementi in ordine; così avremo: $A \cup B = \{1; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 10; 11; 12; 15\}$.
- $A \cap B$ è l'insieme degli elementi di A **e** di B; sarà perciò l'insieme formato scrivendo solo quegli elementi ripetuti che in precedenza abbiamo eliminato; cioè: $A \cap B = \{1; 5\}$.
- $A \setminus B$ è l'insieme degli elementi di A che non appartengono a B, perciò visto che in precedenza abbiamo visto che i soli elementi comuni sono 1 e 5, dobbiamo eliminare questi elementi da quelli di A, ottenendo:

$A \setminus B = \{4, 7, 11\}$. Dato che naturalmente non vale la proprietà commutativa possiamo calcolare anche l'insieme $B \setminus A$, che otterremo togliendo da B i predetti elementi 1 e 5, cioè $B \setminus A = \{3; 6; 8; 10; 12; 15\}$.

- $A \Delta B$ si trova togliendo da $A \cup B$ l'insieme $A \cap B$; pertanto dall'insieme $\{1; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 10; 11; 12; 15\}$ eliminiamo i soliti 1 e 5; ottenendo: $A \Delta B = \{3; 4; 6; 7; 8; 10; 11; 12; 15\}$.
- Dati gli insiemi $A = \{1; 4; 9; 16\}$; $B = \{1; 2; 3; 4\}$; $C = \{9; 10; 11\}$; determinare $(A \cap B) \cup C$. Cominciamo con il determinare $A \cap B$. Si ha: $A \cap B = \{1; 4\}$. Perciò $(A \cap B) \cup C = \{1; 4\} \cup \{9; 10; 11\}$; $= \{1; 4; 9; 10; 11\}$.
- Con gli stessi insiemi precedenti vogliamo determinare $A \setminus (B \Delta C)$. procedendo sempre per passi; abbiamo: $A \setminus (B \Delta C) = \{1; 4; 9; 16\} \setminus (\{1; 2; 3; 4\} \Delta \{9; 10; 11\}) = \{1; 4; 9; 16\} \setminus \{1; 2; 3; 4; 9; 10; 11\} = \{9; 16\}$.
- Infine vogliamo determinare $(C \setminus A) \Delta (B \cap C)$. Si ha: $(\{9; 10; 11\} \setminus \{1; 4; 9; 16\}) \Delta (\{1; 2; 3; 4\} \cap \{9; 10; 11\}) = \{10; 11\} \Delta \{\ \} = \{10; 11\}$.

Fase 2: Completa …

Consideriamo gli insiemi $A = \{12; 15; 18; 21\}$ e $B = \{13; 15; 17; 19; 21\}$. Calcoliamo le quattro operazioni insiemistiche applicate a essi. $A \cup B = \{12; 13; 15; \ldots\ldots\ldots\ldots\}$; $A \cap B = \{15; \ldots\ldots\ldots\}$; $A \setminus B = \{12; 18; 21\}$; mentre $B \setminus A = \{\ldots\ldots\ldots\}$; $A \Delta B = \{12; \ldots\ldots\ldots\ldots\}$.

Consideriamo gli insiemi $A = A = \left\{\frac{5}{2}, \frac{7}{4}, \frac{3}{2}, \frac{11}{8}\right\}, B = \left\{\frac{5}{2}, 2, \frac{7}{4}, \frac{8}{5}\right\}, C = \left\{2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}\right\}$. Effettuiamo i seguenti calcoli.

- $A \cup (B \cap C) = \left\{\frac{5}{2}, \frac{7}{4}, \frac{3}{2}, \frac{11}{8}\right\} \cup \left(\left\{\frac{5}{2}, 2, \frac{7}{4}, \frac{8}{5}\right\} \cap \left\{2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}\right\}\right) = \left\{\frac{5}{2}, \frac{7}{4}, \frac{3}{2}, \frac{11}{8}\right\} \cup \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\} =$
  $= \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
- $(A \cup B) \cap C = \left(\left\{\frac{5}{2}, \frac{7}{4}, \frac{3}{2}, \frac{11}{8}\right\} \cup \left\{\frac{5}{2}, 2, \frac{7}{4}, \frac{8}{5}\right\}\right) \cap \left\{2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}\right\} = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\} \cap \left\{2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}\right\} =$
  $= \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
- $A \cap (B \setminus C) = \left\{\frac{5}{2}, \frac{7}{4}, \frac{3}{2}, \frac{11}{8}\right\} \cap \left(\left\{\frac{5}{2}, 2, \frac{7}{4}, \frac{8}{5}\right\} \setminus \left\{2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}\right\}\right) = \left\{\frac{5}{2}, \frac{7}{4}, \frac{3}{2}, \frac{11}{8}\right\} \cap \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\} =$
  $= \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
- $A \cap (C \setminus B) = \left\{\frac{5}{2}, \frac{7}{4}, \frac{3}{2}, \frac{11}{8}\right\} \cap \left(\left\{2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}\right\} \setminus \left\{\frac{5}{2}, 2, \frac{7}{4}, \frac{8}{5}\right\}\right) = \left\{\frac{5}{2}, \frac{7}{4}, \frac{3}{2}, \frac{11}{8}\right\} \cap \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\} =$
  $= \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

Fase 3: Prova!

Dati i seguenti insiemi determinare $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \setminus Y$, $Y \setminus X$ e $X \Delta Y$.

1. $X = \{11; 12; 13; 14; 15\}$; $Y = \{10; 11; 12\}$
   [{10; 11; 12; 13; 14; 15}; {11; 12}; {13; 14; 15}; {10}; {10; 13; 14; 15}]
2. $X = \{21; 31; 51; 71; 91\}$; $Y = \{21; 31; 41; 51; 61\}$
   [{21; 31; 41; 51; 61; 71; 91}; {21; 31; 51}; {71; 91}; {41; 61}; {41; 61; 71; 91}]
3. $X = \{13; 19; 25; 31; 37; 43; 49\}$; $Y = \{5; 7; 11; 13\}$
   [{5;7;11;13;19;25;31;37;43;49};{13};{19;25;31;37;43;49};{5;7;11};{5;7;11;19;25;31;37;43;49}]
4. $X = \{-7; -5; -3; -1; 1\}$; $Y = \{1; 3; 5; 7\}$
   [{–7; –5; –3; –1; 1; 3; 5; 7}; {1}; {–7; –5; –3; –1}; {3; 5; 7}; {–7; –5; –3; –1; 3; 5; 7}]
5. $X = \{10; 100; 1000; 10000\}$; $Y = \{1; 10; 11; 100; 110\}$
   [{1;10;11;100;110;1000;10000};{10;100};{1000;10000};{1;11;110};{1;11;110;1000;10000}]
6. $X = \{1; 12; 123; 1234; 12345\}$; $Y = \{1; 12; 123; 1234\}$
   [{1; 12; 123; 1234; 12345}; {1; 12; 123; 1234}; {12345}; {}; {12345}]

7. $X=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right\}, Y=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6}\right\}$ $\left[\left\{\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right\},\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right\},\left\{\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right\},\left\{\frac{1}{6}\right\},\left\{\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right\}\right]$

8. $X=\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7},\frac{7}{8},\frac{8}{9}\right\}, Y=\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},\frac{15}{16}\right\}$

$\left[\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7},\frac{7}{8},\frac{8}{9},\frac{15}{16}\right\},\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8}\right\},\left\{\frac{2}{3},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7}\right\},\left\{\frac{15}{16}\right\},\left\{\frac{2}{3},\frac{4}{5},\frac{5}{6},\frac{6}{7},\frac{8}{9},\frac{15}{16}\right\}\right]$

Dati gli insiemi $A=\left\{0,1,2,\frac{7}{2},\frac{9}{2}\right\}, B=\left\{-1,0,2,\frac{7}{2}\right\}, C=\left\{-1,0,\frac{7}{2},\frac{9}{2},5\right\}$ ***determinare***

9. $A\cap(C\setminus B)$; $(A\cap C)\setminus B$; $A\cap(B\setminus C)$ $A\setminus(B\cap C)$ $\left[\left\{\frac{9}{2}\right\},\left\{\frac{9}{2}\right\},\{2\},\left\{1,2,\frac{9}{2}\right\}\right]$

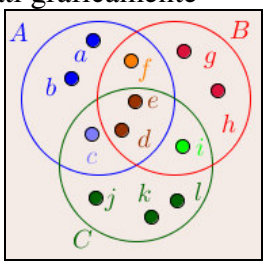
10. $(A\cup B)\cap C$; $(A\,\Delta\,B)\cup(C\setminus B)$; $(A\cup C)\cup(C\,\Delta\,B)$ $\left[\left\{-1,0,\frac{7}{2},\frac{9}{2}\right\},\left\{-1,1,\frac{9}{2},5\right\},\left\{-1,0,1,2,\frac{7}{2},\frac{9}{2},5\right\}\right]$

11. $(A\cap C)\setminus(A\,\Delta\,B)$; $(A\,\Delta\,B)\cap(C\,\Delta\,B)$; $(A\cup C)\setminus(C\setminus B)$ $\left[\left\{0,2,\frac{7}{2}\right\},\left\{\frac{9}{2}\right\},\left\{-1,0,1,2,\frac{7}{2}\right\}\right]$

Operazioni fra insiemi con i diagrammi di Eulero-Venn

Fase 1: Osserva

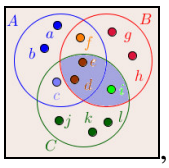
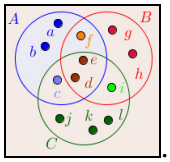
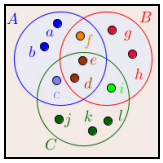
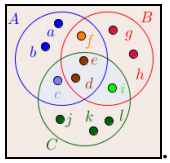
Consideriamo i seguenti insiemi rappresentati graficamente

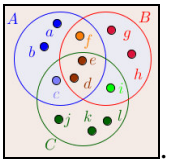
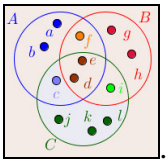
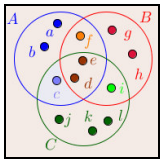


Vogliamo determinare il risultato delle seguenti operazioni:

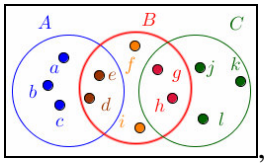
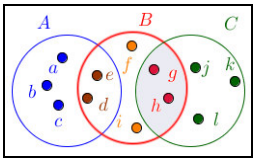
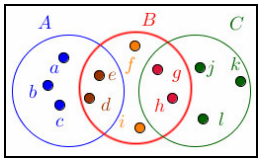
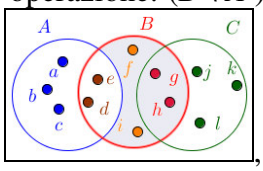
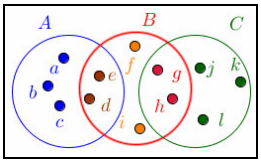
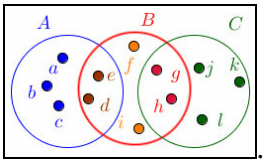
- $A\setminus(B\cap C)$. Possiamo sfruttare il grafico, determinando facilmente il risultato fra parentesi. Abbiamo così: $\{a, b, c, d, e, f\}\setminus\{d, e, i\}=\{a, b, c, f\}$.
- $(A\cup B)\cap C=\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}\cap\{c, d, e, i, j, k, l\}=\{c, d, e, i\}$.
- $(A\,\Delta\,B)\cap(C\setminus B)=\{a, b, c, g, h, i\}\cap\{c, j, k, l\}=\{c\}$.

Volendo avremmo potuto risolvere i precedenti esercizi anche graficamente.

- $A\setminus(B\cap C)$. determiniamo l'operazione fra parentesi:  , togliamo da A la parte colorata:  .
- $(A\cup B)\cap C$. Ecco l'unione:  e poi l'intersezione di questa zona colorata con C:  .

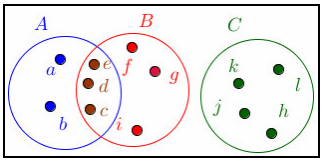
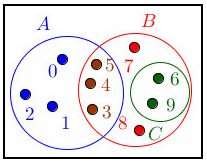
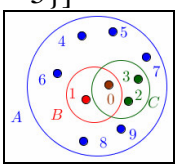
- $(A \Delta B) \cap (C \setminus B)$. Adesso i passi sono 3. Intanto la prima parentesi:  . Adesso la seconda:  . Troviamo le parti colorate in entrambe le figure:  Naturalmente i risultati coincidono indipendentemente dal metodo usato.

Fase 2: Completa …

- Data la seguente rappresentazione grafica di tre insiemi:  , determiniamo graficamente $A \Delta (B \cap C)$. Cominciamo a colorare il risultato dell'operazione fra parentesi:  Continua tu determinando la corretta colorazione: 
- Se volessimo invece determinare il risultato dell'operazione: $(B \setminus A) \cap (B \cup C)$, coloriamo nel seguente modo per avere il risultato della prima parentesi:  , continua per la seconda parentesi :  e otterrai quindi il corretto risultato colorando il grafico:  .

Fase 3: Prova!

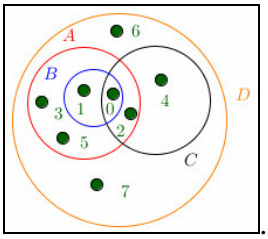
Sulla base dei seguenti grafici determinare i risultati delle operazioni indicate

1.  $(A \cup B) \cap (A \Delta C)$; $(A \setminus B) \Delta (B \cap C)$ $[\{a, b, d, e, f\}$; $\{a, b\}]$
2.  $(A \cup B) \cup (B \cap C)$; $(A \Delta B) \Delta (B \cup C)$ $[\{0; 1; 2; \ldots; 9\}$; $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}]$
3.  $(C \setminus B) \Delta (A \cap C)$; $(B \Delta C) \setminus (A \Delta C)$ $[\{\}$; $\{2; 3\}]$

Sottoinsiemi

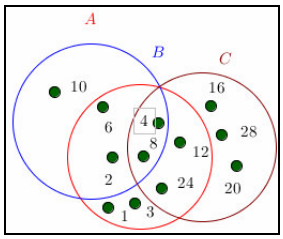
Fase 1: Osserva

- Dire che A è un sottoinsieme di B vuol dire che ogni elemento di A è anche elemento di B. Così i seguenti insiemi $A = \{0; 1; 2; 3; 5\}$; $B = \{0; 1\}$; $C = \{0; 2; 4\}$ sono tutti sottoinsiemi di $D = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. In particolare, dal punto di vista grafico la rappresentazione dei quattro insiemi è la seguente:



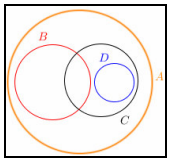
. Da tale rappresentazione si evince che $B \subset A \subset D$.

- Consideriamo i seguenti insiemi espressi mediante una proprietà caratteristica: A è l'insieme dei numeri naturali pari minori di 12, B è l'insieme dei divisori di 24, C è l'insieme dei multipli di 4 minori di 32. Possiamo dire che uno dei tre insiemi è sottomultiplo di uno degli altri due? Possiamo esprimere i tre insiemi in modo elenco: $A = \{2; 4; 6; 8; 10\}$; $B = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$; $C = \{4; 8; 12; 16; 20; 24; 28\}$. Pertanto non vi sono relazioni di inclusione, dato che per esempio $10 \in A$ ma $10 \notin B$, $10 \notin C$. Poi $1 \in B$ ma $1 \notin A$, $1 \notin C$. Infine $16 \in C$ ma $16 \notin A$, $16 \notin B$. La relativa rappresentazione grafica dei tre insiemi è la seguente:



Fase 2: Completa …

Consideriamo gli insiemi $A = \{0; 1; 3; 5\}$; $B = \{0; 2; 3; 4\}$; $C = \{0; 1; 3\}$; $D = \{0; 1\}$; $E = \{0; 2; 3; 5; 6\}$. Vediamo per ogni coppia di insiemi se uno dei due è contenuto o contiene l'altro.
Si ha: $A \not\subset B$ perché $1 \in A$ e $1 \notin B$, si ha: B …. A perché ……
Si ha: $A \not\subset C$ perché $5 \in A$ e $5 \notin B$, si ha: C …. A perché ……
Si ha: A … D perché ……, si ha: D …. A perché ……
Si ha: A … E perché ……, si ha: E …. A perché ……
Si ha: B … C perché ……, si ha: C …. B perché ……
Si ha: B … D perché ……, si ha: D …. B perché ……
Si ha: B … E perché ……, si ha: E …. B perché ……
Si ha: C … D perché ……, si ha: $D \subset C$ perché ogni elemento di D è anche elemento di C.
Si ha: C … E perché ……, si ha: E …. C perché ……
Si ha: D … E perché ……, si ha: E …. D perché ……

Consideriamo la seguente rappresentazione grafica: 

Possiamo dire che valgono le seguenti relazioni $B \subset A$; $C \subset A$; $D \subset A$; B …. C ; B …. D; C …. B, D …. B; C …. D ; D …. C;

Fase 3: Prova!

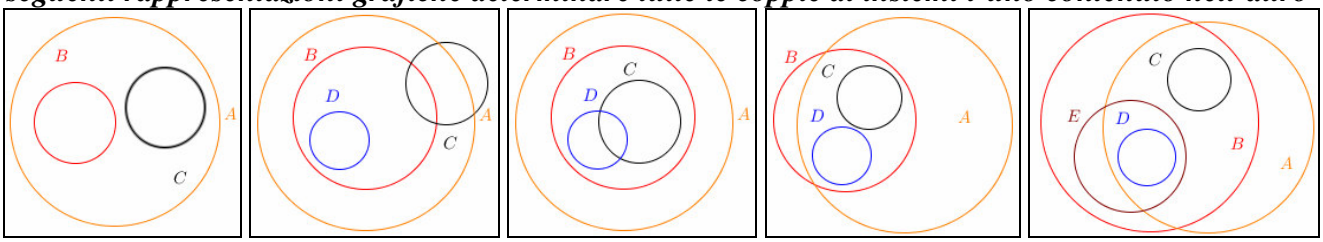
Considerare le reciproche relazioni di contenuto fra gli insiemi seguenti, rappresentare poi graficamente gli insiemi:

1. $A = \{0; 1; 2; 3\}$; $B = \{0; 2; 3\}$; $C = \{1; 3\}$
2. $D = \{0; 1\}$; $E = \{0; 2\}$; $F = \{0; 1; 2\}$
3. $G = \{a, b, c, d, e\}$, $H = \{a, b, c\}$, $I = \{a, c, e, f\}$
4. $J = \{11; 22; 33; 44\}$; $K = \{11; 22; 33\}$; $L = \{11; 33; 44\}$
5. $M = \{100; 101; 102\}$; $N = \{100; 102; 103\}$; $O = \{100; 103; 104\}$; $P = \{100; 103\}$
6. $Q = \{a, e, i\}$, $R = \{a, e, o\}$, $S = \{o, u\}$, $T = \{a, e, u\}$
7. $U = \{a, i\}$, $V = \{e, o, u\}$, $W = \{a, e, i, o, u\}$, $X = \{a, u\}$

Dati i seguenti insiemi stabilire per ciascuna coppia se uno dei due è contenuto nell'altro.

8. A è l'insieme dei numeri naturali multipli di 3 e minori di 24; B è l'insieme dei numeri naturali multipli di 4 e minori di 30.
9. C è l'insieme dei numeri naturali multipli di 5 e minori di 20; D è l'insieme dei numeri naturali multipli di 10 e minori di 35.
10. E è l'insieme dei numeri naturali multipli di 6 e minori di 32; F è l'insieme dei numeri naturali multipli di 8 e minori di 41.
11. G è l'insieme delle frazioni ridotte ai minimi termini il cui numeratore è uguale a 5 e il denominatore è un numero naturale minore di 13; H è l'insieme delle frazioni ridotte ai minimi termini il cui numeratore è uguale a 5 e il denominatore è un numero naturale dispari minore di 14.
12. I è l'insieme dei divisori di 18; J è l'insieme dei divisori di 32.
13. K è l'insieme dei divisori di 28; L è l'insieme dei divisori di 14.

Dalle seguenti rappresentazioni grafiche determinare tutte le coppie di insiemi l'uno contenuto nell'altro

14. 

Insieme delle parti

Fase 1: Osserva

Consideriamo l'insieme $A = \{0; 1; 2\}$, esso ha 3 elementi, quindi i suoi sottoinsiemi possono avere 0, 1, 2 o 3 elementi. In particolare ha un solo sottoinsieme con 0 elementi: l'insieme vuoto $\varnothing$; ha 3 insiemi con 1 solo elemento: $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$; ha 3 insiemi con due elementi: $\{0; 1\}$, $\{0; 2\}$, $\{1; 2\}$; 1 insieme con 3 elementi, $\{0; 1; 2\}$.

Fase 2: Completa …

Consideriamo l'insieme $A = \{1; 3; 5; 7\}$, esso ha 4 elementi, quindi i suoi sottoinsiemi possono avere 0, 1, 2, 3 o 4 elementi. In particolare ha un solo sottoinsieme con 0 elementi: l'insieme vuoto $\varnothing$; 4 insiemi con 1 solo elemento: $\{1\}$, $\{3\}$, $\{\ldots\}$ $\{\ldots\}$; … insiemi con 2 elementi: $\{1; 3\}$, $\{1; 5\}$, $\{1; 7\}$, ……; … insieme con 3 elementi, $\{1; 3; 5\}$, ……; 1 insieme con 4 elementi: $\{\ldots\ldots\ldots\}$

Fase 3: Prova!

1. Determina tutti i sottoinsiemi di $A = \{0; 2; 4\}$
2. Determina tutti i sottoinsiemi con 2 elementi di $B = \{0; 2; 4; 6\}$
3. Determina tutti i sottoinsiemi con 3 elementi di $C = \{0; 1; 2; 3\}$
4. Determina tutti i sottoinsiemi di 2 elementi entrambi pari di $D = \{1; 2; 3; 4; 5\}$
5. Determina tutti i sottoinsiemi di 3 elementi con tutti gli elementi dispari di $E = \{2; 3; 4; 5\}$
6. Se un insieme ha 5 elementi quanti sottoinsiemi ha? [32]
7. Se un insieme ha 128 sottoinsiemi quanti elementi ha? [7]
8. Esiste un insieme che ha 132 elementi? Giustifica la risposta. [No]
9. Dei ragazzi hanno formato un club di collezionisti. Si sa che 16 collezionano monete, 5 collezionano solo francobolli, 3 solo monete e due solo figurine, 6 tutte e tre le cose, 4 collezionano altre cose, 7 solo francobolli e figurine, 1 monete e figurine ma non francobolli. Si vuol sapere: quanti sono tutti i ragazzi; quanti collezionano francobolli ma non figurine; quanti collezionano monete o francobolli ma non entrambi gli oggetti; quanti solo due delle tre cose citate. [34; 3; 16; 14]
10. Susanna ha dieci scatole. In cinque conserva delle matite, in quattro delle penne, e in due penne e matite. Quante scatole non contengono né penne e né matite? [3]

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito

http://mathinterattiva.altervista.org/volume_1_1.htm

1. Le basi del ragionamento

1.4 Le relazioni binarie

Prerequisiti
- Nozioni di aritmetica elementare
- Nozioni di geometria elementare
- Nozioni di insiemistica

Obiettivi
- Riconoscere i diversi tipi di relazione
- Classificare oggetti che vengono collegati mediante opportune leggi
- Comprendere il concetto di dominio e di codominio di una funzione
- Rappresentare graficamente semplici funzioni e saperle interpretare
- Classificare una relazione binaria
- Determinare le proprietà verificate da una relazione binaria
- Distinguere le relazioni di equivalenza e quelle di ordinamento
- Determinare l'insieme quoziente rispetto a una data relazione di equivalenza
- Ordinare un insieme su cui è definita una relazione di ordinamento in vari modi
- Determinare, da una sua rappresentazione, le proprietà verificate da una relazione mediante tabella a doppia entrata o grafico sagittale
- Utilizzare la rappresentazione matriciale per risolvere questioni matematiche

Contenuti
- Richiamiamo le conoscenze
- Prodotto cartesiano di insiemi
- Concetto di relazione e funzione
- Relazioni binarie
- Relazioni di equivalenza
- Relazioni di ordine

Parole chiave
Ascissa – Codominio – Dominio – Funzione – Grafico sagittale – Insieme quoziente – Ordinata – Origine – Ordinamento parziale – Ordinamento totale – Ordinamento stretto – Ordinamento largo – Piano cartesiano – Prodotto cartesiano –Proprietà riflessiva – Proprietà antiriflessiva – Proprietà simmetrica – Proprietà antisimmetrica – Proprietà transitiva – Proprietà di connessione – Relazione

Simbologia

$\times$	Indica il prodotto cartesiano fra due insiemi
$\Re: A \to B$	Indica una relazione definita nell'insieme A ed a valori nell'insieme B
$\Re(a)$	Indica il corrispondente dell'elemento a mediante la relazione $\Re$
$dom(f)$	Indica il dominio di f
$cod(f)$	Indica il codominio di f

Richiamiamo le conoscenze

Concetto di uguaglianza fra numeri

Spesso nel linguaggio di ogni giorno si usano frasi come: *Sono uguali come due gocce d'acqua, Devi prenderne uno uguale a questo* e così via. Nella pratica quotidiana abusiamo spesso del termine *uguale*, usandolo sia per indicare oggetti che sono copie perfette di altri, come per esempio i soldi e tutti gli oggetti costruiti industrialmente in grandi quantità, sia per indicare oggetti che certamente uguali non sono.
Può per esempio capitare che dal panettiere alla richiesta "*Quale panino desidera?"* rispondiamo "*Uno qualunque, tanto è uguale"*. In effetti però non ci stiamo certo riferendo a oggetti uguali, con la stessa identica forma o peso o grado di cottura, per i nostri scopi però, che sono quelli alimentari, due panini che all'incirca hanno lo stesso peso e sono fatti con la stessa lavorazione e con le stesse materie prime (acqua, farina, sale, …) sono ritenuti uguali.
Allo stesso modo se dobbiamo pagare 1 euro, è indifferente che usiamo una moneta da 1 euro o 2 monete da 50 centesimi, o 10 monete da 10 centesimi e così via. Eppure da un punto di vista fisico stiamo usando oggetti del tutto diversi, anche nella quantità. Questi oggetti però da un punto di vista del valore monetario sono equivalenti.

Definizione A

Diciamo che due espressioni numeriche sono **equivalenti** se rappresentano gli stessi numeri, ossia se esistono dei procedimenti aritmetici leciti che ci fanno scrivere le due espressioni nello stesso modo.

Che cosa significa?

Equivalente Composto dal latino *aequus* che significa uguale e da *valere* cioè valore. Quindi equivalenti significa che *hanno lo stesso valore*.

Esempio A

Le due espressioni $(7 + 5 – 4)$ e $(4 \cdot 2)$ sono equivalenti, poiché possono essere manipolate in modo da essere portate entrambe nella stessa forma, cioè 8.

Enunciamo alcuni postulati che ci serviranno in seguito.

Postulato A

Quantità uguali a una terza quantità sono uguali fra loro.

Esempio B

Il precedente postulato significa che se sappiamo che i numeri incogniti x e y sono uguali a un terzo numero z, allora possiamo dire che sono uguali fra di loro.

Il fatto illustrato nell'esempio precedente è usato per esempio nelle unità di misura: nonostante che il riferimento all'unità di misura del metro sia un valore campione custodito in un museo francese, non è necessario confrontare il nostro metro con il campione, ma basta semplicemente confrontarlo con uno che è stato confrontato con quello.

Postulato B

Aggiungendo o sottraendo da quantità uguali (numeri, figure isometriche, …) quantità uguali, si ottengono quantità ancora uguali fra loro.

Esempio C

Il precedente postulato significa che se sappiamo che i numeri incogniti x e y sono fra loro uguali, allora se a entrambi aggiungiamo (o togliamo) uno stesso numero, per esempio 18, $(x + 18)$ e $(y + 18)$ (oppure $(x – 18)$ e $(y – 18)$) anche se non noti saranno certamente uguali fra loro.
Inoltre, poiché abbiamo visto che la moltiplicazione è una particolare addizione possiamo dire che, sempre nell' ipotesi che sia $x = y$, anche le quantità $32 \cdot x$ e $32 \cdot y$ saranno fra loro uguali.

Prodotto cartesiano di insiemi

Il problema

A una piccola festa sono presenti 4 ragazze: Anna, Bruna, Carlotta e Daniela, e 3 ragazzi: Elio, Francesco e Gualtiero. Quante diverse coppie di ballerini possiamo costituire? Basta costruire il seguente diagramma nel quale a ogni ragazza associamo il rispettivo possibile cavaliere, usiamo solo le iniziali:

$$\overbrace{E\ F\ G}^{A}\ \overbrace{E\ F\ G}^{B}\ \overbrace{E\ F\ G}^{C}\ \overbrace{E\ F\ G}^{D}.$$

Sono quindi possibili 12 diverse coppie di ballerini.

La questione trattata nel problema è di largo uso in matematica, vediamo quindi di classificarla.

Definizione 1

Diremo **prodotto cartesiano** di due insiemi A e B, l'insieme formato da tutte le coppie ordinate $(a,\ b)$, ottenute scegliendo il primo elemento in A e il secondo in B.

Notazione 1

Per indicare il **prodotto cartesiano** di A e B scriveremo $A \times B$.
In simboli $A \times B = \{(a;\ b): a \in A, b \in B\}$.

Si badi che parlando di coppie ordinate intendiamo che la coppia $(a; b)$ è, in generale, diversa dalla coppia $(b; a)$ e quindi $A \times B \neq B \times A$.

Esempio 1

Dati gli insiemi $A = \{a, b\}$ e $B = \{a, e, i, o, u\}$, si ha $A \times B = \{(a; a), (a; e), (a; i), (a; o), (a; u), (b; a), (b; e), (b; i), (b; o), (b; u)\}$. Invece $B \times A = \{(a; a), (a; b), (e; a), (e; b), (i; a), (i; b), (o; a), (o; b), (u; a), (u; b)\}$.

Nell'esempio precedente si nota che $|A \times B| = |B \times A| = 2 \cdot 5 = 10$. Questo non è un caso, ma piuttosto fa parte di un fatto generale abbastanza intuitivo.

Teorema 1

Se $|A| = m$ e $|B| = n$, allora $|A \times B| = m \cdot n$.

Dimostrazione

Per comprendere lo spirito della dimostrazione, cominciamo considerando un caso particolare, in cui $|A| = 5$ e $|B| = 4$. Indichiamo con a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 gli elementi di A e con b_1, b_2, b_3, b_4 gli elementi di B. È chiaro che avremo 4 coppie scegliendo a_1 come primo elemento, cioè $(a_1; b_1)$, $(a_1; b_2)$, $(a_1; b_3)$, $(a_1; b_4)$; altre 4 coppie avranno a_2 come primo elemento e così via, concludendo con 4 coppie con a_5 come primo elemento, per un totale quindi di $5 \cdot 4$ coppie. A questo punto ottenere la dimostrazione generale è molto semplice.
Se $|A| = m$, A ha m elementi che indichiamo con $a_1, a_2, ..., a_m$, $|B| = n$, perciò indichiamo i suoi elementi con $b_1, b_2, ..., b_n$ e avremo allora n coppie scegliendo a_1 come primo elemento, cioè $(a_1; b_1)$, $(a_1; b_2)$, ..., $(a_1; b_n)$, n coppie avranno a_2 come primo elemento,..., infine n coppie con a_m come primo elemento, per un totale quindi di $m \cdot n$ coppie.

Notazione 2

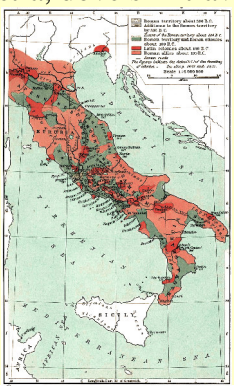
Il prodotto cartesiano di n insiemi, tutti fra di loro uguali, ciascuno indicato con A, viene indicato con il simbolo A^n.

Un esempio molto interessante di prodotto cartesiano è il cosiddetto piano cartesiano. Per individuare la posizione di un oggetto, come per esempio un monumento in una cartina turistica, questa viene divisa in dei settori quadrati, ognuno dei quali è individuato in genere da una lettera in orizzontale e una in verticale.

Esempio 2

La seguente per esempio si riferisce a una cartina storica della Antica Repubblica Romana, in cui, come vediamo, abbiamo diviso con un totale di 20 quadratini, 4 in orizzontale e 5 in verticale. Così per individuare per esempio la Sicilia è individuata da 4 quadranti, la zona che contiene Siracusa sta nel quadrante (1, 3),

dove il primo numero indica il quadratino a partire dal basso e il 3 quello a partire da sinistra, avendo stabilito di partire dal quadratino più in basso a sinistra, dove si intravede un pezzo di Africa.



Abbiamo visto perciò che per determinare una posizione ci serve un primo punto di partenza e poi due numeri che si riferiscano a tale punto. Poniamo le seguenti definizioni.

Definizione 2

L'insieme $\{O, x, y, u\}$ formato da due rette x e y perpendicolari e incidenti nel punto O e dalla misura u di un segmento, si chiama **sistema di riferimento cartesiano monometrico nel piano**. O si chiama **origine del sistema**, u si chiama **unità di misura**, x si chiama **asse delle ascisse**, y **asse delle ordinate**.

Definizione 3

Dato un punto P in un piano sul quale è stabilito un sistema di riferimento cartesiano monometrico $\{O, x, y, u\}$, diciamo sue **coordinate** i numeri che misurano le sue distanze dalle rette x e y mediante u e alle quali si premette il segno meno a seconda della posizione di P rispetto alle rette ($x < 0$ se P è a sinistra di y, $y < 0$ se P è sotto a x). Il primo numero si chiama **ascissa**, il secondo **ordinata**.

Notazione 3

Le coordinate di un punto P, si indicano con il simbolo $P \equiv (x; y)$.

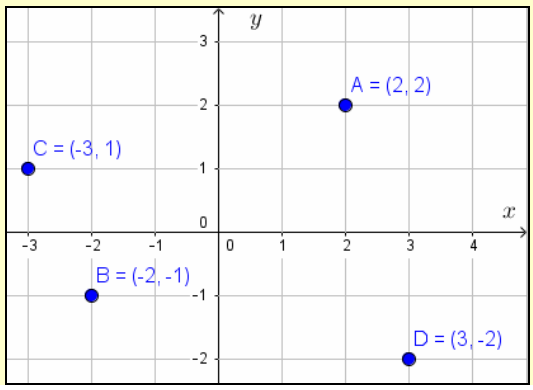
Che cosa significa?

Ascissa letteralmente significa “tagliata via” e si riferisce probabilmente al fatto che essa si configura come una tacca sulla retta. Il termine fu coniato nel Seicento dal filosofo e matematico Gottfried Wilhelm Leibniz. **Ordinata** ha il significato semplicemente di ordine e si riferisce al fatto che essa è messa in una posizione che, rispetto a un sistema di riferimento, è appunto ordinata.

Come si vede un punto nel piano cartesiano è individuato appunto da una coppia ordinata di numeri reali.

Esempio 3

In figura abbiamo un esempio di piano cartesiano, ottenuto con il software Geogebra, in cui abbiamo gli assi cartesiani, l’unità di misura uguale su entrambi gli assi e alcuni punti tracciati e visualizzati con le relative coordinate. La totalità dei punti rappresentati sul piano cartesiano ortogonale è perciò un prodotto cartesiano di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.



Vediamo adesso un importante esempio tratto dall'aritmetica.

Esempio 4

Ogni frazione può intendersi come una coppia ordinata, il cui primo elemento è il numeratore e il secondo è il denominatore. Quindi per esempio l'insieme $A=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{7},\frac{2}{3},\frac{3}{2},\frac{4}{5},\frac{7}{8},\frac{8}{4}\right\}$, può interpretarsi anche come l'insieme delle coppie {(1; 2), (1; 7), (2; 3), (3; 2), (4; 5), (7; 8), (8; 4)}. Il precedente insieme però non è un prodotto cartesiano, ma solo un suo sottoinsieme, esso infatti non contiene tutte le coppie provenienti dall'insieme dei numeratori N = {1; 2; 3; 4; 7; 8} e da quello dei denominatori D = {2; 3; 4; 5; 7; 8}. Infatti $|N \times D| = 6 \cdot 6 = 36$, mentre $|A| = 7$.

Inoltre l'insieme $N \times D$ è un insieme di coppie e non di numeri equivalenti alle relative frazioni, perché allora avremmo elementi ripetuti; per esempio la coppia (1; 2) e la coppia (2; 4) sono diverse ma individuano frazioni che hanno lo stesso valore: $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=0{,}5$.

Vediamo ancora un esempio.

Esempio 5

Lanciando due dadi regolari, quanti sono i diversi lanci che possiamo ottenere? Poiché due lanci sono diversi se uno almeno dei due dadi si presenta con un punteggio differente, indicando l'insieme dei possibili punteggi ottenibili con un dado con A = {1; 2; 3; 4; 5; 6}, la richiesta equivale a determinare $|A \times A|$, che per il teorema 1 è 36. In particolare $A \times A$ = {(1; 1), (1; 2), …, (1; 6), (2; 1), …, (6; 6)}.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo determinare il prodotto cartesiano fra gli insiemi $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$, che si può configurare come le caselle di una scacchiera. Facilmente abbiamo $A \times B = \{(a; 1), (a; 2), \ldots, (a; 8), (b; 1), \ldots, (b; 8), \ldots, (h; 7), (h; 8)\}$, che ovviamente ha $8 \cdot 8 = 64$ elementi.

Determinare il prodotto cartesiano dei seguenti insiemi

Livello 1

1. $A \times B$, con $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$; $A \times B$, con $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{1; 2; 3; 4\}$
2. $B \times A$, con $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{1; 2; 3\}$; $A \times A$, con $A = \{a, e, i, o, u\}$; A^2, con $A = \{m; n; 1; 2\}$

Livello 2

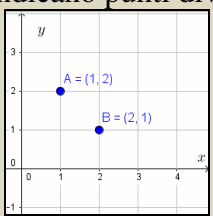
3. Determinare $(A \times B) \times C$ e $A \times (B \times C)$, con $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{4; 5; 6; 7\}$, $C = \{8; 9; 0\}$
4. Quanti elementi hanno ciascuno dei prodotti cartesiani precedenti? [36]
5. A^3, con $A = \{a, e, r\}$. Come possono caratterizzarsi le terne di A^3 formate da elementi tutti distinti? [Gli anagrammi della parola *aer*]
6. Dato l'insieme delle squadre $A = \{$Inter, Juve, Lazio, Milan, Roma, Torino$\}$, stilare il calendario di un campionato di calcio con partite di andata e ritorno.
7. L'insieme $\{A, B, C, D, E\}$ rappresenta i cinque impiegati di un servizio di autoambulanze. Tenuto conto che ogni turno di servizio è costituito da 3 persone, scrivere per esteso tutti i possibili distinti gruppi di lavoro. Quanti elementi ha? [10]
8. Scrivere l'insieme delle frazioni a numeratore unitario e denominatore multiplo di 3 inferiore a 20 come insieme di coppie ordinate.
9. Scrivere l'insieme delle frazioni equivalenti a $\frac{7}{3}$ con numeratore inferiore a 100 come insieme di coppie (numeratore, denominatore).

Livello 3

10. Determinare $(A \cup B) \times C$ e $(A \times C) \cup (B \times C)$, dove $A = \{\clubsuit, \blacklozenge\}$, $B = \{\heartsuit, \spadesuit, \#\}$, $C = \{\&\}$. Quanti elementi hanno? [5 ; 5]
11. Determinare $(A \cap B) \times C$ e $(A \times C) \cap (B \times C)$, dove $A = \{✂\}$, $B = \{☒, ☐, ⟐, ★\}$, $C = \{\heartsuit\}$. Quanti elementi hanno? [1 ; 0]
12. Determinare $(A \Delta B) \times C$ e $(A \times C) \Delta (B \times C)$, dove $A = \{\clubsuit, \blacklozenge\}$, $B = \{\heartsuit, \spadesuit, \blacklozenge\}$, $C = \{\heartsuit, \blacklozenge, ★\}$. Quanti elementi hanno? [9 ; 14]
13. Come possiamo rappresentare il risultato dell'esercizio 6? [$A^2 \setminus$ {(Inter, Inter), (Juve, Juve), …. (Torino, Torino)}]

Lavoriamo insieme

Le coppie (1; 2) e (2; 1) nel piano cartesiano indicano punti diversi, come mostrato in figura.

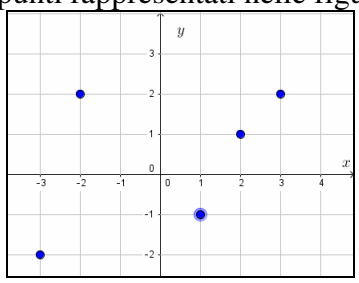


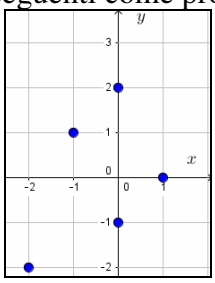
Livello 1

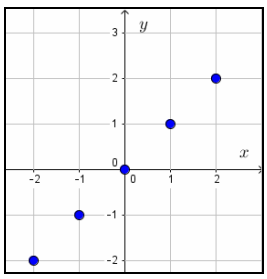
14. Rappresentare sul piano cartesiano il prodotto cartesiano $\{-1; 0; 1; 2\} \times \{-2; 3\}$.
15. Rappresentare sul piano cartesiano il prodotto cartesiano $\{-1; 0; 1\} \times \{-1; 0; 1\}$.
16. Il prodotto cartesiano che si rappresenta nel piano cartesiano come l'asse x è formato dalle coppie che hanno quale particolarità? [Il secondo elemento nullo]
17. Il prodotto cartesiano che si rappresenta nel piano cartesiano come l'asse y è formato dalle coppie che hanno quale particolarità? [Il primo elemento nullo]

Livello 2

18. Descrivere i punti rappresentati nelle figure seguenti come prodotto cartesiano

a) 

b) 

c) 

19. I punti rappresentati nella terza figura precedente possono indicarsi come il prodotto cartesiano di quale insieme per se stesso? [$A = \{z \in \mathbb{Z}\}$]

Lavoriamo insieme

L'insieme $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ rappresenta i possibili punteggi ottenibili lanciando un dado. Se invece lanciamo due dadi l'insieme dei punteggi è dato da $A \times A = A^2$. Noi vogliamo trovare il sottoinsieme di A^2 formato da tutti i punteggi con entrambe le componenti dispari: {(1; 1), (1; 3), (1; 5), (3; 1), (3; 3), (3; 5), (5; 1), (5; 3), (5; 5)}.

Livello 1

20. Con riferimento al quesito del box Lavoriamo insieme, determinare i sottoinsiemi di A^2 che verificano le seguenti richieste: a) hanno entrambe le componenti pari; b) hanno entrambe le componenti formate da numeri primi; c) hanno la prima componente pari e la seconda dispari; d) hanno la prima componente divisibile per 3 e la seconda formata da un numero primo.
[a) {(2; 2), (2; 4), (2; 6), …, (6; 6); b) {(2; 2), (2; 3), (2; 5), (3; 2,), …, (5; 5)};
c) {(2; 1), (2; 3), (2; 5), (4; 1), …, (6; 5)}; d) {(3; 2), (3; 3), (3; 5), (6; 2), (6; 3), (6; 5)}]
21. In due contenitori immettiamo delle palline numerate. Nel primo sono presenti le palline i cui numeri sono primi e compresi tra 12 e 24, nella seconda quelle i cui numeri sono divisibili per 3 e compresi tra 31 e 40. Quante sono le possibili diverse estrazioni che possono effettuarsi prendendo una pallina da ciascun contenitore? [12]
22. Le 40 carte di un mazzo di carte da scopa sono distribuite in 3 diverse scatole, in modo che nella prima siano contenute tutte le figure, nella seconda le carte non figurate di punteggio pari e nella terza le rimanenti carte. Quante diverse estrazioni possono effettuarsi pescando una carta da ciascun contenitore? [2352]

Livello 2

23. Il prodotto cartesiano gode della proprietà associativa? Giustificare la risposta. *Suggerimento* si considerino coppie costituenti una frazione. [No]
24. Consideriamo gli insiemi $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{2; 3; 4\}$ e $C = \{3; 4; 5\}$. Scegliamo a caso un numero da ciascuno degli insiemi, $a \in A$, $b \in B$ e $c \in C$. Costruiamo con essi il numero abc. Quanti diversi numeri possiamo costruire? Quanti di tali numeri risultano divisibili per 3? Quanti per 5? [27; 9; 9]

Concetti di relazione e di funzione

Accade spesso, anche nella vita di ogni giorno, di associare a certi oggetti altri oggetti utilizzando particolari accorgimenti.

Esempio 6

- Ad ogni macchina nuova viene associata una targa che risulta in questo caso strettamente collegata alla macchina, nel senso che solo quella macchina ha una targa con quei simboli e viceversa quella targa è collegata solo alla determinata macchina.
- Leggermente diverso è il caso dei numeri civici e delle abitazioni, poiché è vero che ad ogni porta è associato un solo numero civico, ma un appartamento può avere più numeri civici ad esso associati. Per esempio uno alla porta d'ingresso, uno ad una finestra a pian terreno, un altro ad un cancello, ancora uno ad un garage, e via dicendo. Inoltre ad un numero civico possono corrispondere più appartamenti, si pensi al numero civico associato al portone di un edificio di 10 piani.
- Ancora un altro esempio: ad ogni spettatore di uno spettacolo teatrale è associato un posto sul quale sedersi, e viceversa.

Poniamo una definizione relativa ai diversi esempi mostrati.

Definizione 4

Diciamo **relazione** definita in un insieme A e a valori in un insieme B una legge di natura qualsiasi che coerentemente e chiaramente associa ad un elemento di A uno o più elementi di B. L'elemento che in una relazione viene associato ad $a \in A$, si chiama **corrispondente** di a.

Notazione 4

Per dire che vi è una relazione, che indichiamo con $\Re$, definita in A ed a valori in B, useremo la seguente scrittura: $\Re : A \to B$.

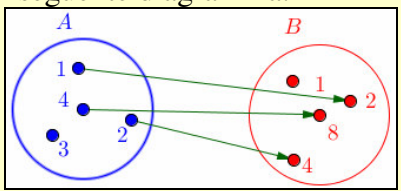
Notazione 5

Il corrispondente di un elemento a in una relazione $\Re$, se esiste, si indica con il simbolo $\Re(a)$ che si legge erre di a.

Per indicare una relazione $\Re$: $A \to B$, specialmente quando A e B hanno un numero ridotto di elementi, si può utilizzare un grafico, in cui A e B vengono simbolizzati da diagrammi di Eulero-Venn ed ogni elemento di A viene associato con una freccia al suo elemento corrispondente in B.

Esempio 7

Sia $\Re$: $\{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 4, 8\}$ definita dalla legge: *ad ogni numero associa il proprio doppio*. Rappresentiamo graficamente tale relazione con il seguente diagramma.



Un altro modo per rappresentare una funzione consiste nello scrivere l'insieme di coppie ordinate, in cui il primo elemento sta in A ed il secondo è il suo corrispondente.

Esempio 8

La funzione dell'esempio precedente può rappresentarsi con l'insieme: $\{(1; 2), (2; 4), (4; 8)\}$.

Nella notazione 5, abbiamo scritto la frase *se esiste*. Infatti non sempre scelto $a \in A$ è detto che esista un suo corrispondente, del resto abbiamo visto che nell'esempio precedente l'elemento 3 non ha corrispondente, dato che $\Re(3) = 6 \notin B$.

Esempio 9

Sia A l'insieme dei maschi che partecipano ad una festa da ballo e con B l'insieme delle femmine partecipanti alla stessa festa, mentre come relazione consideriamo quella che ad ogni maschio associa la propria fidanzata. È evidente che, con molta probabilità, alla festa non parteciperanno solo coppie di fidanzati, quindi vi saranno elementi di A che non hanno alcun corrispondente in B.

Distinguiamo la situazione mostrata con una definizione.

Definizione 5

Data una relazione $\Re$: $A \to B$, chiamiamo **dominio** di $\Re$ l'insieme degli elementi di A che hanno almeno un corrispondente in B mediante la $\Re$.

Che cosa significa?

Dominio deriva dal latino *dominium* che a sua volta deriva da *dominus*, cioè signore. Quindi il dominio è il luogo in cui qualcuno domina, padroneggia. Come estensione perciò il dominio di una funzione è dove essa agisce.

Sempre nell'esempio 7 abbiamo visto che 1 come elemento di B non è corrispondente di alcun elemento di A, dato che esso è doppio di $0{,}5 \notin A$. Analogamente nell'esempio della relazione fra fidanzati, probabilmente vi saranno delle ragazze prive di fidanzato, si giustifica la necessità di quest'altra definizione.

Definizione 6

Data una relazione $\Re$: $A \to B$ chiamiamo **codominio** di $\Re$ l'insieme degli elementi di B che sono corrispondenti di almeno un elemento di A mediante la $\Re$.

Notazione 6

Indichiamo con la scritta $\boldsymbol{dom}(\Re)$ il dominio della relazione $\Re$, e con $\boldsymbol{cod}(\Re)$ il suo codominio.

Esempio 10

- Nel caso dell'esempio 7, $dom(\Re) = \{1; 2; 4\}$ e $cod(f) = \{2; 4; 8\}$.
- Nel caso della relazione fra i biglietti venduti ed i posti a teatro, il dominio è rappresentato dai soli biglietti venduti, mentre l'insieme A è formato da tutti i biglietti stampati. Il codominio coinciderà con tutte le sedie del teatro solo se vi sarà il tutto esaurito.

Con la rappresentazione grafica risulta particolarmente semplice determinare dominio e codominio di una funzione.

Esempio 11

Con riferimento al diagramma dell'esempio 7, è ovvio che il dominio è dato dall'insieme dei valori da cui parte una freccia e il codominio da quelli in cui arriva almeno una freccia.

Riconsideriamo gli esempi proposti. Vediamo che vi sono casi nei quali ogni elemento di A ha un solo corrispondente in B mediante la $\Re$ ed ogni elemento di B è corrispondente di un solo elemento di A (macchine/targhe); casi in cui alcuni elementi di A hanno più corrispondenti in B mediante la $\Re$ (numeri civici/appartamenti); casi in cui alcuni elementi di B sono corrispondenti di più di un elemento di A (appartamenti/numeri civici); casi in cui alcuni elementi di A non hanno corrispondenti (fidanzati/fidanzate) ed altri in cui alcuni elementi di B non sono corrispondenti di nessun elemento in A (fidanzate/fidanzati). Abbiamo allora bisogno di distinguere con opportune definizioni i vari casi descritti.

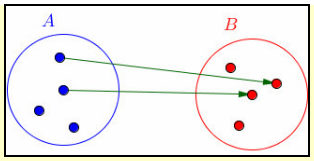
Definizione 7

Una relazione $\Re : A \to B$ si dice una **funzione** se ogni elemento di A ha al più un corrispondente in B mediante la $\Re$.

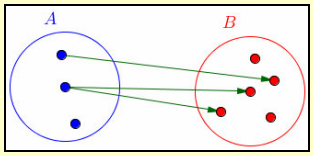
Nella precedente definizione al più un corrispondente significa zero od un corrispondente. Da un punto di vista grafico, una funzione è facilmente riconoscibile perché da ogni elemento di A "parte" al più una freccia.

Esempio 12

- La relazione rappresentata dal diagramma seguente è una funzione



- Non è invece una funzione quella rappresentata da questo diagramma



L'angolo storico

Il termine ***funzione*** è dovuto al grande filosofo e matematico tedesco del '600 Gottfried Wilhelm Leibniz, che coniò anche il termine *funzione di.* Invece il simbolo $f(x)$ per indicare l'elemento corrispondente di x mediante la funzione f, è stato introdotto nel 1734 dall'altro grande matematico Leonhard Euler.

Adesso cominciamo a distinguere fra loro le funzioni.

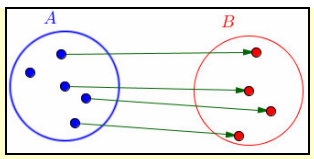
Definizione 8

Una funzione $f : A \to B$, si dice **iniettiva** se ogni elemento di B è corrispondente di al più un elemento di A mediante la f.

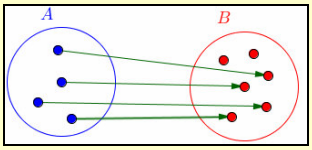
Graficamente una funzione iniettiva si riconosce se ad ogni elemento del codominio giunge al massimo una freccia.

Esempio 13

- Il diagramma seguente rappresenta una funzione iniettiva



- Non è invece iniettiva la funzione associata a quest'altro diagramma



Ovviamente una funzione $f : A \to B$ non può essere iniettiva se $|A| < |B|$, mentre può esserlo, come si vede nell'esempio precedente, se $|A| > |B|$.

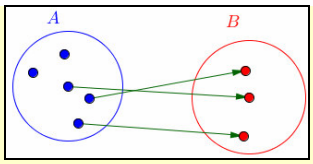
Definizione 9

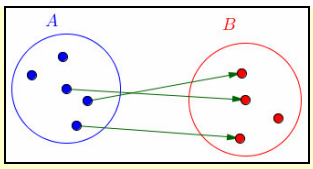
Una funzione $f : A \to B$, si dice **suriettiva** se ogni elemento di B è corrispondente di qualche elemento di A mediante la f.

Da un punto di vista grafico, una funzione suriettiva è riconoscibile perché ad ogni elemento di B giunge almeno una freccia.

Esempio 14

- Il diagramma seguente rappresenta una funzione suriettiva





- Non è invece suriettiva la funzione associata a quest'altro diagramma

Una funzione $f : A \to B$ può essere suriettiva indipendentemente dalle relazioni che ci sono fra le cardinalità dei due insiemi, cioè può essere $|A| > |B|$, $|A| = |B|$ o $|A| > |B|$.
Infine consideriamo la funzione che verifica entrambe le proprietà viste in precedenza.

Definizione 10

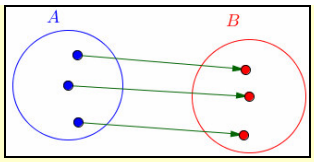
Una funzione $f : A \to B$, si dice **biiettiva** o anche una **corrispondenza biunivoca** se è sia iniettiva che suriettiva.

Che cosa significa?

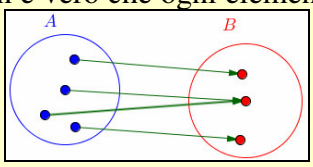
Iniettiva viene da iniettare, estensione del movimento della iniezione, mediante la quale operazione un liquido viene inserito in un determinato luogo.
Suriettiva, anche detta su tutto, cioè la funzione agisce su tutto l'insieme di arrivo. Il suffisso ettiva viene messo per "intonazione" con gli altri vocaboli.
Biiettiva è nel senso di doppiamente (bis) iniettiva, quindi in un senso e nell'altro.

La particolarità di una funzione di questo genere sta nel fatto che conoscendo un elemento di A possiamo individuare il suo corrispondente (conoscendo la targa individuiamo la macchina); analogamente conoscendo un elemento di B sappiamo a chi esso corrisponde (conoscendo la macchina individuiamo senza errori la sua targa).

Esempio 15



- Il diagramma seguente rappresenta una corrispondenza biunivoca
- La funzione associata a quest'altro diagramma mostrato nella successiva figura, non è una corrispondenza biunivoca, perché due elementi di A hanno lo stesso corrispondente, pertanto non è vero che ogni elemento di B corrisponde ad un solo elemento di A.



- La funzione che associa ad ogni bottone di una giacca o di una camicia il suo occhiello è una corrispondenza biunivoca, anche se dovessero esservi alcuni bottoni esclusivamente ornamentali in tal caso essi infatti non rientreranno nel dominio della funzione.
- La funzione che opera dall'insieme delle persone all'insieme dei cognomi, associando ad ogni persona il proprio cognome (anche se formato da più parole: Dragoni Sforza, Scirè Scappuzzo, ...) non è biiettiva perché è suriettiva ma non iniettiva.
- La funzione che associa ad una sedia situata in una classe lo studente che vi sta abitualmente seduto, in un giorno nel quale nella classe vi sono degli assenti è iniettiva ma non suriettiva.
- La funzione che associa ad ogni studente il banco nel quale è seduto non è né iniettiva e né suriettiva se vi sono banchi vuoti.

Una funzione $f : A \to B$ può essere biiettiva solo se $|A| = |B|$.
Passiamo ad un altro discorso. Nell'esempio precedente dei fidanzati abbiamo visto che abbiamo considerato indifferentemente la relazione che ad ogni maschio associa la sua fidanzata e quella che ad ogni femmina associa il suo fidanzato. Se volessimo capovolgere invece la relazione che ad ogni appartamento associa un numero civico non potremmo farlo perché per esempio al numero 15 di via Verdi a cui corrisponde un edificio di tre piani, con tre appartamenti per piano, non sapremmo quale dei nove appartamenti dell'edificio do-

vremmo associargli. Quando è allora possibile questa inversione? Ovviamente quando la funzione diretta è iniettiva.

Definizione 11

Data una funzione iniettiva $f: A \to B$, diciamo sua **funzione inversa**, la funzione la cui legge associa a tutti gli elementi del codominio di f gli elementi di A di cui essi sono corrispondenti.

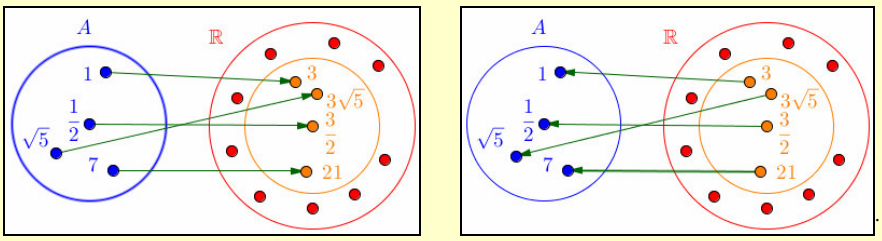
Notazione 7

Data una funzione iniettiva $f: A \to B$, indichiamo la sua funzione inversa con la scritta $f^{-1}: B \to A$.

È evidente che nell'inversione di una funzione si scambiano dominio e codominio fra di loro.

Esempio 16

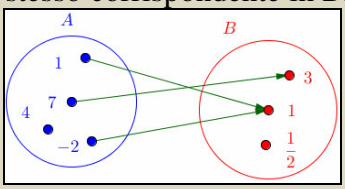
- Sia $f: \left\{1, \frac{1}{2}, \sqrt{5}, 7\right\} \to \mathbb{R}$, definita dalla legge *a ogni numero si associa il proprio triplo*, evidentemente si ha: $cod(f) = \left\{3, \frac{3}{2}, 3\cdot\sqrt{5}, 21\right\}$, pertanto la funzione è iniettiva e la sua inversa sarà $f^{-1}: \left\{3, \frac{3}{2}, 3\cdot\sqrt{5}, 21\right\} \to \left\{1, \frac{1}{2}, \sqrt{5}, 7\right\}$, la cui legge è: *a ogni numero si associa il proprio terzo*.
- Da un punto di vista grafico la funzione inversa di una funzione iniettiva si ottiene semplicemente scambiando il "verso" delle frecce. Così il primo grafico seguente, che rappresenta la f, in cui abbiamo evidenziato il sottoinsieme *codominio*, si trasforma nel secondo, che rappresenta la f^{-1}



Verifiche

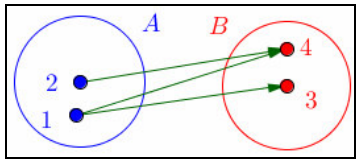
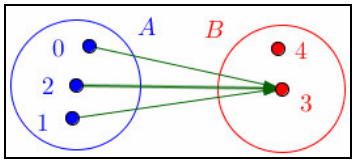
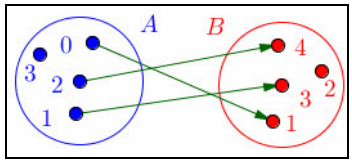
Lavoriamo insieme

Il seguente grafico rappresenta una relazione fra due insiemi ma non una funzione, perché ci sono due elementi di A, (–2 e 1), che hanno lo stesso corrispondente in B, 1. Il dominio della relazione è {–2; 1; 7}, il codominio è {1, 3}.

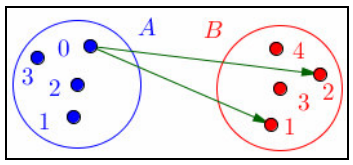
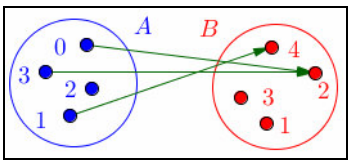
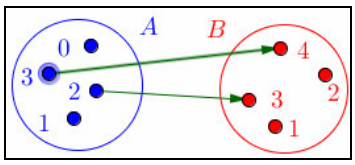


Dati i seguenti diagrammi o leggi, determinare quali rappresentano funzioni, quindi determinare dominio e codominio. Nelle risposte $\mathfrak{R}$ indica una relazione non funzione, f una funzione

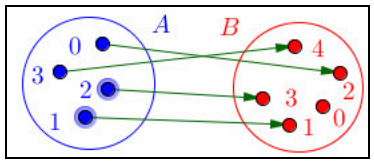
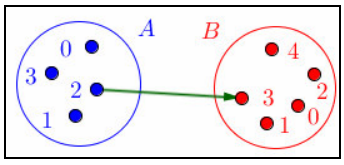
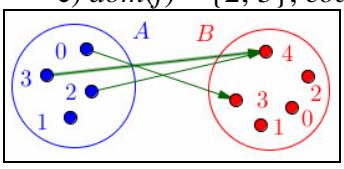
Livello 1

1. a)  b)  c) 

[a) $dom(\mathfrak{R}) = \{1; 2\}$; $cod(\mathfrak{R}) = \{3;4\}$; b) $dom(\mathfrak{R}) = \{1; 2; 3\}$; $cod(\mathfrak{R}) = \{3\}$; c) $dom(f) = \{0; 1; 2\}$; $cod(f) = \{1; 3; 4\}$]

2. a)  b)  c) 

[a) $dom(\mathfrak{R}) = \{0\}$; $cod(\mathfrak{R}) = \{1; 2\}$; b) $dom(\mathfrak{R}) = \{0; 1; 3\}$; $cod(\mathfrak{R}) = \{2; 4\}$; c) $dom(f) = \{2; 3\}$; $cod(f) = \{3; 4\}$]

3. a)  b)  c) 

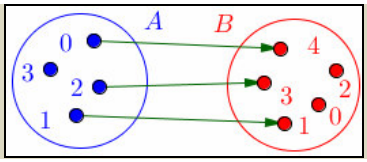
[a) $dom(f) = \{0; 1; 3\}$; $cod(f) = \{1; 2; 3; 4\}$; b) $dom(f) = \{2\}$; $cod(f) = \{3\}$; c) $dom(\mathfrak{R}) = \{0; 2; 3\}$; $cod(\mathfrak{R}) = \{3; 4\}$]

Livello 2

4. *A ogni numero il suo inverso*; $A = \{0; 1; 2\}$; $B = \{0; 1/2; 1; 2\}$ [$dom(f) = \{1; 2\}$; $cod(f) = \{1/2; 1\}$]
5. *A ogni persona il proprio codice fiscale* A = {cittadini italiani}, B = {sequenze di 16 fra lettere e numeri} [$dom(f) = A$, $cod(f)$ = {sequenze del tipo LLLLLLNNLNNLNNNL}, in cui L significa lettera e N numero]
6. *A ogni numero naturale quante zampe ha un animale*, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, B = {Leone, Scimmia, Serpente, Zebra} [$dom(\mathfrak{R}) = \{2, 4\}$, $cod(\mathfrak{R}) = B \setminus$ {Serpente}]
7. *A ogni religione il numero dei suoi dei*, A = {Cristianesimo, Islamismo, Induismo}, B = {0, 1, più di 1} [$dom(f) = A$, $cod(f)$ = {1, più di 1}]
8. *A ogni squadra di calcio il numero di scudetti che ha vinto*, A = {Genoa, Roma, Torino, Udinese}, B = {0; 1; 2; 5; 9; 12} [$dom(f)$ = {Genoa, Roma, Udinese}, $cod(f) = \{0; 2; 9\}$]
9. *A ogni numero il numero di cui è quadrato*, $A = \{0; 1; 2; 4\}$; $B = \{–1; 0; 1; 2; 3\}$ [$dom(\mathfrak{R}) = \{0; 1; 4\}$, $cod(\mathfrak{R}) = B \setminus \{3\}$]
10. *A ogni numero il numero di cui è quadrato*, $A = \{0; 1; 2; 4\}$; $B = \{0; 1; 2; 3\}$ [$dom(f) = \{0; 1; 4\}$, $cod(f) = B \setminus \{3\}$]

Lavoriamo insieme

Il seguente grafico rappresenta una funzione iniettiva ma non suriettiva, perché da ogni elemento di A parte al più una freccia, ma non tutti gli elementi di B sono raggiunti da frecce. Se nella stessa rappresentazione, eliminassimo 3 da A e {0; 2} da B, avremmo invece una corrispondenza biunivoca da {0; 2; 3} a {1; 3; 4}.



Determinare quali fra le seguenti funzioni sono iniettive (I), suriettive (S), corrispondenze biunivoche (B) o nessuna di queste proprietà (N)

Livello 1

11. Ai libri di una biblioteca associa lo scaffale nel quale sono riposti. [*I*, *B* se non ci sono scaffali vuoti]
12. Ai libri di una biblioteca associa il loro numero di inventario; i libri in più volumi hanno diverso numero di inventario. [*I*]
13. Ai libri di una biblioteca associa il loro numero di inventario; i libri in più volumi hanno lo stesso numero di inventario. [*N* se ci sono libri in più volumi]
14. A ogni cittadino italiano associa il proprio codice fiscale. [*B*]
15. A un gruppo di degenti di un ospedale associa la loro temperatura corporea rilevata a un dato orario di un certo giorno. [*N* se ci sono più di una persona con la stessa temperatura, in generale se ci sono più di 70 persone (temperature da 35,0 a 41,9)]
16. A ogni numero naturale associa il proprio doppio. [*I*]
17. A ogni materia di un corso di studi associa il professore che la insegna. [*S* se ci sono professori che insegnano più di una materia]
18. $f: \{1; 3; 5; ..; 25\} \to \{2; 4; 6; ...; 26\}$; associa a ogni numero il proprio successivo. [*B*]

Livello 2

19. $f: \{27; 351; 424; 521; 1246\} \to \{1; 2; 3; 4\}$, associa a ogni numero quante cifre ha. [*N*]
20. $f: \{13; 57; 73; 112; 2749\} \to \{2; 3; 4\}$, associa a ogni numero quante cifre ha. [*S*]
21. $f: \{11; 12; 13; 14; 15\} \to \{1; 2; 3; 4\}$, associa a ogni numero la somma delle proprie cifre. [*I*]
22. A ogni numero intero associa il proprio quadrato. [*N*]
23. A ogni frazione ridotta ai minimi termini associa il numero razionale che essa rappresenta. [*B*]
24. A ogni numero decimale limitato associa la relativa frazione ridotta ai minimi termini. [*B*]

Livello 3

25. $f: \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{27}, \frac{2}{7}, \frac{4}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{3}\right\} \to \{1;2;3\}$, associa a ogni frazione il numero delle cifre del periodo del numero che la frazione rappresenta. [*S*]
26. $f: \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}\right\} \to \{1;2;3\}$, associa a ogni frazione il numero delle cifre decimali del numero che la frazione rappresenta. [*S*]
27. $f: \{1; 2; 3; 4; 5\} \to \{1; 2; 3; 4; 5\}$, associa a ogni numero dispari il suo doppio e a ogni numero pari la sua metà. [*I*]

Date le seguenti relazioni determinare il loro dominio e il loro codominio

Livello 1

28. La relazione definita sull'insieme *A* delle donne sposate che a ogni donna associa la propria suocera. [*dom* = *A*; *cod* = le donne che sono suocere]
29. La relazione definita sull'insieme delle squadre di calcio della serie *A* italiana di questo anno, che a ogni squadra associa la città che essa rappresenta.
30. La relazione definita sull'insieme degli alunni della tua classe che a ogni studente associa il numero d'ordine con il quale è trascritto sul registro di classe.
31. La relazione definita sull'insieme degli abitanti di una certa città che a ogni persona associa la via nella quale egli risiede.
32. $f: \{-2; -1; 0; 1; 2\} \to \{1; 4; 9\}$, associa a ogni numero il proprio quadrato. [$dom(f) = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$, $cod(f) = \{1; 4\}$]
33. $f: \{1; 22; 333; 4444\} \to \{0; 1; 2; 3; 4\}$, che associa a ogni numero quante cifre ha. [$dom(f) = \{1; 22; 333; 4444\}$, $cod(f) = \{1; 2; 3; 4\}$]
34. $f: \{-4; 1; 3; 5\} \to \{3; 9; 12; 15\}$, che associa a ogni numero il proprio triplo. [$dom(f) = \{1; 3; 5\}$, $cod(f) = \{3; 9; 15\}$]

Lavoriamo insieme

Vogliamo determinare dominio e codominio della funzione $f: A = \{2; 3; 5; 8; 11\} \to B = \{1; 2; 4; 6; 10\}$, definita dalla legge *"a ogni elemento di A associa la propria metà se è un numero pari, il proprio doppio se è un numero dispari"*. I numeri pari di A sono 2 e 8 quindi dovrebbero avere come corrispondenti 1 e 4, che entrambi appartengono a B. I rimanenti elementi di A sono dispari, allora a essi dovremmo associare il loro doppio, cioè 6, 10 e 22. Ma solo 6 è un elemento di B, pertanto $dom(f) = \{2; 3; 8\}$, $cod(f) = \{1; 4; 6\}$.

Date le seguenti funzioni determinare il loro dominio e il loro codominio

Livello 2

35. $f: A = \{2; 3; 5; 8; 11\} \to B = \{1; 2; 4; 16; 20\}$ definita dalla legge *"a ogni elemento di A associa il proprio quadrato se è un numero pari, il doppio del proprio precedente se è un numero dispari"*.
[$dom(f) = \{2; 3; 11\}$, $cod(f) = \{4; 20\}$]

36. $f: A = \{1; 2; 3; 4; 5\} \to B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ definita dalla legge *"a ogni elemento di A associa il suo consecutivo se è un numero pari, il suo precedente se è un numero dispari"*.
[$dom(f) = \{2; 3; 4; 5\}$, $cod(f) = \{2; 3; 4; 5\}$]

37. $f: A = \{1; 2; 4; 5; 6\} \to B = \{1; 2; 4; 6; 10\}$ definita dalla legge *"a ogni elemento di A associa la sua metà se è un numero pari, il suo consecutivo se è un numero dispari"*.
[$dom(f) = \{1; 2; 4; 5\}$, $cod(f) = \{1; 2; 6\}$]

38. $f: A = \{2; 3; 4; 5; 6\} \to B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ definita dalla legge *"a ogni elemento di A associa il suo precedente se è un numero pari, il suo doppio se è un numero dispari"*.
[$dom(f) = \{2; 4; 6\}$, $cod(f) = \{1; 3; 5\}$]

39. $f: A = \{2; 4; 5; 6; 7\} \to B = \{1; 2; 5; 8; 9\}$, definita dalla legge *"a ogni elemento di A associa il suo precedente se è un numero pari, la metà del suo successivo se è un numero dispari"*.
[$dom(f) = \{2; 6\}$, $cod(f) = \{1; 5\}$]

Lavoriamo insieme

Quale fra le seguenti leggi descrive la relazione che lega fra loro gli elementi descritti dalla seguente tabella?

x	1	2	3	4
y	2	6	9	0

A) $4x - 2$ B) $-\frac{5}{3}x^3 + \frac{19}{2}x^2 - \frac{77}{6}x + 7$ C) $\frac{43}{6}x^3 - \frac{105}{2}x^2 + \frac{334}{3}x - 64$
D) $-\frac{11}{6}x^3 + \frac{21}{2}x^2 - \frac{44}{3}x + 8$ E) $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 3$

Per rispondere alla questione basta sostituire in ciascuna espressione alla x i valori della tabella, se i risultati coincidono con i corrispondenti valori abbiamo ottenuto la corretta espressione. Nella tabella seguente proponiamo questi calcoli, indicando le rispettive funzioni con la lettera che le precede nelle risposte possibili.

x	***A***	***B***	***C***	***D***	***E***
1	2	2	2	2	2
2	6	6	6	6	6
3	10	9	– 9	9	9
4	14	1	0	0	11

Notiamo che l'unica relazione che assume tutti e quattro i valori della tabella è la D.

Associare la legge alla relazione descritta dalla relativa tabella

Livello 2

40.

x	–1	0	1	2
y	1	2	–1	3

A) $-\frac{1}{6}x^3 + 2x^2 - \frac{5}{6}x - 2$ B) $\frac{5}{6}x^3 - x^2 - \frac{5}{6}x + 2$ C) $\frac{11}{6}x^3 - 2x^2 - \frac{17}{6}x + 2$
D) $\frac{5}{6}x^3 - 2x^2 - \frac{11}{6}x + 2$ E) $\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 - \frac{7}{3}x + 2$ [C]

41.

x	–2	–1	0	1	2
y	0	–1	1	–2	3

A) $\frac{13}{24}x^4 + \frac{3}{4}x^3 - \frac{49}{24}x^2 - \frac{9}{4}x + 1$ B) $\frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{12}x^3 - \frac{7}{8}x^2 - \frac{11}{12}x - 1$
C) $\frac{5}{24}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{17}{24}x^2 + \frac{7}{4}x + 1$ D) $\frac{5}{8}x^4 - \frac{1}{12}x^3 - \frac{25}{8}x^2 - \frac{5}{12}x + 1$ E) $\frac{7}{8}x^4 + \frac{5}{12}x^3 - \frac{27}{8}x^2 - \frac{11}{12}x + 1$ [E]

Relazioni binarie

Vogliamo considerare le proprietà delle *relazioni* che legano fra di loro due elementi (fidanzati, coniugi, cugini, amici, soci, numeri uguali, segmenti uguali, numeri divisibili fra loro, ...). Cioè le cosiddette *relazioni binarie*.

Notazione 8

- Per dire che l'elemento $a \in A$ è in relazione con l'elemento $b \in B$, scriveremo $a \,\Re\, b$, oppure $x \,\Re\, y \Leftrightarrow$ "proprietà", in cui al posto della scritta "proprietà" indicheremo la relazione che lega fra loro i generici elementi x e y.
- Se a non è in relazione con b scriveremo $a \,\not\Re\, b$.

Una relazione binaria da A in B quindi è collegata a un sottoinsieme di $A \times B$, nel quale vi stanno tutte le coppie (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$, per tutti gli $a \in A$ che hanno un corrispondente $b \in B$ secondo una certa legge.

Esempio 17

- Detta $\Re$ la relazione di matrimonio, Carlo $\Re$ Giulia, indica che Carlo è il marito di Giulia; quindi, detto A l'insieme dei maschi e B quello delle femmine, $\Re$ è il sottoinsieme di $A \times B$ formato da tutte le coppie i cui primi elementi sono i maschi sposati e i corrispondenti secondi elementi le relative mogli.
- Gianni $\not\Re$ Giulia invece, per la stessa relazione precedente, indica che Gianni non è il marito di Giulia.
- Siano $A = \{2; 4; 6; 8\}$ e $B = \{1; 2; 3; 4\}$ e $\Re$: $A \to B$ definita da: $a \,\Re\, b \Leftrightarrow a$ è multiplo di b; $\Re$ può essere rappresentata dall'insieme $\{(2; 1), (2; 2), (4; 1), (4; 2), (4; 4), (6; 1), (6; 2), (6; 3), (8; 1), (8; 2), (8; 4)\}$, che è un sottoinsieme di $A \times B$.

Naturalmente per le relazioni possiamo usare i concetti già visti di *dominio* e *codominio*.

Esempio 18

- Nell'insieme $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ dei lanci ottenibili con un dado regolare, definiamo la relazione: $x \,\Re\, y \Leftrightarrow x + y = 3$. Cioè mettiamo fra loro in relazione due punteggi se la loro somma è pari a 3. Quindi $\Re = \{(1; 2), (2; 1)\}$ che sono le uniche coppie che sono in relazione, dato che la loro somma è appunto 3. Pertanto $dom(\Re) = \{1; 2\} = cod(\Re)$.
- Sia la relazione $a \,\Re\, b \Leftrightarrow a = b + 1$, con $\Re$: $A \to B$, $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Abbiamo $\Re = \{(1; 2), (2; 3), (3; 4), (4; 5), (5; 6)\}$; $dom(\Re) = A \setminus \{1\}$ (infatti $1 = 0 + 1$, ma $0 \notin B$). $cod(\Re) = B \setminus \{6\}$ (infatti $6 + 1 = 7$, ma $6 \notin A$).

Consideriamo adesso quelle particolari relazioni $\Re : A \to A$, definite su uno stesso insieme. La relazione di matrimonio non è per esempio di questo tipo, poiché l'insieme di partenza sarà quello dei maschi o delle femmine e quello di arrivo sarà invece quello delle femmine o dei maschi rispettivamente. Vogliamo prendere in esame le proprietà verificate dalle più importanti relazioni matematiche che operano sullo stesso insieme, considerando per esempio la relazione di uguaglianza fra numeri.

Esempio 19

- Chiunque riconosca i segni grafici può affermare che le seguenti scritte rappresentano enunciati logici veri, anche se non le capisce, perché i simboli presenti dai due lati del segno di uguale sono esattamente gli stessi e nello stesso ordine di successione:

$$82 = 82;\ 1 + 2 - 3 = 1 + 2 - 3\ ;\ 3 + \frac{x-7}{2} + \frac{x-y}{x+y} = 3 + \frac{x-7}{2} + \frac{x-y}{x+y}\ ;\ sin(x) = sin(x)$$

- Invece la scritta $82 = 45 \cdot 2 - 2^3$, è considerata vera solo da chi conosce il significato dei simboli e sa eseguire i calcoli;
- Allo stesso modo chi non sa eseguire i calcoli e non conosce il significato di proprietà commutativa non può affermare che $3 + 4 = 4 + 3$ è vera.

Quindi tenuto conto dell'esempio precedente potremmo scrivere benissimo $a = a$, e dire che questa è una scritta vera, indipendentemente da quel che rappresenta il simbolo a. Questa proprietà ha un nome ben preciso.

Definizione 12

Diciamo che una relazione $\Re$ definita su un insieme A, gode della **proprietà riflessiva**, se ogni elemento di A è in relazione con se stesso; in simboli se $a \,\Re\, a$, per ogni $a \in A$.

Esempio 20

- Consideriamo la seguente relazione definita sull'insieme $\mathbb{N}$: $x \,\Re\, y \Leftrightarrow x$ è divisibile per y (nell'ordine indicato). Questa relazione gode della proprietà riflessiva, infatti ogni numero naturale è divisibile per se stesso.
- Consideriamo invece la seguente relazione, sempre definita in $\mathbb{N}$: $x \,\Re\, y \Leftrightarrow \text{MCD}(x, y) = 1$. La relazione equivale a dire che i numeri sono primi fra loro, cioè non hanno alcun divisore comune diverso da 1. Poiché la proprietà riflessiva stavolta diventa $x \,\Re\, x \Leftrightarrow \text{MCD}(x, x) = 1$, questo è vero solo se $x = 1$, mentre in generale $\text{MCD}(x, x) = x$. Quindi la nostra relazione *non* gode della proprietà riflessiva.

L'ultimo esempio ci induce a considerare anche la proprietà contraria di quella riflessiva.

Definizione 13

Diciamo che una relazione $\Re$ definita su un insieme A gode della **proprietà antiriflessiva**, se ogni elemento di A non è in relazione con se stesso; in simboli se $a \,\not\Re\, a$, per ogni $a \in A$.

Esempio 21

La relazione $x \,\Re\, y \Leftrightarrow x > y$, definita in $\mathbb{R}$, verifica la proprietà antiriflessiva, cioè $x \,\not\Re\, x \Leftrightarrow x \leq x$, dato che qualunque numero reale x consideriamo non si ha mai $x > x$, ma invece è $x = x$.

Potremmo pensare che ogni relazione binaria debba godere della proprietà riflessiva o di quella antiriflessiva. Mostriamo che non è vero.

Esempio 22

La relazione già vista, $x \,\Re\, y \Leftrightarrow \text{MCD}(x, y) = 1$, non gode della proprietà antiriflessiva, infatti non è vero che $x \,\not\Re\, x \Leftrightarrow \text{MCD}(x, x) \neq 1$, per ogni numero naturale x, infatti $\text{MCD}(1, 1) = 1$.

Quindi non è detto che ogni relazione binaria debba essere riflessiva o antiriflessiva, ma certamente non è possibile che sia riflessiva **e** antiriflessiva.
Continuiamo a considerare le proprietà più importanti dell'uguaglianza fra numeri.

Esempio 23

Consideriamo uguaglianze "derivate" da altre uguaglianze:

$$7 = 3 + 4 \Rightarrow 3 + 4 = 7;\ 3 \cdot 4 = 2^4 - 2^2 \Rightarrow 2^4 - 2^2 = 3 \cdot 4$$

Esse stabiliscono la proprietà di poter scambiare fra di loro i due membri dell'uguaglianza senza che essa perda valore.

Generalizziamo anche la precedente proprietà alle relazioni binarie.

Definizione 14

Diciamo che una relazione $\Re$, definita su un insieme A, gode della **proprietà simmetrica**, se dalla validità di $a \,\Re\, b$ segue la validità di $b \,\Re\, a$, quali che siano gli elementi a e b di A, purché sia $a \neq b$.

Osserviamo che la proprietà simmetrica dice che se vi è una certa relazione fra due elementi a e b in questo ordine, essa vale anche nell'ordine inverso.

Esempio 24

- La relazione $x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow \text{MCD}(x, y) = 1$, gode della proprietà simmetrica, infatti se $\text{MCD}(x, y) = 1$ è vero che anche $\text{MCD}(y, x) = 1$. Infatti se x e y non hanno divisori in comune neanche y e x ne hanno.
- Invece la relazione $\mathfrak{R}$ di divisibilità fra numeri interi non gode della proprietà simmetrica, infatti: è vero che $4 \mathfrak{R} 2$ (4 è divisibile per 2) ma non è vero che $2 \mathfrak{R} 4$ (2 **non** è divisibile per 4).

Consideriamo adesso una proprietà contraria di quella simmetrica.

Definizione 15

Diciamo che una relazione $\mathfrak{R}$, definita su un insieme A, gode della **proprietà antisimmetrica**, se dalla validità di $a \mathfrak{R} b$ segue la validità di $b \mathfrak{R} a$, quali che siano gli elementi a e b di A, con $a \neq b$.

Ancora una volta le relazioni di simmetria e antisimmetria si escludono a vicenda ma non sono complementari, vi sono infatti relazioni che non sono né simmetriche, né antisimmetriche.

Esempio 25

- La relazione $\mathfrak{R}$ di divisibilità fra numeri interi diversi tra loro gode della proprietà antisimmetrica, infatti, se $x \mathfrak{R} y$, cioè x è divisibile per y (per esempio $4 \mathfrak{R} 2$) ovviamente $y \mathfrak{R} x$ (2 non è divisibile per 4).
- La relazione $x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow x$ è divisibile per 2 e y è divisibile per 3, non verifica la proprietà simmetrica, dato che $4 \mathfrak{R} 6$ (4 è divisibile per 2 e 6 è divisibile per 3) ma $6 \mathfrak{R} 4$ (6 è divisibile per 2 ma 4 non è divisibile per 3). Ma non verifica neanche la proprietà antisimmetrica, dato che $6 \mathfrak{R} 30$ (6 è divisibile per 2 e 30 è divisibile per 3) e $30 \mathfrak{R} 6$ (30 è divisibile per 2 e 6 è divisibile per 3).

Completiamo il nostro studio sulle proprietà dell'uguaglianza.

Esempio 26

Mediante la conoscenza della validità di due uguaglianze ne possiamo riconoscere la verità di una terza. Infatti: $9 + 7 = 4^2 \wedge 4^2 = 19 - 3 \Rightarrow 9 + 7 = 19 - 3$, e anche $18 - 3 + 2 \cdot 5 = 6^2 - (10 + 1) \wedge 6^2 - (10 + 1) = 25 \Rightarrow 18 - 3 + 2 \cdot 5 = 25$.

Anche in questo caso generalizziamo la proprietà.

Definizione 16

Diciamo che una relazione $\mathfrak{R}$ definita su un insieme A, gode della **proprietà transitiva**, se dalla validità di $a \mathfrak{R} b$ e $b \mathfrak{R} c$ segue la validità di $a \mathfrak{R} c$, quali che siano gli elementi a, b e c di A.

Che cosa significa?

Transitiva è un vocabolo derivato dal verbo transitare, che significa passare (ricordiamo a tal proposito il divieto di transito), infatti la proprietà transitiva permette di "passare" dal primo al terzo elemento mediante il secondo che, comune a entrambi, è un "nodo di collegamento".

Esempio 27

- La relazione di divisibilità, già vista più volte, gode della proprietà transitiva. Verifichiamolo su casi numerici che possono facilmente generalizzarsi. 105 è divisibile per 15 ($105 = 15 \cdot 7$) $\wedge$ 15 è divisibile per 3 ($15 = 3 \cdot 5$) $\Rightarrow$ 105 divisibile per 3 ($105 = 15 \cdot 7 = 3 \cdot (5 \cdot 7)$).
- Ecco ora un esempio di relazione che non gode della proprietà transitiva. $x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow x + y$ è multiplo di 5. Ora $2 \mathfrak{R} 3$ ($2 + 3 = 5$ è multiplo di 5), $5 \mathfrak{R} 10$ ($5 + 10 =$ è multiplo di 5), ma $2 \mathfrak{R} 12$ ($2 + 12 = 14$ non è multiplo di 5).

Definizione 17

Diciamo che una relazione binaria $\mathfrak{R} : A \to A$, verifica la **proprietà di connessione** se dati comunque due elementi distinti x, y di A, è vera una almeno delle due seguenti scritte: $x \mathfrak{R} y$ o $y \mathfrak{R} x$.

La precedente proprietà stabilisce il fatto che vi è sempre una relazione fra due qualsiasi elementi distinti dell'insieme su cui essa è definita.

Esempio 28

- La relazione di divisibilità fra numeri interi non verifica la proprietà di connessione. Consideriamo per esempio i numeri 3 e 4, allora né 3 è divisibile per 4 e né 4 è divisibile per 3.
- Invece la relazione di essere *maggiore di*, considerata nell'insieme dei numeri naturali, è connessa poiché presi comunque due numeri naturali distinti ve ne è esattamente uno che è maggiore dell'altro.
- Anche la relazione di essere *non più alto*, nell'insieme delle persone verifica la proprietà di connessione, dato che, prese comunque due persone o hanno la stessa altezza, quindi sono in relazione doppia fra loro, o ve ne è uno che è più basso dell'altro, quindi solo questo è in relazione con il secondo.

Per studiare meglio le relazioni binarie risulta molto comodo costruire una tabella per visualizzare le relazioni fra gli elementi, inserendo simboli diversi per dire che vi è o no relazione fra di loro nella cella individuata dalla riga e dalla colonna relative ai due elementi considerati.

Notazione 9

Data una tabella, indichiamo con il simbolo (h, k) la cella individuata dalla riga di posto h e dalla colonna di posto k.

Definizione 18

Data una tabella, diciamo sua **diagonale principale** l'insieme degli elementi che si trovano nelle celle individuate da righe e colonne aventi lo stesso numero d'ordine.

Spieghiamoci meglio con un esempio.

Esempio 29

Consideriamo l'insieme $A = \{12, 15, 18, 23, 24, 35, 38, 41\}$ e definiamo su di esso la relazione $x \,\Re\, y \Leftrightarrow x$ *e* y *hanno la stessa cifra delle decine*. Costruiamo la tabella associata alla relazione.

$x\backslash y$	12	15	18	23	24	35	38	41
12	X	X	X					
15	X	X	X					
18	X	X	X					
23				X	X			
24				X	X			
35						X	X	
38						X	X	
41								X

Abbiamo indicato con una *X* il fatto che i due elementi sono in relazione fra di loro, mentre abbiamo lasciato bianca la cella che si riferisce a due elementi non in relazione fra loro.
La tabella ci aiuta a verificare facilmente la validità di alcune delle proprietà enunciate nel paragrafo precedente. Infatti, dire che la relazione gode della proprietà riflessiva equivale a dire che tutte le celle che si riferiscono agli stessi elementi debbano essere riempite con X, cioè tutte le celle di tipo (h, h), ossia quelle della diagonale principale. Quindi la nostra relazione è riflessiva.
Per la simmetria invece dobbiamo tenere conto che, se essa vale, tutte le volte che si traccia una X su una cella di tipo (h, k) analogo segno debba farsi sulla casella (k, h), cioè se pensiamo di piegare la tabella lungo la sua diagonale principale le celle che vanno così a sovrapporsi debbono contenere lo stesso segno. Quindi la relazione è anche simmetrica.

Dall'esempio precedente segue anche che se la relazione fosse antiriflessiva nessuna X dovrebbe essere sulle celle di tipo (h, h), se fosse antisimmetrica per ogni X sulla cella (h, k) non deve esservi alcuna X sulla cella (k, h).
Una relazione binaria può anche essere rappresentata utilizzando un grafico detto **a frecce** o **sagittale** (*sagitta* in latino significa appunto freccia; ricordiamo che il simbolo astrologico del sagittario è appunto un arciere), ossia se $x \,\Re\, y$, da x facciamo partire una freccia la cui punta è rivolta verso y. Tale tipo di rappresentazione è utile per relazioni definite su insiemi dalla cardinalità relativamente piccola (perché già per insiemi

di cardinalità 5, riferiti a una relazione connessa e simmetrica dovrebbero disegnarsi ben 25 frecce).

Esempio 30

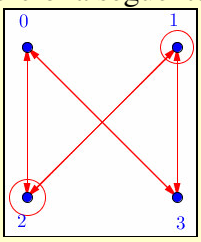
Sull'insieme $A = \{0, 1, 2, 3\}$ sia definita la relazione $x \Re y \Leftrightarrow x + y > 1 \ . \ x + y < 5$. Per studiarla meglio costruiamo la tabella di tutte le possibili addizioni fra gli elementi di A.

x\y	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0	1	2	3
1	1	2	3	4
2	2	3	4	5
3	3	4	5	6

Da questa si ricava facilmente la seguente tabella relativa alle relazioni:

x\y	**0**	**1**	**2**	**3**
0			X	X
1		X	X	X
2	X	X	X	
3	X	X		

. La rappresentazione sagittale associata a questa relazione è perciò la seguente.



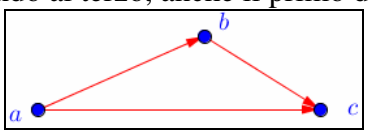
Per semplificare il grafico abbiamo scelto di indicare con una freccia a due punte, che per due elementi x e y valgono sia $x \Re y$ sia $y \Re x$ e, con un cerchio che racchiude l'elemento, che esso è in relazione con se stesso.

Tenuto conto dell'esempio precedente possiamo perciò enunciare le seguenti regole pratiche:

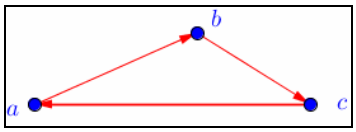
Regole di interpretazione di un grafico sagittale

1. il diagramma rappresenta una relazione che verifica la proprietà riflessiva se e solo se tutti gli elementi hanno un cerchio attorno;
2. il diagramma rappresenta una relazione che verifica la proprietà antiriflessiva se e solo se nessun elemento ha un cerchio attorno;
3. il diagramma rappresenta una relazione che verifica la proprietà simmetrica se e solo se tutte le frecce hanno la doppia punta;
4. il diagramma rappresenta una relazione che verifica la proprietà antisimmetrica se e solo se nessuna freccia ha la doppia punta.

Pertanto osservando il diagramma dell'esempio precedente, siamo in grado di dire che la relazione gode della proprietà simmetrica, ma non della proprietà riflessiva né di quella antiriflessiva.
La proprietà transitiva, poiché lega fra loro tre elementi, vale se è rappresentata in modo che, se il primo elemento è collegato al secondo e il secondo al terzo, anche il primo deve essere collegato al terzo:



se, invece, la rappresentazione sagittale sarà del tipo seguente, in cui il primo è collegato al secondo, il secondo al terzo, il terzo al primo, la proprietà transitiva non è valida.



Esempio 31

La relazione dell'esempio precedente non è transitiva poiché il triangolo di "vertici" 0, 3 e 1 nell'ordine, non è completo, infatti $0 \Re 3$, $3 \Re 1$ ma $0 \not\Re 3$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Data la relazione $\Re: A \to B$, con $A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$, $B = \{1; 2; 3; 4\}$ definita da $a \,\Re\, b \Leftrightarrow a^2 = b$, vogliamo determinarne dominio e codominio.
Il dominio è $A \setminus \{0\}$ (infatti il quadrato di 0 è 0, ma $0 \notin B$); mentre il codominio è $\{1; 4\}$ (infatti non vi è alcun elemento di A il cui quadrato valga 2 o 3).

Date le seguenti relazioni $\Re: A \to B$, determinarne dominio e codominio

Livello 1

1. $A = \{m, n, p, q\}$, $B = A$, $a \,\Re\, b \Leftrightarrow a$ precede b in ordine alfabetico. [$dom = \{m, n, p\}$, $cod = \{n, p, q\}$]
2. $A = \{2; 5; 6; 8; 11\}$, $B = \{1; 4; 6; 8; 12\}$, $a \,\Re\, b \Leftrightarrow b = a + 2$. [$dom = \{2; 6\}$, $cod = \{4; 8\}$]
3. $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{2; 3\}$, $a \,\Re\, b \Leftrightarrow a \cdot b > 2$. [$dom = A$, $cod = B$]
4. $A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$, $B = \{-3; -2; 2; 3\}$, $a \,\Re\, b \Leftrightarrow a \cdot b > 0$. [$dom = A \setminus \{0\}$, $cod = B$}]
5. $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $B = \{22; 23; 25; 27\}$, $a \,\Re\, b \Leftrightarrow a + b$ è multiplo di 3. [$dom = A$, $cod = B$]
6. $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $B = \{21; 31; 51; 71\}$, $a \,\Re\, b \Leftrightarrow a + b$ è un numero primo. [$dom = \{2\}$, $cod = \{21; 51; 71\}$]
7. $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $B = A$, $a \,\Re\, b \Leftrightarrow a + b$ è pari. [$dom = cod = A$]

Livello 2

8. $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $B = \{2; 3; 5; 7\}$, $a \,\Re\, b \Leftrightarrow a^2 - b^2$ è un numero primo. [$dom = \{3; 4\}$, $cod = \{2; 3\}$]
9. $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $B = \{2; 3; 5; 7\}$, $a \,\Re\, b \Leftrightarrow \frac{a}{b}$ rappresenta un numero periodico semplice. [$dom = A$, $cod = B$]

Lavoriamo insieme

Data la relazione definita nell'insieme dei numeri naturali maggiori di 9, espressa dalla legge: $x \,\Re\, y \Leftrightarrow$ *Il prodotto delle cifre delle decine di x e y è un numero dispari*, vogliamo stabilire quali proprietà verifica.
Intanto osserviamo che 0 non è considerato né pari né dispari; adesso cerchiamo di capire il significato della relazione. Abbiamo $432 \,\Re\, 654$, infatti le cifre delle decine da considerare sono 3 e 5 e $3 \cdot 5 = 15$, che è un numero dispari. Invece $12574 \,\not\Re\, 63$, dato che stavolta si ha: $7 \cdot 6 = 42$ che è un numero pari. Passiamo alle verifiche delle proprietà.

- La proprietà riflessiva è $x \,\Re\, x \Leftrightarrow$ *Il prodotto delle cifre delle decine di x e x è un numero dispari*; perciò, preso un numero, dobbiamo moltiplicare la sua cifra delle decine per se stessa. Allora questa proprietà non è certamente vera, se consideriamo numeri la cui cifra delle decine è un numero pari, dato che il quadrato di un numero pari è ancora pari. Per esempio $12 \,\Re\, 12$.
- Questo stesso ragionamento ci suggerisce che non vale neanche la proprietà antiriflessiva dato che, invece, il quadrato di un numero dispari è dispari. Per esempio $13 \,\Re\, 13$.
- È invece valida la proprietà simmetrica, poiché sappiamo che la proprietà commutativa della moltiplicazione è vera; infatti non dobbiamo far altro che scambiare di posto dei fattori. Per esempio $1456 \,\Re\, 1234 \Rightarrow 1234 \,\Re\, 1456$, infatti $5 \cdot 3 = 3 \cdot 5$.
- Vale anche la proprietà transitiva. $x \,\Re\, y \wedge y \,\Re\, z \Rightarrow x \,\Re\, z$. Così, se x e y sono in relazione, vuol dire che entrambe le loro cifre delle decine sono numeri dispari; quindi anche le cifre delle decine di y e z sono dispari. Ma allora le cifre delle decine di x e z sono dispari, quindi anche x e z sono in relazione. Per esempio $279 \,\Re\, 48610 \wedge 48610 \,\Re\, 812 \Rightarrow 279 \,\Re\, 812$.
- Da quel che abbiamo detto segue che non vale la proprietà di connessione, dato che se consideriamo due numeri come 121 e 31582, si ha $121 \,\not\Re\, 31582$ e $31582 \,\not\Re\, 121$.

Verificare, fra le seguenti relazioni definite negli insiemi a lato indicati, quali delle proprietà enunciate in questo paragrafo sono valide e quali no, fornendo una dimostrazione per le proprietà valide e un controesempio per quelle non valide (nelle risposte R = riflessiva, AR = antiriflessiva, S = simmetrica, AS = antisimmetrica, T = transitiva, C = di connessione, ∅ = nessuna proprietà)

Livello 1

10. La relazione di parentela nell'insieme degli esseri umani. [R; S]
11. La relazione di essere fratelli ossia di essere persone diverse e di avere almeno un genitore in comune nell'insieme degli esseri umani. [AR, S]
12. La relazione di essere "fratelli puri", ossia di essere persone diverse e figli di entrambi gli stessi genitori, nell'insieme degli esseri umani. [AR, S, T]
13. La relazione di essere multiplo di un dato numero nell'insieme dei numeri naturali. [R, AS, T]
14. $x \,\Re\, y \Leftrightarrow$ *x e y hanno la stessa cifra delle unità in* $\mathbb{N}$ (es. 74 $\Re$ 1234 ma 74 $\not\Re$ 73). [R, S, T]
15. $x \,\Re\, y \Leftrightarrow x + y > 0$, in $\mathbb{N} \setminus \{0\}$; $x \,\Re\, y \Leftrightarrow x + y > 0$, in $\mathbb{Z}$. [R, S, T, C ; S]

Livello 2

16. La relazione di essere sottoinsieme nell'insieme delle parti di un insieme non vuoto. [R, AS, T]
17. La relazione di equivalenza nell'insieme delle frazioni (due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ si dicono equivalenti se $a \cdot d = c \cdot b$). [R, S, T]
18. $x \,\Re\, y \Leftrightarrow$ *Il prodotto delle cifre delle decine di x e y è un numero pari* (0 non è considerato né pari né dispari), nell'insieme dei numeri naturali maggiori di 9. [S, T]
19. $x \,\Re\, y \Leftrightarrow x$ *è divisibile per* 2 *o y è divisibile per* 5, in $\mathbb{N}$. [$\varnothing$]
20. $x \,\Re\, y \Leftrightarrow x$ *è divisibile per* 2 *e y è divisibile per* 4, in $\mathbb{N}$. [T]

Lavoriamo insieme

Data la relazione $(x, y) \,\Re\, (z, t) \Leftrightarrow x \cdot t = y \cdot z$ definita in $E = \{(1; 2), (2; 1), (2; 2), (2; 4), (3; 3)\}$, vogliamo costruire la tabella a doppia entrata a essa relativa e, mediante tale tabella, stabilire quali proprietà verifica la relazione. Una coppia è in relazione con un'altra se il prodotto del primo elemento della prima coppia per il secondo elemento della seconda fornisce lo stesso risultato. Così $(1; 2) \,\Re\, (1; 2)$ perché $1 \cdot 2 = 2 \cdot 1$, ma $(1; 2) \not\Re (2; 1)$, perché $1 \cdot 1 \neq 2 \cdot 2$. Possiamo procedere alla compilazione della seguente tabella.

$\Re$	(1, 2)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 4)	(3, 3)
(1, 2)	X			X	
(2, 1)		X			
(2, 2)			X		X
(2, 4)	X			X	
(3, 3)			X		X

Dalle regole enunciate nella parte teorica possiamo subito dire che valgono le proprietà riflessiva e simmetrica; per la transitiva dobbiamo invece fare un ragionamento.
Consideriamo tre coppie che sono in relazione a due a due, ma poiché qui tre coppie tali distinte non ci sono dobbiamo considerarne almeno due uguali. Per esempio $(1; 2) \,\Re\, (1; 2) \wedge (1; 2) \,\Re\, (2; 4) \Rightarrow (1; 2) \,\Re\, (2; 4)$, oppure $(2; 2) \,\Re\, (3; 3) \wedge (3; 3) \,\Re\, (2; 2) \Rightarrow (2; 2) \,\Re\, (2; 2)$. Possiamo quindi concludere che è valida anche la proprietà transitiva.

Costruire le relative tabelle a doppia entrata per le seguenti relazioni negli insiemi indicati, stabilendo anche le proprietà di cui esse godono

Livello 1

21. La relazione di equivalenza nell'insieme delle frazioni $\left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{15}{10}, \frac{18}{24}, \frac{20}{15}, \frac{72}{72}\right\}$, (il precedente insieme non è un insieme di numeri ma di simboli, così può contenere due numeri uguali purché espressi in forma simbolica diversa). [R, S, T]
22. $x \,\Re\, y \Leftrightarrow x$ e y *hanno la stessa cifra delle decine*, in $A = \{123; 234; 425; 1234; 4321; 5002; 6100\}$. [$R$, S, T]
23. $x \,\Re\, y \Leftrightarrow x$ *e y divisi per* 3 *danno lo stesso resto*, in $A = \{123;244;344; 567; 778; 889\}$. [$R$, S, T]
24. $x \,\Re\, y \Leftrightarrow$ *Il prodotto della cifra delle decine di x per la cifra delle unità di y è un numero pari*, (0 non è considerato né pari né dispari), in $B = \{1234; 2345; 3456; 5784; 8950; 9201\}$. [$\varnothing$]

25. $x \,\Re\, y \Leftrightarrow x + y > 50$, in $C = \{12; 23; 34; 45; 56\}$. [$S$]

Livello 2

26. $(x, y) \,\Re\, (z, t) \Leftrightarrow x + z = y + t$, in $F = \{(1; 2), (2; 1), (2; 2), (2; 4), (3; 4)\}$. [$S$, T]
27. $x \,\Re\, y \Leftrightarrow x^2 = y^2$, in $G = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. [R, S, T]
28. $x \,\Re\, y \Leftrightarrow x - y = 2$, in $H = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. [AR, AS]
29. $x \,\Re\, y \Leftrightarrow x \cdot y > 0$, in $I = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. [S, T]

Livello 3

30. $x \,\Re\, y \Leftrightarrow x$ *è divisibile per* 2 *o* y *è divisibile per* 5, in $J = \{12; 25; 36; 45; 53; 65\}$. [$\varnothing$]
31. $x \,\Re\, y \Leftrightarrow x$ *non è divisibile per* 2 *e* y *è divisibile per* 5, in $K = \{12; 25; 36; 45; 53; 65\}$. [$\varnothing$]
32. $x \,\Re\, y \Leftrightarrow x$ *e* y *sono entrambi pari o entrambi dispari*, in $L = \{12; 25; 36; 45; 53; 65\}$. [$R$, S, T]

Lavoriamo insieme

A, B, C e D sono quattro amici che esercitano i seguenti mestieri: professore, medico, ingegnere, avvocato, ma non in quest'ordine. Noi sappiamo i seguenti fatti:

a) A, il medico e il fratello minore dell'ingegnere giocano a calcio insieme;
b) B non ha una laurea in discipline scientifiche ed è celibe;
c) C è sposato con la sorella dell'avvocato, il quale ha a sua volta sposato la sorella di C;
d) D è figlio unico e non sa giocare a calcio.

Da queste informazioni vogliamo determinare il mestiere di ciascuno dei quattro amici.

Vediamo cosa significano queste informazioni. Costruiamo una tabella a doppia entrata ponendo sulla prima colonna i nomi degli amici e sulla prima riga le quattro professioni. Il nostro intento è quello di accoppiare ogni amico al rispettivo mestiere con un processo di esclusione. Vediamo che vi sono alcune informazioni apparentemente inutili, quindi sistemiamo prima quelle che ci dicono qualcosa di più immediato. Per esempio l'informazione *a*) ci dice che A non può essere medico né ingegnere. La *b*) ci dice che B non può essere ingegnere, dato che non ha una laurea di tipo scientifico. La *c*) afferma che C non è avvocato. Otteniamo perciò la seguente tabella.

	P	M	I	A
A		N	N	
B			N	
C				N
D				

Legenda: $P =$ Professore, $M =$ Medico, I = Ingegnere, $A =$ Avvocato, N = No.

Chiaramente le informazioni fin adesso considerate non sono sufficienti a risolvere il problema. Consideriamole adesso nelle loro reciproche relazioni.

B è celibe, quindi non è l'avvocato dato che al punto *c*) si afferma che l'avvocato è sposato. D essendo figlio unico non può essere né avvocato, né ingegnere e non sapendo giocare al calcio non è neanche medico; poiché deve svolgere una delle quattro professioni, è il professore. La tabella è adesso divenuta la seguente.

	P	M	I	A
A	N	N	N	
B	N		N	N
C	N			N
D	**X**	N	N	N

Osserviamo che dato che abbiamo potuto stabilire un accoppiamento, possiamo completare la prima colonna e la quarta riga con dei no sulle altre caselle. A questo punto possiamo completare la tabella. Dato che A deve fare uno dei quattro mestieri, deve essere per forza l'avvocato, non avendo altre scelte. Per lo stesso motivo l'unico che può fare l'ingegnere è C e infine B è il medico. Nella seguente tabella abbiamo quindi gli accoppiamenti definitivi.

	P	M	I	A
A	N	N	N	**X**
B	N	**X**	N	N
C	N	N	**X**	N
D	**X**	N	N	N

Utilizzando le tabella a doppia entrata risolvere i seguenti problemi

Livello 1

33. Alessio, Beatrice, Caterina, Dino ed Elisa partecipano a un torneo di videogames. Si sa che Caterina ha battuto tutti gli altri; Elisa ha battuto Alessio e Beatrice; Dino ha battuto Alessio, Beatrice ed Elisa;

Alessio ha battuto Beatrice. Stabilire la classifica finale. [C, D, E, A, B]

34. Alla fine di un torneo di calcio a 5 squadre, in cui ogni squadra ha incontrato una volta tutte le altre, viene compilata la seguente tabella. In essa *V* significa vittoria (3 punti), *P* significa pareggio (1 punto) e *S* significa sconfitta (0 punti). Stabilire la classifica finale con i relativi punteggi per ogni squadra. È chiaro che la tabella non ha bisogno di essere riempita tutta, giacché a ogni vittoria di una squadra corrisponde la sconfitta dell'avversaria e viceversa. [I ed A 7 punti, D ed F 5 punti]

	Diavoli	Furie	Invincibili	Audaci	Incontenibili
Diavoli		*P*	*P*	*V*	*S*
Furie			*V*	*S*	*P*
Invincibili				*P*	*V*
Audaci					*V*

35. In una biblioteca ci sono libri di avventura, fantasy e thriller, ciascun genere ha una copertina di colore diverso, fra rosso, verde e blu. Sappiamo che i libri di avventura non hanno la copertina blu, quelli di fantasy hanno copertina verde o blu, e le copertine dei thriller non sono né rosse, né verdi. Di che colore sono le copertine dei libri di avventura? [rosso]

36. 4 amici vanno a pesca, Susi, Giorgio, Mina, and Becky. Sappiamo che Susi non ha pescato più pesci di Giorgio; Becky meno di Giorgio, che ha preso lo stesso numero di pesci di Mina, che a sua volta ne ha presi più di Susi. Becky non ha preso più pesci di Susi. Ordinare I 4 amici in base al numero di pesci pescati. [Giorgio e Mina primi, Susi 3ª, Becky 3ª o 4ª]

37. Aldo, Bruno e Cosimo sono ciascuno di una regione differente, Lombardia, Sicilia e Toscana, associare ogni persona alla regione sapendo che: Aldo è collega del fratello di Bruno ed è più giovane del lombardo; il siciliano è figlio unico ed è il più vecchio dei tre.
[(Aldo,Toscana), (Bruno, Lombardia), (Cosimo, Sicilia)]

Livello 2

38. Amanda, Bruna, Cindy e Dora abitano ciascuno in uno dei 4 piani di uno stesso palazzo. Associare ogni donna al rispettivo piano sapendo che: Dora è sposata con il fratello di chi abita al IV piano, che a sua volta ha per marito il fratello di chi abita al I piano; Cindy non ha fratelli, è nubile ed è amica di chi abita al III piano; Bruna conosce la sorella di chi abita al IV piano, ma nessun altro componente della sua famiglia. [(Amanda, IV), (Bruna, III), (Cindy, II) (Dora, I)]

39. Ruth, Christin, Max e Jim sono seduti attorno ad un tavolo quadrato, ciascuno dei quattro ha un diverso colore degli occhi. Sappiamo che: chi è di fronte a Max ha gli occhi verdi; chi è di fronte a Jim non ha gli occhi grigi; chi è a sinistra di Ruth ha gli occhi blu; chi è a sinistra di Christin non ha gli occhi marroni. I due che hanno occhi grigi e marroni sono marito e moglie. Associare ogni persona al colore dei suoi occhi. [(Ruth, verdi), (Christin, marroni), (Max, grigi), (Jim, blu)]

40. 4 atleti, Anna, Beppe, Cecilia e Davide, sono seduti attorno a un tavolo circolare. I loro sport sono: nuoto, pattinaggio, sci e corsa. Sappiamo che il nuotatore è a sinistra di Anna, lo sciatore è seduto di fronte a Beppe, Cecilia e Davide sono seduti uno di fronte all'altra, e a sinistra del pattinatore è seduta una ragazza. Associare i ragazzi allo sport che praticano.
[Anna scia; Davide nuota; gli altri due non si sa]

41. 4 amici, Aldo, Bice, Carla e Dino leggono ciascuno un libro. Gli autori dei 4 libri sono Cammilleri, Rowling, Lucarelli e Brown. Sappiamo che Aldo non legge mai libri di autori stranieri; Bice sta leggendo un libro il cui autore ha diversa nazionalità di quello che legge Carla; a Carla non piacciono i gialli; Dino legge un libro il cui autore ha la stessa nazionalità di quello che legge Aldo. Sulla base di queste informazioni associare ogni ragazzo all'autore del libro che legge.
[Aldo e Dino leggono Cammilleri e Lucarelli, ma non sappiamo quale;
Bice legge Rowling e Carla legge Brown]

42. Asia, Bella, Cora e Daria sono una nubile e le altre sposate con Elio, Franco e Gianni. Un giorno vanno a giocare in doppio a tennis. Determinare le coppie sposate sapendo che: marito e moglie non giocano mai nella stessa squadra; le 4 partite svolte sono: Asia ed Elio contro Bella e Franco, Asia e Gianni contro Daria e Franco, Franco e Gianni contro Bella e Cora, Cora ed Elio contro Daria e Gianni. [(Franco – Asia), (Gianni – Bella), (Elio – Daria)]

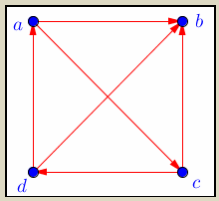
43. *M*, *N*, *P*, *Q*, *R* sono 5 amici. I loro mestieri sono i seguenti (non necessariamente nell'ordine indicato): pianista, infermiere, camionista, elettricista, falegname. Si sa che *a*) *M* non sa guidare, non sa usare il tester ed è vedovo; *b*) *N* è allergico al legno ed è un tipo sedentario; *c*) *P* è fratello dell'elettricista e non ama la musica; *d*) *Q*, la sua unica sorella che è fidanzata con l'infermiere e la moglie del falegna-

me frequentano la stessa palestra; *e*) *R* è figlio unico, celibe e non sopporta i luoghi chiusi. Accoppiare ciascun amico con il relativo mestiere.

[*M* pianista, *N* elettricista, *P* falegname, *Q* camionista e *R* infermiere]

Lavoriamo insieme

Il seguente diagramma sagittale rappresenta una relazione binaria definita sull'insieme $\{a, b, c, d\}$.

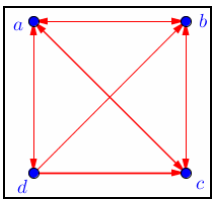
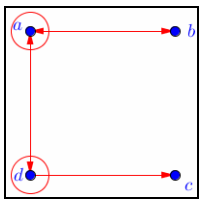
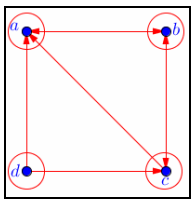


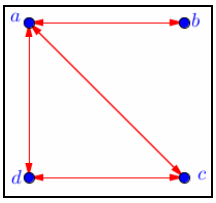
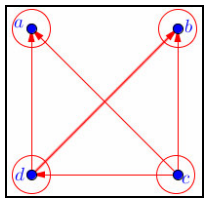
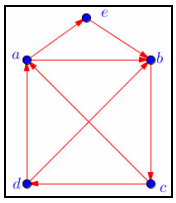
Mediante tale diagramma vogliamo determinare quali proprietà verifica la relazione. Ricordiamo le regole pratiche enunciate nella parte teorica.

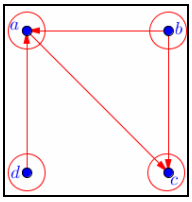
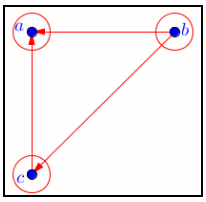
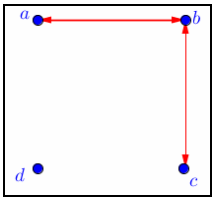
- Poiché nessuno degli elementi è racchiuso in un cerchio, vale la proprietà antiriflessiva.
- Poiché ogni freccia presenta ha una sola direzione, vale la proprietà antisimmetrica.
- Per la proprietà transitiva dobbiamo "percorrere" tutti i possibili triangoli che possono formarsi con tre elementi come vertici. Da *a* partono tre cammini, uno sterile che si interrompe subito in *b*; poi ci sono $a - c - d$ e $a - c - b$. Il primo non "funziona", perché si ha: $a \mathrel{\Re} c$, $c \mathrel{\Re} d$ ma $a \mathrel{\not\Re} d$. A questo punto è inutile controllare gli altri percorsi, concludiamo che la proprietà transitiva non è valida.
- Vale invece la proprietà di connessione, poiché comunque consideriamo due elementi vi è sempre un cammino che conduce da uno dei due all'altro.

Livello 1

Discutere i seguenti grafici sagittali, stabilendo e giustificando le proprietà godute dalla relazione binaria a essi associata

44. *a*)  b)  *c*)  [*a*) AR, T, C; *b*) ∅; *c*) R, T]

45. *a*)  *b*)  *c*)  [*a*) AR, S; *b*) R, AS, T; *c*) AR, AS]

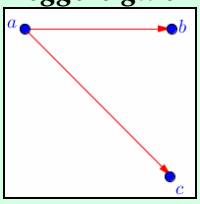
46. *a*)  *b*)  *c*)  [*a*) R, AS; *b*) R, AS, T, C; *c*) AR, S]

Costruire i grafici sagittali relativi alle seguenti relazioni.

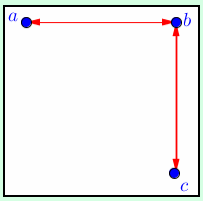
47. $x \mathrel{\Re} y \Leftrightarrow x - y$ è divisibile per 4, in $A = \{12; 13; 14; 17; 18\}$.
48. $x \mathrel{\Re} y \Leftrightarrow x \cdot y$ è pari, in $B = \{2; 3; 4; 5\}$.
49. $x \mathrel{\Re} y \Leftrightarrow x + y$ è dispari, in $C = \{4; 5; 6; 7\}$.
50. $x \mathrel{\Re} y \Leftrightarrow x^y > 15$, in $D = \{1; 2; 3; 4\}$.
51. $x \mathrel{\Re} y \Leftrightarrow x^2 - y^2 > 0$, in $E = \{-5; -2; 3; 4; 5\}$.

L'angolo delle correzioni

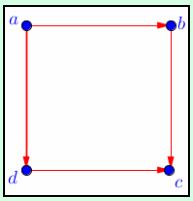
Correggere gli errori commessi in ciascuna delle seguenti risoluzioni sui grafici sagittali

1. 

Non vale la proprietà transitiva perché $a \Re b$, $a \Re c$ ma $b \not\Re c$.

2. 

Non vale la proprietà simmetrica perché $a \Re c$ e $c \Re a$.

3. 

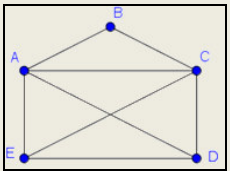
Vale la proprietà di connessione perché $a \Re b$, $b \Re c$, $d \Re c$, $a \Re d$.

Giochiamo alla Matematica

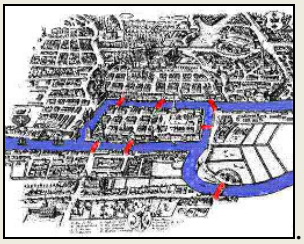
- Mediante le tabelle a doppia entrata possiamo risolvere dei giochi di "prestigio".
  Vi sono tre persone, che indichiamo con X, Y e Z, e 3 oggetti diversi che indichiamo con A, B, e C e 24 gettoni posti in un piatto. Il mago darà 1 gettone a X, 2 a Y e 3 a Z, poi uscirà dalla stanza raccomandando alle persone rimaste di effettuare le seguenti operazioni:
  ciascuno prenderà uno dei 3 oggetti a loro piacere;
  chi ha preso l'oggetto A prenderà tanti gettoni quanti ne ha già;
  chi ha preso B prenderà il doppio di quel che ha;
  chi ha preso C prenderà il quadruplo.
  Una volta che il mago sarà ritornato nella stanza conterà quanti gettoni sono rimasti nel piatto e solo da questo potrà dire come sono stati distribuiti gli oggetti fra le persone. Vediamo di svelare questa finta magia e, per far ciò, costruiamo la seguente tabella nella quale considereremo tutte le possibilità di accoppiamento fra le persone e gli oggetti.

	X	Y	Z	Gettoni rimasti
Oggetto	A	B	C	
Gettoni presi	1 + 1 = 2	2 + 4 = 6	3 + 12 = 15	1
Oggetto	A	C	B	
Gettoni presi	1 + 1 = 2	2 + 8 = 10	3 + 6 = 9	3
Oggetto	B	A	C	
Gettoni presi	1 + 2 = 3	2 + 2 = 4	3 + 12 = 15	2
Oggetto	B	C	A	
Gettoni presi	1 + 2 = 3	2 + 8 = 10	3 + 3 = 6	5
Oggetto	C	A	B	
Gettoni presi	1 + 4 = 5	2 + 2 = 4	3 + 6 = 9	6
Oggetto	C	B	A	
Gettoni presi	1 + 4 = 5	2 + 4 = 6	3 + 3 = 6	7

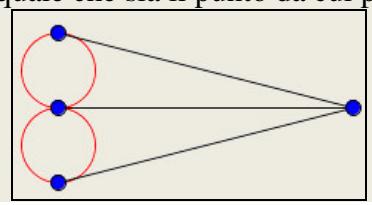
  Possiamo quindi notare che il numero di gettoni rimasti è sempre diverso, è perciò semplice per il mago indovinare. Il gioco può essere generalizzato anche a n oggetti e n persone. Come? Provateci!
- Anche con i diagrammi sagittali possono farsi dei giochi interessanti. Dite per esempio a un vostro amico di disegnare con un unico tratto, cioè senza sollevare la penna, e senza ripassare due volte per lo stesso tratto (è invece possibile passare più di una volta per uno stesso punto) la seguente figura partendo dal vertice A. Potrà provarci ore intere, non riuscirà a farcela poiché non è possibile. Come mai questo fatto? Tutto dipende dal numero di segmenti che si incontrano in un vertice.



Infatti nel vertice *A* si incontrano 4 segmenti, vi sono perciò due "strade" per partire da A e due per tornare, quindi apparentemente va tutto bene. Lo stesso succede per il vertice *C* e per *B*, in cui le *strade* sono 2, sempre pari. Invece nei vertici *D* ed *E* convergono tre segmenti, perciò ogni volta che entriamo dobbiamo poi uscire e rientrare. Quindi l'unico modo di percorrere con un solo tratto il poligono è di partire da *D* arrivando a *E* o viceversa. Da un punto di vista storico questioni simili sono state sollevate dal grande matematico svizzero Leonhard Euler (più noto con il nome di Eulero), il quale propose il seguente problema. Nella città di Koenisberg, nella Prussia orientale dove il matematico risiedeva, vi era un fiume attraversato da 7 ponti, la cui rappresentazione è la seguente



Eulero chiedeva se fosse possibile iniziare una passeggiata da uno qualsiasi dei ponti, facendovi ritorno dopo aver attraversato una sola volta gli altri ponti. Noi possiamo rappresentare il cammino con il seguente grafico, che non è un poligono, in cui ciascun vertice rappresenta una delle quattro zone in cui viene divisa la città dal fiume, e ciascun segmento o arco rappresenta i ponti che permettono di andare da una zona all'altra della città. Dato che in questo caso in tutti i vertici concorrono un numero dispari di *strade* il problema non è risolvibile, quale che sia il punto da cui partiamo.



Relazioni di equivalenza

Abbiamo già visto che l'uguaglianza verifica le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva. Molte altre relazioni matematiche, come l'isometria, la similitudine e l'equiestensione fra figure geometriche, l'equivalenza di frazioni e così via, godono di queste stesse proprietà.

Esempio 32

- Le frazioni $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \ldots$ rappresentano diversi simboli, ma a essi associamo lo stesso numero.
- Le espressioni 7 – 3 e 8 : 2, sono distinte, essendo composte da simboli e operazioni diverse, eppure hanno lo stesso valore numerico.
- Due piastrelle uguali occupano diverse posizioni sul pavimento, ma sono "sovrapponibili", cioè hanno la particolarità di avere tutte le stesse proprietà metriche.
- Un quadrato di lato 4 e un triangolo rettangolo i cui cateti misurano 4 e 8, sono figure diverse, addirittura hanno anche un numero di lati diverso, ma occupano la stessa superficie, cioè hanno la stessa area: la quantità di vernice necessaria a pitturare i due oggetti sarà la stessa.

Come abbiamo visto, ci sono relazioni che evidenziano caratteristiche uguali in oggetti distinti.

Definizione 20

Si chiama **relazione di equivalenza** una relazione binaria che verifica le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

Esempio 33

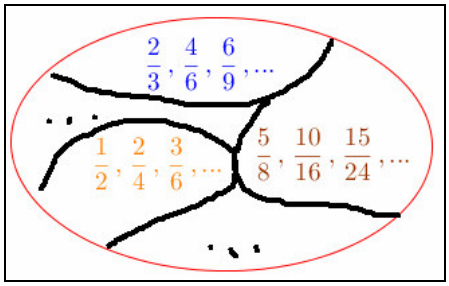
Riprendiamo le frazioni dell'esempio precedente. Dato che abbiamo già osservato che dire frazioni equivalenti significa dire simboli diversi che esprimono le stesse quantità, possiamo considerarne una sola, quella ridotta ai minimi termini, nel nostro caso $\frac{2}{3}$, fra le frazioni $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \ldots$ come rappresentante di tutte le frazioni del tipo $\frac{2 \cdot n}{3 \cdot n}$, $n \in N$. Considerando solo le frazioni ridotte ai minimi termini, siamo sicuri che non esistono due frazioni equivalenti, cioè che rappresentano lo stesso numero razionale.

Il procedimento descritto nell'esempio precedente permette di suddividere l'insieme $\mathbb{Q}$ in infiniti sottoinsiemi, in ognuno dei quali vi stanno tutte e sole le frazioni equivalenti a una data frazione ridotta ai minimi termini.

Definizione 21

Diciamo che i sottoinsiemi A_1, A_2, ..., A_n costituiscono una **partizione** di A, se verificano entrambe le proprietà seguenti:
a) l'unione di tutti gli A_i è uguale ad A;
b) presi comunque due sottoinsiemi diversi A_i e A_j, essi sono disgiunti.

Dal punto di vista grafico fare una partizione di un insieme A significa fare una cosa del tipo mostrato nella figura seguente.



In particolare, se su un insieme può definirsi una relazione di equivalenza fra tutti i suoi elementi, può farsi una partizione dell'insieme in classi di equivalenza. È chiaro che in questo modo qualunque elemento di ogni

sottoinsieme lo rappresenta, perciò può considerarsi non più tutto l'insieme ma solo il suo sottoinsieme formato da un rappresentante per ognuna delle sue parti disgiunte. Per esempio nel caso delle frazioni, invece di considerarle tutte prendiamo solo quelle ridotte ai minimi termini.

Definizione 22

Dato un insieme A sui cui elementi è definita una relazione di equivalenza $\mathfrak{R}$, l'insieme formato considerando un solo elemento per ciascuna classe di equivalenza si chiama **insieme quoziente** di A rispetto alla relazione $\mathfrak{R}$.

Notazione 10

Per indicare che consideriamo l'**insieme quoziente** di A determinato dalla relazione $\mathfrak{R}$, scriviamo $A/\mathfrak{R}$.

Il nome *insieme quoziente*, è dovuto al fatto che stiamo effettuando una vera e propria suddivisione di tutti gli elementi di A, ognuno in una sola delle classi di equivalenza determinate da $\mathfrak{R}$ su A.

Esempio 34

- La relazione definita sull'insieme degli alunni di una scuola, secondo la quale due alunni sono in relazione fra loro se stanno nella stessa classe, è evidentemente una relazione di equivalenza; quindi la suddivisione degli studenti in classi costituisce una partizione dell'insieme. In questo modo un qualunque alunno può considerarsi rappresentante della classe.
- All'assemblea dell'O.N.U. ogni nazione è rappresentata da un proprio delegato. L'assemblea O.N.U. può quindi considerarsi l'insieme quoziente dell'insieme degli abitanti di tutti i paesi aderenti all'organizzazione, mediante la relazione che lega fra loro due persone se sono cittadini della stessa nazione.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Data la relazione $\Re$: *avere la stessa cifra delle unità*, definita sull'insieme X = {11; 23; 31; 42; 53; 61; 72; 87}, verifichiamo che è una relazione di equivalenza e ne costruiamo l'insieme quoziente.

- Ogni numero ha la sua stessa cifra delle unità: vale la proprietà riflessiva.
- Se un numero a ha la stessa cifra delle unità di b è vero anche il viceversa: vale la proprietà simmetrica.
- Se un numero a ha la stessa cifra delle unità di b e questo ha la stessa cifra delle unità di c, è anche vero che a e c hanno la stessa cifra delle unità: vale la proprietà transitiva.

La relazione è di equivalenza. Elementi che appartengono alla stessa classe di equivalenza hanno la stessa cifra delle unità. Avremo perciò che l'insieme quoziente ha 4 elementi: $X/\Re$ = {[1], [2], [3], [7]}

Verificato che le relazioni di seguito elencate costituiscono delle relazioni di equivalenza, effettuare una partizione dell'insieme su cui sono definite e costruire il relativo insieme quoziente. Stabilire anche la cardinalità di tale insieme

***Livello* 1**

52. $\Re$: *avere il nome con la stessa iniziale* sull'insieme A = {Anna, Attilio, Arturo, Bianca, Carlo, Chiara, Franco, Gianna, Girolamo}.
53. $\Re$: *avere il nome formato da uno stesso numero di lettere* sull'insieme A dell'esercizio precedente, poi si confrontino le due partizioni di A.
54. $\Re$: *avere lo stesso numero di lati* sull'insieme B = {triangolo rettangolo, parallelogramma, trapezio isoscele, trapezio scaleno, Esagono, Quadrato, Triangolo isoscele, Rettangolo}.
55. $\Re$: *avere la stessa somma delle proprie cifre* sull'insieme C = {12; 24; 26; 30; 31; 33; 40; 42; 44; 56}.
56. $\Re$: *avere lo stesso prodotto delle proprie cifre* sull'insieme C dell'esercizio precedente, poi si confrontino le due partizioni di C.
57. $\Re$: *avere lo stesso resto nella divisione per* 3, sull'insieme D = {11; 24; 37; 39; 41}.
58. $\Re$: *avere lo stessa cifra delle decine*, sull'insieme D dell'esercizio precedente, poi si confrontino le due partizioni di D.

***Livello* 2**

59. $\Re$: *avere lo stesso numero di casi nell'estrazione del primo numero alla tombola*, sull'insieme E = {estrazione di un numero pari, estrazione di un numero primo, estrazione di un numero dispari, estrazione di un numero divisibile per 15, estrazione di un numero compreso tra 32 e 46, estrazione di un numero multiplo di 7}.
60. $(x, y)\ \Re\ (z, t) \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{z}{t}$ in G = {(1; 2), (1; 3), (2; 4), (2; 3), (1; 4), (3; 6), (4; 6), (4; 8)}.
61. $\Re$: *avere la stessa cardinalità*, sull'insieme H formato dagli insiemi dei divisori di 6, 10, 12, 18, 24, 25, 28, 36.
62. $\Re$: *avere lo stesso numero di diagonali*, sull'insieme I = {quadrato, trapezio isoscele, pentagono, esagono, parallelogramma, rettangolo, esagono regolare.
63. $x\ \Re\ y \Leftrightarrow$ x è nato nella stessa nazione di y, sull'insieme J = {Tartaglia, Hilbert, Cantor, Peano, Pascal, Newton, Leibniz, Laplace, Gauss, Eulero, Lagrange, Fermat, Abel}.
64. $x\ \Re\ y \Leftrightarrow$ x è nato nello stesso secolo di y, sull'insieme K = {Tartaglia, Hilbert, Cantor, Peano, Pascal, Newton, Leibniz, Laplace, Gauss, Eulero, Lagrange, Fermat, Abel, Ruffini}.

Lavoriamo insieme

Sull'insieme A = {123; 256; 587 689; 788; 795} definiamo la seguente relazione di equivalenza:

$$x\ \Re\ y \Leftrightarrow\ x \text{ e } y \text{ divisi per 6 hanno lo stesso resto}$$

che si chiama *relazione di congruenza modulo* 6 e si indica con il simbolo $x\ \Re\ y \Leftrightarrow\ x \equiv y$ (mod. 6).
Intanto vogliamo provare che è una relazione di equivalenza. Prima osserviamo che dire che *x e y divisi per* 6 *hanno lo stesso resto* è lo stesso che dire che $x - y$ è un multiplo di 6. Infatti per esempio $17 \equiv 65$ (mod. 6) perché $17 = 6 \cdot 3 + 5$ e $65 = 6 \cdot 10 + 5$, cioè hanno lo stesso resto, che è 5. Inoltre $65 - 17 = 42 = 6 \cdot 7$, cioè un multiplo di 6. Adesso verifichiamo le proprietà

- $x \,\Re\, x \Leftrightarrow x \equiv x$ (mod. 6), e in effetti $x - x = 0$ che è multiplo di 6 ($0 = 6 \cdot 0$);
- $x \,\Re\, y \Rightarrow y \,\Re\, x$. Infatti se $x - y$ è multiplo di 6, anche $y - x$ lo è;
- $x \,\Re\, y$ e $y \,\Re\, z \Rightarrow x \,\Re\, z$. Infatti se $x - y = 6h$ e $y - z = 6m$, allora $x - z = x - y - z + y = (x - y) - (z - y) = 6h - (-6m) = 6h + 6m$, è multiplo di 6 perché somma di due multipli di 6;

Ora vogliamo determinarne l'insieme quoziente. I resti degli elementi di A nella loro divisione per 6 sono, nell'ordine: 3, 4, 5, 5, 2, 3. Abbiamo 4 classi di equivalenza e l'insieme quoziente: $A/\Re = \{[2], [3], [4], [5]\}$.

Date le seguenti relazioni di congruenza, costruire il relativo insieme quoziente

***Livello* 1**

65. $A = \{245; 547; 784; 798; 857; 956\}$, $x \,\Re\, y \Leftrightarrow x \equiv y$ (mod. 4). [{[0], [1], [2], [3]}]
66. $A = \{245; 547; 784; 798; 857; 956\}$, $x \,\Re\, y \Leftrightarrow x \equiv y$ (mod. 7). [{[0], [1], [3], [4]}]
67. $A = \{245; 547; 784; 798; 857; 956\}$, $x \,\Re\, y \Leftrightarrow x \equiv y$ (mod. 3). [{[0], [1], [2]}]
68. $A = \{145; 235; 451; 678; 758; 845\}$, $x \,\Re\, y \Leftrightarrow x \equiv y$ (mod. 5). [{[0], [1], [3]}]
69. $A = \{152; 268; 457; 594; 658; 874\}$, $x \,\Re\, y \Leftrightarrow x \equiv y$ (mod. 8). [[0], [1], [2], [4]}]
70. $A = \{121; 131; 142; 146; 152; 163\}$, $x \,\Re\, y \Leftrightarrow x \equiv y$ (mod. 9). [{[1], [2], [4], [5], [7], [8]}]
71. $A = \{112; 117; 121; 124; 128; 132\}$, $x \,\Re\, y \Leftrightarrow x \equiv y$ (mod. 11). [{[0], [2], [3], [7]}]
72. $A = \{73; 75; 83; 87; 95; 107\}$, $x \,\Re\, y \Leftrightarrow x \equiv y$ (mod. 10). [{[3], [5], [7]}]
73. $A = \{42; 45; 53; 58; 68; 71; 76\}$, $x \,\Re\, y \Leftrightarrow x \equiv y$ (mod. 13). [{[1], [3], [6], [11]}]
74. $A = \{31; 36; 48; 52; 57; 60; 62\}$, $x \,\Re\, y \Leftrightarrow x \equiv y$ (mod. 12). [{[0], [2], [4], [7], [9]}]

Relazioni d'ordine

Capita spesso di dover stabilire non solo se due enti matematici (numeri, figure, ...) sono in qualche modo "uguali" (quantitativamente, come misura, come forma, ...) ma, nel momento in cui sono diversi, ci interessa vedere se può stabilirsi fra di loro un ordine.
La più semplice relazione di questo tipo è l'ordinamento secondo grandezza che consiste, dato un insieme di numeri, nello scriverli in una sequenza crescente (dal più piccolo al più grande) o decrescente (dal più grande al più piccolo). Cioè nell'insieme $\mathbb{R}$ noi diciamo che $x \Re y \Leftrightarrow x > y$ (oppure $x < y$). Quali sono le proprietà che verifica questa relazione? È immediato stabilire che sono le seguenti (consideriamo la relazione di maggiore, ma analoghi risultati si ottengono per quella di minore).

1. Ogni numero non è maggiore di sé stesso. Proprietà antiriflessiva.
2. Se $x > y$, allora non accade mai che sia $y > x$. Proprietà antisimmetrica.
3. Se $x > y$ e $y > z$, allora $x > z$. Proprietà transitiva.
4. Dati comunque due numeri diversi x e y, o $x > y$ oppure $y > x$. Proprietà di connessione.

Noi diciamo che queste quattro proprietà caratterizzano l'ordinamento secondo grandezza di un insieme di numeri.

Definizione 23

Una relazione che gode delle proprietà *antiriflessiva, antisimmetrica, transitiva* e di *connessione*, si dice **relazione di ordinamento totale forte**.

Esempio 35

- Una relazione di ordinamento totale forte definita su un insieme, permette di scrivere tutti i suoi elementi in una successione ordinata, come si fa, per esempio, per le parole di un vocabolario o con i ragazzi di una classe ordinati secondo la loro altezza, la loro età, il loro cognome e via dicendo.
- Però nel vocabolario per esempio vi sono parole come *tasso* che hanno diversi significati: può infatti indicare un animale, un albero, un interesse pagato o da pagare su una certa quota. I vocaboli hanno la stessa grafia, quindi a rigore stanno sullo stesso livello, nessuno precede l'altro, anche se poi ovviamente deve scegliersene arbitrariamente uno che deve essere scritto per primo.
- Analogamente in una classe capita di avere due o più ragazzi che hanno la stessa altezza o sono nati nello stesso giorno.

L'esempio precedente mostra che anche se vale la proprietà riflessiva, riusciamo lo stesso a stabilire un ordinamento dell'insieme. Forniamo perciò una nuova definizione.

Definizione 24

Una relazione che gode delle proprietà *riflessiva, antisimmetrica, transitiva* e di *connessione*, si dice relazione di **ordinamento totale debole**.

Gli aggettivi usati **forte** e **debole** sottolineano appunto il fatto che nel primo caso non vi sono arbitrarietà nella sequenza, tutti gli elementi vengono posti in un ordine definito una volta per tutte, nel secondo invece sono possibili più ordinamenti, potendo scambiare fra loro gli elementi che, per la relazione considerata, vengono considerati uguali. Il che accade spesso, per esempio, nelle classifiche di competizioni sportive, dove ci sono i cosiddetti *pari merito*.

Esempio 36

Supponiamo che il signor Rossi e la signorina Bianchi entrino alla posta in tempi diversi, possiamo dire con certezza che uscirà prima, dopo avere sbrigato i propri affari, chi dei due è entrato prima? Possiamo dirlo solo se vi è un unico sportello attivo, ma se, come spesso capita, vi sono più sportelli, magari abilitati a effettuare operazioni diverse, uno per il pagamento dei conti correnti solitamente più affollato e un altro per le raccomandate e i telegrammi, riusciamo a stabilire un ordine all'interno della stessa fila, ma non fra file diverse. Quindi l'ordinamento dell'insieme delle persone che si avvalgono del servizio postale in un dato pe-

riodo di tempo, non può considerarsi un ordine totale di questo insieme, appunto perché se il signor Rossi deve fare una raccomandata e la signorina Bianchi deve pagare un conto corrente non può stabilirsi alcuna relazione né fra Rossi e Bianchi e né fra Bianchi e Rossi. Nell'insieme cioè non vale la proprietà di connessione.

Quindi anche la proprietà di connessione non è obbligatoria per stabilire un ordinamento, anche se in questo caso non riusciamo a ordinare tutto l'insieme ma solo suoi sottoinsiemi. Forniamo ancora una definizione.

Definizione 25

Una relazione che verifica le proprietà *riflessiva* o *antiriflessiva, antisimmetrica* e *transitiva* ma non verifica la proprietà di connessione si dice **relazione di ordinamento parziale**. Aggiungeremo gli aggettivi **forte** e **debole** se vale rispettivamente la proprietà antiriflessiva o riflessiva.

Vediamo altri esempi.

Esempio 37

- La relazione "*essere più bravo in una materia*", valutata numericamente sulla base del voto avuto nella pagella finale, è certamente una relazione di ordinamento totale debole per una classe composta da più di dieci alunni, poiché essendo i voti a disposizione dell'insegnante solo i numeri interi da 1 a 10 (per un totale appunto di 10), dovranno esservi almeno due studenti che hanno ricevuto lo stesso voto.
- La relazione stabilita dai cosiddetti elimina code nei supermercati, per stabilire chi servire prima, è una relazione di ordine totale forte.
- La relazione $X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow X \subseteq Y$ nell'insieme $P(\mathbb{N})$ di tutti i sottoinsiemi dei numeri naturali è una relazione di ordinamento parziale debole. Per esempio gli insiemi $\{1, 2, 3\}$ e $\{4, 5\}$ non hanno alcuna relazione fra loro non essendo vero né che il primo è contenuto nel secondo né il viceversa.
- Se la relazione precedente viene mutata in $X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow X \subset Y$, cioè se si impone di considerare l'inclusione propria, essa diviene di ordinamento forte, ma rimane parziale.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Consideriamo le classifiche dei gironi A e C del campionato europeo di calcio del 2016

#	Squadra	PT	#	Squadra	PT
1	Francia	7	1	Germania	7
2	Svizzera	5	2	Polonia	7
3	Albania	3	3	Irlanda del Nord	3
4	Romania	1	4	Ucraina	0

Come si vede, all'interno di ciascun girone c'è un ordine, che nel caso del girone A è forte, mentre nel B è debole, dato che le prime due squadre hanno gli stessi punti. In effetti mediante altri criteri (differenza reti, scontri diretti, …) si è stabilito che la Germania fosse avanti alla Polonia, ma limitatamente ai punti potremmo scambiare le due squadre senza che ciò comporti variazione di classifica. Nel complesso però non vi è un ordine totale, dato che non possiamo dire per esempio che la Svizzera *segue* la Polonia perché ha meno punti, dato che non vi è relazione fra le due squadre, che non si sono incontrate fra di loro. Questo è perciò un esempio di relazione di ordinamento parziale debole.

Fra le seguenti relazioni determinare quelle di ordinamento, stabilendone il tipo

Livello 1

75. $x \ \Re \ y \Leftrightarrow$ *x ha meno punti di y,* nell'insieme delle squadre di calcio di serie A. [O.T.D.]
76. $X \ \Re \ Y \Leftrightarrow |X| < |Y|$, nell'insieme degli insiemi finiti. [O.P.F.]
77. $x \ \Re \ y \Leftrightarrow$ *x ha più lettere di y e hanno la stessa iniziale*, nell'insieme delle parole italiane di senso compiuto con meno di 10 lettere. [O.P.F.]
78. $x \ \Re \ y \Leftrightarrow$ *x non ha più lettere di y e hanno la stessa iniziale*, nell'insieme delle parole italiane di senso compiuto con meno di 6 lettere. [O.P.D.]
79. $x \ \Re \ y \Leftrightarrow$ *x è un punteggio più alto di y*, nell'insieme dei punteggi al gioco del poker. [O.T.F.]
80. $x \ \Re \ y \Leftrightarrow$ *x è non più alto di y*, nell'insieme dei ragazzi nati in Italia nel 1985. [O.T.D.]

Livello 2

81. $x \ \Re \ y \Leftrightarrow$ *Il numero di casi in cui esce il punteggio x è minore del numero di casi in cui esce il punteggio y*, nell'insieme dei punteggi ottenibili lanciando due dadi regolari a forma di cubo. [O.T.D.]
82. $m \ \Re \ n \Leftrightarrow$ *m è divisibile per n*, nell'insieme $\mathbb{N}$. [O.P.D.]
83. $m \ \Re \ n \Leftrightarrow$ *i numeri primi minori di m sono meno di quelli minori di n*, nell'insieme $\mathbb{N}$ [O.T.D.]
84. $x \ \Re \ y \Leftrightarrow$ *x è nato prima di y*, in A = {Euclide, Pitagora, Tartaglia, Hilbert, Cantor, Peano, Pascal, Newton, Leibniz, Laplace, Gauss, Eulero}. [O.T.F.]

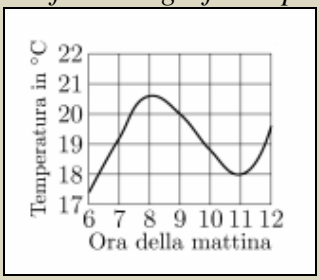
Livello 3

85. Verificare che nell'insieme {2; 4; 8; 16; 64; 128} gli ordini determinati dalle relazioni: $x \ \Re_1 \ y \Leftrightarrow x > y$ e $x \ \Re_2 \ y \Leftrightarrow x$ è multiplo di y coincidono.
86. Cercare di generalizzare il risultato dell'esercizio precedente, utilizzando le stesse relazioni $\Re_1$ e $\Re_2$, determinando per quali insiemi esso vale. [Per le potenze di uno stesso naturale]

Per la prova Invalsi

Lavoriamo insieme

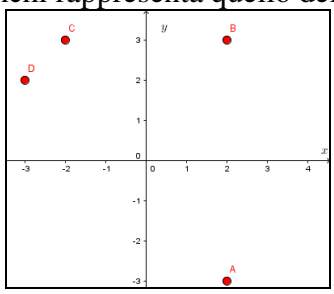
Il seguente quesito è stato assegnato alle prove Invalsi del 2004.
Leggi attentamente le seguenti affermazioni riferite al grafico riportato qui sotto.



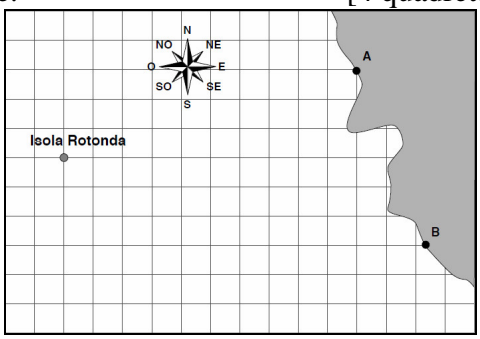
I) *La temperatura minima fra le ore* 6 *e le ore* 12 *è* 18°*C.*
II*) La temperatura massima fra le ore* 6 *e le ore* 12 *è un valore compreso fra* 20°*C e* 21°*C.*
III*) La temperatura alle ore* 9 *è* 20°*C.*
Quali di esse sono vere?
A*) Solo la* II) *e la* III) B) *Solo la* I) *e la* II) C) *Solo la* I) *e la* III) D) *Tutte e tre*

La minima è ovviamente l'ordinata del punto più basso, che perciò è all'inizio delle osservazioni, cioè alle 6 e vale un valore compreso fra 17° e 18°; la massima è l'ordinata del punto più alto che si ottiene alle 8 e vale circa 20,5°. Alle 9 la temperatura, sempre l'ordinata del punto di ascissa 9, è 20°. Pertanto sono vere la II e la III e la risposta corretta è perciò la A)

1. (Invalsi 2003) Quale fra i seguenti elenchi rappresenta quello delle coordinate dei punti della figura? [d]



   a) A = (– 3; 2) B = (3; 2) C = (3; – 2) D = (2; – 3) ; b) A = (2; – 3) B = (2; 3) C = (– 3; 2) D = (– 2; 3)
   c) A = (2; – 3) B = (2; – 3) C = (2; – 3) D = (2; – 3) ; d) A = (2; – 3) B = (2; 3) C = (– 2; 3) D = (– 3; 2)
   e) A = (2; – 3) B = (3; 2) C = (2; 3) D = (– 2; 3)
2. (Invalsi 2014) Un capitano vede dalla sua nave che il faro A sulla costa si trova esattamente in direzione Nord-Est (NE), mentre il Faro B si trova esattamente in direzione Est (E). Nella seguente mappa segna con un punto la posizione della nave. [4 quadretti a destra e 3 in basso dall'Isola]



3. Se il lato di ogni quadretto della mappa precedente corrisponde a 1 miglio nautico, qual è la distanza del faro A dall'Isola Rotonda? [C]
   A) 13 miglia nautiche B) Dalle 9 alle 10 miglia nautiche C) Dalle 10 alle 11 miglia nautiche
   D) 12 miglia nautiche
4. Quale fra le seguenti scritte caratterizza i punti $(x; y)$ che nel piano cartesiano appartengono al I quadrante? A) $x > 0$, $y = 0$ B) $x \cdot y > 0$ C) $x > 0$, $y > 0$ D) $x < 0$, $y > 0$ [C]
5. I punti $(x; y)$ che nel piano cartesiano verificano la proprietà $x \cdot y < 0$ appartengono [D]

A) al I quadrante B) al II quadrante C) al I o al III quadrante D) al II o al IV quadrante

6. I punti $(x; y)$ che nel piano cartesiano verificano la proprietà $x = y$ appartengono [A]
A) alla retta che taglia a metà I e III quadrante B) alla retta che taglia a metà II e IV quadrante C) al I o al III quadrante D) è solo l'origine a verificare la proprietà

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi

1. Il prodotto cartesiano gode della proprietà distributiva rispetto a qualcuna delle operazioni insiemistiche elementari? Giustificare la risposta. [Tutte tranne la differenza simmetrica]

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
A = Abacus gara on line gestita dalla Grace Church School K = Kangourou MT = Mathematics Teacher, rivista della NCTM

Lavoriamo insieme

Il seguente quesito è stato assegnato nel numero di Marzo 1992 del Mathematics teacher.
Vi sono 6 pere ciascuna di un tipo diverso: Anjou, Bosc, Bartlett, Clapp, Comice e Seckel. Pedro, Patti e Penelope ne hanno mangiate due a testa. Una sola delle persone, una ragazza ha mangiato due pere il cui nome ha la stessa iniziale. Pedro ha mangiato una Bartlett ma non una Seckel. Penelope ha mangiato una Comice. Accoppiare i ragazzi al tipo di pere che hanno mangiato.
Costruiamo la seguente tabella che associa le pere alle persone, in cui mettiamo X per dire che la persona ha mangiato la pera e N per dire che non lo ha fatto. Ciascuna riga deve contenere esattamente due X e ciascuna colonna esattamente una X.

	A	Bo	Ba	C	Co	S
Pedro			X	N	N	N
Patti			N	N	N	
Penelope	N	N	N	X	X	N

Spieghiamo cosa abbiamo fatto. Abbiamo messo la X nelle due caselle su cui abbiamo informazioni certe. A questo punto abbiamo messo N nelle due celle rimanenti delle relative colonne. Dato che *una sola delle ragazze ha mangiato due pere il cui nome ha la stessa iniziale*, poiché Pedro ha mangiato una Bartlett, le due pere sono quelle il cui nome inizia per C e siccome Penelope ha già mangiato una Comice deve avere mangiato anche la Clapp.
A questo punto possiamo dire che Patti ha mangiato la Seckel e poiché Pedro non può avere mangiato due pere con la stessa iniziale, ha mangiato una Anju e Patti una Bosc. Ecco quindi la tabella finale:

	A	Bo	Ba	C	Co	S
Pedro	X	N	X	N	N	N
Patti	N	X	N	N	N	X
Penelope	N	N	N	X	X	N

1. (A2007) Il risultato finale di una corsa di auto dice che Adam, Tom e Dave hanno occupato i primi tre posti, in qualche ordine. Uno di essi guidava un'Honda, un altro una Ford e il terzo una Renault. Sappiamo che: l'amico di Tom, che guidava una Ford, è arrivato terzo. Quello che guidava l'Honda non ha vinto. Adam non ha mai guidato Renault o Honda. Tom non ha guidato l'Honda. Associa ciascun pilota alla macchina e al posto cui è arrivato. [(Adam, Ford, III), (Tom, Renault, I), (Dave, Honda, II)]
2. (A2005) Tre amici abitano in case adiacenti l'una all'altra, con i numeri civici 34, 36 e 38. Ciascuno di essi ha un diverso colore di capelli e un diverso hobby. Quello castano ama i tuffi. Il biondo abita nella casa il cui numero è divisibile per 4. Quello che gioca a calcio è contento del fatto che la somma delle cifre del numero della sua casa è 11, che è il numero dei calciatori di una squadra. In quale casa abita l'uomo che ama la musica? [Quella con il numero 36]
3. (A2006) Sei amici hanno partecipato alla famosa maratona di Sant'Ambrogio, indossando dei pettorali numerati da 1 a 6. All'arrivo, quelli che indossavano pettorali pari sono arrivati in posizioni dispari;

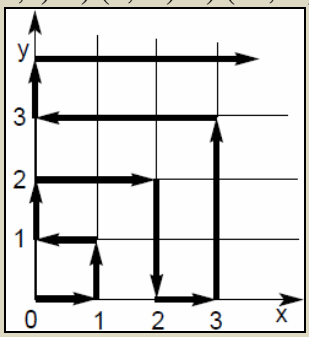
quelli che indossavano pettorali multipli di 3, si sono classificati in posizioni non multiple di 3. Infine, ai primi tre posti sono arrivati amici con pettorali il cui numero era maggiore di 3. in quale ordine si sono classificati gli amici? [6 – 5 – 4 – 3 – 2 – 1]

4. (MT1995) Una mamma, suo fratello, suo figlio e sua figlia giocano a baseball. Di questi il gemello del peggiore lanciatore, che è uno dei giocatori, e il miglior lanciatore sono di diverso sesso. Il peggiore e il miglior lanciatore hanno la stessa età. Chi è il miglior lanciatore? [Il fratello della mamma]

Lavoriamo insieme

Il seguente quesito è stato assegnato nel 2005 ai Kangourou italiani, nella categoria Cadet, per terza media e prima superiore. .

Una particella si muove nel quadrante illustrato in figura con la legge che segue. Nel primo minuto va dall'origine al punto di coordinate (1,0). Poi continua a seguire il percorso indicato in figura dalle frecce (avanti e indietro dall'asse x all'asse y e viceversa), spostandosi, parallelamente agli assi, sempre alla stessa velocità: in ogni minuto percorre un'unità di spostamento. Quali sono le coordinate del punto raggiunto dalla particella dopo esattamente due ore? A) (10,0) B) (1,11) C) (10,11) D) (2,10) E) (11,11)



Dato che in due ore vi sono 120 minuti, dobbiamo stabilire la posizione dopo 120 passi. Osserviamo che il movimento avviene sempre parallelamente agli assi cartesiani, in modo che quando ne raggiungiamo uno ci muoviamo di un passo su di esso e poi torniamo indietro in posizione perpendicolare. Ogni volta che ci spostiamo dall'asse facciamo due passi uguali in direzioni perpendicolari, con un numero che è maggiore di 1 rispetto ai due passi analoghi precedenti. Così all'inizio abbiamo fatto 1 passo su x, poi 2 da 1 passo e siamo arrivati a y; 1 passo su y, 2 da 2 passi e siamo arrivati a x, ancora 1 passo, 2 da 3 passi e siamo di nuovo a y, e così via. Quindi facciamo $1 + 2 \cdot 1 + 1 + 2 \cdot 2 + 1 + 2 \cdot 3 + \ldots = 1 + 2 + 1 + 4 + 1 + 6 + 1 + 8 + \ldots$ Osserviamo che arriviamo sull'asse x dopo 0, 1, 8, 9, 24, 25, 48, 49, ... cioè per i quadrati dei numeri dispari e i suoi precedenti, dato che 120 è il precedente di $11^2 = 121$, vuol dire che arriveremo a (10,0).

5. (K2008) Vogliamo visitare quattro isole A, B, C, D partendo dalla terraferma, utilizzando i traghetti che le collegano. C è collegata nei due versi con la terraferma; A e C sono collegate tra loro nei due versi come pure A e D. A e B possono essere solo raggiunte dalla terraferma come A da B. Qual è il minimo numero di corse sufficiente a visitare tutte le isole (con partenza e arrivo sulla terraferma)?[A]
A) 6 B) 5 C) 8 D) 4 E) 7

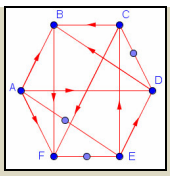
6. (OMI2016) Una pulce si trova inizialmente nell'origine del piano cartesiano e può spostarsi sui punti a coordinate intere scegliendo di volta in volta una di queste tre mosse. 1. dal punto $(x; y)$ salta al punto $(x + 2; y + 4)$; 2. dal punto $(x; y)$ salta al punto $(x; y + 5)$; 3. dal punto $(x; y)$ salta al punto $(x – 2; y – 9)$. Quanti sono i percorsi, realizzabili dalla pulce con le sue mosse, che la portano dall'origine (0; 0) al punto (0; 2016)? [0]

Questions in English

Working together

This question was assigned at Abacus in 2007.

Six soccer teams are in a league. (Every team has to play against every team.) The season is not over yet, and the diagram below shows the games played already, and their outcomes. (An arrow points from the winner to the loser of that game. A dot on a line indicates a tie.) A team gets 3 *points for a win*, 1 *point for a*



tie, and 0 *point for a loss. Teams with the same number of points finish in the same place*.

a) *How many games are left to play this season*?

We have to compute how many arrows miss, linking two different points. From each point must start 5 arrows, for a total of $6 \cdot 5 /2 = 15$ (obviously there is only an arrow linking 2 points). We have 12 arrows drawn. So we have 3 games to play yet, they are: A against C, B against E and D against F.

b) *What is the current order of the teams*?

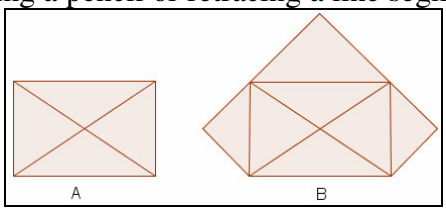
We have the following points for each team:

A: $3 \cdot 3 + 1 = 10$, B: 3; C: $3 \cdot 2 + 1 = 7$, D: $3 + 1 = 4$, E = $3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8$, F = 1

c) *Which teams won the remaining games if we know that the team that is the current leader, did not win the championship after all; and that the team that is in last place currently, did not finish last after all*?

The current leader is A with 10 points, he has to play only against C and it must loss, so at last A will be 10, and C will be $7 + 3 = 10$. Now only E can win the season (winning against B), so E will be $8 + 3 = 11$ and B remains at 3. In the last game F, which was the last must win and reaches $1 + 3 = 4$, while D remains at 4. The final order is: E – A and C – D and F – B.

7. (A2006) Four married couples went to four different places on Saturday night to have some fun and relax. Everybody was with his or her own spouse. The husbands are: Andrew, Ben, Cole, and Daniel; the wives are Emma, Fanny, Gizelle, and Helga. Andrew went to a concert. Ben spent the evening with Emma, but Cole did not see Gizelle that night. Fanny saw a movie, Gizelle went to the theatre. One of the couples was at a wedding. Who are spouses of each other, and where did they all go that night? [(A – H, concert), (B – E, wedding), (C – F, movie), (D – G, theatre)]
8. (A2007) Three workers: a cabinet maker, a painter, and a carpenter live in the same town. Their names (not necessarily in that order) are Peter, Ben and Sam. Not too long ago the painter wanted to ask his friend, the cabinet maker, to make some furniture for him. He learned that the cabinet maker is working at the house of the carpenter. Who has what profession if we know that Ben has never heard of Peter? [Sam is the cabinet maker]
9. (MT1995) Willy, Tillie, Millie, Samantha and Jon, were participants in a video arcade tournament. Millie beat Willy, Tillie, Samantha and Jon. Jon beat Willy and Tillie. Samantha beat Tillie, Willie and Jon. Willie beats Tillie. Rank the participants according to their winning ability.
[Millie, Samantha, Jon, Willy, Tillie]
10. Of the two following figures, one can be drawn without lifting a pencil or retracing a line segment, but the other cannot. Which can be drawn in this manner?



[B]

Attività di recupero

Prodotto cartesiano

Fase 1: Osserva

- Consideriamo gli insiemi $A = \{1; 2; 3\}$ e $B = \{1; 3; 5; 7\}$. Con essi possiamo considerare due diversi prodotti cartesiani: $A \times B$ e $B \times A$, entrambi hanno però lo stesso numero di elementi: $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 12$. In particolare si ha:
  $A \times B = \{(1; 1), (1; 3), (1; 5), (1; 7), (2; 1), (2; 3), (2; 5), (2; 7), (3; 1), (3; 3), (3; 5), (3; 7)\}$
  $B \times A = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (3; 1), (3; 2), (3; 3), (5; 1), (5; 2), (5; 3), (7; 1), (7; 2), (7; 3)\}$
  Come c'era da aspettarsi i due insiemi sono diversi e contengono solo alcuni elementi uguali, come per esempio (1; 1), (1; 3) …
  Possiamo anche considerare i prodotti cartesiani $A \times A = A^2$ e $B \times B = B^2$, cosa che di seguito facciamo:
  $A^2 = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (3; 1), (3; 2), (3; 3)\}$
  $B^2 = \{(1; 1), (1; 3), (1; 5), (1; 7), (3; 1), (3; 3), (3; 5), (3; 7), (5; 1), (5; 3), (5; 5), (5; 7), (7; 1), (7; 3), (7; 5), (7; 7)\}$
  Ovviamente ciascuno dei precedenti ha il quadrato degli elementi dell'insieme di partenza.
  Il prodotto cartesiano fra due o più insiemi è utilizzato tutte le volte in cui vogliamo descrivere accoppiamenti o comunque legami ordinati fra elementi di due o più insiemi. Per esempio se volessimo descrivere tutti i possibili risultati che si ottengono lanciando due dadi regolari a forma di cubo, dovremmo considerare l'insieme dei punteggi ottenibili: $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ e determinare $A^2 = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), \ldots, (1; 6), (2; 1), \ldots, (2; 6), \ldots (6; 1), \ldots, (6; 6)\}$, in cui abbiamo indicato solo alcuni dei 36 elementi. Si potrebbe obiettare che il punteggio (1; 2), per esempio, e il punteggio (2; 1) sono uguali. Ciò è vero dal punto di vista del gioco ma non da quello *fisico* delle effettive possibilità. Supponiamo infatti che i dadi siano facilmente distinguibili fra loro, per esempio a causa del loro colore, allora la combinazione dado rosso = 1 e dado blu = 2 è diversa dalla combinazione dado rosso = 2 e dado blu = 1.
- Un altro esempio di applicazione si ha per descrivere tutte le frazioni ottenibili scegliendo il numeratore in un dato insieme e il denominatore in un altro. Quante sono, per esempio, le frazioni il cui numeratore è un numero dispari di una cifra e il denominatore un numero pari di una cifra. Potremmo avere qualche difficoltà a determinarle, se però pensiamo che esse sono tante quanti sono gli elementi dell'insieme $\{1; 3; 5; 7; 9\} \times \{2; 4; 6; 8\}$, cioè $5 \cdot 4 = 20$, risolviamo facilmente il problema. Certo poi nascono altri problemi quali il determinare se tutte le 20 frazioni sono effettivamente *distinte*, ossia se rappresentano o no lo stesso numero razionale, per esempio la coppia (1, 3) e la coppia (3, 9) rappresentano lo stesso numero razionale $\frac{1}{3} = \frac{3}{9} = 0.\overline{3}$. In ogni caso è più semplice stabilire quante delle 20 frazioni dobbiamo *eliminare*, piuttosto che determinarle con un metodo a caso.

Fase 2: Completa …

- Dati gli insiemi $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{a, e, i, o, u\}$ costruiamo $A \times B$ e $B \times A$.
  Si ha $A \times B = \{(a, a), (a, e), (a, i), (a, o), (a, u),$ ……. …….
  Che ha …… elementi
  $B \times A = \{(a, a), (a, b), (a, c),$ ……. ……..
  Che ha …… elementi
  Costruiamo altresì
  $A \times A = A^2$ $\{(a, a), (a, b), (a, c),$ ……. …….
  Che ha …… elementi
  $B \times B =$ …. $= \{(a, a), (a, e), (a, i),$ ……. ……
  Che ha …… elementi
- Consideriamo l'insieme delle seguenti squadre di calcio {Audaci, Indomabili, Imbattibili, Indomiti, Vittoriosi}, con esse vogliamo costruire il calendario di un campionato all'*italiana*, ossia un campionato in cui ciascuna squadra incontra tutte le altre in due partite di andata e ritorno. Quante partite dovremo fare in tutto? Si tratta di determinare $A \times A \setminus \{($ Audaci, Audaci), (Indomabili, Indomabili), (Imbattibili, Im-

battibili), (Indomiti, Indomiti), (Vittoriosi, Vittoriosi)}; la differenza è motivata dal fatto che non ha senso fare incontrare una squadra con sé stessa. Vi saranno perciò un totale di $5^2 - 5 = 20$ partite. Ossia le seguenti: (Audaci, Indomabili), (Audaci, Imbattibili), (Audaci, Indomiti), (Audaci, Vittoriosi), ……
……
Aumentiamo di altre due squadre, Lottatori e Insuperabili, il nostro campionato, possiamo allora dire che vi saranno un totale di ……. partite, in cui le nuove partite sono le seguenti:
(Audaci, Lottatori), (Audaci, Insuperabili) …….....
……
…….....

Fase 3: Prova!

Determinare $A \times B, B \times A, A^2, B^2$, per gli insiemi di seguito indicati

1. $A = \{0; 1; 2\}$, $B = \{0; 2; 3\}$.
2. $A = \{0; 1; 2; 3\}$, $B = \{0; 1; 3\}$.
3. $A = \{1; 3; 5\}$, $B = \{3; 5; 7\}$.
4. $A = \{a; e; i\}$, $B = \{o; u\}$.
5. $A = \{j; k; x; y; w\}$, $B = \{x; y\}$.
6. $A = \{2; 4; 6\}$, $B = \{a; b; c\}$.
7. $A = \{a; e; i; o; u\}$, $B = \{c\}$.
8. $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$, $B = \{2; 4; 6; 8\}$.

Rispondere ai seguenti quesiti

9. Scrivere tutti i possibili punteggi ottenibili lanciando due dadi a forma di tetraedro regolare, solido con 4 facce a forma di triangoli equilateri su cui sono scritti i punteggi 1, 2, 3, 4.
10. Con riferimento al precedente esercizio scrivere quanti dei punteggi hanno per somma 5. [4]
11. Quanti sono i punteggi ottenibili lanciando due dadi a forma di ottaedro regolare (solido con otto facce a forma di triangolo equilatero su cui vi sono i punteggi da 1 a 8)? [64]
12. Con riferimento al precedente esercizio scrivere quanti dei punteggi hanno per somma 9. [8]
13. Quanti sono i punteggi ottenibili lanciando due dadi a forma di dodecaedro regolare (solido con dodici facce a forma di pentagono regolare su cui vi sono i punteggi da 1 a 12)? [144]
14. Con riferimento al precedente esercizio scrivere quanti dei punteggi hanno per somma 13. [11]
15. Quanti sono i punteggi ottenibili lanciando due dadi a forma di icosaedro regolare (solido con venti facce a forma di triangolo equilatero su cui vi sono i punteggi da 1 a 20)? [400]
16. Con riferimento al precedente esercizio scrivere quanti dei punteggi hanno per somma 21. [19]
17. Quanti sono i punteggi ottenibili lanciando tre dadi a forma di cubo? [216]
18. Scrivere tutte le frazioni in cui il numeratore si sceglie dall'insieme $A = \{2, 3, 4\}$ e il relativo denominatore dall'insieme $B = \{1, 2, 3\}$. Quante delle frazioni sono ridotte ai minimi termini? [3]
19. Scrivere tutte le frazioni in cui numeratore e denominatore si scelgono dall'insieme $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Quante delle frazioni rappresentano distinti numeri razionali? [12]

Relazioni binarie

Fase 1: Osserva

- Consideriamo gli insiemi $A = \{1; 2; 3; 4\}$ e $B = \{2; 4; 6; 8; 10\}$. Definiamo una relazione binaria $\mathcal{R} : A \to B$, mediante la legge *a un elemento di A associamo il suo doppio in B*. Per visualizzare facilmente questo fatto utilizziamo la seguente tabella a doppia entrata:

$\mathcal{R} : A \to B$	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**
1	X				
2		X			
3			X		
4				X	

- In questo modo, con un semplice *colpo d'occhio* siamo in grado di stabilire quali elementi sono associati

tra di loro, quindi anche quali elementi costituiscono il dominio di $\mathcal{R}$, cioè $\{1; 2; 3; 4\} = A$, e quali il codominio di r, cioè $\{2; 4; 6; 8\}$.

- Sempre con riferimento gli stessi insiemi precedenti, possiamo modificare la nostra legge dicendo: *a un elemento di A associamo un elemento in B* in modo che la loro somma sia maggiore di 5. Stavolta la tabella sarà la seguente:

$\mathcal{R}: A \to B$	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**
1			X	X	X
2		X	X	X	X
3		X	X	X	X
4	X	X	X	X	X

In questo modo possiamo dire che il dominio della relazione è rimasto A, mentre il codominio è adesso rappresentato dallo stesso B.

Fase 2: Completa …

- Consideriamo gli insiemi $A = \{3; 4; 5; 6\}$ e $B = \{2; 4; 6; 8; 10\}$ e la relazione binaria $\mathcal{R}: A \to B$, definita mediante la legge *a un elemento di A associamo un suo multiplo in B*. Ricordiamo che b è multiplo di a se la divisione $b : a$ ha resto zero. Possiamo quindi costruire la seguente tabella, di cui riempio solo la prima riga e che tu completerai

$\mathcal{R}: A \to B$	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**
3			X		
4					
5					
6					

Possiamo quindi dire che il dominio della relazione è l'insieme {……..}, mentre il codominio è l'insieme {……}

- Lasciando invariati i due precedenti insiemi A e B e modifichiamo la relazione mediante la legge: *a un elemento di A associamo un elemento di B in modo che il loro prodotto sia un numero pari.* Costruiamo la tabella di cui ti riempio solo la prima colonna e che tu completerai

$\mathcal{R}: A \to B$	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**
3	X				
4	X				
5	X				
6	X				

Possiamo allora dire che il dominio è {…….} e il codominio è {…….}

Fase 3: Prova!

Costruire le tabelle a doppia entrata e determinare dominio e codominio delle relazioni di seguito definite

1. $\mathcal{R}: A = \{2; 4; 8; 16\} \to B = \{1; 2; 3\}$, definita mediante la legge *a un elemento di A associamo un elemento di B in modo che il loro prodotto sia minore di* 6. [$dom = \{2; 4\}$, $cod = \{1; 2\}$]
2. $\mathcal{R}: A = \{–1; –2; 0; 1; 2\} \to B = \{–1; –2; 0\}$, definita mediante la legge *a un elemento di A associamo un elemento di B in modo che il loro prodotto sia positivo*. [$dom = cod = \{–1, –2\}$]
3. $\mathcal{R}: A = \{–2; –4; 5; 6\} \to B = \{–1; 2; 3\}$, definita mediante la legge *a un elemento di A associamo un elemento di B in modo che il loro prodotto sia negativo*. [$dom = A$, $cod = B$]
4. $\mathcal{R}: A = \{12; 14; 118; 1126\} \to B = \{1; 22; 33; 444\}$, definita mediante la legge *a un elemento di A associamo un elemento di B che abbia il suo stesso numero di cifre*. [$dom = \{12; 14; 118\}$, $cod = \{22; 33; 444\}$]
5. $\mathcal{R}: A = \{123; 124; 125; 126\} \to B = \{211; 232; 312; 521\}$, definita mediante la legge *a un elemento di A associamo un elemento di B in modo che siano formati dalle stesse cifre*. [$dom = \{123; 125\}$, $cod = \{312; 521\}$]

6. $\mathfrak{R}$: $A = \{1; 2; 3; 4\} \rightarrow B = \{2; 3; 4; 5\}$, definita mediante la legge *a un elemento di A associamo un elemento di B in modo che la frazione in cui il numeratore è l'elemento di A e il denominatore quello di B è ridotta ai minimi termini*. [*dom* = *A*, *cod* = *B*]
7. $\mathfrak{R}$: $A = \{1; 2; 3; 4\} \rightarrow B = \{2; 3; 4; 5\}$, definita mediante la legge *a un elemento di A associamo un elemento di B in modo che la frazione in cui il numeratore è l'elemento di A e il denominatore quello di B è maggiore di* 1. [*dom* = {3; 4}, *cod* = {2; 3}]
8. $\mathfrak{R}$: $A = \{1; 2; 3; 4\} \rightarrow B = \{2; 3; 4; 5\}$, definita mediante la legge *a un elemento di A associamo un elemento di B in modo che la frazione in cui il numeratore è l'elemento di A e il denominatore quello di B rappresenta un numero decimale limitato*. [*dom* = *A*, *cod* = *B*]

Proprietà delle relazioni binarie

Fase 1: Osserva

Dato l'insieme $A = \{123; 125; 331; 354; 421; 531\}$ definiamo su di esso la relazione *un elemento di A è in relazione con un altro se hanno la stessa cifra delle unità*. Possiamo costruire la seguente tabella a doppia entrata.

$\mathfrak{R} : A \rightarrow A$	**123**	**125**	**331**	**354**	**421**	**531**
123	X					
125				X		
331			X		X	X
354				X		
421			X		X	X
531			X		X	X

Possiamo facilmente osservare che sono verificate le seguenti proprietà: riflessiva (dato che in corrispondenza di due valori uguali sulle righe e sulle colonne, vi è apposto un segno X) e simmetrica (dato che ogni volta che all'incrocio di una riga *n* e una colonna *m* vi è un segno X anche all'incrocio della colonna *n* e della riga *m* si ha lo stesso segno). Non vale invece la proprietà di connessione, perché per esempio 125 e 331 non sono in alcuna relazione fra loro neanche scambiandone i posti. Per la proprietà transitiva possiamo dire che anch'essa è vera, ma non ci risulta utile la tabella dato che per questa proprietà risulta di difficile lettura. Osserviamo invece che tutti i numeri che hanno la stessa cifra delle unità sono ovviamente in relazione fra di loro.

Fase 2: Completa …

Sia l'insieme $A = \{12; 13; 14; 15; 16\}$ e su di esso definiamo la relazione secondo la quale *un elemento è in relazione con un altro se la loro differenza è un numero naturale pari*. Possiamo costruire la seguente tabella:

$\mathfrak{R} : A \rightarrow A$	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
12					
13					
14	X				
15		X			
16	X		X		

Dalla tabella possiamo dire che è valida la proprietà antiriflessiva perché ……
Vale anche la proprietà antisimmetrica perché ……
Per la proprietà transitiva dobbiamo considerare solo i seguenti elementi: 16, 14 e 12. Abbiamo che 16 $\mathfrak{R}$ 14, 14 $\mathfrak{R}$ 12 e 16 … 12, perciò possiamo dire che la proprietà transitiva è …….
Non consideriamo altri valori perché non vi sono altri elementi in relazione fra loro a due a due.
Possiamo anche dire che la proprietà di connessione è ……. perché ……...

Fase 3: Prova!

Giustificare le risposte

1. Se una relazione gode della proprietà riflessiva può godere di quella antiriflessiva? [No]
2. Se una relazione gode della proprietà simmetrica può godere di quella antisimmetrica? [No]
3. Se una relazione non gode della proprietà riflessiva deve per forza godere di quella antiriflessiva? [No]
4. Se una relazione non gode della proprietà simmetrica deve per forza godere di quella antisimmetrica? [No]

Stabilire di quali proprietà godono le seguenti relazioni, definite sugli insiemi indicati

5. *x* $\mathfrak{R}$ *y se x e y hanno cifre delle decine la cui somma è pari*, in {12; 13; 14; 15}. [R, S, T]
6. *x* $\mathfrak{R}$ *y se x e y hanno cifre delle unità la cui somma è pari*, in {12; 13; 14; 15}. [R, S, T]
7. *x* $\mathfrak{R}$ *y se x e y hanno la stessa somma delle proprie cifre*, in {101; 110; 112; 114; 120}. [R, S, T]
8. *x* $\mathfrak{R}$ *y se x ha più cifre* 1 *di quante ne ha y*, in {1001; 1110; 1010; 1110; 1111}. [AR, AS, T]
9. *x* $\mathfrak{R}$ *y se MCD*(*x, y*) = 6, in {12; 18; 24; 28; 32; 36}. [AR, S]
10. *x* $\mathfrak{R}$ *y se x è un multiplo di y*, in {1; 2; 3; 4; 6; 8; 12}. [R, AS, T]
11. *x* $\mathfrak{R}$ *y se x e y hanno lo stesso numero di divisori*, in {12; 14; 16; 18; 20}. [R, S, T]
12. *x* $\mathfrak{R}$ *y se la cifra delle decine di x è uguale alla cifra delle unità di y*, in {12; 24; 54; 25; 41; 32}. [AR]

Relazioni di equivalenza

Fase 1: Osserva

Se una relazione è di equivalenza vuol dire che i suoi elementi possono essere in qualche modo *ridotti*, considerandone uno solo per ciascuna classe di equivalenza.

- Consideriamo l'insieme $A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}\right\}$ come insieme di simboli e non di numeri. Su di esso definiamo la relazione $\mathfrak{R}$: *la frazione* $\frac{a}{b}$ *è in relazione con la frazione* $\frac{c}{d}$ *se* $a \cdot d = b \cdot c$. Possiamo dire che questa è una relazione di equivalenza? Vediamo.

  Proprietà riflessiva. Ogni frazione è in relazione con sé stessa? Cioè è vero che $\frac{a}{b}\mathfrak{R}\frac{a}{b}$, ossia che $a \cdot b = b \cdot a$? Certamente sì dato che nell'insieme dei numeri naturali, a cui appartengono tutti i numeratori e i denominatori, vale la proprietà commutativa della moltiplicazione.

  Proprietà simmetrica. Se una frazione è in relazione con un'altra è vero anche il contrario? Cioè è vero che se $\frac{a}{b}\mathfrak{R}\frac{c}{d}$ è anche vero che $\frac{c}{d}\mathfrak{R}\frac{a}{b}$? Cioè è vero che se $a \cdot d = b \cdot c$ allora è anche vero che $c \cdot b = a \cdot d$? Anche in questo caso non vi sono problemi a dire che ciò è vero.

  Proprietà transitiva. Al solito questa proprietà è un po' più difficile delle altre da verificare. È vero che se $\frac{a}{b}\mathfrak{R}\frac{c}{d}$ e $\frac{c}{d}\mathfrak{R}\frac{e}{f}$ è anche vero che $\frac{a}{b}\mathfrak{R}\frac{e}{f}$? Cioè se $a \cdot d = b \cdot c$ e $c \cdot f = d \cdot e$ è anche vero che $a \cdot f = b \cdot e$? verifichiamolo su un caso particolare, anche se ciò non costituisce una dimostrazione. $\frac{1}{2}\mathfrak{R}\frac{2}{4}$ e $\frac{2}{4}\mathfrak{R}\frac{3}{6}$ è anche vero che $\frac{1}{2}\mathfrak{R}\frac{3}{6}$? Cioè è vero che $1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$? Sì.

  Quindi la relazione è di equivalenza. È facile vedere che possiamo formare le seguenti classi di equivalenza: $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}\right\}, \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}\right\}, \left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}\right\}, \left\{\frac{1}{4}\right\}, \left\{\frac{3}{4}\right\}, \left\{\frac{1}{5}\right\}, \left\{\frac{2}{5}\right\}, \left\{\frac{3}{5}\right\}, \left\{\frac{4}{5}\right\}, \left\{\frac{1}{6}\right\}, \left\{\frac{5}{6}\right\}$. Perciò l'insieme quoziente determinato dalla relazione $\mathfrak{R}$ ha 11 elementi che sono i seguenti, abbiamo scritto solo le frazioni ridotte ai minimi termini:

$$\left\{\left[\frac{1}{2}\right],\left[\frac{1}{3}\right],\left[\frac{2}{3}\right],\left[\frac{1}{4}\right],\left[\frac{3}{4}\right],\left[\frac{1}{5}\right],\left[\frac{2}{5}\right],\left[\frac{3}{5}\right],\left[\frac{4}{5}\right],\left[\frac{1}{6}\right],\left[\frac{5}{6}\right]\right\}$$

Fase 2: Completa …

- Consideriamo l'insieme {12; 13; 22; 24; 26; 31; 42; 46; 51; 53; 63} e su di esso definiamo la relazione $\mathcal{R}$: *un elemento è in relazione con un altro se hanno la stessa cifra delle unità*. $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza? Verifichiamo.
  Proprietà riflessiva. È vera perché ogni numero ha la sua stessa cifra delle unità.
  Proprietà simmetrica. Vale perché se un numero *a* ha la stessa cifra delle unità di *b* è anche vero …….
  Proprietà transitiva. È verificata perché se un numero *a* la stessa cifra delle unità di *b* e *b* ……. allora anche …….
  Quindi $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza. Determiniamo le classi di equivalenza. Chiaramente esse sono date da tutti quei numeri che hanno diverse cifre delle unità, cioè {[2], [3], …….}, per un totale di …… elementi.
- Lasciando inalterato l'insieme *A* variamo la relazione $\mathcal{R}$ *un elemento è in relazione con un altro se hanno la stessa cifra delle decine*.
  La relazione è di equivalenza perché valgono le proprietà riflessiva, infatti ……, simmetrica, dato che ……., transitiva, infatti …… Consideriamo allora l'insieme dei rappresentati che è formato da {……..}. Possiamo dire che questo insieme coincide con quello precedente? ……perché ……

Fase 3: Prova!

Dopo aver verificato che le relazioni di seguito definite sugli insiemi indicati sono di equivalenza, determinare i rispettivi insiemi quozienti

1. $x\ \mathcal{R}\ y \Leftrightarrow$ *la somma delle cifre di x è uguale a quella di y*, in $A = \{123; 132; 141; 152; 161; 172\}$. [{[6], [8], [10]}]
2. $x\ \mathcal{R}\ y \Leftrightarrow$ *il prodotto delle cifre di x è uguale a quello di y*, in $A = \{123; 132; 141; 104; 160; 113\}$. [{[0], [3], [4], [6]}]
3. $x\ \mathcal{R}\ y \Leftrightarrow$ *x e y divisi per* 3 *hanno lo stesso resto*, in $A = \{12; 15; 16; 17; 18; 19; 22\}$. [{[0],[1], [2]}]
4. $x\ \mathcal{R}\ y \Leftrightarrow$ *x e y divisi per* 4 *hanno lo stesso resto*, in $A = \{12; 15; 16; 18; 19; 22\}$. [{[0], [2], [3]}]
5. $x\ \mathcal{R}\ y \Leftrightarrow$ *x e y innalzati al quadrato hanno la stessa cifra delle unità*, in $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. [{[1], [4], [5], [6], [8], [9]}]
6. $x\ \mathcal{R}\ y \Leftrightarrow$ *x e y innalzati al cubo hanno la stessa cifra delle unità*, in $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. [{[1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9]}]
7. $x\ \mathcal{R}\ y \Leftrightarrow$ *x e y hanno lo stesso numero di divisori*, in $A = \{6; 8; 9; 10; 12; 14; 16; 18\}$. [{[3], [4], [5], [6]}]
8. $x\ \mathcal{R}\ y \Leftrightarrow$ *x e y hanno gli stessi fattori primi*, in $A = \{6; 8; 9; 10; 12; 14; 16; 18\}$. [{[2], [3], [2, 3], [2, 5], [2, 7]}]

Relazioni di ordinamento

Fase 1: Osserva

Dire che r è un ordinamento di *A* vuol dire che gli elementi di *A* possono elencarsi in un dato ordine. Se l'ordine è stretto e totale l'elenco è unico, se l'ordine è largo e totale l'elenco non è unico; se l'ordine è stretto e parziale vi sono più elenchi, fra loro non confrontabili ma al loro interno unici; se l'ordine è largo e par-

ziale vi sono più elenchi, ciascuno dei quali non è unico e fra loro non confrontabili. Cerchiamo di capire meglio con degli esempi.

- Consideriamo l'insieme $A = \{14; 17; 15; 12; 22; 19\}$ e definiamo su esso la relazione $\mathfrak{R}$ secondo la quale *un numero è in relazione con un altro se è maggiore di esso*. Questa relazione è chiaramente un ordinamento, l'ordinamento secondo grandezza di A, dato che vale la proprietà antiriflessiva, ogni numero non è mai maggiore di sé stesso, questo ordine è stretto e totale, pertanto A può ordinarsi nell'unico seguente modo: {12, 14, 15, 17, 19, 22}.
- Adesso consideriamo l'insieme $A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{6}, \frac{5}{6}\right\}$ e su di esso definiamo la relazione $\mathfrak{R}$ secondo la quale *una frazione è in relazione con un'altra se è maggiore o uguale di essa*. Stavolta l'ordinamento è largo, pur essendo ancora totale, difatti vale la proprietà riflessiva, poiché ogni frazione è maggiore o uguale (in effetti è uguale) a sé stessa. Ciò significa che le frazioni che hanno lo stesso valore numerico stanno nella stessa posizione, pertanto possono crearsi più elenchi. Vediamone alcuni:
$$\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right\}, \left\{\frac{2}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right\}, \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{2}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right\}, \left\{\frac{2}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right\}$$
come si vede gli elementi che non hanno frazioni a loro equivalenti stanno sempre nella stessa posizione, gli altri invece possono scambiarsi fra loro, ma non con altre frazioni a esse non equivalenti.
- Adesso consideriamo l'insieme $A = \{2; 3; 4; 6; 8; 9; 10\}$ e definiamo su esso la relazione $\mathfrak{R}$ secondo la quale *ogni numero è in relazione con un altro se è un suo multiplo proprio, cioè non è lo stesso numero*. La relazione è di ordine parziale stretto, infatti vale la proprietà antiriflessiva, ma non quella di connessione, infatti né 2 è multiplo di 3, né 3 di 2. Possiamo considerare i seguenti elenchi ordinati estratti da A formati da multipli: {2; 4; 8}, {2; 6}, {2; 10}, {3; 6}, {3; 9}.
- Infine consideriamo l'insieme dei ragazzi A {Aldo, Beatrice, Carlo, Diana, Elisa, Federico} i quali hanno le seguenti altezze espresse in centimetri: {172; 174; 172; 175; 175; 175}. Su A definiamo la seguente relazione: *uno studente è in relazione con un altro se hanno lo stesso sesso e il primo non è più basso del secondo*. Questo è un ordinamento parziale largo, dato che stavolta vale la proprietà riflessiva, ciascuno è non più basso di sé stesso. Possiamo estrarre i seguenti elenchi ordinati per sesso: per i maschi {Aldo, Carlo, Federico} o {Carlo, Aldo, Federico}; per le femmine {Beatrice, Diana, Elisa} oppure {Beatrice, Elisa, Diana}.

Fase 2: Completa …

- Consideriamo l'insieme di ragazzi A = {Giorgio, Luca, Miriam, Naomi, Paolo, Rossana}, ciascuno dei quali ha la seguente età {14; 15; 14; 15; 15; 16}. Su A definiamo la relazione $\mathfrak{R}$: *ogni ragazzo* è *in relazione con un altro più giovane*.
  Possiamo dire che vale la proprietà …….. perché non è vero che ogni ragazzo è più giovane di sé stesso. Inoltre non vale la proprietà di connessione perché ……. Quindi $\mathfrak{R}$ definisce su A un ordinamento ……
  Costruiamo i seguenti elenchi ordinati di A {Giorgio, Luca, Rossana}, {Giorgio, Naomi, Rossana}, ……
  ……...
- Manteniamo inalterato l'insieme A precedente e modifichiamo la relazione. $\mathfrak{R}$: *ogni ragazzo* è *in relazione con un altro non più vecchio*. In questo modo valgono sia la proprietà ……che la proprietà …… perciò l'ordinamento definito da $\mathfrak{R}$ su A è …….. Possiamo perciò costruire questi elenchi ordinati: {Giorgio, Miriam, Luca, Naomi, Paolo, Rossana}, …..…….

Fase 3: Prova!

Determinare il tipo di ordinamento definito dalla seguenti relazioni sugli insiemi di seguito indicati, quindi ordinare gli insiemi nei vari modi possibili

1. $x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow x$ *è un divisore di* y, in $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. [O.P.L.]
2. $x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow x$ *ha più divisori di* y, in $A = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$. [O.P.S.]

3. $x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow x$ *è un sottoinsieme di* y, in $A = \{\{1\}, \{1; 2\}, \{1; 2; 3\}, \{1; 3\}, \{2; 3\}\}$. [O.P.L.]
4. $x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow x$ *ha più elementi di* y, in $A = \{\{1\}, \{1; 2\}, \{1; 2; 3\}, \{1; 3\}, \{2; 3\}\}$. [O.P.S.]
5. $x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow x$ *ha un nome che precede quello di y, in ordine alfabetico*, in A = {Athos, Barbara, Chiara, Denise, Franca}. [O.T.S.]
6. $x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow x$ *ha un nome che non ha meno lettere di quello di* y, in A = {Athos, Barbara, Chiara, Denise, Franca}. [O.T.L.]
7. $x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow x$ *se ha un peso superiore di* y, in A = {Guendalina, Helga, Irina, Martina, Syria}, che hanno i rispettivi pesi: {54; 52; 55; 54; 55}. [O.T.L.]
8. $x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow x$ *è nato in un mese che precede quello in cui è nato y, a partire da Gennaio*, in A = {Max, Olga, Pat, Tom, Steve, Zaira}, che sono nati nei seguenti mesi: {Gennaio, Dicembre, Gennaio, Febbraio, Gennaio, Dicembre}. [O.T.L.]
9. $x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow x$ *è nato in un mese che precede quello in cui è nato y ed ha lo stesso sesso*. Stessi dati del precedente. [O.P.L.]
10. $x \mathfrak{R} y \Leftrightarrow x$ *non ha meno punti di y in classifica*, in A = {Italia, Francia, Germania, Russia, Belgio, Romania}, le prime tre appartengono a un girone e hanno rispettivamente, 4, 6 e 1 punto; le altre a un altro girone e hanno 2, 2, 2 punti. [O.P.L.]

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito

http://mathinterattiva.altervista.org/volume_1_1.htm

2. Il calcolo simbolico

2.1 Monomi

Prerequisiti
- Conoscenze aritmetiche elementari
- Enunciati logici
- Conoscenze aritmetiche elementari

Obiettivi
- Richiamare le operazioni aritmetiche elementari
- Comprendere il concetto di grandezza variabile
- Astrarre il concetto di numero e di elemento generico, comprendendo la necessità di ricorrere alla simbologia
- Abitudine all'uso dei nomi simbolici
- Saper trasformare espressioni aritmetiche o algebriche in altre equivalenti

Contenuti
- Concetto di monomio
- Operazione di somma algebrica nell'insieme dei monomi

Parole Chiave
Coefficiente – Coefficiente direttore – Monomio

Concetto di monomio

Abbiamo già usato simboli per indicare operazioni fra termini generici, o proprietà che riguardano tutti gli elementi di un dato insieme, adesso vogliamo studiarli più in dettaglio.

Esempio 1

Piuttosto che dire a parole "il prodotto di due numeri interi negativi è un numero positivo", preferiamo scrivere $m \cdot n > 0$, $m, n \in \mathbb{Z}^-$, indicando con i simboli m e n non due particolari numeri negativi, ma due qualsiasi. Proprio ricorrendo a simboli possiamo enunciare proprietà generali.

In effetti anche nel linguaggio quotidiano quando vogliamo parlare non di una particolare persona ma di una generica, parliamo di Tizio, di Caio o del signor Rossi, indicando con questi termini fantomatici esseri umani. Questo ci convince del fatto che anche se la simbologia può essere talvolta causa di "complicazione", una volta che ci siamo impossessati della terminologia e ci siamo abituati a usarla, poi semplifichiamo molte questioni. Questo è proprio ciò che vogliamo fare, indicare con dei simboli numeri generici e lavorare su di essi come si fa con i numeri.

Esempio 2

Tony sta mettendo in ordine i suoi giornalini e sfrutta l'occasione anche per farne un censimento, distinguendoli in categorie: avventurosi, horror, fantascienza e vari. Quindi li raggruppa per collane e li sistema negli scaffali, intanto conta quanti albi ha per collana. Per semplificare su un blocco note ha indicato i vari generi con le lettere iniziali: a, h, f, v. Alla fine dei suoi conteggi ha scritto sul blocco $57a$, $82h$, $113f$ e $15v$.

Come si vede nell'esempio precedente anche nella vita di ogni giorno, anche se in modo inconscio usiamo la simbologia. Certo in matematica ciò è molto più diffuso, soprattutto quando scriviamo e memorizziamo le formule.

Esempio 3

Per calcolare l'area del cerchio usiamo la semplice formula: "*raggio per raggio per* 3,14", che è però una formula approssimata, oppure la scritta πr^2, in cui il simbolo π indica il numero con infinite cifre 3,1415..., mentre r è il generico raggio. Se poi dobbiamo determinare l'area di un cerchio di raggio 3, diremo che è 9π, oppure un valore prossimo a $9 \cdot 3{,}14 = 28{,}26$.

Quanto osservato finora ci convince a utilizzare dei nomi simbolici ogni volta che vogliamo indicare un numero anche particolare come π, la cui espressione completa ha infinite cifre o più in generale un termine variabile in una forma, come il raggio di un cerchio o il lato di un poligono.
Naturalmente la scelta dei simboli non è vincolante, nel senso che per indicare il lato di un quadrato nella formula per l'area possiamo usare uno qualsiasi dei simboli ℓ^2, x^2, m^2, o anche altri. Quello a cui dobbiamo stare attenti è che, dobbiamo usare *simboli diversi* per *oggetti diversi*. Così non possiamo indicare la formula per l'area di un rettangolo nella forma $a \cdot a$, perché in generale un rettangolo non è un quadrato, quindi le sue dimensioni sono diverse. Dovremo perciò usare una scritta come $a \cdot b$, in cui le lettere usate sono diverse fra loro.
Cominciamo allora definire le espressioni simboliche, cominciando dalle più semplici fra esse, quelle cioè che contengono solo l'operazione di moltiplicazione e quindi di elevamento a potenza, poiché per queste due conosciamo delle regole da applicare anche a quantità generiche.
In seguito definiremo anche le espressioni contenenti le altre operazioni aritmetiche elementari.

Definizione 1

Un'espressione contenente solo moltiplicazioni fra numeri e lettere, in modo che le lettere siano basi di potenze a esponenti soltanto interi non negativi, si dice **monomio**.

Esempio 4

- Possiamo dire che le seguenti espressioni sono monomi secondo la definizione precedente
$$3 \cdot 5,\ a,\ m \cdot z,\ -2 \cdot z \cdot t \cdot z \cdot t;\ 9 \cdot x^4 \cdot y^2 \cdot 5$$
- Anche 7 + 5 è un monomio perché può scriversi come 12.
- Invece secondo la definizione precedente non possiamo classificare monomio la scritta $a + b$.

Definizione 2

Il numero risultato del prodotto di tutti i numeri presenti in un monomio si chiama **coefficiente** del monomio. Le lettere del monomio si chiamano **parte letterale** del monomio.

Che cosa significa?

Monomio. Il prefisso mono deriva dalla parola greca *monos* che significa unico, solo; per esempio: monoteista: che adora un solo Dio, monocolo: occhiale con una sola lente; monocromatico: formato da un solo colore... Quindi il monomio è una scrittura formata da una sola cosa, o meglio è un tutt'uno.
Coefficiente. Il termine, che non ha un vero e proprio significato legato al suo ruolo, è stato usato per primo da Françoise Viete per denotare la parte numerica di un monomio.

Esempio 5

Le seguenti scritture $a, -a^2b, \frac{3}{2}x^3y^2, 4$, rappresentano certamente dei monomi, secondo la definizione 2. In particolare, nel primo monomio, il coefficiente vale 1, nel secondo –1, mentre nell'ultimo la parte letterale non è presente.

Abbiamo detto che in genere una scritta simbolica rappresenta numeri generici, ciò significa che se sostituiamo alle lettere di un monomio dei numeri e se così facendo otteniamo un'espressione aritmetica corretta, il numero semplificazione di tale espressione sarà uno dei numeri associati al monomio.

Esempio 6

- Se nel monomio $3x^2y^3$, sostituiamo alla x il valore 1 e alla y il valore –2, otteniamo $3 \cdot 1^2 \cdot (-2)^3 = 3 \cdot (-8) = -24$.
- Se invece sostituiamo alla y il valore 1 e alla x il valore –2, otteniamo $3 \cdot (-2)^2 \cdot 1^3 = 3 \cdot 4 = 12$.

Dato che un monomio è una particolare moltiplicazione e che sappiamo come moltiplicare fra loro potenze aventi uguale base, piuttosto che avere a che fare con scritte particolarmente laboriose e lunghe applichiamo le dette regole per semplificarle.

Esempio 7

Per semplificare il monomio $3abxa^2 5b^2a^5x^3$, moltiplichiamo fra di loro i numeri e le variabili omonime, ottenendo la forma semplificata seguente: $15a^{1+2+5}b^{1+2}x^{1+3} = 15a^8b^3x^4$.

Definizione 3

Diciamo che un monomio è scritto in **forma semplificata** se ha un solo coefficiente e una parte letterale costituita da variabili tutte diverse fra di loro.

Un'ulteriore semplificazione che ci evita confusioni nel trattamento dei monomi è stabilita dalla seguente notazione.

Notazione 1

Scriveremo i monomi in modo da porre le variabili in ordine alfabetico.

Un modo per distinguere fra loro due monomi non è tanto il fatto di contenere lettere diverse, dato che abbiamo detto che la scelta delle lettere è arbitraria. Sarà invece importare distinguerli per il loro grado. Poniamo perciò la seguente definizione.

Definizione 4

Diciamo **grado complessivo di un monomio** la somma degli esponenti di tutte le lettere (variabili) presenti nel monomio.

Definizione 5

Diciamo **grado di un monomio rispetto a una variabile** l'esponente di tale variabile nel monomio posto in forma semplificata. Se la variabile non è presente, il grado del monomio rispetto a tale variabile è zero.

Esempio 8

Per determinare i gradi del monomio $3^3x^2yx^2zy^3$, intanto lo scriviamo in forma semplificata: $27x^4y^4z$.
Adesso possiamo dire che il suo grado è $(4 + 4 + 1) = 9$, mentre quelli rispetto alle variabili presenti sono: 4 sia rispetto a x sia rispetto a y, 1 rispetto a z.

Per la stessa definizione di monomio è evidente che l'operazione più "naturale" e semplice da affrontare fra due monomi è la moltiplicazione, infatti moltiplicare due monomi è un caso particolare della riduzione del monomio a forma semplificata.

Esempio 9

Per moltiplicare i monomi $5x^2yz^3$ e $3xyt^4z^2$, basta scriverli uno accanto all'altro (o come si dice *giustapporli*) e considerare tale espressione come un unico monomio da ridurre a forma semplificata; avremo così facilmente: $15\,x^3y^2t^4z^5$.

Poniamo perciò la seguente definizione.

Definizione 6

Il **prodotto di due monomi** è il monomio che ha come coefficiente il prodotto dei coefficienti e come parte letterale il prodotto delle parti letterali.

Valgono i seguenti ovvi risultati.

Teorema 1

Il prodotto di monomi è un'operazione interna nell'insieme dei monomi.

Teorema 2

Il prodotto fra monomi gode delle proprietà commutativa e associativa.

Teorema 3

Il grado complessivo, o relativo a una variabile, del monomio prodotto di due o più monomi è dato dalla somma dei gradi complessivi, o relativi alla stessa variabile, dei singoli monomi fattori.

Esempio 10

Nella precedente moltiplicazione $5x^2yz^3 \cdot 3xyt^4z^2$, il primo monomio aveva grado complessivo 6, il secondo 8. Il monomio prodotto ha grado $6 + 8 = 14$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Consideriamo la seguente espressione: $\frac{m^2-n^2}{m-n}$, possiamo dire che costituisce un monomio?

In effetti abbiamo a che fare con una frazione il cui numeratore e denominatore non sono monomi, quindi non conoscendo l'ente algebrico con il quale abbiamo a che fare non possiamo rispondere alla domanda.
Vogliamo allora calcolare il valore numerico di questa espressione variabile quando al posto di *m* sostituiamo 2 e al posto di *n* il valore 1.

- Così facendo otteniamo la seguente espressione numerica: $\frac{2^2-1^2}{2-1}=\frac{4-1}{1}=3$.
- Proviamo a sostituire $m=\frac{2}{3}, n=\frac{1}{4}$. Otteniamo

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{4}{9}-\frac{1}{16}}{\frac{2\cdot4-1\cdot3}{12}}=\frac{\frac{4\cdot16-1\cdot9}{144}}{\frac{8-3}{12}}=\frac{\frac{64-9}{144}}{\frac{5}{12}}=\frac{\frac{55}{144}}{\frac{5}{12}}=\frac{55}{144}\cdot\frac{12}{5}=\frac{11}{12}.$$

- Proviamo infine con $m = 5$, $n = 5$: $\frac{5^2-5^2}{5-5}=\frac{25-25}{0}=?$. Stavolta vi è un problema, l'espressione non ha alcun significato.

Determinare quali fra le seguenti espressioni costituiscono dei monomi, determinando per quelle che lo sono coefficiente e parte letterale. Calcolare poi per ogni espressione il valore che essa assume assegnando alle variabili i valori accanto indicati

Livello 1

1. $-2x^3y$; $(x = 2, y = -1)$, $(x = -2, y = 1)$, $(x = -2, y = -1)$, $(x = 2, y = 1)$ — [16; 16; –16; –16]
2. $4a^2x^0$; $(a = -2, x = 1)$, $(a = 2, x = 3)$, $(a = 0, x = 3)$, $(a = 3, x = 0)$ — [16; 16; 0; 0]
3. mn^2; $\left(m=-\frac{1}{2}, n=1\right), \left(m=\frac{1}{2}, n=\frac{1}{2}\right), \left(m=0, n=10^{34}\right), \left(m=-3, n=\frac{1}{3}\right)$ — $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{8};0;-\frac{1}{3}\right]$
4. $\frac{1}{3}m^3x^5$; $(m = -2, x = 1)$, $(m = 2, x = -1)$, $(m = -4, x = 3)$, $(m = -3, x = -4)$ — $\left[-\frac{8}{3};-\frac{8}{3};-5184;9216\right]$
5. $-\frac{3}{4}x^2y^3$; $(x = 3, y = 4)$, $(x = 0, y = 17^{47})$, $(x = -2, y = -1)$, $(x = -1/2, y = 1/2)$ — $\left[-432;3;0;-\frac{3}{128}\right]$
6. $\frac{2}{7}x^3z$; $(x = 1, z = -2)$, $(x = -1, z = 3)$, $(x = 0, z = 11)$, $(x = 47, z = 0)$ — $\left[-\frac{4}{7};-\frac{6}{7};0;0\right]$
7. $6h^2k$; $(h = 1, k = -2)$, $(h = -1, k = 1)$, $(h = 0, k = 0)$, $(h = 4, k = 3)$ — [–12; 6; 0; 288]
8. c^4tz; $(c = 1, t = -1, z = 2)$, $(c = 2, t = -2, z = 1)$, $(c = 3, t = 0, z = 5)$ — [–2; 32; 0]

Livello 2

9. $m^2n^{-1}p^{-2}$; $\left(m=\frac{1}{2}, n=\frac{1}{3}, p=-\frac{1}{4}\right), \left(m=-\frac{1}{2}, n=-\frac{1}{3}, p=\frac{1}{4}\right), \left(m=\frac{1}{4}, n=-\frac{1}{2}, p=\frac{1}{3}\right)$ — $\left[6;-12;-\frac{9}{8}\right]$
10. a^bb^a; $(a = 2, b = 1)$, $(a = 1, b = 2)$, $(a = 3, b = 2)$, $(a = 4, b = 0)$ — [2; 2; 72; 0]
11. $\frac{2b+3c}{5b-1}$; $(b = 2, c = -1)$, $(b = -1, c = 0)$, $(b = -1/5, c = 0)$, $(b = 3, c = 2)$ — $\left[\frac{1}{9};\frac{1}{3};\frac{1}{5};\frac{6}{7}\right]$
12. $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2+2xy+y^2}$; $(x = 1, y = -1)$, $(x = 2, y = 1)$, $(x = 1, y = 2)$, $(x = 0, y = 1)$ — $\left[\varnothing;\frac{1}{9};\frac{1}{9};1\right]$
13. $\frac{p^3-q^3}{p^3+q^3}$; $(p = 1, q = -1)$, $(p = -2, q = 2)$, $(p = -5, q = -5)$, $(p = 0, q = 18)$ — [∅; ∅; 0: – 1]

Lavoriamo insieme

Consideriamo il monomio a^2m^3, esso può scriversi nella seguente forma non semplificata: *aammm*. Con queste lettere possiamo formare i seguenti dieci diversi vocaboli:

aammm, *amamm*, *ammam*, *ammma*, *maamm*, *mamam*, *mamma*, *mmaam*, *mmama*, *mmmaa*

di questi uno solo ha significato nella lingua italiana, cioè *mamma*, gli altri invece sono privi di senso.

Utilizzando le lettere componenti i seguenti monomi, costruire con esse parole italiane di senso compiuto

Livello 2

14. a^2rm ; a^2p^2 ; cl^2a; aip^2 ; e^2p^2 ; eor^2t
15. mo^2rs ; $efor^2$; eno^2t^2 ; $abel^2$; ad^2o ; e^2m^2
16. $agot^2$; ail^3 ; $enot^2$; a^2s^2t ; $a^3el^2m^2rt$; a^3cel^2mr

Lavoriamo insieme

- Anche le formule che di solito usiamo per esempio in geometria o in altri rami scientifici, talvolta sono monomi. Per esempio se vogliamo esprimere simbolicamente l'area di un quadrato il cui lato misura $7u$, avremo $(7u)^2 = 49u^2$.
- Lo stesso accade anche per il perimetro dello stesso quadrato: $4 \cdot 7u = 28u$.
- Ciò non sarebbe invece se il lato del quadrato misurasse per esempio $a + 3b$. Avremo infatti, per l'area l'espressione $(a + 3b)^2$ e per il perimetro $4 \cdot (a + 3b)$.

Tradurre le seguenti formule geometriche in espressioni simboliche, stabilendo quali si possono considerare monomi

Livello 1

17. Area di un rettangolo di base che misura b e altezza che misura h [Sì; bh]
18. Area di un quadrato di lato che misura n [Sì; n^2]
19. Perimetro di un quadrato il cui lato misura $(3n + 1)$ [No; $12n + 4$]
20. Area di un triangolo rettangolo i cui cateti misurano $3m$ e $4m$ [Sì; $12m^2$]
21. Area di un trapezio le cui basi misurano b e m e l'altezza misura h [No; $1/2 \cdot (b + m) \cdot h$]
22. Area di un rombo le cui diagonali misurano $z + 1$ e $z - 1$ [No; $(z + 1) \cdot (z - 1)/2$]
23. Area di un cerchio il cui raggio misura $13r$ [Sì; $169\pi r^2$]
24. Lunghezza di una circonferenza il cui raggio misura $1/4r^3$ [Sì; $1/2\pi r^3$]
25. Volume di un cubo il cui spigolo misura $1/2t^2v^4$ [Sì; $1/8t^6v^{12}$]
26. Superficie totale di un parallelepipedo le cui dimensioni misurano $4a^2$, $5b^3$, $6c^4$ [No; $40a^2b^3 + 48a^2c^4 + 60b^3c^4$]

Spazio percorso da un corpo che si muove di moto rettilineo uniforme a velocità v, in un tempo t	vt
Spazio percorso da un corpo che si muove di moto uniformemente accelerato con accelerazione a, in un tempo t	$1/2at^2$
Velocità raggiunta da un corpo che si muove di moto uniformemente accelerato con una velocità iniziale v e un'accelerazione a, in un tempo t	at + v
Accelerazione centripeta prodotta da un corpo che si muove di moto circolare uniforme con velocità v, lungo una circonferenza di raggio R	v^2/R
Forza necessaria a imprimere a un corpo di massa m un'accelerazione a	ma
Accelerazione di gravità su di un pianeta di forma sferica, di massa m e raggio R	$G \cdot m/R^2$

Tenuto conto del precedente specchietto, tradurre le formule fisiche in espressioni simboliche, stabilendo quali si possono considerare monomi

Livello 2

27. Spazio percorso da un oggetto che si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $3v$, in 12 secondi [Sì; $36v$]
28. Spazio percorso da un oggetto che si muove di moto rettilineo uniforme con velocità 5, in $4t$ secondi [Sì; $20t$]
29. Spazio percorso da un oggetto che si muove di moto uniformemente accelerato con accelerazione $4a$,

in 6 secondi [Sì; $72a$]

30. Spazio percorso da un oggetto che si muove di moto uniformemente accelerato con accelerazione 11, in $12t$ secondi [Sì; $792t^2$]
31. Velocità raggiunta da un mobile che si muove di moto uniformemente accelerato con una velocità iniziale $2v$ e accelerazione $5a$, in 8 secondi [No; $40a + 2v$]
Accelerazione centripeta prodotta da un corpo che si muove di moto circolare uniforme con velocità $3v$, lungo una circonferenza di raggio 1 [Sì; $9v^2$]
32. Accelerazione centripeta prodotta da un mobile che si muove di moto circolare uniforme con velocità 10, lungo una circonferenza di raggio $2r$ [No; $50/r$]
33. Forza necessaria a imprimere a un corpo di massa 5 un'accelerazione $8a$ [Sì; $40a$]
34. Accelerazione di gravità su di un pianeta di forma sferica, di massa $5m$ e raggio $2 \cdot 10^{12}$ [Sì; $1{,}25 \cdot 10^{-24}Gm$]
35. Accelerazione di gravità su di un pianeta di forma sferica, di massa 10^{25} e raggio $3R$ [No; $1/9 \cdot 10^{25}/R^2$]

Lavoriamo insieme

Vogliamo scrivere in forma semplificata il monomio $3x^3 2xy 4y^2 xy$. Basta moltiplicare fra loro i coefficienti e sommare gli esponenti delle variabili omonime. Abbiamo così: $24x^5y^4$.
Adesso possiamo calcolare il grado totale e quelli parziali del monomio. Il grado totale è 5 + 4 = 9, quello rispetto alla x è 5, rispetto alla y è 4.

Dopo aver ricondotto in forma semplificata i seguenti monomi determinare il loro grado complessivo e quello rispetto alle singole lettere presenti in essi

Livello 1

36. $4x^2ya^3z^0$; $3m^2npq$; $3x^3x^4yy^2$; $-7ab^0c^2yab^2$; $2^23^3x^2ax$ [$4a^3x^2y$; $3m^2npq$; $3x^7y^3$; $-7a^2b^2c^2y$; $108ax^3$]
37. $1/3m^4n^5p^6mn^2$; $11a^5by^7y^2$; $3/7x^3t^4x^4t^2$; $-3x^3x^4y^2y$ [$1/3m^5n^7p^6$; $11a^5by^9$; $3/7t^6x^7$; $-3x^7y^3$]
38. $7/2h^3kh6h^3$; $2m^22n2m^2$; $1/3s^26/5v^3s15/2v^2$; $2/3a^5bta^6b^8$ [$21h^7k$; $8m^4n$; $3s^3v^5$; $2/3a^{11}b^9t$]
39. $4/7m^2g3/8n^4mg^41/3mn^4$; $a^4bccb^2a^3b^3$; $g^4q^3g^5q^6$; $1/2p^32/3t^9p^{42}3/4t^2$ [$1/14g^5m^4n^8$; $a^7b^3c^2$; g^9q^9 ; $1/4p^{45}t^{11}$]

Lavoriamo insieme

Svolgiamo il seguente prodotto fra monomi: $\left(\frac{1}{2}l^2m^3n^4p^2\right)\cdot\left(\frac{6}{5}l^3pq^3\right)\cdot\left(-\frac{1}{7}mn^2q^4\right)$.

Si ha: $\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5}l^2\cdot l^3\cdot m^3n^4p^2\cdot p\cdot q^3\right)\cdot\left(-\frac{1}{7}mn^2q^4\right)=\left(\frac{3}{5}l^5m^3n^4p^3q^3\right)\cdot\left(-\frac{1}{7}mn^2q^4\right)=-\frac{3}{35}l^5m^4n^6p^3q^7$.

Potevamo anche effettuare la moltiplicazione nel seguente modo:

$$\left(\frac{1}{2}l^2m^3n^4p^2\right)\cdot\left(-\frac{6}{35}l^3mn^2pq^7\right)=-\frac{3}{35}l^5m^4n^6p^3q^7.$$

Naturalmente il risultato è sempre lo stesso perché il prodotto di polinomi gode della proprietà associativa.

Moltiplicare fra loro i seguenti monomi

Livello 1

40. $\left(\frac{3}{4}x^3y^2z\right)\cdot\left(-\frac{5}{6}xyzt\right)$; $\left(\frac{2}{3}a^2b^3c\right)\cdot\left(-2a^3bcd^4\right)$ $\left[-\frac{5}{8}x^4y^3z^2t;-\frac{4}{3}a^5b^4c^2d^4\right]$
41. $\left(4e^2f^3gh^4i^5\right)\cdot\left(\frac{3}{5}e^3fh\right)\cdot\left(-\frac{4}{7}fg^2i^3\right)$; $\left(\frac{2}{3}a^3b^2q\right)\cdot\left(\frac{3}{2}ab^2\right)\cdot\left(-q^2\right)$ $\left[-\frac{48}{35}e^5f^5g^3h^5i^8;-a^4b^4q^3\right]$
42. $\left(\frac{1}{2}amo\right)\cdot\left(\frac{1}{4}tanto\right)\cdot\left(\frac{2}{3}maria\right)$; $(odio)\cdot(lo)\cdot(studio)$ $\left[\frac{1}{12}a^4im^2no^2rt^2;d^2i^2lo^4stu\right]$
43. $\left(\frac{1}{4}a^4\frac{1}{3}b^3\frac{1}{2}m^2\frac{1}{5}a^5\right)\cdot\left[-\frac{2}{3}m^2\frac{5}{4}a^5\left(-\frac{3}{2}b^3\right)\left(-\frac{2}{5}m^2\right)\right]$; $(2ab)\cdot\left(\frac{3}{2}a^2b^3\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}a^3bc\right)$ $\left[-\frac{1}{240}a^{14}b^6m^6;-a^6b^5c\right]$

44. $\left(\frac{1}{3}a^2\,\frac{2}{5}b^3\,\frac{7}{11}c^4\right)\cdot\left(\frac{3}{2}a^4\,\frac{5}{7}c^3\,\frac{11}{13}b^2\right)\;;\;\left(\frac{2}{5}aabbbcccc\right)\cdot\left(-\frac{4}{7}ccbbbaaaa\right)$ $\left[\frac{1}{13}a^6b^5c^7;-\frac{8}{35}a^6b^6c^6\right]$

Sviluppare le seguenti potenze di monomi

Livello 2

45. $\left(\frac{1}{3}x^2y^3z^2\right)^3\;;\;\left(\frac{4}{5}a^3bc^4\right)^5\;;\;\left(-\frac{3}{2}x^2y^3z\right)^3$ $\left[\frac{1}{27}x^6y^9z^6;\frac{1024}{243}a^{15}b^5c^{20};-\frac{27}{8}x^6y^9z^3\right]$

46. $\left(-\frac{3}{2}h^3k^4\right)^2\;;\;\left(-\frac{7}{2}m^4n^2p^3\right)^3\;;\;\left(-\frac{5}{8}x^{13}w^{24}z^{41}\right)^0$ $\left[\frac{9}{4}h^6k^8;-\frac{343}{8}m^{12}n^6p^9;1\right]$

47. $\left(\frac{3}{2}a^3b^5\right)^2\cdot\left(-\frac{2}{3}a^5b^3\right)^2\;;\;\left(\frac{5}{3}h^2m^2n^3\right)^4\cdot\left(\frac{9}{10}hm^3p\right)^3$ $\left[a^{16}b^{16};\frac{45}{8}h^{11}m^{17}n^{12}p^3\right]$

48. $\left(-\frac{2}{3}p^4q^2t\right)^4\cdot\left(\frac{27}{4}pq^3z^2\right)^2\;;\;\left(\frac{1}{6}a^2x^4v^3\right)^2\cdot\left(xv^2t^3\right)^4$ $\left[9p^{18}q^{14}t^4z^4;\frac{1}{36}a^4t^{12}v^{14}x^{12}\right]$

49. $\left(-\frac{1}{2}xy^2z^3\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}x^3y^2z\right)^3\cdot\left(\frac{9}{8}xyz\right)^2$ $\left[\frac{3}{128}x^{15}y^{16}z^{17}\right]$

Somma algebrica nell'insieme dei monomi

Meno immediata appare l'operazione di somma fra monomi, ma con un po' di attenzione ci rendiamo conto che così non è.

Esempio 11

Nell'esempio 2, Tony ha raggruppato fra loro gli albi dello stesso tipo, contandoli. Non ha potuto sommare albi di horror con albi di fantascienza, cioè non ha potuto sommare il monomio $82h$ con il monomio $113f$. Invece ha potuto sommare albi horror fra loro. Così se dovesse acquistare altri 3 albi horror, scriverà $82h + 3h = 85h$.

L'esempio precedente ci convince che l'operazione di somma fra monomi si esegue come l'ordinaria somma fra numeri solo se i monomi addendi rappresentano oggetti dello stesso tipo. Chiariamo cosa intendiamo con questo termine.

Definizione 7

Diciamo che due monomi sono **simili** se ridotti in forma semplificata hanno la stessa parte letterale.

Esempio 12

- Sono simili fra loro i seguenti monomi: $3x^3y^2z$, $-5x^3y^2z$, y^2x^3z, $-zx^3y^2$, $4x^2y^2zx$.
- Non sono simili ai precedenti questi altri monomi: x^3y^2zt, perché contiene una variabile in più, la t; x^2y^2z, perché gli esponenti della variabile x sono diversi; x^2y^3z, perché gli esponenti delle variabili x e y sono diversi; x^3y^2, perché non contiene la variabile z.

Siamo adesso in grado di definire la somma algebrica (somma o differenza) di due monomi simili.

Definizione 8

Dicesi **somma algebrica di due o più monomi simili** il monomio, simile ai dati, che ha per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti dei monomi addendi.

Forniamo un altro paio di definizioni che ci serviranno per semplificare il linguaggio.

Definizione 9

Diciamo **monomio nullo** un monomio il cui coefficiente vale zero.

Definizione 10

Diciamo **monomio opposto di un monomio dato**, il monomio che sommato al primo dà per risultato il monomio nullo.

Esempio 13

- Vogliamo effettuare le seguenti somme algebriche: $3aba + 2a^2b + 5ba^2 - abb + 2baa + 5ab^2$. intanto scriviamo tutti i monomi nella forma semplificata, in modo da determinare più facilmente quelli simili: $3a^2b + 2a^2b + 5a^2b - ab^2 + 2a^2b + 5ab^2$. Adesso raggruppiamo i monomi fra loro simili, sommandone i rispettivi coefficienti: $(3 + 2 + 5 + 2)a^2b + (-1 + 5)ab^2 = 12a^2b + 4ab^2$.
- $12m - 3n + p$. in questo caso non vi sono monomi simili, pertanto non possiamo semplificare l'espressione.
- $7mn - 2mp + 2mp - 7mn$. Stavolta abbiamo a che fare con due coppie di monomi fra loro opposti, pertanto il risultato sarà il monomio nullo: 0.

La regola di raccogliere in una stessa parentesi i coefficienti dei monomi simili è proprio quella che abbiamo usato nell'esempio dei giornalini di Tony, che li ha raggruppato in categorie.
Da quanto visto risultano intuitivi i seguenti risultati.

Teorema 4

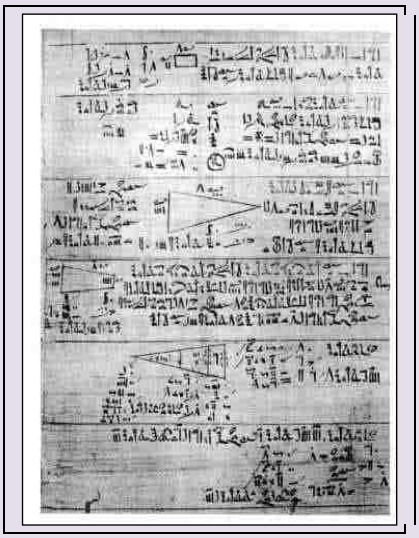
La somma di monomi tutti fra loro simili è un'operazione interna nell'insieme dei monomi simili a quelli dati.

Teorema 5

La somma di monomi tutti fra loro simili gode delle proprietà commutativa e associativa.

L'angolo storico

Anche i più antichi documenti matematici in nostro possesso testimoniamo l'esigenza di indicare con particolari simboli dei termini generici. Già nel papiro detto di Ahmes (lo scriba che lo trascrisse) o anche di Rhind (l'archeologo che lo scoprì), datato circa 2000 anni prima della nascita di Cristo, un particolare simbolo indicava l'aggettivo indefinito "mucchio". Abbiamo anche osservato quanta fatica vi è stata per individuare dei simboli numerici che siano per così dire "universali" e tuttora, sebbene le cifre indo–arabe siano riconosciute un po' dappertutto, vi sono ancora delle civiltà, specie orientali, che ancora utilizzano simboli diversi per indicare le cifre. Per molti secoli si usarono delle lunghe e alquanto complesse descrizioni a parole e, soprattutto, in un problema non vi era una specifica distinzione, a livello simbolico, tra i dati e i termini da trovare.



Il papiro di Rhind

All'inizio i problemi venivano enunciati e risolti solo in casi particolari, tuttavia c'era la consapevolezza che le stesse regole, opportunamente adattate, potessero servire per descrivere una classe di problemi; a limitare i matematici nell'enunciazione di regole generali era proprio la mancanza di un'opportuna simbologia.

Alcuni storici delle matematiche hanno parlato a questo avviso di tre diversi tipi di algebra, a seconda del livello raggiunto nello sviluppo della simbologia: retorica, sincopata e simbolica.

Nel primo caso non esistono simboli, quindi tutto si enuncia a parole (si parla di algebra retorica): siamo prima della nascita di Cristo; nel secondo qualche simbolo comincia a sostituire una o più parti del discorso, siamo nel periodo che va all'incirca dal 200 d.C. fino alla fine del 1500 (si parla di algebra sincopata); infine l'espressione più matura, in cui, forse eccessivamente, ogni oggetto matematico è simbolizzato, dal 1600 ai giorni nostri (la cosiddetta algebre simbolica). Vediamo alcuni esempi.

Diofanto di Alessandria, vissuto nel III secolo d.C. e considerato il padre dell'aritmetica, pur non avendo a disposizione la moderna simbologia enunciò dei metodi per la risoluzione di problemi indeterminati e provò complicate proprietà valide per interi sottoinsiemi di numeri naturali. Ma usa ancora un'algebra retorica.

Verso la fine del XVI secolo, grazie a matematici come François Viète, l'algebra comincia a trasformarsi in una disciplina nella quale l'uso dei simboli appare predominante sulle noiose descrizioni a parole, come abbiamo già visto nelle schede del modulo 0, con i simboli per le operazioni aritmetiche o per la radice quadrata. L'algebra di Viète e dei suoi successori non è comunque del tutto astratta, ma convivono in essa sia l'uso di simboli sia quello di abbreviazioni; così, per esempio, per indicare il nostro attuale (a + b)3, Viète scrive "$\overline{a+b}$ cubo". Si deve arrivare alla fine del '700, con René Descartes (vissuto nel '600), Newton e Leibniz, perché ci si avvicini a un'algebra completamente astratta e simbolica.

I protagonisti

Diofanto fu originario di Alessandria d'Egitto, dove visse tra il 150 e il 300 d.C., di lui si sa ben poco. È stato rinvenuto un problema di origine sconosciuta che esprime in termini matematici i fatti salienti della sua vita, la cui durata viene indicata dalla soluzione: 84 anni. Delle sue opere ricordiamo quel che rimane di una raccolta, intitolata Arithmetica, di 130 problemi, che costituiscono solo 6 dei 13 volumi originali. In essa vengono affrontati problemi relativi ai numeri razionali, anche indeterminati, ossia con più soluzioni, talvolta anche infinite. In onore del matematico alessandrino i problemi indeterminati di tipo lineare sono conosciuti come problemi *diofantei*.



François Viète nasce a Fontenay–le–Comte nel 1540. Nonostante la laurea in legge, conseguita nel 1560, i suoi interessi principali sono rivolti alla matematica, tant'è che, nel 1571, pubblica un trattato sui triangoli sferici. Intraprende la carriera politica che lo porta al parlamento della Bretagna nel 1589. Dà prova delle sue capacità matematiche decifrando, per il governo francese, dei messaggi in codice che gli spagnoli, con cui i francesi erano in guerra, usavano per scambiarsi ordini militari. Il suo libro più famoso è *In artem analyticam isagoge* del 1591. In esso usa i moderni segni di operazione (per, più e meno), già utilizzati in precedenza ma con minor successo da alcuni studiosi tedeschi, ma, soprattutto, usa vocali per rappresentare i termini incogniti e consonanti per quelli noti. Si occupa di matematica per tutta la sua vita, raggiungendo anche importanti risultati. Muore a Parigi il 13 dicembre del 1603.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Semplificare l'espressione: $3xy\cdot(-xz)\cdot yz+2xz^2\cdot(-yz)+4xyz\cdot(-xy)\cdot\left(\frac{1}{2}z\right)-\frac{1}{3}xy^2\cdot\left(\frac{3}{4}xz\right)\cdot z+x^2y^2z$.

Cominciamo a effettuare le moltiplicazioni: $-3x^2y^2z^2-2xyz^3-2x^2y^2z^2-\frac{1}{4}x^2y^2z^2+x^2y^2z$. Passiamo adesso alla somma dei termini simili.

$$\left(-3-2-\frac{1}{4}\right)x^2y^2z^2-2xyz^3+x^2y^2z=\frac{-12-8-1}{4}x^2y^2z^2-2xyz^3+x^2y^2z=-\frac{21}{4}x^2y^2z^2+x^2y^2z-2xyz^3$$

Semplificare le seguenti espressioni

Livello 1

1. $3m+4n-2p+2m-3n+p\ ;\ 4a+4a-2b+2b-c+a$ $\quad[5m+n-p\ ;\ 9a-c]$
2. $\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}ac-bc+ba-ac+\frac{1}{2}ca\ ;\ m^2n-mn^2-(mn^2+m^2n)+mnm$ $\quad\left[\frac{3}{2}ab-\frac{1}{4}ac-bc;m^2n-2mn^2\right]$
3. $ab\cdot(-cd)+\frac{1}{2}ad\cdot(-bc)-\frac{1}{3}ac\cdot(bd)\ ;\ x-2\cdot(az)+3ax-(ax)+3a\cdot(-2z)+5x$ $\quad\left[-\frac{11}{6}abcd;2ax+6x-8az\right]$
4. $\frac{2}{3}xy^2-\frac{4}{5}xy+3xy-4xy^2\ ;\ \frac{3}{5}ab-\frac{7}{2}ab+\frac{3}{4}ab-\left(\frac{5}{2}a\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}b\right)$ $\quad\left[\frac{11}{5}xy-\frac{10}{3}xy^2;-\frac{11}{40}ab\right]$
5. $(3xz)\cdot\left(-\frac{2}{5}xy\right)+\left(-\frac{3}{7}yz\right)\cdot\left(\frac{4}{3}x^2\right)-\left(\frac{2}{5}xyz\right)\cdot(-3x)\ ;\ (4ef)\cdot(2fg)-(5eg)\cdot(2f^2)-(3ef^2)\cdot(6g)$ $\quad\left[-\frac{4}{7}x^2yz;-20ef^2g\right]$
6. $13m^2p-12mp^2+4mmp-2pmp\ ;\ 2a^2bab^3-3b^2a^3-a^3b^2+a^2b^3-1$ $\quad[17m^2p-14mp^2;\ 2a^3b^4-4a^3b^2+a^2b^3-1]$
7. $cx^2-2xc^2+xcx-xcc+4cxc\ ;\ 2ab^2\cdot(-3ab)+ab\cdot(-3bab)-ab\cdot ab\cdot(-2bba)+3a^2b^3$ $\quad[2cx^2+c^2x\ ;\ 2a^3b^4-6a^2b^3]$
8. $mn+2m^2n-3mn^2+4nm^2-5n^2m+6nm$ $\quad[6m^2n-8mn^2+7mn]$

Livello 2

9. $\frac{1}{4}x^2y-\frac{3}{4}yxy+\frac{1}{2}xy\cdot\left(-\frac{2}{3}x\right)+\frac{3}{4}x\cdot(yx)-\frac{3}{8}y\cdot\left(\frac{4}{3}xy\right)$ $\quad\left[\frac{2}{3}x^2y-\frac{5}{4}xy^2\right]$
10. $\left(-\frac{3}{4}x^2zt\right)\cdot\left(\frac{8}{3}xax\right)-\frac{1}{2}ax^2z\cdot\left(\frac{4}{3}x^2\right)\cdot(-t)+\frac{3}{7}ax^2\cdot\left(\frac{7}{2}xz\right)\cdot\left(\frac{1}{4}tx\right)$ $\quad\left[-\frac{23}{24}atx^4z\right]$
11. $2mp\cdot(-2pq)+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}p^2\right)-\frac{4}{3}m^2\cdot\frac{9}{2}p\cdot\left(-\frac{1}{4}q\right)+\frac{2}{5}mp\cdot\left(-\frac{1}{8}mq\right)$ $\quad\left[\frac{29}{20}m^2pq-4mp^2q-\frac{1}{3}p^2\right]$
12. $\frac{xy}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}xzt\right)+\frac{x}{8}\cdot\left(\frac{xyz}{3}\right)\cdot\left(-\frac{6t}{5}\right)-\frac{x^2}{10}\cdot\frac{4y}{3}\cdot\left(-\frac{3tz}{2}\right)+\frac{tx^2yz}{12}$ $\quad\left[-\frac{31}{60}tx^2yz\right]$
13. $\frac{am}{3}\cdot\frac{am}{3}\left(-\frac{am}{3}\right)+\frac{a^2m}{6}\cdot\left(-\frac{2am^2}{3}\right)-\frac{a^3}{18}\cdot\frac{2m^2}{3}\cdot(-m)$ $\quad\left[-\frac{1}{9}a^3m^3\right]$
14. $\frac{1}{2}ma^2+\frac{1}{3}am^2-\frac{2}{3}ama+\frac{3}{4}mma-\frac{1}{5}mama-\frac{2}{5}a^2m^2$ $\quad\left[-\frac{3}{5}a^2m^2-\frac{1}{6}a^2m+\frac{13}{12}am^2\right]$

15. $\left(\frac{2}{7}mnp\right)\cdot\left(\frac{4}{5}mnq\right)-\left(\frac{1}{6}mpq\right)\cdot\left(\frac{3}{7}mn^2\right)+(2mn)\cdot(-3np)\cdot(4mq)$ $\left[-\frac{1657}{70}m^2n^2pq\right]$

16. $\frac{1}{4}m^2\cdot\left(\frac{2}{7}n^2p\right)+\frac{2}{5}mn^2p\cdot\left(\frac{1}{4}mn\right)-\left(\frac{7}{2}mnp\right)\cdot\left(\frac{2}{7}mn\right)+\frac{3}{4}m^2n\cdot\left(-\frac{8}{3}np\right)+m^2n\cdot\left(-\frac{2}{3}p\right)\cdot\frac{6}{5}n^2$ $\left[-\frac{2}{7}m^3n^3p-\frac{7}{10}m^2n^3p-\frac{27}{14}m^2n^2p\right]$

17. $2ab^2\cdot\left(-3a^2b\right)+4a^2b^2\cdot\left(-\frac{1}{3}a\right)+ab\cdot\left(-2ab^2\right)\cdot(-a)+\frac{2}{3}a\cdot\frac{4}{5}ab\cdot ab$ $\left[-4a^3b^3-\frac{4}{5}a^3b^2\right]$

18. $\frac{m^2q}{3}\cdot\frac{2mt^2}{5}\cdot\frac{10qt}{3}+\frac{14qt^2}{3}\cdot\frac{2m^3}{7}\cdot\frac{6qt}{11}-m^3q^2\cdot\frac{t^3}{4}$ $\left[\frac{365}{396}m^3q^2t^3\right]$

19. $a^2x\cdot\left(xa^2\right)-a^4\cdot\left(\frac{2}{3}x^2\right)+\frac{1}{7}a^3x\cdot(ax)-\frac{2}{5}ax^3\cdot\frac{15}{8}a^3x$ $\left[\frac{10}{21}a^4x^2-\frac{3}{4}a^4x^4\right]$

20. $\frac{7}{4}b^2c^2\cdot\left(\frac{17}{14}cd^3\right)\cdot bd-\frac{2}{5}b^2cd^2\cdot\left(\frac{5}{4}bcd\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}cd\right)-b^3c^3d^4$ $\left[-\frac{19}{48}b^3c^3d^4\right]$

21. $\frac{1}{2}ab^2\cdot\frac{2}{3}a^2b-\frac{1}{4}ab^2\cdot\frac{4}{5}a\cdot\frac{5}{3}ba+\frac{1}{7}ab\cdot\left(-\frac{2}{3}b\right)\cdot\frac{7}{2}ba^2$ $\left[-\frac{1}{3}a^3b^3\right]$

22. $m^2-n^2+m\cdot\frac{2}{5}m-n\cdot\frac{1}{7}n+\frac{1}{4}nm-3m\cdot\frac{1}{2}n+2n\cdot\left(-\frac{1}{3}m\right)$ $\left[\frac{7}{5}m^2-\frac{23}{12}mn-\frac{8}{7}n^2\right]$

23. $p^2q^3r^4+\frac{1}{2}pq^2r^3\cdot\frac{2}{3}pqr-\frac{4}{5}qr^2p^2\cdot\frac{5}{2}pr^2q^2+\frac{2}{7}r^3pq^2\cdot\frac{7}{4}qp^2r$ $\left[-2p^3q^3r^4+p^3qr^4+\frac{4}{3}p^2q^3r^4\right]$

24. $7uv^2z^3\cdot\left(-\frac{1}{2}u^3v^2z\right)\cdot\frac{4}{49}u-13uzv\cdot\frac{4}{169}z^2u^2v^2\cdot\left(-\frac{13}{2}u^2zv\right)+11u^2v^3z\cdot\left(-\frac{9}{121}u^2z^2\right)\cdot\left(-\frac{11}{3}uzv\right)$ $\left[\frac{33}{7}u^5v^4z^4\right]$

Lavoriamo insieme

Consideriamo la seguente espressione: $\left(\frac{3}{2}a\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{3}b\right)^3+2b\cdot\left(\frac{1}{4}ab\right)^2-\frac{4}{3}ab^2\cdot(-3ab)$. In essa sono presenti delle potenze che dobbiamo sviluppare. Per far ciò basta applicare le consuete regole delle potenze. Abbiamo così $\frac{9^1}{4}a^2\cdot\frac{1}{27^3}b^3+2^1b\cdot\frac{1}{16^8}a^2b^2-\frac{4}{3^1}ab^2\cdot\left(-3^1ab\right)=\frac{1}{12}a^2b^3+\frac{1}{8}a^2b^3+4a^2b^3$. A questo punto sommiamo i termini simili: $\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+4\right)a^2b^3=\frac{2+3+96}{24}a^2b^3=\frac{101}{24}a^2b^3$

Livello 1

25. $(am)^2+3a^2\cdot(-5m)^2-2m^2\cdot(-3a)^2+a\cdot(-2am^2)$ $[56a^2m^2]$

26. $\left(-2b^2c\right)^3+\left(-3b^3\right)(5bc)^3-(bc)^2\cdot\left(2b^3\right)\cdot bc+6b^6c\cdot(-3c)^2$ $[-331b^6c^3]$

27. $\left(\frac{1}{3}mx\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}ny\right)^2+\left(-\frac{1}{4}mn\right)^2\cdot(xy)^2+\left(-\frac{2}{3}my\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}nx\right)^2$ $\left[\frac{469}{1296}m^2n^2x^2y^2\right]$

28. $(-abc)^3+ab\cdot(-2ac)^2\cdot\left(-\frac{2}{3}c\right)+a\cdot\left(-\frac{2}{5}bc\right)^3\cdot(-2a)^2$ $\left[-\frac{157}{125}a^3b^3c^3-\frac{8}{3}a^3bc^3\right]$

29. $(xz)^4-(xz)^2\cdot(xz)^2-(xz)^3\cdot(-zx)+\left(-\frac{1}{3}x\right)^3\cdot\left(\frac{3}{2}z\right)^4\cdot(-4x)$ $\left[\frac{7}{4}x^4z^4\right]$

30. $(2am)^2\cdot(-px)^2+(-amp)^2\cdot(-3x)^2+\left(\frac{1}{3}amx\right)^2\cdot\left(-\frac{3}{4}p\right)^2-\left(\frac{4}{3}a\right)^2\cdot\left(-\frac{3}{4}mpx\right)^2$ $\left[\frac{193}{16}a^2m^2p^2x^2\right]$

31. $(abq)^2-\frac{3}{2}\cdot(abq)^2+(ab)^2\cdot q^2-\left(\frac{1}{2}aq\right)^2\cdot(-b)^2+(-a)^2\cdot(2bq)^2$ $\left[\frac{17}{4}a^2b^2q^2\right]$

32. $(xy)^4-2x^2\cdot(xy)^2\cdot(-3)^2+(-x)^3\cdot(2xy^2)-\left(\frac{1}{2}x\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}y\right)^2$ $\left[x^4y^4-20x^4y^2-\frac{1}{36}x^2y^2\right]$

33. $\left(\frac{1}{2}t^3\right)^2+\left(\frac{1}{2}t^2\right)^3-\left(\frac{1}{4}t\right)^2\cdot(2t^2)^2-\left(\frac{2}{3}t\right)^3\cdot\left(\frac{3}{2}t\right)^2\cdot(-t)$ $\left[\frac{19}{24}t^6\right]$

34. $(k^2t)^6-(kt)^4\cdot\left(-\frac{1}{2}k\right)^5\cdot(-k^3t^2)+\frac{1}{2}k^8t^6\cdot(-k)^4+(kt)^5\cdot(k^2)^3\cdot(-kt)$ [0]

Lavoriamo insieme

Consideriamo un problema egiziano del 1600 a.C.
Dividere 100 *sacchi di grano fra* 4 *famiglie, ciascuna formata rispettivamente da* 4, 6, 8 *e* 12 *persone*.
Visto che la divisione deve essere in parti proporzionali a ciascuna famiglia, diciamo x il numero di sacchi che andrà a ciascuna persona. Il numero totale dei sacchi sarà perciò uguale anche a $4x + 6x + 8x + 12x = 30x$. Quindi x sarà $\frac{1}{30}$ di 100, cioè $\frac{100}{30}=\frac{90+10}{30}=\frac{90}{30}+\frac{10}{30}=3+\frac{1}{3}$, ossia 3 sacchi e un terzo di sacco.
Perciò le 4 famiglie avranno rispettivamente

$$4\cdot\left(3+\frac{1}{3}\right)=12+\frac{4}{3}=13+\frac{1}{3};6\cdot\left(3+\frac{1}{3}\right)=18+2=20;8\cdot\left(3+\frac{1}{3}\right)=24+\frac{8}{3}=26+\frac{2}{3};12\cdot\left(3+\frac{1}{3}\right)=36+4=40$$

E in effetti: $\left(13+\frac{1}{3}\right)+20+\left(26+\frac{2}{3}\right)+40=99+\frac{3}{3}=100$.

Risolvere i seguenti problemi

Livello 1

35. Dividere 224 libri fra 3 classi, ciascuna di 16, 18 e 22 alunni, in modo che ciascun alunno abbia lo stesso numero di libri. [4 ciascuno]
36. Cinque operai lavorano alla realizzazione di uno stesso manufatto, con uguale impegno rispettivamente per 5, 8, 6, 4 e 7 ore. Se il compenso totale è di € 1260, quanto riceverà ciascuno di essi? [€ 210, € 336, € 252, € 168, € 294]
37. Una certa quantità di denaro viene divisa in tre parti, in modo che la prima sia metà e la seconda un terzo. Se l'ultima parte è di € 720,00 quanto è il valore della somma totale? [€ 4320,00]
38. Tre amici vincono € 1200 comprando un biglietto della lotteria per cui pagano rispettivamente € 4, € 3 e € x. Se la vincita è stata suddivisa in modo che il primo ha avuto € 600 e il terzo € 150, quanto costava il biglietto? [€ 8,00]

Livello 2

39. Un problema italiano del 1202. Due viandanti avevano rispettivamente 3 e 2 fette di pane. Fermatisi per mangiare si unì a loro un terzo viandante che non aveva del cibo, ma che offrì di pagare il cibo. Così si divise in parti uguali il pane. Il terzo viandante pagò 5 monete, come doveva dividersi onestamente fra i due il ricavato? [4 al primo e 1 al secondo]
40. Un problema babilonese del 1500 a. C. Nei lavori di scavo di un canale, man mano che si procede in profondità, il lavoro è più faticoso. Si è stabilito che fino a una certa profondità in un giorno si riesce a scavare 1/3 sar (un'antica unità di misura) di terra; poi fino a un'altra profondità se ne scava 1/6 sar, quindi 1/9 sar. Se ogni giorno si vuole scavare la stessa quantità di terra, quanto tempo dovrà lavorare lo scavatore ai tre livelli di profondità, scavandone il massimo possibile? Si suppone che in teoria un giorno di lavoro equivalga a 12 ore. [Rispettivamente 2, 4 e 6 ore]

L'angolo delle correzioni

Sostituendo dei valori numerici alle variabili, mostrare che le seguenti uguaglianze sono false, quindi correggerle e stabilire se esistono dei numeri reali per cui le uguaglianze proposte risultano vere. Nelle risposte sono proposte alcune soluzioni, ma non è detto che non ve ne siano altre

1. $w+w=w^2$; $x+y=xy$; $2ab+3ab-5ab=ab$ $[w=0\vee 2;\ x=y=0\vee x=y=2\ ;\ a=0\vee b=0]$
2. $m^2p+mp^2=2m^2p^2$; $3h^2+2h^3=5h^5$ $[x=y=0\vee x=y=2\ ;\ h=0\vee 1]$
3. $\left(\frac{2}{7}uv\right)\cdot(3uv)=\frac{6}{21}u^2v^2$; $2h^3g+2hg^3=4h^4g^4$ $[u=0\vee v=0\ ;\ h=g=1\vee h=0,\ g=0]$
4. $3n^2-2n^3=0$; $4ab-3b+2ab=3a^2b^2$; $3m^3k-2m^3=m^3k$

$$\left[u=0\vee\frac{3}{2};a=b=1\vee\forall a\in\mathbb{R},b=0;m=0,\forall k\in\mathbb{R}\vee k=1,\forall m\in\mathbb{R}\right]$$

Per la prova Invalsi

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato alle prove Invalsi del 2004. *Se S è l'area di un quadrato di lato a, l'area del quadrato di lato 2a è espressa da...* A) $8S$ B) $4S$ C) $3S$ D) $2S$
L'area di un quadrato è appunto il quadrato del lato, quindi dobbiamo calcolare $(2a)^2=4a^2$. Dato che $S=a^2$, avremo $4a^2=4S$, quindi la risposta corretta è la B.

1. (Invalsi 2005) Quale dei seguenti monomi è il doppio prodotto dei due monomi $3a^2$ e $-2b^3$? [A]
   A) $-12a^2b^3$ B) $-12a^4b^6$ C) $-6a^4b^6$ D) $-6a^2b^3$
2. (Invalsi 2012) Armando, Bruno, Caterina e Daniela hanno opinioni diverse sul numero che si ottiene dividendo a^4 per 2. Armando dice: "si ottiene $\left(\frac{a}{2}\right)^4$"; Bruno sostiene: "si ottiene a^2"; Caterina dice: "si ottiene $\frac{1}{2}a^4$"; Daniela afferma: "si ottiene $\left(\frac{a}{2}\right)^2$". Chi ha ragione? [Caterina]
3. (Invalsi 2004) L'espressione $16a^{10}b^6$ è il quadrato di... A) $4\,a^3b^5$ B) $-8\,a^5b^3$ C) $8\,a^5b^3$ D) $-4\,a^5b^3$ [D]
4. (Invalsi 2014) a e b sono due numeri reali. Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa
   A) Se $a=2$, allora $a^2=4$ B) Se $a^2=4$, allora $a=2$ C) Se $a\cdot b=0$, allora $a=0$ D) Se $a=0$, allora $a\cdot b=0$. [V; F; F; V]
5. Il quadrato del quadrato del quadrato del generico numero x si può esprimere come quale delle seguenti scritture monomie? A) x^2 B) x^4 C) x^6 D) x^8 E) Nessuno dei precedenti [D]
6. Quali fra i seguenti monomi sono simili al monomio x^2y^3zx: i) xy^2zyx^2 ii) x^2xyy^2z iii) x^3y^3z? [D]
   A) Solo i) B) solo ii C) Sia i) che iii) D) Tutti e tre
7. Due monomi, indicati con X e Y, sono fra loro simili, quali fra le seguenti espressioni non sono simili ai precedenti? A) 2X + 3Y B) X · Y/(2X) C) X/2 D) Y/X · 5X [B]
8. Rispetto ai monomi xy e $2yz$, possiamo dire che il monomio $4x^2y^4z^2$ è A) il prodotto dei loro quadrati B) Il doppio del loro prodotto C) il doppio del quadrato del loro prodotto D) Nessuno dei precedenti [A]

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi

1. Verificare che la relazione binaria definita nell'insieme dei monomi scritti in forma semplificata e in una sola variabile, associando fra loro i monomi che hanno lo stesso grado, è una relazione di equivalenza. Quanti elementi ha l'insieme quoziente? [Infiniti]
2. Stabilire di che tipo è la relazione binaria definita nell'insieme dei monomi, scritti in forma semplificata e in una sola variabile, associando a ogni monomio solo quelli il cui grado è inferiore. [Ordine parziale stretto]

3. Verificare che la relazione binaria definita nell'insieme dei monomi, scritti in forma semplificata e in una sola variabile e scelti nell'alfabeto $\{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$, associando fra loro i monomi che hanno la parte letterale formata con gli stessi simboli, senza contare il loro grado, è una relazione di equivalenza. Quanti elementi ha l'insieme quoziente? [26]
4. Verificare che la relazione binaria definita nell'insieme dei monomi scritti, in forma semplificata e in due sole variabili, associando fra loro i monomi che hanno la parte letterale formata con gli stessi simboli, senza contare il loro grado, scelti nell'alfabeto $\{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$, è una relazione di equivalenza. Quanti elementi ha l'insieme quoziente? [650]

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
GNP = Gara Nazionale Prime, Olimpiadi della Matematica MT = Mathematics Teacher, rivista della NCTM

Lavoriamo insieme

Il seguente quesito è stato pubblicato sul numero di Novembre 1995 della rivista Mathematics Teacher.

Se $a : b : c = 3 : 1 : 5$, *a cosa è uguale* $\dfrac{2a+3b}{4b+3c}$?

Dire che $a : b : c = 3 : 1 : 5$, è lo stesso che dire che $a = 3b$, $c = 5b$, quindi la frazione diventa

$$\frac{2\cdot 3b+3b}{4b+3\cdot 5b}=\frac{8b}{19b}=\frac{8}{19}$$

1. (MT1991) La seguente espressione è vera $\dfrac{HALF\ +\ HALF=}{WHOLE}$, in cui ogni lettera diversa rappresenta una diversa cifra. Si ha A = 8, E = 4, F = ?, H = 9, L = 0, O = ? e W = 1. Determinare i valori incogniti [F = 2, O = 6]
2. (MT1991) Il precedente problema ha un'altra soluzione. Trovala! [A = 7, E = 6, F = 3, H = 9, L = 0, O = 4, W = 1]
3. (GNP2014) Mettiamo in fila tutti i possibili monomi (con coefficiente 1) nelle variabili x e y e grado non superiore a 20, nel modo seguente: x^{20}, $x^{19}y$, x^{19}, $x^{18}y^2$, $x^{18}y$, x^{18}, $x^{17}y^3$, $x^{17}y^2$, . . . dove, per stabilire l'ordine dei monomi nella lista, si sono usate le seguenti regole: a) chi ha l'esponente della x più alto ha la precedenza; b) a parità di esponenti della x, ha la precedenza chi ha l'esponente della y più alto. Che posizione occupa nella lista il monomio x^7y^{10}? A) 72ª B) 89ª C) 95ª D) 144ª E) 147ª F) 214ª [C]
4. (GNP2016) Su un foglio è scritta una lista di 6 monomi: il primo è xy^2, l'ultimo è x^8y^6. Inoltre sappiamo che ciascun monomio, dal terzo in poi, è il prodotto dei due monomi che lo precedono. Qual è il quarto monomio? A) x^4y^2 B) x^2y^3 C) x^2y^4 D) x^3y^2 E) x^3y F) non determinabile dai soli dati forniti [D]

Questions in English

Working together

The following question was published on the issue of May 1992 of the magazine Mathematics Teacher.
Let r be a real number. Which of the following numbers is always greater than r?
A) $r^2 + 1$ B) $2r$ C) $(r + 1)^3$ D) r^{100}
R can be any real numbers, positive, negative or zero. So B is false because if $r = -1$, $2r = -2 < -1$. Analogously if $r = -3$, $(r + 1)^3 = (-3 + 1)^3 = (-2)^3 = -8 < -1$. D is also false if, for example is $r = 0$, in this case the two expressions are equal. At last A is true, in fact if $r < 0$, $r^2 + 1 > 0$; if $r = 0$, $r^2 + 1 = 1$; if $r > 0$, we distinguish two cases, a) $r > 1$, and $r^2 > r$, and b) $0 < r < 1$. In this case $r^2 < r < 1$, so $r^2 + 1 > 1 > r$.

5. (MT1991) Supply a different digit for each letter so that the equality is correct. A given letter always represents the same digit. $\begin{array}{r} ABCDE \times \\ \hline EDCBA \end{array} \begin{array}{l} \\ 4= \end{array}$ [A = 2, B = 1, C = 9, D = 7, E = 8]

6. (MT1996) If $n = 3^x + 3^x + 3^x$, then n^2 is equal to which of the following expressions? [C]
A) 9^x B) 27^{2x} C) 9^{x+1} D) 27^{6x} E) 27^{3x}

7. (MT1992) If $\frac{2+3+4}{3} = \frac{1990+1991+1992}{N}$, then N is? [1991]

Attività di recupero

Concetto di monomio

Fase 1: Osserva

- Consideriamo la seguente espressione variabile: $4abc$. Ogni volta che alle lettere sostituiamo dei numeri otteniamo in generale dei numeri diversi.
  Per esempio, se $a = 2$, $b = 3$, $c = -1$, avremo: $4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-1) = -24$; se invece $a = 3$, $b = 0$, $c = 12$, avremo: $4 \cdot 3 \cdot 0 \cdot 12 = 0$. Naturalmente se alle variabili sostituiamo solo numeri interi otterremo sempre numeri interi multipli di 4. Ciò non accade in generale se invece uno o più dei numeri sostituiti non è intero. Per esempio se $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{2}{3}, c=\frac{3}{4}$, si ha: $4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=1$, che è ancora un numero intero ma non è un multiplo di 4. Invece se $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{2}{3}, c=1$, si ha: $4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{4}{3}$, che non è neppure un numero intero.
- Vogliamo calcolare il valore numerico dell'espressione variabile $\frac{3}{2}a^2b^3m+p-1$ quando sostituiamo alle lettere i seguenti numeri: $a=-\frac{2}{3},\ b=1,\ m=-\frac{1}{4},\ p=2$. Abbiamo:

$$\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2\cdot 1^3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+2-1=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{9}\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+1=\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+1=-\frac{1}{6}+1=\frac{-1+6}{6}=\frac{5}{6}$$

Fase 2: Completa …

- Data l'espressione variabile $\frac{b+c}{2}\cdot h$, che rappresenta la formula per il calcolo dell'area di un trapezio di cui conosciamo le misure delle due basi (b e c) e dell'altezza h, vogliamo trovare il valore per $b = 5$, $c = 2$, $h = 4$, cioè l'area di un trapezio di basi che misurano 2 e 5 e altezza 4.
  Abbiamo: $\frac{5+...}{2}\cdot$ ..... = …… che rappresenta perciò l'area cercata.
- Vogliamo trovare l'area di un rombo le cui diagonali misurano d = 4 e $m = 7$, tenendo conto che la formula da applicare è $\frac{d\cdot m}{2}$. Basta sostituire alle variabili i valori, ottenendo così $\frac{....\cdot....}{2}=.....$
- Dalla fisica sappiamo che la legge del moto uniformemente accelerato è $s=\frac{1}{2}at^2+v_0t+s_0$, in cui s è lo spazio percorso in un tempo t da un mobile che ha già percorso uno spazio pari a s_0 e ha accumulato una velocità iniziale v_0 e adesso continua a muoversi con una accelerazione a. sapendo che $a = 3m/s^2$, $t = 5\ s$, $v_0 = 4m/s$. Lo spazio percorso è perciò dato da s = ……

Fase 3: Prova!

Calcolare il valore delle seguenti espressioni numeriche per i valori accanto segnalati

1. $abcd$ (per $a = 2, b = 3, c = 4, d = 1$) ; $a^3x^2y \quad \left(\text{per } a=\frac{2}{3},\ x=-4,\ y=\frac{5}{2}\right)$ [24; 320/27]
2. $\frac{2}{3}xyz^2 \quad \left(\text{per } x=\frac{2}{5},\ y=-\frac{5}{4},\ z=-\frac{2}{3}\right); \frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b+1 \quad \left(\text{per } a=\frac{3}{4},\ b=-\frac{1}{5}\right)$ $\left[-\frac{4}{27};\frac{59}{40}\right]$
3. $-\frac{4}{3}a^2x+\frac{3}{2}by^2 \quad \left(\text{per } a=-2,\ b=\frac{3}{2},\ x=\frac{1}{7},\ y=-\frac{3}{5}\right)$ $\left[-\frac{871}{900}\right]$

4. $-\frac{4}{3}ab^2c^3 - x + 2 \quad \left(\text{per } a=-\frac{3}{2},\ b=\frac{4}{3},\ c=-\frac{2}{5},\ x=2\right)$ $\left[-\frac{256}{1125}\right]$

5. $ab + bc - cd \quad \left(\text{per } \ a=\frac{5}{3},\ b=-\frac{2}{5},\ c=-\frac{10}{3},\ d=\frac{6}{5}\right)$ $\left[-\frac{154}{75}\right]$

6. $2xy^3 - \frac{3}{2}x^3y + xy \quad \left(\text{per } \ x=-\frac{1}{2},\ y=\frac{4}{3}\right);\ \frac{1}{2}xy^2 - \frac{4}{3}x^2y + 1 \quad \left(\text{per } \ x=\frac{3}{2},\ y=-1\right)$ $\left[-\frac{301}{108};\frac{19}{4}\right]$

7. $3ax + a^2x - ax^2 \quad \left(\text{per } \ a=-\frac{3}{2},\ x=\frac{2}{3}\right)$ $\left[-\frac{5}{6}\right]$

Somma algebrica di monomi

Fase 1: Osserva

- La somma fra monomi dà luogo a monomi solo se tutti gli addendi sono fra loro simili. Così per esempio l'espressione seguente $\frac{3}{2}ab^2 - \frac{2}{3}ab^2 + ab^2 - \frac{5}{4}ab^2$, darà luogo a un solo monomio poiché tutti gli addendi sono simili fra loro. Basta quindi sommare solo i coefficienti:
$$\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}+1-\frac{5}{4}\right)ab^2 = \frac{18-8+12-15}{12}ab^2 = \frac{7}{12}ab^2$$
- Vogliamo semplificare la seguente espressione $3mx^2 + 5m^2x - 3mx + \frac{1}{2}m^2x + \frac{2}{3}xm^2 - mxm + 2x^2m$, intanto scriviamo i monomi in forma semplificata $3mx^2 + 5m^2x - 3mx + \frac{1}{2}m^2x + \frac{2}{3}m^2x - m^2x + 2mx^2$. Adesso sommiamo fra loro i monomi simili
$$(3+2)mx^2 + \left(5+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-1\right)m^2x - 3mx = 5mx^2 + \frac{30+3+4-6}{6}m^2x - 3mx = 5mx^2 + \frac{31}{6}m^2x - 3mx$$
- Vogliamo semplificare l'espressione $3ab\cdot\left(-\frac{1}{3}a\right) + 2ab^2 - ab\cdot(-4b) + 5a\cdot 3ab + 1$. Sviluppiamo le moltiplicazioni: $-a^2b + 2ab^2 + 4ab^2 + 15a^2b + 1$. Sommiamo i monomi simili
$$(-1+15)a^2b + (2+4)ab^2 + 1 = 14a^2b + 6ab^2 + 1.$$

Fase 2: Completa …

- Vogliamo semplificare l'espressione $3mx + 4xm - 5mxm + 2mmx - 4mxx + 5mx^2 - xmx$, cominciamo a scrivere l'espressione con i monomi in forma semplificata .....
adesso individuiamo i monomi simili fra loro .....
e li sommiamo .....
Ecco il risultato finale.
- Semplifichiamo l'espressione seguente $\frac{1}{2}xy\cdot\left(-\frac{2}{3}x\right) + 3x\cdot(4y)^2 - 2xy\cdot\left(-\frac{5}{2}y\right) + 3y\cdot\left(\frac{2}{3}x\right)^2$. Cominciamo a sviluppare i prodotti e a eseguire le potenze ….....
Adesso completiamo l'esecuzione delle moltiplicazioni .....
Infine semplifichiamo i termini simili: .....

Fase 3: Prova!

Semplificare le seguenti espressioni.

1. $2mnp-3nmp+4mpn-2mmn+nmm-pmn+5m^2p$ $[5m^2p - m^2n + 2mnp]$
2. $2a^3x+5axa^2-2xaxa+3a^2x^2+axax-(3ax)^2$ $[7a^3x - 7a^2x^2]$
3. $2mp+3pm-mpm+pmp-4mmp+5ppm-3pmp$ $[-5m^2p + 3mp^2 + 5mp]$
4. $\frac{1}{2}ax-\frac{1}{3}by+\frac{3}{2}xa-\frac{2}{3}yb+1-\frac{5}{3}\ ;\ -\frac{4}{7}a^2+\frac{3}{2}xx-aa+\frac{2}{5}x^2-\left(\frac{1}{3}a\right)^2+\left(-\frac{3}{2}x\right)^2$
$\left[2ax-by-\frac{2}{3};\frac{83}{20}x^2-\frac{106}{63}a^2\right]$
5. $\left(-\frac{5}{2}ax\right)\cdot\left(\frac{2}{5}x\right)-\frac{4}{3}ax^2+(-a)\cdot\left(-\frac{2}{3}x\right)^2+\frac{1}{2}ax\cdot\left(\frac{3}{4}x\right)$ $\left[-\frac{173}{72}ax^2\right]$
6. $(ab)^3-ab\cdot(-ab)^2+\frac{6}{5}a\cdot\left(-\frac{5}{2}b\right)^2+ab^2-3ab\cdot\left(-\frac{4}{3}b\right)$ $\left[\frac{25}{2}ab^2\right]$
7. $(-ax)^2\cdot(by)^2-(2ay)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}bx\right)^2+(3ab)^2\cdot\left(-\frac{1}{4}xy\right)^2$ $\left[\frac{9}{16}a^2b^2x^2y^2\right]$
8. $a\cdot(bc)^2-ab^2\cdot(-3c)^2+2ac^2\cdot\left(\frac{3}{5}b\right)^2-2ab^2c^2$ $\left[-\frac{232}{25}ab^2c^2\right]$
9. $2h^3k^2+\left(-\frac{1}{2}h\right)^3\cdot\left(\frac{2}{5}k\right)^2+5h\cdot(-hk)^2+\frac{5}{7}h^2\cdot(-2hk)^2$ $\left[\frac{20}{7}h^4k^2+\frac{349}{50}h^3k^2\right]$

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito

http://mathinterattiva.altervista.org/volume_1_2.htm

2. Il calcolo simbolico

2.2 Polinomi

Prerequisiti
- Conoscenze aritmetiche elementari
- Gli enunciati logici
- Conoscenze aritmetiche e geometriche elementari
- Monomi

Obiettivi
- Sapere indicare con simboli generici degli elementi numerici o no, in modo da potere ottenere risultati generali
- Abituarsi a sostituire opportuni simboli per indicare grandezze variabili
- Abituarsi a usare simbologie
- Saper trasformare espressioni aritmetiche o algebriche in altre equivalenti
- Saper eseguire le operazioni aritmetiche di somma e prodotto fra polinomi
- Sapere riconoscere e semplificare opportunamente i prodotti notevoli più comuni

Contenuti
- Richiamiamo le conoscenze
- Concetto di polinomio
- Operazione di prodotto nell'insieme dei polinomi
- Prodotti notevoli
- Potenze di binomi e triangolo di Tartaglia

  Quelli che … vogliono sapere di più
  - Polinomi e notazione posizionale dei numeri. Cambiamenti di base

Parole Chiave
Binomio – Polinomio – Polinomio omogeneo – Polinomio ordinato – Trinomio

Richiamiamo le conoscenze

Uso delle parentesi come *contenitori*

Nelle matematiche le parentesi hanno una precisa funzione: sono dei delimitatori, dei contenitori. Esse devono essere usate solo laddove è strettamente necessario, anche se il loro uso *inutile* non viene considerato un errore. Vediamo qualche esempio.

Esempio A

- Se vediamo scritta l'espressione $(3 + 2) \cdot 5$, come dobbiamo calcolarla? Se ci atteniamo al fatto che le parentesi sono un contenitore, racchiudono cioè degli oggetti matematici che devono essere accomunati al loro interno, cominceremo a lavorare proprio all'interno della parentesi, effettuando la somma. A questo punto come scriveremo $(5) \cdot 5$ oppure $5 \cdot 5$? È ovvio che le due scritte hanno lo stesso significato, quindi per un principio di economia è preferibile la seconda.
- Consideriamo la seguente espressione $\left(\frac{3+2}{7}\right)\cdot\frac{4}{3}$. In questo caso la parentesi è necessaria? Certamente no, poiché il lavoro di raggruppamento degli addendi 3 e 2 è già svolto dalla linea di frazione e quindi ancora una volta la parentesi può essere omessa.
- Se con una calcolatrice vogliamo calcolare la seguente espressione $\frac{1}{2+3}$, siamo costretti a usare le parentesi. Diversamente, premendo in successione i seguenti tasti 1 / 2 + 3 otterremmo il risultato dell'operazione 0.5 + 3, cioè 3.5, mentre il valore corretto è 0.2.
- Nella seguente espressione $(2 + 3) \cdot 5$ la parentesi è necessaria? Se la usiamo, il risultato dell'operazione sarà 25, se non la usiamo sarà invece $2 + 15 = 17$. La parentesi è dunque necessaria.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Consideriamo l'espressione $\frac{(3+2)}{5}-(1+2)\cdot 4-5+(2+3)-(7+1)$, quali delle parentesi usate sono necessarie, perché diversamente l'espressione avrebbe un valore diverso?
La prima parentesi è inutile, perché il lavoro di raggruppamento è operato dalla frazione, così come la terza parentesi perché l'operazione di addizione non modifica l'espressione. Possiamo perciò scrivere:

$$\frac{3+2}{5}-(1+2)\cdot 4-5+2+3-(7+1)$$

In questo modo l'espressione vale: $\frac{5}{5}-3\cdot 4-5+2+3-8=1-12-8=-19$.
Eliminando invece tutte le parentesi, avremo:

$$\frac{3+2}{5}-1+2\cdot 4-5+2+3-7+1=\frac{5}{5}-1+8-5+5-6=1-1+8=8$$

Stabilire quali delle parentesi usate nelle seguenti espressioni possono essere eliminate perché non necessarie. Quindi calcolare le espressioni con e senza le parentesi.

***Livello* 1**

1. $(3-2)-(4+1)$; $\frac{5+(3)}{2}\cdot(4+2)$; $\sqrt{(2+3)}+\frac{(2+3)\cdot 4}{3(-2)}$ $\left[(-4;-2);(24;18);\left(\sqrt{5}-\frac{10}{3},\sqrt{5}+14\right)\right]$
2. $(2+7)^2\cdot(-5)^3\cdot(2)^5$; $4+\left(\frac{3}{2}+1\right)-\left(\sqrt{5}\right)\cdot 3$; $[2+(3\cdot 5)-1]\cdot(2+1)$
$\left[(-324000;-3949);\left(\frac{13}{2}-3\cdot\sqrt{5},\frac{13}{2}-3\cdot\sqrt{5}\right);(48;16)\right]$
3. $4+\frac{\sqrt{5}}{(7)}-\left(\sqrt{7+2}\right)$; $\frac{3}{4}+\left(\frac{5}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{4}+2\right)-5$; $\left\{2+\left[3-(4+1)\right]-2\right\}+1$
$\left[\left(\frac{\sqrt{5}}{7}+1,\frac{\sqrt{5}}{7}+1\right);\left(-\frac{7}{8},0\right);\ (-1,1)\right]$
4. $3-\left(\frac{7}{2}-1\right)\cdot\left(\frac{7}{2}+1\right)+(2+3)^2$; $\frac{1+(2-3)}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+2^{3-(1+2)}$; $2^{(2+1)^{2-(1+2)}}$ $\left[\left(\frac{67}{4};8\right);(1;16);\left(2^{\frac{1}{3}};8\right)\right]$
5. $5-(4-1)-[(5-4)-1]$; $2+3:(1+2)-(4-2)$; $(4-1)\cdot(4+1)-(2+3)^2$
$[(2;-13);(1;1);(-10,8)]$
6. $7-(6-(5-(4-(3-(2-1)))))$; $7+(6-(5+(4-(3-2-1))))$ $[(4;-14);(4;6)]$
7. Con riferimento al quesito dell'esercizio 5, è un caso che i risultati con i due procedimenti siano uguali o tutte le parentesi sono inutili? Giustificare le risposte. [Solo un caso]

Concetto di polinomio

Abbiamo già detto che la somma algebrica di due monomi è un monomio solo se tutti i monomi sono simili fra loro. Abbiamo altresì visto che molte delle formule che usiamo nelle matematiche non sono però di tipo monomio.

Esempio 1

- La formula per determinare l'area di un trapezio mediante le lunghezze delle sue basi, a e b, e quella della sua altezza, h, è $\frac{a+b}{2}\cdot h$, che non è un monomio;
- L'espressione che usiamo per indicare simbolicamente la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma è $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$, che rappresenta un'uguaglianza fra due espressioni, nessuna delle quali è un monomio;
- Per determinare la lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti lunghi a e b, usiamo la formula $\sqrt{a^2+b^2}$, che non è un monomio.

Risulta opportuno, in vista degli esempi precedenti, porre una definizione più generale di espressione variabile rispetto a quella di monomio.

Definizione 1

Diciamo **polinomio** la somma algebrica di due o più monomi.

Definizione 2

Diciamo che un polinomio è scritto **in forma semplificata** se contiene solo monomi fra loro non simili.

Definizione 3

A seconda del numero di monomi che lo compongono, un polinomio in forma semplificata, si chiamerà con un nome formato da un prefisso che indica quanti sono i monomi componenti (*mono* = 1, *bi* = 2, *tri* = 4, *quadri* = 4, *penta* = 5, …) seguito dal suffisso *nomio*.

La prima cosa che notiamo è che nella definizione di polinomio rientra anche, come caso particolare, il monomio in quanto polinomio con un solo termine. In effetti la precedente definizione non risolve tutti i nostri problemi.

Esempio 2

Con riferimento al precedente esempio, la prima espressione, così come è scritta non è un polinomio, non sapendo come eseguire le operazioni in essa indicati, non sappiamo se può ricondursi nella forma voluta. La seconda è un'uguaglianza nella quale solo il secondo termine è un polinomio, un binomio. Nella terza ciò che è scritto dentro la radice quadrata è un polinomio, l'intera espressione non lo è.

Non modificheremo la definizione di polinomio, impareremo invece a eseguire le operazioni aritmetiche fra polinomi. Intanto però forniamo altre definizioni utili nel seguito.

Definizione 4

Diciamo **grado complessivo di un polinomio** il maggiore fra i gradi dei monomi che lo compongono.

Notazione 1

Per indicare il grado complessivo di un polinomio p usiamo la notazione $\deg(p)$[1].

[1] Deg deriva dall'inglese *degree* che significa appunto grado.

Definizione 5

Diciamo **grado di un polinomio rispetto a una variabile** il maggiore esponente con cui essa è presente nel polinomio scritto in forma semplificata. Se la variabile non è presente nel polinomio, diciamo che esso è di grado zero rispetto a detta variabile.

Definizione 6

Dato un polinomio in una sola variabile, scritto in forma semplificata chiamiamo suo **coefficiente direttore** il coefficiente del suo monomio di massimo grado.

Esempio 3

- Indichiamo con p il polinomio: $\frac{3}{2}x^3y-\frac{54}{7}xy^2z+5x^5$, i suoi tre monomi componenti hanno gradi rispettivi: 4, 4, 5. Quindi il grado di p sarà 5, cioè $deg(p) = 5$. Rispetto alla lettera x il polinomio è di grado 5; rispetto alla y di grado 2; rispetto ala lettera z di grado 1; rispetto a qualsiasi altra lettera diversa da queste è di grado 0.
- Il polinomio $5x^3-3x^4+x^2-1$ è un quadrinomio di quarto grado rispetto alla sola variabile x. Il suo coefficiente direttore è –3.

Nel seguito risulteranno importanti quei polinomi che hanno la particolarità di avere tutti i monomi componenti dello stesso grado.

Definizione 7

Diciamo che un polinomio è **omogeneo di grado *n*** se tutti i suoi monomi componenti hanno grado n.

Che cosa significa?

Omogeneo è una parola formata dal prefisso *omo* che deriva dalla parola greca *homòs* che significa simile e dal suffisso *geneo* che deriva dalla parola greca *gènos* che significa genere. Per esempio: omonimo, cioè che ha lo stesso significato; omòfono, ossia che ha lo stesso suono.
Per contrapposizione il prefisso *etero* significa diverso. Per esempio: *eterogeneo* vuol dire di diverso genere.

Passiamo agli esempi.

Esempio 4

- I seguenti sono esempi di polinomi omogenei di primo grado, rispettivamente in una, due e tre variabili: $4a$, $5a-b$, $7x+y-z$.
- I seguenti sono esempi di polinomi omogenei di secondo grado, rispettivamente in una, due e tre variabili: $\frac{1}{2}x^2, ab-a^2; m^2-mn+mp$.
- I seguenti sono esempi di polinomi non omogenei: $a+2, xy-x^2+1; z^3-m^2q+xz$. Il primo perché ha un monomio di primo grado e uno di grado zero (come tutti i numeri puri); il secondo di grado 2 e 0; il terzo di grado 3 e 2.

Risulta anche importante ordinare i polinomi rispetto a una delle loro variabili.

Definizione 8

- Se un polinomio è scritto in modo che tutte le potenze di una sua data variabile sono scritte in modo che quella scritta prima ha un esponente uguale o più piccolo di qualunque altra variabile omonima scritta successivamente, diciamo che il polinomio è **ordinato secondo le potenze crescenti** di tale variabile.
- Se un polinomio è scritto in modo che tutte le potenze di una sua data variabile sono scritte in modo che quella scritta prima ha un esponente uguale o più grande di qualunque altra variabile omonima scritta successivamente, diciamo che il polinomio è **ordinato secondo le potenze decrescenti** di tale variabile.

Intanto ci chiediamo: è sempre possibile fare una cosa del genere? Se il polinomio ha una sola variabile è certamente possibile sempre, purché esso sia stato ridotto in forma semplificata.

Esempio 5

- $\frac{2}{3}x^3-4x+y-y^2; x^4-3x^2+x-2; x^5y-x^3y^3+xy-2$, sono esempi di polinomi ordinati secondo le potenze decrescenti della variabile x.
- $2a+3a^3; 5+3ax^3+4a^2-a^3x; 1-a^4x+5a^5x^3y$, sono esempi di polinomi ordinati secondo le potenze crescenti della variabile a.
- $xy-x^3+xy^2; a^2b-3ab^2+a^3; m^3+n-m^2n^3+n^2$, sono esempi di polinomi non ordinati secondo alcuna delle potenze presenti.

Naturalmente se vi sono variabili di uguale grado, possono esserci diversi ordinamenti di uno stesso polinomio rispetto a una stessa variabile.

Esempio 6

Il polinomio $5b^3-4b^2c+b^2x-5b^2+1$, può essere ordinato secondo le potenze crescenti della b in uno dei seguenti modi: $1-4b^2c+b^2x-5b^2+5b^3; 1-4b^2c-5b^2+b^2x+5b^3; 1+b^2x-4b^2c-5b^2+5b^3; \ldots$ Naturalmente tutte le scritture sono accettabili, se proprio vogliamo stabilire un modo per considerare un ordine "migliore" di un altro, potremmo utilizzare la convenzione usata dai vocabolari (*ordinamento lessicografico*) secondo la quale la parola *decagono* precede la parola *decalogo* perché le prime quattro lettere coincidono, mentre, confrontando le quinte lettere, la *g* precede la *l*. Quindi l'ordine "privilegiato" è $1-5b^2-4b^2c+b^2x+5b^3$.

Nel seguito converremo di utilizzare l'ordinamento lessicografico. Vediamo un'altra questione.

Definizione 9

Diciamo che un polinomio è **completo rispetto a una variabile** se contiene tutte le potenze della variabile da zero fino al massimo con cui essa risulta presente nel polinomio.

Esempio 7

- Il polinomio a^3-a+a^2-1 è completo, anche se non ordinato, rispetto alla lettera a.
- Il polinomio $ab^2-a^2b+a^3+2b^2$ è completo rispetto a entrambe le variabili.
- Il polinomio x^2-2x+x^4-1 non è completo, essendo privo del termine di esponente 3.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Consideriamo il polinomio $2x^3y-\frac{3}{4}x^2y^2+xy-1$, vogliamo stabilirne il grado complessivo e quello relativo alle singole variabili presenti.
I diversi monomi hanno rispettivamente grado 4, 4, 2, e 0. Quindi il polinomio ha grado 4. Il massimo grado con cui compare la x è 3, quello della y è 2, pertanto questi sono i gradi del polinomio rispetto alle date variabili. Il polinomio è ordinato decrescentemente rispetto alla variabile x, infatti i gradi dei monomi rispetto a x, così come sono scritti sono (3, 2, 1, 0). Non è ordinato rispetto alla y, dato che la successione degli esponenti di questa variabile è: (1, 2, 1, 0). Il polinomio è però completo rispetto a entrambe le variabili, visto che non vi sono "vuoti" fra gli esponenti di esse da 0 al massimo presente. Il polinomio non è omogeneo poiché abbiamo osservato che i monomi hanno diversi gradi.

Dei seguenti polinomi stabilire il loro grado complessivo e quello rispetto alle singole lettere presenti. Valutare poi se sono ordinati rispetto alle singole variabili. Determinare infine se sono omogenei e/o completi rispetto alle singole variabili.

Livello 1

1. a) $\frac{2}{3}ax^2z-\frac{1}{5}a^2xz+2a^3z^2+16$; b) $-\frac{2}{3}b^2d-\frac{4}{5}b^2cd^2+2d^3$ [a) (5, 3, 2, 2); b) (5, 2, 1, 3)]
2. a) $\frac{5}{8}mq^2t-\frac{1}{5}m^2qt+2m^3t+16q^4-q^2t^2$; b) $5x^3-6x^2+2x+1$ [a) (4, 3, 4, 2); b) (3, 3)]
3. a) $\frac{5}{6}w^2-\frac{8}{9}w^3$; b) $b^5-ab^4-a^2b^3+2a^3b^2+a^4b-3a^5$ [a) (3, 3); b) (5, 5, 5)]
4. a) $\frac{10}{71}eh^2-\frac{1}{243}e^2h+2e^3+16h^3$; b) $amo+mia+mamma$ [a) (3, 3, 3); b) (5, 2, 1, 3, 1)]
5. a) $2t^2z-4t^3+12z^3+5zt^5$; b) $2x^2y-3xy^2+2x^3-8xy$ [(6, 3, 5); b) (3, 3, 2)]

Livello 2

6. Ordinare i seguenti polinomi secondo le potenze crescenti della z e decrescenti della t, successivamente aggiungere e/o togliere i termini necessari affinché essi divengano polinomi omogenei e completi di grado uguale al maggiore dei gradi dei suoi monomi componenti.
   a) $z^2-4t^2z+6t^3+5zt$; b) $-5zt^3-4t^2z^2+z^3-t^5+3$; c) $3z^2t^2-4t^2+2z^3+5z$;
   d) $-z^3t-t^2+3z^2t^2+t^5$; e) $t^2z-tz^2+3t^3-zt+1$; e) $zt^2-t^3+z^2+4z^2-zt^4-1$
7. Scrivere la forma generale di un polinomio completo di quinto grado nella variabile x e a coefficienti unitari. $[x^5+x^4+x^3+x^2+x+1]$
8. Scrivere la forma generale di un polinomio omogeneo e completo di secondo grado nelle variabili x e y, a coefficienti unitari. $[x^2+xy+y^2]$
9. Scrivere la forma generale di un polinomio omogeneo e completo di terzo grado nelle variabili x e y, a coefficienti unitari. $[x^3+x^2y+xy^2+y^3]$
10. Scrivere la forma generale di un polinomio omogeneo e completo di secondo grado nelle variabili x, y e z a coefficienti unitari di segno alterno. $[x^2-xy+xz-y^2+yz-z^2]$
11. Scrivere la forma generale di un polinomio omogeneo e completo di terzo grado nelle variabili x, y e z a coefficienti unitari. $[x^3+x^2y+x^2z+xy^2+xz^2+y^2z+yz^2+y^3+z^3]$
12. Quanti termini ha un polinomio omogeneo e completo di IV grado in due variabili? [5]
13. Quanti termini ha un polinomio omogeneo e completo di IV grado in tre variabili? [14]

Livello 3

14. Quanti termini ha un polinomio omogeneo e completo di grado n in due variabili? $[n+1]$
15. Assegnando ai coefficienti solo i valori +1 e –1, scrivere tutti i polinomi omogenei e completi di secondo grado nelle due variabili x e y. Quanti sono tutti i polinomi? [8]
16. Assegnando ai coefficienti solo i valori +1 e –1, quanti diversi polinomi omogenei e completi di grado n nelle due variabili x e y, si ottengono? $[2^{n+1}]$

Moltiplicazione nell'insieme dei polinomi

Dato che sappiamo sommare monomi sappiamo sommare allo stesso modo i polinomi, quindi consideriamo l'operazione di moltiplicazione, cominciando dal prodotto di un monomio per un binomio.

Esempio 8

Riprendiamo la formula per il calcolo dell'area di un trapezio e vediamo di svolgere la moltiplicazione: $\frac{1}{2}h\cdot(a+b)$. Come possiamo procedere? Vediamo un esempio numerico.

Come svolgiamo il prodotto 7 · (12 + 34)? In questo caso abbiamo due alternative:

- sommare all'interno della parentesi e poi moltiplicare : 7 · 46 = 322;
- applicare la proprietà distributiva: 7 · 12 + 7 · 34 = 84 + 238 = 322.

Nel nostro prodotto fra un monomio e un polinomio, non possiamo evidentemente applicare il primo metodo, dato che i monomi a e b non sono simili, ci rimane perciò l'unica alternativa di utilizzare la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma algebrica. Abbiamo perciò: $\frac{1}{2}h\cdot(a+b)=\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}bh$. Possiamo anche verificare la validità del nostro procedimento, considerando un trapezio di basi lunghe 4 e 7 e altezza 5. Applicando la formula nel modo consueto avremo: $\frac{4+7}{2}\cdot 5=\frac{11}{2}\cdot 5=\frac{55}{2}=27{,}5$ e nel secondo caso avremo: $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5+\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 5=\frac{20}{2}+\frac{35}{2}=\frac{55}{2}=27{,}5$. Ovviamente i risultati coincidono.

Come moltiplicare due polinomi? Basta generalizzare il procedimento precedente.

Esempio 9

Moltiplicare $(3a^2+b)\cdot(a-4b^2+1)$. Distribuendo tutto il primo fattore rispetto a ciascuno dei monomi del secondo fattore avremo: $(3a^2+b)\cdot a+(3a^2+b)\cdot(-4b^2)+(3a^2+b)\cdot 1=3a^3+ab-12a^2b^2-4b^3+3a^2+b$. Vista la validità della proprietà commutativa per la moltiplicazione potevamo anche distribuire il secondo fattore rispetto al primo: $3a^2\cdot(a-4b^2+1)+b\cdot(a-4b^2+1)=3a^3-12a^2b^2+3a^2+ab-4b^3+b$.

In vista degli esempi precedenti, possiamo enunciare la seguente regola.

Regola 1

Il prodotto di due polinomi si ottiene moltiplicando ciascun monomio del primo polinomio per tutti i monomi del secondo polinomio.

La predetta regola può generalizzarsi facilmente al prodotto di più di due polinomi.

Esempio 10

Effettuare il seguente prodotto: $\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}a\right)\cdot\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}a\right)\cdot(2x^2+3a^2-4ax)$. Cominciamo a sviluppare la prima moltiplicazione ottenendo: $\left(\frac{1}{4}x\cdot\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}x\cdot\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}a\cdot\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}a\cdot\frac{1}{3}a\right)\cdot(2x^2+3a^2-4ax)=$, ossia semplificando ancora $\left(\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{12}ax-\frac{1}{12}ax-\frac{1}{9}a^2\right)\cdot(2x^2+3a^2-4ax)$. Dopo aver semplificato i termini opposti nel primo fattore, otteniamo: $\left(\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{9}a^2\right)\cdot(2x^2+3a^2-4ax)$ e, continuando a moltiplicare, otteniamo:

$$\frac{1}{16}x^2\cdot 2x^2+\frac{1}{16}x^2\cdot 3a^2+\frac{1}{16}x^2\cdot(-4ax)-\frac{1}{9}a^2\cdot 2x^2-\frac{1}{9}a^2\cdot 3a^2-\frac{1}{9}a^2\cdot(-4ax)=$$

$= \frac{1}{8}x^4 + \frac{3}{16}a^2x^2 - \frac{1}{4}ax^3 - \frac{2}{9}a^2x^2 - \frac{1}{3}a^4 + \frac{4}{9}a^3x$. Notiamo che vi è solo una coppia di monomi simili, pertanto il polinomio prodotto scritto in forma semplificata è

$\frac{1}{8}x^4 + \left(\frac{3}{16} - \frac{2}{9}\right)a^2x^2 - \frac{1}{4}ax^3 - \frac{1}{3}a^4 + \frac{4}{9}a^3x = \frac{1}{8}x^4 + \frac{27-32}{144}a^2x^2 - \frac{1}{4}ax^3 - \frac{1}{3}a^4 + \frac{4}{9}a^3x =$

$= \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{4}ax^3 - \frac{5}{144}a^2x^2 + \frac{4}{9}a^3x - \frac{1}{3}a^4$.

Tenuto conto di quanto visto finora e data l'eventualità che nell'eseguire i calcoli si ottengano monomi simili, stabiliamo il seguente risultato.

Teorema 1

Il prodotto di un polinomio di m termini per un polinomio di n termini dà luogo a un polinomio che, in forma semplificata, ha un massimo di $m \cdot n$ termini e un minimo di 1 termine, se nessuno dei due polinomi è il polinomio nullo.

Naturalmente vale anche per l'insieme dei polinomi il principio di annullamento del prodotto e, quindi, se nessuno dei fattori è il polinomio nullo neanche il risultato lo sarà. Il seguente è un altro risultato di immediata intuizione.

Teorema 2

Il grado del polinomio prodotto di due polinomi è uguale alla somma dei gradi dei polinomi fattori.

Esempio 11

Considerando il prodotto del precedente esempio, $\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{3}a\right)\cdot\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}a\right)\cdot(2x^2 + 3a^2 - 4ax)$, formato da due polinomi di primo grado e uno di secondo, effettivamente lo sviluppo del prodotto, $\frac{1}{8}x^4 - \frac{5}{144}a^2x^2 - \frac{1}{4}ax^3 - \frac{1}{3}a^4 + \frac{4}{9}a^3x$, è un polinomio di grado 1 + 1 + 2 = 4.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo semplificare la seguente espressione: $(ab + ac - bc) \cdot (ac - ab + bc)$.
Applicando ripetutamente la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma, dobbiamo moltiplicare ciascun termine del primo polinomio per tutti i termini del secondo polinomio. Otteniamo così:

$$ab \cdot ac + ab \cdot (-ab) + ab \cdot bc + ac \cdot ac + ac \cdot (-ab) + ac \cdot bc - bc \cdot ac - bc \cdot (-ab) - bc \cdot bc =$$

$$\underline{a^2bc} - a^2b^2 + \underset{\times}{ab^2c} + a^2c^2 - \underline{a^2bc} + \underset{\times}{abc^2} - \underset{\circ}{abc^2} + \underset{\circ}{abc^2} - b^2c^2 = -a^2b^2 + 2ab^2c + a^2c^2 - b^2c^2$$

Abbiamo segnato con uguali segni i monomi simili, per facilitarne la loro somma.

Semplificare le seguenti espressioni, verificando che il grado del polinomio prodotto si ottiene sommando i gradi dei polinomi fattori

Livello 1

1. a) $xy \cdot (x - y)$; b) $2 \cdot (ab - c)$; c) $\frac{1}{2}a \cdot \left(\frac{1}{2} - a\right)$ $\left[\text{a) } x^2y - xy^2;\ \text{b) } 2ab - 2c;\ \text{c) } \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}a^2\right]$

2. a) $mn^3 \cdot (m + n - 2)$; b) $p^2 \cdot (p - 1)$; c) $\frac{3}{4}t^2 \cdot (a + b - c)$
$\left[\text{a) } m^2n^3 + mn^4 - 2mn^3;\ \text{b) } p^3 - p^2;\ \text{c) } \frac{3}{4}at^2 + \frac{3}{4}bt^2 - \frac{3}{4}ct^2\right]$

3. a) $pz^2 \cdot (p - 2z + 3)$; b) $a^3b \cdot \left(a + b - \frac{1}{2}a^2\right)$; c) $\frac{4}{3}x^3y \cdot \left(\frac{1}{4}y - \frac{3}{2}y^2\right)$
$\left[\text{a) } p^2z^2 - 2pz^3 + 3pz^2;\ \text{b) } -\frac{1}{2}a^5b + a^4b + a^3b^2;\ \text{c) } \frac{1}{3}x^2y^2 - 2x^3y^3\right]$

4. a) $-4a^3b^2c \cdot (-2ab^2 + 4ac - b^2c)$; b) $\frac{3}{2}a^2b \cdot (a + b - 2)$; c) $\frac{4}{5}x^2y \cdot \left(\frac{5}{6}xy^2 - \frac{1}{4}x + 2\right)$
$\left[\text{a) } 8a^4b^4c - 16a^4b^2c^2 + 4a^3b^4c^2;\ \text{b) } \frac{3}{2}a^3b + \frac{3}{2}a^2b^2 - 3a^2b;\ \text{c) } \frac{2}{3}x^3y^3 - \frac{1}{5}x^3y + \frac{8}{5}x^2y\right]$

5. a) $2a^2b \cdot (3ab - b^2 + a)$; b) $4xz \cdot (2x - z + 1)$; c) $-\frac{3}{8}m^2p \cdot \left(\frac{8}{3}m - \frac{4}{3}p + mp\right)$
$\left[\text{a) } 6a^3b^2 + 2a^3b - 2a^2b^3;\ \text{b) } 8x^2z - 4xz^2 + 4xz;\ \text{c) } -\frac{3}{8}m^3p^2 - m^3p + \frac{1}{2}m^2p^2\right]$

6. a) $\frac{1}{2}ax^2yz^3 \cdot \left(\frac{1}{3}ax - \frac{1}{4}x^2y + \frac{1}{5}az + \frac{3}{2}xz\right)$; b) $\frac{4}{5}m^4p^2t^3 \cdot \left(-\frac{2}{7}mp + \frac{3}{4}m^2t - mpt + p^2\right)$
$\left[\text{a) } \frac{1}{6}a^2x^3yz^3 + \frac{1}{10}a^2x^2yz^4 - \frac{1}{8}ax^4y^2z^3 + \frac{3}{4}ax^3yz^4;\ \text{b) } \frac{3}{5}m^6p^2t^4 - \frac{4}{5}m^5p^3t^4 - \frac{8}{35}m^5p^3t^3 + \frac{4}{5}m^4p^4t^3\right]$

7. a) $(7x^2y - 4z) \cdot (7x^2y + 4z)$; b) $(7x^2y - 4z) \cdot (7xy^2 - z)$
$\left[\text{a) } 49x^4y^2 - 16z^2;\ \text{b) } 49x^4y - 7x^2y - 28x^2z + 4z^2\right]$

8. a) $(x^3 - y^3) \cdot (x - y)$; b) $(x^2 - y^2) \cdot (x + y)$ $\left[\text{a) } x^4 - x^3y - xy^3 + y^4;\ \text{b) } x^3 + x^2y - xy^2 - y^3\right]$

9. a) $(ax - by) \cdot (a^2x^2 + abxy + b^2y^2)$; b) $(ax + by) \cdot (a^2x^2 - abxy + b^2y^2)$ $\left[\text{a) } a^3x^3 - b^3y^3;\ \text{b) } a^3x^3 + b^3y^3\right]$

10. a) $(a + b - c) \cdot (a - b + c)$; b) $(m - n + p) \cdot (m - 2n + p)$
$\left[\text{a) } a^2 - b^2 + 2bc - c^2;\ \text{b) } m^2 - 3mn + 2mp + 2n^2 - 3np + p^2\right]$

11. a) $(2a - 3b + 1) \cdot (2a + 3b - 2)$; b) $(a + 2b - 3c) \cdot (a + 2b - 3c)$
$\left[\text{a) } 4a^2 - 2a - 9b^2 + 9b - 2;\ \text{b) } a^2 + 4ab - 6ac + 4b^2 - 12bc + 9c^2\right]$

12. a) $(4a^2mt-1)\cdot(3am^2t+2am-3z)$; b) $(ax^2+b^2y)\cdot(a^2x-by^2)$

$[\text{a) } 12a^3m^3t^2+8a^3m^2t-12a^2mtz-3am^2t-2am+3z;\ \text{b) } a^3x^3+a^2b^2xy-abx^2y^2-b^3y^3]$

13. a) $(xy-3z)\cdot(x^2y^2+9z^2-3xyz)$; b) $\left(\frac{1}{2}a-1\right)\cdot\left(\frac{1}{4}a^2+1\right)$

$\left[\text{a) } x^3y^3-6x^2y^2z+18xyz^2-27z^3;\ \text{b) } \frac{1}{8}a^3-\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}a-1\right]$

14. a) $(x^2+y-z)\cdot(x^2+y+z)$; b) $(x^2-y-z)\cdot(x^2+y-z)$ $[\text{a) } x^4+2x^2y+y^2-z^2;\ \text{b) } x^4-2x^2z-y^2+z^2]$

Lavoriamo insieme

Semplificare la seguente espressione: $(2a+b-1)\cdot(2a-b+1)\cdot(a^2-b^2)-(a+b+1)\cdot(a-b-1)\cdot(a^2+b^2)$.

Sviluppiamo le moltiplicazioni, tenuto conto che dobbiamo scegliere quali svolgere per prime, la scelta è arbitraria perché vale la proprietà associativa. Abbiamo allora:

$$(4a^2-2ab+2a+2ab-b^2+b-2a+b-1)\cdot(a^2-b^2)-(a^2-ab-a+ab-b^2-b+a-b-1)\cdot(a^2+b^2)=$$

$$=(4a^2-b^2+2b-1)\cdot(a^2-b^2)-(a^2-2b-b^2-1)\cdot(a^2+b^2)$$

Continuiamo a moltiplicare:

$$4a^4-4a^2b^2-a^2b^2+b^4+2a^2b-2b^3-a^2+b^2-(a^4+a^2b^2-2a^2b-2b^3-a^2b^2-b^4-a^2-b^2)$$

Semplifichiamo: $4a^4-5a^2b^2+b^4+2a^2b-2b^3-a^2+b^2-a^4+2a^2b+2b^3+b^4+a^2+b^2=$

$$=(4-1)a^4-5a^2b^2+(1+1)b^4+(2+2)a^2b+(-2+2)b^3+(-1+1)a^2+(1+1)b^2=3a^4-5a^2b^2+2b^4+4a^2b+2.$$

Semplificare le seguenti espressioni

Livello 2

15. a) $(3a-5x)\cdot(3a+5x)\cdot(3a^2-5x^2)$; b) $(xy-1)\cdot(xy-1)\cdot(xy+1)$

$[\text{a) } 27a^4-120a^2x^2+125x^4;\ \text{b) } x^3y^3+x^2y^2-xy-1]$

16. a) $\left(\frac{3x-2y}{2}+\frac{3x+2y}{2}\right)\cdot\left(\frac{3x-2y}{2}-\frac{3x+2y}{2}\right)$; b) $\left(\frac{ax-1}{2}+\frac{bx+2}{2}\right)\cdot\left(\frac{ax+1}{2}+\frac{bx-2}{2}\right)-\frac{a^2x^2+b^2x^2}{4}$

$\left[\text{a) } -6xy;\ \text{b) } \frac{1}{2}abx^2-\frac{1}{4}\right]$

17. $\left(\frac{1}{2}t^2z+\frac{1}{3}tz^2\right)\cdot\left(\frac{1}{4}t^4z^2-\frac{1}{6}t^3z^3+\frac{1}{9}t^2z^4\right)-\left(\frac{t^2z}{2}\right)^3$ $\left[\frac{1}{27}t^3z^6\right]$

18. $\left(\frac{1}{2}a^3m^2-\frac{3}{4}b^2p\right)\cdot\left(\frac{1}{2}a^3m^2-\frac{3}{4}b^2p\right)-\left(\frac{1}{2}a^3m^2-\frac{3}{4}b^2p\right)\cdot\left(\frac{1}{2}a^3m^2+\frac{3}{4}b^2p\right)$ $\left[\frac{9}{8}b^4p^2-\frac{3}{4}a^3b^2m^2p\right]$

19. $\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b+\frac{1}{6}c\right)\cdot\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b-\frac{1}{6}c\right)-\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b\right)\cdot\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b\right)$ $\left[\frac{1}{9}bc-\frac{1}{36}c^2\right]$

20. $\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}h\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}c\right)\cdot\left(\frac{1}{5}h+1\right)-\frac{h}{2}\cdot\left(\frac{3}{20}ch+\frac{7}{10}c\right)+\frac{h}{5}\cdot\left(h+\frac{14}{3}\right)$ $\left[\frac{1}{3}-\frac{c}{8}\right]$

21. a) $mx\cdot(my-nz)+mz\cdot(nx+m)-m\cdot(mxy-mz)$; b) $ax\cdot(ax-by+1)+bx\cdot(ay+bx-1)-x^2\cdot(a^2+b^2)$

$[\text{a) } 2m^2z;\ \text{b) } ax-bx]$

22. a) $am\cdot(bn-cp)-an\cdot(bm+np)-ac\cdot(mp+bn)$; b) $(a+b)\cdot(a-2b)+(3a-b)\cdot(4b+3a)-a^2+2b^2$

$[\text{a) } -abcn-2acmp-an^2p;\ \text{b) } 9a^2+8ab-4b^2]$

23. $(3a+b)\cdot(9a^2-3ab+b^2)-3a\cdot(3a-2b)\cdot(3a+2b)-(3a-b)\cdot 4b^2$ $\left[5b^3\right]$

24. $(x-y)\cdot(x^2+xy+y^2)+(3x-y)\cdot(3x+y)-3\cdot(3x-y)\cdot(x+y)-2y^2$ $\left[x^3-6xy-y^3\right]$

25. $\left[(2m+n)\cdot(3m-3n)+mn-1\right]\cdot\left[(3m-5n)\cdot(2m+4n)+17n^2-1\right]-9\cdot(2m^2+n^2)\cdot(2m^2-n)$

$\left[-40m^2n^2-12m^2+6n^2+1\right]$

26. $(2a-b)\cdot(4a^2+2ab+b^2)-2a\cdot(2a+3b)\cdot(2a-3b)+b^2\cdot(b-18a)$ [0]

27. $(x+y)\cdot(x^2-xy+y^2)+(4x-2y)\cdot(4x+2y)-y\cdot(3x+y)\cdot(x+y)+4y^2\cdot(x+1)$ $\left[x^3-3x^2y+16x^2\right]$

28. $(f+w)\cdot(f^2+fw+w^2)+(5f-2w)\cdot(2f+5w)-f\cdot(f-w)\cdot(f-w)-fw\cdot(4f+w-21)$

$\left[10f^2+42fw+w^3-10w^2\right]$

29. $(n+y)\cdot(n^2+ny-y^2)-n\cdot(n-2y)\cdot(2n+y)-y^2\cdot(3n+y)\cdot(n+y)+n\cdot(n^2+3ny^2-5ny+4y^3)$

$2ny^2-y^4-y^3$

30. $(m-s)\cdot(m^2+ms-s^2)+(m-s)\cdot(m+2s)-3\cdot(m-2s)\cdot(m+s)-m\cdot(m^2+2m+2s^2)$

$\left[-4m^2-4ms^2+4ms+s^3+4s^2\right]$

31. $(3a+k)\cdot(9a^2-3ak+k^2)-3a\cdot(3a-2k)\cdot(3a+2k)-4\cdot(3a-k)\cdot k^2$ $\left[5k^3\right]$

32. $(2x-3u)\cdot(4x^2+6ux+9u^2)-(2x+3u)\cdot(4x^2-6ux+9u^2)+(3x+2u)\cdot(9x^2+6ux-4u^2)-(3x-2u)\cdot(9x^2-6ux-4u^2)$

$\left[72ux^2-70u^3\right]$

33. $(a^2-ab+b^2)\cdot(a+2b)-(a^2+2ab-b^2)\cdot(a-2b)$ $\left[a^2b+4ab^2\right]$

34. $(b^3c^4+b^4c^3)\cdot(b^3c^4-b^4c^3)\cdot(b^6c^8-b^8c^6)-b^{14}c^{12}\cdot(b-c)\cdot(b+c)+b^{14}c^{14}$ $\left[b^{12}c^{16}\right]$

35. $\left(\frac{1}{2}x+d\right)\cdot\left(\frac{2}{3}d-x+1\right)+\left(\frac{1}{4}d-x\right)\cdot(4d+3)-(5d-x)\cdot\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}d\right)$ $\left[-\frac{41}{6}dx+\frac{7}{4}d-\frac{5}{2}x\right]$

36. $\left(\frac{7}{4}z^3-2\right)\cdot\frac{4}{9}u^4-\frac{2}{3}u^4\cdot\left(\frac{3}{5}z^3-4\right)-\left(\frac{2}{9}z^3-3\right)\cdot\frac{3}{2}u^4-\frac{2}{3}u^4\cdot\left(\frac{1}{4}z^3-5\right)$ $\left[\frac{173}{18}u^4-\frac{11}{90}u^4z^3\right]$

37. $\left(\frac{1}{2}t^4-\frac{2}{3}t^2u+\frac{1}{4}u^2\right)\cdot\left(\frac{1}{3}t^2+\frac{1}{2}u\right)-\frac{1}{24}\cdot(4t^6+3u^3)-t^2u\cdot\left(\frac{1}{36}t^2-\frac{1}{4}u\right)$ [0]

38. $\left(\frac{1}{3}m^3+\frac{4}{5}n^2+\frac{1}{7}v\right)\cdot\left(\frac{1}{3}m^3-\frac{4}{5}n^2+\frac{1}{7}u\right)-\left(\frac{1}{3}m^3-\frac{4}{5}n^2-\frac{1}{7}v\right)\cdot\left(\frac{1}{3}m^3+\frac{4}{5}n^2-\frac{1}{7}u\right)$ $\left[\frac{2}{21}m^3u+\frac{2}{21}m^3v\right]$

39. $\left(\frac{1}{2}g^2-x+2y-z\right)\cdot\left(x+z+\frac{1}{2}g^2+2y\right)-\left(-x-\frac{1}{2}g^2-2y-z\right)\cdot\left(\frac{1}{2}g^2+x-2y+z\right)$

$\left[\frac{1}{2}g^4+g^2x+2g^2y+g^2z\right]$

40. $(a-b+c-d)\cdot(a-b-c-d)-(a+b-c+d)\cdot(a+b+c+d)$ [–4ab – 4ad]

41. $\left[(a+b)\cdot(a-b)-c^2\right]\cdot\left[(a+c)\cdot(a-c)-b^2\right]-\left[b^2+c^2+a^2\right]\cdot\left[(b+c)\cdot(b-c)-a^2\right]$ $\left[2a^4-2a^2b^2+2b^2c^2+2c^4\right]$

Lavoriamo insieme

Consideriamo la moltiplicazione $(3x^2 - x + 1) \cdot (2x^2 - 4x - 5)$, senza sviluppare tutti i prodotti vogliamo sapere quanto varrà il coefficiente del monomio di grado 3 del polinomio risultato. Noi sappiamo che il grado del prodotto di due monomi è la somma dei gradi dei singoli monomi, quindi otterremmo grado 3 moltiplicando fra loro due monomi, uno di grado 2 e l'altro di grado 1, cioè dai prodotti $3x^2 \cdot (-4x)$; $(-x) \cdot 2x^2$, pertanto il coefficiente cercato è –12 – 2 = –14.

Senza effettuare la moltiplicazione per intero, stabilire quanto vale il coefficiente di grado 3 del polinomio risultato delle moltiplicazioni seguenti

42. $\left(3x^3+2x^2-x+1\right)\cdot\left(4x^4-2x^3+x-4\right)$; $\left(2x^4+5x^3-2\right)\cdot\left(x^4-x^3+x^2-1\right)$ [–12 ; –3]

43. $\left(x^3+x^2\right)\cdot\left(x^4-x^3+1\right)$; $\left(x^7+2x^5-1\right)\cdot\left(2x^3-x^2+x+2\right)$; $\left(x^2-2x+1\right)\cdot\left(x^4-x^3+x-5\right)$ [1 ; –2 ; 0]

L'angolo delle correzioni

Ciascuno dei seguenti polinomi è uno sviluppo errato del prodotto $\left(2xy+x^3\right)\cdot\left(3xy-x^2\right)$, senza effettuare i calcoli spiegare in ciascun caso perché lo sviluppo è errato.

1. $-x^4+3x^4y-2x^3y+6x^2y^2$ [Il polinomio dovrebbe avere grado 5, non 4]
2. $-x^5+3x^4y-2x^3y+6x^2y^2+xy^2$ [Il polinomio al massimo può avere 4 termini, non 5]
3. $-x^5+3x^4z-2x^3y+6x^2y^2$ [Il polinomio non può contenere la variabile z]
4. $-x^5+3x^4y-2x^3y^2+6x^3y^2$ [Il polinomio non può essere omogeneo, dato che non lo sono i fattori]
5. $x^5+3x^4y+2x^3y+6x^2y^2$ [Il polinomio non può avere tutti coefficienti positivi]

Prodotti notevoli

Per quanto visto in precedenza, in generale per moltiplicare un polinomio di m termini per uno di n termini devono effettuarsi $m \cdot n$ moltiplicazioni, così per esempio per moltiplicare un polinomio di 4 termini per uno di 5 devono effettuarsi ben 20 moltiplicazioni. Naturalmente all'aumentare del numero di operazioni da eseguire aumenta anche la probabilità che qualcuna delle operazioni effettuate risulti sbagliata. Ciò ci suggerisce di cercare degli accorgimenti per ridurre le operazioni da eseguire. Naturalmente ciò non sarà sempre possibile, ma lo sarà per alcuni prodotti che perciò chiamiamo *notevoli*[2]. Vediamo qualche esempio.

Esempio 12

Semplificare l'espressione: $(5ab-2bc)\cdot(5ab+2bc)=25a^2b^2+10ab^2c-10ab^2c-4b^2c^2$. Come si è visto abbiamo ottenuto due termini opposti. Ci chiediamo: questo fatto è stato un caso oppure pensiamo di poter enunciare una regola più generale? Osserviamo che i due fattori hanno una particolarità: sono formati da due monomi uguali ($5ab$) e da due monomi opposti ($-2bc$ e $2bc$). Questo fa sì che nell'effettuare le moltiplicazioni si ottengano sempre due termini opposti. Ma allora risulta inutile effettuare queste moltiplicazioni, per prodotti del genere basta moltiplicare fra loro solamente i primi due monomi e gli altri due monomi.

Diamo un nome al prodotto notevole venuto fuori dal precedente esempio.

Definizione 10

Il prodotto di due binomi aventi fra di loro due monomi uguali e due monomi opposti, si chiama **prodotto della somma per la differenza delle basi**.

Enunciamo quindi una regola per il calcolo semplificato del prodotto notevole.

Regola 2

Il prodotto della somma per la differenza delle basi fornisce come risultato la differenza dei quadrati delle basi. In simboli $(A + B) \cdot (A – B) = A^2 – B^2$, con la convenzione che A e B rappresentino in generale due polinomi.

Esempio 13

Eseguiamo dei prodotti notevoli applicando la precedente regola: $(2x-3)\cdot(2x+3)=(2x)^2-3^2=4x^2-9$;

$(5xy+2z)\cdot(5xy-2z)=(5xy)^2-(2z)^2=25x^2y^2-4z^2$; $(-7-a^2b)\cdot(7-a^2b)=-7^2+(a^2b)^2=-49+a^2b^4$.

Vediamo adesso dei prodotti ai quali non può applicarsi la precedente regola.

Esempio 14

- $(4a+b)\cdot(4b-a)$, abbiamo la somma per la differenza ma non di monomi uguali.
- $(7z^2+p)\cdot(7z^2+p)$, abbiamo il prodotto di due binomi uguali.
- $(1+a^2-b)\cdot(1-a^2-b)$, abbiamo il prodotto di due trinomi.

Tenuto conto di quanto detto, ci rendiamo conto che anche i precedenti prodotti, saranno notevoli o comunque avranno dei risultati in qualche modo "semplici", ciò proprio per la presenza in essi di monomi uguali o opposti. Consideriamo in particolare il secondo dei prodotti dell'esempio, che è molto simile al prodotto somma per la differenza.

[2] Cioè degni di essere notati, osservati

Esempio 15

- Si ha: $(7z^2+p)\cdot(7z^2+p)=(7z^2)^2+7z^2\cdot p+p\cdot 7z^2+p^2=(7z^2)^2+2\cdot 7z^2\cdot p+p^2=49z^4+14pz^2+p^2$. Quindi anche questo è un prodotto notevole, dato che otteniamo due termini uguali, che quindi si calcoleranno una volta sola e poi si raddoppieranno.
- Usando quanto appena visto effettuiamo quest'altro sviluppo

$$\left(xy-\frac{2}{3}a^3\right)^2=\left(xy-\frac{2}{3}a^3\right)\cdot\left(xy-\frac{2}{3}a^3\right)=(xy)^2-\frac{2}{3}a^3xy-\frac{2}{3}a^3xy+\left(\frac{2}{3}a^3\right)^3=x^2y^2-\frac{4}{3}a^3xy+\frac{8}{27}a^9$$

In vista dei precedenti esempi possiamo definire il prodotto ed enunciare la conseguente regola.

Definizione 11

Il prodotto di due binomi uguali, si chiama **quadrato di un binomio**.

Regola 3

Vale il seguente sviluppo per il quadrato di un binomio: $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$

Vediamo esempi errati di applicazione della precedente regola.

Esempio 16

- $(3xy-2z)^2=(3xy)^2+(-2z)^2=9x^2y^2+4z^2$. Manca il doppio prodotto. Si ricordi che lo sviluppo del quadrato di un binomio è **sempre un trinomio**. Espressione corretta: $9x^2y^2-12xyz+4z^2$.
- $(ab+3)^2=(ab)^2+2\cdot(ab)^2\cdot(3)^2+(3)^2=a^2b^2+18a^2b^2+9=19a^2b^2+9$. Il doppio prodotto è svolto fra i quadrati e non fra i monomi di partenza. Espressione corretta: $a^2b^2+6ab+9$.
- $\left(\frac{4}{3}a-b\right)^2=\left(\frac{4}{3}a\right)^2+2\cdot\frac{4}{3}a\cdot b+b^2=\frac{16}{9}a^2+\frac{8}{3}ab+b^2$. Il secondo monomio è $-b$, non b. Espressione corretta: $\frac{16}{9}a^2-\frac{8}{3}ab+b^2$.
- $\left(\frac{1}{2}ax-2y^4\right)^2=\frac{1}{4}a^2x^2-axy^4-4y^8$. Il quadrato di un numero reale è sempre un numero non negativo. Espressione corretta: $\frac{1}{4}a^2x^2-axy^4+4y^8$.
- $\left(2m^2n^3+3a\right)^2=2m^4n^6+12am^2n^3+3a^2$. Si innalzano al quadrato anche i coefficienti dei monomi, non solo le parti letterali. Espressione corretta: $4m^4n^6+12am^2n^3+9a^2$.

Le precedenti regole sono valide anche per polinomi, non solo per monomi. Vediamo qualche esempio.

Esempio 17

- Semplificare $\left[2x+\left(a^2-b\right)\right]\cdot\left[2x-\left(a^2-b\right)\right]$. Possiamo pensare la moltiplicazione come un particolare prodotto somma per differenza, i cui termini sono un monomio e un polinomio. Scriviamo perciò: $\left[2x+\left(a^2-b\right)\right]\cdot\left[2x-\left(a^2-b\right)\right]=4x^2-\left(a^2-b\right)^2=4x^2-\left(a^4-2a^2b+b^2\right)=4x^2-a^4+2a^2b-b^2$. In questo modo abbiamo eseguito solo 4 moltiplicazioni, invece di 9.
- Semplificare: $\left[(1-2x)-(3y-z)\right]\cdot\left[(1-2x)+(3y-z)\right]$. Anche in questo caso consideriamo prima il prodotto somma per differenza: $(1-2x)^2-(3y-z)^2=1-4x+4x^2-(9y^2-6yz+z^2)=1-4x+4x^2-9y^2+6yz-z^2$. Abbiamo eseguito 6 moltiplicazioni invece di 16.

Possiamo sviluppare anche il quadrato di un polinomio con più di 2 termini.

Esempio 18

Possiamo sviluppare $(x + 2y – 3z)^2$ nei due modi. seguenti

- Scriviamo $[(x + 2y) – 3z]^2$ e quindi lo consideriamo come un particolare quadrato di binomio, in cui però il primo monomio è in effetti un binomio, abbiamo perciò: $(x + 2y)^2 – 2 \cdot (x + 2y) \cdot 3z + (3z)^2$, da cui otteniamo: $x^2 + 4y^2 + 4xy – 6xz – 12yz + 9z^2$.
- Oppure moltiplichiamo il trinomio per se stesso, ottenendo lo stesso risultato.

Dal precedente esempio in ogni caso estrapoliamo la seguente regola.

Regola 4

Lo sviluppo del quadrato di un polinomio è dato dalla somma dei quadrati di tutti i monomi componenti e da tutti i doppi prodotti fra gli stessi monomi a due a due, considerati una sola volta. Simbolicamente:

$$\left(A_1 + A_2 + ... + A_n\right)^2 = A_1^2 + A_2^2 + ... + A_n^2 + 2A_1A_2 + 2A_1A_3 + ... + 2A_1A_n + 2A_2A_3 + ... + 2A_2A_n + ... + 2A_{n-1}A_n$$

Vediamo ancora un esempio.

Esempio 19

Lo sviluppo di $(2a + b – c + 1)^2$, si ottiene aggiungendo ai quadrati dei 4 monomi, $(4a^2, b^2, c^2, 1)$ i doppi prodotti a due a due $(4ab, –4ac, 4a, –2bc, 2b, –2c)$. Quindi: $4a^2 + b^2 + c^2 + 1 + 4ab – 4ac + 4a – 2bc + 2b – 2c$.

Vediamo ancora qualche altro prodotto notevole.

Esempio 20

- Semplificare $(3x - y) \cdot (9x^2 + 3xy + y^2) = 27x^3 + 9x^2y + 3xy^2 - 9x^2y - 3xy^2 - y^3 = 27x^3 - y^3$. Come si vede i 6 monomi si sono ridotti solo a due, che sono poi il cubo di ciascuno dei due termini del binomio di partenza.
- Semplificare: $(3x + y) \cdot (9x^2 - 3xy + y^2) = 27x^3 - 9x^2y + 3xy^2 + 9x^2y - 3xy^2 + y^3 = 27x^3 + y^3$ Il prodotto è molto simile al precedente, stavolta la semplificazione è però data dalla somma dei cubi.

In vista dei precedenti esempi poniamo le seguenti regole.

Regola 5

Vale la seguente uguaglianza: $(A – B) \cdot (A^2 + AB + B^2) = A^3 – B^3$.

Regola 6

Vale la seguente uguaglianza: $(A + B) \cdot (A^2 – AB + B^2) = A^3 + B^3$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo vedere quali fra i seguenti prodotti sono *notevoli*, quindi possono svilupparsi in modo semplificato.

- $(3x-2y)\cdot(3x+2y^2)$. Apparentemente abbiamo a che fare con un prodotto notevole del tipo somma per differenza, in effetti non è così, dato che i monomi $2y$ e $2y^2$ non sono uguali, pertanto la moltiplicazione si svilupperà nel modo consueto, cioè $(3x-2y)\cdot(3x+2y^2)=9x^2+6xy^2-6xy-4y^3$.
- $(2a^2x-5y^3)^2$. Abbiamo a che fare con un quadrato di binomio, possiamo perciò applicare la regola adatta: $(2a^2x-5y^3)^2=(2a^2x)^2-2\cdot(2a^2x)\cdot(5y^3)+(5y^3)^2=4a^4x^2-20a^2xy^3+25y^6$.
- $(1 + x^2 + x^3)^2$, è un quadrato di trinomio, pertanto dobbiamo eseguire i quadrati dei monomi e poi tutti i possibili prodotti a due a due: $1 + x^4 + x^6 + 2x^2 + 2x^3 + 2x^5$.
- $(4x+5)\cdot(16x^2-40x+25)$. Potremmo avere a che fare con un prodotto la cui semplificazione da luogo a una somma di cubi, ma non è così perché il secondo termine del secondo fattore non è il prodotto di $4x$ e 5, cioè $20x$, dobbiamo quindi procedere senza *scorciatoie*.
$$(4x+5)\cdot(16x^2-40x+25)=64x^3-\underset{\times}{160}x^2+\underline{100x}+\underset{\times}{80}x^2-\underline{200x}-125=64x^3-80x^2-100x-125$$
- $(7a^2b-3bc)\cdot(49a^4b^2+21a^2b^2c+9b^2c^2)$. In questo caso invece abbiamo effettivamente un prodotto che semplificato fornisce la differenza di due cubi, pertanto facilmente abbiamo:
$$(7a^2b-3bc)\cdot(49a^4b^2+21a^2b^2c+9b^2c^2)=(7a^2b)^3-(3bc)^3=343a^6b^3-27b^3c^3$$

Semplificare i seguenti prodotti, applicando, laddove possibile, la regola: $(A-B)\cdot(A+B)=A^2-B^2$

Livello 1

1. a) $(xy-2)\cdot(xy+2)$; b) $(a^2b+3x)\cdot(ab^2-3x)$; c) $(-2a+3b)\cdot(3b+2a)$

$\left[\text{a) } x^2y^2-4;\ \text{b) } a^3b^3-3a^2bx+3ab^2x-9x^2;\ \text{c) } 9b^2-4a^2\right]$

2. a) $(3abc-a)\cdot(abc+a)$; b) $(4x^3+x)\cdot(x^3-x)$; c) $(12m^2+13n^2)\cdot(12m^2-13n^2)$

$\left[\text{a) } 3a^2b^2c^2+2a^2bc-a^2;\ \text{b) } 4x^6-3x^4-x^2;\ \text{c) } 144m^4-169n^4\right]$

3. a) $(my-nz)\cdot(nz+my)$; b) $(3t^2-y)\cdot(3t^2-y)$; c) $(5p^3+1)\cdot(5p^2-1)$

$\left[\text{a) } m^2y^2-n^2z^2;\ \text{b) } 9t^4-6t^2y+y^2;\ \text{c) } 25p^5-5p^3+5p^2-1\right]$

4. a) $(3xy+1)\cdot(3x-y)$; b) $(4a^4b^2+c)\cdot(4a^2b^4-c)$; c) $(-w+5)\cdot(5-w)$

$\left[\text{a) } 9x^2y-3xy^2+3x-y;\ \text{b) } 16a^6b^6-4a^4b^2c+4a^2b^4c-c^2;\ \text{c) } w^2-10w+25\right]$

5. a) $\left(\frac{1}{2}p^3t^4-\frac{1}{3}p^4t^3\right)\cdot\left(\frac{1}{2}p^3t^4-\frac{1}{3}p^4t^3\right)$; b) $\left(\frac{2}{3}h^5-4k\right)\cdot\left(\frac{2}{3}h^5+k^4\right)$

$\left[\text{a) } \frac{1}{9}p^8t^6-\frac{1}{3}p^7t^7+\frac{1}{4}p^6t^8;\ \text{b) } \frac{4}{9}h^{10}+\frac{2}{3}h^5k^4-\frac{8}{3}h^5k-4k^5\right]$

6. a) $\left(\frac{1}{2}a^2b-\frac{1}{3}ab^2\right)\cdot\left(\frac{1}{2}ab^2+\frac{1}{3}a^2b\right)$; b) $\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{2}{3}y^2\right)\cdot\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{3}{2}y^2\right)$

$\left[\text{a) } \frac{5}{12}a^4b^2-\frac{5}{18}a^3b^3;\ \text{b) } x^4+\frac{65}{36}x^2y^2-y^4\right]$

7. a) $\left(-\frac{3}{2}x^5yz^2-\frac{4}{3}xy^3z^2\right)\cdot\left(\frac{3}{2}x^5yz^2-\frac{4}{3}xy^3z^2\right)$; b) $\left(\frac{4}{3}abc-bcd\right)\cdot\left(\frac{4}{3}abd+bcd\right)$

$\left[\text{a) } \frac{16}{9}x^2y^6z^4-\frac{9}{4}x^{10}y^2z^4;\ \text{b) } \frac{16}{9}a^2b^2cd+\frac{4}{3}ab^2c^2d-\frac{4}{3}ab^2cd^2-b^2c^2d^2\right]$

8. a) $\left(\frac{2}{3}hk-\frac{3}{4}mn\right)\cdot\left(\frac{2}{3}hk+\frac{3}{4}hk\right)$; b) $\left(\frac{5}{4}axy^2+\frac{5}{2}ax^2y\right)\cdot\left(\frac{5}{4}axy^2-\frac{5}{2}axy^2\right)$

$\left[\text{a) } \frac{17}{18}h^2k^2-\frac{17}{16}hkmn;\ \text{b) } 0\right]$

9. a) $\left(\frac{4}{3}ef-\frac{5}{4}jw\right)\cdot\left(\frac{4}{3}ef+\frac{5}{4}jw\right)$; b) $\left(-\frac{3}{25}z^4-\frac{7}{2}n\right)\cdot\left(\frac{3}{25}z^4+\frac{7}{2}n\right)$

$\left[\text{a) } \frac{16}{9}e^2f^2-\frac{25}{16}j^2w^2;\ \text{b) } -\frac{49}{4}cn^2-\frac{21}{50}cnz^4-\frac{21}{50}nz^4-\frac{9}{625}z^8\right]$

10. a) $\left(\frac{1}{2}mp^2-\frac{1}{3}m^2p^4\right)\cdot\left(\frac{1}{2}mp^2+\frac{1}{3}m^2p^4\right)$; b) $\left(\frac{7}{8}z+\frac{8}{7}a\right)\cdot\left(\frac{7}{8}z-\frac{8}{7}b\right)$

$\left[\text{a) } \frac{1}{4}m^2p^4-\frac{1}{9}m^4p^8;\ \text{b) } -\frac{64}{49}ab+az-bz+\frac{49}{4}z^2\right]$

Semplificare i seguenti prodotti, applicando, laddove possibile, i prodotti notevoli rispondenti alle leggi dei quadrati di polinomi

Livello 1

11. a) $(3abc+def)^2$; b) $\left(a-b^2\right)^2$; c) $\left(2ax^3+3\right)^2$

$\left[\text{a) } 9a^2b^2c^2+6abcdef+d^2e^2f^2;\ \text{b) } a^2-2ab^2+b^4;\ \text{c) } 4a^2x^6+12ax^3+9\right]$

12. a) $\left(\frac{7}{2}s^2-\frac{5}{4}s^3\right)^2$; b) $\left(\frac{1}{3}a-\frac{2}{3}b\right)^2$; c) $\left(\frac{4}{3}m^3n+\frac{5}{2}\right)^2$

$\left[\text{a) } \frac{25}{16}s^6-\frac{35}{4}s^5+\frac{49}{4}s^4;\ \text{b) } \frac{1}{9}a^2-\frac{4}{9}ab+\frac{4}{9}b^2;\ \text{c) } \frac{16}{9}m^6n^2+\frac{20}{3}m^3n+\frac{25}{4}\right]$

13. a) $(a+2b)\cdot(a+2b)$; b) $\left(5-a^2\right)\cdot\left(a^2-5\right)$; c) $\left(-7p^3+3\right)\cdot\left(3-7p^3\right)$

$\left[\text{a) } a^2+4ab+4b^2;\ \text{b) } -a^4+10a^2-25;\ \text{c) } 49p^6-42p^3+9\right]$

14. a) $\left(\frac{1}{4}a-\frac{1}{3}b\right)^2$; b) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x\right)$; c) $\left(4a^2+5b\right)\cdot\left(4a+5b\right)$

$\left[\text{a) } \frac{1}{16}a^2-\frac{1}{6}ab+\frac{1}{9}b^2;\ \text{b) } \frac{1}{4}-\frac{1}{9}x^2;\ \text{c) } 16a^3+20a^2b+20ab+25b^2\right]$

15. a) $(xy-xz)\cdot(xz-xy)$; b) $\left(8a^2-7b\right)\cdot\left(8a-7b^2\right)$; c) $\left(-11m^4p+12w^4\right)\cdot\left(12w^4-11m^4p\right)$

$\left[\text{a) } -x^2y^2+2x^2yz-x^2z^2;\ \text{b) } 64a^3-56a^2b^2-56ab+49b^3;\ \text{c) } 12m^8p^2-264m^4pw^4+144w^8\right]$

16. a) $\left(x^2y-x+y\right)^2$; b) $\left(a^2-a-1\right)^2$; c) $\left(1+z-z^2-z^3\right)^2$

$\left[\text{a) } x^4y^2-2x^3y+2x^2y^2+x^2-2xy+y^2;\ \text{b) } a^4-2a^3-a^2+2a+1;\ \text{c) } z^6+2z^5-z^4-4z^3-z^2+2z+1\right]$

17. a) $\left[(a+b)+c\right]^2$; b) $\left[(a+b)-c\right]^2$

$\left[\text{a) } a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2;\ \text{b) } a^2+2ab-2ac+b^2-2bc+c^2\right]$

18. a) $\left(2x-3y+4t\right)^2$; b) $\left(2x+3y-4t\right)^2$

$\left[\text{a) } 16t^2+16tx-24ty+4x^2-12xy+9y^2;\ \text{b) } 16t^2-16tx-24ty+4x^2+12xy+9y^2\right]$

19. a) $(ax+by+cz)^2$; b) $(ax-by-cz)^2$

$\left[\text{a) } a^2x^2+2abxy+2acxz+b^2y^2+2bcyz+c^2z^2;\ \text{b) } a^2x^2-2abxy-2acxz+b^2y^2+2bcyz+c^2z^2\right]$

20. a) $\left(\frac{1}{2}e-\frac{2}{3}f+\frac{3}{4}g-\frac{4}{5}h\right)^2$; b) $\left(\frac{1}{2}e+\frac{2}{3}f-\frac{3}{4}g-\frac{4}{5}h\right)^2$

$$\left[\begin{array}{l}\text{a) } \frac{1}{4}e^2-\frac{2}{3}ef+\frac{3}{4}eg-\frac{4}{5}eh+\frac{4}{9}f^2-fg+\frac{16}{15}fh+\frac{9}{16}g^2-\frac{6}{5}gh+\frac{16}{25}h^2;\\ \text{b) } \frac{1}{4}e^2+\frac{2}{3}ef-\frac{3}{4}eg-\frac{4}{5}eh+\frac{4}{9}f^2-fg-\frac{16}{15}fh+\frac{9}{16}g^2+\frac{6}{5}gh+\frac{16}{25}h^2\end{array}\right]$$

Semplificare i seguenti prodotti, applicando, laddove possibile, la regola

$$(A-B)\cdot(A^2+AB+B^2)=A^3-B^3;(A+B)\cdot(A^2-AB+B^2)=A^3+B^3$$

Livello 1

21. a) $(5d^2-3f)\cdot(25d^4+15d^2f+9f^2)$; b) $(3ab-2c)\cdot(3a^2b^2+6abc+4c^2)$

$\left[\text{a) } 125\text{d}^6-27f^3;\ \text{b) } 9a^3b^3+12a^2b^2c-8c^3\right]$

22. a) $(2a+3b)\cdot(4a^2+6ab+9b^2)$; b) $(4hm^3+h^3m)\cdot(16h^2m^6-4h^4m^4+h^6m^2)$

$\left[\text{a) } 8a^3+24a^2b+36ab^2+27b^3;\ \text{b) } h^9m^3+64h^3m^9\right]$

23. a) $(a+bc)\cdot(a^2-abc+b^2c^2)$; b) $(7m^2-2n)\cdot(49m^2+14m^2n+4n^2)$

$\left[\text{a) } a^3+b^3c^3;\ \text{b) } 98m^4n+343m^4-98m^2n-8n^3\right]$

24. a) $(2mn-3np)\cdot(4m^2p^2+6mnp^2+9n^2p^2)$; b) $\left(\frac{2}{3}ax^2y+3b^3\right)\cdot\left(\frac{4}{3}a^2x^4y^2-2ab^3x^2y+9b^6\right)$

$\left[\text{a) } 8m^3np^2+12m^2n^2p^2-12m^2np^3+18mn^3p^2-18mn^2p^3-27n^3p^3;\ \text{b) } \frac{8}{9}a^3x^6y^3+\frac{8}{3}a^2b^3x^4y^2+27b^9\right]$

25. a) $(x^2+y^2)\cdot(x^4+x^2y^2+y^4)$; b) $(x+2y^2)\cdot(x^2+2xy^2-4y^4)$

$\left[\text{a) } x^6+2x^4y^2+2x^2y^4+y^6;\ \text{b) } x^3+4x^2y^2-8y^6\right]$

26. a) $(2ax-by)\cdot(2a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$; b) $(-x+y^3)\cdot(x^2+xy^3+y^6)$

$\left[\text{a) } 4a^3x^3+2a^2bx^2y-b^3y^3;\ \text{b) } y^9-x^3\right]$

27. a) $(3a^2b-4ab)\cdot(9a^4b^2+12a^3b^2-16a^2b^2)$; b) $(2m-3p)\cdot(4m^2-6mp-9y^2)$

$\left[\text{a) } 27\text{a}^6b^3-96a^4b^3+64a^3b^3;\ \text{b) } 8m^3-24m^2p+18mp^2-18my^2+27py^2\right]$

28. a) $\left(\frac{3}{2}ax^3+\frac{1}{4}by\right)\cdot\left(\frac{9}{2}a^2x^6-\frac{3}{8}abx^3y+\frac{1}{16}b^2y^2\right)$; b) $(2a^3-b^4)\cdot(4a^5+2a^3b^4+b^6)$

$\left[\text{a) } \frac{27}{4}a^3x^9+\frac{9}{16}a^2bx^6y+\frac{1}{64}b^3y^3;\ \text{b) } 8a^8+4a^6b^4-4a^5b^4-2a^5b^4-2a^3b^8+2a^3b^6-b^{10}\right]$

29. a) $(3mn^2+2m^2n)\cdot(9m^2n^4-6m^3n^3+4m^4n^2)$; b) $\left(\frac{1}{2}ab+1\right)\cdot\left(\frac{1}{4}a^2b^2-\frac{1}{2}ab+2\right)$

$\left[\text{a) } 8m^6n^3+27m^3n^6;\ \text{b) } \frac{1}{8}a^3b^3+\frac{1}{2}ab+2\right]$

30. a) $\left(\frac{5}{2}t^2w^3-2y^4\right)\cdot\left(\frac{25}{4}t^4w^3+5t^2y^4w^3+4y^8\right)$; b) $(a^3-b^5)\cdot(a^8+a^3b^5+b^{32})$

$\left[\text{a) } \frac{125}{8}t^2w^6+\frac{25}{2}t^4w^6y^4-\frac{25}{2}t^4w^3y^4-8y^{12};\ \text{b) } a^{11}-a^8b^5+a^6b^5+a^3b^{32}-a^3b^{10}-b^{37}\right]$

Lavoriamo insieme

Con i monomi $4a^2b, 3ab^3$ vogliamo scrivere un prodotto notevole la cui semplificazione è del tipo somma di cubi. Dato che la legge generale è la seguente: $(A+B)\cdot(A^2-AB+B^2)=A^3+B^3$, basta sostituire ai simboli A e B i detti monomi. Abbiamo perciò $(4a^2b+3ab^3)\cdot\left[(4a^2b)^2-(4a^2b)\cdot(3ab^3)+(3ab^3)^2\right]$, sviluppando otteniamo: $(4a^2b+3ab^3)\cdot(16a^4b^2-12a^3b^4+9a^2b^6)$.

Con i seguenti monomi formare prodotti notevoli il cui risultato è rispettivamente del tipo differenza di quadrati, differenza di cubi, somma di cubi

Livello 2

31. a) $(2ab^2,\ 3ab^3)$; b) $(3xy,\ 4z^2)$; c) $(mn,\ mz)$; d) $\left(\frac{3}{4}a,\ \frac{5}{6}\right)$; e) $(a^2b,\ ab^2)$; f) $(abc,\ 2ab)$

32. a) $\left(\frac{4}{5}p^4,\ \frac{5}{4}p^3\right)$; b) $\left(\frac{7}{6}abc,\ 8a^3\right)$; c) $\left(\frac{3}{2},\ a^6\right)$; d) $(a^n,\ b^n)$; e) $(2,\ m^2n^3p)$; f) $\left(\frac{5}{3}a^3,\ b^5\right)$

33. a) $(x^{2n},\ y^{3n})$; b) $(a^m,\ b^{2n+1})$; c) $(2ab^4,\ 3c^p)$

Lavoriamo insieme

Vogliamo semplificare la seguente espressione, utilizzando il minor numero possibile di operazioni.

$$\left(\frac{3a^2+b}{3}+\frac{4a^2+b}{2}\right)\cdot\left(\frac{3a^2+b}{3}-\frac{4a^2+b}{2}\right).$$

Anche se i termini non sono monomi ma polinomi, questo può considerarsi come un "prodotto della somma per la differenza della basi". Pertanto possiamo scrivere: $\left(\frac{3a^2+b}{3}\right)^2-\left(\frac{4a^2+b}{2}\right)^2$. Dobbiamo perciò calcolare due quadrati di binomio. Intanto "distribuiamo" il quadrato al numeratore e al denominatore. $\frac{(3a^2+b)^2}{9}-\frac{(4a^2+b)^2}{4}$, adesso applichiamo la regola per il calcolo del quadrato di un binomio:

$$\frac{(3a^2)^2+2\cdot 3a\cdot b+b^2}{9}-\frac{(4a^2)^2+2\cdot(4a)\cdot b+b^2}{4}=\frac{9a^4+6ab+b^2}{9}-\frac{16a^4+8ab+b^2}{4}$$

e riduciamo al minimo comune denominatore

$$\frac{4\cdot(9a^4+6ab+b^2)-9\cdot(16a^4+8ab+b^2)}{36}=\frac{36a^4+24ab+4b^2-(144a^4+72ab+9b^2)}{36}=$$

$$=\frac{36a^4+24ab+4b^2-144a^4-72ab-9b^2}{36}=\frac{-108a^4-48ab-5b^2}{36}.$$

Abbiamo così effettuato 6 moltiplicazioni 3 somme.

Avremmo anche potuto evitare di applicare i prodotti notevoli, con la seguente procedura. Effettuiamo il minimo comune multiplo all'interno di ciascuna parentesi.

$$\frac{2\cdot(3a^2+b)+3\cdot(4a^2+b)}{6}\cdot\frac{2\cdot(3a^2+b)-3\cdot(4a^2+b)}{6}=$$

$$=\frac{6a^2+2b+12a^2+3b}{6}\cdot\frac{6a^2+2b-12a^2-3b}{6}=\frac{18a^2+5b}{6}\cdot\frac{-6a^2-b}{6}$$

In questo modo, anche se non abbiamo più un prodotto notevole, abbiamo comunque un prodotto più semplice di quello di partenza. Effettuiamo la moltiplicazione:

$$\frac{-108a^4-18a^2b-30a^2b-5b^2}{36}=\frac{-108a^4-48a^2b-5b^2}{36}.$$

Naturalmente abbiamo ottenuto lo stesso risultato. Però le operazioni effettuate sono state 12 moltiplicazioni e 5 somme, cioè 17 contro le 9 della precedente procedura.

Usando i prodotti notevoli, laddove possibile, semplificare le seguenti espressioni, per fare il minor numero possibile di operazioni

Livello 2

34. a) $\left(\frac{x+y}{4}+\frac{3x-2y}{5}\right)\cdot\left(\frac{x+y}{4}-\frac{3x-2y}{5}\right)$; b) $\left(\frac{2x+3y}{5}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2x+3y}{5}-\frac{1}{3}\right)$

$\left[\text{a) } -\frac{119}{400}x^2+\frac{121}{200}xy-\frac{39}{400}y^2;\ \text{b) } \frac{4}{25}x^2+\frac{12}{25}xy+\frac{9}{25}y^2-\frac{1}{9}\right]$

35. a) $\left(\frac{7ab+1}{2}+\frac{4-5ab}{6}\right)\cdot\left(\frac{7ab+1}{2}-\frac{4-5ab}{6}\right)$; b) $\left(\frac{4x-2y}{5}+\frac{x^2}{7}\right)\cdot\left(\frac{4x-2y}{5}-\frac{x^2}{7}\right)$

$\left[\text{a) } \frac{104}{9}a^2b^2+\frac{83}{18}ab-\frac{7}{36};\ \text{b) } -\frac{1}{49}x^4+\frac{16}{25}x^2-\frac{16}{25}xy+\frac{4}{25}y^2\right]$

36. a) $\left(\frac{a^2+b}{8}-\frac{a+b^2}{2}\right)\cdot\left(\frac{a^2+b}{8}-\frac{a+b^2}{2}\right)$; b) $\left(\frac{xy-1}{2}+\frac{x-y}{3}\right)\cdot\left(\frac{xy-1}{3}-\frac{x-y}{2}\right)$

$\left[\text{a) } \frac{1}{64}a^4+\frac{1}{32}a^2b-\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}ab^2-\frac{1}{4}b^4+\frac{1}{64}b^2;\ \text{b) } \frac{1}{6}x^2y^2-\frac{5}{36}x^2y-\frac{1}{6}x^2+\frac{5}{36}xy^2+\frac{5}{36}x-\frac{1}{6}y^2-\frac{5}{36}y+\frac{1}{6}\right]$

37. a) $\left(\frac{2x+z}{3}+\frac{x-3z}{4}\right)^2$; b) $\left(\frac{mn+p}{2}+p^2\right)^2$

$\left[\text{a) } \frac{121}{144}x^2-\frac{55}{72}xz+\frac{25}{144}z^2;\ \text{b) } \frac{1}{4}m^2n^2+mnp^2+\frac{1}{2}mnp+p^4+p^3+\frac{1}{4}p^2\right]$

38. a) $\left(\frac{a^2+2b^2}{3}-\frac{3a^2-5b^2}{4}\right)^2$; b) $\left(\frac{1}{5}-\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2$

$\left[\text{a) } \frac{25}{144}a^4-\frac{115}{72}a^2b^2+\frac{529}{144}b^4;\ \text{b) } \frac{1}{4}a^4-\frac{1}{2}a^2b^2-\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{4}b^4+\frac{1}{5}b^2+\frac{1}{25}\right]$

39. a) $\left(\frac{3a^2-b}{3}+\frac{4a^2+b}{2}\right)\cdot\left(\frac{3a^2+b}{3}-\frac{-4a^2+b}{2}\right)$; b) $(3ab-c)\cdot(3ab+c)-(2ab+c)^2$

$\left[\text{a) } 9a^4-\frac{1}{36}b^2;\ \text{b) } 5a^2b^2-4abc-2c^2\right]$

40. $\left(\frac{m^2n-mn^2}{6}+\frac{m^2n-mn^2}{5}\right)\cdot\left(\frac{2m^2n-mn^2}{3}-\frac{3m^2n-7mn^2}{10}\right)$ $\left[\frac{121}{900}m^4n^2-\frac{121}{900}m^2n^4\right]$

41. a) $\left(\frac{4xy-yz}{8}+\frac{3yz-xy}{6}\right)\cdot\left(\frac{2xy-yz}{3}-\frac{yz+8xy}{24}\right)$; b) $\left[(3m^2-pq)\cdot(3m^2+pq)\right]^2$

$\left[\text{a) } \frac{1}{9}x^2y^2-\frac{9}{64}y^2z^2;\ \text{b) } 81m^8-18m^4p^2q^2+p^4q^4\right]$

42. a) $\left[(a^7+1)\cdot(a^{14}-a^7+1)\right]^2$; b) $(2x-y)^2-(2x-y)\cdot(2x+y)$; c) $\left(\frac{4}{3}d^3-\frac{1}{5}s^4\right)\cdot\left(\frac{4}{3}d^3+\frac{1}{5}s^4\right)\cdot\left(\frac{16}{9}d^6-\frac{1}{25}s^8\right)$

$\left[\text{a) } a^{42}+2\cdot a^{21}+1;\ \text{b) } 2y^2-4xy;\ \text{c) } \frac{256}{81}d^{12}-\frac{32}{225}d^6s^8+\frac{1}{625}s^{16}\right]$

43. a) $(4m+3n)\cdot(4m-3n)\cdot(16m^2-9n^2)$; b) $(an+p)\cdot(an-p)\cdot(a^2n^2+p^2)$

$\left[\text{a) } 256m^4-288m^2n^2+81n^4;\ \text{b) } a^4n^4-p^4\right]$

44. $(2a^2m-3b^3c)\cdot(2a^2m+3b^3c)-(a^2m-b^3c)\cdot(4a^2m+9b^3c)$ $\left[-5a^2b^3cm\right]$

45. $(2x^3z^4-3t^3y^4)\cdot(2x^3z^4+3t^3y^4)-(2x^2z^3+3t^2y^5)\cdot(2x^2z^3+3t^2y^5)$ $\left[-18t^6y^8-6t^4x^2y^3z^3-6t^2x^4y^5z^5\right]$

46. $6\cdot\left[(2x+3y)\cdot(3x+2y)-13xy\right]\cdot(x+y)\cdot(x-y)$ $\left[36x^4-36y^4\right]$

47. $(2x-b)\cdot(3b+2x)-(3x+2b-1)\cdot(3x-2b+1)-5\cdot(x+b)\cdot(x-b)+2b\cdot(5b+2)$ $\left[16b^2+4bx-10x^2+1\right]$

48. $\left(7aw+3t^2\right)\cdot\left(-t^2+7aw\right)+\left(2aw+4t^2\right)\cdot\left(2t^2-4aw\right)+6t^2\cdot\left(2aw-t^2\right)$ $\left[41a^2w^2+14at^2w-t^4\right]$

49. $(mn+2np)\cdot(2np-mn)\cdot\left(-m^2n^2+4n^2p^2\right)-\left(m^2n^2+n^2p^2\right)\cdot\left(m^2n^2+n^2p^2\right)$ $\left[15n^4p^4-10m^2n^4p^2\right]$

50. $\left(2a-3b\right)\cdot\left(2a+3b\right)\cdot\left(16a^4+36a^2b^2+81b^4\right)\ ;\ (3s-2q)\cdot(2s+3q)-5qs+6\cdot(q+s)\cdot\left(q^2-qs+s^2\right)$

$\left[64a^6-729b^6;6q^3-6q^2+6s^3+6s^2\right]$

51. $\left(\frac{2}{5}m^2p-\frac{3}{8}mp^2\right)\cdot\left(\frac{2}{5}m^2p+\frac{3}{8}mp^2\right)-\left(\frac{2}{5}m^2p+\frac{1}{4}mp^2\right)\cdot\left(\frac{1}{4}m^2p-\frac{3}{5}mp^2\right)$

$\left[-\frac{1}{10}m4p^2+\frac{71}{400}m^3p^3+\frac{3}{20}m^2p^4+\frac{2}{5}m^2p-\frac{3}{8}mp^2\right]$

52. $\left(\frac{1}{2}x^3y-\frac{1}{3}xy^3\right)^2-\left(\frac{1}{2}x^3y-\frac{1}{3}xy^3\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x^3y+\frac{1}{3}xy^3\right)$ $\left[\frac{2}{9}x^2y^6-\frac{1}{3}x^4y^4\right]$

53. $\left(\frac{x^3y^2z}{17}-\frac{7xy^2z^3}{13}\right)\cdot\left(\frac{x^3y^2z}{17}+\frac{7xy^2z^3}{13}\right)-\left(\frac{x^3y^2z}{17}-\frac{7xy^2z^3}{13}\right)\cdot\left(\frac{x^3y^2z}{17}-\frac{7xy^2z^3}{13}\right)$

$\left[\frac{14}{221}x^4y^4z^4-\frac{98}{169}x^2y^4z^6\right]$

54. $\left(\frac{2}{5}m^2-\frac{5}{2}n^2\right)^2-\left[\left(\frac{2}{3}m+\frac{3}{4}n\right)\cdot\left(\frac{2}{3}m-\frac{3}{4}n\right)\right]^2$ $\left[-\frac{76}{2025}m^4-\frac{3}{2}m^2n^2+\frac{1519}{256}n^4\right]$

55. $\left(\frac{1}{4}z^3-\frac{2}{7}v^2\right)^2-\left(\frac{3}{4}z^3+\frac{1}{7}v^2\right)^2-\left(z^3+\frac{1}{7}v^2\right)\cdot\left(-z^3+\frac{1}{7}v^2\right)$ $\left[\frac{2}{49}v^4-\frac{5}{14}v^2z^3+\frac{1}{2}z^6\right]$

56. $\left(2a-3b\right)^2+\left(3a+2b\right)^2-13\cdot(a-b)\cdot(a+b)$ $\left[26b^2\right]$

57. $(x+3y)\cdot\left(x-3y\right)^2+\left(2x-y\right)^2\cdot\left(2x+y\right)-\left(2x-3y\right)\cdot\left(4x^2-6xy+9y^2\right)+xy\cdot\left(7x+11y\right)$ $\left[x^3+y^3\right]$

58. $\left[\left(3m-4n\right)\cdot\left(3m+4n\right)\right]^2-\left(9m^2+16n^2\right)^2+\left(24mn\right)^2$ [0]

59. $x\cdot\left(2x-3\right)^2-4\cdot(x+1)\cdot\left(x^2-2x+1\right)+(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)$ $\left[x^3-8x^2+13x-5\right]$

60. $\left(3+ak^2t\right)\cdot\left(9-ak^2t\right)+\left(5-ak^2t\right)^2+\left(7-ak^2t\right)\cdot\left(6+ak^2t\right)$ $\left[-a^2k^4t^2-3ak^2t+94\right]$

61. $\left(a^2b-ab^2\right)\cdot\left(a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4\right)-a^4b^3\cdot(a+b)\cdot(a-b)+a^3b^5\cdot(a+b)$ $\left[2a^4b^5\right]$

62. $\left(\frac{1}{2}a^2x-\frac{1}{4}ax^2+\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{2}a^2x-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}a^2x+\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}ax^2-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}ax^2+\frac{2}{3}\right)$

$\left[-\frac{1}{4}a^3x^3+\frac{2}{3}a^2x-\frac{1}{3}ax^2+\frac{4}{3}\right]$

63. $\left[\left(\frac{2}{3}s^3-\frac{4}{9}t^4\right)\left(\frac{2}{3}s^3+\frac{4}{9}t^4\right)-\frac{3}{8}u^2\right]^2-\left(\frac{4}{9}s^6-\frac{16}{81}t^8+\frac{3}{8}u^2\right)^2$ $\left[\frac{8}{27}t^8u^2-\frac{2}{3}s^6u^2\right]$

64. $\left(2a-3v+1\right)^2+\left(3a-2v\right)\cdot\left(3a+2v\right)-13\cdot\left(a+1\right)^2-5\cdot\left(v-2\right)^2$ [– 12av – 22a + 14v – 32]

65. $\left(x^3-x^2+x-1\right)^2+\left(x^3+x^2\right)^2-\left(x-1\right)^2-2x^2\cdot\left[(x-1)\cdot(x+1)\right]^2+4x^3\cdot(x+1)$ $\left[12x^4\right]$

66. $\left(\frac{1}{3}m^2-\frac{1}{4}n^2\right)\cdot\left(\frac{1}{3}m^2+\frac{1}{4}n^2\right)\cdot\left(\frac{1}{9}m^4-\frac{1}{16}n^4\right)-\left(\frac{1}{9}m^4+\frac{1}{16}n^4\right)\cdot\left(\frac{1}{9}m^4+\frac{1}{16}n^4\right)$ $\left[-\frac{1}{36}m^4n^4\right]$

67. $(s+t)\cdot\left(s^2-st+t^2\right)-(s-t)\cdot\left(s^2-st+t^2\right)-(t-s)\cdot\left(s^2+st-t^2\right)-\left(s+t\right)\cdot\left(s^2+st+t^2\right)$ $\left[-8st^2\right]$

68. $\left(\frac{1}{2}m^2x+\frac{1}{4}mx^2\right)\cdot\left(\frac{1}{4}m^4x^2-\frac{1}{8}m^3x^3+\frac{1}{16}m^2x^4\right)-\left(\frac{1}{4}mx^2-\frac{1}{2}m^2x\right)\cdot\left(\frac{1}{2}m^4x^2+\frac{1}{4}m^3x^3-\frac{1}{8}m^2x^4\right)$

$\left[\frac{3}{8}m^6x^3+\frac{3}{64}m^3x^6-\frac{1}{8}m^4x^5\right]$

69. $(am+n)\cdot\left(a^2m^2-amn+n^2\right)-(am-n)\cdot\left(a^2m^2+amn+n^2\right)+(am-n)\cdot\left(a^2m^2-amn+n^2\right)-(am-n)\cdot\left(a^2m^2+amn+n^2\right)$

$\left[-2a^2m^2n+2amn^2+2n^3\right]$

70. $(xy+3z)\cdot\left(x^2y^2-6xyz+9z^2\right)-(xy-3z)\cdot\left(x^2y^2+3xyz+3z^2\right)+(xy+2z)\cdot\left(x^2y^2+2xyz+4z^2\right)-(xy-2z)\cdot\left(x^2y^2+4xyz-4z^2\right)$

$\left[36z^3+17xyz^2-x^2y^2z\right]$

71. $\left(2p^3-q^3\right)\cdot\left(4p^3+q^3\right)-(2p-q)\cdot\left(4p^2+2pq+q^2\right)-\left(2p^3+q^3\right)\cdot\left(2p^3-q^3\right)+(2p+q)\cdot\left(4p^2-2pq+q^2\right)$

$\left[4p^6-2p^3q^3+2q^3\right]$

72. $\left(a^2b-2c\right)\cdot\left(a^4b^2+2a^2bc+4c^2\right)\cdot\left(a^6b^3+8c^3\right)-\left(a^6b^3+8c^3\right)\cdot\left(a^6b^3-8c^3\right)$ [0]

73. $\left[\left(\frac{2}{3}a^2b+\frac{3}{5}ab^2\right)\cdot\left(\frac{2}{3}a^2b-\frac{3}{5}ab^2\right)-\left(\frac{1}{7}a^3b-\frac{3}{5}ab^2\right)\cdot\left(\frac{1}{7}a^3b+\frac{3}{5}ab^2\right)\right]\cdot$
$\cdot\left[\left(\frac{13}{2}ab^2-\frac{2}{3}a^2b\right)\cdot\left(\frac{13}{2}ab^2+\frac{2}{3}a^2b\right)-\left(\frac{1}{7}a^3b+\frac{13}{2}ab^2\right)\cdot\left(-\frac{1}{7}a^3b+\frac{13}{2}ab^2\right)+\frac{8}{9}a^4b^2\right]$

$\left[\frac{16}{81}a^8b^4-\frac{1}{2401}a^{12}b^4\right]$

74. $81\cdot\left\{256\cdot\left[\left(2x-\frac{1}{4}y\right)\cdot\left(2x+\frac{1}{4}y\right)-4\left(x-\frac{1}{3}z^2\right)\cdot\left(x+\frac{1}{3}z^2\right)\right]\cdot\left[\left(3w-\frac{2}{3}z^2\right)\cdot\left(3w+\frac{2}{3}z^2\right)-\right.\right.$
$\left.\left.-9\cdot\left(w-\frac{1}{12}y\right)\cdot\left(w+\frac{1}{12}y\right)\right]-\frac{128}{9}y^2z^4\right\}+4096z^8$ $\left[-81y^4\right]$

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente prodotto: $(a - 2x + by - 1) \cdot (a + 2x + by + 1)$. Questo non rientra in alcuno dei prodotti notevoli che abbiamo finora considerato, ci rendiamo ugualmente conto che qualcosa di notevole deve esservi; infatti i monomi di ciascun polinomio, senza considerare i segni, sono identici. Possiamo allora modificare l'espressione in modo da renderne più semplice lo svolgimento

$$[(a + by) - (2x + 1)] \cdot [(a + by) + (2x + 1)].$$

In pratica abbiamo suddiviso i due polinomi in modo da raggruppare in essi i monomi uguali e quelli opposti. In questo modo abbiamo ottenuto una differenza di quadrati i cui componenti non sono monomi ma binomi. Scriviamo perciò: $(a+by)^2-(2x+1)^2$ e sviluppiamo:

$$a^2+2aby+b^2y^2-\left(4x^2+4x+1\right)=a^2+2aby+b^2y^2-4x^2-4x-1$$

abbiamo effettuato così solo 6 moltiplicazioni invece delle 16 che richiede la normale moltiplicazione fra polinomi.

Sfruttando i prodotti notevoli sviluppare le seguenti espressioni

Livello 3

75. a) $(e + 2f + 3g) \cdot (e - 2f + 3g)$; b) $(e + 2f + 3g) \cdot (e - 2f - 3g)$

$\left[\text{a) } e^2+6eg-4f^2+9g^2;\ \text{b) } e^2-4f^2-12fg-9g^2\right]$

76. a) $(h + 2k + 3j) \cdot (h - 2k - 3j)$; b) $(h - 2k + 3j) \cdot (h - 2k - 3j)$

$\left[\text{a) } h^2-9j^2-12jk-4k^2;\ \text{b) } h^2-9j^2-4hk+4k^2\right]$

77. a) $\left(a^2+a-1\right)\cdot\left(a^2-a+1\right)$; b) $\left(a^2+2a-1\right)\cdot\left(a^2-2a+1\right)$ $\left[\text{a) } a^4-a^2+2a-1;\ \text{b) } a^4-4a^2+4a-1\right]$

78. a) $\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{3}x+2\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{3}x-1\right)$; b) $\left(\frac{2}{3}xy-x^2+y^2\right)\cdot\left(\frac{3}{2}xy-x^2-y^2\right)$

$\left[\text{a) } \frac{1}{2}x^6+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{9}x^2+x-2;\ \text{b) } x^4-\frac{13}{6}x^3y+x^2y^2+\frac{5}{6}xy^3-y^4\right]$

79. a) $\left(a+a^2-b+b^2\right)\cdot\left(a-a^2-b-b^2\right)$; b) $\left(x+y-z+1\right)\cdot\left(x-y-z+1\right)$

$\left[\text{a) } -a^4-2a^2b^2+a^2-2ab-b^4+b^2;\ \text{b) } x^2-2xz+2x-y^2+z^2-2z+1\right]$

80. a) $\left[\left(a+2c+1\right)\cdot\left(a-2c-1\right)\right]^2-\left(a^2-4c^2+1\right)^2$; b) $\left[\left(ax-2b\right)\cdot\left(ax+2b\right)-c\right]^2$

$\left[\text{a) } -8a^2c-4a^2+32c^3+32c^2+8c;\ \text{b) } a^4x^4-8a^2b^2x^2-2a^2cx^2+16b^4+8b^2c+c^2\right]$

81. a) $\left(a+c\right)^2\cdot\left(a^2-ac+c^2\right)^2$; b) $\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y+\frac{1}{6}z\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y-\frac{1}{6}z\right)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y-\frac{1}{6}z\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y-\frac{1}{6}z\right)$

$\left[\text{a) } a^6+2a^3c^3+c^6;\ \text{b) } -\frac{2}{3}xy+\frac{1}{6}xz+\frac{1}{9}yz-\frac{1}{18}z^2\right]$

82. $\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2+\frac{1}{6}xy\right)^2-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\right)^2\cdot\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2-\frac{1}{6}xy\right)^2$ $\left[-\frac{1}{54}x^3y^3\right]$

83. $\left[\left(2a+3b\right)\cdot\left(4a^2-6ab+9b^2\right)-1\right]^2$ $\left[64a^6+432a^3b^3+16a^3+729b^6-54b^3+1\right]$

84. $\left[\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}m\right)\cdot\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{6}am+\frac{1}{9}m^2\right)-\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}m\right)\cdot\left(\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{6}am+\frac{1}{9}m^2\right)\right]^2+\left(m^3-a^2\right)\cdot\left(m^3+a^2\right)$

$\left[-a^4+\frac{733}{729}m^6\right]$

85. $\left[\left(a+2b-3c+4d\right)\cdot\left(a+2b+3c-4d\right)-\left(a+2b+3c+4d\right)\cdot\left(a+2b-3c-4d\right)\right]^2$ $\left[2304c^2d^2\right]$

86. $\left(a^2x-\frac{1}{3}ax^2\right)\cdot\left(a^2x+\frac{1}{3}ax^2\right)^2-\left(a^2x+\frac{1}{3}ax^2\right)\cdot\left(a^4x^2+\frac{1}{3}a^3x^2+\frac{1}{9}a^2x^4\right)$

$\left[-\frac{1}{3}a^5x^3-\frac{2}{9}a^4x^5-\frac{1}{9}a^4x^4-\frac{2}{27}a^3x^6\right]$

87. $\left\{\left[(a+b)^2-b^2\right]^2-4a^3b\right\}^2-\left\{\left[\left(\frac{1}{3}b-a\right)^2+\frac{2}{3}ab\right]^2-\frac{2}{9}a^2b^2\right\}^2$ $\left[8a^6b^2+\frac{1294}{81}a^4b^4-\frac{1}{6561}b^8\right]$

88. $2b-\left(3c+4d\right)^2+\left(3c+4d-b\right)\cdot\left(3c-4d-b\right)-\left(b+d\right)^2+6c\cdot\left(4d+b\right)-2b\cdot\left(1-d\right)$ $\left[-33d^2\right]$

89. $(ab+c-d)\cdot(ab-c+d)-(ab+c)\cdot(ab-c)+(c+d)\cdot(c-d)$ $\left[c^2+2cd-d^2\right]$

90. a) $\left(2ab-3bc+4ac\right)^2-\left(4ac+3bc-2ab\right)^2$; b) $\left[\left(2x-3y\right)\cdot\left(2x+3y\right)+1\right]^2-\left[\left(2x+3y\right)^2-12xy-1\right]^2$

$\left[\text{a) } 32a^2bc-48abc^2;\ \text{b) } 16x^2-144x^2y^2\right]$

91. $\left[\text{a) } \left(am-bn+cp\right)^2-\left(am+bn-cp\right)^2;\ \text{b) } \left(a+b+c+d\right)^2-\left(a+b-c-d\right)^2\right]$

[a) $4acmp-4abmn$; b) $4ac+4ad+4bc+4bd$]

92. $\left[2x+3y-\left(3a+2b\right)\right]^2-\left[2x+3a-\left(3y+2b\right)\right]^2+\left[2x-2b+3y+3a\right]^2-\left[3a+2b+2x+3y\right]^2$

[$-24ax-16bx-48by+24xy$]

93. $(p+2q-3t+4u)\cdot(p+2q+3t-4u)+(p-2q-3t+4u)\cdot(p+2q-3t+4u)$ $\left[2p^2+4pq-6pt+8pu\right]$

94. $\left(\frac{4}{5}x-\frac{2}{3}y+\frac{3}{4}z\right)\cdot\left(\frac{4}{5}x+\frac{2}{3}y-\frac{3}{4}z\right)-\left(\frac{4}{5}x+\frac{2}{3}y-\frac{3}{4}z\right)\cdot\left(\frac{4}{5}x-\frac{2}{3}y-\frac{3}{4}z\right)$ $\left[\frac{6}{5}xz+yz-\frac{9}{8}z^2\right]$

95. $[(m+2n)-3p]\cdot[(m-2n)+3p]-[(m-3p)-2n]\cdot[(m+3p)-2n]+[(2n-3p)+m]\cdot[(2n-3p)-m]$ $\left[-m^2+4mn-4n^2+9p^2\right]$

96. $(3mnp+m-n)^2-(3mnp+m-n)\cdot(3mnp-m-n)$ $\left[6m^2np+2m^2-2mn\right]$

97. $(a+x+b+y)^2+(a+x+b+y)\cdot(a-x-b-y)$ $\left[2a^2+2ab+2ax+2ay\right]$

98. $(a+2b+c+d)\cdot(a+2b-c-d)-(a-b-2c+d)\cdot(a-b+2c-d)$ $\left[6ab+3b^2+3c^2-6cd\right]$

99. $(m-2n+p-2q+t)^2-(m-2n+p+2q)^2-(m-2n-2q-t)^2+(m-2n-2q-2t)^2$ *Suggerimento*: tenere conto che molti prodotti si ripetono $\left[-8mq+8mt+16nq-16nt-8pq+2pt-16qt+4t^2\right]$

100. a) $(x^n+x^{2n}+1)^2-(x^n-x^{2n}+1)^2$; $(-a^n+b^{2n}-c^{3n}+1)^2+(a^n-b^{2n}+c^{3n}-1)^2$ [a) $4x^{3n}+4x^{2n}$; b) 0]

101. Senza effettuare le operazioni, dire di quanti monomi è composto lo sviluppo del quadrato di un polinomio con 5 termini. [15]

102. Il quadrato di un binomio omogeneo di grado n è ancora un polinomio omogeneo? Se sì di che grado? Giustificare la risposta. [Sì; $2n$]

103. Lo sviluppo della potenza n – esima di un binomio omogeneo di grado k è sempre un polinomio omogeneo? Se la risposta è positiva quanto vale il suo grado? [Sì; kn]

Potenze di binomi e triangolo di Tartaglia

Un altro prodotto notevole consiste nello sviluppare potenze qualsiasi di un binomio. Abbiamo già visto il quadrato, adesso vediamo il cubo.

Esempio 21

Sviluppare il seguente cubo di un binomio: $(a+b)^3$. Scriviamo nel seguente modo:

$$(a+b)^3=(a+b)^2\cdot(a+b)=(a^2+2ab+b^2)\cdot(a+b)=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

L'esempio precedente ci suggerisce di enunciare una regola per lo sviluppo del cubo di un binomio, che si avvale di appena 4 moltiplicazioni contro le 8 che invece dovremmo effettuare moltiplicando la base per se stessa tre volte.

Regola 7

Lo sviluppo del cubo di un binomio genera un quadrinomio formato dai cubi dei due monomi formanti la base e dai due tripli prodotti fra il quadrato di ciascun monomio per l'altro.
In simboli: $(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$.

Vediamo qualche esempio.

Esempio 22

Sviluppare: $(2x-y^2)^3$. Applichiamo la precedente regola:

$$(2x-y^2)^3=(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot(-y^2)+3\cdot(2x)\cdot(-y^2)^2+(-y^2)^3=8x^3+3\cdot4x^2\cdot y^2+6x\cdot y^4-y^6=8x^3+12x^2y^2+6xy^4-y^6$$

Possiamo generalizzare le regole viste per il quadrato e il cubo di un binomio a potenze qualsiasi, purché intere e positive. Tale problema è molto vecchio ed era noto certamente agli antichi cinesi vissuti parecchie centinaia di secoli prima della nascita di Cristo. Se ne occuparono in seguito illustri matematici, tant'è che in Italia lo schema associato viene chiamato *triangolo di Tartaglia* mentre in altri paesi è noto come *triangolo di Pascal*. Ma procediamo con ordine. Per cercare una regola generale consideriamo qualche esempio.

Esempio 23

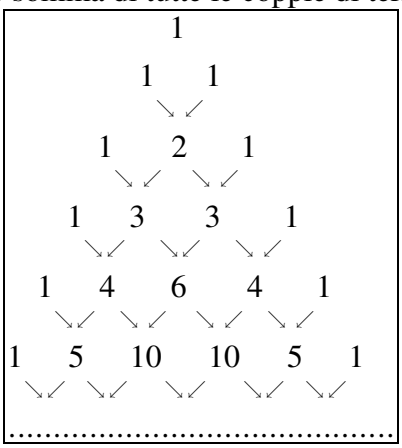
Sviluppare: $(a+b)^4$. Possiamo scrivere: $(a+b)^4=(a+b)^3\cdot(a+b)$. Eseguendo questa moltiplicazione, tenuto conto che il cubo di binomio dà luogo a 4 termini, avremo la somma di due quadrinomi: $a\cdot(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)$ e $b\cdot(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)$. Vi saranno certamente dei termini simili, precisamente le seguente 3 coppie: $(3a^3b,a^3b);(3a^2b^2,3a^2b^2);(ab^3,3ab^3)$. Perciò lo sviluppo finale sarà:

$$(a+b)^4=a^4+(3+1)\cdot a^3b+(3+3)\cdot a^2b^2+(1+3)\cdot ab^3+b^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

Il precedente esempio ci fa capire come possiamo sviluppare in generale $(a+b)^n$. Infatti se adesso volessimo calcolare $(a+b)^5$, tenendo conto dello sviluppo di $(a+b)^4$, possiamo dire che otterremmo la somma di due monomi con 5 termini, $a\cdot(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)$ e $b\cdot(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)$. Vi saranno stavolta 4 coppie di termini simili: $(4a^4b,a^4b);(6a^3b^2,4a^3b^2);(4a^2b^3,6a^2b^3);(ab^4,4ab^4)$. Quindi avremo come sviluppo un polinomio di 6 termini: $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$.
Possiamo allora dire che in generale valgono le seguenti regole, per lo sviluppo di $(a+b)^n$:

1) ha $n+1$ termini; 2) ciascun monomio ha grado n; 3) nel polinomio sono presenti tutte le potenze di a da n a 0 e contemporaneamente tutte le potenze di b da 0 a n.

Rimane solo un problema, come possiamo determinare i coefficienti dei monomi? Abbiamo visto nei due esempi che basta sommare due coefficienti dello sviluppo precedente. Possiamo quindi costruire il seguente triangolo, in cui ciascuna riga si ottiene dalla precedente, tranne le prime due, iniziando e finendo con 1 e determinando i rimanenti termini come somma di tutte le coppie di termini adiacenti della precedente riga.



Vediamo qualche esempio di applicazione di quanto detto:

Esempio 24

Sviluppiamo la potenza del binomio $\left(2a^2-\frac{1}{2}b\right)^5$. Tenuto conto di quanto detto scriviamo:

$$\left(2a^2\right)^5+5\cdot\left(2a^2\right)^4\cdot\left(-\frac{1}{2}b\right)+10\cdot\left(2a^2\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}b\right)^2+10\cdot\left(2a^2\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}b\right)^3+5\cdot\left(2a^2\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}b\right)^4+\left(-\frac{1}{2}b\right)^5$$

Adesso facciamo particolare attenzione a sviluppare il prodotto, tenuto conto che prima dobbiamo sviluppare le potenze.

$$32a^{10}+5\cdot 16a^8\cdot\left(-\frac{1}{2}b\right)+10\cdot 8a^6\cdot\frac{1}{4}b^2+10\cdot 4a^4\cdot\left(-\frac{1}{8}b^3\right)+10a^2\cdot\frac{1}{16}b^4-\frac{1}{32}b^5=$$

$$=32a^{10}-40a^8b+20a^6b^2-5a^4b^3+\frac{5}{8}a^2b^4-\frac{1}{32}b^5$$

Concludiamo il paragrafo considerando alcune applicazioni dei prodotti notevoli che possono aiutarci nel calcolo. Ricordiamo abbastanza bene i quadrati dei numeri da 1 a 10 compresi, qualche difficoltà in più abbiamo per i quadrati di numeri interi maggiori di 10. Vogliamo calcolare perciò tali quadrati usando solo quelli noti a memoria. Vediamo come.

Esempio 25

Vogliamo calcolare il quadrato di 83. Possiamo scrivere $83^2 = (80 + 3)^2$, cioè come un quadrato di binomio. Possiamo applicare la ben nota regola, che vale anche se i monomi componenti sono due numeri, ossia: $83^2 = 80^2 + 2 \cdot 80 \cdot 3 + 3^2 = 6400 + 480 + 9 = 6889$. E tutti i prodotti si eseguono facilmente a mente.

Il procedimento precedente può applicarsi anche a numeri con più di due cifre, solo che in questo caso, naturalmente esso diviene più laborioso. In modo analogo potrebbero determinarsi anche i cubi, ma stavolta forse la scelta non risulta molto conveniente, dato che devono in ogni caso memorizzarsi i cubi dei numeri da 1 a 9 e anche nei calcoli dei cosiddetti tripli prodotti sarebbero coinvolti numeri con più di una cifra.
Un altro prodotto notevole che potrebbe essere sfruttato nel calcolo numerico è quello che conduce alla differenza di due quadrati, come nel seguente esempio.

Esempio 26

Calcolare $48 \cdot 52$. Osserviamo che possiamo scrivere: $48 \cdot 52 = (50 – 2) \cdot (50 + 2)$, riconducendoci a una differenza di quadrati: $48 \cdot 52 = 50^2 – 2^2 = 2500 – 4 = 2496$.

Il precedente procedimento è molto utile per prodotti del tipo $(10\cdot a + b)\cdot (10\cdot a - b)$ ma può utilizzarsi per tutti i prodotti, vista la validità del risultato seguente.

Teorema 3

Quali che siano i numeri reali a e b vale la seguente identità: $a\cdot b = \left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)\cdot\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)$.

Dimostrazione
Basta sviluppare il secondo membro.

È evidente però che in generale non sempre il rimedio è migliore del male, come testimoniato dal successivo esempio.

Esempio 27

Calcolare 71·53. Applicando l'identità del teorema 3. Scriviamo:

$$71\cdot 53 = \left(\frac{124}{2}+\frac{18}{2}\right)\cdot\left(\frac{124}{2}-\frac{18}{2}\right) = 62^2 - 9^2 = (60+2)^2 - 81 = 3600+240+4-81 = 3763$$

e ancor più complicata risulta l'applicazione della stessa formula a quest'altra moltiplicazione

$$72\cdot 53 = \left(\frac{125}{2}+\frac{19}{2}\right)\cdot\left(\frac{125}{2}-\frac{19}{2}\right) = \frac{125^2}{4} - \frac{19^2}{4} = \frac{(100+25)^2-(20-1)^2}{4} = \ldots = 3816.$$

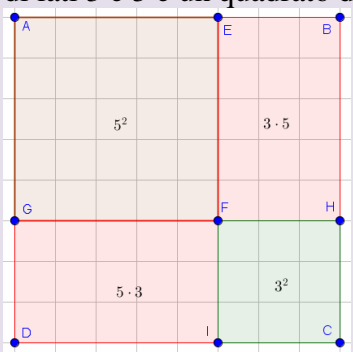
I protagonisti



Niccolò Tartaglia nacque probabilmente nel 1505 a Brescia, nell'allora Repubblica Veneta. Sono infatti scarse le notizie sulla sua vita, specialmente quella dei primi anni. Pare che si chiamasse Fontana e per un difetto di parola dovuto a una ferita alla lingua, che gli fu procurata durante una incursione dei soldati francesi che saccheggiarono Brescia nel 1512, fu soprannominato "il tartaglia". Insieme a Cardano, Del Ferro, Bombelli e Ferrari, rappresenta uno degli esponenti più importanti della scuola algebrica italiana rinascimentale che ebbe il merito di scoprire le formule per risolvere le equazioni di III e IV grado, nonché di cominciare a dare una forma più moderna al linguaggio algebrico. Scrisse, fra l'altro, i *Quesiti et invenzioni diverse*, pubblicato nel 1546 e il *General trattato di numeri et misure* del 1556 – 1560. Morì a Venezia il 13 dicembre 1557.

L'angolo storico

L'algebra è una disciplina alquanto recente, sviluppatasi soprattutto a partire dal X secolo d. C. Eppure alcuni concetti, come quelli dei prodotti notevoli erano trattati anche ai tempi di Euclide, seppure con metodi geometrici. Per esempio in figura il quadrato di lato che misura 8 unità è stato decomposto in quattro quadrilateri: un quadrato di lato 5, due rettangoli di lati 3 e 5 e un quadrato di lato 3.



Il che concorda con lo sviluppo del quadrato di binomio: $(5 + 3)^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 3 + 3^2$. Se ripetiamo il procedimento mostrato nell'esempio precedente, sostituendo ai numeri 5 e 3 variabili a e b, il risultato, opportunamente modificato, non cambia. Abbiamo perciò riottenuto per altra via la formula: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ proprio come fece Euclide più di 2000 anni fa nella proposizione 4 del II libro degli Elementi.

Verifiche

Lavoriamo insieme

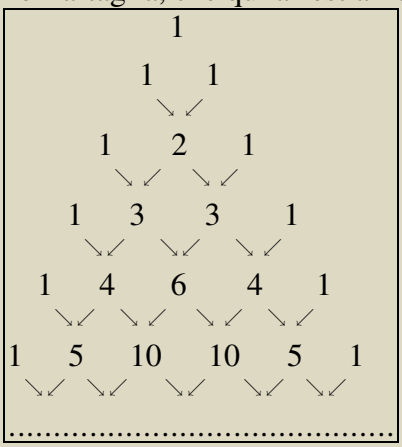
Vogliamo sviluppare la seguente potenza del binomio $\left(\frac{1}{2}ax - b^2\right)^5$.

Dobbiamo costruire un polinomio i cui termini si ottengono moltiplicando fra loro le diverse potenze dei due monomi, in modo che quando il grado di uno "cresce" da 0 a 5, quello dell'altro "decresce" da 5 a 0, mantenendo uguale a 5 la somma delle potenze. Scriviamo perciò

$$N_1 \cdot \left(\frac{1}{2}ax\right)^5 \cdot (-b^2)^0 + N_2 \cdot \left(\frac{1}{2}ax\right)^4 \cdot (-b^2)^1 + N_3 \cdot \left(\frac{1}{2}ax\right)^3 \cdot (-b^2)^2 + N_4 \cdot \left(\frac{1}{2}ax\right)^2 \cdot (-b^2)^3 +$$

$$+N_5 \cdot \left(\frac{1}{2}ax\right)^1 \cdot (-b^2)^4 + N_6 \cdot \left(\frac{1}{2}ax\right)^0 \cdot (-b^2)^5$$

Con i simboli N_i abbiamo indicato i fattori per cui moltiplicare ogni termine, valori che sappiamo possono ottenersi mediante il triangolo di Pascal o Tartaglia, che qui arrestiamo al livello 5.



Abbiamo quindi

$$1 \cdot \left(\frac{1}{32}a^5x^5\right) \cdot 1 + 5 \cdot \left(\frac{1}{16}a^4x^4\right) \cdot (-b^2) + 10 \cdot \left(\frac{1}{8}a^3x^3\right) \cdot (b^4) + 10 \cdot \left(\frac{1}{4}a^2x^2\right) \cdot (-b^6) +$$

$$+5 \cdot \left(\frac{1}{2}ax\right) \cdot (b^8) + 1 \cdot 1 \cdot (-b^{10}) = \frac{1}{32}a^5x^5 - \frac{5}{16}a^4b^2x^4 + \frac{5}{4}a^3b^4x^3 - \frac{5}{2}a^2b^6x^2 + \frac{5}{2}ab^8x - b^{10}$$

Osserviamo che il polinomio sviluppo è omogeneo di grado 10, perché il polinomio base era omogeneo di grado 2.

Sviluppare le seguenti potenze di binomi verificando se i polinomi ottenuti sono ordinati, omogenei e/o completi rispetto a qualcuna delle variabili presenti.

Livello 1

1. a) $(1+4x)^3$; b) $(3x-x^2)^3$; c) $(a^3+3)^3$

$$\left[\text{a) } 64x^3+48x^2+12x+1;\ \text{b) } -x^6+9x^5-27x^4+27x^3;\text{c) } a^9+9a^6+27a^3+27\right]$$

2. a) $(-m+n^2)^3$; b) $\left(\frac{1}{2}qz^2-\frac{2}{3}q^2z\right)^3$; c) $(-3y+1)^3$ a) $(a-2x)^3$; b) $(4ab-2bc)^3$; c) $(v+2u)^3$

$$\left[\text{a) } a^3-6a^2x+12ax^2-8x^3;\ \text{b) } 64a^3b^3-96a^2b^3c+48ab^3c^2-8b^3c^3;\text{c) } v^3+6v^2u+12vu^2+8u^3\right]$$

3. a) $(-m+n^2)^3$; b) $\left(\frac{1}{2}qz^2-\frac{2}{3}q^2z\right)^3$; c) $(-3y+1)^3$

$$\left[\text{a) } -m^3+3m^2n^2-3mn^4+n^6;\ \text{b) } \frac{1}{8}q^3z^6-\frac{1}{2}q^4z^5+\frac{2}{3}q^5z^4-\frac{8}{27}q^6z^3;\text{c) } -27y^3+27y^2-9y^2+1\right]$$

Livello 2

4. a) $(x-2y)^4$; b) $\left(\frac{2}{3}a^2+1\right)^4$ $\left[\text{a) } x^4-8x^3y+24x^2y^2-32xy^3+16y^4;\ \text{b) } \frac{16}{81}a^8+\frac{32}{27}a^6+\frac{8}{3}a^4+\frac{8}{3}a^4+1\right]$

5. a) $\left(\frac{1}{3}n^3+3m^3\right)^4$; b) $\left(-\frac{3}{4}b-c^2\right)^4$

$\left[\text{a) } 81m^{12}+36m^9n^3+6m^6n^6+\frac{4}{9}m^3n^9+\frac{1}{81}n^{12};\ \text{b) } \frac{81}{256}b^4+\frac{27}{16}b^3c^2+\frac{27}{8}b^2c^4+3bc^6+c^8\right]$

6. a) $\left(3p^4-1\right)^5$; b) $\left(-\frac{1}{2}+m\right)^6$

$\left[\text{a) } 243p^{20}-405p^{16}+270p^{12}-90p^8+15p^4-1;\ \text{b) } m^6-3m^5+\frac{15}{4}m^4+\frac{15}{16}m^2-\frac{3}{8}m+\frac{1}{64}\right]$

7. a) $\left(s+s^2\right)^6$; b) $\left(-\frac{1}{2}x^2-1\right)^6$

$\left[\text{a) } s^{12}+6s^{11}+15s^{10}+20s^9+15s^8+6s^7+s^6;\ \text{b) } \frac{1}{64}x^{12}+\frac{3}{16}x^{10}+\frac{15}{16}x^8+\frac{5}{2}x^6+\frac{15}{4}x^4+3x^2+1\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo semplificare la seguente espressione: $\left(ax^2-3xz\right)^4-\left(ax^2+3xz\right)^4$. Saremmo tentati di sviluppare distintamente le due potenze, ma notiamo che, a parte un segno, le basi coincidono e quindi coincideranno anche i due sviluppi, sempre a parte qualche segno. Ciò significa che nello svolgimento delle due potenze, otteniamo valori uguali e valori opposti, eseguendo i calcoli quelli uguali si sommano raddoppiandosi e quelli opposti si eliminano. Cominciamo allora con l'individuare i monomi uguali e quelli opposti.
Dal secondo sviluppo vengono fuori solo termini preceduti dal segno (+); dal primo verrà fuori il segno – solo quando calcoleremo potenze dispari di $(-3xz)$. Quindi dobbiamo calcolare solo la parte dello sviluppo di $\left(ax^2+3xz\right)^4$, che coinvolge potenze pari di $(-3xz)$ e, una volta calcolati tali monomi, li raddoppieremo e avranno tutti il segno meno. Perciò: $\left(ax^2-3xz\right)^4-\left(ax^2+3xz\right)^4=-2\cdot\left[\left(ax^2\right)^3\cdot(3xz)+\left(ax^2\right)\cdot(3xz)^3\right]=$
$=-2\cdot\left(a^3x^6\cdot3xz+ax^2\cdot27x^3z^3\right)=-6a^3x^7z-54ax^5z^3$. Concludiamo osservando che abbiamo effettuato appena 3 moltiplicazioni e 2 potenze.

Sviluppare le seguenti espressioni utilizzando il minor numero possibile di operazioni

Livello 2

8. a) $(ab+cd)^3-(ab-cd)^3$; b) $\left(x^2-1\right)^3+\left(x^2+1\right)^3$ $\left[\text{a) } 6a^2b^2cd+2c^3d^3;\ \text{b) } 2x^6+6x^2\right]$

9. a) $\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{3}y^3\right)^4+\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{3}y^3\right)^4$; b) $\left(2m^4+n^3\right)^4-\left(2m^4-n^3\right)^4$

$\left[\text{a) } \frac{1}{18}x^{12}+\frac{1}{3}x^6y^6+\frac{2}{81}y^{12};\ \text{b) } 64m^{12}n^3+16m^4n^9\right]$

10. a) $\left(2ax^2-a^3x\right)^5-\left(2ax^2+a^3x\right)^5$; b) $\left(2ax^2-a^3x\right)^5+\left(2ax^2+a^3x\right)^5$

$\left[\text{a) } -2a^{15}x^5-80a^{11}x^7-160a^7x^9;\ \text{b) } 20a^{13}x^6+160a^9x^8+64a^5x^{10}\right]$

11. a) $\left(a^2b^2-2ab\right)^3-\left(a^2b^2+2ab\right)^3$; b) $\left(a^2b^2-2ab\right)^4+\left(a^2b^2+2ab\right)^4$

$\left[\text{a) } -12a^5b^5-16a^3b^3;\ \text{b) } 2a^8b^8+48a^6b^6+32a^4b^4\right]$

12. a) $\left(3x^2-xz\right)^5+\left(3x^2+xz\right)^5$; b) $\left(3x^2+xz\right)^4-\left(3x^2-xz\right)^4$

$\left[\text{a) } 486x^{10}+540x^8z^2+30x^6z^4;\ \text{b) } 216x^7z+24x^5z^3\right]$

13. a) $\left(2xy-xz\right)^6-\left(2xy+xz\right)^6$; b) $\left(m^4-p^4\right)^5+\left(m^4+p^4\right)^5$

$\left[\text{a) } -384x^6y^5z-320x^6y^3z^3-24x^6yz^5;\ \text{b) } 2m^{20}+20m^{12}p^8+10m^4p^{16}\right]$

14. a) $\left(q^3+r^2\right)^4+\left(r^2-q^3\right)^4$; b) $\left(az^2+2\right)^5-\left(az^2-2\right)^5$

$\left[\text{a) } 2q^{12}+12q^6r^4+2r^8;\ \text{b) } 20a^4z^8+160a^2z^4+64\right]$

15. a) $\left(2m-h^2\right)^7-\left(2m+h^2\right)^7$; b) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b\right)^6-\left(\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}b\right)^6$

$\left[\text{a) } -2h^{14}-168h^{10}m^2-1120h^6m^4-896h^2m^6;\ \text{b) } -\frac{1}{4}a^5b-\frac{40}{27}a^3b^3-\frac{64}{81}ab^5\right]$

Utilizzando tutti i prodotti notevoli semplificare le seguenti espressioni

16. $2y\cdot\left(3x-y\right)^2+x\cdot\left(x-4y\right)\cdot\left(x+4y\right)-\left(x-2y\right)^3+\left(x+y\right)\cdot\left(x^2-xy+y^2\right)24x^2y+40xy^2$ $\left[x^3+11y^3\right]$

17. $x^3\cdot\left(x^2-1\right)^2-x\cdot\left(x^3+1\right)^2+\left(2x^2-1\right)\cdot\left(2x+1\right)^2+2x^2\cdot\left(x^3+1-3x^2\right)$ $\left[9x^3-5x+1\right]$

18. $x\cdot(x-2y)^2+y\cdot(3x-y)\cdot(3x+y)-(3x-2y)^3+(3x-2y)\cdot\left(9x^2+6xy+4y^2\right)-59x^2y+32xy^2$ $\left[x^3-y^3\right]$

19. $2x\cdot(x-y)^2+y\cdot(2x-5y)\cdot(2x+5y)-(2x-y)^3+(2x+3y)\cdot\left(4x^2-6xy+9y^2\right)-12x^2y+4xy^2$ $\left[2x^3+3y^3\right]$

20. $3d\cdot(d+h)^2-2h\cdot(3d-4h)\cdot(3d+4h)-(d-h)^3+(d+h)\cdot\left(d^2-dh-h^2\right)$ $\left[3d^3-9d^2h-2dh^2+32h^3\right]$

21. $g\cdot(3e+2g)^2-e\cdot(e+2g)\cdot(e-2g)+(2e-g)^3-(2e-g)\cdot\left(4e^2+2eg+g^2\right)+e^3-4g^3$ $\left[22eg^2-3e^2g\right]$

22. $a\cdot(3v-a)^2+v\cdot(2v+a)\cdot(3v-a)-(v-a)^3-(v-2a)\cdot\left(v^2-2av+4a^2\right)$ $\left[10a^3-18a^2v+17av^2+4v^3\right]$

23. $r\cdot(3r-b)^2+b\cdot(2r-b)\cdot(r+2b)-(2r-3b)^3-(r+3b)\cdot\left(r^2+3br+9b^2\right)+2b^2\cdot(b+34r)$ $\left[26br^2\right]$

24. $\left(a^2+3f^2\right)\cdot\left(a^2-f^2\right)-\left(4a^2-f^2\right)^2+5a^2\cdot\left(3a^2+2f^2\right)+(a+f)^2\cdot(a-f)^2$ $\left[a^4+18a^2f^2-3f^4\right]$

25. $(2h-3j)\cdot(-2h+3j)-(-3h+5j)^2-3h\cdot(4h+14j)+(5h-6j)\cdot(5h+2j)$ $\left[-20hj-46j^2\right]$

26. $\left(3mp-4st^2\right)\cdot\left(3mp+4st^2\right)-\left(3mp+4st^2\right)^2+8st^2\cdot\left(2mp+4st^2\right)$ $\left[-8mpst^2\right]$

27. $\left(6kq-5ku\right)^2-4k^2\cdot\left(3q+2u\right)\cdot\left(3q-2u\right)+10k^2u\cdot\left(6q-4u\right)$ $\left[k^2u^2\right]$

28. $\left(3ax-5y\right)^2-\left(2ax+5y\right)^2-5ax\cdot\left(ax+10y\right)$ $\left[-100axy\right]$

29. $\left(7qs-1\right)^2+\left(3qs-2h\right)\cdot\left(3qs+2h\right)+2qs\cdot\left(7-29qs\right)+4h-6$ $\left[-4h^2+4h-5\right]$

30. $\left(s+2y\right)^3-\left(s+2y\right)\cdot\left(s^2-2sy+4y^2\right)-6sy\cdot\left(s-y\right)$ $\left[18sy^2\right]$

31. $\left(a-3b\right)\cdot\left(a^2+3ab+9b^2\right)-\left(a+3b\right)\cdot\left(a^2-3ab+3b^2\right)+\left(3a+b\right)\cdot\left(a^2-3ab+b^2\right)$ $\left[3a^3-8a^2b+6ab^2-35b^3\right]$

32. $\left(a+2b-c\right)\cdot\left(a-2b+c\right)-\left(a+3b+2c\right)\cdot\left(3a-b+c\right)-\left(a+b+c\right)^2+3a^2+2b^2+4c^2$ $\left[-10ab-9ac+bc\right]$

33. $\left(\frac{1}{2}a+b\right)\cdot\left(\frac{1}{2}a-b\right)-\left(\frac{2}{3}a-b\right)^2+\left(\frac{1}{6}a-b\right)^2+b\cdot(b-a)$ $\left[-\frac{1}{6}a^2\right]$

34. $\left(\frac{5}{2}g+\frac{2}{3}h-k\right)\cdot\left(\frac{5}{2}g-\frac{2}{3}h+k\right)-\left(\frac{5}{2}g+\frac{2}{3}h\right)^2-\frac{4}{3}h\cdot\left(k-\frac{2}{3}h\right)$ $\left[-\frac{10}{3}gh-k^2\right]$

35. $\left(\frac{1}{2}w-m\right)\cdot\left(\frac{1}{4}w^2+\frac{1}{2}mw+m^2\right)-\left(\frac{1}{2}w-m\right)^3-\frac{3}{2}mw\cdot\left(-w+\frac{1}{2}m\right)$ $\left[\frac{9}{4}mw^2-\frac{9}{4}m^2w\right]$

36. $\left(\frac{2}{3}q^2+\frac{1}{4}t^3\right)\cdot\left(\frac{4}{9}q^4-\frac{1}{6}q^2t^3+\frac{1}{16}t^6\right)-\left(\frac{2}{3}q^2-\frac{1}{4}t^3\right)\cdot\left(\frac{4}{9}q^4-\frac{1}{6}q^2t^3-\frac{1}{16}t^6\right)$ $\left[\frac{2}{9}q^4t^3\right]$

37. $\left(x-\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}v\right)\cdot\left(x+\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}v\right)-\left(x+\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}v\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}v\right)$ $\left[\frac{2}{3}av-\frac{8}{9}v^2+\frac{4}{3}vx\right]$

38. $\left(1+\frac{m}{2}\right)^2\cdot\left(1-\frac{m}{2}\right)^2-m\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{m}{4}\right)\cdot\left(\frac{4}{9}-\frac{m}{6}+\frac{m^2}{16}\right)$ $\left[\frac{3}{64}m^4-\frac{1}{2}m^2-\frac{8}{27}m+1\right]$

39. $(a+2b-3c)\cdot(a-2b+3c)-(a-2b-3c)\cdot(a+2b+3c)+(a+2b+3c)\cdot(a-2b+3c)$ $\left[a^2+6ac-4b^2+24bc+9c^2\right]$

40. $(x+2t)^3-3x\cdot(2x-t)\cdot(t+3x)-(t+x)\cdot(t^2-tx+x^2)-7\cdot(t-x)\cdot(t^2+tx+x^2)$ $\left[15t^2x+9tx^2-11x^3\right]$

41. $\left\{2+3\cdot\left[n-4\cdot(n+m)^2\right]+12\cdot(m-n)\cdot(m+n)\right\}\cdot m-4\cdot(n+2)^2\cdot(n-2)+4\cdot(n-1)^3+4\cdot\left[6mn\cdot(m+n)-7\cdot(n+1)\right]$ $\left[3mn+2m-20n^2\right]$

42. $a+2\cdot\left[(c-d+e)\cdot(c+d-e)-(c-d+e)^2\right]+(c-d+e)^2-2\cdot(d+e)\cdot(d-e)+2\cdot(3d+2e)\cdot(d-e)-(c+d-e)^2$ $\left[a+6de-6e^2\right]$

43. $\frac{a-2m-3p}{2}\cdot\frac{a+2m-3p}{3}-\frac{a+2m-3p}{4}\cdot\frac{a-2m-3p}{5}-\frac{7}{15}\cdot\left(\frac{a}{2}-m+p\right)^2+\frac{p}{6}\cdot\left(\frac{29}{2}p+a\right)+\frac{m}{15}\cdot(14m-44p-7a)$ $\left[-ap-2m+3p^2\right]$

44. $-\frac{1}{12}b\cdot(4a+3q)+\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}-\frac{q}{4}+\frac{r}{5}\right)\cdot\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{2}-\frac{q}{4}-\frac{r}{5}\right)+\frac{r}{5}\cdot\left(-\frac{q}{2}+\frac{2}{5}r\right)-\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{2}+\frac{q}{4}-\frac{r}{5}\right)^2+\frac{2}{5}r\cdot\left(b-\frac{a}{3}\right)$ $\left[-\frac{1}{3}aq-\frac{1}{2}b^2\right]$

45. $(x+y)^5-2xy\cdot(x+y)\cdot(x^2-xy+y^2)-6x^2y\cdot(x+y)-(x+y)^3\cdot(x^2+y^2)$ $\left[6x^3y^2-6x^3y+6x^2y^3-6x^2y^2\right]$

46. $(2z-t)^3-(z+t)^3+\left(2t-\frac{1}{2}z\right)^3-\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}z\right)^3$ $\left[\frac{47}{8}t^3-\frac{51}{16}t^2z-\frac{435}{32}tz^2+\frac{439}{64}z^3\right]$

47. $(x+y-2z)^2+2\cdot(x+y)\cdot(x-y)-(x-y-2z)^2-2y\cdot(2x+y-4z)$ $\left[2x^2-4y^2\right]$

Livello 3

48. La seguente tabella stabilisce il numero di moltiplicazioni da effettuare per sviluppare il quadrato di un polinomio con 2, 3 e 4 monomi (la scritta 3 = 2 + 1 significa che 2 sono i quadrati e 1 il doppio prodotto, analogo significato hanno le altre scritte), completarla e cercare di enunciare una legge che dica quante operazioni debbono farsi per un polinomio con *n* termini.

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	*n*
Moltiplicazioni	3 = 2 + 1	6 = 3 + 3	10 = 4 + 6							

49. Quanti termini ha il polinomio risultato della seguente espressione: $(a+b)^{100}+(a-b)^{100}$? [51]

50. Quanti termini ha il risultato della seguente espressione: $(a+b)^{100}-(a-b)^{100}$? [50]

Lavoriamo insieme

Vogliamo eseguire a mente il calcolo 117^2 sfruttando le proprietà dei prodotti notevoli. Scriviamo:
$117^2 = (100 + 10 + 7)^2 = 100^2 + 10^2 + 7^2 + 2 \cdot 100 \cdot 10 + 2 \cdot 100 \cdot 7 + 2 \cdot 10 \cdot 7 = 10000 + 100 + 49 + 2000 + 1400 + 140 = 13689$.

Eseguire le seguenti espressioni sfruttando i prodotti notevoli

Livello 1

51. 47^2 ; 51^2 ; 69^2 ; 102^2 ; 213^2 ; 347^2 ; 1234^2 ; 2470^2
52. 13^3 ; 28^3 ; 57^3 ; 101^3 ; 205^3 ; 313^3 ; 1002^3 ; 2104^3
53. $42 \cdot 38$; $51 \cdot 49$; $67 \cdot 73$; $103 \cdot 97$; $215 \cdot 205$; $504 \cdot 496$

Lavoriamo insieme

Vogliamo trovare la somma delle cifre del numero $(10^{378} - 1)^2$, in pratica, visto che 10^{378} significa 1 seguito da 378 zeri, togliendo 1 troviamo 377 volte la cifra 9, poi però dobbiamo innalzarla al quadrato e il quesito si complica. Invece sviluppiamo il quadrato tenuto conto che è un binomio, ottenendo: $10^{756} - 2 \cdot 10^{378} + 1$.

in pratica abbiamo la seguente differenza:

$$\begin{array}{l} 1\underbrace{000\ldots000}_{755}000000001 - \\ \qquad\qquad 2\underbrace{000\ldots000}_{378} \\ \hline \underbrace{999\ldots99}_{377}8\underbrace{000\ldots0001}_{377} \end{array}$$

. Spieghiamo cosa è successo. $10^{756} + 1$, ha 757 cifre formate da due 1 (prima e ultima cifra) e 755 zeri. Mentre $2 \cdot 10^{378}$ è un 2 seguito da 378 zeri. Quando sottraiamo avremo 1 come ultima cifra, poi sottrarremo fra di loro 377 zeri, ottenendo appunto zero. Quindi sottrarremo 2 da 0, con il *prestito della decina*, otteniamo 8 e quindi tutti gli zeri che precedono questo 0 (che sono 755 – 378 = 377) divengono 9. Alla fine la somma richiesta sarà $9 \cdot 377 + 8 + 1 = 3402$.

Determinare la somma delle cifre dei seguenti numeri

Livello 2

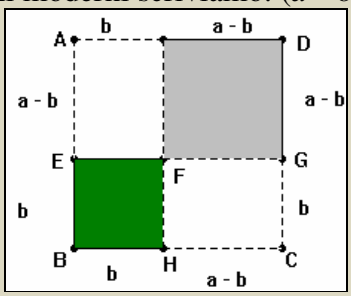
54. a) $(10^{215} + 1)^2$; b) $(10^{512} + 3)^2$; c) $(10^{1234} + 2)^2$ [a) 4; b) 16; c) 9]
55. a) $(10^{1548} + 7)^2$; b) $(10^{489} + 4)^2$; c) $(10^{1001} + 5)^2$ [a) 19; b) 16; c) 9]

Livello 3

56. a) $(10^{75} - 3)^2$, $n \in \mathbb{N}$; b) $(10^{127} - 1)^2$; c) $(10^{217} - 2)^2$ [a) 679; 1143; 1954]
57. a) $(10^{2578} + 11)^2$; b) $(10^{128} + 1)^3$; c) $(10^{2345} + 1)^4$ [a) 9; b) 8; c) 16]
58. a) $(10^n + 1)^2$, $n \in \mathbb{N}$; b) $(10^n + 9)^2$, $n \in \mathbb{N}$; c) $(10^n - 1)^2$, $n \in \mathbb{N}$ [a) 4; 19; $9n$]
59. Sapendo che la somma delle cifre di $(10^n + m)^2$ $n, m \in \mathbb{N}$ è 18, determinare m. [8]
60. Quanto vale la somma delle cifre del numero $(10^{2n} + 10^n + 1)^2$? [9]
61. Dopo aver osservato che $1000001 = 10^6 + 1$, calcolare la sua seconda, terza e quarta potenza.
62. Calcolare la seconda, terza e quarta potenza del numero 2000000002.

Lavoriamo insieme

La seguente figura è proposta da Euclide nella proposizione 7 del III libro degli Elementi, come giustificazione del prodotto notevole che in termini moderni scriviamo: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$



Abbiamo aggiunto, nella figura, le scritte accanto a ciascuna linea.

Come mai Euclide disegna questa figura? Abbiamo un quadrato di lato $(a - b)$, quindi di area $(a - b)^2$, che è quello in grigio; poi abbiamo un quadrato di lato b, quindi area b^2, quello in verde; ancora, due rettangolo tratteggiati, entrambi di area $b \cdot (a - b)$; infine il quadrato complessivo di area a^2.

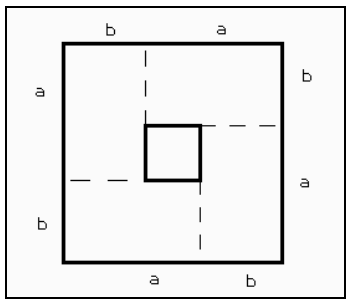
Euclide intende suggerire che possiamo trovare il quadrato in grigio, considerando il quadrato grande, e togliendovi non i due rettangoli tratteggiati, bensì i rettangoli formati unendo questi con il quadrato verde, cioè due rettangoli la cui area è $a \cdot b$. dato che però questo quadratino è comune a entrambi i rettangoli lo verremo a togliere due volte, quindi dobbiamo aggiungerlo $(+ b^2)$, perché tutto quadri.

Livello 2

63. Verificare geometricamente, in due modi diversi, la formula del binomio per un quadrato di lato 8, scomponendolo nelle somme 3 + 5 e 2 + 6.
64. Fornire una verifica geometrica della formula del quadrato di un trinomio applicandola a un quadrato di lato 12, scomposto come 3 + 4 + 5.
65. Costruire la figura associata alla formula del quadrato di un trinomio nel caso generale.
66. Verificare geometricamente la formula della differenza di due quadrati per $(7 + 5) \cdot (7 – 5)$.

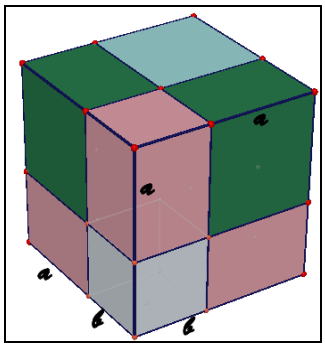
Livello 3

67. Esprimere mediante i prodotti notevoli quanto stabilito dalla seguente figura: (prop. 8 del libro II degli Elementi di Euclide) $[(a + b)^2 – (a – b)^2 = 4ab]$



Usando l'algebra geometrica verificare le seguenti identità

68. $(m + n) \cdot (p + q) = mp + mq + np + nq$
69. $(a+b+c)\cdot(a+b-c)=(a+b)^2-c^2$
70. $(a+b+c+d)\cdot(a+b-c-d)=(a+b)^2-(c+d)^2$
71. $(a+b+c+d)\cdot(a+b+c-d)=(a+b+c)^2-d^2$
72. Usando la seguente figura dimostrare la formula per il cubo di binomio:



Livello 2

Quesiti di logica

Determinare quali fra le seguenti condizioni sono necessarie, sufficienti o necessaire e sufficienti per l'accadere dei fatti descritti

73. Essere un polinomio omogeneo perché anche il suo quadrato sia un polinomio omogeneo [Necessaria e sufficiente]
74. Avere un monomio di grado 10 perché il polinomio abbia grado 10 [Necessaria]
75. Avere tutti i monomi di grado 10 perché il polinomio abbia grado 10 [Sufficiente]
76. Avere il coefficiente del termine di secondo grado diverso da zero, per essere un polinomio completo di terzo grado in una sola variabile [Necessaria]
77. Essere lo sviluppo di un prodotto notevole somma per differenza di monomi, per essere un binomio [Sufficiente]

Quesiti sulle relazioni binarie

78. Verificare che la relazione binaria definita nell'insieme dei polinomi a una variabile, associando fra di loro due polinomi solo se hanno lo stesso grado è una relazione di equivalenza. Quanti elementi ha l'insieme quoziente? [infiniti]
79. Se definiamo la relazione binaria dell'esercizio precedente nell'insieme formato dai polinomi di grado compreso tra 17 e 203, quanti elementi ha l'insieme quoziente? [187]

80. Verificare che la relazione binaria definita nell'insieme dei polinomi a una variabile, associando fra di loro due polinomi solo se contengono la stessa variabile, è una relazione di equivalenza. Quanti elementi ha l'insieme quoziente? [Quanti simboli ha l'alfabeto usato, 26 usando quello inglese]
81. Verificare che la relazione binaria definita nell'insieme dei polinomi di primo grado a due variabili, associando fra di loro due polinomi solo se contengono una stessa variabile, scelta nell'alfabeto $\{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$, è una relazione di equivalenza. Per esempio $a + b + 1$, $2a + 3c$ e $a - 2$, sono equivalenti. Quanti elementi ha l'insieme quoziente? [676]

Quelli che … vogliono sapere di più

I polinomi e la notazione posizionale dei numeri. Cambiamenti di base

I polinomi sembrano scritture strane e inutilmente complicate, ma in realtà noi utilizziamo spesso tali concetti anche con i più familiari numeri interi.

Esempio 28

Scrivere il numero 7234, equivale a scrivere 7000 + 200 + 30 + 4, o anche $7 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 4$. Così, considerando il numero 10 come la variabile x, y o comunque vogliamo chiamarla, possiamo pensare al numero 7234 come a un quadrinomio di terzo grado nella variabile 10, ossia come se in $7x^3 + 2x^2 + 3x + 4$, al posto di x mettiamo 10

La scrittura in forma polinomiale di un numero giustifica la regola per moltiplicare due numeri in colonna.

Esempio 29

Per moltiplicare 23 per 425, ci hanno insegnato che dobbiamo utilizzare lo schema rappresentato di seguito.

$$\begin{array}{l} 23 \times \\ \underline{425 =} \\ \quad 115 \\ \quad 46 \\ \underline{92\quad\quad} \\ 9775 \end{array}$$

Come mai questa scelta? Scriviamo la moltiplicazione scomponendo il secondo fattore in notazione posizionale decimale: $23 \cdot 425 = 23 \cdot (400 + 20 + 5) = 23 \cdot (4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 5)$, applicando la proprietà distributiva possiamo anche scrivere $23 \cdot 4 \cdot 10^2 + 23 \cdot 2 \cdot 10 + 23 \cdot 5 = 92 \cdot 10^2 + 46 \cdot 10 + 115$. Allora se, partendo dall'ultimo numero, sostituiamo ogni zero proveniente dalla notazione posizionale con uno spazio vuoto alla destra del numero abbiamo ottenuto appunto la regola che ci hanno insegnato.

È chiaro che si può pensare di ridurre o aumentare i simboli a disposizione e, in tal modo, aumentare o ridurre la "lunghezza" nella scrittura di un numero.

Esempio 30

Probabilmente l'uso di 10 simboli dipende dal fatto che abbiamo 10 dita in 2 mani. Cosa accadrebbe se volessimo contare con le dita di una mano sola, cioè usare solo 5 simboli, per esempio 0, 1, 2, 3 e 4? Vuol dire che i numeri a 2 cifre "scatteranno" a partire dal sesto numero, così scrivendo $[10]_5$ (il numero scritto in piccolo indica quante cifre usiamo) stiamo indicando quello che in base 10 è 6. Per ciò i numeri con due cifre non saranno più 90 (100 – 10), ma saranno 20 (25 – 5). Cioè saranno $[10]_5$, $[11]_5$, $[12]_5$, $[13]_5$, $[14]_5$, $[15]_5$, $[20]_5$, $[21]_5$, $[22]_5$, $[23]_5$, $[24]_5$, $[30]_5$, $[31]_5$, $[32]_5$, $[33]_5$, $[34]_5$, $[40]_5$, $[41]_5$, $[42]_5$, $[43]_5$, $[33]_5$. Quindi la terza cifra scatterà a partire dal ventiseiesimo numero, cioè da $5^2 + 1$. In generale il numero di posto $5^{n+1} + 1$, sarà il primo con $(n + 1)$ cifre.

Notazione 2

Per indicare che un numero è scritto in *una* certa base b utilizziamo la scritta $[n]_b$, con n la scritta simbolica del numero e b la sua base.

Esempio 31

- Il numero $[721]_8$ a quale numero in base 10 equivale? Basta scrivere il numero nella notazione polinomiale con 8 come "variabile" e sommare con le ordinarie regole valide nella base 10. Abbiamo perciò:
$$[721]_8 = [7 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8 + 1]_{10} = [465]_{10}$$
- Come possiamo invertire il procedimento precedente, cioè passare da $[465]_{10}$ a $[721]_8$? Il problema equivale a quello di ripartire il liquido contenuto in 5 contenitori da 1 litro, 6 da 10 litri, 4 da 100 litri, in con-

tenitori le cui dimensioni sono, in litri $8^0 = 1$, $8^1 = 8$, $8^2 = 64$, non andiamo oltre perché $8^3 = 512 > 465$. Inoltre, poiché 8 contenitori da 1 litro equivalgono a 1 da 8, riempiremo al massimo 7 contenitori da 1, allo stesso modo, poiché 8 contenitori da 8 litri equivalgono a uno da 8^2 litri, non riempiremo più di 7 contenitori da 8 litri. Adesso cominciamo a riempire i contenitori più grandi, cioè quelli da 6a litri. Poiché $465 = 7 \cdot 64 + 17$, riempiamo 7 contenitori da 64 litri e ci rimangono ancora 17 litri da travasare nei contenitori più piccoli, cioè da 8 litri. Dato che $17 = 2 \cdot 8 + 1$, riempiamo due contenitori da 8 e ci rimane 1 solo litro. Infine abbiamo suddiviso i nostri 465 litri in 7 contenitori da 64, 2 da 8 e 1 da 1. Ciò significa che è: $[465]_{10} = [721]_8$. La regola pratica consiste nel dividere 465 per 8 considerando il resto, poi dividere il quoziente per 8 e così via, finché non otteniamo per quoziente 0. Alla fine scriviamo i resti al contrario di come li abbiamo ottenuti. Cioè

$$\begin{array}{r|l} 465 & 8 \\ \hline 464 & 58 \\ \hline 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 58 & 8 \\ \hline 56 & 7 \\ \hline 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 7 & 8 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 7 & \end{array} .$$

Ancora un esempio.

Esempio 32

Tradurre il numero $[1234]_6$ in base 13. A causa della familiarità che abbiamo con essa, è preferibile usare la base 10 come collegamento. Scriviamo cioè $[1234]_6 = [4 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 6^2 + 1 \cdot 6^3]_{10} = [310]_{10}$. Poi trasformiamo tale numero in base 13, con il procedimento descritto nell'esempio precedente, ottenendo

$$\begin{array}{r|l} 310 & 13 \\ \hline 299 & 23 \\ \hline 11 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 23 & 13 \\ \hline 13 & 1 \\ \hline 10 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1 & 13 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 1 & \end{array} .$$

Nasce un problema, alcuni resti sono maggiori di 9, dobbiamo perciò usare nuovi simboli per indicarli. In genere si usano le lettere. Così indichiamo 10 con A e 11 con B. Avremo perciò $[1234]_6 = [310]_{10} = [1AB]_{13}$.

L'angolo storico

L'utilizzo della notazione posizionale è una delle più interessanti scoperte o invenzioni (al solito vi è controversia se la matematica si inventi o si scopra) che siano state effettuate nelle matematiche. Pensiamo al modo di scrivere degli antichi romani. Essi utilizzavano dei simboli (I, V, X, L, C, D, M) a ognuno dei quali associavano un valore (nell'ordine 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000) e poi stabilivano delle regole per comporre tali simboli per scrivere i numeri. La regola fondamentale era la notazione additiva, ossia i valori numerici dei simboli si sommavano *quasi* sempre. Infatti, mentre la scritta MCLVIII significava 1000 + 100 + 50 + 5 + 1 + 1 + 1 = 1158, IX non era 1 + 10 ma 10 – 1. Ora è immediato notare come risulta complicata questa notazione, il nostro 1158 scritto con soli quattro simboli, nella notazione romana è scritto con ben 7 simboli.
La notazione posizionale ha origini molto antiche (già i babilonesi la utilizzavano nell'antica Mesopotamia) ha il pregio di usare un numero determinato di simboli, nel nostro caso 10, e di associare a ogni simbolo un valore numerico che non è sempre lo stesso, ma che dipende dalla posizione che ha nel numero.
Così nel numero 1111 i quattro simboli uguali valgono, rispettivamente da sinistra a destra, 1000, 100, 10 e 1. Invece nella notazione romana IIII, tutti e quattro i simboli I hanno lo stesso valore, indipendentemente dal posto che occupano.
Nell'antico Egitto, per moltiplicare due numeri interi si usava, anche se inconsciamente, la numerazione binaria. Ciò perché risultava più semplice moltiplicare per due, cioè raddoppiare un numero, che moltiplicarlo per un qualsiasi numero. Se perciò, per esempio, doveva moltiplicarsi $37 \cdot 41$. Si scriveva $41 = 32 + 8 + 1 = 2^5 + 2^3 + 1$(ricordiamo che $[41]_{10} = [101001]_2$). Quindi basta moltiplicare 37 per 2^5, 2^3 e 1 e poi sommare. Per effettuare facilmente queste operazioni, raddoppiamo 37, 0 volte (moltiplichiamo per 1), 3 volte (per 2^3) e 5 volte (per 2^5), ottenendo 37 + 296 + 1184 = 1517.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Dato il numero $[123]_4$, vogliamo esprimerlo in base 5. Prima portiamolo in base 10, scrivendo nella forma polinomiale: $[123]_4 = [1\cdot4^2 + 2\cdot4^1 + 3\cdot4^0] = [27]_{10}$. Adesso portiamo questo numero in base 5, scrivendolo come somma di potenze di 5. $[27]_{10} = 25 + 2 = 5^2 + 2 = 1\cdot5^2 + 0\cdot5+2\cdot5^0 = [102]_5$. Questo significa che l'acqua contenuta in un bidone da $4^2 = 16$ litri, 2 da 4 e 3 da 1, può essere interamente riversata, riempiendoli completamente in 2 bidoni da 10 litri e 7 da 1 litro, oppure in 1 da $5^2 = 25$ litri e in 2 da 1 litro.

***Effettuare le trasformazioni dei dati numeri da una base all'altra. Usiamo i simboli* A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15**

Livello 2

1. a) $[12345]_{10} \rightarrow [...]_3$; b) $[112200]_3 \rightarrow [...]_{10}$; c) $[101]_2 \rightarrow [...]_5$ [a) $[121221020]_3$; b) $[396]_{10}$; c) $[10]_5$]
2. a) $[1234321]_5 \rightarrow [...]_5$; b) $[122333]_8 \rightarrow [...]_4$; c) $[1010101]_{10} \rightarrow [...]_{11}$
   [a) $[101111100010000]_2$; b) $[22103123]_4$; c) $[62A9A4]_{11}$]
3. a) $[765]_{12} \rightarrow [...]_6$; b) $[1000001]_2 \rightarrow [...]_7$; c) $[12345]_{10} \rightarrow [...]_3$ [a) $[5005]_6$; b) $[243]_7$; c) $[22222]_3$]
4. a) $[ABC]_{15} \rightarrow [...]_{14}$; b) $[CADE]_{16} \rightarrow [...]_{10}$; c) $[999]_{10} \rightarrow [...]_9$[a) $[C55]_{14}$; b) $[51934]_{10}$; c) $[14640]_9$]
5. a) $[AAAA]_{11} \rightarrow [...]_5$; b) $[AAAA]_{16} \rightarrow [...]_{12}$; c) $[AE00]_{15} \rightarrow [...]_5$
   [a) $[432030]_5$; b) $[2134A]_{12}$; c) $[2140100]_5$]
6. a) $[11111111]_4 \rightarrow [...]_{13}$; b) $[9876]_{10} \rightarrow [...]_8$; c) $[1122]_4 \rightarrow [...]_2$
   [a) $[9C35]_{13}$; b) $[23224]_8$; c) $[1011010]_2$]
7. a) $[13579]_{13} \rightarrow [...]_8$; b) $[100001]_9 \rightarrow [...]_8$; c) $[ABCDE]_{16} \rightarrow [...]_{15}$
   [a) $[106401]_8$; b) $[163252]_8$; c) $[DD790]_{15}$]

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere il seguente problema.
Un grossista di biscotti per cani ha a disposizione casse che possono contenere 4, 16, 64 o 256 lattine. Sappiamo che quando deve fare una spedizione cerca di inviare il minor numero complessivo di casse; invia solo casse completamente piene; ieri ha inviato 946 fra casse e lattine singole. Vogliamo sapere quante casse di ciascun tipo ha spedito.
Dato che 1, 4, 16, 64, 256 sono le successive potenze di 4, da $4^0 = 1$ fino a $4^4 = 256$, il problema si risolve facilmente trasformando $[946]_{10}$ in base 4. Per far ciò sappiamo che dobbiamo procedere con le successive divisioni del numero per 4, annotando i resti. Abbiamo

$$946 = 236 \cdot 4 + 2;\ 236 = 59 \cdot 4 + 0;\ 59 = 14 \cdot 4 + 3;\ 14 = 3 \cdot 4 + 2;\ 3 = 0 \cdot 4 + 3.$$

Quindi, leggendo i resti in ordine inverso, abbiamo $[946]_{10} = [32302]_4$. Ciò significa che il grossista ha inviato 3 casse da 256 scatole, 2 da 64, 3 da 16 e 2 scatole sfuse.

Risolvere i seguenti problemi utilizzando le nozioni sul cambiamento di base

Livello 2

8. Sei persone (indicate con A, B, C, D, E, F) vanno ad attingere l'acqua da un serbatoio che contiene 45 litri d'acqua: A ha un bidone da 1 litro, B da 2 litri, C da 4, D da 8, E da 16 e F da 32. Vanno nell'ordine da F ad A e ciascuno o riempie completamente il proprio bidone o lo lascia vuoto. Chi non riesce a riempire il proprio bidone? [B ed E]
9. Dobbiamo dividere 11255 caramelle in confezioni che ne possono contenere rispettivamente, 6, 36, 216, 1296, 7776. Sapendo che ciascuna confezione si riempie del tutto e che si cerca di usare il minor numero di confezioni; vogliamo sapere a) quali confezioni rimangono vuote; b) quante confezioni da 1 296 caramelle si riempiono; c) quante caramelle non riescono a sistemarsi in alcuna confezione.
   [a) Quelle da 36; b) 2 ; c) 5]
10. Un negoziante di giocattoli confeziona le biglie in gruppi di 7. Di queste, 7 vengono poi messe in una confezione più grande e questo processo si ripete mettendo sette di queste confezioni in una busta ancora più grande. Non si usano buste se non vengono completamente riempite. Poiché abbiamo un totale di 104 734 biglie, vogliamo sapere: a) quante biglie contiene la più grande busta utilizzata; b) quan-

te sono le buste più grandi usate; c) quante sono le confezioni da 7 che non riescono a mettersi in alcuna busta più grande. [a) 7776; b) 6; c) 0]

Livello 3

11. Simuliamo la crescita di una popolazione nel seguente modo. In un'urna immettiamo 5 palline numerate da 0 a 4. Numeriamo i giorni delle settimane nel modo seguente: 0 = lunedì, 1 = martedì, ..., 6 = domenica. Ogni giorno estraiamo una pallina e moltiplichiamo il numero ottenuto per 5^n, con n giorno della settimana. Ogni giorno sommiamo il valore ottenuto ai precedenti. Se la domenica abbiamo ottenuto 66 035 individui, vogliamo sapere: a) in quanti giorni non abbiamo estratto 0; 5 b) in quali giorni abbiamo estratto 0; c) quante volte abbiamo estratto 4; d) la somma dei punteggi delle 7 palline estratte. [a) 5; b) Lunedì e Venerdì ; c) 1; d) 11]
12. Se pensiamo alla scrittura polinomiale dei numeri naturali in base 10, tali polinomi sono ovviamente sempre ordinati secondo le potenze decrescenti di 10. Quali numeri rappresentano polinomi completi? [Quelli privi di cifre nulle]
13. Sempre nell'ordine di idee dell'esercizio precedente, possono esistere polinomi omogenei? Se la risposta è positiva, cosa hanno di particolare tali numeri e per ciascun grado quanti ne esistono? [Quelli che hanno tutte le cifre nulle tranne una; 9]
14. Dei batteri vengono messi in una coltura batteriologica. Sperimentalmente si stabilisce che essi triplicano di numero ogni giorno. Un dato giorno vengono iniziate dieci colture con lo stesso numero iniziale di 1 259 batteri. Per diversi motivi le colture vengono interrotte (in pratica non generano più batteri) alla fine di diversi giorni, ma in modo che uno stesso giorno non vengano interrotte mai più di due colture. Quando si interrompe l'ultima coltura si contano i batteri di tutte e dieci le prove e si trova che essi ammontano a 58626594. Relativamente alle colture sospese l'ultimo giorno vuol sapersi: a) quante erano; b) quanti batteri contenevano alla fine ciascuna; c) dopo quanti giorni sono state interrotte; d) se vi sono stati dei giorni in cui non sono state interrotte colture. [a) 21; b) 24780897; c) 10;d) 4: primo, secondo, settimo e ottavo

Lavoriamo insieme

Vogliamo verificare che il numero 1331 è un cubo perfetto in qualunque base maggiore di tre. Infatti, scriviamo il numero in una base generica b. $[1331]_b = 1\cdot b^3 + 3\cdot b^2 + 3\cdot b + 1\cdot b^0 = (1 + b)^3$

Livello 3

15. Verificare che il numero 144 è un quadrato perfetto in qualunque base maggiore di quattro. Calcolare il suo valore, espresso in base 10, per le basi da 2 a 9 comprese.
16. Verificare che il numero 14641 è una quarta potenza perfetta in qualunque base maggiore di sei. Calcolare il suo valore, espresso in base 10, per le basi da 2 a 9 comprese.

Giochiamo alla matematica

- Una regola permette di calcolare facilmente a mente il quadrato di numeri di due cifre che finiscono per 5, basta moltiplicare fra di loro la cifra delle decine e il suo successivo, questo fornisce le prime cifre del risultato, le cui ultime cifre sono sempre 25. Per esempio $35^2 = 1225$ ($12 = 3 \cdot 4$), $75^2 = 5625$ ($56 = 7 \cdot 8$). Vogliamo dare una giustificazione alla regola. Un numero generico di questo tipo si indica con $n5$, in cui n è una cifra non nulla. Allora $n5^2 = (10n + 5)^2 = 100n^2 + 100n + 25 = 100n \cdot (n + 1) + 25$, che è appunto quello che abbiamo affermato.
- La seguente regola permette di indovinare un numero di quattro cifre pensato da qualcuno. Essa è dovuta a Gaspard Bachet ed è presente nel suo libro *Problems plaisants et delectables qui se font par le nombres*, pubblicato nel 1612. Colui che ha pensato il numero deve effettuare le seguenti operazioni:
  pensare il numero come formato dalle sue 4 cifre, che per comodità indichiamo con a, b, c e d; raddoppiare a; aggiungere 5; moltiplicare per 5; aggiungere 10; aggiungere b; moltiplicare per 10; aggiungere c; moltiplicare per 10; aggiungere d; comunicare solo quest'ultimo risultato.
  Il "mago" toglierà 3500 e troverà il numero pensato. Vediamo intanto di verificarlo su un numero a caso, per esempio 5572. Di seguito schematizziamo le operazioni effettuate da chi ha pensato il numero:
  $$5 \to 10 \to 15 \to 75 \to 85 \to 90 \to 900 \to 907 \to 9070 \to 9072.$$
  Viene comunicato 9072, sottraiamo a esso 3500 e otteniamo proprio 5572. Vediamo perché la "magia"

funziona. Il numero *abcd* scritto in notazione decimale è $1000a + 100b + 10c + d$. Vediamo che operazioni si effettuano su questo numero generico: $a \to 2a \to 2a + 5 \to 10a + 25 \to 10a + 35 \to 10a + b + 35 \to 100a + 10b + 350 \to 100a + 10b + c + 350 \to 1000a + 100b + 10c + 3500 \to 1000a + 100b + 10c + d + 3500$. Togliendo appunto 3500 troviamo il numero di partenza.

- Un altro trucco, consistente sempre nell'indovinare un numero pensato da altri, utilizza la seguente tabella.

16	**8**	**4**	**2**	**1**
17	**9**	**5**	**3**	**3**
18	**10**	**6**	**6**	**5**
19	**11**	**7**	**7**	**7**
20	**12**	**12**	**10**	**9**
21	**13**	**13**	**11**	**11**
22	**14**	**14**	**14**	**13**
23	**15**	**15**	**15**	**15**
24	**24**	**20**	**18**	**17**
25	**25**	**21**	**19**	**19**
26	**26**	**22**	**22**	**21**
27	**27**	**23**	**23**	**23**
28	**28**	**28**	**26**	**25**
29	**29**	**29**	**27**	**27**
30	**30**	**30**	**30**	**29**
31	**31**	**31**	**31**	**31**

Si inviti una persona a pensare un numero intero compreso tra 1 e 31. Si facciano poi indicare le colonne della tabella in cui è presente il numero, ciò basta a individuarlo. Infatti ciascuna colonna deve interpretarsi come la posizione di un numero nella numerazione binaria, pertanto se il numero pensato fosse 27, esso è presente nella prima, nella seconda, nella quarta e nella quinta colonna e quindi si ha la sequenza: 11011, da cui $[11011]_2 = [27]_{10}$. Se perciò ci viene detto che il numero è presente nella prima, seconda e quarta colonna, la sequenza 01011 ci dice che il numero è $[01011]_2 = 2^3 + 2 + 1 = 11$.

10000	01000	00100	00010	00001
10001	01001	00101	00011	00011
10010	01010	00110	00110	00101
10011	01011	00111	00111	00111
10100	01100	01100	01010	01001
10101	01101	01101	01011	01011
10110	01110	01110	01110	01101
10111	01111	01111	01111	01111
11000	11000	10100	10010	10001
11001	11001	10101	10011	10011
11010	11010	10110	10110	10101
11011	11011	10111	10111	10111
11100	11100	11100	11010	11001
11101	11101	11101	11011	11011
11110	11110	11110	11110	11101
11111	11111	11111	11111	11111

Attività

1. Trovare una regola "magica" simile a quella di Bachet per i numeri di 5 e 6 cifre.
2. Una persona pensa un numero di 4 cifre, *abcd*, e ci comunica il risultato finale delle seguenti operazioni: moltiplica *a* per 5, aggiunge 8, raddoppia, aggiunge *b*, moltiplica per 10, aggiunge 12, aggiunge *c*, raddoppia, aggiunge 6, moltiplica per 5, aggiunge *d*. Quale numero dobbiamo togliere al risultato comunicato per ottenere *abcd*? [1750]
3. Una persona pensa un numero di 4 cifre, *abcd*, e ci comunica il risultato finale delle seguenti operazioni: moltiplica *a* per 5, aggiunge 4, raddoppia, aggiunge *b*, raddoppia, aggiunge 24, moltiplica per 5, aggiunge *c*, raddoppia, toglie 30, moltiplica per 5, aggiunge *d*. Quale numero deve togliersi al risultato comunicato per ottenere *abcd*? [1850]
4. Estendere la tabella presentata ai numeri fino a 63 e poi fino a 127.
5. Costruire una tabella simile a quella dei numeri in base due per i numeri in base 3.

Per la prova Invalsi

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito facente parte della prova Invalsi del 2012.
L'espressione $a^{37} + a^{38}$ *è uguale a* A) $2a^{75}$ B) a^{75} C) $a^{37} \cdot (a + 1)$ D) $a^{37 \cdot 38}$
Osserviamo che abbiamo a che fare con un polinomio che non può diventare un monomio perché i due monomi non sono simili fra loto, pertanto tranne la C) le altre sono certamente sbagliate. Per verificare che effettivamente la C) è la risposta corretta basta eseguire la moltiplicazione in essa contenuta, il cui risultato finale coincide effettivamente con l'espressione iniziale.

Risolvere i seguenti quesiti, alcuni dei quali assegnati nelle prove Invalsi degli anni precedenti

1. (Invalsi 2003) A quale delle seguenti espressioni è equivalente $(x + y)^2 - (x - y)^2$ per ogni valore di x e y? A) $2x^2$ B) $2y^2$ C) $2x^2 + 2y^2$ D) $4xy$ E) $2y^2 + 4xy$ [D]
2. (Invalsi 2005) Quale espressione algebrica corrisponde alla proposizione: "*Moltiplicare il quadrato della differenza di due numeri per la somma dei quadrati dei due numeri*"? [D]
   A) $(x^2 - y^2) \cdot (x + y)^2$ B) $(x - y)^2 \cdot (x + y)^2$ C) $(x^2 - y^2) \cdot (x^2 + y^2)$ D) $(x - y)^2 \cdot (x^2 + y^2)$
3. (Invalsi 2005) Prendiamo un numero intero di due cifre e scambiamo le cifre tra loro. Facendo la somma tra il numero di partenza e quello con le cifre scambiate, quale delle seguenti proposizioni è vera? Il numero che si ottiene è sempre un… [D]
   A) numero minore di 100 B) multiplo di 9 C) numero pari D) multiplo di 11
4. (Invalsi 2007) In un triangolo rettangolo un cateto supera l'altro di 3 *cm*. Indicando con x la misura in centimetri del cateto minore, quale tra le seguenti espressioni rappresenta l'area del triangolo? [C]
   A) $x \cdot (x + 3)$ B) $\frac{x+(x+3)}{2}$ C) $\frac{x \cdot (x+3)}{2}$ D) $x \cdot (x - 3)$
5. (Invalsi 2011) L'espressione $10^{37} + 10^{38}$ è anche uguale a A) 20^{75} B) 10^7 C) $11 \cdot 10^{37}$ D) $10^{37 \cdot 38}$ [C]
6. (Invalsi 2015) L'espressione $a^{43} + a^{44}$ e uguale a A) $a^{44 \cdot 43}$ B) $a^{43} \cdot (a + 1)$ C) a^{87} D) $2a^{87}$ [B]
7. (Invalsi 2017) L'espressione $2n - 1$ rappresenta, al variare di n nell'insieme dei numeri naturali maggiori di 0, un qualunque numero dispari. Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni, in cui n varia nell'insieme dei numeri naturali, è vera (V) o falsa (F). A) Per ogni n, $(2n - 1)^2$ rappresenta un numero pari B) Per ogni n, $3n$ rappresenta un numero dispari C) Per ogni n, $2n + 1$ rappresenta un numero dispari [F; F; V]
8. (Invalsi 2017) L'espressione $\left(a - \frac{1}{a}\right)^2$ si può scrivere come: [C]
   A) $\frac{a^2 - 2a + 1}{a^2}$ B) $a^2 - \left(\frac{1}{a}\right)^2$ C) $a^2 + \frac{1}{a^2} - 2$ D) $\frac{a^4 + 1}{a^2}$
9. Il polinomio $4m + 5n^2$ rappresenta la somma fra A) un numero pari e il quadrato di un multiplo di 5 B) un multiplo di 4 e il quintuplo di un quadrato C) un numero pari e uno dispari D) un quadrato e un non quadrato [B]
10. Quale fra i seguenti polinomi, qualunque siano i numeri interi che sostituiamo alle sue variabili, rappresenta sempre un quadrato perfetto? [C]
    A) $x^2 + y^2$ B) $x^2 + 4y^2 + 4$ C) $4x^2 + 9y^2 + 12xy$ D) $x^2 + 2xy - y^2$
11. Quale fra i seguenti polinomi si può considerare il doppio del polinomio $x + 2y + 1$? [A]
    A) $2x + 4y + 2$ B) $2x + 4y$ C) $2x + 2y + 1$ D) $2x + 2y + 2$
12. Per completare il polinomio ordinato, nella sola variabile x: $x^n + 3x^7 - 2x^4 + x^2 - 2$, servono 23 termini. Se n è il monomio di grado massimo, quanto vale? A) 23 B) 24 C) 26 D) 27 [D]

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi

1. $(a+b)^n + (a-b)^n$ ha 37 termini, quanto vale n? [72]
2. Enunciare una congettura sul risultato della somma di tutti i numeri relativi a una stessa riga del triangolo di Tartaglia. [Sono potenze di 2]
3. Dopo avere sviluppato il triangolo di Tartaglia fino alla decima potenza, colorare tutti i multipli di 2, notando che in tal modo si ottengono delle particolari figure. Ripetere il procedimento per i multipli di 3, 4 e 5.
4. Spiegare perché per passare dalla base 2 alla base 4 può utilizzarsi il seguente procedimento più veloce: s*i raggruppano le cifre del numero a due a due a partire da destra e si sostituisce a ciascuna coppia il corrispondente valore decimale*. Esempio: $[1101101]_2 = [1\ (10)\ (11)\ (01)]_2 = [1231]_4$.
5. Trovare una regola analoga a quella presentata nell'esercizio precedente, per passare dalla base 2 alla base 8.
6. Lo stesso dell'esercizio precedente, per passare dalla base b a una base b^n.
7. Lo stesso dell'esercizio precedente, per passare dalla base 2^n alla base 2.
8. Lo stesso dell'esercizio precedente, per passare dalla base b^n alla base b.
9. Osserviamo che $[213132]_4$ ha 6 cifre, mentre lo stesso numero scritto in base 2 diviene $[100111011110]_2$ che ha 12 cifre. È sempre vero che se N in base 4 ha n cifre, in base 2 ne ha $2n$? Giustificare la risposta. [No, per esempio $[10]_4 = [100]_2$]
10. Se un numero in base 16 ha 5 cifre è sempre vero che scritto in base 10 ha più di 5 cifre? Giustificare la risposta. [No, per esempio $[10000]_{16} = [65536]_{10}$]

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
MT =Mathematics Teacher, rivista della NCTM
GNP = Gara Nazionale Prime, Olimpiadi della Matematica
OMI = Olimpiadi della matematica italiane

Lavoriamo insieme

Il seguente quesito è stato assegnato agli AHSME del 1950.

Quanti termini ha lo sviluppo di $\left[(a+3b)^2 \cdot (a-3b)^2\right]^2$?

Possiamo scrivere $\left[(a+3b)^2 \cdot (a-3b)^2\right]^2 = \left[\left(a^2-9b^2\right)^2\right]^2 = \left(a^2-9b^2\right)^4$. Lo sviluppo della quarta potenza di un binomio è un polinomio con 5 elementi.

1. (AHSME1951) Formiamo numeri di 6 cifre ripetendo numeri di 3 cifre, per esempio 256256 o 678678. Ogni numero di questo tipo è sicuramente divisibile [E]
   A) solo per 7 B) solo per 11 C) solo per 13 D) per 101 E) per 1001
2. (MT1995) 75 in base 10 equivale a 300 in base b. Trovare b. [5]
3. (AHSME 1983) Senza svolgere il prodotto determinare il grado del polinomio semplificazione della seguente espressione: $x^5 \cdot \left(x+\frac{1}{x}\right) \cdot \left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}\right)$. [6]
4. (MT1993) Semplificare $\frac{1234567890}{1234567891^2 - 1234567890 \cdot 1234567892}$. (Sugg. Usare i prodotti notevoli) [1234567890]
5. (GNP2013) Al polinomio $x^8 + x^4$ si vuole aggiungere un monomio (di grado diverso da 4 e da 8) in modo che il trinomio che si ottiene sia il quadrato di un binomio. In quanti modi diversi lo si può fare? [4]
6. (OMI2013) Andrea scrive la somma di due numeri a tre cifre con il relativo risultato. Poi sostituisce a ciascuna cifra una lettera, facendo corrispondere lettera uguale a cifra uguale e usando lettere diverse

per cifre diverse. In questo modo ottiene: TRE + TRE = SEI. Allora: A) la lettera E corrisponde necessariamente a un numero pari B) la lettera S corrisponde necessariamente a un numero pari C) la lettera E corrisponde necessariamente a un numero dispari maggiore di 4 D) la lettera E corrisponde necessariamente a un numero pari minore di 5 E) nessuna delle precedenti affermazioni è vera [E]

7. (OMI2014) Se $x + 1/x = 5$, quanto fa $x^3 + 1/x^3$? A) 105 B) 110 C) 115 D) 120 E) 125 [B]
8. (OMI2014) Qual è il coefficiente di x^{199} in $(x^2 + x + 1)^{100}$? A) 100 B) 298 C) 4950 D) 5050 E) 992 [A]

Questions in English

Working together

The following exercise was published in the issue of May 1995 of Mathematics Teacher.
Which pair of natural numbers have squares that differ by 75?
We call x and y the numbers to find, they satisfy the relation $x^2 - y^2 = 75$, or $(x - y) \cdot (x + y) = 75$. We seek for natural numbers, hence we write 75 as product of two natural numbers. We have only the following possibilities: $1 \cdot 75$, $3 \cdot 25$, $5 \cdot 15$. This means:

- $x - y = 1$ and $x + y = 75$. if we sum term by term we obtain: $2x = 76$ or $x = 38$ and $y = 37$. Verify: $38^2 - 37^2 = 1444 - 1369 = 75$;
- $x - y = 3$ and $x + y = 25 \Rightarrow 2x = 28 \Rightarrow x = 14$ and $y = 11$. Verify: $14^2 - 11^2 = 196 - 121 = 75$;
- $x - y = 5$ and $x + y = 15 \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = 10$ and $y = 5$. Verify: $10^2 - 5^2 = 100 - 25 = 75$.

There are no other solutions.

9. (AHSME1957) The first step in finding the product $(3x+2)\cdot(x-5)$ by use of the distributive property in the form $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ is: A) $3x^2 - 13x - 10$ B) $3x \cdot (x - 5) + 2 \cdot (x - 5)$ C) $(3x + 2) \cdot x + (3x + 2) \cdot (-5)$ D) $3x^2 - 17x - 10$ E) $3x^2 + 2x - 15x - 10$ [C]
10. (AHSME1975) Determine the sum of the digits of the number $(10^{408}+1)^2$. [4]
11. (AHSME1979) For all real numbers x, $x \cdot [x \cdot \{x \cdot (2 - x) - 4\} + 10] + 1 =$ [E]

    A) $-x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 10x + 1$ B) $-x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 10x + 1$ C) $-x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 10x + 1$

    D) $-x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 10x + 1$ E) $-x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 10x + 1$
12. (AHSME1980) Without evolve the powers, tell the polynomial's degree result of the following multiplication: $(x^2+1)^4 \cdot (x^3+1)^3$ [17]
13. (MT1991) $15 \cdot 15 = 321$ is correct if the numbers are expressed in a certain base b, which? [6]
14. (MT1991) The Octal society has asked you to distribute \$1234 in prize money. The dollar amounts of the prizes are \$1, \$8, \$64 and \$512. What is the least number of prizes you can award if you use the total amount? [9]
15. (MT1995) Given that x and y are positive integers for which $x^2 - y^2 = 1995$, determine the maximum value of y. [997]
16. (MT1995) Prove that the sum of 3 consecutive integers is divisible by 3; the sum of 5 such integers is divisible by 5; but the sum of 4 consecutive integers is not divisible by 4.

Attività di recupero

Concetto di polinomio

Fase 1: Osserva

- In una cartoleria dopo le vendite di inizio anno scolastico sono rimaste 14 penne, 23 quaderni, 5 matite, 7 gomme e 3 temperamatite. Il cartolaio ordina quindi altro materiale nelle seguenti quantità: 50 penne, 100 quaderni, 20 matite, 40 gomme e 10 temperamatite. Quale sarà la nuova giacenza della cartoleria? Ciascun oggetto è diverso dagli altri, può quindi considerarsi come un singolo monomio non simile agli altri, può però sommarsi la sua quantità con quella degli oggetti dello stesso tipo ordinati dal cartolaio. Indichiamo allora nel seguente modo la situazione, segnando con l'iniziale ciascun oggetto: $14p + 23q + 5m + 7g + 3t + 50p + 100q + 20m + 40g + 10t = (14 + 50)p + (23 + 100)q + (5 + 20)m + (7 + 40)g + (3 + 10)t = 64p + 123q + 25m + 47g + 13t$.
- Vogliamo semplificare la seguente espressione polinomiale: $\frac{3}{2}a + x - ax + \frac{1}{3}x - \frac{2}{5}a + 2xa - 2a$. Raggruppiamo i coefficienti dei monomi fra loro simili: $\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{5} - 2\right)a + \left(1 + \frac{1}{3}\right)x + (-1 + 2)ax$. Naturalmente i monomi ax e xa sono uguali. Abbiamo quindi: $\frac{15 - 4 - 20}{10}a + \frac{3 + 1}{3}x + ax = -\frac{9}{10}a + \frac{4}{3}x + ax$.

Fase 2: Completa ...

- In un supermercato sono rimasti, fra le altre cose, 12 fustini di detersivo, 15 pacchi di zucchero, 22 chilogrammi di pasta, 3 confezioni di tovaglioli, 7 bottiglie di acqua minerale da due litri. Per reintegrare queste scorte si ordinano altri 40 fustini, 120 pacchi di zucchero, 230 chili di pasta, 75 pacchi di tovaglioli, 150 bottiglie di acqua. Determinare le nuove disponibilità. Indichiamo ciascun prodotto con la propria iniziale, ottenendo così la seguente espressione polinomiale:

  12 d + 15 z + 22p + …….

  Raccogliamo i coefficienti di monomi simili e li sommiamo, ottenendo:

  (12 + 40) d + (15 + …) z + (22 + …) p + …….=

  = …….
- Semplificare la seguente espressione polinomiale: $-\frac{7}{3}ab + 3ba - ab^2 + \frac{2}{5}a^2b - \frac{1}{4}ab^2 + 2ab - \frac{2}{3}a^2b$.

  Riconosciamo …… diversi tipi di monomi simili, quindi raggruppiamo fra loro quelli appartenenti allo stesso tipo, ottenendo: …….. Effettuiamo le somme per ottenere la semplificazione finale …….

Fase 3: Prova!

1. Nella tabella seguente abbiamo segnato le disponibilità, in chilogrammi, di un panificio e le quantità ordinate, determinare le nuove disponibilità dopo l'ordine. [252; 139; 5,5; 2,5; 8,8]

Prodotto	Farina di frumento	Farina di segale	Sale	Lievito	Sesamo
Prima	12	24	2	0,5	2,3
Dopo	240	115	3,5	2	6,5

2. Nella tabella seguente abbiamo segnato la situazione relativa a un mese di un negozio di abbigliamento, aggiornata a ogni settimana dalle vendite e dai conseguenti nuovi ordini. Stabilire il numero totale di vestiti, per tipo, rimasti nel negozio alla fine del mese. [41; 11; 26; 27]

	Gonne	Pantaloni	Magliette	Camicie
Situazione iniziale	24	52	16	48
Ordine 1	52	13	65	21
Vendita 1	45	60	35	46
Ordine 2	30	45	15	48
Vendita 2	25	50	10	12
Ordine 3	20	35	0	0
Vendita 4	15	24	25	32

Semplificare le seguenti espressioni:

3. a) $\frac{3}{2}am-2ma+a-m$; b) $\frac{2}{5}x^2y+xy^2-xyx+3xxy-4xyy$ $\left[\text{a) } -\frac{1}{2}am+a-m;\ \text{b) } \frac{12}{5}x^2y-3xy^2\right]$

4. a) $-\frac{4}{5}ax-\frac{1}{3}a+\frac{3}{4}xa-x+3a-2x+a^2$; b) $\frac{3}{2}mn^2+2mmn-\frac{7}{4}mnm-4nm^2+nnm$

$\left[\text{a) } -\frac{1}{20}ax+\frac{8}{3}a-3x+a^2;\ \text{b) } \frac{5}{2}mn^2-\frac{15}{4}m^2n\right]$

5. $4abx-3ab+ax-\frac{2}{3}bx+\frac{4}{5}xa-\frac{3}{2}xb+\frac{1}{3}ba-bxa+axb-3xab+2xba$ $\left[3abx-\frac{8}{3}ab+\frac{9}{5}ax-\frac{13}{6}bx\right]$

6. $3x^2y-3xy^2+\frac{3}{5}xy+\frac{4}{3}xxy-\frac{1}{3}xyy+\frac{1}{3}yx^2-y^2x+x-y^2$ $\left[\frac{14}{3}x^2y-\frac{13}{3}xy^2+\frac{3}{5}xy+x-y^2\right]$

7. $3aaa-a^3+a^2-\frac{2}{3}a-\frac{3}{5}aa-\frac{4}{7}a+a^2a+aa^2$ $\left[4a^3+\frac{2}{5}a^2-\frac{26}{21}a\right]$

8. $-5abc+2acb-\frac{1}{4}bac+\frac{4}{3}bca-\frac{3}{4}cba+\frac{1}{2}cab$ $\left[-\frac{13}{6}abc\right]$

9. $\frac{1}{5}ab^3+\frac{3}{5}abb-\frac{6}{5}bab^2+\frac{5}{2}b^3a-bab+bba-3bbab+2bbba$ $\left[\frac{1}{2}ab^3+\frac{3}{5}ab^2\right]$

10. $-2a^2b^2-abab+aabb-\frac{5}{3}aba+\frac{2}{9}bab-\frac{1}{2}abba+\frac{4}{3}baba-bab+aba-3abb+2aab$

$\left[-\frac{7}{6}a^2b^2+\frac{1}{3}a^2b-\frac{34}{9}ab^2\right]$

Moltiplicazione nell'insieme dei polinomi

Fase 1: Osserva

- Vogliamo semplificare la seguente espressione: $2ab \cdot (a - b + 1)$. L'unico modo per svolgere la moltiplicazione è di applicare la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma algebrica, ottenendo così: $2ab \cdot a - 2ab \cdot b + 2ab \cdot 1 = 2a^2b - 2ab^2 + 2ab$, dato che non vi sono termini simili non semplifichiamo ulteriormente il polinomio.
- Semplificare $(3x - 2y) \cdot (4x + y)$. Applichiamo più volte la proprietà distributiva, scrivendo:
$3x \cdot (4x + y) - 2y \cdot (4x + y) = 3x \cdot 4x + 3x \cdot y - 2y \cdot 4x - 2y \cdot y = 12x^2 + \underline{3xy} - \underline{8xy} - 2y^2 = 12x^2 - 5xy - 2y^2$
- Semplificare $(4a + b - 1) \cdot (3a - b - 2)$. Distribuiamo il prodotto:
$4a \cdot (3a - b - 2) + b \cdot (3a - b - 2) - 1 \cdot (3a - b - 2) = 12a^2 - \underline{4ab} - 8a + \underline{3ab} - b^2 - 2b - 3a + b + 2 =$
$= 12a^2 - ab - 11a - b^2 - b + 2$
- Vogliamo semplificare la seguente espressione polinomiale:
$(am - 1) \cdot (am + 2) - (a + 1) \cdot (m - 2) - a \cdot (m + 3) + m \cdot (a - 2)$
Per far ciò basta cominciare a eseguire le moltiplicazioni:

$$am\cdot(am+2)-1\cdot(am+2)-a\cdot(m-2)-1\cdot(m-2)-a\cdot(m+3)+m\cdot(a-2)=$$
$$=a^2m^2+2am-am-2-am+2a-m+2-am-3a+am-2m$$

Adesso riduciamo i termini simili:

$$a^2m^2+(2-1-1-1+1)\cdot am+(2-3)\cdot a+(-1-2)\cdot m+2-2=a^2m^2-a-3m$$

- Semplificare: $\left(\frac{1}{2}x-y+1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}x+y-2\right)-\left(\frac{1}{3}x-2y+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x+y-1\right)$.

Eseguiamo le moltiplicazioni:

$$\frac{1}{2}x\cdot\left(\frac{1}{3}x+y-2\right)-y\cdot\left(\frac{1}{3}x+y-2\right)+1\cdot\left(\frac{1}{3}x+y-2\right)-\frac{1}{3}x\cdot\left(\frac{1}{2}x+y-1\right)-$$
$$-(-2y)\cdot\left(\frac{1}{2}x+y-1\right)-1\cdot\left(\frac{1}{2}x+y-1\right)=\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{2}xy-x-\frac{1}{3}xy-y^2+2y+$$
$$+\frac{1}{3}x+y-2-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{3}x+xy+2y^2-2y-\frac{1}{2}x-y+1$$

Raccogliamo e riduciamo i termini simili:

$$\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right)x^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+1\right)xy+\left(-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)x+(-1+2)y^2+(2+1-2-1)y-2+1=$$
$$=\frac{3-2-2+6}{6}xy+\frac{-6+2+2-3}{6}x+y^2-1=\frac{5}{6}xy-\frac{5}{6}x+y^2-1$$

Fase 2: Completa …

- Sviluppiamo la seguente moltiplicazione: $4ab\cdot(x+2y-1)$. Distribuiamo il prodotto rispetto ai singoli addendi del secondo fattore: $4ab\cdot x$ + ...…… Eseguiamo le moltiplicazioni: $4abx$ + …… Dato che ……. possiamo dire che questa espressione è lo sviluppo della moltiplicazione iniziale.
- Semplificare la seguente espressione: $(3x^2-1)\cdot(4x^2+2)$. Distribuiamo i due addendi del primo fattore rispetto al secondo fattore: $3x^2\cdot(4x^2+2)$……. Effettuiamo le moltiplicazioni: $12x^4+6x^2$ ……. Riduciamo i termini simili: …… ecco la semplificazione finale ……
- Semplificare $(a^2-a+3)\cdot(a^2+3a+1)$. Distribuiamo gli addendi del primo fattore rispetto al secondo fattore: $a^2\cdot(a^2+3a+1)$ ……. Eseguiamo le moltiplicazioni: a^4+3a^3+ ……. Riduciamo i termini simili: …… ……
- Vogliamo semplificare la seguente espressione polinomiale:

$$(2x-x^2+1)\cdot(x^2-3x+2)-(x^3+x^2-3x+1)$$

Eseguiamo le moltiplicazioni: $2x\cdot(x^2-3x+2)-x^2\cdot(x^2-3x+2)+$ ……..=

= $2x^3-6x^2+4x-x^4$ …….. Adesso raccogliamo e riduciamo i termini simili:

$(-1.....)x^4+(2.....)\cdot x^3+(.....)\cdot x^2+(.....)\cdot x+.....=$

= ……

- Semplificare: $\left(\frac{1}{4}a-b\right)\cdot\left(\frac{1}{2}a+b-1\right)+\left(\frac{1}{2}a-2b+1\right)\cdot\left(\frac{1}{4}b+3a-1\right)-\frac{2}{3}a+\frac{1}{6}b$.

Effettuiamo le moltiplicazioni:

$\frac{1}{4}a\cdot\left(\frac{1}{2}a+b-1\right)-b\cdot$.....=....

……

Adesso raccogliamo …….., ottenendo: ……

da cui, svolgendo i calcoli, si ha: …….....

Fase 3: Prova!

Semplificare le seguenti moltiplicazioni

1. a) $3x\cdot(a+b-2)$; b) $5a^2\cdot(a-x+3)$; c) $-7xy\cdot\left(x-y+x^2\right)$.

$\left[\text{a) } 3ax+3ab-6a;\ \text{b) } 5a^3-5a^2x+15a^2;\ \text{c) } -7x^3y-7x^2y+7xy^2\right]$

2. a) $2ax^2\cdot(3a+x-4)$; b) $\frac{1}{2}ax^3y\cdot(2a-4x+6y)$; c) $-4p^3\cdot\left(\frac{1}{2}p-\frac{2}{3}m^2-1\right)$

$\left[\text{a) } 6a^2x^2+2ax^3-8ax^2;\ \text{b) } a^2x^3y-2ax^4y+3ax^3y^2;\ \text{c) } \frac{8}{3}m^2p^3-2p^4+4p^3\right]$

3. a) $abc\cdot(ab+bc-ac)$; b) $ab\cdot(a+b-c+d)$; c) $3\cdot(x^2-y^2)$

$\left[\text{a) } a^2b^2c-a^2bc^2+ab^2c^2;\ \text{b) } a^2b+ab^2-abc+abd;\ \text{c) } 3x^2-3y^2\right]$

4. a) $\frac{1}{2}m^2pq^2\cdot(2m-4p+6q-8)$; b) $-\frac{3}{4}m^3p\cdot(m^2-3p+1)$; c) $\frac{1}{5}x^5\cdot(x^4-x^3+5x)$

$\left[\text{a) } m^2pq^2-2m^2p^2q^2+3m^2pq^3-4m^2pq^2;\ \text{b) } -\frac{3}{4}m^5p+\frac{9}{4}m^3p^2-\frac{3}{4}m^3p;\ \text{c) } \frac{1}{5}x^9-\frac{1}{5}x^8+x^6\right]$

5. a) $(a+3b^2)\cdot(a^2-3b)$; b) $(3x+y)\cdot(-x+y)$; c) $(2m^2-n)\cdot(m-n^2)$

$\left[\text{a) } a^3+3a^2b^2-3ab-9b^3;\ \text{b) } -3x^2+2xy+y^2;\ \text{c) } 2m^3-2m^2n^2-mn+n^3\right]$

6. a) $(4a^2-b^2)\cdot(4a^2-b^2)$; b) $(5x^3+1)\cdot(-1+5x^3)$; c) $(4a^4-b^3)\cdot(a^3-4b^4)$

$\left[\text{a) } 16a^4-8a^2b^2+b^4;\ \text{b) } 25x^6-1;\ \text{c) } 4a^7-16a^4b^4-a^3b^3+4b^7\right]$

7. a) $(2a+3b-4)\cdot(a-b)$; b) $(x+3y-1)\cdot(x+3y+1)$; c) $(m^2-2n+p)\cdot(m^2-2n-p)$

$\left[\text{a) } 2a^2+ab-4a-3b^2+4b;\ \text{b) } x^2+6xy+9y^2-1;\ \text{c) } m^4-4m^2n+4n^2-p^2\right]$

8. a) $(ab+1)\cdot(3a-2b+a^2b)$; b) $(m+2n)\cdot(m^2-2mn+n^2)$; c) $(p+2t)\cdot(p^2-2pt+t^2)$

$\left[\text{a) } a^3b^2+4a^2b-2ab^2+3a-2b;\ \text{b) } m^3-3mn^2+2n^3;\ \text{c) } p^3-3pt^2+2t^3\right]$

9. a) $(3z-z^2)\cdot(z^2-2z+1)$; b) $(z+2)\cdot(z-2)$; c) $(z^2-1)\cdot(z-z^2)$

$\left[\text{a) } -z^4+5z^3-7z^2+3z;\ \text{b) } z^2-4;\ \text{c) } -z^4+z^3+z^2-z\right]$

10. a) $\left(\frac{1}{2}a-1\right)\cdot(2a-4b+6)$; b) $\left(\frac{2}{3}x-1\right)\cdot\left(\frac{4}{3}x^2+\frac{2}{3}x+1\right)$; c) $(p^2-1)\cdot(p^3+p^2+1)$

$\left[\text{a) } a^2-2ab+a+4b-6;\ \text{b) } \frac{8}{9}x^3-\frac{8}{9}x^2-1;\ \text{c) } p^5+p^4-p^3-1\right]$

11. a) $\left(\frac{3}{5}ax+\frac{2}{3}ay\right)\cdot(3a-x+2y-1)$; b) $(x+y-1)\cdot(2-x+y)$

$\left[\text{a) } \frac{9}{5}a^2x+2a^2y-\frac{3}{5}ax^2+\frac{8}{15}axy-\frac{3}{5}ax+\frac{4}{3}ay^2-\frac{2}{3}ay;\ \text{b) } -x^2+3x+y^2+y-2\right]$

12. a) $\left(3abc+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(a+\frac{3}{2}b-c\right)$; b) $(a-2x+3y-z)\cdot(a+x-y)$

$\left[\text{a) } 3a^2bc+\frac{9}{2}ab^2c-3abc^2+\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{3}c;\ \text{b) } a^2-ax+2ay-az-2x^2+5xy-xz-3y^2+yz\right]$

13. a) $(a+b+c)\cdot(a-b+2c)$; b) $\left(a^2+a+1\right)\cdot\left(a^2-a+2\right)$

$\left[\text{a) } a^2+3ac-b^2+bc+2c^2;\ \text{b) } a^4+2a^2+a+2\right]$

14. a) $\left(\frac{4}{5}a^2+a-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}a-2\right)$; b) $\left(x^3+x-1\right)\cdot\left(x^3-x^2+x-1\right)$

$\left[\text{a) } \frac{2}{5}a^3-\frac{11}{10}a^2-\frac{5}{2}a+2;\ \text{b) } x^6-x^5+2x^4-3x^3+2x^2-2x+1\right]$

15. a) $\left(-\frac{2}{3}c^3+c^2-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(c^2-\frac{1}{2}\right)$; b) $\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{4}{3}x-\frac{5}{4}\right)$

$\left[\text{a) } -\frac{2}{3}c^5+c^4+\frac{1}{3}c^3-\frac{5}{6}c^2+\frac{1}{6};\ \text{b) } \frac{3}{8}x^4-\frac{7}{6}x^3+\frac{25}{18}x^2-\frac{7}{6}x-\frac{15}{8}\right]$

16. $\left(a^2-ab+1\right)\cdot\left(2ab-a^2-1\right)+a^4-a^3b+a^2$ $\left[2a^3b-2a^2b^2-a^2+3ab-1\right]$

17. $\left(3m^2+m-1\right)\cdot\left(m^3-m^2+1\right)-\left(m^4-3m^2+3\right)\cdot(m-2)-m^5+4m^2-1$ $\left[m^5+m^3+2m^2-2m+4\right]$

18. $\left(y^2-xy+1\right)\cdot\left(xy-3x^2+3\right)-\left(x^2+y^2-1\right)\cdot(3xy-2)$ $\left[-4x^2y^2-x^2-2xy^3+xy+5y^2+1\right]$

19. $\left(a^3+b^2+c-1\right)\cdot\left(a^3-b^2+c-2\right)-\left(a^3+b^2-c+2\right)\cdot\left(a^3-b^2+c-3\right)$

$\left[2a^3c-2a^3-2b^2c+4b^2+2c^2-8c+8\right]$

20. $(2a-3y-2)\cdot(4a-y+3)-(a-y-1)\cdot(a+y+1)-7a\cdot(a-2y)+5\cdot(y+1)$ $\left[4y^2-2a\right]$

21. $\left(\frac{1}{2}a-x+1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}a+1\right)-\left(\frac{1}{3}x-a+2\right)\cdot\left(\frac{1}{6}x-3\right)+\frac{1}{6}x\cdot\left(\frac{1}{3}x+a+2\right)$ $\left[\frac{1}{6}a^2-\frac{13}{6}a+7\right]$

22. $\left(\frac{2}{3}a^2-\frac{1}{2}a+1\right)\cdot\left(\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}a^2-1\right)+\left(\frac{1}{6}a^2-1\right)\cdot\left(\frac{3}{2}a-2\right)+\frac{1}{3}a^2\cdot\left(a^2-\frac{17}{6}a+\frac{11}{2}\right)$ $\left[1-\frac{a}{3}\right]$

23. $\left(\frac{1}{4}ax-\frac{2}{5}ay+1\right)\cdot(a-x+1)-(ax-ay+2)\cdot\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}x\right)-\frac{1}{3}ax\cdot\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}y-\frac{3}{4}a+\frac{3}{4}\right)$ $\left[\frac{1}{10}a^2y-\frac{2}{5}ay-\frac{1}{3}x+1\right]$

24. $\left(2m+n-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(m-n+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{3}m+\frac{2}{3}n-1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}n-\frac{2}{3}m-1\right)-\frac{1}{9}m\cdot\left(20m-\frac{13}{2}n-\frac{3}{2}\right)\left[-\frac{4}{3}n^2+\frac{7}{4}n-\frac{13}{12}\right]$

25. $(mn+m-1)\cdot(mn+m-1)-(mn+m-1)\cdot(mn-m+1)+(mn-m+1)\cdot(mn+m+1)-m^2\cdot(n+1)\cdot(n+1)+m\cdot(n+3)$

$[mn-m+3]$

26. $(a+2b-3c+d)\cdot(a-2b+3c+d)-(a-2b-3c+d)\cdot(a+2b+3c+d)$ $[24bc]$

27. $(x+y-1)\cdot(x+y-1)-(x+y)\cdot(x-y)-x\cdot(x-y)+y\cdot(x+y)$ $\left[-x^2+4xy-2x+3y^2-2y+1\right]$

28. $\left(\frac{1}{2}a^2-\frac{2}{3}a+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{3}a+\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}a^2-\frac{2}{3}a-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{3}a-\frac{3}{4}\right)$ $\left[\frac{3}{2}a^2\right]$

29. $\frac{x+2y-1}{3}\cdot\frac{2x-y+1}{2}+\frac{3x-y-4}{6}\cdot(x-y-1)+\frac{4-x}{3}\cdot(1-y)-x\cdot\frac{5x+y}{6}$ $\left[-\frac{5}{3}x-\frac{1}{6}y^2+\frac{11}{6}\right]$

30. $(m^3-m^2+1)\cdot(m^2-1)+(m^2-m+2)\cdot(m^3-1)-(1+2m)\cdot(m^4+m^3+m^2)$ $\left[-5m^4-2m^3+m-3\right]$

Prodotti notevoli

Fase 1: Osserva

L'importanza dei prodotti notevoli sta nel fatto che applicandoli si riduce notevolmente il numero di operazioni da effettuare, riducendo contemporaneamente la probabilità di effettuare errori di calcolo.

- Supponiamo di voler sviluppare la seguente moltiplicazione: $\left(3x^2y+1\right)\cdot\left(3x^2y-1\right)$. Se applichiamo la proprietà distributiva, come abbiamo visto nelle attività precedenti, scriviamo:
$$3x^2y\cdot\left(3x^2y-1\right)+1\cdot\left(3x^2y-1\right)=9x^4y^2-\underline{3x^2y}+\underline{3x^2y}-1=9x^4y^2-1$$
Abbiamo così svolto quattro moltiplicazione e una semplificazione di termini opposti. Applicando invece l'apposita regola, che oltretutto notiamo, dato che l'aver ottenuto due monomi opposti non è un caso ma è tipico di tutti i prodotti di questo genere. Potevamo quindi scrivere molto più semplicemente: $\left(3x^2y+1\right)\cdot\left(3x^2y-1\right)=\left(3x^2y\right)^2-1^2=9x^4y^2-1$, ottenendo lo stesso risultato ma con sole due moltiplicazioni.
- Sviluppare $\left(\frac{3}{4}ax-\frac{2}{7}by\right)\cdot\left(\frac{3}{4}ax+\frac{2}{7}by\right)$. Dato che i due fattori verificano la proprietà fondamentale del prodotto notevole somma per la differenza della basi possiamo applicare la regola:
$$\left(\frac{3}{4}ax-\frac{2}{7}by\right)\cdot\left(\frac{3}{4}ax+\frac{2}{7}by\right)=\left(\frac{3}{4}ax\right)^2-\left(\frac{2}{7}by\right)^2=\frac{9}{16}a^2x^2-\frac{4}{49}b^2y^2$$

Naturalmente dobbiamo stare attenti che entrambi i fattori in considerazione verifichino effettivamente la proprietà del prodotto notevole in questione. Così per esempio non possiamo applicare la regola ai seguenti prodotti.

- $(2ax - y) \cdot (ax + y)$. Perché i due monomi componenti ciascun binomio non sono uguali o opposti, $2ax$ e ax sono simili ma non uguali.
- $\left(3m^2+n\right)\cdot\left(3m^2+n\right)$. Perché non abbiamo il prodotto di una somma per una differenza, ma il prodotto di due somme.
- $\left(4x^2z+7q\right)\cdot\left(4xz^2-7q\right)$. Ancora una volta i monomi componenti non sono uguali o opposti a coppie, i monomi $4x^2z$ e $4xz^2$ non sono neppure simili.

In tutti i casi precedenti dobbiamo effettuare la moltiplicazione applicando la proprietà distributiva.

- Vogliamo sviluppare la seguente moltiplicazione $(3ac + 5) \cdot (3ac + 5)$. Non abbiamo a che fare con un prodotto notevole del tipo somma per la differenza, però ci rendiamo conto che abbiamo a che fare con il prodotto di due polinomi uguali, quindi con un quadrato di binomio, cioè con $\left(3ac+5\right)^2$. La regola da applicare a questo tipo di prodotti richiede il calcolo di tre quantità: i quadrati dei singoli monomi e il loro doppio prodotto. Scriviamo perciò: $\left(3ac+5\right)^2=\left(3ac\right)^2+2\cdot\left(3ac\right)\cdot5+\left(5\right)^2$. Sviluppiamo i calcoli: $\left(3ac+5\right)^2=9a^2c^2+30ac+25$.
- Sviluppare il quadrato di binomio: $\left(\frac{2}{3}m^2x-y\right)^2$. Applichiamo la regola precedentemente ricordata:
$$\left(\frac{2}{3}m^2x-y\right)^2=\left(\frac{2}{3}m^2x\right)^2+\left(-y\right)^2+2\cdot\left(\frac{2}{3}m^2x\right)\cdot\left(-y\right)=\frac{4}{9}m^4x^2+y^2-\frac{4}{3}m^2xy$$
Osserviamo che abbiamo tenuto debito conto dei segni di ciascun monomio, quindi anche del segno meno. Naturalmente il quadrato di un monomio è in ogni caso positivo, quindi la presenza del segno meno si ripercuote solo nel doppio prodotto, che assume il segno negativo.

Fase 2: Completa …

- Sviluppare il prodotto $\left(4x^3-2y^4\right)^2$. Ci accorgiamo che abbiamo a che fare con il prodotto notevole che si chiama …… applichiamo quindi l'opportuna regola, che consiste nel calcolare prima il ……di ciascun monomio e poi il loro ……. Ossia, nel nostro caso: $\left(4x^3-2y^4\right)^2=\left(4x^3\right)^2+2\cdot\left(4x^3\right)\cdot(.....)+(.....)^2=$ ……

- Sviluppare $\left(-\frac{3}{5}a-\frac{5}{3}b\right)^2$. Abbiamo a che fare ancora una volta con un …… Applichiamo la regola: $\left(-\frac{3}{5}a\right)^2+.....+2\cdot.....$ otteniamo così il risultato voluto: …….

- Semplificare la seguente espressione nel modo più rapido:

$$(4a-b)\cdot(4a+b)-(4a+b)^2+(4a-3b)\cdot(a+b)$$

l'invito a usare il modo più rapido equivale a svolgere il minor numero possibile di operazioni, cioè a utilizzare le regole sui prodotti notevoli, naturalmente se ve ne sono nella nostra espressione. In effetti riconosciamo che il primo prodotto è un prodotto del tipo somma per differenza, mentre a seguire abbiamo un quadrato di binomio. Applichiamo quindi le opportune regole ai primi due prodotti e svolgiamo normalmente l'ultima moltiplicazione:

$$\begin{aligned}&(4a)^2-b^2-\left[(4a)^2+2\cdot4a\cdot b+b^2\right]^2+4a^2+\underline{4ab}-\underline{3ab}-3b^2=\\&=16a^2-b^2-\left(16a^2+8ab+b^2\right)+4a^2+ab-3b^2=\\&=\underline{16a^2}-b^2-\underline{16a^2}-8ab-b^2+\underline{4a^2}+ab-3b^2\end{aligned}$$

Passiamo adesso al raccoglimento dei termini simili: $(-8+1)\cdot ab+4a^2-3b^2=-7ab+4a^2-3b^2$. Questa è la semplificazione finale.

- Semplificare $\left(\frac{1}{2}x-1\right)\cdot\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1\right)-\left(\frac{1}{2}x+1\right)\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+1\right)+\left(\frac{1}{2}x-3\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x+3\right)$. Fra i prodotti notevoli evidenziati nelle precedenti attività riconosciamo il terzo come un prodotto somma per differenza, ma anche i primi due sono prodotti notevoli.

$$=\left(\frac{1}{2}x\right)^3-1-\left[\left(\frac{1}{2}x\right)^3+1\right]+\left(\frac{1}{2}x\right)^2-9=\underline{\frac{1}{8}}x^3-1-\underline{\frac{1}{8}}x^3-1+\frac{1}{4}x^2-9=\frac{1}{4}x^2-11$$

I primi due prodotti rispondono alle seguenti regole:

$$(\mathrm{A}-\mathrm{B})\cdot\left(\mathrm{A}^2+\mathrm{AB}+\mathrm{B}^2\right)=\left(\mathrm{A}^3-\mathrm{B}^3\right);(\mathrm{A}+\mathrm{B})\cdot\left(\mathrm{A}^2-\mathrm{AB}+\mathrm{B}^2\right)=\left(\mathrm{A}^3+\mathrm{B}^3\right)$$

- Semplificare $\begin{aligned}&(3ax+y)\cdot\left(9a^2x^2+6axy+y^2\right)-(3ax-y)\cdot\left(9a^2x^2+6axy+y^2\right)+\\&+(3ax-y)\cdot\left(9a^2x^2-6axy+y^2\right)+(3ax+y)\cdot\left(9a^2x^2-6axy+y^2\right)\end{aligned}$

Apparentemente abbiamo a che fare solo con prodotti notevoli tutti di uno dei due tipi appena evidenziati. In effetti un po' di attenzione ci mostra che così non è. Solo il secondo e il quarto rientrano in essi, gli altri dovranno svolgersi nel modo consueto.

$$\begin{aligned}&\underline{27a^3x^3}+18a^2x^2y+3axy^2+9a^2x^2y+6axy^2+y^3-\left(\underline{27a^3x^3}-y^3\right)+\\&+\underline{27a^3x^3}-18a^2x^2y+3axy^2-9a^2x^2y+6axy^2-y^3+\underline{27a^3x^3}+y^3=\\&=(27-27+27+27)\cdot a^3x^3+(18+9-18-9)\cdot a^2x^2y+(3+6+3+6)\cdot axy^2+(1+1+1-1)\cdot y^3=\\&=54a^3x^318axy^2+3y^3\end{aligned}$$

- Semplificare effettuando il minor numero possibile di operazioni: $[(2x + 3y) + z] \cdot [(2x + 3y) – z]$

Proprio il modo in cui sono messe le parentesi ci suggerisce di riscrivere l'espressione nel seguente modo: $(2x+3y)^2-z^2$, considerandola quindi come un prodotto notevole del tipo …….. adesso osserviamo che il primo prodotto è un prodotto notevole del tipo ……., quindi sviluppiamo: $(2x^2)$+.....$-z^2$ = …… osserviamo che abbiamo ottenuto la semplificazione finale avendo effettuato soltanto ….. moltiplicazioni.

- Semplificare: $\left(\frac{1}{3}z^2-1\right)\cdot\left(\frac{1}{9}z^4+\frac{1}{3}z^2+1\right)-\left(\frac{1}{3}z^2+1\right)\cdot\left(\frac{1}{9}z^4-\frac{1}{3}z^2+1\right)$. Riconosciamo ancora due prodotti notevoli, il primo dei quali fornisce una ……., mentre l'altro dà luogo a ..... Sviluppiamo: $\left(\frac{1}{3}z^2\right)^3$ .....$-\left[\left(\frac{1}{3}z^2\right)^3\text{.....}\right]$= ……
- Sviluppare la moltiplicazione (5*abc* + 4*bcd*) · (5*abc* – 4*bcd*). Osserviamo che siamo nell'ipotesi del prodotto notevole noto sotto il nome di ……, possiamo perciò applicare la regola adatta, scrivendo cioè: $(5abc+4bcd)\cdot(5abc-4bcd)=(5abc)^2-(4bcd)^2$ = …….
- Sviluppare il prodotto $\left(\frac{1}{2}mp^2-\frac{4}{3}m^2p\right)\cdot\left(\frac{1}{2}mp^2+\frac{4}{3}m^2p\right)$. Anche stavolta abbiamo a che fare con un prodotto notevole del tipo …… Applichiamo quindi la regola adatta: $\left(\frac{1}{2}mp^2-\frac{4}{3}m^2p\right)\cdot\left(\frac{1}{2}mp^2+\frac{4}{3}m^2p\right)$ = …….
- Consideriamo i seguenti prodotti, possiamo applicare a essi il prodotto notevole somma per la differenza delle basi? Vediamo
  (*abx* – *aby*) · (*ab*+ *aby*). Non possiamo perché …….
  (2*pr* + 5*qs*) · (5*qs*+ 2*pr*). …….
  $(7ab^3+a^2)\cdot(a^2-7ab^3)$. Stavolta invece …….

Fase 3: Prova!

***Sviluppare le seguenti moltiplicazioni fra binomi, applicando opportunamente, laddove possibile, la regola* (A + B) · (A – B) = A² – B².**

1. a) (2*x* + 5*y*) · (2*x* – 5*y*); b) (3*x* – 4*y*) · (4*x* + 3*y*); c) (*a* – 4*m*) · (*a* + 4)
   $\left[\text{a) } 4x^2-25;\ \text{b) } 12x^2-7xy-12y^2;\ \text{c) } a^2-4am+4a-16m\right]$
2. a) (2*ab* + 3*bc*) · (3*bc* – 2*ab*) ; b) (*px* + 3) · (3 – *px*); c) (1 – 7*x*) · (7*x* – 1)
   $\left[\text{a) } 9b^2c^2-4a^2b^2;\ \text{b) } 9-p^2x^2;\ \text{c) } -49x^2+14x-1\right]$
3. a) $(a^2x+b^2y)\cdot(ax^2-b^2y)$; b) $(3ax+z)\cdot(3az-x)$; c) $(a^3-2a)\cdot(a^2-3a)$
   $\left[\text{a) } a^3x^3-a^2b^2xy+ab^2x^2y-b^4y^2;\ \text{b) } 9a^2xz-3ax^2+3az^2-xz;\ \text{c) } a^5-3a^4-2a^3+6a^2\right]$
4. a) $(3amn+1)\cdot(3amn-2)$; b) $\left(\frac{1}{2}a+1\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2}a\right)$; c) $(4p^4-3w)\cdot(4p^3+3w)$
   $\left[\text{a) } 9a^2m^2n^2-3amn-2;\ \text{b) } 1-\frac{1}{4}a^2;\ \text{c) } 16p^7+12p^4w-12p^3w-9w^2\right]$
5. a) $(12t^3-13s^2)\cdot(12t^3+13s^2)$; b) $(-5ab-4)\cdot(5ab-4)$; c) $\left(\frac{3}{5}h^{2^3}-1\right)\cdot\left(\frac{3}{5}h^{3^2}+1\right)$
   $\left[\text{a) } 144t^6-169s^4;\ \text{b) } 16-25a^2b^2;\ \text{c) } \frac{9}{25}h^{17}-\frac{3}{5}h^9+\frac{3}{5}h^8-1\right]$

6. a) $\left(\frac{1}{2}ax+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}ax-1\right)$; b) $\left(4abm+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-4abm\right)$; c) $\left(x^n-1\right)\cdot\left(x^n+1\right)$

$\left[\text{a) } \frac{1}{4}a^2x^2-1;\ \text{b) } \frac{1}{9}-16a^2b^2m^2;\ \text{c) } x^{2n}-1\right]$

7. a) $\left(2^3x^2+3^2y^3\right)\cdot\left(2^3x^2-3^2y^3\right)$; b) $\left(\frac{3}{2}x^4-\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}x^4-\frac{4}{3}\right)$; c) $\left(x^{n-1}-x^{n+1}\right)\cdot\left(x^{n+1}+x^{n-1}\right)$

$\left[\text{a) } 64x^4-81y^6;\ \text{b) } x^8-\frac{26}{9}x^4+\frac{16}{9};\ \text{c) } x^{2n-2}-x^{2n+2}\right]$

Applicando, laddove possibile, una delle due seguenti regole mnemoniche, sviluppare i seguenti prodotti

$$\mathbf{(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \vee (A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2}$$

8. a) $(4+3am)\cdot(4+3am)$; b) $(ax+by)\cdot(ay+bx)$; c) $\left(-2t^3+1\right)\cdot\left(1-2t^3\right)$

$\left[\text{a) } 9a^2m^2+24am+16;\ \text{b) } a^2xy+abx^2+aby^2+b^2xy;\ \text{c) } 4t^6-4t^3+1\right]$

9. a) $(-5mn-4)\cdot(5mn+4)$; b) $(6abc+3bcd)\cdot(3abc+6bcd)$; c) $(am-n)\cdot(an+m)$

$\left[\text{a) } -25m^2m^2-40mn-16;\ \text{b) } 18a^2b^2c^2+45ab^2c^2d+18b^2c^2d^2;\ \text{c) } a^2mn+am^2-an^2-mn\right]$

10. a) $\left(\frac{2}{3}v^3-\frac{5}{4}x\right)^2$; b) $\left(4a^2m+\frac{4}{7}\right)^2$; c) $\left(13p^3q^2-12\right)^2$

$\left[\text{a) } \frac{4}{9}v^6-\frac{5}{3}v^3x+\frac{25}{16}x^2;\ \text{b) } 16a^4m^2+\frac{32}{7}a^2m+\frac{16}{49};\ \text{c) } 169p^6q^4-312p^3q^2+144\right]$

11. a) $\left(\frac{1}{4}x^2+4x\right)^2$; b) $\left(3x^2-2\right)^2$; c) $\left(-a-7b^3\right)^2$

$\left[\text{a) } \frac{1}{16}x^6+2x^4+16x^2;\ \text{b) } 9x^4-12x^2+4;\ \text{c) } a^2+14ab^3+49b^6\right]$

12. a) $\left(-\frac{4}{5}ap^2+\frac{7}{2}xy\right)^2$; b) $\left(a^2-a\right)^2$; c) $\left(a^n-1\right)^2$

$\left[\text{a) } \frac{16}{25}a^2p^4-\frac{28}{5}ap^2xy+\frac{49}{4}x^2y^2;\ \text{b) } a^4-2a^3+a^2;\ \text{c) } a^{2n}-2a^n+1\right]$

13. a) $\left[(x+2)\cdot(x-2)\right]^2$; b) $\left[(a+b)\cdot(a-b)\right]^2$; c) $\left[\left(2+x^3\right)\cdot\left(x^3-2\right)\right]^2$

$\left[\text{a) } x^4-8x^2+16;\ \text{b) } a^4-2a^2b^2+b^4;\ \text{c) } x^{12}-8x^6+16\right]$

14. a) $\left(a^2-3\right)^2\cdot\left(a^2+3\right)^2$; b) $\left(x^3-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(x^3+\frac{1}{3}\right)^2$; c) $\left(p-q^2\right)\cdot\left(p+q^2\right)^2$

$\left[\text{a) } a^8-18a^4+81;\ \text{b) } x^{12}-\frac{1}{3}x^9+\frac{1}{18}x^3+\frac{1}{36};\ \text{c) } p^4-2p^2q^4+q^8\right]$

Riconoscere quali fra i seguenti prodotti possono risolversi mediante una delle due formule seguenti, quindi semplificare in ogni caso le espressioni

$$(A-B)\cdot\left(A^2+AB+B^2\right)=\left(A^3-B^3\right);(A+B)\cdot\left(A^2-AB+B^2\right)=\left(A^3+B^3\right)$$

15. a) $(4ax+1)\cdot\left(16a^2x^2+4ax+1\right)$; b) $(7m+n)\cdot\left(49m^2-7mn+n^2\right)$

$\left[\text{a) } 64a^3x^3+32a^2x^2+8ax+1;\ \text{b) } 343m^3+n^3\right]$

16. a) $\left(3b^2-4\right)\cdot\left(9b^4+12b^2+16\right)$; b) $\left(2pq+3\right)\cdot\left(2p^2q^2-6pq+9\right)$

$\left[\text{a) } 27b^6-64;\ \text{b) } 4p^3q^3-6p^2q^2+27\right]$

17. a) $\left(4t^2-3z\right)\cdot\left(4t^4+12t^2z+9z^2\right)$; b) $\left(-5+y^3\right)\cdot\left(y^6+5y^3+25\right)$ $\left[\text{a) } 16t^6+36t^4z-27z^3;\ \text{b) } y^9-125\right]$

18. a) $(xy+xz)\cdot(x^2y^2-2x^2yz+x^2z^2)$; b) $\left(\frac{2}{3}ab-ac\right)\cdot\left(\frac{4}{9}a^2b^2+\frac{2}{3}abc+a^2c^2\right)$

$\left[\text{a) } x^3y^3-x^3y^2z-x^3yz^2+x^3z^3;\ \text{b) } \frac{8}{27}a^3b^3-\frac{4}{9}a^3b^2c+\frac{2}{3}a^3bc^2-a^3c^3+\frac{4}{9}a^2b^2c-\frac{2}{3}a^2bc^2\right]$

19. a) $\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{2}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{3}-\frac{xy}{6}+\frac{y^2}{4}\right)$; b) $(a^2b^2c^2-abc-4)\cdot(abc+2)$

$\left[\text{a) } \frac{1}{9}x^3+\frac{1}{9}x^2y+\frac{1}{8}y^3;\ \text{b) } a^3b^3c^3+a^2b^2c^2-6abc-8\right]$

20. a) $\left(\frac{2}{3}+t^2z\right)\cdot\left(\frac{4}{6}-\frac{2}{3}t^2z+t^4z^2\right)$; b) $(a^n-1)\cdot(a^{2n}+a^n+1)$ $\left[\text{a) } t^6z^3+\frac{2}{9}t^2z+\frac{4}{9};\ \text{b) } a^{3n}-1\right]$

21. a) $(3x^2-1)\cdot(9x^4+3x^2-1)$; b) $(2+a^6)\cdot(a^{12}-2a^6+4)$ $\left[\text{a) } 27x^6-6x^2+1;\ \text{b) } a^{18}+8\right]$

22. a) $(a^2+5)\cdot(a^4+5a^2-5)$; b) $\left(\frac{3}{4}m^4-\frac{2}{3}n^2\right)\cdot\left(\frac{16}{9}m^4+\frac{1}{2}m^4n^2+\frac{4}{9}n^4\right)$

$\left[\text{a) } a^6+10a^4+20a^2-25;\ \text{b) } \frac{3}{8}m^8n^2+\frac{4}{3}m^8-\frac{32}{27}m^4n^2-\frac{8}{27}n^6\right]$

23. a) $(x^{2n}+1)\cdot(x^{4n}-2x^{2n}+2)$; b) $(x^n-y^n)\cdot(x^{n^2}+x^n\cdot y^n+y^{n^2})$

$\left[\text{a) } x^{6n}-x^{4n}+2;\ \text{b) } x^{n\cdot(n+1)}-x^{n^2}y^n+x^{2n}y^n+x^ny^{n^2}-x^ny^{2n}-y^{n\cdot(n+1)}\right]$

24. a) $(1+2)\cdot(1-2+4)$; b) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{9}\right)$ $\left[\text{a) } 9;\ \text{b) } \frac{11}{216}\right]$

Potenze di binomi e triangolo di Tartaglia

Fase 1: Osserva

- Vogliamo sviluppare la seguente espressione: $(x+2y)^3$, possiamo effettuare diverse operazioni. O scomponiamo il cubo nel seguente prodotto: $(x+2y)^2\cdot(x+2y)$. quindi sviluppiamo il primo quadrato con la regola vista nelle attività precedenti: $(x^2+4xy+4y^2)\cdot(x+2y)$. Quindi effettuiamo la moltiplicazione: $x^3+\underset{\times}{2x^2y}+\underset{\times}{4x^2y}+8xy^2+4xy^2+8y^3=x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$. Un procedimento più semplice consiste nell'applicare la formula del cubo di binomio che può ottenersi in vari modi, per esempio usando il triangolo di Tartaglia $(A+B)^3=A^2+3A^2B+3AB^2+B^3$. Avremo pertanto :
  $(x+2y)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot(2y)+3\cdot x\cdot(2y)^2+(2y)^3=x^3+6x^2y+3x\cdot(4y^2)+8y^3=x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$
  Naturalmente i risultati coincidono.
- Sviluppare la seguente quarta potenza di binomio: $(2a^2x-3ax^2)^4$. Stavolta dobbiamo usare il triangolo di Tartaglia, riferendoci alla riga 1 4 6 4 1 Avremo perciò:
  $(2a^2x-3ax^2)^4=1\cdot(2a^2x)^4+4\cdot(2a^2x)^3\cdot(-3ax^2)+6\cdot(2a^2x)^2\cdot(-3ax^2)^2+4\cdot(2a^2x)\cdot(-3ax^2)^3+1\cdot(-3ax^2)^4$

  Sviluppiamo i prodotti:
  $16a^8x^4-12ax^2\cdot(8a^6x^3)+6\cdot(4a^4x^2)\cdot(9a^2x^4)+8a^2x\cdot(-27a^3x^6)+81a^4x^8=16a^8x^4-96a^7x^5+216a^6x^6-216a^5x^7+81a^4x^8$
  osserviamo che, poiché il binomio di partenza è omogeneo di grado 3, allora lo sviluppo è un polinomio omogeneo di grado 3 · 4 = 12.

Fase 2: Completa …

- Sviluppare il seguente prodotto notevole: $\left(3bx^2+2x\right)^3$, esso è noto sotto il nome di …….. applichiamo la consueta regola, scrivendo: $\left(3bx^2+2x\right)^3=\left(3bx^2\right)^3+3\cdot\left(3bx^2\right)^2\cdot\left(2x\right)+$ .....……. Sviluppiamo e semplifichiamo, ottenendo: $27b^3x^6+6x\cdot 9b^2x^4+$ …… = ……...
- Sviluppare $\left(\frac{1}{3}m^2-2y^4\right)^4$. Dobbiamo usare il triangolo di Tartaglia per determinare i corretti coefficienti che dello sviluppo che conterrà ……. monomi.

  $=\left(\frac{1}{3}m^2-2y^4\right)^4=1\cdot\left(\frac{1}{3}m^2\right)^4+4\cdot\left(\frac{1}{3}m^2\right)^3\cdot(.....)+6\cdot(.....)\cdot(.....)+.....$

  vista la presenza di un segno meno nel monomio, il polinomio sviluppo avrà i segni alternati, a partire dal segno ……. Semplifichiamo: ……

Fase 3: Prova!

Applicando, laddove possibile, la seguente regola mnemonica $\left(\mathrm{A}+\mathrm{B}\right)^3=\mathrm{A}^2+3\mathrm{A}^2\mathrm{B}+3\mathrm{A}\mathrm{B}^2+\mathrm{B}^3$ ***oppure usando il triangolo di Tartaglia semplificare i seguenti prodotti***

1. a) $\left(x-2a\right)^3$; b) $\left(2x+a\right)^3$; c) $\left(\frac{2}{3}y-z\right)^3$
2. a) $\left(4mp+2\right)^3$; b) $\left(4mp-2\right)^3$; c) $\left(ab^2c^3-1\right)^3$
3. a) $\left(2x+5z\right)^3$; b) $\left(2x+5z\right)^4$; c) $\left(2x+5z\right)^5$
4. a) $\left(\frac{1}{2}x^2-3\right)^3$; b) $\left(\frac{1}{2}x^2+3\right)^4$; c) $\left(\frac{1}{2}x^2-3\right)^5$
5. a) $\left(2ab+c^3\right)^4$; b) $\left(ab-2c^3\right)^4$; c) $\left(ab-2\right)^5$
6. a) $\left(\frac{1}{2}g^3-\frac{2}{3}h^2\right)^3$; b) $\left[\left(a-3x\right)\cdot\left(a+3x\right)\right]^3$; c) $\left[\left(y+2\right)\cdot\left(y^2-2y+y^2\right)\right]^3$
7. a) $\left(-\frac{4}{3}ab^2-\frac{3}{2}abc\right)^3$; b) $\left[\left(2+y^3\right)\cdot\left(2-y^3\right)\right]^4$; c) $\left[\left(x+1\right)\cdot\left(x^2-x+1\right)\right]^5$
8. a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}az^2\right)^3$; b) $\left[\left(a^3+b^3\right)\cdot\left(a^3-b^3\right)\right]^4$; c) $\left[\left(p^2-1\right)\cdot\left(p^4+p^2+1\right)\right]^5$
9. a) $\left(-\frac{b}{2}+\frac{a}{3}\right)^3$; b) $\left[\left(x^2+y^2\right)\cdot\left(x^2-y^2\right)\right]^5$; c) $\left[\left(a^2+b\right)\cdot\left(a^4-a^2b+b^2\right)\right]^4$
10. a) $\left(a^n-2\right)^3$; b) $\left[\left(x^n+1\right)\cdot\left(x^n-1\right)\right]^4$; c) $\left[\left(x^n-1\right)\cdot\left(x^{2n}+x^n+1\right)\right]^4$

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito

http://mathinterattiva.altervista.org/volume_1_2.htm

2. Il calcolo simbolico

2.3 La fattorizzazione dei polinomi

Prerequisiti
- Conoscenze aritmetiche elementari
- Enunciati logici
- Conoscenze aritmetiche e geometriche elementari
- Somma e prodotto fra polinomi

Obiettivi
- Riconoscere espressioni prive di significato
- Trasformare espressioni aritmetiche o algebriche in altre equivalenti
- Calcolare semplici espressioni con le potenze a esponente negativo
- Fattorizzare semplici polinomi
- Semplificare frazioni algebriche
- Sviluppare espressioni contenenti frazioni algebriche
- Astrarre il concetto di numero intendendolo nella sua forma più generale di espressione polinomiale

Contenuti
- Operazione di divisione nell'insieme dei monomi
- Operazione di divisione nell'insieme dei polinomi in una variabile
- Operazione di divisione nell'insieme dei polinomi in più di una variabile
- Teorema e regola di Ruffini
- Scomposizione dei polinomi in fattori. Prodotti notevoli nelle scomposizioni
- Messa in evidenza a fattor comune
- Messa in evidenza con raggruppamenti parziali
- Scomposizione di trinomi notevoli
- Il teorema di Ruffini e la scomposizione di polinomi
- Operazioni con le frazioni algebriche

Quelli che … vogliono saperne di più
- Principio di identità dei polinomi e teorema fondamentale dell'algebra

Parole Chiave
Frazione algebrica – Polinomio dividendo – Polinomio divisore – Polinomio quoziente – Polinomio resto – Zero di un polinomio

Operazione di divisione nell'insieme dei monomi

Dopo avere considerato le operazioni di somma, differenza e moltiplicazione, ci rimane solo da trattare l'operazione di divisione fra polinomi. Cominciamo a stabilire cosa intendiamo con ciò, partendo intanto dai monomi.

Definizione 1

Dati due monomi, designati simbolicamente con m e n, diciamo che m è **multiplo** di n se esiste un monomio p tale che $m = n \cdot p$. In questo caso diciamo che n e p sono **divisori** di m.

Esempio 1

Il monomio $17a^3b^2c^4$ è multiplo del monomio $31a^2c$ perché $17a^3b^2c^4 = 31a^2c \cdot \left(\frac{17}{31}ab^2c^3\right)$.

È altresì evidente che ogni monomio è multiplo del monomio unità 1 e di se stesso. Risulta intuitivo e di immediata dimostrazione il seguente risultato.

Teorema 1

Condizione necessaria e sufficiente affinché un monomio M sia multiplo di un monomio N è che M contenga tutte le lettere di N con esponenti maggiori o uguali dei corrispondenti di N.

Naturalmente non è vero che due monomi qualsiasi sono nella relazione multiplo–divisore.

Esempio 2

I monomi $20q^4r^2st^4, 15q^7rsu^3$ non costituiscono una coppia di monomi multiplo–divisore, perché l'esponente di q nel primo monomio è minore del corrispondente nel secondo monomio; allo stesso modo non sono una coppia divisore–multiplo perché il secondo monomio non contiene la lettera t, presente nel primo.

In casi come il precedente non è possibile dividere i monomi, nel senso che non esiste un terzo monomio che moltiplicato per uno dei due fornisce come risultato l'altro. In questi casi definiamo un nuovo ente algebrico.

Definizione 2

Dati due monomi, designati simbolicamente con m e n, con m non multiplo di n, l'espressione $\frac{m}{n}$ si chiamerà **frazione algebrica monomia**.

Le frazioni algebriche possono essere riducibili o irriducibili proprio come lo sono le frazioni numeriche.

Esempio 3

La frazione $\frac{2a^3b^4c}{3ac^2d}$ è riducibile. Per ridurla ai minimi termini basta eliminare le lettere comuni a numeratore e denominatore, utilizzando le proprietà della divisione fra potenze. Avremo $\frac{2a^3b^4c}{3ac^2d} = \frac{2a^{\cancel{3}^{2}}b^4\cancel{c}}{\cancel{3}\cancel{a}\cancel{c}^{\cancel{2}^{1}}d} = \frac{2a^2b^4}{3cd}$.

Avendo definito i concetti di multiplo e divisore, possiamo passare a quelli di MCD e *mcm*.

Definizione 3

Dati due o più monomi, chiamiamo loro
- **massimo comune divisore** il più grande fra i divisori a essi comuni;
- **minimo comune multiplo** il più piccolo dei multipli a essi comuni.

Vale il seguente ovvio risultato, generalizzazione di quello analogo per i numeri interi.

Teorema 2

- Il massimo comune divisore di due o più monomi è quel monomio il cui coefficiente è il MCD dei coefficienti e la cui parte letterale è formata dalle eventuali lettere comuni a tutti i monomi, ciascuna lettera innalzata al minimo esponente con cui si presenta.
- Il minimo comune multiplo di due o più monomi è quel monomio il cui coefficiente è il *mcm* dei coefficienti e la cui parte letterale è formata da tutte le lettere presenti nei monomi, ciascuna lettera innalzata al massimo esponente con cui si presenta.

Esempio 4

Determinare massimo comune divisore e minimo comune multiplo dei monomi: $26a^3e^5j^2, 4a^2b^3j, 5a^2cd$, abbiamo intanto: MCD(26, 4, 5) = 1 e *mcm*.(26, 4, 5) = 260. Determiniamo adesso le rispettive parti letterali. Per il MCD solo la lettera *a* è comune a tutti i monomi e il minimo esponente con cui si presenta è 2, quindi $\text{MCD}\left(26a^3e^5j^2, 4a^2b^3j, 5a^2cd\right) = a^2$. Per il mcm, invece dobbiamo considerare tutte le lettere, quindi: $mcm\left(26a^3e^5j^2, 4a^2b^3j, 5a^2cd\right) = 260a^3b^3cde^5j^2$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo ridurre ai minimi termini la seguente frazione: $\frac{1020a^2b^3c^4}{1683a^4b^2cd^4}$. Non vi sono problemi a semplificare le lettere omonime, prima però scomponiamo i coefficienti: $\frac{2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 17\cdot a^2b^3c^4}{3^2\cdot 11\cdot 17\cdot a^4b^2cd^4}$. Eliminando i fattori uguali al numeratore e al denominatore otteniamo la frazione ridotta ai minimi termini: $\frac{2^2\cdot 5\cdot bc^3}{3\cdot 11\cdot a^2d^4}=\frac{20bc^3}{33a^2d^4}$.

Ridurre ai minimi termini le seguenti frazioni monomie

Livello 1

1. a) $\frac{12a^2b^3c^4}{8a^4b^3c^2}$; b) $\frac{28d^5e^6f^5g^6}{21e^5f^6g^5h^6}$; c) $\frac{13x^4yz}{24xy^2t}$ — $\left[\text{a) } \frac{3c^2}{2a^2};\ \text{b) } \frac{4d^5eg}{3fh^6};\ \text{c) } \frac{13x^3z}{24ty}\right]$

2. a) $\frac{15a^2b^3c}{20a^3bc}$; b) $\frac{42a^3m^2np^4}{49a^2bm^3np^5}$; c) $\frac{123x^6y^3}{231x^7y^4}$ — $\left[\text{a) } \frac{3b^2}{4a};\ \text{b) } \frac{6ap^3}{7bm};\ \text{c) } \frac{41}{77xy}\right]$

3. a) $\frac{121m^2n^4p^6q^8}{165m^3n^6p^9q^{12}}$; b) $\frac{182x^3y^4}{238x^4y^3z}$; c) $\frac{315a^6x^3}{412a^4xy^5}$ — $\left[\text{a) } \frac{11}{15mn^2p^3q^4};\ \text{b) } \frac{13y}{17xz};\ \text{c) } \frac{315a^2x^2}{412y^5}\right]$

4. a) $\frac{121ax^2by^3z}{132bx^3y^4z^2}$; b) $\frac{117xyz}{121abc}$; c) $\frac{451x^5z^6}{514y^3z^4}$ — $\left[\text{a) } \frac{11a}{12xyz};\ \text{b) } \frac{117xyz}{121abc};\ \text{c) } \frac{451x^5z^2}{514y^3}\right]$

5. a) $\frac{377a^4b^5z^2}{403a^5c^5z^5}$; b) $\frac{98q^5r^7s^2t}{42q^3r^2s^2u}$; c) $\frac{289m^5p^3}{221m^3p^5}$ — $\left[\text{a) } \frac{29b^5}{31ac^5z^3};\ \text{b) } \frac{7q^2r^5t}{3u};\ \text{c) } \frac{17m^2}{13p^2}\right]$

6. a) $\frac{156a^6b^6g^3h^5}{195a^3b^9h^6k^2}$; b) $\frac{2310c^6w^3z^7}{528a^2c^5wz^2}$; c) $\frac{360a^9b^{12}c^{15}}{330a^{12}b^9c^{15}}$ — $\left[\text{a) } \frac{4a^3g^3}{5b^3hk^2};\ \text{b) } \frac{385cw^2z^5}{97a^2};\ \text{c) } \frac{12b^3}{11a^3}\right]$

7. a) $\frac{1236x^4y^5z^4}{3459x^5y^6z^5}$; b) $\frac{12213223a^4x^5y^2}{21122332a^4x^2}$; c) $\frac{357b^3x}{579x^2z}$ — $\left[\text{a) } \frac{412}{1153xyz};\ \text{b) } \frac{10993x^3y^2}{19012};\ \text{c) } \frac{119b^3}{193xz}\right]$

8. a) $\frac{112233m^2p^3q}{223344mn^2p^3q^4}$; b) $\frac{14m^2pq}{280m^3p^2q^3}$; c) $\frac{648abc^4}{1188a^2bcd}$ — $\left[\text{a) } \frac{3401m}{6768n^2q^3};\ \text{b) } \frac{1}{20mpq^2};\ \text{c) } \frac{6c^3}{11ad}\right]$

9. a) $\frac{36x^2yz}{12xy}$; b) $\frac{84a^3m^4p^2}{48x^3m^2p^4}$; c) $\frac{2184c^5m^3}{2340a^3c^5m^4}$ — $\left[\text{a) } 3xz;\ \text{b) } \frac{7a^3m^2}{4p^2x^3};\ \text{c) } \frac{14}{15a^3m}\right]$

10. a) $\frac{210m^3n^4pqr^2}{315m^4n^3prt}$; b) $\frac{16}{34arte}$; c) $\frac{10626anna}{12144acqua}$ — $\left[\text{a) } \frac{2nqr}{3mt};\ \text{b) } \frac{8}{17aert};\ \text{c) } \frac{7n^2}{8cqu}\right]$

Livello 2

Negli esercizi seguenti gli esponenti sono tutti numeri naturali. Si osservi che i risultati possono anche essere formalmente diversi da quelli proposti;

11. a) $\frac{x^ny^{2n}}{x^{n+1}y^n}$; b) $\frac{2a^{n+1}b^{n-2}c}{a^{2n+1}b^{n+3}c^2}$; c) $\frac{h^{n+2}k^{m+1}}{h^{3n-1}k^{m+n}}$ — $\left[\text{a) } \frac{y^n}{x};\ \text{b) } \frac{2}{a^nb^5c};\ \text{c) } \frac{1}{h^{2n-3}k^{n-1}}\right]$

12. a) $\frac{a^{n+m-1}y^{2m-3n}}{b^{n-m+1}y^{3n-4m+2}c}$; b) $\frac{x^{4n+p-1}y^{n-2p+3}z^p}{x^{4p-n+1}y^{p-2n}z^n}$; c) $\frac{h^{3n+t}k^{4m-z}}{h^{3m-2z}k^{2t+n}}$ — $\left[\text{a) } \frac{a^{n+m-1}y^{6m-6n-2}}{b^{n-m+1}c};\ \text{b) } \frac{x^{5n-3p-2}y^{3n-3p+3}}{z^{n-p}};\ \text{c) } \frac{h^{3n+t-3m+2z}}{k^{2t+n-4m+z}}\right]$

13. a) $\frac{x^{2n}y^{3n}}{x^{4n}y^{n}}$; b) $\frac{z^{3n+1}t^{4n+1}}{t^{5n-3}z^{2n-7}x^{2}}$; c) $\frac{a^{m+n}b^{m-n}}{a^{m-n}b^{m+n}}$ $\left[\text{a) } \frac{y^{2n}}{x^{2n}}\text{; b) } \frac{z^{n-8}}{t^{n-4}x^{2}}\text{; c) } \frac{a^{2n}}{b^{2n}}\right]$

Lavoriamo insieme

Determinare MCD e *mcm* dei monomi $15a^3b^4c^5, 12a^2bc^5, 18a^3b^3c^2d$. Cominciamo con lo scomporre i coefficienti: $3\cdot 5a^3b^4c^5, 2^2\cdot 3a^2bc^5, 2\cdot 3^2a^3b^3c^2d$. Applichiamo la regola per il calcolo del MCD di due o più monomi scegliendo i *fattori comuni con il minore esponente*; troviamo così:

$$\text{MCD}\left(3\cdot 5a^3b^4c^5, 2^2\cdot 3a^2bc^5, 2\cdot 3^2a^3b^3c^2d\right) = 3a^2bc^2.$$

Applichiamo ora la regola per la determinazione del *mcm* prendendo *i fattori comuni e non comuni con il maggiore esponente*. Quindi abbiamo:

$$mcm\left(3\cdot 5a^3b^4c^5, 2^2\cdot 3a^2bc^5, 2\cdot 3^2a^3b^3c^2d\right) = 2^2\cdot 3^2\cdot 5a^3b^4c^5d = 180a^3b^4c^5d$$

Determinare MCD e mcm dei seguenti monomi

Livello 1

14. a) $\left(a^2b^3c, a^4b^2, ab^3\right)$; b) $\left(4m^3p^3, 5m^4p, 2m^3q\right)$ $\left[\text{a) } \left(ab^2; a^4b^3\right)\text{; b) } \left(m^3; 20m^4p^3q\right)\right]$

15. a) $\left(f^4gm^3, 13f^5hm^5, 17fk^3m^5\right)$; b) $\left(15x^4y, 12x^4y^2, 18x^3y^2\right)$

$\left[\text{a) } \left(fm^3; 221f^5ghk^3m^5\right)\text{; b) } \left(3x^3y, 180x^4y^2\right)\right]$

16. a) $\left(2u^4wz^6, t^2yu^5z^4, 2u^7w^2z^3\right)$; b) $\left(110a^4, 120a^3b, 130b^3c\right)$

$\left[\text{a) } \left(u^4z^3;, 2t^2u^7w^2yz^6\right)\text{; b) } \left(10; 17160a^4b^3c\right)\right]$

17. a) $\left(4h^2j^5k^3, 8h^3j^2k^4, 12h^4j^3k^2\right)$; b) $\left(50h^4m^{3^2}, 20h^{2^2}m^{2^3}, 30hm^3\right)$

$\left[\text{a) } \left(4h^2j^2k^2; 24h^4j^5k^4\right)\text{; b) } \left(10hm^3; 300h^4m^9\right)\right]$

18. a) $\left(t^2w^3, 3t^3w^2x^4, 3\right)$; b) $\left(11a^5b^{11}, 5a^{11}b^5, a^{11}b^{11}\right)$ $\left[\text{a) } \left(1; 3t^3w^3x^4\right)\text{; b) } \left(a^5b^5; 55a^{11}b^{11}\right)\right]$

19. a) $\left(4txy^3, 6x^4yz^5, 9tx^3y^4z^2\right)$; b) $\left(5g^3v^3z, 2g^5v^4z^2, 15g^3v^4z^2\right)$ $\left[\text{a) } \left(xy; 36tx^4y^4z^5\right)\text{; b) } \left(g^3v^3z; 30g^5v^4z^2\right)\right]$

20. a) $\left(6a^3b, -2a^4b^3c^4, -a^5b^2c^2d\right)$; b) $\left(3a^2f^3k^4, 6a^4f^2k^5, 9a^3f^4j^2k\right)$

$\left[\text{a) } \left(a^3b; a^5b^3c^4d\right)\text{; b) } \left(3a^2f^2k; 18a^4f^4j^2k^5\right)\right]$

21. a) $\left(3q^2rs^4, 12q^4r^2t^2, 15jq^3r^2s\right)$; b) $\left(2^4\cdot 3^2a^5b^2, 2^3\cdot 3^3\cdot 5a^{12}b^3, 2\cdot 3^5\cdot 7a^4b^7\right)$

$\left[\text{a) } \left(3q^2r; 60jq^4r^2s^4t^2\right)\text{; b) } \left(18a^4b^2; 136080a^{12}b^7\right)\right]$

22. a) $\left(x^5yz^2, 3x^2yz^2, 7xy^5z^3, 11x^2yz\right)$; b) $\left(3^3\cdot 7^3ux^5yz^2, 3^2\cdot 7^4u^3xy^3z^2, 3^4\cdot 7^2x^2y^2z^2, 3^2\cdot 7^3u^3x^4y\right)$

$\left[\text{a) } \left(xyz; 231x^5y^5z^3\right)\text{; b) } \left(441; 3^4\cdot 7^4u^3x^5y^3z^2\right)\right]$

23. a) $\left(4a^2b^3c^4, 16a^4b^3c^2, 18a^3b^4c^2, 24a^2b^4c^2\right)$; b) $\left(2a^2b^3, 3b^3c^2d^4, 4d^3e^2f, 5f^2g, 6h^4j^2k\right)$

$\left[\text{a) } \left(2a^2b^3c^2; 144a^4b^4c^4\right)\text{; b) } \left(1; 60a^2b^3c^2d^4e^2f^2g\right)\right]$

Livello 2

Negli esercizi seguenti gli esponenti sono tutti numeri naturali

24. a) $\left(a^mx^n, a^{m+1}x^{n-1}, a^{m+2}x^{n-2}\right)$; b) $\left(a^{2n}b^{3m}, a^nb^{2m}, a^{n+1}b^m\right)$ $\left[\text{a) } \left(a^mx^{n-2}; a^{m+2}x^{n-2}\right)\text{; b) } \left(a^nb^m; a^{2n+1}b^{3m}\right)\right]$

25. a) $\left(x^{2m-n}y^{n+m}, x^{m-1}y^{2n+m}, x^{m-1}y^{n+1}\right)$; b) $\left(z^{n+m+p}t^{n-m+p}, z^{n-m-p}t^{n-m}, z^{n-m}t^{n+p}\right)$

$\left[\text{a) } \left(x^{m-1}y^{n-2}; x^{2m-n}y^{2n+m}\right)\text{; b) } \left(z^{n-m-p}t^{n-m-p}; z^{m+n+p}t^{n+p}\right)\right]$

26. a) $\left(a^{2m}x^{3n}, a^{2m}x^{3n-1}, a^{m}x^{n}\right)$; b) $\left(a^{n}b^{m}, a^{n+1}b^{m+1}, a^{n-1}b^{m-1}\right)$ $\left[\text{a) } \left(a^{m}x^{n}; a^{2m}x^{3n}\right); \text{ b) } \left(a^{n-1}b^{m-1}; a^{n+1}b^{m+1}\right)\right]$

L'angolo delle correzioni

Correggere gli errori nelle seguenti espressioni

1. $\frac{4a^2b^3c^4}{3a^3b^4c^2} = \frac{4abc^2}{3}$; $\frac{8a^6b^8c^{10}}{4a^{12}b^4c^2} = \frac{2b^2c^5}{a^2}$; $\frac{7x^3y^4z^7}{2x^5y^3z^4} = \frac{5yz^3}{x^2}$
2. $\frac{m^3n^4p^6}{4x^2y^5z^2} = \frac{mnp}{4xyz}$; $\frac{a^6+b^8}{a^4+b^4+c^2} = \frac{a^2+b^4}{c^2}$

Operazione di divisione nell'insieme dei polinomi in una variabile

Il concetto di multiplo e divisore fra polinomi è lo stesso che per i monomi. Più difficile è invece operare con essi, per esempio semplificare una frazione algebrica polinomia.
Abbiamo notato più volte che un polinomio è una generalizzazione del concetto di numero, pertanto ci aspettiamo di ottenere dei risultati in qualche modo simili a quelli ottenuti per i numeri. Così sappiamo che dividendo due numeri interi in generale otteniamo due numeri, il quoziente e il resto. Inoltre il quoziente è un numero non più grande del dividendo, mentre il resto è sempre più piccolo del divisore. Nei polinomi non è semplice stabilire una relazione di ordine, dicendo chi di due polinomi è maggiore dell'altro. Se però i polinomi sono in una variabile, uguale per entrambi, possiamo dire che è maggiore chi ha grado maggiore.
Questa osservazione ci permette di accettare il seguente fondamentale risultato, che non dimostreremo.

Teorema 3

Dati due polinomi f e g con f che ha grado maggiore o uguale a quello di g, esistono sempre due polinomi q e r, tali che valgano le seguenti proprietà:

- il grado di r è minore di quello di g;
- il grado di q è uguale alla differenza fra il grado di f e quello di g;
- $f = q \cdot g + r$.

Vediamo come possiamo dividere due polinomi.

Esempio 5

Vogliamo dividere $x^4 - x + 2x^3 - 1$ per $x^2 - 1 + x$. La prima cosa da fare è ordinare i due polinomi, proprio per quello che abbiamo detto sul fatto che il grado è in qualche modo il corrispondente della posizione che una cifra occupa in un dato numero. Abbiamo perciò $\left(x^4 + 2x^3 - 2x - 1\right):\left(x^2 + x - 1\right)$.

Poi se i polinomi non sono completi dobbiamo completarli. Questo perché fra le cifre esistono anche gli zeri che hanno un'importanza fondamentale, per esempio i numeri 23 e 203 sono diversi fra loro. Si ha quindi $\left(x^4 + 2x^3 + 0x^2 - 2x - 1\right):\left(x^2 + x - 1\right)$.

Adesso possiamo cominciare a dividere. Cosa dobbiamo dividere? Come si fa con i numeri, basta dividere fra loro i monomi di grado maggiore. Avremo così $x^4 : x^2 = x^2$. Adesso moltiplichiamo questo risultato per **tutti** i monomi del divisore: $x^2 \cdot \left(x^2 + x - 1\right) = x^4 + x^3 - x^2$. Questo risultato si sottrarrà al dividendo, sempre in accordo con quanto effettuato con i numeri:

$$x^4 + 2x^3 + 0x^2 - 2x - 1 - \left(x^4 + x^3 - x^2\right) = \underline{x^4} + 2\underset{\times}{x^3} + 0\underset{\circ}{x^2} - 2x - 1 - \underline{x^4} - \underset{\times}{x^3} + \underset{\circ}{x^2} =$$

$$= (1-1)\cdot x^4 + (2-1)\cdot x^3 + (0+1)\cdot x^2 - 2x - 1 = x^3 + x^2 - 2x - 1$$

Possiamo eseguire il tutto con uno schema di divisione classico:

$$\begin{array}{l|l} x^4 + 2x^3 + 0x^2 - 2x - 1 & \underline{x^2 + x - 1} \\ \underline{-x^4 - x^3 + 1x^2} & x^2 \\ x^3 + x^2 & \end{array}$$

, in cui, per semplicità, abbiamo cambiato i segni al polinomio prodotto effettuando così la somma invece che la sottrazione. A questo punto possiamo continuare la divisione con analoghi procedimenti, eseguendo quindi $x^3 : x^2 = x$ e moltiplicando il risultato per il polinomio divisore:

$$\begin{array}{l|l} x^4 + 2x^3 + 0x^2 - 2x - 1 & \underline{x^2 + x - 1} \\ \underline{-x^4 - x^3 + 1x^2} & x^2 + x \\ x^3 + x^2 - 2x - 1 & \\ \underline{-x^3 - x^2 + x} & \\ -x - 1 & \end{array}$$

. Dato che abbiamo ottenuto un polinomio di grado inferiore a quello del divisore possiamo dire che abbiamo finito. Il quoziente della divisione è perciò $x^2 + x$, il resto $-x - 1$. Adesso verifichiamo che la divisone è stata

eseguita correttamente: $\left(x^2+x-1\right)\cdot\left(x^2+x\right)-x-1=x^4+\underset{\times}{\underline{x^3}}+\underset{\times}{\underline{x^3}}+\underset{\circ}{\underline{x^2}}-\underset{\circ}{\underline{x^2}}-\underset{\circ}{\underline{x}}-\underset{\circ}{\underline{x}}-1=x^4+2x^3-2x-1$.

Vedremo altri esempi nelle attività di verifica. Osserviamo invece che la divisione serve non tanto per ridurre ai minimi termini le frazioni algebriche polinomie, ma a scomporle in modo che vi siano solo frazioni ridotte ai minimi termini. Chiariamo meglio partendo da un esempio numerico.

Esempio 6

Sia la frazione $\frac{143}{28}$, ridotta ai minimi termini perché numeratore e denominatore non hanno fattori comuni (28 è divisibile solo per 2 e 7, 143 non è divisibile per nessuno dei due). Effettuiamo la divisione.

$$\begin{array}{r|l} 143 & 28 \\ \underline{140} & 5 \\ 3 & \end{array}$$

Possiamo allora scrivere, 143 = 28 · 5 + 3. Sostituendo questo valore nella frazione avremo:

$$\frac{28\cdot 5+3}{28}=\frac{28\cdot 5}{28}+\frac{3}{28}=5+\frac{3}{28}$$

Abbiamo perciò scritto la frazione di partenza, come somma di un numero intero (quoziente della divisione) e in una frazione propria il cui numeratore è il resto della divisione.

Quanto visto nel precedente esempio può ripetersi anche per le frazioni algebriche.

Esempio 7

Riprendiamo in considerazione la divisione $\left(x^4+2x^3-2x-1\right):\left(x^2+x-1\right)$, che ha quoziente x^2+x, e resto $-x-1$. Ciò significa, che per il Teorema 3 si può scrivere $x^4+2x^3-2x-1=\left(x^2+x-1\right)\cdot\left(x^2+x\right)-x-1$. Riscrivendo il tutto in forma di frazione abbiamo:

$$\frac{x^4+2x^3-2x-1}{x^2+x-1}=\frac{\left(x^2+x-1\right)\cdot\left(x^2+x\right)-x-1}{x^2+x-1}=\frac{\left(x^2+x-1\right)\cdot\left(x^2+x\right)}{x^2+x-1}+\frac{-x-1}{x^2+x-1}=x^2+x+\frac{-x-1}{x^2+x-1}$$

Abbiamo semplificato, nella prima frazione, i polinomi comuni x^2+x-1, mentre la seconda frazione è adesso ridotta ai minimi termini, dato che il numeratore ha grado inferiore al denominatore e inoltre essendo il resto della divisione, non può avere fattori in comune con il denominatore.

Possiamo allora enunciare il seguente risultato.

Teorema 4

Dati due polinomi *f* e *g* con *f* che ha grado maggiore o uguale a quello di *g*, detti *q* e *r* rispettivamente i polinomi quoziente e resto della divisione di *f* per *g*, si ha: $\frac{f}{g}=q+\frac{r}{g}$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Eseguire la divisione $(4x^5 - x^3 + 3x^2 - 6x + 1):(x^3 + 3x^2 + 2)$. Cominciamo a completare i polinomi:

$$(4x^5 + 0x^4 - x^3 + 3x^2 - 6x + 1):(x^3 + 3x^2 + 0x + 2)$$

Adesso dividiamo i due monomi di grado maggiore: $4x^5 : x^3 = 4x^2$, moltiplichiamo questo quoziente per tutti i coefficienti del polinomio divisore e ne scriviamo i risultati, cambiati di segno, sotto i corrispondenti coefficienti del polinomio dividendo.

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 4x^5 & +\,0x^4 & -\,x^3 & +3x^2 & -6x & +1 & x^3+3x^2+0x+2 \\ \cline{7-7} -4x^5 & -12x^4 & +0x^3 & -8x^2 & & & 4x^2 \\ \cline{1-4} & -12x^4 & -\,x^3 & -5x^2 & & & \end{array}$$

Poiché abbiamo ottenuto un polinomio di grado superiore a quello del divisore la divisione continua, sempre allo stesso modo, dividendo cioè di monomi di grado massimo fra loro: $-12x^4 : x^3 = -12x$. Ripetiamo ancora la moltiplicazione di questo quoziente per il polinomio divisore:

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 4x^5 & +\,0x^4 & -\,x^3 & +3x^2 & -6x & +1 & x^3+3x^2+0x+2 \\ \cline{7-7} -4x^5 & -12x^4 & +0x^3 & -8x^2 & & & 4x^2-12x+35 \\ \cline{1-4} & -12x^4 & -\,x^3 & -5x^2 & -\,6x & & \\ & 12x^4 & 36x^3 & +0x^2 & +24x & & \\ \cline{2-5} & & 35x^3 & -5x^2 & +18x & & \end{array}$$

Stavolta i polinomi hanno lo stesso grado, quindi dobbiamo ancora continuare la divisone, ma sarà l'ultimo passaggio.

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 4x^5 & +\,0x^4 & -\,x^3 & +3x^2 & -6x & +1 & x^3+3x^2+0x+2 \\ \cline{7-7} -4x^5 & -12x^4 & +0x^3 & -8x^2 & & & 4x^2-12x+35 \\ \cline{1-4} & -12x^4 & -\,x^3 & -5x^2 & -\,6x & & \\ & 12x^4 & 36x^3 & +0x^2 & +24x & & \\ \cline{2-5} & & 35x^3 & -5x^2 & +18x & +1 & \\ & & -35x^3 & -105x^2 & +\,0x & -70 & \\ \cline{3-6} & & & -110x^2 & +18x & -69 & \end{array}$$

Il quoziente della divisione è perciò $4x^2 - 12x + 35$, il resto è invece $-110x^2 + 18x - 69$. Verifichiamo la correttezza del risultato.

$$(4x^2 - 12x + 35)\cdot(x^3 + 3x^2 + 2) - 110x^2 + 18x - 69 =$$

$$= 4x^5 + \underset{\times}{\underline{12x^4}} + \underset{\times}{8x^2} - \underset{\times}{\underline{12x^4}} - \underset{\circ}{36x^3} - \underset{\approx}{24x} + \underset{\circ}{35x^3} + \underset{\times}{105x^2} + \underset{\Delta}{70} - \underset{\times}{110x^2} + \underset{\approx}{18x} - \underset{\Delta}{69} = 4x^5 - x^3 + 3x^2 - 6x + 1$$

Determinare quoziente e resto delle seguenti divisioni. Verificare quindi i risultati ottenuti

Livello 1

1. a) $(x^3 - 1):(x^2 - x + 1)$; b) $(2x^3 - x^2 + 3):(x^2 - x)$ [a) $x+1, -2$; b) $2x+1, x+3$]

2. a) $(x^5 + 2):(x^3 + x^2 - 3)$; b) $(5a^4 - a^2 + 2):(a^3 + a - 1)$ [a) $x^2 - x + 1, 2x^2 - 3x + 5$; b) $5a, -6a^2 + 5a + 2$]

3. a) $(x^3 + x^2 + x + 1):(x + 1)$; b) $(4b^4 - 3b^2):(b^3 + 2)$ [a) $x^2 + 1$, 0; b) $4b, -3b^2 - 8b$]

4. a) $(x^3 + 3x^2 + 3x + 1):(x - 1)$; b) $(x^3 + 3x^2 + 3x - 1):(x - 1)$ [a) $x^2 + 4x + 7$, 8; b) $x^2 + 4x + 7$, 6]

5. a) $\left(4m^3+3m^2+2m+1\right):\left(m^2-2m+3\right)$; b) $\left(5p^6-p^3+2\right):\left(p^4-p^2+1\right)$

$\left[\text{a) } 4m+11,\ 12m-32;\ \text{b) } 5p^2+5,\ -p^3-3\right]$

6. a) $\left(p^7-p^5+p^3-p\right):\left(p^6+p^4+p^2+1\right)$; b) $\left(x^4+2x^3-3x^2+4x-5\right):\left(x^2-2x+2\right)$

$\left[\text{a) } p,\ -2p^2-2p;\ \text{b) } x^2+4x+3,\ 2x-11\right]$

7. a) $\left(t^8+t^5-t^4+3t^3-1\right):\left(t^5-t+3\right)$; b) $\left(5w^7-w^5+1\right):\left(w^6+3w\right)$

$\left[\text{a) } t^3+1,\ t-4;\ \text{b) } 5w,\ -w^5-15w^2+1\right]$

8. a) $\left(4u^6-2u^5+u-3\right):\left(u^3+u-2\right)$; b) $\left(6y^5+5y^4-4\right):\left(y^3-2y+1\right)$

$\left[\text{a) } 4u^3-2u^2-4u+10,\ -17u+17;\ \text{b) } 6y^2+5y+12,\ 4y^2+19y-16\right]$

9. a) $\left(3v^4-4v^3+1\right):\left(v^2-2v+3\right)$; b) $\left(7z^4+1\right):\left(z^3+1\right)$ $\left[\text{a) } 3v^2+2v-5,\ -16v+16;\ \text{b) } 7z,\ -7z+1\right]$

10. a) $\left(3y^7-4y^3+y-2\right):\left(y^3-1\right)$; b) $\left(12x^2-11x+10\right):\left(x-3\right)$ $\left[\text{a) } 3y^4+3y-4,\ 4y-6;\ \text{b) } 12x+25,\ 85\right]$

11. a) $\left(10x^4-9x^3+x^5-x+4\right):\left(x^2-7x\right)$; b) $\left(4x^4-1+x\right):\left(3-x^2\right)$

$\left[\text{a) } x^3+17x^2+110x+770,\ 5389x+4;\ \text{b) } -4x^2-12,\ x+35\right]$

12. a) $\left(u^5-3u^3-5u^2+20+u\right):\left(u^3-5\right)$; b) $\left(n-7n^4+5n^3-4n^2\right):\left(n-2+n^2\right)$

$\left[\text{a) } u^2-3,\ u+5;\ \text{b) } -7n^2+12n-30,\ 55n-60\right]$

13. a) $\left(6r^5-7r^4+22r^3-14r^2+20r-6\right):\left(r^2-4+r\right)$; b) $\left(t^3-t^4+5\right):\left(t-t^3-5\right)$

$\left[\text{a) } 6r^3-13r^2+59r-125,\ 381r-125;\ \text{b) } t-1,\ -t^2+6t\right]$

14. a) $\left(4j^5-13j^4+8j^3-7j^2+11j-4\right):\left(j^2-3j+1\right)$; b) $\left(5k^5-3k^2-1\right):\left(k^2-1\right)$

$\left[\text{a) } 4j^3-j^2+j-3,\ j-1;\ \text{b) } 5k^3+5k-3,\ 5k-4\right]$

15. a) $\left(z^8-z^4+z^3+2z^2-z\right):\left(z^4-z^2+1\right)$; b) $\left(a^{11}-1\right):\left(a^3-1\right)$

$\left[\text{a) } z^4+z^2-1,\ z^3-z+1;\ \text{b) } a^8+a^5+a^2,\ a^2-1\right]$

16. a) $\left(3x^5-x^3+4x-6x^2+4\right):\left(x^3-x^2+x^5-1\right)$; b) $\left(x^5-2\right):\left(x^6+1\right)$

$\left[\text{a) } 3,\ -4x^3-3x^2+4x+7;\ \text{b) } 0,\ x^5-2\right]$

17. $\left(5x^7-4x^6-12x^5+14x^4-10x^3-6x^2+4x\right):\left(x^2-3\right)$ $\left[5x^5-4x^4+3x^3+2x^2-x,\ x\right]$

18. $\left(8t^8-4t^6+26t^5-28t^4+31t^2-35t-12t^3+3\right):\left(2t^5-7t+4t^2-1\right)$ $\left[4t^3-2t+5,\ -3t^2-2t+8\right]$

19. $\left(9h^7+9h^5+4h^4-21h^6-7h^2+h-1\right):\left(3h^4-7h^3+4h^2-1\right)$ $\left[3h^3-h-1,\ -3h^2-2\right]$

20. $\left(8m^5+2m^4+12m^3+m^2+5m-4\right):\left(2m^2+3\right)$ $\left[4m^3+m^2-1,\ 5m-1\right]$

21. $\left(21p^{10}+7p^9+9p^7-11p^6-6p^5+p^4-5p^3+4p-1\right):\left(7p^6+3p^3-2p+1\right)$ $\left[3p^4+p^3-2,0\right]$

22. $\left(4n^9+n^8+19n^7+5n^6-6n^5-n^4+16n^3+5n^2-3n\right):\left(4n^4+n^3-n^2+3\right)$ $\left[n^5+5n^3-n,\ 5n^2\right]$

23. $\left(18n^{10}-3n^6+3n^5+n^4-n^2+2n\right):\left(6n^5+n-1\right)$ $\left[3n^5-n+1,\ n^4+1\right]$

24. $\left(4h^{14}-4h^{11}+h^{10}+3h^8-h^7+h^5+h^4-h^2\right):\left(h^6-h^3+1\right)$ $\left[4h^8+h^4-h^2,\ 0\right]$

25. $\left(h^{12}-h^{10}+h^7+h^6-h^5+h^4-3h^2+2\right):\left(h^2-1\right)$ $\left[h^{10}+h^5-2,\ h^6+h^4-h^2\right]$

Lavoriamo insieme

Eseguire la divisione $(5a^4-2+a^3-4a):(a-5a^2+1)$. Non cambia nulla nella procedura, solo che, essendo il coefficiente direttore del polinomio dividendo diverso da 1 avremo a che fare non solo con numeri interi, ma anche con frazioni.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 5a^4 & +a^3 & +0a^2 & -4a & -2 & -5a^2+a+1 \\ \cline{6-6} -5a^4 & +a^3 & +a^2 & & & -a^2-\frac{2}{5}a-\frac{7}{25} \\ \cline{1-5} & 2a^3 & +a^2 & -4a & & \\ & -2a^3 & +\frac{2}{5}a^2 & +\frac{2}{5}a & & \\ \cline{2-5} & & \frac{7}{5}a^2 & -\frac{18}{5}a & -2 & \\ & & -\frac{7}{5}a^2 & +\frac{7}{25}a & +\frac{7}{25} & \\ \cline{3-5} & & & -\frac{83}{25}a & +\frac{43}{25} & \end{array}$$

Livello 2

26. $(12v^4-6v^3-8v^2+16v-10):(4v^2-2)$ $\left[3v^2-\frac{3}{2}v-\frac{1}{2},\ 13v-11\right]$

27. $(15x^5+11x^4-21x^3-4x^2+3x+1):(5x^2+2x+1)$ $\left[3x^3+x^2-\frac{26}{5}x+\frac{27}{25},\ \frac{151}{25}x-\frac{2}{25}\right]$

28. $(3y^4-7y^3+5y^2-13y+11):(3y^2+3)$ $\left[y^2-\frac{7}{3}y+\frac{2}{3},\ -6y+9\right]$

29. $(6m^6-2m^5-m^4+m^3+8m^2-2m):(3m^2-m+1)$ $\left[2m^4-m^2+3,\ m-3\right]$

30. $(4h^4-h^3+3-h^5):(3h^2-h+1-h^6)$; $\left(\frac{1}{3}u^6-\frac{9}{4}u^4+u^2+3\right):\left(\frac{1}{2}u^2-3\right)$

$\left[(0,\ -h^5+4h^4-h^3+3);\left(\frac{2}{3}u^4-\frac{1}{2}u^2-1,\ 0\right)\right]$

31. $\left(\frac{1}{6}n^5-\frac{2}{3}n^4+\frac{23}{12}n^3+\frac{5}{6}n^2-\frac{8}{3}n+\frac{11}{2}\right):\left(\frac{2}{3}n^3-\frac{1}{3}n+2\right)$ $\left[\frac{1}{4}n^2-n+3,\ \frac{1}{3}n-\frac{61}{12}\right]$

32. $\left(\frac{1}{6}q^8-\frac{1}{2}q^7+\frac{23}{18}q^5+\frac{1}{3}q^4+2q^3-4q^2-5q+10\right):\left(\frac{1}{2}q^5-\frac{2}{3}q^2-q+3\right)$ $\left[\frac{1}{3}q^3-q^2+3,\ q^2-2q+1\right]$

33. $\left(\frac{1}{2}x^5-3x^3+2\right):\left(\frac{1}{2}x^5+3x^3-2\right)$; $\left(\frac{1}{16}t^5+\frac{1}{8}t^3-\frac{1}{8}t^2-\frac{1}{4}t-\frac{5}{12}\right):\left(\frac{1}{4}t^3-\frac{1}{2}\right)$

$\left[(1,\ -6x^3+4);\left(\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4}t-\frac{1}{6}\right)\right]$

34. $\left(\frac{7}{3}a^5-\frac{5}{2}a^4-\frac{22}{3}a^3-a^7+4a^6-\frac{9}{2}a^2+\frac{28}{3}a+\frac{7}{3}\right):(2a^3-2a^5+3a^2-5)$ $\left[\frac{1}{2}a^2-2a-\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}a-1\right]$

35. $\left(\frac{1}{2}m^4-\frac{7}{6}m^3+\frac{13}{6}m^2-m-9\right):\left(\frac{1}{2}m^2-\frac{2}{3}m+3\right)$ $\left[m^2-m-3,\ 0\right]$

36. $\left(\frac{1}{4}w^7-\frac{35}{48}w^5+\frac{1}{7}w^4+\frac{1}{6}w^3-\frac{29}{28}w^2-\frac{1}{12}\right):\left(\frac{1}{4}w^5-\frac{2}{3}w^3+\frac{1}{7}w^2-1\right)$ $\left[w^2-\frac{1}{4},\ -\frac{5}{14}w^2+\frac{5}{56}w^2-\frac{1}{3}\right]$

37. $(15x^5-11x^4+9x^3-7x^2+x+3):(4x^2-x-1)$ $\left[\frac{15}{4}x^3-\frac{29}{16}x^2+\frac{175}{64}x-\frac{389}{256},\ \frac{567}{256}x+\frac{379}{256}\right]$

38. $\left(y^8-\frac{89}{36}y^6-\frac{17}{24}y^4-y^3-\frac{13}{12}y^2+y-\frac{5}{4}\right):\left(\frac{2}{3}y^4-\frac{3}{2}y^2-\frac{5}{4}\right)$ $\left[\frac{3}{2}y^4-\frac{1}{3}y^2+1,\ -y^3+y\right]$

Operazione di divisione nell'insieme dei polinomi in più di una variabile

Se nei polinomi sono presenti più variabili, la divisione verrà effettuata rispetto a una sola, come meglio chiarito nel seguente esempio.

Esempio 8

Effettuiamo la divisione fra i polinomi dipendenti da due variabili, *m* e *n*, prima rispetto a *m* e poi rispetto a *n*: $\left(mn^2+2mn^2\right):\left(m+n\right)$, e poi verifichiamo i risultati ottenuti. Dividendo rispetto a *m* otteniamo

$$\begin{array}{r|l} 2m^2n+mn^2 & \underline{m+n} \\ \underline{-\,2m^2n-2mn^2} & 2mn-n^2 \\ -mn^2 & \\ \underline{\qquad mn^2+n^3} & \\ n^3 & \end{array}$$

mentre dividendo rispetto a n otteniamo $\begin{array}{r|l} mn^2+2m^2n & \underline{n+m} \\ \underline{-mn^2-m^2n} & mn+m^2 \\ m^2n & \\ \underline{\qquad -m^2n-m^3} & \\ -m^3 & \end{array}$. Osserviamo alcuni fatti. Intanto non abbiamo completato i polinomi, ciò perché risulta particolarmente complicato farlo, dato che non è semplice stabilire quali termini mancano e perché. Poi abbiamo ottenuto due diversi quozienti e due diversi resti.

$$\left(Q\left(m\right)=2mn-n^2;R\left(m\right)=n^3\right);\left(Q\left(n\right)=mn+m^2;R\left(m\right)=-m^3\right)$$

Verifichiamo i risultati.

$$\left(2mn-n^2\right)\cdot\left(m+n\right)+n^3=2m^2n+\underline{2mn^2}-\underline{mn^2}-\cancel{n^3}+\cancel{n^3}=2m^2n+mn^2;$$

$$\left(mn+m^2\right)\cdot\left(m+n\right)-m^3=\underline{m^2n}+mn^2+\cancel{n^3}+\underline{m^2n}-\cancel{n^3}=2m^2n+mn^2$$

Un altro esempio.

Esempio 9

Vogliamo effettuare la divisione fra i seguenti polinomi: $\left(x^3k-5x^2k^2+6xk^3+k^4+3\right):\left(x^2k-2xk^2\right)$. Osserviamo che la divisione è possibile solo rispetto alla variabile *x* e non rispetto alla *k*, dato che il monomio di massimo grado del polinomio dividendo k^4 non è multiplo del monomio di massimo grado del polinomio divisore $-2xk^2$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo eseguire la seguente divisione: $\left(a^3b-a^2b^2+ab^3\right):\left(2a-b\right)$. Possiamo eseguirla sia rispetto alla variabile a, sia alla b.

$$\begin{array}{l|l} a^3b \;-\; a^2b^2 \;+ab^3 & 2a-b \\ \hline -a^3b \;+\frac{1}{2}a^2b^2 & \frac{1}{2}a^2b-\frac{1}{4}ab^2+\frac{3}{8}b^3 \\ \hline \quad -\frac{1}{2}a^2b^2 \;+ab^3 & \\ \hline \quad \frac{1}{2}a^2b^2-\frac{1}{4}ab^3 & \\ \hline \quad \frac{3}{4}ab^3 & \\ \quad -\frac{3}{4}ab^3+\frac{3}{8}b^4 & \\ \hline \quad \frac{3}{8}b^4 & \end{array}$$

- Nel primo caso abbiamo: , con quoziente $\frac{1}{2}a^2b-\frac{1}{4}ab^2+\frac{3}{8}b^3$ e resto $\frac{3}{8}b^4$.

$$\begin{array}{l|l} ab^3 \;-\; a^2b^2 \;+a^3b & -b+2a \\ \hline -ab^3 \;+2a^2b^2 & -ab^2-a^2b-3a^3 \\ \hline \quad a^2b^2 \;+a^3b & \\ \hline \quad -a^2b^2 \;+\; 2a^3b & \\ \hline \quad 3a^3b & \\ \quad -\;3a^3b+6a^4 & \\ \hline \quad 6a^4 & \end{array}$$

- Nel secondo caso si ha: . Il quoziente è $-ab^2-a^2b-3a^3$, il resto $6a^4$.

Effettuare le seguenti divisioni di polinomi in due variabili rispetto alle variabili accanto indicate. Verificare poi i risultati ottenuti

Livello 1

1. a) $\left(x^3-y^3\right):\left(x-y\right)$; b) $\left(a^2-ab+b^2\right):\left(a+b\right)$, rispetto a entrambe

$\left[\text{a) } x^2+xy+y^2, 0;\ y^2+xy+x^2, 0;\ \text{b) } a-2b,\ 3b^2;\ b-2a, 3a^2\right]$

2. a) $\left(m^3-m^2n+n^2\right):\left(m-2n\right)$; b) $\left(x^4-x^3y+y^2\right):\left(x^2+y\right)$, rispetto a entrambe

$\left[\text{a) } m^2+mn+2n^2,\ 4n^3+n^2;\ -\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{4}m,\ \frac{1}{2}m^3+\frac{1}{4}m^2;\ \text{b) } x^2-xy-y,\ xy^2+2y^2;\ y-x^3-x^2,\ x^5+2x^4\right]$

3. a) $\left(p^4q^3+p^3q^4\right):\left(p^2+pq\right)$; b) $\left(b^3y+2b^2y^2-y^4\right):\left(b^2-3by\right)$, a) rispetto a p; b) rispetto a b

$\left[\text{a) } p^2q^3,\ 0;\ \text{b) } by+5y^2,\ 15by^3-y^4\right]$

4. a) $\left(2a^3x^2+3a^2x-a+x^3\right):\left(a^3+x^2-1\right)$; b) $\left(n^2+3m^3n\right):\left(m^2-n^2\right)$, a) rispetto ad a ; b) rispetto a m

$\left[\text{a) } 2x^2,\ 3a^2x-a-2x^4+x^3+2x^2;\ \text{b) } 3mn,\ 3mn^3+n^2\right]$

5. a) $\left(m^6-n^4+m^2-1\right):\left(m^3+n^3\right)$; b) $\left(a^5x-2a^4x^2+a^2x^4-5x^6\right):\left(ax+a^2-x^2\right)$, rispetto a entrambe

$$\left[\begin{array}{l}\text{a) } m^3-n^3,\ m^2+n^6-n^4-1;\ -n,\ m^3n+m^6+m^2-1\\ \text{b) } a^3x-3a^2x^2+4ax^3-6x^4,\ 10ax^5-11x^6;\ 5x^4+5ax^3+9a^2x^2+14a^3x+25a^4,\ -38a^5x-25a^6\end{array}\right]$$

6. a) $\left(a^3+a^2-b^2+b^3\right):\left(2a-b+a^2\right)$; b) $\left(x^4-z^4\right):\left(x-z\right)$, a) rispetto ad a ; b) rispetto a x

$$\left[\text{a) } a^2+a,\ b^3-b^2;\ \text{b) } x^3+x^2z+xz^2+z^3,\ 0\right]$$

7. a) $\left(b^3+2a^2b-4ab^2+1\right):\left(3a-4b\right)$; b) $\left(z^3-z^2y+y^3\right):\left(z+y\right)$, a) rispetto ad a ; b) rispetto a z

$$\left[\text{a) } \frac{2}{3}a^2b-\frac{4}{9}b^2,\ -\frac{7}{9}b^3+1;\ \text{b) } 2y^2-2yz+z^2,\ -y^3\right]$$

8. a) $\left(h^4+2h^2t^2-4h^3t+3t^4\right):\left(t^2-h^2\right)$; b) $\left(c^5-4c^4+k^3\right):\left(c^4+k\right)$, a) rispetto a t e b) rispetto a k

$$\left[\text{a) } 3t^2+5h^2,\ -4h^3t+6h^4;\ \text{b) } k^2-c^4k+c^8,\ -c^{12}+c^5-4c^4\right]$$

9. a) $\left(s^5-u^5\right):\left(s^3+u^3\right)$; b) $\left(h^4-z^2+1\right):\left(h^3+z^3\right)$, a) rispetto a s e b) rispetto a h

$$\left[\text{a) } s^2,\ -s^2u^3-u^5;\ h,\ \text{ b) } -hz^3-z^2+1\right]$$

10. a) $\left(w^3+3d^2w^2-4d^3w+d^4\right):\left(w^2-2dw+d^2\right)$; b) $\left(a^2-t^5+a\right):\left(a^3-t^2+t\right)$, a) rispetto a d e b) rispetto ad a

$$\left[\text{a) } d^3-4d^2w+3dw^2,\ w^3;\ \text{b) } 0,\ a^2+a-t^5\right]$$

11. a) $\left(v^7-3v^5x^2+v^3x^4-6\right):\left(v^2+x^2\right)$; b) $\left(3m^3-4n^2+m-n\right):\left(m^3+2n^2\right)$, a) rispetto a v e b) rispetto a m

$$\left[\text{a) } v^5-4v^3x^2+5vx^4,\ -5vx^6-6;\ \text{b) } 3,\ m-10n^2-n\right]$$

12. a) $\left(\frac{1}{2}y^6-\frac{3}{2}y^4z^2+y^3z^3-\frac{1}{4}\right):\left(y^3-z^3\right)$; b) $\left(4x^3-\frac{1}{2}y^3\right):\left(2x+\frac{1}{2}y\right)$, entrambe rispetto a y

$$\left[\text{a) } \frac{1}{2}y^3-\frac{3}{2}yz^2+\frac{3}{2}z^3,\ -\frac{3}{2}yz^5+\frac{3}{2}z^6-\frac{1}{4};\ \text{b) } -y^2+4xy-16x^2,\ 36x^3\right]$$

13. a) $\left(m^4-m^3p+mp^3-p^4+1\right):\left(m^2-mp+p^2-1\right)$; b) $\left(x^3-x^2y+y^2\right):\left(x^2-y-1\right)$, a) rispetto a m e b) rispetto a y

$$\left[\text{a) } m^2-p^2+1,\ mp-2p^2+2;\ \text{b) } -y-1,\ x^3+x^2+1\right]$$

14. a) $\left(\frac{1}{3}t^5-\frac{2}{3}t^3u^2+t^2u^3-1\right):\left(t^3-\frac{1}{4}tu^2+1\right)$; b) $\left(\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{9}b^4\right):\left(\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}b^2\right)$, a) rispetto a u e b) rispetto ad a

$$\left[\text{a) } -4tu+\frac{2}{9}t^2,\ \ 4t^4u+4tu+\frac{1}{9}t^5-\frac{2}{9}t^2-1;\ \text{b) } \frac{1}{2}a^2-\frac{1}{3}b^2,\ 0\right]$$

15. a) $\left(h^7-h^4k^3+k^7\right):\left(h^4-h^2k^2+2k^4\right)$; b) $\left(\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3}m^2+\frac{1}{4}mz\right):\left(2z^2-3m\right)$, a) rispetto a h e b) rispetto a m

$$\left[\text{a) } h^3+hk^2-k^3,\ -h^3k^4-h^2k^5-2hk^6+3k^7;\ \text{b) } \frac{1}{9}m+\frac{2}{27}z^2-\frac{1}{12}z,\ -\frac{4}{27}z^4+\frac{1}{3}z^3+\frac{1}{2}z^2\right]$$

16. $\left(a^5-\frac{7}{6}a^4b+\frac{11}{6}a^3b^2-\frac{8}{3}a^2b^3+ab+b^5-1\right):\left(\frac{1}{2}a^3-\frac{1}{3}a^2b+ab^2-b^3\right)$, rispetto a entrambi

$$\left[2a^2-ab-b^2,\ ab-1\right]$$

Regola e Teorema di Ruffini

La divisione fra un polinomio di qualsiasi grado per uno di primo grado, entrambi nella stessa variabile, risulta semplificata. Vediamo perché.

Esempio 10

Effettuiamo la divisione $(4x^4 - x^2 + 3x - 2):(x-2)$. Si ha:

$$\begin{array}{r|l} 4x^4+0x^3-x^2+3x-2 & x-2 \\ \underline{-4x^4+8x^3} & \\ 8x^3-x^2 & 4x^3+8x^2+15x+33 \\ \underline{-8x^3+16x^2} & \\ 15x^2+3x & \\ \underline{-15x^2+30x} & \\ 33x-2 & \\ \underline{-33x+66} & \\ 64 & \end{array}$$

Osserviamo alcune cose:

- il quoziente è un polinomio di terzo grado (uno in meno del grado del polinomio dividendo), quindi già prima di fare la divisione sappiamo che il quoziente sarà una espressione del tipo ax^3+bx^2+cx+d, con a, b, c e d da determinare;
- in ogni passo facciamo esattamente due moltiplicazioni, dato che il divisore è un binomio;
- quando effettuiamo la sottrazione uno dei due addendi, il primo, si annulla sempre;
- il coefficiente del termine che non si annulla è uno dei coefficienti del quoziente.

Proprio l'ultima osservazione ci permette di schematizzare la precedente moltiplicazione in modo più semplice.

Esempio 11

Riprendiamo lo schema della precedente divisione scrivendo solo i coefficienti, escludendo però quelli che

$$\begin{array}{l} \langle 4\rangle \; +0 \; -1 \quad +3 \; -2 \\ \underline{\quad\quad 8 \quad\quad\quad\quad} \\ \quad \langle 8\rangle \; -1 \\ \underline{\quad\quad\quad 16 \quad\quad} \\ \quad\quad \langle 15\rangle \; + \; 3 \\ \underline{\quad\quad\quad\quad +30} \\ \quad\quad\quad\quad \langle 33\rangle - \; 2 \\ \underline{\quad\quad\quad\quad\quad\quad 66} \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad \lfloor 64\rfloor \end{array}$$

poi si annullano . Abbiamo indicato con il simbolo $\langle N\rangle$ i coefficienti del quoziente, con $\lfloor 64\rfloor$ il resto. Questo schema possiamo semplificarlo ulteriormente nel modo seguente:

$$\begin{array}{r|cccc|c} & 4 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & & 8 & 16 & 30 & 66 \\ \hline & 4 & 8 & 15 & 33 & 64 \end{array}$$

Come si nota i numeri dell'ultima riga sono, a parte l'ultimo, i coefficienti ordinati del quoziente. L'ultimo è invece il resto.
Lo schema è stato costruito nel semplice modo che andiamo a spiegare.

- Nella prima riga ci sono i coefficienti del polinomio dividendo ordinato e completo, il termine noto è separato dagli altri con una linea;
- il primo numero della seconda riga, 2, è l'opposto del termine noto del polinomio divisore. Ciò perché ricordiamo che nello schema della divisione abbiamo cambiato i segni ai prodotti, in tal modo evitiamo questo cambio di segno volta per volta.
- i numeri della seconda riga, escluso il primo, si ottengono moltiplicando i numeri della terza riga per 2;
- i numeri della terza riga si ottengono: il primo semplicemente riscrivendo il coefficiente direttore del polinomio dividendo (4), poi sommando i numeri della prima e seconda riga..

Nelle attività di verifica proporremo altri esempi di questa regola, intitolata al matematico italiano Paolo Ruffini. Stiamo attenti ad applicare la precedente regola di Ruffini.

Esempio 12

Utilizzando la regola di Ruffini è possibile effettuare la seguente divisione? $\left(4m^3-5m^2+3m-2\right):\left(2m-3\right)$.

Proviamo: $\begin{array}{r|rrr|r} 4 & -5 & 3 & -2 \\ 3 & & 12 & 21 & 72 \\ \hline & 4 & 7 & 24 & 70 \end{array}$ Il quoziente dovrebbe perciò essere $4m^2+7m+24$, il resto 70. Verifichiamo se questi valori sono corretti.

$$\left(4m^2+7m+24\right)\cdot\left(2m-3\right)+70=8m^3-12m^2+14m^2-21m+48m-72+70=8m^3+2m^2+27m-2$$

Niente da fare. In effetti la regola si applica solo quando il coefficiente direttore del polinomio divisore è uguale a $+1$, mentre in questo caso esso è 2. Come dobbiamo allora comportarci?

Per risolvere la precedente questione cerchiamo di far diventare il coefficiente direttore come lo vorremmo, cioè $+1$. Naturalmente non possiamo cambiare solo questo coefficiente, ma dobbiamo variare anche gli altri. Vediamo un esempio.

Esempio 13

Sempre riferendoci alla divisione precedente, dividiamo tutti coefficienti dei polinomi dividendo e divisore per 2: $\left(\frac{4}{2}m^3-\frac{5}{2}m^2+\frac{3}{2}m-\frac{2}{2}\right):\left(\frac{2}{2}m-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow\left(2m^3-\frac{5}{2}m^2+\frac{3}{2}m-1\right):\left(m-\frac{3}{2}\right)$. Adesso possiamo eseguire questa divisione con la regola di Ruffini. $\begin{array}{r|rrr|r} 2 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & & \frac{6}{2} & \frac{3}{4} & \frac{27}{8} \\ \hline & 2 & \frac{1}{2} & \frac{9}{4} & \frac{19}{8} \end{array}$ Il quoziente dovrebbe essere $2m^2+\frac{1}{2}m+\frac{9}{4}$, il resto invece $\frac{19}{8}$. Verifichiamo anche stavolta.

$$\left(2m^2+\frac{1}{2}m+\frac{9}{4}\right)\cdot\left(2m-3\right)+\frac{19}{8}=4m^3-6m^2+m^2-\frac{3}{2}m+\frac{9}{2}m-\frac{27}{4}+\frac{19}{8}=4m^3-5m^2+3m-\frac{35}{8}$$

Ancora una volta il risultato non è corretto, ma è meno "errato" del precedente, difatti la differenza è limitata solo ai termini noti. Quindi la strada è buona, anche se non ottima. Effettuando la divisione nel modo per così dire standard, otteniamo come quoziente quello trovato, e come resto $\frac{19}{4}$.

L'esempio precedente ci dice che fare in modo che il coefficiente direttore divenga 1 è un buon suggerimento, ma deve essere migliorato con qualche altro accorgimento. Del resto, essendo limitato al termine noto l'errore esso deve riguardare solo il resto.

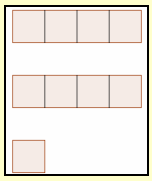
Esempio 14

Dato che abbiamo ottenuto lo stesso quoziente, ma diverso resto, conviene applicare la regola di Ruffini e poi cercare di modificare il resto così ottenuto. Abbiamo ottenuto $\frac{19}{8}$ invece di $\frac{19}{4}$, si vede facilmente la relazione fra i due numeri: $\frac{19}{4}=\frac{19}{8}\cdot 2$. E 2 è proprio il numero per cui abbiamo diviso all'inizio. Quindi possiamo pensare che per ottenere il corretto resto basta moltiplicare per 2 quello ottenuto.

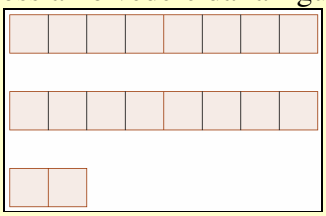
Quanto ottenuto nell'esempio precedente potrebbe essere solo un caso. Vediamo che non è così.

Esempio 15

Abbiamo 9 oggetti da dividere in parti uguali fra 4 persone. Da un punto di vista elementare ciò significa che dobbiamo prendere nove oggetti e raggrupparli a 4 a 4; così facendo avanza 1 oggetto (il resto), come visualizzato di seguito.



Quindi 9 : 4 = 2, con resto 1. Adesso supponiamo invece di avere 18 oggetti da dividere fra 8 persone; dato che 18 è il doppio di 9 e 8 il doppio di 4, ci aspettiamo che ogni persona riceva lo stesso numero di oggetti della divisione precedente. Infatti, raggruppando i diciotto oggetti a 8 a 8, il numero dei gruppi è ancora 2, però anche il resto è raddoppiato, come possiamo vedere dalla figura seguente.



Quindi effettivamente se moltiplichiamo o dividiamo tutti i coefficienti del polinomio dividendo e del divisore per un numero h, la nuova divisione ha lo stesso quoziente della vecchia, il suo resto invece non è quello corretto, ma deve essere diviso o moltiplicato per il numero h.

Possiamo perciò enunciare il seguente risultato.

Teorema 5

La divisione $P(x) : (ax - b)$ ha lo stesso quoziente della divisione $\frac{P(x)}{a}:\left(x-\frac{b}{a}\right)$ ma, detti R e R' i resti delle due divisioni, si ha: $R = R' \cdot a$.

Considerando la regola di Ruffini, possiamo dire che se il resto della divisione è 0 allora il dividendo è un multiplo del divisore. Possiamo ottenere facilmente questo resto.

Esempio 16

Determiniamo il resto della divisione $(5t^3-4t^2+t-1):(t-2)$. Applichiamo la regola di Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 5 & -4 & 1 & -1 \\ 2 & & 10 & 12 & 26 \\ \hline & 5 & 6 & 13 & 25 \end{array}$$

Il quoziente è $5t^2+6t+13$, il resto è 25. Notiamo che questo resto si ottiene anche con questa espressione più semplice: $5\cdot 2^3-4\cdot 2^2+2-1=5\cdot 8-4\cdot 4+2-1=40-16+2-1=25$, cioè, "calcolando" il valore del polinomio dividendo per l'opposto del termine noto del divisore.

In effetti vale il seguente teorema.

Teorema 6 (del resto o di Ruffini)

Il resto della divisione $p(x):(x-a)$, con $p(x)$ polinomio nell'unica variabile x, è $p(a)$.

Dal precedente segue l'immediato corollario seguente.

Corollario 1

Condizione necessaria e sufficiente affinché il polinomio in una sola variabile $p(x)$ sia divisibile per il binomio $(x - a)$ è che si abbia $p(a) = 0$.

I protagonisti



Paolo Ruffini nacque a Valentano (VT) il 22 settembre1765 . In seguito al trasferimento della famiglia a Reggio Emilia, nel 1783 si iscrisse all'Università di Modena, dove studiò matematica, medicina, filosofia e letteratura. Nel 1787 si laureò in filosofia e medicina e, poco tempo dopo, anche in matematica. Nel 1788 fu chiamato a insegnare analisi nella stessa Università di Modena,incarico che abbandonò nel 1798 perché rifiutò di firmare l'atto di fedeltà alla neonata Repubblica Cisalpina. Fu anche un eccellente medico.
In campo matematico ebbe il merito di aver proposto per primo, nel 1798, nella memoria Teoria generale delle equazioni, una dimostrazione, purtroppo non perfetta, del fatto che le equazioni di grado superiore al quarto non possono risolversi con il solo uso dei radicali. Nel 1814 fu nominato rettore dell'Università di Modena e in questa città si spense il 10 maggio 1822.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Determinare quoziente e resto della divisione $(3x^6-2x^4+x^3-5x+1):(x+2)$.

Dato che il polinomio dividendo è in una incognita e quello divisore è un binomio di primo grado nella stessa incognita, possiamo applicare la regola di Ruffini.

$$\begin{array}{c|cccccc|c} & 3 & 0 & -2 & 1 & 0 & -5 & 1 \\ -2 & & -6 & 12 & -20 & 38 & -76 & 162 \\ \hline & 3 & -6 & 10 & -19 & 38 & -81 & 163 \end{array}$$

Il polinomio quozientedeve essere di un grado inferiore al dividendo, quindi di quinto grado; i suoi coefficienti si prelevano dalla precedente tabella. Cioè: $3x^5-6x^4+10x^3-19x^2+38x-81$. Il resto è il numero163.

Determinare quoziente e resto delle seguenti divisioni di polinomi, utilizzando opportunamente la regola di Ruffini

***Livello* 1**

1. a) $(5n^5-3n^4+n^2-4n-1):(n-2)$; b) $(6x^3-x+1):(x+1)$

$[\text{a) } 5n^4+7n^3+14n^2+29n+54,\ 107;\ \text{b) } 6x^2-6x+5,\ -4]$

2. a) $(y^4-y^3+y^2-11):(y+1)$; b) $(a^5+3a^4+2a^3-a^2-19a-5):(a+3)$

$[\text{a) } y^3-2n^2+3y-3,\ -8;\ \text{b) } a^4+2a^2-7a+2,\ -11]$

3. a) $(c^3-2c^2+c-14):(c+2)$; b) $(5b^8+10b^7+4b^5+8b^4-b^3+6b^2+3b-2):(b+1)$

$[\text{a) } c^2-4c+9,\ -32;\ \text{b) } 5b^7+5b^6-5b^5+9b^4-b^3+6b-3,\ 1]$

4. a) $(7c^9-28c^8+5c^6-20c^5-c^3+15c^2-48c+43):(c-1)$; b) $(d^5-d-13):(d-4)$

$[\text{a) } 7c^8-21c^7-21c^6-16c^5-36c^4-36c^3-37c^2-22c-70,\ -27;\ \text{b) } d^4+4d^3+16d^2+64d+255,\ 1007]$

5. a) $(4d^7-17d^6-23d^5+40d^4-2d^2+11d-2):(d-5)$; b) $(x^7-x^3):(x-1)$

$[\text{a) } 4d^6+3d^5-8d^4-2d+1,\ 3;\ \text{b) } x^6+x^5+x^4+x^3,\ 0]$

6. a) $(6e^6+48e^5+42e^4-6e^3-39e^2+9e-86):(e+7)$; b) $(7y^5-y^3+12):(y-3)$

$[\text{a) } 6e^5+6e^4-6e^2+3e-12,\ -2;\ \text{b) } 7y^4+21y^3+62y^2+186y+558,\ 1686]$

7. a) $(11h^4-h^3-h^2+h-1):(h-5)$; b) $(7k^3-11k^2+12k-13):(k-3)$

$[\text{a) } 11h^3+54h^2+269h+1346,\ 6729;\ \text{b) } 7k^2+10k+42,\ 113]$

8. a) $(15j^6-30j^5+17j^4-34j^3-19j^2+69j-99):(j-2)$; b) $(12a^4-a^3-24):(a-4)$

$[\text{a) } 15j^5+17j^3-19j+31,\ -37;\ \text{b) } 12a^3+47a^2+188a+752,\ 2984]$

9. a) $(7k^9+2k^8-3k^5-k^4+k^3-2k+22):(k+2)$; b) $(21k^4+3):(k-3)$

$[\text{a) } 7k^8-12k^7+24k^6-48k^5+93k^4-187k^3+375k^2-750k+1498,\ -2794;\text{b) } 21k^3+63k^2+189k+567,\ 1704]$

10. a) $(2w^7-3w+1):(w-1)$; b) $(b^5-5b^4+3b^3-12b):(b+2)$

$[\text{a) } 2w^6+2w^5+2w^4+2w^3+2w^2+2w-1,\ 0;\ \text{b) } b^4-7b^3+17b^2-34b+56,\ -112]$

11. a) $(q^6-1):(q-1)$; b) $\left(t^4-\frac{1}{4}\right):\left(t+\frac{1}{2}\right)$ $\left[\text{a) } q^5+q^4+q^3+q^2+q+1,\ 0;\ \text{b) } t^3-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{4}t-\frac{1}{8},\ -\frac{3}{16}\right]$

12. a) $(5u^5-3u^4+3u^2-u+1):(u+2)$; b) $(32c^3-31c+30):(c-6)$

$[\text{a) } 5u^4-13u^3+26u^2-49u+97,\ -193;\ \text{b) } 32c^2+192c+1121,\ 6756]$

13. a) $(-2d^5-3d^3+3d^2-4):(d+1)$; b) $(-5e^4+13e^2+5):(e-6)$

$[\text{a) } -2d^4+2d^3-5d^2+8d-8,\ 4;\ \text{b) } 6-5e^3-30e^2-167e-1002,\ -6007]$

14. a) $(2u^4-u^3-2u^2-2u+1):(u+3)$; b) $(15z^4-14z^2+13):(z-10)$

$[\text{a) } 2u^3-7u^2+19u-59,\ 178;\ \text{b) } 15z^3+150z^2+1486z+14860,\ 148613]$

15. a) $(a^7-5a^5+a^3-a-26):(a+2)$; b) $\left(x^3-x^2+1\right):\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$\left[\text{a) } a^6-2a^5-a^4+2a^3-3a^2+6a-13,\ 0;\ \text{b) } x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4},\ \frac{7}{8}\right]$

16. a) $\left(2b^5+3b^4-4b^3-\frac{1}{2}\right):(b+1)$; b) $\left(\frac{1}{3}x^4-1\right):(x-2)$

$\left[\text{a) } 2b^4+b^3-5b^2+5b-5,\ \frac{9}{2};\ \text{b) } \frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{8}{3},\ \frac{13}{3}\right]$

17. a) $(c^5-7c^2-2):(c-3)$; b) $\left(-\frac{3}{2}y^3-1\right):\left(y-\frac{1}{3}\right)$

$\left[\text{a) } 5c^4+3c^3+9c^2+20c+60,\ 178;\ \text{b) } -\frac{3}{2}y^2-\frac{1}{2}y-\frac{1}{6},\ -\frac{19}{18}\right]$

18. a) $\left(x^5-x^4+2x^3-x^2+3x-1\right):\left(x-\frac{1}{2}\right)$; b) $\left(\frac{1}{2}z^3+\frac{1}{2}z^2-3\right):(z+2)$

$\left[\text{a) } x^4-\frac{1}{2}x^3+\frac{7}{4}x^2-\frac{1}{8}x+\frac{47}{16},\ \frac{15}{32};\ \text{b) } \frac{1}{2}z^2-\frac{1}{2}z+1,\ -5\right]$

Lavoriamo insieme

Determinare quoziente e resto della divisione $(5x^4+3x^3-x^2-3):(3x+1)$. Per potere applicare la regola di Ruffini, dobbiamo fare in modo che il coefficiente direttore del polinomio dividendo sia 1, pertanto dividiamo ciascun coefficiente per 3, ottenendo: $\left(\frac{5}{3}x^4+x^3-\frac{1}{3}x^2-1\right):\left(x+\frac{1}{3}\right)$. Questa divisione ha lo stesso quoziente di quella data, ma resto diverso. Cominciamo intanto a trovare quoziente e resto di questa.

$$\begin{array}{c|cccc|c} & \frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & -1 \\ -\frac{1}{3} & & -\frac{5}{9} & -\frac{4}{27} & \frac{13}{81} & -\frac{13}{243} \\ \hline & \frac{5}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{13}{27} & \frac{13}{81} & -\frac{256}{243} \end{array}$$

Il quoziente è $\frac{5}{3}x^3+\frac{4}{9}x^2-\frac{13}{27}x+\frac{13}{81}$. Per ottenere il resto invece dobbiamo moltiplicare per 3 quello ottenuto, quindi esso è $-\frac{256}{243}\cdot 3=-\frac{256}{81}$.

Usando opportunamente la regola di Ruffini determinare quoziente e resto delle seguenti divisioni
Livello 2

19. a) $\left(x^3-x^2+x-1\right):\left(3x+2\right)$; b) $\left(y^3+3y-1\right):\left(-y+1\right)$ $\left[\text{a) } \frac{1}{3}x^3-\frac{5}{9}x+\frac{19}{27},\ -\frac{65}{27};\ \text{b) } -y^2-y-4,\ 3\right]$

20. a) $\left(12m^5-4m^4+6m^3-14m^2+10m-7\right):\left(3m-1\right)$; b) $\left(3t^4+3\right):\left(-2t-1\right)$

$\left[\text{a) } 4m^4+2m^2-4m+2,\ -5;\ \text{b) } -\frac{3}{2}t^3+\frac{3}{4}t^2-\frac{3}{8}t+\frac{3}{16},\ \frac{51}{16}\right]$

21. a) $\left(20n^5+27n^3-19n^4+8n-18n^2-5\right):\left(4n-3\right)$; b) $\left(3p^4-p^2+1\right):\left(2p+5\right)$

$\left[\text{a) } 5n^4-n^3+6n^2+2,\ 1;\ \text{b) } \frac{3}{2}p^3-\frac{15}{4}p^2+\frac{71}{8}p-\frac{355}{16},\ \frac{1791}{16}\right]$

22. a) $\left(15p^5+6p^3-19p^4-p+6p^2-4\right):\left(3p-2\right)$; b) $\left(4a^4+3a^3-1\right):\left(-3a+4\right)$

$\left[\text{a) } 5p^4-3p^3+2p+1,\ -2;\ \text{b) } -\frac{4}{3}a^3-\frac{25}{9}a^2-\frac{100}{27}a-\frac{400}{81},\ \frac{1519}{81}\right]$

23. a) $\left(6b^5-11b^4+9b^3-9b^2-13+8b\right):\left(2b-3\right)$; b) $\left(4c^5+3c^4-c+2\right):\left(5c+1\right)$

$\left[\text{a) } 3b^4-b^3+3b^2+4,\ -1;\ \text{b) } \frac{4}{5}c^4+\frac{11}{25}c^3-\frac{11}{25}c^2+\frac{11}{625}c-\frac{636}{3125},\ \frac{6886}{3125}\right]$

24. a) $\left(18x^5+3x^2-39x^4+2x+20x^3-3\right):\left(3x-4\right)$; b) $\left(3y^5-4y^2\right):\left(-3y-2\right)$

$\left[\text{a) } 6x^4+9x^3+\frac{17}{3}x^2+\frac{68}{9}x+\frac{290}{27},\ \frac{1079}{27};\ \text{b) } -\text{y}^4+\frac{2}{3}y^3-\frac{4}{9}y^2+\frac{44}{27}y-\frac{88}{81},\ -\frac{176}{81}\right]$

25. a) $\left(6x^5-9x^4-10x^3+27x^2-20x+6\right):\left(2x-3\right)$; b) $\left(4m-3m^3+1-4m^2\right):\left(4-2m\right)$

$\left[\text{a) } 3x^4-5x^2+6x-1,\ 3;\ \text{b) } \frac{3}{2}m^2+5m+8,\ -31\right]$

26. a) $\left(t^4-t^2+t-1\right):\left(3t+2\right)$; b) $\left(4w^5+w-3w^2+1\right):\left(1-2w\right)$

$\left[\text{a) } \frac{1}{3}t^3-\frac{2}{9}t^2-\frac{5}{27}t+\frac{37}{81},\ -\frac{155}{81};\ \text{b) } -2w^4-w^3-\frac{1}{2}w^2+\frac{5}{4}w+\frac{1}{8},\ \frac{7}{8}\right]$

27. a) $\left(4u^4-3u^3+2u^2-u\right):\left(2u-1\right)$; b) $\left(6v^3-v^2+1-3v^4\right):\left(3v+4\right)$

$\left[\text{a) } 2u^3+\frac{1}{2}u^2+\frac{5}{4}u+\frac{1}{8},\ \frac{1}{8};\ \text{b) } -\text{v}^3+\frac{10}{3}v^2-\frac{43}{9}v+\frac{172}{27},\ -\frac{661}{27}\right]$

28. a) $\left(4y^3+y^2+2y+1\right):\left(2-y\right)$; b) $\left(5a-4a^3+a^2-7\right):\left(3-2a\right)$

$\left[\text{a) } -4y^2-9y-20,\ 41;\ \text{b) } 2a^2+\frac{5}{2}a+\frac{5}{4},\ -\frac{43}{4}\right]$

29. a) $\left(\frac{1}{2}r^3-\frac{1}{2}r^2+r-\frac{1}{4}\right):\left(\frac{1}{2}r-\frac{1}{3}\right)$; b) $\left(2z^5-3\right):\left(\frac{2}{3}z-1\right)$

$\left[\text{a) } r^2-\frac{70}{3}r-\frac{122}{9},\ -\frac{515}{108};\ \text{b) } 3\text{z}^4+\frac{9}{2}z^3+\frac{27}{4}z^2+\frac{81}{8}z+\frac{243}{16},\ \frac{195}{16}\right]$

30. a) $\left(\frac{1}{2}y^4-\frac{1}{3}y^3+y^2-\frac{2}{3}\right):\left(3y+1\right)$; b) $\left(\frac{3}{2}b^3-b^2+b\right):\left(4b-1\right)$

$\left[\text{a) } -\frac{1}{9}y^4+\frac{11}{54}y^3-\frac{11}{162}y^2+\frac{11}{486}y-\frac{11}{1458},\ -\frac{961}{1458};\ \text{b) } \frac{3}{8}b^2-\frac{5}{32}b+\frac{27}{128},\ \frac{27}{128}\right]$

31. a) $\left(4h^4+2h^3-3h^2+4h-5\right):\left(2h-\frac{1}{3}\right)$; b) $\left(3t^4+2t-\frac{3}{2}\right):\left(2t+\frac{1}{2}\right)$

$\left[\text{a) } 2h^3+\frac{4}{3}h^2-\frac{23}{18}h+\frac{193}{108},\ -\frac{1427}{324};\ \text{b) } \frac{3}{2}t^3-\frac{3}{8}t^2+\frac{3}{32}t+\frac{125}{128},\ -\frac{509}{256}\right]$

32. a) $\left(k^6-k^5+k-1\right):\left(2k-\frac{1}{3}\right)$; b) $\left(2j^4+1\right):\left(\frac{3}{4}j-1\right)$

$\left[\text{a) } \frac{1}{2}k^5-\frac{5}{12}k^4-\frac{5}{72}k^3-\frac{5}{432}k^2-\frac{5}{2592}k+\frac{7771}{15552},\ -\frac{38885}{46656};\ \text{b) } \frac{8}{3}j^3+\frac{32}{9}j^2+\frac{128}{27}j+\frac{512}{81},\ \frac{593}{81}\right]$

33. a) $\left(z^5-\frac{1}{2}z^3+\frac{4}{3}z^2-2\right):(2z-3)$; b) $\left(2m^5+3m-m^2+8\right):(3m+1)$

$\left[\text{a) } \frac{1}{2}z^4+\frac{3}{4}z^3+\frac{7}{8}z^2+\frac{95}{48}z+\frac{95}{32},\ \frac{221}{32};\ \text{b) } \frac{2}{3}m^4-\frac{2}{9}m^3+\frac{2}{27}m^2-\frac{29}{81}m+\frac{272}{243},\ \frac{1672}{243}\right]$

34. $\left(m^7+m^6-m^5+m^4-m^3+m^2-m+1\right):(2m+3)$; b) $\left(p^7-p^5+p^3-p+1\right):(1-p)$

$\left[\text{a) } \frac{1}{2}m^6-\frac{1}{4}m^5-\frac{1}{8}m^4+\frac{11}{16}m^3-\frac{49}{32}m^2+\frac{179}{64}m-\frac{601}{128},\ \frac{1931}{128};\ \text{b) } -p^6-p^5-p^2-p,\ 1\right]$

35. a) $\left(\frac{1}{2}y^4-\frac{1}{3}y^3+y^2-\frac{2}{3}\right):\left(y+\frac{1}{4}\right)$; b) $\left(\frac{1}{2}z^5-\frac{1}{4}z^3+\frac{2}{3}z^2-1\right):\left(z-\frac{1}{2}\right)$

$\left[\text{a) } \frac{y^3}{2}-\frac{11}{24}y^2+\frac{107}{96}y-\frac{107}{384},-\frac{917}{1536};\ \text{b) } \frac{z^4}{2}+\frac{z^3}{4}-\frac{z^2}{8}+\frac{29}{48}z-\frac{163}{192}\right]$

Livello 3

Nei seguenti quesiti n indica un numero naturale

36. a) $(x^n+1):(x-1)$; b) $(x^n+n):(x-2)$; c) $(x^n+1):(x+1)$; d) $(x^n+n):(x+1)$
37. Determinare il valore di n nella seguente divisione $(x^n+n):(x-1)$, sapendo che essa ha resto 73.
38. Determinare il valore di n nella seguente divisione $(x^n+n):(x+1)$, sapendo che essa ha resto 100.

Lavoriamo insieme

Determinare il resto della divisione $(3m^6-2m^4+m^2-1):\left(m^2+\frac{2}{3}\right)$. Per poter applicare il teorema del resto, sostituiamo: $m^2=x$, $m^4=(m^2)^2=x^2$, $m^6=(m^2)^3=x^3$; pertanto la divisione viene trasformata nella seguente: $(3x^3-2x^2+x-1):\left(x+\frac{2}{3}\right)$, alla quale possiamo applicare il teorema del resto, ottenendo:

$$R=3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}-1=3\cdot\frac{8}{27}-2\cdot\frac{4}{9}+\frac{2}{3}-1=\frac{8}{9}-\frac{8}{9}+\frac{2}{3}-1=\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}.$$

Usando opportunamente la regola di Ruffini determinare quoziente e resto delle seguenti divisioni

Livello 2

39. a) $(d^6-d^4+d^2-2):(d^2-1)$; b) $(a^8-2a^6-a^2+3):(2a^2-1)$; c) $(b^9-3b^6+b^3-1):(-3b^3+4)$

$\left[\text{a) } d^4+1,-1;\ \text{b) } \frac{a^6}{2}-\frac{3}{4}a^4-\frac{3}{8}a^2-\frac{11}{16},\frac{37}{16};\ \text{c) } -\frac{b^6}{3}+\frac{5}{9}b^3+\frac{11}{27},-\frac{71}{27}\right]$

40. a) $\left(c^{12}-2c^8+c^4-\frac{1}{3}\right):\left(c^4-1\right)$; b) $(p^{12}-1):(p^4+1)$; c) $\left(\frac{3}{2}r^{12}-\frac{1}{2}r^9+r^6-\frac{1}{3}r^3+\frac{1}{5}\right):\left(-2r^3+\frac{2}{3}\right)$

$\left[\text{a) } c^8-c^4,-\frac{1}{3};\ \text{b) } p^8-p^4+1,-2;\ \text{c) } -\frac{3}{4}r^9-\frac{1}{2}r^3,\frac{1}{5}\right]$

41. a) $\left(\frac{1}{2}c^{15}-c^5-\frac{1}{2}\right):\left(c^5+1\right)$; b) $(d^6-d^4+d^2-2):(d^2-1)$; c) $(x^{64}-x^{48}+x^{16}-1):(x^{16}-2)$

$\left[\text{a) } \frac{1}{2}c^{10}-\frac{1}{2}c^5-\frac{1}{2},0;\ \text{b) } d^4+1,3;\ \text{c) } x^{48}+x^{32}+2x^{16}+5,9\right]$

42. a) $(a^8 - 2a^6 + 3a^4 - a^2 + 3) : \left(a^2 - \frac{1}{2}\right)$; b) $(x^6 - x^2 + 1) : (x^2 + 1)$; c) $(b^9 - 3b^6 + b^3 - 1) : (b^3 + 2)$

$\left[\text{a) } a^6 - \frac{3}{2}a^4 + \frac{9}{4}a^2 + \frac{1}{8}, \frac{49}{16};\ \text{b) } x^4 - x^2, 1;\ \text{c) } b^6 - 5b^3 + 11, -23\right]$

Lavoriamo insieme

Calcolare il resto della divisione $(4a^5 - a^3 + 3a - 2) : (a + 1)$, senza svolgerla. Per il teorema del resto basta sostituire ad a il valore –1. Abbiamo così:

$$R = 4 \cdot (-1)^5 - (-1)^3 + 3 \cdot (-1) - 2 = 4 \cdot (-1) - (-1) - 3 - 2 = -4 + 1 - 5 = -8 .$$

Calcolare il resto della divisione $(3x^4 - 2x^3 + x + 5) : (2x - 1)$, senza svolgerla. Anche in questo caso possiamo applicare il teorema del resto si ha perciò:

$$R = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} + 5 = 3 \cdot \frac{1}{16} - 2 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + 5 = \frac{3}{16} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 5 = \frac{3 - 4 + 8 + 80}{16} = \frac{87}{16} .$$

Utilizzando la regola del resto calcolarlo nelle seguenti divisioni, senza svolgerle

Livello 1

43. a) $(x^5 - 1) : (x - 1)$; b) $(x^7 + 2) : (x + 1)$; c) $(a^{51} + 51) : (a + 1)$ [a) 0; b) 1 ; c) 50]

44. a) $(z^5 - z^3 + z - 1) : (z - 2)$; b) $(t^6 + t^2 - 3) : (t + 2)$; c) $(40m^{40} - 41) : (m - 1)$ [a) 25; b) 65 ; c) –1]

45. a) $(x^5 - x^4 + x^3 - x + 1) : (x - 3)$; b) $(p^3 + p^2 - 4) : (p + 3)$ [a) 187; b) –22]

46. a) $(y^5 + 2y^4 + 3y^3 + 4y^2 + 5y + 6) : (y + 1)$; b) $(y^5 - 2y^4 + 3y^3 - 4y^2 + 5y - 6) : (y - 1)$ [a) 3; b) –3]

47. a) $(3u^4 - 3u^3 + 2u^2 - 2u + 1) : (u - 2)$; b) $(15v^2 - 16v + 17) : (v + 7)$ [a) 29; b) 864]

48. a) $(a^7 - 5a^5 + a^3 - a - 26) : (a + 2)$; b) $(b^4 + 12b^2 - 13) : (b - 9)$ [a) 0; b) 7520]

49. a) $(b^6 - 2b^5 + 3b^4 - 4b^3 + 5b^2 - 6b + 7) : (2b + 1)$; b) $(x^4 + 100x^2 - 101) : (3x - 2)$ $\left[\text{a) } \frac{769}{64};\ \text{b) } -\frac{4565}{81}\right]$

50. a) $\left(\frac{1}{2}z^3 + \frac{2}{3}z^2 - \frac{1}{3}\right) : (z - 2)$; b) $\left(m^4 + m^2 - 15\right) : \left(\frac{1}{2}m - 3\right)$ $\left[\text{a) } \frac{19}{3};\ \text{b) } 1317\right]$

51. a) $\left(\frac{4}{3}n^4 - \frac{3}{2}n^3 + \frac{1}{2}n^2\right) : \left(n + \frac{3}{2}\right)$; b) $\left(-\frac{1}{4}y^3 - y^2 + y - \frac{1}{2}\right) : \left(-\frac{1}{2}y - 3\right)$ $\left[\text{a) } \frac{207}{16};\ \text{b) } \frac{23}{2}\right]$

52. a) $(m^7 + m^6 - m^5 + m^4 - 111) : (m - 2)$; b) $(m^5 - 101m^4 + m^3 - 102) : (m - 3)$ [a) 65; b) –8013]

53. a) $\left(\frac{4}{3}y^4 - y^3 + 15\right) : \left(\frac{2}{3}y - 1\right)$; b) $\left(t^5 - t^4 - 125t^2 - 120\right) : \left(t - \frac{1}{2}\right)$ $\left[\text{a) } \frac{147}{8};\ \text{b) } -\frac{4841}{32}\right]$

L'angolo delle correzioni

Correggere gli errori commessi nei seguenti esercizi svolti

1. $\left(3x^3-x+2x^2-1\right):\left(x-2\right)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & & 6 & 10 & 24 \\ \hline & 3 & 5 & 12 & 23 \end{array}$$

$Q(x)=3x^2+5x+12,\ R=23$

2. $\left(5x^4-x^2+2x-3\right):\left(x-1\right)$

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 5 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & & 5 & 4 & 6 \\ \hline & 5 & 4 & 6 & 3 \end{array}$$

$Q(x)=5x^3+4x^2+6x,\ R=3$

3. $\left(7x^5-4x^4+3x^3+2x^2-x-1\right):\left(x+1\right)$

$$\begin{array}{r|rrrrr|r} & 7 & -4 & 3 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & & 7 & 3 & 6 & 8 & 7 \\ \hline & 7 & 3 & 6 & 8 & 7 & 6 \end{array}$$

$Q(x)=7x^4+3x^3+6x^2+8x+7,\ R=6$

4. $\left(3x^4+x^3-x^2+x\right):\left(x-3\right)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & & 9 & 30 & 87 \\ \hline & 3 & 10 & 29 & 88 \end{array}$$

$Q(x)=3x^2+10x+29,\ R=88$

5. $(5x^3+x^2-x+1):(2x-3)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 5 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & & 15 & 48 & 141 \\ \hline & 5 & 16 & 47 & 142 \end{array}$$

$Q(x)=5x^2+16x+47,\ R=142$

Scomposizione dei polinomi in fattori. Prodotti notevoli nelle scomposizioni

Abbiamo visto come una frazione algebrica può scriversi sempre come somma di un polinomio e di un'altra frazione algebrica in cui il numeratore è un polinomio di grado inferiore a quello del denominatore. Ciò però non ci permette di eseguire facilmente le operazioni algebriche fra queste frazioni, dato che per sommare frazioni, algebriche o no, dobbiamo eseguire il minimo comune multiplo dei denominatori, quindi dobbiamo imparare a scomporre i polinomi in fattori. Questo è quello che ci proponiamo di fare in questo paragrafo.
Tenuto conto che l'uguaglianza fra numeri, ma anche fra polinomi, è una relazione di equivalenza e quindi gode della proprietà simmetrica, risultano immediate le seguenti scomposizioni, nonché tutte le altre che si ottengono dai prodotti notevoli già presentati.

1. $x^2 - y^2 = (x+y)\cdot(x-y)$
2. $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$
3. $x^3 \pm y^3 = (x \pm y)\cdot(x^2 \mp xy + y^2)$

Questo ci consente di semplificare, in modo analogo alle frazioni numeriche, le frazioni algebriche formate da polinomi risultato di uno sviluppo di prodotti notevoli. Supporremo, per il momento, che tutte le frazioni algebriche abbiano il denominatore diverso da zero; ci occuperemo in seguito della discussione delle eventuali condizioni di esistenza.

Esempio 17

- Semplificare la frazione algebrica: $\frac{16x^2 - 9y^2}{16x^2 - 24xy + 9y^2}$. Riconosciamo nel numeratore una differenza di quadrati e nel denominatore un quadrato di binomio, pertanto possiamo scrivere
$$\frac{\cancel{(4x-3y)}\cdot(4x+3y)}{\cancel{(4x-3y)^2}} = \frac{4x+3y}{4x-3y}$$
- Semplificare: $\frac{4m^2n^2 + 12mn^2p + 9n^2p^2}{8m^3n^3 + 36m^2n^3p + 54mn^3p^2 + 27n^3p^3}$. Il numeratore è un quadrato di binomio, mentre il denominatore un cubo di binomio, quindi si ha $\frac{\cancel{(2mn+3np)^2}}{\cancel{(2mn+3np)^3}} = \frac{1}{2mn+3np}$.
- Semplificare: $\frac{8x^3 - a^3}{4x^2 - a^2}$. Al numeratore abbiamo una differenza di cubi e al denominatore una differenza di quadrati, scriviamo perciò $\frac{(2x-a)(4x^2+2ax+a^2)}{(2x-a)(2x+a)} = \frac{4x^2+2ax+a^2}{2x+a}$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Scomporre, se possibile, i seguenti polinomi.

- $169x^2-49y^4$. Con due termini pensiamo che possa essere un prodotto notevole del tipo differenza di quadrati. In effetti così è, pertanto si ha: $169x^2-49y^4=(13x)^2-(7y^2)^2=(13x-7y^2)\cdot(13x+7y^2)$.
- $64a-121$. Pensiamo ancora a una differenza di quadrati, solo che il primo monomio non è un quadrato, solo il coefficiente è il quadrato di 8, la parte letterale non lo è, quindi non scomponiamo il binomio.
- $\frac{1}{4}x^6+\frac{3}{2}x^2+9$. Dato che abbiamo a che fare con un trinomio, pensiamo che possa essere lo sviluppo di un quadrato di un binomio. Vediamo se i tre termini verificano le proprietà di un tale prodotto notevole.
$$\left(\frac{1}{2}x^3\right)^6+\frac{3}{2}x^2+3^2.$$
Abbiamo effettivamente i due quadrati, vediamo se il terzo monomio è doppio prodotto delle basi dei due quadrati: $2\cdot\frac{1}{2}x^3\cdot 3=3x^3$. Niente da fare, non abbiamo un quadrato di binomio. Non scomponiamo il trinomio.
- $25a^4+10a^2b^3+b^6$. Ancora una volta pensiamo di avere un quadrato di binomio. Vediamo.
$$25a^4+10a^2b^3+b^6=(5a^2)+2\cdot(5a^2)\cdot(b^3)+(b^3)^2=(5a^2+b^3)^2.$$
Stavolta ci siamo.
- $8z^3+125y^6$. Avendo un binomio formato dalla somma di due monomi pensiamo a una somma di cubi. vediamo se ciò è vero. $8z^3+125y^6=(2z)^3+(5y^2)^3$. Possiamo scomporre utilizzando l'adeguato sviluppo, cioè: $8z^3+125y^6=(2z)^3+(5y^2)^3=(2z+5y^2)\cdot\left[(2z)^2+2z\cdot 5y^2+(5y^2)^2\right]=(2z+5y^2)\cdot(4z^2+10y^2z+25y^4)$.
- $27a^5-b^9$. Potremmo avere una differenza di cubi, ma stavolta il primo monomio non è un cubo, dato che il suo esponente non è un multiplo di 3.
- x^6-y^{12}. In questo caso gli esponenti sono sia pari, sia multipli di 3, quindi possiamo considerare il polinomio sia come differenza di quadrati, sia come differenza di cubi. Abbiamo allora:
$$x^6-y^{12}=(x^3-y^6)\cdot(x^3+y^6)=(x-y^2)\cdot(x^2+xy^2+y^4)\cdot(x+y^2)\cdot(x^2-xy^2+y^4)$$
nel primo caso, e $x^6-y^{12}=(x^2-y^4)\cdot(x^4+x^2y^4+y^8)=(x-y^2)\cdot(x+y^2)\cdot(x^4+x^2y^4+y^8)$ nel secondo. Evidentemente i due sviluppi devono coincidere, ciò significa che abbiamo trovato la seguente scomposizione: $x^4+x^2y^4+y^8=(x^2+xy^2+y^4)\cdot(x^2-xy^2+y^4)$, che difficilmente avremmo trovato in altro modo.

Scomporre, ove possibile i seguenti polinomi nell'insieme dei numeri razionali. Applicare, laddove necessario, le formule seguenti, in cui A, B e C rappresentano in generale dei polinomi

$$A^2-B^2=(A-B)\cdot(A+B);\ A^2+2AB+B^2=(A+B)^2;\ A^3+3A^2B+3AB^2+B^3=(A+B)^3$$
$$A^3-B^3=(A-B)\cdot(A^2+AB+B^2);\ A^3+B^3=(A+B)\cdot(A^2-AB+B^2)$$

Livello 1

1. a) x^2-4z^4; b) $3n^3+2$; c) $24x^4-1$ $\quad\left[\text{a) } (x+2z^2)\cdot(x-2z^2);\ \text{b) } 3n^3+2;\ \text{c) } 24x^4-1\right]$
2. a) a^4+4b^2; b) $-9m^4n^6+16$; c) $27y^3-1$ $\quad\left[\text{a) } a^4+4b^2;\ \text{b) } (4+3m^2n^3)\cdot(4-3m^2n^3);\ \text{c) } (3y-1)\cdot(9y^2+3y+1)\right]$
3. a) $12k^3+1$; b) $4y^3-1$; c) $\frac{4}{9}z^2t^6-\frac{1}{25}$ $\quad\left[\text{a) } 12k^3+1;\ \text{b) } 4y^3-1;\ \text{c) } \left(\frac{2}{3}zt^3-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}zt^3+\frac{1}{5}\right)\right]$

4. a) $625p^8-324q^4$; b) $-a^2-b^4$; c) $32y^3-a^3$

$\left[\text{a) } \left(25p^4+18q^2\right)\cdot\left(25p^4-18q^2\right);\ \text{b) } -a^2-b^4;\ \text{c) } 32y^3-a^3\right]$

5. a) x^3+64; b) $12x^2-y^4$; c) $8p^9+125$

$\left[\text{a) } (x+4)\cdot\left(x^2-4x+16\right);\ \text{b) } 12x^2-y^4;\ \text{c) } \left(2p^3+5\right)\cdot\left(4p^6-10p^3+25\right)\right]$

6. a) $m^4+2m^2n+n^2$; b) n^4-4n^2-1; c) x^8-2x^4+1

$\left[\text{a) } \left(m^2+n\right)^2;\ \text{b) } n^4-4n^2-1;\ \text{c) } (x+1)^2\cdot(x-1)^2\cdot\left(x^2+1\right)^2\right]$

7. a) x^6-12x^3+9; b) $16x^3+8x+1$; c) $25t^4-10t^2+1$

$\left[\text{a) } x^6-12x^3+9;\ \text{b) } 16x^3+8x+1;\ \text{c) } \left(5t^2-1\right)^2\right]$

8. a) $a^2-10b+1$; b) $9a^2-6a+1$; c) x^6+216y^3

$\left[\text{a) } a^2-10b+1;\ \text{b) } (3a-1)^2;\ \text{c) } \left(x^2+6y\right)\cdot\left(x^4-6x^2y+36y^2\right)\right]$

9. a) $144y^{12}+264x^3y^6+121x^6$; b) m^3-3m^2+3m-1; c) x^3-3x^2-3x+1

$\left[\text{a) } \left(11x^3+12y^6\right)^2;\ \text{b) } (m-1)^3;\ \text{c) } (x+1)\cdot\left(x^2-4x+1\right)\right]$

10. a) n^6+3n^2-3n+1; b) $27p^3+54p^2+36p+8$; c) $a^{15}-b^{12}$

$\left[\text{a) } n^6+3n^2-3n+1;\ \text{b) } (3p+2)^3;\ \text{c) } \left(a^5-b^4\right)\cdot\left(a^{10}+a^5b^4+b^8\right)\right]$

11. a) $a^3b^3+3a^2b^2c+3abc^2+c^3$; b) $8t^3+3t^2v+3tv^2+v^3$; c) $w^{12}-9y^6$

$\left[\text{a) } (ab+c)^3;\ \text{b) } 8t^3+3t^2v+3tv^2+v^3;\ \text{c) } \left(w^6+3y^3\right)\cdot\left(w^6-3y^3\right)\right]$

12. a) $8h^3-1$; b) y^6+27a^2; c) $x^4+y^2+1-2x^2y+2x^2-2x^2y$

$\left[\text{a) } (2h-1)\cdot\left(4h^2+2h+1\right);\ \text{b) } y^6+27a^2;\ \text{c) } x^4+y^2+1-2x^2y+2x^2-2x^2y\right]$

13. a) $8z^{24}-27t^{21}$; b) $64b^3-3q$; c) x^2-y^2+2xy

$\left[\text{a) } \left(2z^8-3t^7\right)\cdot\left(4z^{16}+6t^7z^8+9t^{14}\right);\ \text{b) } 64b^3-3q;\ \text{c) } x^2-y^2+2xy\right]$

14. a) $a^3-3a^2b+3ab^3-b^3$; b) $\frac{1}{8}p^3+\frac{3}{4}p^2+\frac{3}{2}p+1$; c) $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2+4+x^2+\frac{4}{3}y+\frac{1}{3}xy$

$\left[\text{a) } a^3-3a^2b+3ab^3-b^3;\ \text{b) } \left(\frac{1}{2}p+1\right)^3;\ \text{c) } \frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2+4+x^2+\frac{4}{3}y+\frac{1}{3}xy\right]$

15. a) $a^2+2ab-2a+b^2-2b+1$; b) $\frac{1}{4}v^4-v^2+4$; c) $216+z^9$

$\left[\text{a) } (a+b-1)^2;\ \text{b) } \frac{1}{4}v^4-v^2+4;\ \text{c) } \left(z^3+6\right)\cdot\left(z^6-6z^3+36\right)\right]$

16. a) $-a^3-b^3$; b) m^5-n; c) $\frac{16}{25}a^2+1-\frac{4}{5}a$

$\left[\text{a) } (-a-b)\cdot\left(a^2-ab+b^2\right);\ \text{b) } m^5-n;\ \text{c) } \frac{16}{25}a^2+1-\frac{4}{5}a\right]$

17. a) $\frac{8}{27}a^6-a^4x^3+\frac{9}{8}a^2x^6-\frac{27}{64}x^9$; b) $\frac{4}{25}a^2x^4-\frac{3}{10}axy+\frac{9}{64}y^2$; c) $a^2+2ax-a+x^2-x+\frac{1}{4}$

$\left[\text{a) } \left(\frac{2}{5}a^2+\frac{3}{4}x^3\right)^3;\ \text{b) } \frac{4}{25}a^2x^4-\frac{3}{10}axy+\frac{9}{64}y^2;\ \text{c) } \left(a+x-\frac{1}{2}\right)^2\right]$

18. a) $\frac{1}{125}a^3x^9-\frac{6}{25}a^2x^6+\frac{12}{5}ax^3-8$; b) $\frac{1}{27}n^9+1$; c) $2x^{12}-\frac{8}{27}$

$\left[\text{a) } \left(\frac{1}{5}ax^3-2\right)^3;\ \text{b) } \left(\frac{1}{3}n^3+1\right)\cdot\left(\frac{1}{9}n^6+\frac{1}{3}n^3+1\right);\ \text{c) } 2x^{12}-\frac{8}{27}\right]$

19. a) $125k^9-1$; b) $64m^4-1$; c) $121z^8-169$

$\left[\text{a) } \left(5k^3-1\right)\cdot\left(25k^6+5k^3+1\right);\ \text{b) } \left(8m^2-1\right)\cdot\left(8m^2+1\right);\ \text{c) } \left(11z^4+13\right)\cdot\left(11z^4-13\right)\right]$

20. a) $\frac{49}{16}m^4-\frac{7}{2}m^2n+n^2$; b) $a^3p^3+b^6$; c) xy^3-1

$\left[\text{a) } \left(\frac{7}{4}m^2-n\right)^2;\ \text{b) } \left(ap+b^2\right)\cdot\left(a^2p^2-ab^2p+b^4\right);\ \text{c) } xy^3-1\right]$

Lavoriamo insieme

Scomporre in fattori

- $(x + 3a + 2)^2 – (4x – 1 + 5a)^2$. Anche se le basi sono dei polinomi e non dei monomi, abbiamo sempre a che fare con una differenza di quadrati. Pertanto possiamo applicare la ben nota regola, scrivendo:
$$(x + 3a + 2)^2 – (4x – 1 + 5a)^2 = [(x + 3a + 2) – (4x – 1 + 5a)] \cdot [(x + 3a + 2) +(4x – 1 + 5a)] =$$
$$= [x + 3a + 2 – 4x + 1 – 5a\ ] \cdot [5x + 8a + 1] = (– 3x + 3 – 2a\ ) \cdot (5x + 8a + 1)$$
- $(2 + z)^3 + (4 – z + a)^3$. Come visto in precedenza anche questo è un prodotto notevole: la somma di cubi. Scriviamo: $(2 + z)^3 + (4 – z + a)^3 = [(2 + z) + (4 – z + a)] \cdot [(2 + z)^2 – (2 + z) \cdot (4 – z + a) + (4 – z + a)^2] =$
$= (6 + a) \cdot (4 + z^2 + 4z – 8 + 2z – 2a – 4z + z^2 – az + 16 + z^2 + a^2 – 8z +8a –2az) = (6 + a) \cdot (3z^2 + a^2 – 6z + 12 – 3az + 6a)$.

Scomporre in fattori, ove possibile, le seguenti espressioni polinomie

Livello 2

21. a) $\left(a^4+\frac{1}{a^4}\right)^2-\left(a^4-\frac{1}{a^4}\right)^2$; b) $\left(b^{17}-\frac{1}{b^{17}}\right)^2-\left(b^{17}+\frac{1}{b^{17}}\right)^2$; c) $(x + 1)^2 – (x – 1)^2$

22. a) $(a – b + 1)^2 – (a + b)^2$; b) $(x – y + 1)^2 – (x – 2y)^2$; $(z + 2t)^2 + 2 \cdot (z + 2t) + 1$

23. a) $(m – n)^2 – 2 \cdot (m + n) + 1$; b) $(a + b)^2 – 2 \cdot (a^2 – b^2) + (a – b)^2$

24. a) $(t – 2)^3 + 3 \cdot (t – 2)^2 + 3 \cdot (t – 2) + 1$; b) $(a + 5)^3 + 3 \cdot (a + 5)^2 + 3 \cdot (a + 5) – 1$

25. a) $(2a + 1)^3 + 3 \cdot (2a + 1)^2 \cdot (a – 2) + 3 \cdot (2a + 1) \cdot (a – 2)^2 + (a – 2)^3$

26. a) $a^3 – (a – 2)^3$; $(m + 2)^3 – (m –1)^3$; b) $(x^3 – 1)^3 – (x^3 + 1)^3$; $(b + 4)^3 + 8$

27. a) $(2z –1)^6 + 12$; b) $(a + b – 1)^3 + (a – b + 1)^3$; c) $(3x + 2y – 1)^2 – (4x + 3y + 5)^2$

28. a) $(a + 2b – c)^2 – (2a + 3c – b)^2$; b) $(4a – m + 2t)^2 – (3a + m – 3t)^2$; c) $(3 + x^2 – y)^2 – (x^2 + 3y – 1)^2$

29. a) $(4 + a^3 – 2b^2)^2 – (2 – a^3 + b^2)^2$; b) $(a^2 + a^3 – 1)^2 – (3a^3 – 2a^2 + 3)^2$

Livello 3

30. a) $x^2 – 2y^2 – xy – x – y$ (*Suggerimento*:. scrivere $–2y^2$ come $–y^2 – y^2$) b) $n^4 + 4$

31. a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 28$; b) $27z^3 + 36z – 54\ z^2 – 72$; c) $ab \cdot (a + b) – (a^2 – b^2)$

Lavoriamo insieme

- Semplificare la frazione algebrica $\frac{4y^4-9z^2}{4y^4+12x^2z+9z^2}$. Cerchiamo di scomporre numeratore e denominatore, che riconosciamo essere prodotti notevoli. Abbiamo quindi $\frac{\left(2y^2-3z\right)\cdot\cancel{\left(2y^2+3z\right)}}{\cancel{\left(2y^2+3z\right)}}=\frac{2y^2-3z}{2y^2+3z}$. Non sono possibili ulteriori semplificazioni.

- Semplificare $\frac{8x^3-t^6}{4x^2+4t^2x+t^4}$. Scomponiamo $\frac{(2x-t^2)\cdot(4x^2+2t^2x+t^4)}{(2x+t^2)^2}$, non possiamo semplificare, la frazione era già ridotta ai minimi termini.
- Semplificare $\frac{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}{x+y}$. Scomponiamo il numeratore, essendo il denominatore irriducibile. $\frac{(x+y)^{\cancel{3}2}}{\cancel{x+y}}=(x+y)^2$.

Ridurre ai minimi termini le seguenti frazioni algebriche

Livello 1

32. a) $\frac{u^2-9v^2}{u+3v}$; b) $\frac{a+b}{a^2+2ab+b^2}$; c) $\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}$ $\left[\text{a) } u-3v;\ \text{b) } \frac{1}{a+b};\ \text{c) } \frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}\right]$

33. a) $\frac{a^3+3a^2-3a+1}{a-1}$; b) $\frac{4x^2+12xy+9y^2}{4x^2-9y^2}$; c) $\frac{x^6-8}{x^4+2x^2+4}$ $\left[\text{a) } \frac{a^3+3a^2-3a+1}{a-1};\ \text{b) } \frac{2x+3y}{2x-3y};\ \text{c) } x^2-2\right]$

34. a) $\frac{25g^2-9h^{42}}{25g^2-30gh^{21}+9h^{42}}$; b) $\frac{4a^2+2ab+b^2}{2a+b}$; c) $\frac{9m^6-4p^4}{27m^9+8p^6}$ $\left[\text{a) } \frac{5g+3h^{21}}{5g-3h^{21}};\ \text{b) } \frac{4a^2+2ab+b^2}{2a+b};\ \text{c) } \frac{3m^3-2p^2}{9m^6-6m^3p^2+4p^4}\right]$

35. a) $\frac{9m^2+6mn+4n^2}{9m^2-4n^2}$; b) $\frac{a^2+2ab+b^2+c^2+2ac}{a+b+c}$; c) $\frac{64m^3-27t^3}{64m^2-9t^2}$ $\left[\text{a) } \frac{9m^2+6mn+4n^2}{9m^2-4n^2};\ \text{b) } \frac{a^2+2ab+b^2+c^2+2ac}{a+b+c};\ \text{c) } \frac{64m^3-27t^3}{64m^2-9t^2}\right]$

36. a) $\frac{v^6-\frac{1}{64}u^6}{\left(v-\frac{1}{2}u\right)\cdot\left(v^2+\frac{1}{2}uv+\frac{1}{4}u^2\right)}$; b) $\frac{(3x-4y)^4}{27x^3-108x^2y+144xy^2-64y^3}$; c) $\frac{a^6-b^6}{(a^2-b^2)\cdot(a^2+ab+b^2)}$ $\left[\text{a) } \frac{u^4-2u^3v+8uv^3-16v^4}{8\cdot(1-2v)};\ \text{b) } 3x-4y;\ \text{c) } a^2-ab+b^2\right]$

37. a) $\frac{64k^4-49h^{12}}{64k^4+112k^2h^6+49h^{12}}$; b) $\frac{x^2+2xy-2xz-2yz+y^2+z^2}{(x+y-z)^3}$; c) $\frac{27v^3-1}{(9v^2+3v+1)^2}$ $\left[\text{a) } \frac{8k^2-7h^6}{8k^2+7h^6};\ \text{b) } \frac{1}{x+y-z};\ \text{c) } \frac{3v-1}{9v^2+3v+1}\right]$

38. a) $\frac{27h^3-8k^6}{9h^2-4k^4}$; b) $\frac{h^4-4y^4+4h^2y^2}{h^2-4y^4}$; c) $\frac{(4v^2-1)^2}{(8v^3-1)^3}$ $\left[\text{a) } \frac{9h^2+6hk^2+4k^4}{3h+2k^2};\ \text{b) } \frac{h^4-4y^4+4h^2y^2}{h^2-4y^4};\ \text{c) } \frac{(2v+1)^2}{(2v-1)\cdot(4v^2+2v+1)^3}\right]$

Livello 2

39. a) $\dfrac{m^{16}-2m^8n+n^2}{m^{16}-n^2}$; b) $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2}$; c) $\dfrac{25-x^3}{(5-x)^3}$ $\left[\text{a) } \dfrac{m^8-n}{m^8+n}\text{; b) } \dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2}\text{; c) } \dfrac{25-x^3}{(5-x)^3}\right]$

40. a) $\dfrac{p^2+pq+q^2}{p^3-q^3}$; b) $\dfrac{(2a^2+b)^5}{(4a^4-b^2)^4}$; c) $\dfrac{(1+27m^6)^3}{(1+9m+27m^2+m^3)^2}$

$\left[\text{a) } \dfrac{1}{p-q}\text{; b) } \dfrac{1}{(2a^2+b)\cdot(2a^2-b)^4}\text{; c) } \dfrac{(1+27m^6)^3}{(1+9m+27m^2+m^3)^2}\right]$

41. a) $\dfrac{-d^2+9e^4}{d^4-18d^2e^4+81e^8}$; b) $\dfrac{16w^4-81t^8v^4}{4w^2+9t^4v^2}$; c) $\dfrac{-a^2-9b^4}{(a+3b^2)^3}$

$\left[\text{a) } \dfrac{1}{9e^4-d^2}\text{; b) } 4w^2-9t^4v^2\text{; c) } \dfrac{-a^2-9b^4}{(a+3b^2)^3}\right]$

42. a) $\dfrac{n^6-1}{n^3+1}$; b) $\dfrac{9a^2+b^2}{(3a+b)^5}$; c) $\dfrac{(64a^6-27)^4}{(16a^4-9)^4}$ $\left[\text{a) } n^3-1\text{; b) } \dfrac{9a^2+b^2}{(3a+b)^5}\text{; c) } \dfrac{(16a^4+12a^2+9)^4}{(4a^2+3)^4}\right]$

43. a) $\dfrac{g^2-h^6}{g^6-h^{18}}$; b) $\dfrac{x^8-y^8}{x^2-y^2}$; c) $\dfrac{a^2+b^2+2ab+2a+2b+1}{(a+b+1)^3}$

$\left[\text{a) } \dfrac{1}{g^4+g^2h^6+h^{12}}\text{; b) } x^6+x^4y^2+x^2y^4+y^6\text{; c) } \dfrac{1}{a+b+1}\right]$

44. a) $\dfrac{16a^2b^2-9c^2}{16a^2b^2+24abc+9c^2}$; b) $\dfrac{x^3-8m^3}{x^2-4mx+4m^2}$; c) $\dfrac{5\cdot(a^2-1)\cdot(a^3+1)}{10\cdot(a+1)^2\cdot(a^3-3a^2+3a-1)}$

$\left[\text{a) } \dfrac{4ab-3c}{4ab+3c}\text{; b) } \dfrac{x^2+2mx+4m^2}{x-2m}\text{; c) } \dfrac{a^2-a+1}{2\cdot(a^2-2a+1)}\right]$

45. a) $\dfrac{27q^3+u^3}{81q^4-54q^3u+27q^2u^2-6qu^3+u^4}$; b) $\dfrac{(3x^2+y)^3}{(9x^4-y^2)^4}$; c) $\dfrac{(x^4-9)^3\cdot(x^4+16)}{(x^4-6x^2+9)^3\cdot(x^2+3)^4}$

$\left[\text{a) } \dfrac{3q+u}{9q^2-3qu+u^2}\text{; b) } \dfrac{1}{(3x^2+y)\cdot(3x^2-y)^4}\text{; c) } \dfrac{x^4+16}{(x^2-3)^3\cdot(x^2+3)}\right]$

46. a) $\dfrac{(8y^3+27h^3)\cdot(2y-3)}{(2y+3h)\cdot(9h^2-6hy+4y^2)}$; b) $\dfrac{\left(\dfrac{9}{16}a^2-\dfrac{1}{25}\right)^2}{\left(\dfrac{27}{64}a^3-\dfrac{1}{125}\right)^2}$; c) $\dfrac{(a^2-ab+b^2)\cdot(a^2-b^2+2ab)}{(a^2-b^2)\cdot(a^2+3ab^2-3a^2b-b^3)}$

$\left[\text{a) } 2y-3\text{; b) } \dfrac{400\cdot(15a+4)^2}{(225a^2+60a+16)^2}\text{; c) } \dfrac{(a^2-ab+b^2)\cdot(a^2-b^2+2ab)}{(a^2-b^2)\cdot(a^2+3ab^2-3a^2b-b^3)}\right]$

Messa in evidenza a fattor comune

Dagli sviluppi delle moltiplicazioni fra polinomi si ottengono altre scomposizioni di polinomi in fattori. Consideriamo la moltiplicazione fra un monomio e un polinomio.

Esempio 18

Svolgiamo il seguente prodotto: $2m^3z^2\cdot(3mx-4z)=6m^4xz^2-8m^3z^3$. A causa della validità della proprietà simmetrica dell'uguaglianza possiamo passare facilmente dal polinomio sviluppato alla sua espressione in fattori. Quello che ci chiediamo è come possiamo fare se abbiamo solo il polinomio già sviluppato. Così osserviamo che il fattore $2m^3z^2$, che sarà poi messo in evidenza, altri non è che il massimo comune divisore dei due monomi che compongono il binomio sviluppo. Quindi per effettuare questo tipo di scomposizioni basta cercare appunto il MCD fra i monomi componenti il polinomio.

Tenuto conto dell'esempio precedente enunciamo la seguente regola.

Regola 1 (per la messa in evidenza a fattore comune)

Dato il polinomio $P_1+P_2+...+P_n$, allora si ha $P_1+P_2+...+P_n=MCD(P_1+P_2+...+P_n)\cdot(Q_1+Q_2+...+Q_n)$ dove i monomi Q_i sono il risultato delle divisioni fra i monomi P_i e il Massimo Comune Divisore di tutti i P_i.

È chiaro che la precedente regola è utile solo se il Massimo Comune Divisore è diverso da 1.

Esempio 19

- Scomporre in fattori il polinomio: $-48a^5b^2c+24a^4b^2c^2+60a^3b^3c^2$. Calcoliamo il massimo comune divisore dei tre monomi componenti il polinomio: $MCD(48a^5b^2c,24a^4b^2c^2,60a^3b^3c^2)=12a^3b^2c$. Tenendo conto della regola precedente possiamo perciò scrivere:
$$-48a^5b^2c+24a^4b^2c^2+60a^3b^3c^2=12a^3b^2c\cdot\left(\frac{-48a^5b^2c}{12a^3b^2c}+\frac{24a^4b^2c^2}{12a^3b^2c}+\frac{60a^3b^3c^2}{12a^3b^2c}\right)=12a^3b^2c\cdot(-4a^2+2ac+5bc).$$
La verifica della correttezza di quanto scritto si ottiene eseguendo la moltiplicazione e notando che il polinomio prodotto coincide con quello di partenza.
- Scomporre in fattori il polinomio: $ab - ac + bc$. Poiché MCD(ab, ac, bc) = 1, non riusciamo a scomporre il dato polinomio, almeno non con questa regola.
- Ridurre ai minimi termini la frazione algebrica: $\frac{7ab+14a^2bc}{21a^2bc-7a^2b^2d}$. Possiamo scrivere nel modo seguente:
$$\frac{\cancel{7ab}\cdot(1+2ac)}{\cancel{7}a\cancel{b}\cdot(3c-bd)}=\frac{1+2ac}{a\cdot(3c-bd)}.$$
- Ridurre ai minimi termini la frazione algebrica: $\frac{27m^3-48mn^2}{18m^2-48mn+32n^2}$. Scomponendo numeratore e denominatore otteniamo la seguente frazione: $\frac{3m\cdot(9m^2-16n^2)}{2\cdot(9m^2-24mn+16n^2)}$, che, successivamente, cerchiamo di semplificare. Non abbiamo trovato fattori comuni fra numeratore e denominatore. Ci accorgiamo però che all'interno delle parentesi ci sono gli sviluppi di due prodotti notevoli, differenza di quadrati al numeratore e quadrato di binomio al denominatore. Continuiamo quindi a scomporre e semplificare.
$$\frac{3m\cdot\cancel{(3m-4n)}\cdot(3m+4n)}{2\cdot(3m-4n)^{\cancel{2}}}=\frac{3m\cdot(3m+4n)}{2\cdot(3m-4n)}.$$

La regola enunciata è valida per fattori comuni di qualsiasi genere, quindi anche per polinomi comuni, non solo per monomi. Chiariamo quanto detto con un esempio.

Esempio 20

- Vogliamo scomporre il polinomio $a^2b\cdot(3a-2b)+ab^2\cdot(3a-2b)-a^3\cdot(3a-2b)$. La prima idea che ci viene in mente è probabilmente quella di effettuare le moltiplicazioni, ma in questo caso non è una buona idea. Osserviamo invece che ciascuno dei tre termini del polinomio (che non sono monomi) ha in comune sia il monomio a, sia il binomio $3a - 2b$; possiamo perciò mettere in evidenza proprio il loro prodotto. Scriviamo perciò $a\cdot(3a-2b)\cdot(ab+b^2-a^2)$.
- Scomporre il polinomio $(2a-5b)\cdot(3x-y)+a\cdot(3x-y)^2$. Ancora una volta abbiamo un fattore comune, $3x - y$, che possiamo mettere in evidenza: $(3x-y)\cdot[2a-5b+a\cdot(3x-y)]=(3x-y)\cdot(2a-5b+3ax-ay)$.

Concludiamo il paragrafo con delle applicazioni all'aritmetica.

Esempio 21

- Consideriamo il seguente enunciato: *La somma di tre numeri interi consecutivi è un numero divisibile per* 3. Come possiamo provare un fatto del genere? Parlando di numeri generici dobbiamo dar loro dei nomi generici; possiamo indicarli per esempio con dei monomi. Così un generico numero intero possiamo indicarlo con il simbolo n. E il suo successivo come lo indicheremo? Il passaggio al successivo di un numero è collegato all'operazione aritmetica di sommare una unità. Così il successivo di n è $(n + 1)$ e allo stesso modo il successivo di quest'ultimo è $(n + 2)$. Perciò la generica somma di tre numeri interi consecutivi sarà espressa dalla somma algebrica: $n + (n + 1) + (n + 2)$ (o anche da $(n–1) + n + (n + 1)$ e da altre infinite espressioni equivalenti a queste), cioè dal binomio (effettuando le somme): $3n + 3$. Tale binomio, con una banale messa in evidenza a fattore comune, può però scriversi anche nel modo seguente: $3(n + 1)$. Questa "forma" della generica somma di tre interi consecutivi può essere considerata una dimostrazione dell'enunciato? Certamente sì, poiché essa dice che la predetta somma si può ottenere moltiplicando per 3 il numero $(n + 1)$. È perciò vero che la somma di tre interi consecutivi è un numero divisibile per 3.
- Vogliamo provare la validità del seguente risultato: *Il prodotto di due numeri dispari consecutivi è un numero che diviso per* 4 *ha sempre resto* 1. Ora un numero pari si scrive con il simbolo $2n$ (od uno a esso equivalente), poiché è un numero divisibile per 2. Un numero dispari è il precedente o il consecutivo di un numero pari, perciò si può rappresentare con uno dei due simboli: $2n – 1$ o $2n +1$. Quindi due numeri dispari e consecutivi possono indicarsi per esempio con i simboli $2n – 1$ e $2n + 1$. Se effettuiamo il loro prodotto otteniamo: $(2n+1)\cdot(2n-1)=4n^2-1$, questa è l'espressione del precedente di un multiplo di 4, di un numero cioè che diviso per 4 dà resto 1, cioè la tesi.
- Consideriamo un numero intero di 3 cifre, *abc*, cambiamone l'ordine di lettura, diviene *cba*, sottraiamo i due numeri, vogliamo provare che questa differenza è sempre divisibile per 99. Per avere una risposta a questo quesito dobbiamo scrivere il numero in forma polinomiale, esprimendo la sua base 10. Cioè scriveremo: $10^2\cdot a+10\cdot b+c-(10^2\cdot c+10\cdot b+a)=(10^2-1)\cdot a+(1-10^2)\cdot c=99a-99c=99\cdot(a-c)$. Ciò significa che il numero ottenuto è sempre divisibile per 99.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Scomporre i seguenti polinomi.

- $4x^2y-2xy^2+6xy$. Notiamo che i tre monomi componenti il polinomio hanno in comune il fattore $2xy$ che, quindi, mettiamo in evidenza. Scriviamo perciò: $2xy\cdot(2x-y+3)$.
- a^3-ax^2. Il monomio a è comune, quindi lo mettiamo in evidenza: $a\cdot(a^2-x^2)$, in questo modo abbiamo ottenuto una scomposizione in cui uno dei due fattori, il secondo, è ancora scomponibile. La scomposizione definitiva è perciò: $a\cdot(a-x)\cdot(a+x)$.
- x^4+3x^2-x+1. Non vi sono monomi comuni, né abbiamo a che fare con un prodotto notevole di quelli trattati. Pertanto non possiamo scomporre.

Scomporre in fattori i seguenti polinomi, ove possibile

Livello 1

1. a) $3x^4+x^3$; b) $4a^2+4-a$; c) $b^4+b^3-b^2$ $\left[\text{a) } x^3\cdot(3x+1);\ \text{b) } 4a^2-a+4;\ \text{c) } b^2\cdot(b^2+b-1)\right]$
2. a) $3a^3z+6a^2z^2-3a^2z$; b) $12b^4x^2-4b^2x^2+4bx^2y$; c) $10m^5n-14m^4n-6m^3n+2m^3n$
$\left[\text{a) } 3a^2z\cdot(a+2z-1);\ \text{b) } 4bx^2\cdot(3b^3-b+y);\ \text{c) } 2m^3n\cdot(5m^2-7m-3n+1)\right]$
3. a) $132a^3x-143a^2by+154a^2$; b) $51a^4-85a^3+68a^2-102$; c) m^3-4m^2+3m-n
$\left[\text{a) } 11a^2\cdot(12ax-13by+14);\ \text{b) } 17\cdot(3a^4-5a^3+4a^2-6);\ \text{c) } m^3-4m^2+3m-n\right]$
4. a) $5y^4-5$; b) $15x^2+30x+15$; c) $7a^3-14$
$\left[\text{a) } 5\cdot(y+1)\cdot(y-1)\cdot(y^2+1);\ \text{b) } 15\cdot(x+1)^2;\ \text{c) } 7\cdot(a^3-2)\right]$
5. a) $5n^3-5$; b) $16a^3-72a^2+108a-54$; c) $24a^4+24b^4+48ab^2$
$\left[\text{a) } 5\cdot(n-1)\cdot(n^2+n+1);\ \text{b) } 2\cdot(2a-3)^3;\ \text{c) } 24\cdot(a^4+2ab^2+b^4)\right]$
6. a) $36x^4-64y^6$; b) $ax^2+2axy+ay^2$; c) $12a^3b+36a^2b-36ab^2-12b$
$\left[\text{a) } 4\cdot(3x^2+4y^3)\cdot(3x^2-4y^3);\ \text{b) } a\cdot(x+y^2);\ \text{c) } 12b\cdot(a^3+3a^2-3ab-1)\right]$

Lavoriamo insieme

Scomporre i seguenti polinomi.

- $3\cdot(x+y-1)+a\cdot(x+y-1)$. Non eseguiamo le moltiplicazioni, ma notiamo che il polinomio $x + y - 1$ è comune, quindi lo mettiamo in evidenza. Abbiamo così: $(x+y-1)\cdot(3+a)$.
- $(x^3+2)^2-2x\cdot(x^3+2)$. Il polinomio x^3+2 è comune, lo mettiamo in evidenza. $(x^3+2)\cdot(x^3+2-2x)$.
- $x^2\cdot(a^5-2a+1)-4a^4\cdot(a^5-2a+1)$. Il polinomio (a^5-2a+1) è comune, lo mettiamo in evidenza. $(a^5-2a+1)\cdot(x^2-4a^4)$. Non abbiamo ancora finito perché il secondo fattore è un prodotto notevole.
$$(a^5-2a+1)\cdot(x-2a^2)\cdot(x+2a^2).$$

Scomporre in fattori i seguenti polinomi, ove possibile

Livello 2

7. a) $2\cdot(x-1)+3a\cdot(x-1)$; b) $a^2x\cdot(y+1)-ay\cdot(y+1)$; c) $4z^2\cdot(z-3)+2\cdot(z-3)$
$\left[\text{a) } (x-1)\cdot(3a+2);\ \text{b) } a\cdot(y+1)\cdot(ax-y);\ \text{c) } 2\cdot(z-3)\cdot(2z^2+1)\right]$

8. a) $4m^2\cdot(p+2)-5m\cdot(p-2)$; b) $3t^2\cdot(x-y+1)-3z^2\cdot(x+y-1)$; c) $h^3\cdot(a-c)+8\cdot(a-c)$
[a) $m\cdot(4mp+8m-5p+10)$; b) $3\cdot(t^2x-ty+t^2-xz^2-yz^2+z^2)$; c) $(a-c)\cdot(h+2)\cdot(h^2-2h+4)$]

9. a) $4t^2\cdot(xy+3)^2-(xy+3)^2$; b) $5y^4\cdot(2y+z)^3-y\cdot(2y+z)^2$; c) $13m^5\cdot(a+b-5)-26m\cdot(a-b+5)$
[a) $(xy+3)\cdot(4t^2-xy-3)$; b) $y\cdot(2y+z)^2\cdot(10y^4+5y^3z-1)$; c) $13m\cdot(am^4-2a+bm^4+2b-5m^4-10)$]

10. a) $(x-2)\cdot(3x+5)+(4x-1)\cdot(3x+5)$; b) $(a^2-1)^3-(a^2-1)^2$; c) $t^2\cdot(t+y-1)^2-4\cdot(t+y-1)$
[a) $(5x-3)\cdot(3x+5)$; b) $(a+1)^2\cdot(a-1)^2\cdot(a^2-2)$; c) $(t+y-1)\cdot(t^3+t^2y-t^2-4)$]

11. a) $(a^3+15)^2+12\cdot(a^3+15)$; b) $(y^2-7)^3-2\cdot(y^2-7)^2$; c) $3a\cdot(t^2-4)+4b\cdot(t^2+4)$
[a) $(a+3)\cdot(a^2-3a+9)\cdot(a^3+15)$; b) $(y+3)\cdot(y-3)\cdot(y^2-7)^2$; c) $3a\cdot(t^2-4+4bt^2+16b)$]

12. a) $(3x+y)\cdot(2x+1)+(3x+y)\cdot(4y+3)$; b) $(4x+t-1)\cdot(3x-2t)+(4x+t-1)\cdot(2x+3t)$
[a) $2\cdot(x+2y+1)\cdot(3x+y)$; b) $(4x+t-1)\cdot(5x+t)$]

13. a) $3x\cdot(x-y)+5y\cdot(x-y)$; b) $(4a+b-1)\cdot(2c+3z)+(4a+b-1)\cdot(3c-2z)$
[a) $(x-y)\cdot(3x+5y)$; b) $(z+5c)\cdot(4a+b-1)$]

14. a) $(3x+2y-1)\cdot(4z+t)+(3x+2y-1)\cdot(3z-2t)$; b) $(m^2-3)^2-7\cdot(m^2-3)$
[a) $(7z-t)\cdot(3x+2y-1)$; b) $(m^2-3)\cdot(m^2-10)$]

Livello 3

15. $(5a+b)\cdot(3a-2b)+(5a+b)^2-(5a+b)\cdot(4a-3b)$ [$2\cdot(2a+b)\cdot(5a+b$]

16. $(x+2y)\cdot(3x-5y)^2+(x-2y)\cdot(9x^2-25y^2)-(x-2y)^2\cdot(3x-5y)$ [$(3x-5y)\cdot(5x^2+4xy-24y^2)$]

17. $(3a-b)\cdot(a+3b)\cdot(a+b)-(a+3b)^2\cdot(3a+b)+2\cdot(a^2-9b^2)\cdot(3a-b)$
[$2\cdot(a+3b)\cdot(3a^2-14ab+b^2)$]

18. a) $7x\cdot(x-2y)^2+3y\cdot(x^2-4y^2)$; b) $4a\cdot(b+c)^3-3b\cdot(b^3+c^3)$; c) $x^2\cdot(x-2)-y^2\cdot(x-2)$
[$(x-2y)\cdot(7x^2-11xx+6y^2)$; b) $(b+c)\cdot(4ab^2+8abc+4ac^2-3b^3+3b^2c-3bc^2)$; c) $(x-2)\cdot(x^2-y^2)$]

Lavoriamo insieme

Ridurre ai minimi termini le seguenti frazioni algebriche.

- $\dfrac{2xy+y}{4x^2+4x+1}$. Scomponiamo in fattori numeratore e denominatore: $\dfrac{2xy+y}{4x^2+4x+1}=\dfrac{y\cdot(2x+1)}{(2x+1)^2}=\dfrac{y}{2x+1}$.
- $\dfrac{x^3-xy^2}{x^3-2x^2y+xy^2}$. Scomponiamo in fattori numeratore e denominatore:
$$\frac{x\cdot(x^2-y^2)}{x\cdot(x^2-2xy+y^2)}=\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}=\frac{(x-y)\cdot(x+y)}{(x+y)^2}=\frac{x-y}{x+y}.$$
- $\dfrac{ax\cdot(x^2-4)-by\cdot(x^2-4)}{x\cdot(ax-by)+2\cdot(ax-by)}$. Scomponiamo in fattori numeratore e denominatore:
$$\frac{(x^2-4)\cdot(ax-by)}{(ax-by)\cdot(x+2)}=\frac{(x+2)\cdot(x-2)}{x+2}=x-2.$$

Ridurre ai minimi termini le seguenti frazioni algebriche

Livello 1

19. a) $\dfrac{x^3y-3x^4y^2}{x^2y^3-3x^2y^2}$; b) $\dfrac{tx+x^2}{tx-x^2}$; c) $\dfrac{500a^2-400b^2}{1000a+2000b}$ [a) $\dfrac{x\cdot(3xy-1)}{y\cdot(3-y)}$; b) $\dfrac{t+x}{t-x}$; c) $\dfrac{5a^2-4b^2}{10\cdot(a+2b)}$]

20. a) $\frac{b^5-bn^4}{ab^3+abn^2}$; b) $\frac{14tx^2-7t^2x}{12x^3-3t^2}$; c) $\frac{5a^2+5b^2}{10\cdot\left(a^2+2ab+b^2\right)^2}$

$\left[\text{a) } \frac{b^2-n^2}{a};\ \text{b) } \frac{14tx^2-7t^2x}{12x^3-3t^2};\ \text{c) } \frac{a^2+b^2}{2\cdot\left(a^2+2ab+b^2\right)^2}\right]$

21. a) $\frac{13ax-26ay+39az}{3bz-2by+bx}$; b) $\frac{2a^4x^4-4a^2x^2+2}{4a^2x^2-8ax+4}$; c) $\frac{11z^3+11t^6}{11z^2+22zt^2+11t^4}$

$\left[\text{a) } \frac{13a}{b};\ \text{b) } \frac{a^2x^2+2ax+1}{2};\ \text{c) } \frac{z^2-t^2+t^4}{z+t^2}\right]$

22. a) $\frac{a^3m-b^3m}{a^2q+abq+b^2q}$; b) $\frac{12m^3-27mn^4}{6mq-9n^2q}$; c) $\frac{x^4+2x^3+x^2}{x^4+3x^3+3x^2+x}$

$\left[\text{a) } \frac{m\cdot(a-b)}{q};\ \text{b) } \frac{m\cdot\left(2m+3n^2\right)}{q};\ \text{c) } \frac{x}{x+1}\right]$

23. a) $\frac{4x^4-4}{8x^6+8}$; b) $\frac{12x^2-12t^2}{15x^3+15}$; c) $\frac{ab^2+a^2b}{ab\cdot\left(a^2-2ab+b^2\right)}$

$\left[\text{a) } \frac{x^2-1}{2\cdot\left(x^4-x^2+1\right)};\ \text{b) } \frac{4\cdot\left(x^2-t^2\right)}{5\cdot\left(x^3+1\right)};\ \text{c) } \frac{a+b}{a^2-2ab+b^2}\right]$

Livello 2

24. a) $\frac{x\cdot(a+2)-y\cdot(a+2)}{a^2-4}$; b) $\frac{z^2\cdot(a+1)-9\cdot(a+1)}{xz+3x}$; c) $\frac{14a^2\cdot(a+2)-7\cdot(a+2)}{7a\cdot(a-2)+14\cdot(a-2)}$

$\left[\text{a) } \frac{x-y}{a-2};\ \text{b) } \frac{(a+1)\cdot(z-3)}{x};\ \text{c) } \frac{2a^2-1}{a-2}\right]$

25. a) $\frac{4\cdot\left(t^2+z^2\right)-a^2\cdot\left(t^2+z^2\right)}{a^2-4a+4}$; b) $\frac{5p^3\cdot\left(m^2-1\right)-5\cdot\left(m^2-1\right)}{(m-1)\cdot\left(p^2-p+1\right)}$; c) $\frac{x^3\cdot\left(x^2-x+1\right)-2\cdot\left(x^2-x+1\right)}{x\cdot\left(x^3-1\right)-2\cdot\left(x^3-1\right)}$

$\left[\text{a) } \frac{\left(t^2+z^2\right)\cdot(a+2)}{2-a};\ \text{b) } \frac{5\cdot(m+1)\cdot\left(p^3-1\right)}{p^2-p+1};\ \text{c) } \frac{\left(x^2-x+1\right)\cdot\left(x^3-2\right)}{\left(x^3-1\right)\cdot(x-2)}\right]$

26. a) $\frac{(axy+3)\cdot(axy-2)-(axy-3)\cdot(axy-2)}{6axy-12}$; b) $\frac{\left(x^4-3\right)\cdot(x+1)+2\cdot(x+1)}{\left(x^2+2x+1\right)^4}$ $\left[\text{a) } 1;\ \text{b) } \frac{x^3-x^2+x-1}{(x+1)^6}\right]$

27. a) $\frac{(3m-p)\cdot(m+1)-(2m+p)\cdot(m+1)}{(m-2p)^3}$; b) $\frac{(4m-9)\cdot(p-2x)-(m+1)\cdot(p-2x)}{x^2-4px+4p^2}$

$\left[\text{a) } \frac{m+1}{(m-2p)^2};\ \text{b) } \frac{(10-3m)\cdot(2x-p)}{x^2-4px+4p^2}\right]$

28. a) $\frac{\left(x^6+2\right)\cdot\left(x^3-1\right)+\left(x^6+6\right)\cdot\left(x^3-1\right)}{\left(2x^6+10\right)\cdot\left(2x^3+5\right)-\left(2x^6+10\right)\cdot\left(x^3+6\right)}$; b) $\frac{(ax+3)^2\cdot(a-x)+(ax+3)^3\cdot(a+x)}{\left(a^2x^2+ax+5\right)\cdot(a-2x)+(5ax+4)\cdot(a-2x)}$

$\left[\text{a) } \frac{x^6+4}{x^6+5};\ \text{b) } \frac{ax^2+a^2x+2x+4a}{a-2x}\right]$

Lavoriamo insieme

Sapendo che i simboli a e b rappresentano due numeri naturali tali che $a - b = 4$ e $a^2 + b^2 = 58$, vogliamo sapere che numero rappresenta l'espressione $a^3 - b^3$. Non cerchiamo di determinare i singoli valori di a e di b (il quale fatto conduce ugualmente alla soluzione del quesito, ma in modo più difficoltoso), determiniamo invece il valore dell'espressione data. Noi sappiamo che $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) = 4 \cdot (a^2 + ab + b^2)$. Così possiamo sostituire un valore numerico solo alla prima espressione; però conosciamo il valore di una parte della seconda, quindi possiamo scrivere: $a^3 - b^3 = 4 \cdot (a^2 + b^2 + ab) = 4 \cdot (58 + ab)$. Abbiamo ottenuto una espressione di $a^3 - b^3$ nella quale vi sono molti numeri, ma non ancora un unico numero. Osserviamo allora che $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 58 - 2ab$, cioè $4^2 = 58 - 2ab$, ciò vuol dire che $2ab = 42$ (infatti $16 = 58 - 42$), quindi $ab = 21$. Abbiamo trovato il termine che non conoscevamo. Possiamo infine scrivere:

$$a^3 - b^3 = 4 \cdot (58 + 21) = 316.$$

Provare i seguenti enunciati o risolvere i problemi in essi proposti

Livello 2

29. La somma di due numeri pari è un numero pari ; La differenza di due numeri dispari è un numero pari
30. Il prodotto di due numeri dispari è un numero dispari
31. La somma di 5 interi consecutivi è un numero divisibile per 5
32. La somma di 4 numeri interi consecutivi non è un numero divisibile per 4
33. Il prodotto di quattro numeri interi consecutivi differisce da un quadrato perfetto di una unità
34. La somma dei cubi di due numeri dispari consecutivi è un multiplo di 4

Livello 3

35. Consideriamo un numero intero di 4 cifre, *abcd*, cambiamone l'ordine di lettura, diviene *dcba*, sottraiamo i due numeri. Il numero così ottenuto è divisibile per quale numero? [9]
36. Sapendo che $a + b = 3$ e $a^2 + b^2 = 6$, trovare il valore numerico di $a^3 + b^3$. [45/2]
37. Se $x + y = 5$ e $x^2 + 3xy + 2y^2 = 40$, quanto vale $2x + 4y$? [14]
38. Se $x + \frac{1}{x} = 3$; $a = x^2 + \frac{1}{x^2}$; $b = x^3 + \frac{1}{x^3}$. Trovare il valore di $a + b$. [25]
39. Sapendo che $x + y + 2z = 4$, $2x + y + z = 4$ e $x + 2y + z = 4$, determinare il valore numerico di $x^2 + y^2 + z^2$. (Suggerimento: sottrarre opportunamente). [3]
40. Dato un quadrinomio il fatto che i suoi coefficienti siano 3 positivi e uno negativo è condizione necessaria e/o sufficiente affinché il quadrinomio non sia scomponibile con il metodo del raccoglimento parziale? [Sufficiente]

Messa in evidenza con raggruppamenti parziali

Tenuto conto degli esempi precedenti, presentiamo un altro metodo di messa in evidenza che può talvolta usarsi quando non vi sono fattori comuni..

Esempio 22

Consideriamo il polinomio $15a^3+3a^2x-20ax-4x^2$. Il massimo comune divisore dei singoli monomi è 1, quindi non possiamo applicare la messa in evidenza a fattor comune; non abbiamo a che fare neanche con un prodotto notevole, almeno non di quelli a noi noti. Osserviamo però che possiamo mettere in evidenza a fattor comune a gruppi. Possiamo cioè scrivere: $3a^2\cdot(5a+x)-4x\cdot(5a+x)$. Così facendo abbiamo riscritto il polinomio non come prodotto, ma in modo che vi sia adesso un fattore comune, il binomio $5a + x$, che perciò possiamo mettere in evidenza: $(5a+x)\cdot(3a^2-4x)$. Avremmo potuto raggruppare anche in modo diverso: $5a\cdot(3a^2-4x)+x\cdot(3a^2-4x)=(3a^2-4x)\cdot(5a+x)$. Naturalmente il risultato non cambia, se non, eventualmente, nell'ordine di scrittura.

Non sempre il precedente metodo è applicabile con successo.

Esempio 23

Scomporre il polinomio: $ab + ac – bc + a$. Comunque cerchiamo di raggruppare i monomi per mettere in evidenza non riusciamo a ottenere alcun fattore comune

$$a\cdot(b+c)-(bc-a);\ b\cdot(a-c)+a\cdot(c+1);\ a\cdot(b+1)+c\cdot(a-b)$$

Del resto per affermare che non era possibile la scomposizione parziale, bastava osservare che vi sono tre segni + e un solo segno –.

Vediamo esempi di semplificazione di frazioni algebriche.

Esempio 24

- Semplificare la frazione: $\frac{60ab-24a+15b-6}{96a^2+48a+6}$. Cominciamo a raccogliere i fattori comuni: $\frac{3\cdot(20ab-8a+5b-2)}{6\cdot(16a^2+8a+1)}$. Adesso mettiamo in evidenza parzialmente al numeratore, mentre al denominatore riconosciamo un quadrato di binomio: $\frac{3\cdot[5b\cdot(4a+1)-2\cdot(4a+1)]}{6\cdot(4a+1)^2}=\frac{3\cdot(4a+1)\cdot(5b-2)}{6\cdot(4a+1)^2}$. Infine semplifichiamo i fattori comuni, ottenendo la frazione ridotta ai minimi termini: $\frac{5b-2}{2\cdot(4a+1)}$.
- Semplificare la frazione: $\frac{324z^3+648z^2+432z+96}{36z^2-16}$. La riduzione ai minimi termini è illustrata di seguito: $\frac{12^3\cdot(27z^3+54z^2+36z+8)}{4\cdot(9z^2-4)}=\frac{3\cdot(3z+2)^3}{(3z+2)\cdot(3z-2)}=\frac{3\cdot(3z+2)^2}{3z-2}$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Scomporre in fattori i seguenti polinomi.

- $2amx + 2x - 3am - 3$. Non vi sono fattori comuni, né può essere un cubo di binomio, nonostante sia un quadrinomio. L'ultima alternativa è allora quella di raccogliere parzialmente. Scriviamo perciò
$$2amx + 2x - 3am - 3 = 2x \cdot (am + 1) - 3\,(am + 1).$$
Abbiamo così ottenuto un fattore comune, il binomio $am + 1$, che mettiamo in evidenza
$$2amx + 2x - 3am - 3 = (am + 1) \cdot (2x - 3).$$
- $7x^2 - 11x + 14y - 22y^2$. Cerchiamo di mettere in evidenza parzialmente. $x \cdot (7x - 11) + 2y \cdot (7 - 11y)$. Niente da fare, proviamo qualche altro raggruppamento $7 \cdot (x^2 + 2y) - 11 \cdot (x - 2y^2)$. Concludiamo dicendo che il polinomio non è scomponibile, almeno non con le tecniche finora note.
- $x^2 - 2xy^2 + 3xy + x - 6y^3 + 3y$. Stavolta il polinomio ha 6 termini invece di 4, quindi dobbiamo cercare di formare o due gruppi di tre monomi o tre gruppi di due monomi. Nel primo caso si ha: $x \cdot (x - 2y + 1) + 3y \cdot (x - 2y + 3)$ e quindi $(x - 2y + 1) \cdot (x + 3y)$. Invece raggruppando a due a due abbiamo:
$$x \cdot (x + 3y) - 2y^2 \cdot (x + 3y) + x + 3y = (x + 3y) \cdot (x - 2y + 1).$$
Naturalmente il risultato finale non cambia.

Scomporre in fattori i seguenti polinomi, ove possibile, utilizzando il metodo del raccoglimento parziale

Livello 1

1. a) $-3ab + ac - 6b^2 + 2bc$; b) $28ax^2 + 7a - 8bx^2 - 2b$; c) $15mn + 10mp - 3np^3 + 2p^4$
[a) $(a + 2b) \cdot (c - 3b)$; b) $(4x^2 + 1) \cdot (7a - 2b)$; c) $15mn + 10mp - 3np^3 + 2p^4$]

2. a) $2abx - 3aby - 2x + 3y$; b) $12t^5 - 4t^4 + 3t^2 - t$; c) $35x^7 + 7x^5 - 10x^3 - 2x$
[a) $(2x - 3y) \cdot (ab - 1)$; b) $t \cdot (3t - 1) \cdot (4t^3 + 1)$; c) $x \cdot (5x^2 + 1) \cdot (7x^4 - 2)$]

3. a) $ax^2 - ay^2 + bx^2 - by^2$; b) $8a^4 - 16a^3 + a + 2$; c) $7x^2y + 7x^2 - 9y - 9$
[a) $(a + b) \cdot (x + y) \cdot (x - y)$; b) $8a^4 - 16a^3 + a + 2$; c) $(y + 1) \cdot (7x^2 - 9)$]

4. a) $x^2y + x^2z - y - z$; b) $8x^7 + 8x^6y - x - y$; c) $4x^2y^4 - 9x^2 + 4y^4 - 9$
[a) $(x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (y + z)$; b) $(x + y) \cdot (2x^2 + 1) \cdot (4x^4 + 2x^2 + 1)$; c) $(x^2 + 1) \cdot (2y^2 + 3) \cdot (2y^2 - 3)$]

5. a) $12az^2 - 3at^4 - 4bz^2 + bt^4$; b) $5m^3nt^2 + 20m^3nt - 3mt^2 - 12m^2t$; c) $13a^4b^3c - 26a^3b^2c + ab - 2$
[a) $12az^2 - 3at^4 - 4bz^2 + bt^4$; b) $mt \cdot (5m^2nt + 20m^2n - 3t - 12m)$; c) $(13a^3b^2c + 1) \cdot (ab - 2)$]

6. a) $36a^6z - 4b^2z - 45a^6t + 5b^2t$; b) $27b^5 - 27b^3 + 8b^2 - 8$; c) $a^5x^3 + a^4 - a^3x^3 - a^2$
[a) $(4z - 5t) \cdot (3a^3 + b) \cdot (3a^3 - b)$; b) $(b + 1) \cdot (b - 1) \cdot (3b + 2) \cdot (9b^2 - 6b + 4)$; c) $a^2 \cdot (a + 1) \cdot (a - 1) \cdot (ax^3 + 1)$]

7. a) $175au^4 - 63a - 25b^2u^4 + 9b^2$; b) $36p^3 - 4p^2 - 63p + 7$; c) $x^7 - x^5 + x^3 - x$
[a) $(5u^2 + 3) \cdot (5u^2 - 3) \cdot (7a - b^2)$; b) $(9p - 1) \cdot (4p^2 - 7)$; c) $x \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x^4 + 1)$]

8. a) $-ax^2 + 3ax + xy - xz - 3y + 3z$; b) $ax^3 + 2a + x^4 + x^3 - 2x + 2$
[a) $(3 - x) \cdot (ax - y + z)$; b) $ax^3 + 2a + x^4 + x^3 - 2x + 2$]

9. a) $ab + ay - 2a - bx + b - xy + 2x + y - 2$; b) $x^5 + x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$
[a) $(a - x + 1) \cdot (b + y - 2)$; b) $(x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) \cdot (x^2 + x - 1)$]

10. a) $abm^2 - a + bm^2x - bm^2y - x + y$; b) $18m^5 - 9m^4 - 2m^3 + 37m^2 - 4$
[a) $(a + x - y) \cdot (bm^2 - 1)$; b) $(3m + 1) \cdot (3m - 1) \cdot (2m^3 - m^2 + 4)$]

11. a) $6am+9ap+10bm+15bp-2m-3p$; b) $\frac{1}{32}x^4+\frac{1}{4}x^3y+\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{2}xy-y^2$

$\left[\text{a) } (2m+3p)\cdot(3a+5b-1);\ \text{b) } \frac{1}{32}\cdot(x+4y)^2\cdot(x^2-2)\right]$

12. a) $12a^2b-3a^2c+3a^2d^3-4b+c-d^3$; b) $27x^4-18x^2+8x-1$

$\left[\text{a) } (4b-c+d^3)\cdot(3a^2-1);\ \text{b) } (3x-1)^3\cdot(x+1)\right]$

13. a) $12am^2+3at-6a+20b^2m^2+5b^2t-10b^2$; b) $\frac{4}{9}a^6-\frac{8}{9}a^4-\frac{1}{3}a^3+1$

$\left[\text{a) } (4m^2+t-2)\cdot(3a+5b^2);\ \text{b) } \frac{1}{9}\cdot(a^2+1)\cdot(2a^2-3)^2\right]$

14. a) $6xz+6ax+2bx-2tx+3yz+3ay+by-ty$; b) $24a^{10}-8a^9+36a^7b-12a^6b+18a^4b^2-6a^3b^2-b^3$

$\left[\text{a) } (2x+y)\cdot(3a+b-t+3z);\ \text{b) } (3a-1)\cdot(2a^3+b)^3\right]$

Livello 2

15. a) $2\cdot(a^2+a+1)-(a^3-1)$; b) $4x\cdot(x^3+8)-2x^2\cdot(x^2-2x+4)$

[a) $(3-a)\cdot(a^2+a+1)$; b) $2x\cdot(x+4)\cdot(x^2-2x+4)$]

16. a) $(am-1)^2-(bm+2)^2+(am+bm+1)^2$; b) $12\cdot(m^2-p^2)-4\cdot(m^2-2mp+p^2)-(m-p)\cdot(m-2p)$

[a) $2(am-1)\cdot(am+bm+1)$; b) $(p-m)\cdot(4m-7p)$]

17. $2x\cdot(3x-5y)^2+7x\cdot(3x-5y)\cdot(5x+3y)-x\cdot(9x^2-25y^2)$ $[2x\cdot(61x^2-86xy-15y^2)]$

18. $3a\cdot(49a^2-16b^2)+5a\cdot(7a-3b)\cdot(7a-4b)+2a\cdot(49a^2-56ab+16b^2)$ $[a\cdot(490a^2-245ab-68b^2)]$

19. $12m^2\cdot(m-3t)\cdot(3t+2m)-4t^2\cdot(m^2-9t^2)+mt\cdot(m^2-6mt+9t^2)$

$[(3t-m)\cdot(-24m^3-37m^2+7mt^2+12t^3)]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo ridurre ai minimi termini la frazione algebrica $\frac{a^3+8}{ab-a+2b-2}$. Scomponiamo il numeratore come somma di cubi e il denominatore con il metodo del raccoglimento parziale:

$$\frac{a^3+8}{ab-a+2b-2}=\frac{(a+2)\cdot(a^2+2a+4)}{a\cdot(b-1)+2\cdot(b-1)}=\frac{\cancel{(a+2)}\cdot(a^2+2a+4)}{(b-1)\cdot\cancel{(a+2)}}=\frac{a^2+2a+4}{b-1}.$$

Ridurre ai minimi termini le seguenti frazioni

Livello 2

20. a) $\frac{d^4-d^3-d-1}{d^2-2d+1}$; b) $\frac{d^4-d^3+d-1}{d^2+2d+1}$; c) $\frac{4mn-n^2+8mx-2nx}{16m^2-8mn+n^2}$

$\left[\text{a) } \frac{d^4-d^3-d-1}{d^2-2d+1};\ \text{b) } \frac{d^3-2d^2+2d-1}{d+1};\ \text{c) } \frac{2x+n}{4m-n}\right]$

21. a) $\frac{a^6-3a^4b^3+3a^2b^6-b^9}{3a^3-3ab^3+a^2b-b^4}$; b) $\frac{ax+ay+bx+by}{am+bm+bn+an}$; c) $\frac{105w^5-105cw^3-75c^2w^2+75c^3}{42w^4-84cw^3-30c^2w+60c^3}$

$\left[\text{a) } \frac{a^4-2a^2b^3+b^6}{3a+b};\ \text{b) } \frac{x+y}{m+n};\ \text{c) } \frac{105w^5-105cw^3-75c^2w^2+75c^3}{42w^4-84cw^3-30c^2w+60c^3}\right]$

22. a) $\frac{3x^4+6x^3+x+2}{9x^6+6x^3+1}$; b) $\frac{a^2b^5+ab^3-2ab^2-2}{a^2b^4+2ab^2-2}$; c) $\frac{x^3+x^2y-x^2-xy+x+y}{x^3+1}$

$\left[\text{a) } \frac{x+2}{3x^3+1};\ \text{b) } \frac{a^2b^5+ab^3-2ab^2-2}{a^2b^4+2ab^2-2};\ \text{c) } \frac{x+y}{x+1}\right]$

23. a) $\frac{t^2y^2-t^2x^2+x^2z^2-y^2z^2}{t^2x^2-t^2y^2+x^2z^2-y^2z^2}$; b) $\frac{16a^5+16a^4-8a^3-8a^2+a+1}{2a^3-a^2-2a+1}$; c) $\frac{a^2+ac-b^2+bc}{a^2+2ab-ac+b^2}$

$\left[\text{a) } \frac{z^2-t^2}{z^2+t^2};\ \text{b) } \frac{8a^3+4a^2-2a-1}{a-1};\ \text{c) } \frac{a^2+ac-b^2+bc}{a^2+2ab-ac+b^2}\right]$

24. a) $\frac{a^4+a^3b-ab^3-b^4}{a^3-ab^2+a^2b-b^3}$; b) $\frac{9x^5+9x^4y-6x^3y-6x^2y^2+xy^2+y^3}{3x^4+6x^3y+3x^2y^2-x^2y-2xy^2-y^3}$; c) $\frac{\frac{1}{4}a^2+ab-a+b^2}{\frac{1}{4}a^2-ab+b^2}$

$\left[\text{a) } \frac{a^2+ab+b^2}{a+b};\ \text{b) } \frac{3x^2-y}{x+y};\ \text{c) } \frac{a^2+4ab-4a+4b^2}{(a-2b)^2}\right]$

25. a) $\frac{x^2-2xz-y^2+3yz}{x^2+2xz-y^2-2yz}$; b) $\frac{x^3y^2-4x^3-y^2+4}{x^3y^2+4x^3-y^2-4}$; c) $\frac{9a^3b+45a^3+27b+135}{a^3b^2-25a^3+3b^2-75}$

$\left[\text{a) } \frac{x^2-2xz-y^2+3yz}{x^2+2xz-y^2-2yz};\ \text{b) } \frac{y^2-4}{y^2+4};\ \text{c) } \frac{9}{b-5}\right]$

26. a) $\frac{x^3-x^2y+2xy^2-2y^3}{x^3+x^2y-2xy^2-2y^3}$; b) $\frac{x^2+3xy-x-3y}{x^2+3xy+x+3y}$; c) $\frac{ax-ay+a+bx-by+b-cx+cy-c}{a^2+2ab-2ac+b^2-2bc+c^2}$

$\left[\text{a) } \frac{x^3-x^2y+2xy^2-2y^3}{x^3+x^2y-2xy^2-2y^3};\ \text{b) } \frac{x-1}{x+1};\ \text{c) } \frac{x-y+1}{a+b-c}\right]$

27. a) $\frac{36ab^2c^4-4ab^2t^3-9c^4+t^2}{18bc^4-2bt^2-9cc^4+t^2}$; b) $\frac{x^6y^6-a^6}{x^5y^5-a^5-a^3x^2y^2+a^2x^3y^3}$; c) $\frac{a^6z^3+a^6-b^6z^3-b^6}{a^4z^3-a^4-b^4z^3+b^4}$

$\left[\text{a) } \frac{4ab^2-1}{2b-1};\ \text{b) } \frac{x^3y^3+a^3}{x^2y^2+a^2};\ \text{c) } \frac{(a^4+a^2b^2+b^4)\cdot(z^3+1)}{(a^2+b^2)\cdot(z^3-1)}\right]$

L'angolo delle correzioni

Correggere gli errori presenti nello svolgimento delle seguenti scomposizioni

1. $3xy+3=3\cdot xy$; $3x^2-y^2=(3x-y)\cdot(3x+y)$; $4x^3+9y^3=(2x+3y)\cdot(4x^2-6xy+9y^2)$
2. $8z^3-1=(2z-1)\cdot(4z^2+2z-1)$; $x^3+3x^2y+-3xy^2+1=(x-y)^3$; $ax+ay+x+y=a\cdot(x+y)$
3. $x^4+4x+1=(x^2+2)^2$; $4-12z-9z^2=(2-3z)^2$; $4m^3-n^2=(2m^2-n)\cdot(2m+n)$; $x^2+1=(x+1)^2$

Scomposizione di trinomi notevoli

Consideriamo ora certi prodotti di binomi che creano dei particolari trinomi.

Esempio 25

Sviluppiamo la seguente moltiplicazione:

$$(x+2)\cdot(x+3)=x^2+\underline{2x}+\underline{3x}+6=x^2+(2+3)\cdot x+2\cdot 3=x^2+5x+6$$

Osserviamo che abbiamo ottenuto un trinomio del tipo x^2+sx+p, in cui il coefficiente s è la somma algebrica dei termini noti dei singoli monomi fattori, il coefficiente p è il prodotto degli stessi termini noti.

Definizione 4

Un polinomio di secondo grado completo in una variabile, si chiama **trinomio di secondo grado**.

Applichiamo quanto visto nel precedente esempio a binomi con coefficienti letterali:

$$(x+a)\cdot(x+b)=x^2+\underline{ax}+\underline{bx}+ab=x^2+(a+b)\cdot x+a\cdot b$$

Possiamo allora enunciare la seguente regola.

Regola 2 (di scomposizione di un trinomio di secondo grado).

Il trinomio $x^2+ax+b, a,b\in\mathbb{R}$, si scompone nel prodotto $(x + c) \cdot (x + d)$, se e solo se i numeri c e d verificano le seguenti due proprietà: $c + d = a$; $c \cdot d = b$.

In tal modo infatti possiamo trasformare un trinomio in un quadrinomio che può poi scomporsi con il raccoglimento parziale. Vediamo un esempio.

Esempio 26

- Scomporre il trinomio $w^2-7w+10$. Non ci sono fattori comuni, né riconosciamo alcun prodotto notevole, non è possibile raggruppare i termini perché sono in numero dispari. Proviamo allora ad usare la precedente regola. Dobbiamo perciò cercare due numeri tali che la loro somma sia –7 e il loro prodotto sia 10. Questa ricerca potrebbe essere lunga e infruttuosa se non è bene organizzata. Intanto non è detto che i numeri debbano essere interi, ma noi la useremo solo in questo caso perché diversamente il procedimento diviene particolarmente complicato. Di numeri interi la cui somma sia –7 ne esistono infiniti (–3 + (–4); –7 + 0; 50 + (–43); ...) quindi non è opportuno utilizzare per prima questa informazione. Invece di numeri interi il cui prodotto è 10 ve ne sono in numero finito. Essi sono: (1 ; 10), (2 ; 5), (–1 ; –10), (–2 ; –5). Allora basta solo verificare se una di queste 4 coppie verifica la condizione che la loro somma sia –7. Calcoliamone le somme: 1 + 10 = 11, 2 + 5 = 7, –1 + (–10) = –11, –2 + (–5) = –7. Come si vede i numeri cercati esistono, –2 e –5. Scriviamo perciò:

$$w^2-7w+10=w^2-2w-5w+10=w\cdot(w-2)-5\cdot(w-2)=(w-2)\cdot(w-5).$$

- Scomporre il trinomio $q^2-2q-15$. Consideriamo ancora una volta tutte le coppie di numeri interi il cui prodotto sia –15, e poi vediamo se la somma è –2.

a	b	$a+b$	$a\cdot b$
1	–15	–14	–15
1	15	16	–15
3	–5	–2	–15
–3	5	2	–15

Ancora una volta la coppia esiste, 3, –5, quindi scriviamo: $q^2-2q-15=(q-5)\cdot(q+3)$.

Vediamo un esempio in cui il polinomio è irriducibile nell'insieme dei numeri interi.

Esempio 27

Vogliamo scomporre il trinomio $t^2-4t+12$. Costruiamo la tabella delle coppie di numeri interi il cui prodotto valga 12, quindi ne calcoliamo le somme.

a	b	$a+b$	$a\cdot b$
1	12	13	12
–1	–12	–13	12
2	6	8	12
–2	–6	–8	12
3	4	7	12
–3	–4	–7	12

Come si vede, non vi sono coppie di interi il cui prodotto è 12 e la cui somma è – 4. Pertanto possiamo dire che il precedente trinomio non è scomponibile nel prodotto di due binomi di primo grado a coefficienti interi e quindi anche razionali. Sottolineiamo il fatto che i coefficienti siano interi, infatti potrebbe accadere che il polinomio sia scomponibile ma i suoi coefficienti siano numeri irrazionali.

In effetti possiamo migliorare la ricerca dei numeri, per la scomposizione dei trinomi di secondo grado, con un po' di accorgimenti.

Esempio 28

- Vogliamo scomporre il trinomio $x^2+13x+40$. Dato che cerchiamo due numeri interi in cui sia la somma sia il prodotto sono numeri positivi è inutile considerare coppie di numeri negativi, come –1 e –40. Ciò ci permette di verificare un numero minore di casi. La tabella da considerare è perciò la seguente:

a	b	$a+b$	$a\cdot b$
1	40	41	40
2	20	22	40
4	10	14	40
5	8	13	40

  Abbiamo trovato la coppia cercata, 5 e 8, scriviamo perciò: $x^2+13x+40=(x+5)\cdot(x+8)$.

- Scomporre $y^2-7y+12$. Cerchiamo due numeri interi il cui prodotto sia positivo, quindi hanno uguali segni, e la cui somma sia negativa, perciò i numeri sono entrambi negativi. Abbiamo:

a	b	$a+b$	$a\cdot b$
–1	–12	–13	12
–2	–6	–8	12
–3	–4	–7	12

  Si ha: $y^2-7y+12=(y-3)\cdot(y-4)$.

- Scomporre $z^2+8y-14$. Cerchiamo due numeri interi il cui prodotto sia negativo, quindi hanno diversi segni, e la cui somma sia positiva, perciò dei due il più grande in valore assoluto (cioè senza considerarne il segno) deve essere il positivo. Il trinomio è irriducibile in $\mathbb{Z}$, dato che la tabella è la seguente.

a	b	$a+b$	$a\cdot b$
14	–1	13	–14
7	–2	5	–14

Verifiche

Lavoriamo insieme

Scomporre in fattori i seguenti polinomi:

- $x^2-7x+10$. Applichiamo la regola per la scomposizione dei cosiddetti trinomi di secondo grado. Per far ciò dobbiamo cercare due numeri interi la cui somma vale – 7 e il prodotto + 10. Di numeri interi il cui prodotto è 10 abbiamo i seguenti: (+1, + 10); (+2, +5); (–1, –10); (–2, –5). Fra questi l'unica coppia la cui somma è – 7 è (–2, –5). Pertanto scriviamo: $x^2-7x+10=(x-2)\cdot(x-5)$.
- $x^2-4x+10$. Ancora una volta cerchiamo di applicare il procedimento utilizzato per i trinomi di secondo grado. Solo che stavolta nessuna delle coppie di numeri interi il cui prodotto è + 10, che sono sempre le precedenti 4, ha per somma – 4. Quindi il polinomio è irriducibile in $\mathbb{Z}$.

Scomporre in fattori nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi, ove possibile, i seguenti polinomi

Livello 1

1. a) $x^2+7x+10$; b) $y^2-15y+36$; c) z^2-5z+9 [a) $(x+2)\cdot(x+5)$; b) $(y-3)\cdot(y-12)$; c) z^2-5z+9]
2. a) $a^2-8a+15$; b) $b^2+9b+18$; c) $c^2-13c-21$ [a) $(a-3)\cdot(a-5)$; b) $(b+3)\cdot(b+6)$; c) $c^2-13c-21$]
3. a) $x^2-11x+12$; b) d^2+4d-6; c) $z^2+2z-63$ [a) $x^2-11x+12$; b) d^2+4d-6; c) $(z-7)\cdot(z+9)$]
4. a) $e^2-12e+35$; b) $f^2+9f+20$; c) $x^2-3x+40$ [a) $(e-5)\cdot(e-7)$; b) $(f+4)\cdot(f+5)$; c) $x^2-3x+40$]
5. a) $g^2+11g-28$; b) $h^2+11h+28$; c) $y^2-11y-26$ [a) $g^2+11g-28$; b) $(h+4)\cdot(h+7)$; c) $(y+2)\cdot(y-13)$]
6. a) $k^2-10k+16$; b) $m^2-15m+56$; c) $j^2-2j-80$ [a) $(k-2)\cdot(k-8)$; b) $(m-7)\cdot(m-8)$; c) $(j+8)\cdot(j-10)$]
7. a) $n^2-3n-18$; b) u^2+2u-9; c) $p^2+13p-130$ [a) $(n+3)\cdot(n+6)$; b) u^2+2u-9; c) $p^2+13p-130$]
8. a) $q^2+8q-33$; b) $r^2+2r-24$; c) $a^2-18a+77$ [a) $(q-3)\cdot(q+11)$; b) $(r-4)\cdot(r+6)$; c) $(a-7)\cdot(a-11)$]
9. a) $t^2+13t-42$; b) $p^2-5p-14$; c) $b^2+19b+90$ [a) $t^2+13t-42$; b) $(p+2)\cdot(p-7)$; c) $(b+9)\cdot(b+10)$]
10. a) $v^2+3v-40$; b) z^2-z-42; c) $m^2+21m-46$ [a) $(v-5)\cdot(v+8)$; b) $(z+6)\cdot(z-7)$; c) $(m-2)\cdot(m+23)$]
11. a) $abq^2+3abq-88ab$; b) $t^3r^2+13t^3r+12t^3$; c) $2ct^3+16ct^2+14ct$ [a) $ab\cdot(q-8)\cdot(q+11)$; b) $t^3\cdot(r+1)\cdot(r+12)$; c) $ct\cdot(t^2+16t+14)$]

Lavoriamo insieme

Scomporre in fattori i seguenti polinomi:

- a^4-5a^2-36. Anche se non abbiamo un trinomi odi II grado, ci accorgiamo che se poniamo $a^2=t$, il trinomio diventa di secondo grado: $t^2-5t-36$, che si scompone facilmente in $(t-9)\cdot(t+4)$, da cui, sostituendo otteniamo: $(a^2-9)\cdot(a^2+4)$. Il primo fattore è ancora scomponibile: $(a-3)\cdot(a+3)\cdot(a^2+4)$.
- $6t^2+17t+5$. Stavolta abbiamo il primo coefficiente che non è unitario, quindi non possiamo usare la regola per i trinomi di secondo grado. Potremmo fare il seguente ragionamento: i fattori che cerchiamo non sono a coefficienti direttori entrambi unitari, ma sono però numeri interi, quindi essi sono $(\pm1, \pm6)$ oppure $(\pm2; \pm3)$. Quindi cerchiamo due binomi del tipo $(t+a)\cdot(6t+b)$ oppure $(2t+a)\cdot(3t+b)$. Nel primo caso avremo: $6t^2+(6a+b)\cdot t+ab$, nel secondo $6t^2+(3a+2b)\cdot t+ab$. In ogni caso deve essere $ab=5$.

Quindi a e b devono essere fra le coppie $(\pm 1, \pm 5)$. Proviamo cosa accade per i coefficienti dei termini di secondo grado:

a	b	$6a+b$	$3a+2b$
1	5	11	13
5	1	31	17

Come si vede, funziona soltanto l'ultimo caso, pertanto possiamo scomporre nel modo seguente:

$$(2t+5)\cdot(3t+1)$$

Scomporre in fattori, ove possibile, i seguenti polinomi

Livello 2

12. a) $(3u-1)^2+4\cdot(3u-1)+3$; b) $(2v-3)^2+(2v-3)-6$; c) $(7z-5)^2-2\cdot(7z-5)-8$
[a) $3u\cdot(3u+2)$; b) $2v\cdot(2v-5)$; c) $(7z-3)\cdot(7z-9)$]
13. a) $(5a+3)^2+7\cdot(5a+3)+12$; $(11b-1)^2+6\cdot(11b-1)-16$; c) $(z^2-1)^2-2\cdot(z^2-1)-15$
[a) $(5a+6)\cdot(5a+7)$; b) $(11b+7)\cdot(11b-3)$; c) $(z^2+2)\cdot(z^2-6)$]
14. a) a^4+10a^2+16 ; b) n^4-5n^2-36 ; c) x^4-24x^2+143; d) q^6+6q^3-55
[a) $(a^2+2)\cdot(a^2+8)$; b) $(n+3)\cdot(n-3)\cdot(n^2+4)$; c) $(x^2-11)\cdot(x^2-13)$; d) $(q^3-5)\cdot(q^3+11)$]
15. a) b^8+2b^4-63 ; b) t^6+3t^3-4 ; c) $u^{10}+u^5-2$; d) $v^{12}-v^6+2$
[a) $(b^4-7)\cdot(b^4+9)$; b) $(t-1)\cdot(t+4)\cdot(t^2+t+1)$; c) $(u^5-1)\cdot(u^5+2)$; d) $v^{12}-v^6+2$]
16. a) $z^{16}-z^8-12$; b) m^3-5m^2+6m ; c) $4c^4-16c^3+20c^2$; d) $7p^2-35p-42$
[a) $(z^4+2)\cdot(z^4-2)\cdot(z^8+3)$; b) $m\cdot(m-3)\cdot(m-2)$; c) $4c^2\cdot(c^2-4c+5)$; d) $7\cdot(p+1)\cdot(p-6)$]
17. a) $3x^2+x-5$; b) $3z^2-11z-20$; c) $4z^2+21z+5$; d) $11m^2-19m-6$; e) $2x^2-3x-5$
[a) $3x^2+x-5$; b) $(z-5)\cdot(3z+4)$; c) $(z+5)\cdot(4z+1)$; d) $(m-2)\cdot(11m+3)$; e) d) $(x+1)\cdot(2x-5)$]
18. a) $3t^2-t+5$; b) $6q^2+17q-3$; c) $4u^2-3u+1$; d) $2a^2+19a-33$; e) $5x^8+3x^4+4$
[a) $3t^2-t+5$; b) $(q+3)\cdot(6q-1)$; c) $4u^2-3u+1$; d) $(2a-3)\cdot(a+11)$; e) $5x^8+3x^4+4$]
19. a) $7b^2-5b-2$; b) $5c^2-17c-12$; c) $3a^4-2a^2-1$; d) $3b^6+5b^3-2$
[a) $(b-1)\cdot(7b+2)$; b) $(c-4)\cdot(5c+3)$; c) $(a-1)\cdot(a+1)\cdot(3a^2+1)$; d) $(b^3+2)\cdot(3b^3-1)$]

Lavoriamo insieme

Ridurre ai minimi termini la frazione $\dfrac{x^2-4x-21}{x^2-14x+49}$. Scomponiamo il numeratore come trinomio notevole e il denominatore come quadrato di binomio: $\dfrac{\cancel{(x-7)}\cdot(x+3)}{(x-7)^{\cancel{2}}}=\dfrac{x+3}{x-7}$.

Ridurre ai minimi termini le seguenti frazioni algebriche

Livello 2

20. a) $\dfrac{v^2+5v-6}{v^2+6v-7}$; b) $\dfrac{2x^2-16x-66}{x^2-4x-77}$; c) $\dfrac{x^2+6x-7}{x^2-6x-7}$ $\left[\text{a) } \dfrac{v+6}{v+7};\ \text{b) } \dfrac{2\cdot(x+3)}{x+7};\ \text{c) } \dfrac{x^2+6x-7}{x^2-6x-7}\right]$
21. a) $\dfrac{m^2-11m+24}{9m^2n^2-81n^2}$; b) $\dfrac{x^2+11x-26}{3x^2+36x-39}$; c) $\dfrac{4m^2+36m+32}{m^2-6m-16}$
$\left[\text{a) } \dfrac{m-8}{9n^2\cdot(m+3)};\ \text{b) } \dfrac{x-2}{3\cdot(x-1)};\ \text{c) } \dfrac{4m^2+36m+32}{m^2-6m-16}\right]$
22. a) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+x-2}$; b) $\dfrac{x^2+18x+81}{x^2+4x-45}$; c) $\dfrac{27a^3-27a^2+9a-1}{3a^2+5a-2}$ $\left[\text{a) } \dfrac{x+2}{x-1};\ \text{b) } \dfrac{x+9}{x-5};\ \text{c) } \dfrac{9a^2-6a+1}{a+2}\right]$
23. a) $\dfrac{d^2-13d+39}{d^2+8d-33}$; b) $\dfrac{q^2-15q+36}{q^2+9q-36}$; c) $\dfrac{t^2+4t-21}{t^3-9t^2+27t-27}$
$\left[\text{a) } \dfrac{d^2-13d+39}{d^2+8d-33};\ \text{b) } \dfrac{q-12}{q+12};\ \text{c) } \dfrac{t+7}{t^2-6t+9}\right]$

24. a) $\frac{y^2-11y+28}{y^3-64}$; b) $\frac{x^2-4x-4}{x^2-7x-10}$; c) $\frac{p^2-16p-17}{p^2+34p+289}$

$\left[\text{a) } \frac{y-7}{y^2+4y+16}\text{; b) } \frac{x^2-4x-4}{x^2-7x-10}\text{; c) } \frac{p^2-16p-17}{p^2+34p+289}\right]$

25. a) $\frac{d^2+10d-39}{d^2+8d-33}$; b) $\frac{k^2+7k+52}{k^2-8k-48}$; c) $\frac{5h^2-110h+105}{h^2-18h-63}$ $\left[\text{a) } \frac{d+13}{d+11}\text{; b) } \frac{k^2+7k+52}{k^2-8k-48}\text{; c) } \frac{5\cdot(h-1)}{h+3}\right]$

26. a) $\frac{n^2-5n-6}{n^2-9n-14}$; b) $\frac{6p^2+96p+168}{3p^2-6p-24}$; c) $\frac{x^3-8}{x^2-9x+14}$

$\left[\text{a) } \frac{n^2-5n-6}{n^2-9n-14}\text{; b) } \frac{2\cdot(p+14)}{p-4}\text{; c) } \frac{x^2+2x+4}{x-7}\right]$

27. a) $\frac{m^2+4m-5}{m^2-4m+5}$; b) $\frac{y^3+27}{y^2-4y-21}$; c) $\frac{m^3+m^2-2m-2}{m^2+m-56}$

$\left[\text{a) } \frac{m^2+4m-5}{m^2-4m+5}\text{; b) } \frac{y^2-3y+9}{y-7}\text{; c) } \frac{m^3+m^2-2m-2}{m^2+m-56}\right]$

Lavoriamo insieme

- Ridurre ai minimi termini la frazione algebrica: $\frac{4z\cdot(3x-y)-8t\cdot(3x-y)}{6z\cdot(3x-y)+12t\cdot(3x-y)^2}$. Raccogliamo i fattori comuni: $\frac{4z\cdot(3x-y)-8t\cdot(3x-y)}{6z\cdot(3x-y)+12t\cdot(3x-y)^2}=\frac{\cancel{4}^{\,2}\cdot\cancel{(3x-y)}\cdot(z-2t)}{\cancel{6}^{\,3}\cdot\cancel{(3x-y)}\cdot[z+2t\cdot(3x-y)]}=\frac{2\cdot(z-2t)}{3\cdot(z+6tx-2ty)}$.
- Semplificare: $\frac{(2x-1)^2-4y^2}{(2x-1)^2-4y\cdot(2x-1)+4y^2}$. Abbiamo già osservato che con la scritta $A^2 - B^2 = (A + B) \cdot (A - B)$ intendiamo la differenza di due quadrati non necessariamente monomi. Quindi scomponiamo il numeratore: $(2x - 1)^2 - 4y^2 = [(2x - 1) + 2y] \cdot [(2x - 1) - 2y] = (2x - 1 + 2y) \cdot (2x - 1 - 2y)$. Il denominatore è invece il quadrato i cui termini sono il polinomio $(2x - 1)$ e il monomio $2y$. Quindi scriviamo
$$\frac{\cancel{(2x-1-2y)}\cdot(2x-1+2y)}{(2x-1-2y)^{\cancel{2}}}=\frac{2x-1+2y}{2x-1-2y}.$$
- Semplificare la frazione: $\frac{a^2+2a+1-b^2}{a^2-3ac+a-3c+ab-3bc}$. Notiamo che i primi tre monomi costituiscono lo sviluppo del quadrato di un binomio. La frazione diviene: $\frac{(a+1)^2-b^2}{a\cdot(a-3c)+1\cdot(a-3c)+b\cdot(a-3c)}$. Al numeratore abbiamo ottenuto una differenza di due quadrati, quindi lavoriamo su di esso applicando la seguente corretta scomposizione: $\frac{[(a+1)+b]\cdot[(a+1)-b]}{(a-3c)(a+1+b)}=\frac{\cancel{(a+1+b)}\cdot(a+1-b)}{(a-3c)\cdot\cancel{(a+1+b)}}=\frac{a+1-b}{a-3c}$.
- Semplificare $\frac{(2a+b)^3+a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{4a^2+4ab+b^2-(a+b)^2}$. Osserviamo che al numeratore il quadrinomio al di fuori del cubo in parentesi è a sua volta un cubo di binomio, analogamente il trinomio al denominatore è un quadrato di binomio. Pertanto possiamo scrivere: $\frac{(2a+b)^3+(a+b)^3}{(2a+b)^2-(a+b)^2}$. In questo modo il numeratore è una somma di cubi e il denominatore una differenza di quadrati, quindi la frazione diviene:

$$\frac{\cancel{(2a+b+a+b)}\cdot\left[(2a+b)^2+(2a+b)\cdot(a+b)+(a+b)^2\right]}{\cancel{(2a+b+a+b)}\cdot\left(2a\cancel{+b}-a\cancel{-b}\right)}$$

pertanto otteniamo la frazione ridotta ai minimi termini:

$$\frac{4a^2+4ab+b^2+2a^2+2ab+ab+b^2+a^2+2ab+b^2}{a}=\frac{7a^2+9ab+3b^2}{a}.$$

Ridurre ai minimi termini le seguenti frazioni algebriche

Livello 3

28. a) $\frac{4x^2-12xy+16xz+9y^2-24yz+16z^2}{(2x-3y)^2-16z^2}$; b) $\frac{x^2+2x-2xy+1-2y+y^2}{x^3+3x^2+3x+1-y^3}$

$\left[\text{a) } \frac{2x-3y+4z}{2x-3y-4z};\ \text{b) } \frac{x-y+1}{x^2+xy+2x+y^2+y+1}\right]$

29. a) $\frac{(2x+4)^3-1}{4x^2-9}$; b) $\frac{a^4+b^6+c^8-2a^2b^3+2a^2c^4-2b^3c^4}{\left(a^2-b^3\right)^2-c^8}$; c) $\frac{(x+y)^3+(2x-3y)^3}{\left(3x^2-9xy\right)^2-169y^4}$

$\left[\text{a) } \frac{4x^2+18x+21}{2x-3};\ \text{b) } \frac{a^2-b^3+c^4}{a^2-b^3-c^4};\ \text{c) } \frac{3x-2y}{3x^2-9xy-13y^2}\right]$

30. a) $\frac{\left(3m^3-4n^2\right)^2-\left(5n^2+m^3\right)^2}{n^4+8m^3n^2+16m^6}$; b) $\frac{\left(3z^2-1\right)^2-16z^2}{\left(3z^2+4z\right)^2-1}$; c) $\frac{4a^2+3}{8a^3+12a^2+6a+9}$

$\left[\text{a) } \frac{2m^3-9n^2}{4m^3+n^2};\ \text{b) } \frac{3z^2-4z-1}{3z^2+4z+1};\ \text{c) } \frac{1}{2a+3}\right]$

31. a) $\frac{m+y^2\cdot(m-n)+2y\cdot(m-n)-n}{m^2\cdot(y+1)-2mn\cdot(y+1)+n^2\cdot(y+1)}$; b) $\frac{(5k+h)^2-15k-3h}{(5k+h-3)\cdot(3h+1)+(5k+h-3)\cdot(3k-1)}$

$\left[\text{a) } \frac{y+1}{m-n};\ \text{b) } \frac{h+5k}{3\cdot(h+k)}\right]$

32. a) $\frac{t^4-6t^2-16h^2+9}{t^4-6t^2+8ht^2+9-24h+16h^2}$; b) $\frac{4m^5-4m^4n+m^3n^2}{6m^6n-3m^5n^2-m^4n^3+2m^5n^2}$ $\left[\text{a) } \frac{-4h+t^2-3}{4h+t^2-3};\ \text{b) } \frac{2m-n}{mn\cdot(3m+n)}\right]$

33. a) $\frac{p^4qr^2+p^3q^2r^3-pq^4r^2-q^5r^2}{p^4qr^3-2p^2q^3r^3+q^5r^3}$; b) $\frac{20f^6-14f^3+2}{f^6-2f^3+1}$; c) $\frac{(4a^2b+32ab+28b)\cdot(36a^2-25)}{(18a^2b^2-51ab^2+30b^2)\cdot(6a^2+47a+35)}$

$\left[\text{a) } \frac{p^4+p^3qr-pq^3-q^4}{r\cdot\left(p^4-2p^2q^2+q^4\right)};\ \text{b) } \frac{2\cdot\left(10f^6-7f^3+1\right)}{f^6-2f^3+1};\ \text{c) } \frac{4\cdot(a+1)}{3b\cdot(a-2)}\right]$

34. a) $\frac{a^4b^4+a^3b^3-3a^2b^2-ab+2}{a^4b^4+3a^3b^3+a^2b^2-3ab-2}$; b) $\frac{x^4-2x^2y^2+y^4}{2x^5-3x^4y-4x^3y^2+6x^2y^3+2xy^4-3y^5}$ $\left[\text{a) } \frac{ab-1}{ab+1};\ \text{b) } \frac{1}{2x-3y}\right]$

35. a) $\frac{\left(9m^5-24m^4n^2+16m^3n^4\right)\cdot\left(45m^2-80n^4\right)}{\left(27m^3-108m^2n^2+144mn^4-64n^6\right)\cdot\left(6m^2n^2-9mn^2+8mn^4-12n^4\right)}$; b) $\frac{4c^4-4c^2+1-y^4}{4c^4-2y^2-1-y^4}$

$\left[\text{a) } \frac{5m^3}{n^2\cdot(2m-3)};\ \text{b) } \frac{y^2+2c^2-1}{y^2+2c^2+1}\right]$

36. a) $\frac{(x+2y)^2+2\cdot(3x-y)\cdot(x+2y)+(3x-y)^2}{(4x+y)\cdot(7x-z)+16x^2+8xy+y^2}$; b) $\frac{(h^2-1)^2-3\cdot(h-1)^3}{(h-1)^2+3\cdot(h-1)\cdot(h^2-1)}$ $\left[\text{a) } \frac{4x+y}{11x+y-z};\ \text{b) } \frac{h^2-h+4}{3h+4}\right]$

37. a) $\dfrac{(k-h)^3+(2h-3k)^3}{k\cdot(4k^2-h^2)-h\cdot(2k-h)^2}$; b) $\dfrac{\left(3m^2-n\right)^3+\left(m^2-n\right)^3}{\left(n^2-4m^2n\right)\cdot\left(n-2m^2\right)+7m^4\cdot\left(n-2m^2\right)}$

$\left[\text{a) } \dfrac{-7h^2+19hk-13k^2}{h^2-hk+2k^2};\ \text{b) } -2\right]$

38. a) $\dfrac{20h^2-31h-7}{64h^3-336h^2+588h-343}$; b) $\dfrac{6e^2-33e+45}{4e^2-20e+25}$; c) $\dfrac{p^4-5p^2+4}{p^2+p-2}$; d) $\dfrac{b^4-13b^2+36}{4b^4-4b^3-24b^2}$

$\left[\text{a) } \dfrac{5h+1}{16h^2-56h+49};\ \text{b) } \dfrac{3\cdot(e-3)}{2e-5};\ \text{c) } p^2-p-2;\ \text{d) } \dfrac{b^2+b-6}{4b^2}\right]$

39. a) $\dfrac{t^4-13t^2+36}{t^2-t-121}$; b) $\dfrac{6b^3-29b^2+21b-4}{3b^3-25b^2+56b-16}$; c) $\dfrac{\left(2l^2+l-15\right)^2}{l^4-18l^2+81}$ $\left[\text{a) } \dfrac{t^4-13t^2+36}{t^2-t-121};\ \text{b) } \dfrac{2b-1}{b-4};\ \text{c) } \dfrac{(2l-5)^2}{l^2-6l+9}\right]$

40. a) $\dfrac{\left(5k^2n-15kn-140n\right)\cdot\left(4k^2-21k+5\right)}{\left(3k^2n^2+24kn^2+48n^2\right)\cdot\left(4k^2-29k+7\right)}$; b) $\dfrac{\left(3l^2t^2+36lt^2+105t^2\right)\cdot\left(36l^2-12l+1\right)}{\left(12l^2t+10lt-2t\right)\cdot\left(6l^2+41l-7\right)}$

$\left[\text{a) } \dfrac{5\cdot\left(k^2n-3kn-28n\right)\cdot(k-5)}{3n^2\cdot(k-7)\cdot\left(k^2+8k+16\right)};\ \text{b) } \dfrac{3t\cdot(l+5)}{2\cdot(l+1)}\right]$

41. a) $\dfrac{\left(4m^3+36m^2+72m\right)\cdot\left(5m^2u-32mu+12u\right)}{\left(25m^2-20m+4\right)\cdot\left(5m^3-180m\right)}$; b) $\dfrac{\left(q^4+q^3-6q^2\right)\cdot\left(12q^2+12q+3\right)}{\left(10q^2+35q+15\right)\cdot\left(3q^5-7q^4+2q^3\right)}$

$\left[\text{a) } \dfrac{4u\cdot(m+3)}{5\cdot(5m-2)};\ \text{b) } \dfrac{3\cdot(2q+1)}{5q\cdot(3q-1)}\right]$

42. a) $\dfrac{\left(h^2y+3hy-28y\right)\cdot\left(98h^2-2\right)}{\left(35h^2y^2+65hy^2-10y^2\right)\cdot\left(7h^2+50h+7\right)}$; b) $\dfrac{2m\cdot\left(x^2-y^2\right)+n\cdot(x-y)}{3n\cdot(x-y)^2+m\cdot(x-y)}$; c) $\dfrac{4\cdot(2t-1)^3-(2t-1)^2}{3\cdot\left(4t^2-1\right)+5\cdot(2t-1)}$

$\left[\text{a) } \dfrac{2\cdot(h-4)}{5y\cdot(h+2)};\ \text{b) } \dfrac{2mx+2my+n}{3nx-3ny+m};\ \text{c) } \dfrac{(2t-1)\cdot(8t-5)}{2\cdot(3t+4)}\right]$

43. a) $\dfrac{4ax\cdot(2b+3)-2ay\cdot(2b+3)}{6ab\cdot(2x-y)+9a\cdot(2x-y)}$; b) $\dfrac{9m^2\cdot(a^2-4b^2)-16n^2\cdot(a^2-4b^2)}{9m^2\cdot(a+2b)+24mn\cdot(a+2b)+16n^2\cdot(a+2b)}$

$\left[\text{a) } \dfrac{2}{3};\ \text{b) } \dfrac{(a-2b)\cdot(3m-4n)}{3m+4n}\right]$

44. a) $\dfrac{1+(c+1)^3+c-2(c+1)^2}{3c^2+c^3+1+3c}$; b) $\dfrac{(x+2)^2-2x-3}{x^2-1}$; c) $\dfrac{147h^4-189h^3-1719h^2+501h-36}{49h^5+231h^4-461h^3-2235h^2+664h-48}$

$\left[\text{a) } \dfrac{c^2}{c^2+2c+1};\ \text{b) } \dfrac{x+1}{x-1};\ \text{c) } \dfrac{3\cdot\left(h^2-h-12\right)}{h^3+5h^2-8h-48}\right]$

45. $\dfrac{x^4+6y^4-7x^3y+17x^2y^2-17xy^3}{x^3-6x^2y+11xy^2-6y^3}$ (**Suggerimento:** prova a eseguire la divisione....) $[x-y]$

46. a) $\dfrac{(x+3y)^2-2xy\cdot(x-3y)+x^2y^2}{x^2+6xy+9y^2-2x^2y+6xy^2+x^2y^2}$; b) $\dfrac{4x^4+4x^2-15}{4x^4+20x^2+25}$; c) $\dfrac{4n^3+8n^2-12n}{(n^2-n+1)^2-(n^2+n-1)^2}$

$\left[\text{a) } \dfrac{c^2}{c^2+2c+1};\ \text{b) } \dfrac{x+1}{x-1};\ \text{c) } \dfrac{3\cdot\left(h^2-h-12\right)}{h^3+5h^2-8h-48}\right]$

47. a) $\frac{(m-1)^3+9\cdot(m-1)^2+27m}{m^3+6m^2+12m+8}$; b) $\frac{d^2+4d-5-m^2-6m}{d^2+8d-2m-m^2+15}$; c) $\frac{(q+3)^2-5q-9}{q^3-q^2}$

$\left[\text{a) } 1;\ \text{b) } \frac{d+m-1}{d-m+3};\ \text{c) } \frac{q+1}{q\cdot(q-1)}\right]$

48. a) $\frac{(x^2-3x+3)^2-8\cdot(x^2-3x+3)+7}{(x^2-1)\cdot(x^2+1)-(3x+5)\cdot(x^2-1)}$; b) $\frac{y^4-5y^3+4y^2}{(y^2-y+1)^2-2\cdot(y^2-y+1)+1}$; c) $\frac{x^4+4}{x^2+2x+2}$

$\left[\text{a) } \frac{x-2}{x+1};\ \text{b) } \frac{y-4}{y-1};\ \text{c) } x^2-2x+2\right]$

Il teorema di Ruffini e la scomposizione di polinomi

È a questo punto evidente che anche il teorema di Ruffini può venirci in aiuto quando dobbiamo scomporre un polinomio.

Esempio 29

Scomporre il trinomio a^3-2a^2-5a+6. È facile vedere che nessuno dei metodi visti finora risulta utile allo scopo. Se riuscissimo a trovare un numero intero che annulla il polinomio, per il teorema del resto, potremmo scomporre il polinomio. Il problema è che non sappiamo come fare, possiamo sostituire valori a caso, ma ciò significa affidarsi al caso. Se riuscissimo a trovare uno o più numeri che annullano il polinomio riusciremmo a scomporlo, se non li trovassimo però non potremmo affermare con certezza che il polinomio non è scomponibile nell'insieme dei numeri interi.

Per risolvere il problema posto dal precedente esempio ci viene in aiuto il seguente importantissimo teorema.

Teorema 7

Dato un polinomio nella variabile x e di grado n, esso è divisibile per il binomio $(x-a)$, con $a\in\mathbb{Z}$, solo se a è un divisore del termine noto.

Il precedente teorema è una condizione necessaria, non sufficiente, quindi ci permette di determinare quali sono i possibili binomi divisori del polinomio a coefficienti interi, ma non ci permette di trovare tutti i suoi divisori, cioè non ci permette di scomporre qualsiasi polinomio.

Esempio 30

I divisori del termine noto del polinomio a^3-2a^2-5a+6, cioè del numero 6, sono –1, 1, –2, 2, –3, 3, –6, 6. Quindi basta effettuare al massimo 8 verifiche per stabilire se il polinomio è o no scomponibile in $\mathbb{Z}$. Vediamo: $a=-1\rightarrow(-1)^3-2\cdot(-1)^2-5\cdot(-1)+6=-1-2+5+6\neq 0; a=1\rightarrow 1^3-2\cdot 1^2-5\cdot 1+6=1-2-5+6=0$.

Abbiamo trovato un numero che annulla il polinomio, possiamo perciò scomporre il polinomio con la regola di Ruffini:

	1	−2	−5	6
1		1	−1	−6
	1	−1	−6	0

. Abbiamo perciò: $a^3-2a^2-5a+6=(a-1)\cdot(a^2-a-6)$. Abbiamo scritto $a-1$ e non $a+1$, perché per $a=1$ si annulla il primo e non il secondo binomio scritto.

Adesso possiamo continuare a scomporre considerando il trinomio in parentesi come notevole, cercando quindi due numeri interi di prodotto –6 e somma –1. Questi numeri esistono, –3 e 2, quindi la scomposizione finale è $a^3-2a^2-5a+6=(a-1)\cdot(a-2)\cdot(a+3)$. Avremmo anche potuto fare in altro modo, cioè continuare a verificare quali degli otto numeri annullavano il polinomio, trovando naturalmente 1, 2 e –3. Poi, visto che il prodotte di tre binomi di primo grado è un polinomio di terzo grado potevamo scrivere immediatamente la scomposizione finale.

Un ultimo esempio.

Esempio 31

Scomporre il polinomio $3a^4-a^3+a-2$. I divisori del suo termine noto sono –1, 1, –2, 2. Verifichiamo se almeno uno di questi 4 numeri annulla il polinomio.

$$a=-1\rightarrow 3\cdot(-1)^4-(-1)^3+(-1)-2=3+1-1-2\neq 0;$$
$$a=1\rightarrow 3\cdot 1^4-1^3+1-2=3-1+1-2\neq 0;$$
$$a=-2\rightarrow 3\cdot(-2)^4-(-2)^3+(-2)-2=48+8-2-2\neq 0;$$
$$a=2\rightarrow 3\cdot 2^4-2^3+2-2=48-8+2-2\neq 0.$$

Possiamo concludere che il polinomio non è scomponibile in $\mathbb{Z}$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Scomporre $x^3-3x^2-33x+35$. Non abbiamo a che fare con un prodotto notevole di quelli noti, né possiamo mettere in evidenza con raggruppamenti parziali. Tentiamo allora con il teorema di Ruffini. I possibili divisori interi sono da ricercarsi fra quelli del termine noto, cioè $\pm1,\pm5,\pm7,\pm35$. Il primo che troviamo è $x=1$. Scomponiamo con la regola di Ruffini:

	1	−3	−33	35
1		1	−2	−35
	1	−2	−35	0

Possiamo perciò scrivere: $x^3-3x^2-33x+35=(x-1)\cdot(x^2-2x-35)$. Per scomporre il secondo fattore in parentesi possiamo ancora usare Ruffini oppure considerarlo come trinomio di secondo grado. In ogni caso troveremo la seguente definitiva scomposizione: $x^3-3x^2-33x+35=(x-1)\cdot(x+5)\cdot(x-7)$.

Scomporre i seguenti polinomi, utilizzando, laddove possibile, la regola di Ruffini

Livello 2

1. a) x^3-2x^2-5x+6; b) x^3-4x^2+x+6; c) x^3-2x^2-5x+7

   [a) $(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)$; b) $(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)$; c) x^3-2x^2-5x+7]

2. a) $x^3+x^2-16x-16$; b) x^3-4x^2+x+11; c) $x^3+3x^2-24x+28$

   [a) $(x+1)\cdot(x+4)\cdot(x-4)$; b) x^3-4x^2+x+11; c) $(x-2)^2\cdot(x+7)$]

3. a) x^4-x^3-7x+8; b) x^4-2x^3+x-2; c) x^5+2x^4-x-2

   [a) x^4-x^3-7x+8; b) $(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x^2-x+1)$; c) $(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x^2+1)$]

4. a) $x^4+3x^3+8x+24$; b) $x^3-3x^2-24x+80$; c) x^3-7x^2-x+28

   [a) $(x+2)\cdot(x+3)\cdot(x^2-2x+4)$; b) $(x+5)\cdot(x-4)^2$; c) x^3-7x^2-x+28]

5. a) x^4-3x^2+2; b) $x^4+3x^3+x^2+3x$; c) $a^4+8a^3-8a-64$

   [a) $(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2-2)$; b) $x\cdot(x+3)\cdot(x^2+1)$; c) $(a-2)\cdot(a+8)\cdot(a^2+2a+4)$]

6. a) $b^5+3b^4-16b-48$; b) $c^4-13c^2+3c+36$; c) $m^4-m^3-3m^2+5m-2$

   [a) $(b-2)\cdot(b+2)\cdot(b+3)\cdot(b^2+4)$; b) $c^4-13c^2+3c+36$; c) $(m+2)\cdot(m-1)^3$]

7. a) p^4-2p^3+p+3; b) $t^4+t^3-5t^2-4t+4$; c) $z^3-11z^2+36z-25$

   [a) p^4-2p^3+p+3; b) $(t+2)\cdot(t-2)\cdot(t^2+t-1)$; c) $z^3-11z^2+36z-25$]

8. a) $x^4-25x^2+60x-36$; b) $m^4+m^3-3m^2-m+2$; c) $p^5-2p^4-2p^3+8p^2-7p+2$

   [a) $(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x+6)$; b) $(m+1)\cdot(m+2)\cdot(m-1)^2$; c) $(p+2)\cdot(p-1)^4$]

9. a) $y^4-y^3-5y^2+17y-12$; b) $m^4-m^3+5m^2-3m+6$; c) $p^8+4p^6+6p^4+4p^2+3$

   [a) $(y-1)\cdot(y+3)\cdot(y^2-3y+4)$; b) $(m^2+3)\cdot(m^2-m+3)$; c) $p^8+4p^6+6p^4+4p^2+3$]

10. a) x^6+7x^3-8; b) z^6+z^4+2z-1; c) $t^5+t^4-4t^2-4t$

    [a) $(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x^2+x+1)$; b) z^6+z^4+2z-1; c) $t\cdot(t+1)\cdot(t^3-4)$]

Lavoriamo insieme

Semplificare la frazione $\frac{a^3-2a^2-41a+42}{3a^3+36a^2+108a}$. Nel denominatore possiamo mettere in evidenza il fattore comune $3a$, invece per scomporre il numeratore ci serviamo della regola di Ruffini. Per i teoremi enunciati nella teoria, possiamo dire che, se il polinomio al numeratore ha alcuni zeri interi, questi sono divisori di 42. Tentiamo con $a = 1$. Applichiamo il teorema del resto: $1^3 - 2 \cdot 1^2 - 41 \cdot 1 + 42 = 1 - 2 - 41 + 42 = 0$. Dividiamo allora per $(a - 1)$. Otteniamo:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & -2 & -41 & 42 \\ 1 & & 1 & -1 & -42 \\ \hline & 1 & -1 & -42 & 0 \end{array}$$

. Possiamo scrivere quindi:

$$\frac{a^3-2a^2-41a+42}{3a^3+36a^2+108a}=\frac{(a-1)\cdot(a^2-a-42)}{3a\cdot(a^2+12a+36)}.$$

Notiamo che il denominatore contiene un quadrato di binomio e il secondo fattore del numeratore si può scomporre con la regola dei trinomi di secondo grado. I numeri cercati sono +6 e – 7.

$$\frac{(a-1)\cdot(a^2-a-42)}{3a\cdot(a^2+12a+36)}=\frac{(a-1)\cdot\cancel{(a+6)}\cdot(a-7)}{3a\cdot\cancel{(a+6)^2}}=\frac{(a-1)\cdot(a-7)}{3a\cdot(a+6)}.$$

Ridurre ai minimi termini le seguenti frazioni algebriche, utilizzando, laddove possibile, la regola di Ruffini

Livello 2

11. a) $\frac{a^4-a^3-7a^2+13a-6}{a^4+3a^3-3a^2-11a-6}$; b) $\frac{m^3-6m^2-13m+42}{m^4+5m^3-79m^2-101m+462}$ $\left[\text{a) } \frac{a^2-2a+1}{a^2+2a+1}\text{; b) } \frac{1}{m+11}\right]$

12. a) $\frac{c^6+4c^4+4c^5+16c^3}{c^7+7c^6+8c^5-16c^4}$; b) $\frac{p^4+3p^3-12p^2-13p-15}{p^4-p^3-16p^2-17p-15}$ $\left[\text{a) } \frac{c^2+4}{c\cdot(c^2+3c-4)}\text{; b) } \frac{p^2+2p-15}{p^2-2p-15}\right]$

13. a) $\frac{t^5+2t^4-9t^3+14t-8}{t^4-5t^3+2t^2+10t-8}$; b) $\frac{d^3-1}{d^4-1}$ $\left[\text{a) } \frac{t^2+3t-4}{t-4}\text{; b) } \frac{d^2+d+1}{d^3+d^2+d+1}\right]$

14. a) $\frac{2c^4-5c^3-34c^2-45c-18}{2c^4+11c^3-10c^2-21c-18}$; b) $\frac{9z^4-24z^3-47z^2-6z+8}{3z^3-8z^2-15z-4}$ $\left[\text{a) } \frac{2c^4-5c^3-34c^2-45c-18}{2c^4+11c^3-10c^2-21c-18}\text{; b) } \frac{9z^2+3z-2}{3z+1}\right]$

15. a) $\frac{e^6-1}{e^7-e^3-e^4+1}$; b) $\frac{n^3-2n^2-5n-6}{n^3+2n^2-5n-6}$ $\left[\text{a) } \frac{e^2-e+1}{e^3-e^2+e-1}\text{; b) } \frac{n^3-2n^2-5n-6}{n^3+2n^2-5n-6}\right]$

16. a) $\frac{4z^4-16z^3-85z^2+4z+21}{4z^3+12z^2-z-3}$; b) $\frac{g^3+2g^2-g-2}{g^3-2g^2-g+2}$ $\left[\text{a) } z-7\text{; b) } \frac{g+2}{g-2}\right]$

17. a) $\frac{6s^3-41s^2+24s+36}{6s^4-77s^3+270s^2-108s-216}$; b) $\frac{h^4+h^3-11h^2+h-12}{h^4-1}$ $\left[\text{a) } \frac{1}{s-6}\text{; b) } \frac{h^2+h-12}{h^2-1}\right]$

18. a) $\frac{k^4+4k^2-5}{2k^4-12k^2+10}$; b) $\frac{k^6+k^5-4k^4-3k^3+k^2-4k-4}{k^5+k^4-5k^3-5k^2+4k+4}$ $\left[\text{a) } \frac{k^2+5}{2\cdot(k^2-5)}\text{; b) } \frac{k^2-k+1}{k-1}\right]$

19. a) $\frac{12m^4-10m^3+8m^2-5m+1}{12m^4-10m^3-4m^2+5m-1}$; b) $\frac{6x^4-55x^3+49x^2+62x-48}{6x^4-49x^3-3x^2+94x-48}$ $\left[\text{a) } \frac{2m^2+1}{2m^2-1}\text{; b) } \frac{2x^2-x-3}{2x^2+x-3}\right]$

20. a) $\frac{n^5-2n^4-2n^3+4n^2+n-2}{n^8-7n^6+15n^4-13n^2+4}$; b) $\frac{w^4-2w^3-3w^2+4w+4}{w^4+w^3-3w^2-5w-2}$ $\left[\text{a) } \frac{1}{n^3+2n^2-n-2}\text{; b) } \frac{w-2}{w+1}\right]$

21. a) $\dfrac{6p^4+25p^2-5p^3-20p+4}{6p^4+23p^2-p^3-4p-4}$; b) $\dfrac{36y^5-228y^4+505y^3-438y^2+108y-8}{36y^5-120y^4+37y^3+141y^2-48y+4}$ $\left[\text{a) } \dfrac{3p-1}{3p+1}\text{; b) } \dfrac{y-2}{y+1}\right]$

22. a) $\dfrac{12q^4+71q^3+101q^2-15q-9}{12q^3+35q^2-4q-3}$; b) $\dfrac{2t^4+3t^3-278t^2+147t+1980}{2t^4+35t^3+26t^2-1107t+1980}$

$\left[\text{a) } q+3\text{; b) } \dfrac{2t^4+3t^3-278t^2+147t+1980}{2t^4+35t^3+26t^2-1107t+1980}\right]$

Operazioni con le frazioni algebriche

A questo punto le operazioni con le frazioni algebriche si effettueranno senza grossi problemi, almeno in linea teorica. Vediamo qualche esempio.

Esempio 32

Eseguire la moltiplicazione seguente: $\frac{4t^2-1}{a^2+6at+9t^2}\cdot\frac{a^3+9a^2t+27at^2+27t^3}{2at-a+6t^2-3t}$. È evidente che la precedente moltiplicazione non differisce dalla semplificazione di una frazione algebrica. Passiamo quindi alle scomposizioni dei singoli fattori, notando che il primo numeratore $4t^2-1=(2t-1)\cdot(2t+1)$ è una differenza di quadrati. Il primo denominatore è un quadrato di binomio: $a^2+6at+9t^2=(a+3t)^2$; il secondo numeratore è un cubo di binomio: $a^3+9a^2t+27at^2+27t^3=(a+3t)^3$; infine per il secondo denominatore ricorriamo alla messa in evidenza parziale: $2at-a+6t^2-3t=a\cdot(2t-1)+3t\cdot(2t-1)=(a+3t)\cdot(2t-1)$. Adesso riscriviamo la frazione sostituendo ai singoli polinomi le loro scomposizioni, quindi semplifichiamo laddove possibile: $\frac{\cancel{(2t-1)}\cdot(2t+1)}{\cancel{(a+3t)^2}}\cdot\frac{\cancel{(a+3t)}^{\,3}}{\cancel{(a+3t)}\cdot\cancel{(2t-1)}}=\frac{2t+1}{2t-1}$.

Vediamo adesso una divisione.

Esempio 33

Eseguire la divisione: $\frac{q^3-4q^2-17q+60}{q^3-2q^2-5q+6}:\frac{q^4-6q^3-7q^2+96q-144}{q^3-4q^2-q+4}$. Intanto trasformiamo la divisione nell'unica frazione algebrica seguente (applicando la nota regola: per dividere due frazioni basta moltiplicare la prima per la reciproca della seconda): $\frac{(q^3-4q^2-17q+60)\cdot(q^3-4q^2-q+4)}{(q^3-2q^2-5q+6)\cdot(q^4-6q^3-7q^2+96q-144)}$. Quindi passiamo alla scomposizione dei singoli fattori. Cominciamo con il numeratore. Per $q^3-4q^2-17q+60$, applichiamo il teorema di Ruffini, trovando che uno dei suoi zeri è 3: $3^3-4\cdot3^2-17\cdot3-60=27-36-51+60=0$. Scomponiamo con la regola di Ruffini:

	1	−4	−17	60
3		3	−3	−60
	1	−1	−20	0

Quindi: $q^3-4q^2-17q+60=(q-3)\cdot(q^2-q-20)$.

Passiamo al secondo fattore: q^3-4q^2-q+4. Possiamo mettere in evidenza a gruppi:

$$q^3-4q^2-q+4=q^2\cdot(q-4)-(q-4)=(q-4)\cdot(q^2-1)=(q-4)\cdot(q-1)\cdot(q+1)$$

Passiamo al denominatore: q^3-2q^2-5q+6 è divisibile per $q-1$. Dividiamo:

	1	−2	−5	6
1		1	−1	−6
	1	−1	−6	0

Quindi si ha: $q^3-2q^2-5q+6=(q-1)\cdot(q^2-q-6)$. Infine $q^4-6q^3-7q^2+96q-144$ è divisibile per $q-3$.

	1	−6	−7	96	−144
3		3	−9	−48	144
	1	−3	−16	48	0

Perciò $q^4-6q^3-7q^2+96q-144=(q-3)\cdot(q^3-3q^2-16q+48)$.

Riscriviamo la frazione iniziale con queste scomposizioni e semplifichiamo laddove possibile.

$$\frac{\left[(q-3)\cdot\left(q^2-q-20\right)\right]\cdot\left[(q-4)\cdot(q-1)\cdot(q+1)\right]}{\left[(q-1)\cdot\left(q^2-q+6\right)\right]\cdot\left[(q-3)\cdot\left(q^3-3q^2-16q+48\right)\right]}=\frac{\left(q^2-q-20\right)\cdot(q-1)\cdot(q+1)}{\left(q^2-q+6\right)\cdot\left(q^3-3q^2-16q+48\right)}$$

Continuiamo a scomporre il fattore al numeratore e il primo al denominatore considerandoli come trinomi notevoli. $\frac{(q-5)\cdot(q+4)\cdot(q-1)\cdot(q+1)}{(q-3)\cdot(q+2)\cdot\left(q^3-3q^2-16q+48\right)}$.

Per l'ultimo fattore continuiamo a usare il teorema di Ruffini:

	1	−3	−16	48
3		3	0	−48
	1	0	−16	0

. Si ha perciò:

$$\frac{(q-5)\cdot(q+4)\cdot(q-1)\cdot(q+1)}{(q-3)\cdot(q+2)\cdot(q-3)\cdot\left(q^2-16\right)}=\frac{(q-5)\cdot\cancel{(q+4)}\cdot(q-1)\cdot(q+1)}{(q-3)\cdot(q+2)\cdot(q-3)\cdot(q-4)\cdot\cancel{(q+4)}}=\frac{(q-5)\cdot(q-1)\cdot(q+1)}{(q-3)\cdot(q+2)\cdot(q-3)\cdot(q-4)}$$

Ecco la frazione ridotta ai minimi termini che, se vogliamo, possiamo scrivere nel seguente modo:

$$\frac{q^3-5q^2-q+5}{q^4-13q^3+63q^2-135q+108}.$$

Passiamo alle somme.

Esempio 34

Eseguire la seguente somma algebrica: $\frac{3x-1}{2x-3}+\frac{1}{4x^2-9}-\frac{6x}{2x+3}$. Si tratta innanzitutto di determinare il minimo comune multiplo fra i denominatori.

$$mcm.\left(2x-3,4x^2-9,2x+3\right)=mcm.\left(2x-3,(2x-3)\cdot(2x+3),2x+3\right)=(2x-3)\cdot(2x+3)$$

poi si procede con il noto metodo applicato alla somma di frazioni numeriche, ottenendo:

$$\frac{3x-1}{2x-3}+\frac{1}{(2x-3)\cdot(2x+3)}-\frac{6x}{2x+3}=\frac{(3x-1)\cdot(2x+3)+1-6x\cdot(2x-3)}{(2x-3)\cdot(2x+3)}=\frac{\underline{6x^2}+9x-2x-3+1-\underline{12x^2}+18x}{(2x-3)\cdot(2x+3)}=$$

$$=\frac{-6x^2+25x-2}{(2x-3)\cdot(2x+3)}.$$

Per essere sicuri che la frazione sia ridotta ai minimi termini basta verificare che il numeratore non sia divisibile per nessuno dei due fattori al denominatore. Eseguiamo le divisioni:

$$\begin{array}{r|l} -6x^2+25x-2 & \underline{2x-3} \\ \underline{6x^2-9x} & -3x+8 \\ 16x-2 & \\ -16x+24 & \\ \hline 22 & \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{r|l} -6x^2+25x-2 & \underline{2x+3} \\ \underline{6x^2+9x} & -3x+17 \\ 34x-2 & \\ -34x-51 & \\ \hline -53 & \end{array}$$

La frazione è ridotta ai minimi termini.

Concludiamo trattando un'espressione più complessa.

Esempio 35

Vogliamo semplificare la seguente espressione algebrica:

$$\left(\frac{m-1}{m-4}-\frac{5}{m+2}-\frac{15}{m^2-2m-8}\right)\cdot\left(\frac{1}{5+3m}-\frac{1}{3m^2-4m-15}\right)\cdot\left(3+\frac{8}{m-1}\right)$$

Di seguito proponiamo il corretto svolgimento, nel quale abbiamo applicato quanto abbiamo visto finora, scomposizioni, semplificazioni, minimi comuni denominatori e via dicendo.

$$\left(\frac{m-1}{m-4}-\frac{5}{m+2}-\frac{15}{(m-4)\cdot(m+2)}\right)\cdot\left(\frac{1}{5+3m}-\frac{1}{(m-3)\cdot(3m+5)}\right)\cdot\frac{3m-3+8}{m-1}=$$

$$=\frac{(m-1)\cdot(m+2)-5\cdot(m-4)-15}{(m-4)\cdot(m+2)}\cdot\frac{m-3-1}{(m-3)\cdot(3m+5)}\cdot\frac{3m+5}{m-1}=$$

$$=\frac{m^2+2m-m-2-5m+20-15}{(m-4)\cdot(m+2)}\cdot\frac{m-4}{(m-3)}\cdot\frac{1}{m-1}=\frac{m^2-4m+3}{m+2}\cdot\frac{1}{(m-1)\cdot(m-3)}=$$

$$=\frac{\cancel{(m-1)\cdot(m-3)}}{m+2}\cdot\frac{1}{\cancel{(m-1)\cdot(m-3)}}=\frac{1}{m+2}$$

Nelle attività di verifica saranno proposti altri esempi.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo semplificare la seguente espressione: $\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{mn}-\frac{3}{n}\right)\cdot\frac{mn}{9m^2-6mn-12m+n^2+4n+4}$. Cominciamo con la ricerca del minimo comune denominatore fra le frazioni all'interno della parentesi, che facilmente si trova essere mn: $\frac{n+2-3m}{\cancel{mn}}\cdot\frac{\cancel{mn}}{9m^2-6mn-12m+n^2+4n+4}$. Adesso cerchiamo di fattorizzare il secondo denominatore. Notiamo che è formato da sei termini, tre dei quali sono quadrati ($9m^2$, n^2 e 4). Ciò ci fa pensare a un quadrato di trinomio; in effetti gli altri tre termini sono proprio i corrispondenti doppi prodotti. Scriviamo quindi: $\frac{\cancel{n+2-3m}}{(n+2-3m)^{\cancel{2}}}=\frac{1}{n+2-3m}$.

Ricondurre le seguenti espressioni a un'unica frazione algebrica ridotta ai minimi termini

Livello 1

1. a) $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}+\frac{b^2-1}{ab}$; b) $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}-\frac{1}{m+n}$; c) $\frac{1}{m}-\frac{1}{n}+2$; d) $\frac{1-2z}{z^2}-\frac{3}{z}+1$

$\left[\text{a) } \frac{a^2-1}{ab};\ \text{b) } \frac{m^3+m^2n+mn^2-mn+n^3}{mn\cdot(m+n)};\ \text{c) } \frac{2mn-m+n}{mn};\ \text{d) } \frac{z^2-5z+1}{z^2}\right]$

2. a) $\frac{x^2}{y}-\frac{y^2}{x}$; b) $\frac{a}{3}+\frac{3}{a}-\frac{5}{6a}$; c) $\frac{n^2+1}{m^2n}-\frac{n}{m^2}+\frac{m}{n^2}-\frac{m^2-1}{mn^2}$; d) $\frac{x-1}{xy}+\frac{y-1}{x}-y$

$\left[\text{a) } \frac{x^3-y^3}{xy};\ \text{b) } \frac{2a^2+13}{6a};\ \text{c) } \frac{m+n}{m^2n^2};\ \text{d) } \frac{-xy^2+x-y^2+y+1}{xy}\right]$

3. a) $\frac{\frac{x}{4}-\frac{4}{x}}{2}$; b) $\frac{\frac{a}{2}-\frac{2}{a}+\frac{3}{2}}{4}$; c) $\left(\frac{t}{r}+\frac{r}{t}-2\right):\frac{t^2-r^2}{t}$; d) $\left(\frac{z}{x}-\frac{x}{z}\right)\cdot\frac{xz}{x+z}$

$\left[\text{a) } \frac{x^2-16}{8x};\ \text{b) } \frac{3a^2+20}{24a};\ \text{c) } \frac{t-r}{r\cdot(r+t)};\ \text{d) } z-x\right]$

Livello 2

4. a) $\left(\frac{v^2}{u}-\frac{u^2}{v}+3u-3v\right):\frac{u^3-2u^2v+uv^2}{v}$; b) $\frac{x^3+y^3}{x}\cdot\left(\frac{y^2}{x^2-xy+y^2}-1\right)$ $\left[\text{a) } \frac{v-u}{u^2};\ \text{b) } y^2-x^2\right]$

5. a) $\left(\frac{2}{a^2}-\frac{2}{b^2}\right)\cdot\frac{ab}{a+b}$; b) $\left(\frac{x+y}{x}-\frac{x-y}{y}\right):\left(\frac{x-y}{y^2}+\frac{x+y}{x^2}\right)$ $\left[\text{a) } \frac{2b-2a}{ab};\ \text{b) } \frac{-x^3y+2x^2y^2+xy^3}{x^3-x^2y+xy^2+y^3}\right]$

6. a) $\frac{x^2+1}{x}\cdot\frac{y^2+1}{y}+\frac{x^2-1}{y}\cdot\frac{y^2-1}{x}$; b) $\frac{a^2-b^2}{ab}+\frac{a-b}{a}-\frac{a+b}{b}$ $\left[\text{a) } \frac{2x^2y^2+2}{xy};\ \text{b) } -\frac{2b}{a}\right]$

7. a) $\frac{a-\frac{1}{b}}{b-\frac{1}{a}}$; b) $\frac{\frac{m+2p}{m-p}}{m}-\frac{\frac{m-2p}{m+p}}{p}$; c) $\left(2b^2-\frac{1}{2b^2}\right):\left(2b^2+2+\frac{1}{2b^2}\right)$; d) $\frac{3p^2-1}{p^2}+\frac{p-2}{p}-1$

$\left[\text{a) } \frac{a}{b};\ \text{b) } \frac{-m^3+4m^2p+mp^2+2p^3}{mp\cdot(m^2-p^2)};\ \text{c) } \frac{2b^2-1}{2b^2+1};\ \text{d) } \frac{3p^2-2p-1}{p^2}\right]$

8. a) $\left[(2t+3)^2+\frac{1}{2t+3}+6t+12\right]\cdot\frac{1}{(t+2)^3}$; b) $\frac{12h^2+5h-3}{7h}\cdot\left(\frac{5h-2}{4h-3}-\frac{5h+2}{4h+3}\right)$ $\left[\text{a) } \frac{8}{2t+3}\text{ ; b) } \frac{2\cdot(3h-1)}{4h-3}\right]$

9. $\left[(3x-y)^3+\frac{1}{3x-y}+18x-6y+4\cdot(3x-y)^2+4\right]\cdot\left(1-\frac{1}{3x-y+1}\right)^3$ $\left[(3x-y)^2\cdot(3x-y+1)\right]$

Lavoriamo insieme

Semplificare $\frac{2t+3}{2t-5}+\frac{4t^2-20t+25}{4t^2-4t-15}-\frac{2t-5}{2t+3}$. Dobbiamo determinare il minimo comune denominatore; l'unico problema consiste nello scomporre il secondo denominatore. Notiamo che non vi sono fattori comuni, né può essere un quadrato di binomio, pur avendo tre termini. Non ci rimane che tentare con i trinomi di secondo grado. Osserviamo anche che gli altri due denominatori sono di primo grado; verifichiamo se sono i fattori del nostro secondo denominatore: $(2t-5)\cdot(2t+3)=4t^2+6t-10t-15=4t^2-4t-15$. È proprio come pensavamo. Questo fatto ci suggerisce la seguente regola pratica: quando abbiamo a che fare con espressioni frazionarie, che è utile verificare se effettivamente il prodotto di due o più denominatori uguagliano uno o più degli altri. Procediamo con la semplificazione:

$$\frac{2t+3}{2t-5}+\frac{4t^2-20t+25}{(2t-5)\cdot(2t+3)}-\frac{2t-5}{2t+3}=\frac{(2t+3)^2+4t^2-20t+25-(2t-5)^2}{(2t-5)\cdot(2t+3)}=$$

$$=\frac{4t^2+12t+9+4t^2-20t+25-(4t^2-20t+25)}{(2t-5)\cdot(2t+3)}=\frac{8t^2-8t+34-4t^2+20t-25}{(2t-5)\cdot(2t+3)}=\frac{4t^2+12t+9}{(2t-5)\cdot(2t+3)}$$

Osserviamo che al numeratore abbiamo ottenuto il quadrato del binomio, già sviluppato in precedenza, $2t+3$. Quindi abbiamo la frazione ridotta: $\frac{(2t+3)^2}{(2t-5)\cdot(2t+3)}=\frac{2t+3}{2t-5}$. In effetti potevamo osservare che la seconda frazione, ridotta ai minimi termini, altri non è che la terza frazione, potevamo quindi semplificare immediatamente, cioè:

$$\frac{2t+3}{2t-5}+\frac{4t^2-20t+25}{(2t-5)\cdot(2t+3)}-\frac{2t-5}{2t+3}=\frac{2t+3}{2t-5}+\frac{(2t-5)^2}{(2t-5)\cdot(2t+3)}-\frac{2t-5}{2t+3}=\frac{2t+3}{2t-5}+\frac{2t-5}{2t+3}-\frac{2t-5}{2t+3}=\frac{2t+3}{2t-5}$$

Livello 1

10. a) $\frac{a+2}{a-2}-\frac{a-2}{a+2}$; b) $\frac{m+1}{m-2}-\frac{m-2}{m+1}$; c) a) $\frac{b}{b-3}-\frac{b}{b+3}-\frac{6}{b^2-9}$; d) $\frac{a}{a+7}-\frac{7}{a-7}+\frac{1}{a^2-49}$

$\left[\text{a) } \frac{8a}{a^2-4}\text{; b) } \frac{3\cdot(2m-1)}{m^2-m-2}\text{ ; c) } \frac{6b-6}{b^2-9}\text{; d) } \frac{a^2-14a-48}{a^2-49}\right]$

11. a) $\frac{2}{x+1}-\frac{x}{x^2+2x+1}+\frac{x}{x+1}$; b) $\frac{y}{(y-2)^2}+\frac{1}{y-2}-1$; c) $\frac{\frac{a}{a+y}+\frac{y}{a-y}}{\frac{y}{a+y}-\frac{a}{a-y}}$; d) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right):\left(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{x-y}\right)$

$\left[\text{a) } \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+1}\text{; b) } \frac{-y^2+6y-6}{(y-2)^2}\text{ ; c) } -1\text{; d) } \frac{(y-x)\cdot(x+y)^2}{2xy^2}\right]$

12. a) $\frac{9m^2-16t^2}{12mt}-\frac{12mt-16t^2}{12mt-9m^2}$; b) $\left(\frac{z+t}{z-t}+1\right)\cdot\frac{z^2-t^2}{3z}$; c) $\frac{1}{7pr^2+3p^2r^3}\cdot\left(\frac{1}{7pr^2}+\frac{1}{3p^2r^3}\right)$

$\left[\text{a) } \frac{3m}{4t}\text{; b) } \frac{2\cdot(t+z)}{3}\text{ c; } \frac{1}{21p^3r^5}\right]$

13. $\left(\frac{2}{l+4}-\frac{5}{l^2-16}+\frac{2}{l-4}\right)\cdot\left(\frac{1}{15-12l}+\frac{1}{3l+12}\right)\cdot\left(\frac{8}{7l+28}-\frac{1}{7l-21}\right)$ $\left[\frac{1}{(l+4)^3}\right]$

14. a) $\frac{2c-1}{2c+1}-\frac{3c+1}{3c-1}+\frac{c}{6c^2+c-1}$; b) $\frac{m^3-1}{m^2-m+1}-\frac{m^3+1}{m^2+m+1}$

$\left[\text{a) } -\frac{9c}{6c^2+c-1}\text{; b) } \frac{2m^4-2m-2}{(m^2+m+1)\cdot(m^2-m+1)}\right]$

Livello 2

15. a) $\frac{(2t+4)\cdot(4t^2+10t+7)}{8t^3+36t^2+54t+28}\cdot\frac{(2t+2)\cdot(4t^2+14t+13)}{8t^3+36t^2+54t+26}$; b) $\frac{1}{m^2-5m+6}-\frac{2}{m-2}+\frac{3}{m-3}$

$\left[\text{a) } 1\text{ ; b) } \frac{m+1}{m^2-5m+6}\right]$

16. a) $\frac{(3a^2b-1)\cdot(9a^4b^2-3a^2b+1)}{27a^6b^3+1}\cdot\frac{(3a^2b+1)\cdot(9a^4b^2+3a^2b+1)}{27a^6b^3-1}$; b) $\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}+\frac{x^2+4y^2}{x^2-y^2}$

$\left[\text{a) } 1\text{ ; b) } \frac{x^2+4xy+4y^2}{x^2-y^2}\right]$

17. a) $\frac{a^2+1}{a-m}+\frac{m^2-1}{a+m}-\frac{a^2-1}{a+m}+\frac{m^2+1}{a-m}$; b) $\frac{x^2+3}{1-x^2}+\frac{1-x}{1+x}-\frac{1+x}{1-x}$; c) $\frac{ab-b^2}{a^3-b^3}+\frac{a}{ab-b^2}-\frac{b}{a^2+ab+b^2}$

$\left[\text{a) } \frac{2\cdot(am+1)}{a-m}\text{; b) } \frac{3-x}{x+1}\text{; c) } \frac{a}{b\cdot(a-b)}\right]$

18. a) $\left(\frac{2}{h+2}+\frac{2h^2}{h^2-4}\right)^2\cdot\left(\frac{-4h}{h^2-2h+1}+\frac{8}{h-1}\right)^2$; b) $\left(\frac{a+1}{2a-3}+\frac{a-2}{a-1}-\frac{2-a}{2a^2-5a+3}\right)\cdot\frac{4a^2-9}{a^2-2a+1}$

$\left[\text{a) } \frac{2\cdot(am+1)}{a-m}\text{; b) } \frac{3-x}{x+1}\text{; c) } \frac{a}{b\cdot(a-b)}\right]$

19. a) $\left(\frac{1}{x+2}+\frac{x+2}{x+1}-\frac{2x-3}{x^2+3x+2}\right):\left(\frac{x+2}{x+1}-\frac{x+1}{x+2}\right)$; b) $\left(x+\frac{2-x}{x+2}+\frac{x-5}{x-1}+\frac{12}{x^2+x-2}\right):\frac{x^2+5x+4}{x^2+x}$

$\left[\text{a) } \frac{2\cdot(am+1)}{a-m}\text{; b) } \frac{3-x}{x+1}\text{; c) } \frac{a}{b\cdot(a-b)}\right]$

20. a) $\left(\frac{1}{1-a}+\frac{a+3}{a-2}+\frac{1-2a}{a^2-3a+2}\right):\frac{a^2-4}{a^3+7a^2+10a}$; b) $\left(\frac{a+1}{1-a}+\frac{2a+2}{a-2}-\frac{2}{a^2-3a+2}\right)\cdot\frac{a^2-4a+4}{a^2-4}$

$\left[\text{a) } \frac{a^2\cdot(a+5)}{(a-2)^2}\text{; b) } 1\right]$

21. a) $\left(\frac{1+x}{x-x^2}+\frac{1}{x^2-1}+\frac{x-1}{x^2+x}\right)\cdot\frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}$; b) $\left(\frac{1-n}{n+n^2}-\frac{2}{n^2-1}+\frac{n+1}{n^2-n}\right)\cdot\frac{n^2+2n+1}{3n^2+9n+6}$

$\left[\text{a) } \frac{-3}{x^2-x-2}\text{; b) } \frac{2}{3\cdot(n^2+n-2)}\right]$

22. $\left(\frac{3-m}{3m-3}+\frac{8m+6}{6m+3}\right)\cdot\left(\frac{3m+1}{m-2}+\frac{m-1}{m+1}+\frac{3m-2}{m^2-m-2}\right)\cdot\left(\frac{4m^2-4m-7}{8m-4}-\frac{2m^2-m-2}{4m+2}+\frac{19}{16m^2-4}\right)$ [1]

Livello 3

23. $\dfrac{1}{x^2-xz-x}-\dfrac{2x-z-1}{2x^2\cdot(z+1)-2x\cdot(z+1)^2}-\dfrac{z+1}{4x^3-6x^2\cdot(z+1)+2x\cdot(z+1)^2}+\dfrac{2x}{2x^2\cdot(z+1)-3x\cdot(z+1)^2+(z+1)^3}$

$\left[\dfrac{2}{x\cdot(x-z-1)}\right]$

Lavoriamo insieme

Semplificare $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{3b^2+5}{3b^2+4}}$. Di solito la presenza di più livelli di frazioni provoca il panico nello studente.

Basta procedere con calma e i problemi si risolvono da soli. Vediamo come.

$$1-\frac{1}{\dfrac{3b^2+4-(3b^2+5)}{3b^2+4}}=1-\frac{1}{\dfrac{3b^2+4-3b^2-5}{3b^2+4}}=1-\frac{1}{\dfrac{-1}{3b^2+4}}.$$

Abbiamo svolto il minimo comune denominatore al livello più basso. Adesso "eliminiamo" una frazione applicando la nota regola che dice che *la divisione di due frazioni equivale al prodotto della prima per l'inversa della seconda*: $1+3b^2+4=3b^2+5$.

Livello 2

24. a) $\dfrac{4d^2+12d+9}{6d^2-7d-3}\cdot\dfrac{15d^2-7d-4}{4d^2-9}:\dfrac{10d^2+23d+12}{4d^2-12d+9}$; b) $\dfrac{x+1+y}{x+1-y}-\dfrac{4y^2}{x^2+2x-y^2+1}-\dfrac{x+1-y}{x+1+y}$

$\left[\text{a) }\dfrac{5d-4}{3d+4}\text{ ; b) }\dfrac{4y}{x+y+1}\right]$

25. a) $\dfrac{a-\dfrac{a-b}{ab+1}}{1+\dfrac{a-b}{ab+1}a}$; b) $\dfrac{1}{6-4a-2m}-\dfrac{3-a-m}{4a^2+(m-3)^2-12a+4am}$ $\left[\text{a) } b\text{ ; b) }\dfrac{m-3}{2\cdot(2a+m-3)^2}\right]$

26. $\dfrac{(x-y)^2+(z-t)^2}{(x-y)^3-(z-t)^3}+\dfrac{z-t}{(x-y)^2-(z-t)^2}-\dfrac{(x-y)^3}{(x-y+z-t)\cdot\left[(x-y)^3-(z-t)^3\right]}+\dfrac{1}{x-y+z-t}$ $\left[\dfrac{1}{x-y-z+t}\right]$

27. a) $\dfrac{\dfrac{7m+5}{3m-1}-1}{\dfrac{7m+5}{3m-1}+1}$; b) $\dfrac{1-p}{1+p}+\dfrac{5}{\dfrac{1+p}{1-p}}$; c) $\dfrac{x+1+y}{x+1-y}-\dfrac{4y^2}{x^2+2x-y^2+1}-\dfrac{x+1-y}{x+1+y}$

$\left[\text{a) }\dfrac{2m+3}{5m+2}\text{ ; b) }\dfrac{6-6p}{p+1}\text{; c) }\dfrac{4y}{x+y+1}\right]$

28. a) $\dfrac{\dfrac{t^2-px}{p-t}+t}{\dfrac{t^2-px}{p-t}+x}$; b) $\dfrac{x+y+z}{z}-\dfrac{1}{\dfrac{z}{x+y}}$; c) $\dfrac{\dfrac{(4y+1)^2-12y-1}{(4y+1)^2-20y+1}}{\dfrac{(4y+1)^2-5\cdot(4y+1)+4}{(4y+1)^2-7\cdot(4y+1)+12}}$

$\left[\text{a) }\dfrac{p}{t}\text{ ; b) }1\text{ ; c) }\dfrac{1}{4\cdot(2y-1)^2\cdot(4y-3)^2}\right]$

Livello 3

29. $\left(\dfrac{6e^3-2e^2g+15e^2f-5efg}{4e^2+20ef+25f^2}\right)\cdot\left(\dfrac{-18e+6g}{3e^2+3ef-eg-fg}+\dfrac{g^2+9e^2}{e^2g+efg}\right):\dfrac{g^2-6eg+9e^2}{2e^2g+7efg+5f^2g}$ $[3e-g]$

30. a) $1-\dfrac{2x-1}{1-\dfrac{1}{2x-1-\dfrac{1}{2x-1}}}$ b) $\dfrac{x^2-y^2-z^2+x+y+2yz-z}{x^2+y^2+z^2+2xy-2yz-2xz}\cdot\left(1-\dfrac{1}{x-y+z+1}\right)$

$\left[\text{a) } \dfrac{-8x^3+16x^2-10x+1}{4x^2-6x+1}\text{ ; b) } \dfrac{x-y+z}{x+y-z}\right]$

31. a) $\dfrac{\dfrac{1}{g+1}-\dfrac{1}{g-1}+\dfrac{2}{g-2}-\dfrac{2}{g+2}}{\left(\dfrac{4}{g+2}-\dfrac{2}{g+1}\right)\cdot\left(\dfrac{6}{g-2}-\dfrac{3}{g-1}\right)}$; b) $\dfrac{\left(\dfrac{k+3}{k+4}+\dfrac{k+5}{k+3}-2\right)\cdot(k+4)}{k^2+8k+15}$ $\left[\text{a) } 1\text{ ; b) } \dfrac{1}{(k+3)^2}\right]$

32. a) $\dfrac{\left(\dfrac{1}{1-bc}+\dfrac{bc+3}{bc-2}+\dfrac{1-2bc}{b^2c^2-3bc+2}\right)\cdot(b^2c^2-4)}{b^3c^3+7b^2c^2+10bc}$; b) $\dfrac{\left(\dfrac{u}{z}+\dfrac{2z-u}{u+2z}+\dfrac{u-5z}{u-z}+\dfrac{12z^2}{u^2+uz-2z^2}\right)\cdot(u^2+uz)}{u^2+5uz+4z^2}$

$\left[\text{a) } \dfrac{1}{bc+5}\text{ ; b) } \dfrac{u^2}{z\cdot(4z+u)}\right]$

33. $\left(\dfrac{r^3}{q^2+2r^3}+\dfrac{q^2-r^3}{q^2+r^3}+\dfrac{3q^2r^3+7r^6}{q^4+3q^2r^3+2r^6}\right)\cdot\left(\dfrac{r^3}{q^2+3r^3}+\dfrac{2r^3}{q^2-3r^3}\right)$ $\left[\dfrac{3r^3}{q^2-3r^3}\right]$

34. $\dfrac{\left(\dfrac{xy+tz}{2xy-3tz}+\dfrac{xy-2tz}{xy-tz}-\dfrac{2t^2z^2-txyz}{2x^2y^2-5txyz+3t^2z^2}\right)\cdot(4x^2y^2-9t^2z^2)}{x^2y^2-2txyz+t^2z^2}$ $\left[\dfrac{3\cdot(2xy+3tz)}{xy-tz}\right]$

35. a) $\dfrac{\dfrac{x^2+x-1}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{x}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2+x+1}}$; b) $\dfrac{\dfrac{m+n-1}{m+n+1}}{\dfrac{(m+n)^2-1}{(m+n)^2+1}-\dfrac{m+n-1}{m+n+1}}$; c) $\dfrac{\dfrac{\dfrac{a+b+1}{a+b-1}+1}{\dfrac{a+b+1}{a+b-1}-1}}{\dfrac{\dfrac{a+b+1}{a+b-1}-1}{\dfrac{a+b+1}{a+b-1}+1}}$ $\left[\text{a) } \dfrac{-2x-2}{x^3+x+1}\text{ ; b) } \dfrac{m^2-2mn+n^2+1}{2\cdot(m+n)}\text{; c) } \varnothing\right]$

36. a) $\dfrac{\dfrac{y+1}{y-1}+1}{\dfrac{y+1}{y-1}-1}$; b) $\dfrac{\dfrac{1}{2x-t}}{4x^2+2tx+t^2}+\dfrac{1}{\dfrac{2x+t}{4x^2-2xt+t^2}}$; c) $\dfrac{\dfrac{a^2+2}{a^2-2}+1}{\dfrac{a^2-2}{a^2+2}+1}$ $\left[\text{a) } \dfrac{(y-1)^2}{2}\text{ ; b) } \dfrac{16x^3}{64x^6-t^6}\text{ ; c) } \dfrac{a^2+2}{a^2-2}\right]$

L'angolo delle correzioni

Correggere gli errori nelle seguenti espressioni

1. $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a-b}=\dfrac{2}{a+b}\text{ ; }\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}-4=\dfrac{2x+3-4}{x^2}=\dfrac{2x-1}{x^2}\text{ ; }\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=1$

2. $\dfrac{1-x}{x+2}-\dfrac{2+x}{x-1}=\dfrac{1-x-2-x}{x+2-x+1}=\dfrac{-1-2x}{3}$

3. $\dfrac{m+2}{m-1}-\dfrac{3m+1}{m+1}=\dfrac{(m+2)\cdot(m+1)-(3m+1)\cdot(m-1)}{(m-1)\cdot(m+1)}=$

$=\dfrac{m^2+m+2m+2-3m^2-3m+m-1}{(m-1)\cdot(m+1)}=\dfrac{-2m^2+m+1}{(m-1)\cdot(m+1)}=\dfrac{(m-1)^2}{(m-1)\cdot(m+1)}=\dfrac{m-1}{m+1}$

Quelli che … vogliono saperne di più

Principio di identità dei polinomi e teorema fondamentale dell'algebra

Vogliamo approfondire il concetto di divisibilità di polinomi. Cominciamo con il porre alcune definizioni.

Definizione 5

Diciamo che due polinomi sono **identici** se hanno lo stesso grado e uguali i coefficienti dei termini simili.

Legato al concetto vi sono alcuni risultati che andiamo a enunciare.

Teorema 8 (Principio di identità dei polinomi)

Condizione necessaria e sufficiente affinché due polinomi in una sola variabile siano identici è che assumano lo stesso valore per ogni sostituzione della variabile con uguali numeri reali.

Esempio 36

Il precedente principio significa che, poiché i polinomi $p(a)=3a^5-2a^3+a-2; f(t)=3t^5-2t^3+t-2$, sono identici, allora tutte le volte in cui sostituiamo un numero reale n al posto della variabile a in $p(a)$ e lo stesso numero reale n al posto di t in $f(t)$, otterremo lo stesso numero, cioè $p(a)\equiv f(t)\Leftrightarrow p(n)=f(n),\forall n\in\mathbb{R}$.

Definizione 6

Un numero n che annulla un polinomio si chiama **zero del polinomio**.

Un altro importante risultato è il seguente.

Teorema 9

Se due polinomi di grado n si annullano per gli stessi n numeri reali, essi sono identici o differiscono al più per una costante moltiplicativa.

Vediamo delle applicazioni dei precedenti teoremi.

Esempio 37

- Consideriamo i polinomi $a^3-2a^2-5a+6,(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)$, entrambi di terzo grado. Il secondo si annulla per $x = 1$, $x = –2$ e $x = –3$. Per il secondo polinomio abbiamo:
$$1^3-2\cdot1^2-5\cdot1+6=(-2)^3-2\cdot(-2)^2-5\cdot(-2)+6=(-3)^3-2\cdot(-3)^2-5\cdot(-3)+6=0$$
quindi per il teorema precedente i due polinomi o sono uguali, indipendentemente dal nome simbolico della variabile o uno dei due si ottiene moltiplicando per un dato numero reale tutti i suoi coefficienti. In questo caso i coefficienti direttori dei due polinomi sono uguali, quindi anche i polinomi lo sono.
- Consideriamo adesso i due polinomi di secondo grado $3h^2-3, w^2-1$, che si annullano entrambi per –1 e 1. Essi non sono certamente uguali, ma il primo è uguale al secondo moltiplicato per 3.

Se due polinomi di grado n in una variabile sono uguali allora assumono lo stesso valore per tutti i numeri reali, se invece due polinomi assumono lo stesso valore per alcuni numeri reali, possiamo dire che sono identici?

Esempio 38

Il polinomio $7a$ –1 e il polinomio $12b$ –1 assumono lo stesso valore per $a = b = 0$, infatti $7 \cdot 0 – 1 = 12 \cdot 0 – 1 = –1$, eppure sono del tutto diversi fra loro. Per esempio se $a = b = 1$, si ha: $7 \cdot 1 – 1 = 6 \neq 12 \cdot 1 – 1 = 11$.

In effetti non è detto che due polinomi che assumono lo stesso valore per alcuni numeri lo assumano per tutti, vale però il seguente risultato.

Teorema 10

Se due polinomi in una sola variabile di grado n assumono lo stesso valore per più di n valori allora essi sono identici.

Vale anche il seguente importantissimo teorema.

Teorema 11 (fondamentale dell'algebra o di D'Alembert–Gauss)

Un polinomio di grado n in una sola variabile, ammette al più n zeri reali.

Risulta molto utile per la ricerca dei divisori di un polinomio in una sola variabile anche il seguente risultato.

Teorema 12

Dato un polinomio in una sola variabile di grado n, il cui coefficiente direttore è p e il cui termine noto è q, allora i suoi eventuali zeri razionali $\pm\frac{a}{b}$ (a e b coprimi) sono tali che a è divisore di q e b è divisore di p.

Esempio 39

- Determinare gli zeri razionali del polinomio $v^3-6v^2+5v+12$. Gli unici zeri, interi in questo caso poiché il coefficiente direttore vale 1, che esso può ammettere sono: ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12. Calcolando il valore del polinomio in questi 12 numeri vediamo che esso si annulla per $v = -1$, $v = 3$ e $v = 4$ che, per il teorema di Gauss, sono i suoi unici zeri.
- Consideriamo adesso il polinomio $u^4+u^3+2u^2+3u-3$. I suoi unici divisori interi possono essere ±1 e ±3 ma, come si verifica facilmente, nessuno di questi quattro valori lo annulla. Quindi non riusciamo a scomporre il polinomio mediante fattori razionali.
- Consideriamo il polinomio $24h^4-44h^3+18h^2-11h+3$. Per il teorema 12 i potenziali zeri razionali sono: $\pm1,\pm3,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{3},\pm\frac{1}{4},\pm\frac{1}{6},\pm\frac{1}{8},\pm\frac{1}{12},\pm\frac{1}{24},\pm\frac{3}{2},\pm\frac{3}{4},\pm\frac{3}{8}$, dato che i divisori di 3 sono solo 1 e 3, mentre quelli di 24 sono: {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}. Si verifica che gli unici zeri razionali sono $h=\frac{1}{3},\frac{3}{2}$.

I protagonisti



Jean Baptiste D'Alembert fu abbandonato sui gradini della chiesa di Saint Jean le Rond, il 17 novembre 1717, perché figlio illegittimo di una nobile e un militare. Per tale motivo fu battezzato come Jean Baptiste Lerond, nome che poi mutò nel 1738 in D'Alembert. A parte il risultato qui citato, da lui solo enunciato, non raggiunse risultati matematici particolarmente brillanti, anche perché la maggior parte dei suoi lavori scientifici erano rivolti alla fisica. È universalmente noto per aver lavorato con Diderot alla stesura della *Encyclopédie méthodique* pubblicata nel periodo 1751–1777. Morì a Parigi il 29 ottobre 1783.



Carl Federic Gauss è uno dei più importanti e celebri matematici di tutti i tempi, noto come il *princeps mathematicorum.* Nacque a Braunschweig da una modesta famiglia, il 30 aprile 1777. Diede prova di una spiccata intelligenza sin da giovanissimo e diversi sono gli aneddoti che narrano della sua precocissima genialità. Per l'interessamento del duca di Brunswick continuò gli studi ed entrò al Collegio Carolino nel 1792. A soli diciannove anni dimostrò che il poligono regolare di 17 lati è costruibile con riga e compasso, ma migliorò in seguito questo risultato, generalizzandolo e dimostrando che tale costruzione è possibile solo se i poligoni regolari hanno $2^{2^n}+1$ con n numero primo. Fornì nella sua tesi di laurea del 1799 la prima dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra, ne diede altre tre in seguito,. Nei primi anni del XIX secolo si occupò di astronomia, predicendo, solo con i calcoli, l'esistenza del pianeta Cerere, fatto che fu poi confermato il 7 dicembre 1801 dall'astronomo Zach. Nel 1807 fu nominato direttore dell'osservatorio di Gottinga. Fu uno dei primi a ipotizzare in modo cosciente l'esistenza di una geometria che contravvenisse ad alcuni degli assiomi della geometria euclidea. Per citare solo i suoi più importanti risultati, ottenuti in tutti i campi del sapere scientifico, non basterebbero due pagine. Morì a Gottinga il 23 Febbraio 1855.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo trovare gli eventuali zeri razionali del polinomio $24x^4 + 46x^3 - 13x^2 - 16x + 4$. Tenuto conto del teorema 12, essi sono fra i seguenti: $\left\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{8}, \pm\frac{1}{12}, \pm\frac{1}{24}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}\right\}$. Si verifica che vanno bene: $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, -2$. Pertanto possiamo scomporre il polinomio nel seguente modo:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{4}\right)(x+2)$$

Determinare gli zeri razionali dei seguenti polinomi e poi scomporli in fattori razionali.

Livello 2

1. $f^4 - 10f^3 + 35f^2 - 50f + 24$; $g^4 + 5g^2 - 36$; $m^4 + m^3 - m - 1$; $u^6 - 14u^4 + 49u^2 - 36$
   $[(f-1)\cdot(f-2)\cdot(f-3)\cdot(f-4);\ (g+2)\cdot(g-2)\cdot(g^2+9);$
   $(m+1)\cdot(m-1)\cdot(m^2+m+1);(u+1)\cdot(u-1)\cdot(u+2)\cdot(u-2)\cdot(u+3)\cdot(u-3)]$
2. $24h^3 - 46h^2 + 29h - 6$; $3i^5 + 24i^3 + 45i + i^4 + 8i^2 + 15$; $2p^7 + p^6 - 24p^5 - 12p^4 + 96p^3 + 48p^2 - 128p - 64$
   $[(2h-1)\cdot(3h-2)\cdot(4h-3)$; $(i^2+3)\cdot(i^2+5)\cdot(3i+1)$; $(p+2)^3\cdot(p-2)^3\cdot(2p+1)]$
3. $36t^4 - 132t^3 + 157t^2 - 66t + 9$; $2l^8 + 9l^6 + 11l^4 + 9l^2 + 9$; $n^4 + n^2 + 1$
   $[(2t-3)^2\cdot(3t-1)^2$; $(l^2+3)\cdot(l^4+1)\cdot(2l^2+3)$; $(n^2+n+1)\cdot(n^2-n+1)]$

Lavoriamo insieme

Consideriamo i polinomi $3t \cdot (t + 2) - 5t^2 \cdot (3t - 1)$ e $15x^3 - 8x^2 - 6x$, che sono entrambi di III grado, vogliamo stabilire se sono identici. Per fare ciò sostituiamo 4 valori a caso, se otteniamo sempre lo stesso risultato sono identici, diversamente non lo sono. Uno di questi valori può essere $x = t = 0$, per il quale entrambi i polinomi si annullano. Proviamo adesso con $x = t = 1$. Il primo polinomio vale $3 \cdot (1 + 2) - 5 \cdot (3 - 1) = -1$; il secondo vale: $15 - 8 - 6 = 1$. I risultati sono diversi, pertanto i polinomi non sono identici. Inoltre
Si può verificare che lo sarebbero stati se il secondo polinomio sarebbe stato $-15x^3 + 8x^2 + 6x$.

Assegnando alle seguenti coppie di polinomi di grado n, n + 1 valori, verificare quali coppie rappresentano polinomi identici

Livello 2

4. $p(m) = m^4 - 15m^2 + 10m + 24$ e $r(m) = m^3 \cdot (m + 1) - m \cdot (19m - 11) + 30$ [No]
5. $p(n) = 6n^3 + 35n^2 + 21n - 20$ e $r(t) = 9t \cdot (2t^2 + 7) + 15 \cdot (7t^2 - 4)$ [No, il secondo è il triplo del primo]
6. $p(q) = q^4 + q^2 - 2$ e $r(s) = -s^2 \cdot (s^2 + 1) + 2$ [No, sono opposti]
7. $p(t) = t^8 - t^6 + 2t^4 + t^2 + 1$ e $r(m) = (2m^4 + 2)^2 - 4m^2 \cdot (m^2 - 1) \cdot (m^2 + 1)$
   [No, il secondo è il quadruplo del primo]
8. $p(v) = v^{10} - 2v^5 + 1$ e $r(u) = (u^5 + 1)^2$ [No]

Per la prova Invalsi

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguito quesito assegnato alle prove Invalsi del 2012.
Giulia afferma: "Per ogni numero naturale n maggiore di 1, $(n-1)\cdot n\cdot(n+1)$ *è divisibile per* 6". *Spiega perché Giulia ha ragione.*
Abbiamo a che fare con il prodotto di tre numeri consecutivi, pertanto uno di essi è certamente divisibile per 3. Inoltre, se n è pari gli altri due sono dispari, se è dispari gli altri sono pari, in ogni caso, uno almeno dei tre numeri è pari. Quindi in ogni caso l'espressione rappresenta un numero divisibile per $2\cdot 3 = 6$.

1. (Invalsi 2003) Se $x = 3$ e $y = 4$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=?$ A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{7}{12}$ D) $\frac{12}{7}$ E) 7 [C]
2. (Invalsi 2011) Il polinomio $x^4 - 16$ è divisibile per A) $x^2 - 8$ B) $x - 4$ C) $x + 2$ D) $(x-2)^2$ [C]
3. (Invalsi 2012) Osserva e completa la seguente tabella.

n	$(n-1)\cdot n\cdot(n+1)$
2	$1\cdot 2\cdot 3$
3	$2\cdot 3\cdot 4$
4	
5	

4. (Invalsi 2012) Francesco afferma: "$n^3 - n$ è uguale a $(n-1)\cdot n\cdot(n+1)$". Dimostra che Francesco ha ragione.
5. (Invalsi 2014) Il polinomio $x^3 - 8$ è divisibile per A) $x + 8$ B) $x - 2$ C) $x + 4$ D) $x - 4$ [B]
6. Lo sviluppo del quadrato di un binomio omogeneo di II grado è un A) binomio omogeneo di IV grado B) trinomio omogeneo di IV grado C) trinomio non omogeneo di IV grado D) trinomio di II grado [B]
7. Dividendo un polinomio di V grado per uno di III grado il quoziente ha grado [A]
A) 1 B) 2 C) 3 D) Dipende dai polinomi
8. Dividendo un polinomio di VI grado per uno di II grado il resto ha grado [B]
A) 0 B) 1 C) 2 D) Dipende dai polinomi
9. Il polinomio $n^5 - 5n^3 + 4n$, qualunque valore intero sostituiamo ad n rappresenta sempre un numero divisibile al massimo per A) 6 B) 12 C) 20 D) 30 E) 120 [E]
10. Quali fra i seguenti numeri interi possono essere zeri del polinomio $x^4 - 3x^3 + 2x - 3$? [A, C, D, F]
A) 1 B) 2 C) 3 D) –1 E) –2 F) –3
11. Quale dei seguenti polinomi rappresenta il risultato del prodotto notevole noto come differenza di quadrati? A) $x^4 - 2x + 1$ B) $x^4 - 2x^2 - 3$ C) $x^4 - 2x^2 - 1$ D) $x^4 - x^2 + 2$ [B]
12. La corretta riduzione ai minimi termini della frazione $\frac{x^3-1}{x^3+3x^2+3x+1}$ è? [D]
A) $\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}$ B) 1 C) $\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$ D) $\frac{x^3-1}{x^3+3x^2+3x+1}$
13. Quale fra i seguenti polinomi rappresenta un trinomio notevole a zeri tutti interi? [C]
A) $x^4 - x^2 + 1$ B) $x^2 - 3x - 2$ C) $x^2 - 2x + 1$ D) $x^2 - 4x + 2$
14. La scomposizione in fattori del polinomio $4x^2+\frac{1}{4x^2}-2$ è [C]
A) $4x^2+\frac{1}{4x^2}-2$ B) $\left(2x+\frac{1}{2x}\right)^2$ C) $\left(2x-\frac{1}{2x}\right)^2$ D) $\left(2x+\frac{1}{2x}\right)\cdot\left(2x-\frac{1}{2x}\right)$
15. La semplificazione dell'espressione $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}$ è? A) $\frac{x+3}{x+2}$ B) $x + 3$ C) $\frac{2x+3}{x+2}$ D) $\frac{2x+3}{x+1}$ [A]

16. Data la frazione $\frac{1}{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, aggiungiamo il denominatore al numeratore e allo stesso denominatore, in che relazione è la nuova frazione con quella iniziale? [È n volte la frazione di partenza]

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi

1. Provare che il binomio $x^n + 1$ è un multiplo di $x + 1$ per ogni n dispari.
2. Provare che il binomio $x^n - a^n$, è un multiplo di $x - a$, per ogni n numero naturale e per ogni numero reale a.
3. Sapendo che $k^2 - 3k + 5 = 0$ determinare quanto vale $k^4 - 6k^3 + 9k^2 - 7$ (Suggerimento: effettuare la divisione fra i due polinomi). [18]
4. Sapendo che $m^3 + m = 2$ determinare quanto vale $m^6 + 2m^4 - 7m^3 + m^2 - 7m + 17$? [7]
9. Calcolare nel modo più semplice $\frac{1234567890}{1234567891^2 - (1234567890 \cdot 1234567892)}$. [1234567890]
10. Utilizzando i prodotti notevoli trovare dei divisori dei seguenti numeri: 273; 671; 1343; 1755; 973; 7657 .
11. $x^2 + y^2$ è irriducibile in $\mathbb{R}$. Provare invece che si ha $x^4 + 4y^4 = (x^2 - 2xy + 2y^2) \cdot (x^2 + 2xy + 2y^2)$.
12. Utilizzando il precedente risultato scomporre in fattori i numeri seguenti: 340, 145, 949, 2465, 14705.
13. Provare che se p è un numero primo maggiore di 3, uno almeno fra i numeri $2p - 1$ e $2p + 1$ è un numero composto. Suggerimento: tenere conto del fatto che ogni numero primo > 3 è dispari e che ogni numero o è divisibile per 3 (è del tipo $3h$), o ...
14. Mostrare che tutti i numeri dell'insieme $S = \{b^2 - a^2$, con $b > a$, a, b dispari$\}$ sono divisibili per 8.
15. Provare che $a^2 + b^2 + c^2$ è un quadrato perfetto se $a = b - 1$ e c è il prodotto di a e b.

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Davanti a ogni esercizio vi è un simbolo che si riferisce alla gara da cui è tratto.
A = Abacus gara on line gestita dalla Grace Church School
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
GNP = Gara Nazionale Prime, Olimpiadi della Matematica
MT =Mathematics Teacher, rivista della NCTM
OMI = Olimpiadi della matematica italiane

Lavoriamo insieme

Consideriamo un quesito assegnato agli AHSME del 1951

Semplificare $\left(\frac{(x+1)^2 \cdot (x^2-x+1)^2}{(x^3+1)^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{(x-1)^2 \cdot (x^2+x+1)^2}{(x^3-1)^2}\right)^2$.

L'espressione appare particolarmente complessa, ma se operiamo nel modo opportuno invece essa si semplifica con pochi passaggi: $\left(\frac{(x^3+1)^2}{(x^3+1)^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{(x^3-1)^2}{(x^3-1)^2}\right)^2 = 1^2 \cdot 1^2 = 1$

1. (AHSME1950) Il resto della divisione $(x^{13}+1):(x-1)$ è ? [2]
2. (AHSME1950) Se m uomini fanno un lavoro in d giorni, allora $m + r$ uomini fanno lo stesso lavoro in quanti giorni? $\left[\frac{m \cdot d}{m+r}\right]$

3. (AHSME1951) L'espressione $21x^2 + ax + 21$ può scomporsi nel prodotto di due binomi di primo grado nella variabile x a coefficienti interi, se a è A) un qualsiasi numero dispari; B) un certo numero dispari; C) un qualsiasi numero pari; D) un certo numero pari; E) zero [D]

4. (AHSME1952) La semplificazione di $\left(x^{-1}+y^{-1}\right)^{-1}$ è A) $x + y$ B) $\frac{xy}{x+y}$ C) xy D) $\frac{1}{xy}$ E) $\frac{x+y}{xy}$ [B]

5. (AHSME1953) Per quale valore assegnato ad m il polinomio $4x^2-6x+m$ è divisibile per $x – 3$? [–18]

Lavoriamo insieme

Consideriamo un quesito assegnato agli AHSME del 1953.

Uno dei fattori di x^4+4 *è* A) x^2+2 B) $x+1$ C) x^2-2x+2 D) x^2-4 E) *nessuno dei precedenti*

Possiamo procedere in diversi modi. Possiamo per esempio effettuare le divisioni di x^4+4 per i successivi polinomi e verificare se una delle divisioni ha resto zero. Ed è la scelta più lunga.

Oppure possiamo applicare il teorema di Ruffini, almeno per i polinomi delle risposte A) e C), dato che possiamo pensare $x^4+4=z^2+4$, ponendo $x^2=z$, in questo modo avremo anche: $x^2+2=z+2; x^2-4=z-4$.

Così abbiamo: $P(z)=z^2+4; P(-2)=(-2)^2+4=8; P(4)=4^2+4=20$, scartando perciò le risposte A) e C).

Restano però le altre due. Allora cerchiamo invece di scomporre il polinomio, scrivendo:

$$x^4+4=\left(x^4+4+4x^2\right)-4x^2=\left(x^2+2\right)^2-4x^2=\left(x^2+2\right)^2-(2x)^2=\left(x^2+2-2x\right)\cdot\left(x^2+2+2x\right)$$

Perciò possiamo concludere che la risposta corretta è la C).

6. (AHSME1954) L'espressione $\frac{2x^2-x}{(x+1)\cdot(x-2)}-\frac{4+x}{(x+1)\cdot(x-2)}$ non ha significato per $x = –1$ o $x = 2$. Per i rimanenti valori reali di x [B]
A) assume diversi valori B) vale sempre 2 C) vale sempre 1 D) assume valori compresi tra –1 e 2 E) assume valori maggiori di 2 o minori di –1

7. (AHSME1955) Uno dei fattori di x^4+2x^2+9 è [E]
A) x^2+3 B) $x+1$ C) x^2-3 D) x^2-2x-3 E) nessuno dei precedenti

8. (AHSME1956) La frazione $\frac{5x-11}{2x^2+x-6}$ è ottenuta dalla somma $\frac{A}{x+2}+\frac{B}{2x-3}$. Quanto valgono A e B? [A = 3, B = –1]

9. (AHSME1957) Quando sviluppiamo $\left(1-\frac{1}{a}\right)^6$ la somma degli ultimi tre coefficienti è [C]
A) 22 B) 11 C) 10 D) –10 E) –11

10. (AHSME1959) Semplificare $\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}:\frac{x^2-5x+4}{x^2-7x+12}$. [1]

11. (AHSME1960) La frazione $\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2+c^2-b^2+2ac}$ è, con opportune restrizioni sui valori di a, b e c [E]
A) irriducibile B) riducibile a –1 C) riducibile a un trinomio D) riducibile a $\frac{a-b+c}{a+b-c}$ E) riducibile a $\frac{a+b-c}{a-b+c}$

Lavoriamo insieme

Consideriamo un quesito assegnato agli AHSME del 1951. *Se* $\left(r+\frac{1}{r}\right)^2=3$, *quanto fa* $r^3+\frac{1}{r^3}$?

Poiché possiamo scrivere: $r^3+\frac{1}{r^3}=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cdot\left(r^2-r\cdot\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}\right)=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cdot\left(r^2-1+\frac{1}{r^2}\right)$, ma anche

$$\left(r+\frac{1}{r}\right)^2 = r^2 + 2\cdot r\cdot\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} = r^2 + 2 + \frac{1}{r^2}$$

Abbiamo: $r^2 + 2 + \frac{1}{r^2} = 3 \Rightarrow r^2 + \frac{1}{r^2} = 1 \Rightarrow r^2 + \frac{1}{r^2} - 1 = 0$, quindi

$$r^3 + \frac{1}{r^3} = \left(r+\frac{1}{r}\right)\cdot\left(r^2 - 1 + \frac{1}{r^2}\right) = \left(r+\frac{1}{r}\right)\cdot 0 = 0$$

12. (AHSME1988) Semplificare: $\frac{bx\cdot(a^2x^2+2a^2y^2+b^2y^2)+ay\cdot(a^2x^2+2b^2x^2+b^2y^2)}{bx+ay}$. $\left[(ax+by)^2\right]$
13. (OMI 1992) Se $x+\frac{1}{x}=3$, quanto vale $x^2+\frac{1}{x^2}$? [7]
14. (OMI 1994) Sapendo che $x + y = 30$ e $x^3 + y^3 = 8100$, quanto vale $x^2 + y^2$? [480]
15. (GNP2014) Si considerino i polinomi: $p(x) = x^2 + x + 1$, $q(x) = x^4 + x^2 + 1$, $h(x) = x^4 + 64$. Quali, tra essi, NON sono ulteriormente scomponibili come prodotto di due polinomi a coefficienti interi di grado strettamente più basso? A) solo $p(x)$ e $q(x)$ B) nessuno C) tutti D) solo $p(x)$ E) solo $h(x)$ F) solo $p(x)$ e $h(x)$ [D]
16. (GNP2014) Sostituendo 2014 al posto della x nel polinomio $x^5 - 5x^3 + 4x$ si ottiene un valore intero n. Per quale dei seguenti numeri NON è divisibile n? A) 25 B) 65 C) 30 D) 35 E) 45 F) 55 [A]
17. (GNP2014) Del polinomio p(x) sappiamo che dividendolo per $(x - 1)$ si ottiene come resto 3, mentre dividendolo per $(x + 1)$ si ottiene come resto -7. Se lo si divide per $(x^2 - 1)$ che resto si ottiene? [C]
A) $4x - 3$ B) $3x - 7$ C) $5x - 2$ D) -4 E) -21 F) non è possibile determinarlo dai soli dati forniti
18. (GNP2015) Quando si scompone il polinomio $p(x) = x^6 + 3x^5 + 3x^4 + 9x^3 + 24x^2 + 24x + 8$ come prodotto di polinomi a coefficienti interi di grado più basso, non ulteriormente scomponibili, si ottengono: A) 4 polinomi di I grado e uno di II grado B) 6 polinomi di I grado C) 3 polinomi di I grado e uno di III grado D) 2 polinomi di I grado e 2 di II grado E) 2 polinomi di I grado e uno di IV grado F) nessuna delle altre risposte è esatta [A]
19. (OMI2015) Il numero intero positivo n è tale che il polinomio $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \ldots - 2014x^{2013} + nx^{2014}$ abbia almeno una soluzione intera. Quanto vale n? [E]
A) 1 B) 2 C) 2014 D) 2015 E) nessuna delle precedenti.
20. (GNP2016) Del polinomio di terzo grado $p(x)$ sappiamo che i suoi coefficienti sono tutti interi, che $p(7) = p(13) = 0$ e che $p(0)$ è un numero positivo di 2 cifre. Quanto vale $p(0)$? [D]
A) 19 B) 20 C) 21 D) 91E) 92 F) non `e determinabile dai soli dati forniti

Questions in English

Working together

This is a question assigned at AHSME in 1954.

The fraction $\frac{a^{-4}-b^{-4}}{a^{-2}-b^{-2}}$ *is equal to* A) $a^{-6}-b^{-6}$ B) $a^{-2}-b^{-2}$ C) $a^{-2}+b^{-2}$ D) a^2+b^2 E) a^2-b^2

We know that, in general if $a \neq 0$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Hence:

$$\frac{a^{-4}-b^{-4}}{a^{-2}-b^{-2}} = \frac{\frac{1}{a^4}-\frac{1}{b^4}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}} = \frac{\frac{b^4-a^4}{a^4\cdot b^4}}{\frac{b^2-a^2}{a^2\cdot b^2}} = \frac{\cancel{\left(b^2-a^2\right)}\cdot\left(b^2+a^2\right)}{a^{4\,2}\cdot b^{4\,2}}\cdot\frac{a^2\cdot b^2}{\cancel{b^2-a^2}} = \frac{b^2+a^2}{a^2\cdot b^2}$$

This fraction is different from all the answers, so we seek to write it in a different way.

$$\frac{b^2+a^2}{a^2\cdot b^2} = \frac{\cancel{b^2}}{a^2\cdot\cancel{b^2}} + \frac{\cancel{a^2}}{\cancel{a^2}\cdot b^2} = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} = a^{-2}+b^{-2}$$

which is the answer C).

21. (AHSME1952) If $\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$, then the incorrect expression in the following is: [E]

A) $\frac{x+y}{y}=\frac{7}{4}$ B) $\frac{y}{y-x}=4$ C) $\frac{x+2y}{x}=\frac{11}{3}$ D) $\frac{x}{2y}=\frac{3}{8}$ E) $\frac{x-y}{y}=\frac{1}{4}$

22. (AHSME1952) The expression a^3-a^{-3} equals A) $\left(a-\frac{1}{a}\right)\cdot\left(a^2+1+\frac{1}{a^2}\right)$ B) $\left(\frac{1}{a}-a\right)\cdot\left(a^2-1+\frac{1}{a^2}\right)$

C) $\left(a-\frac{1}{a}\right)\cdot\left(a^2-2+\frac{1}{a^2}\right)$ D) $\left(\frac{1}{a}-a\right)\cdot\left(a^2+1+\frac{1}{a^2}\right)$ E) None of these [A]

23. (AHSME1952) If $\left(t+\frac{1}{t}\right)^3=3$ then $t^3+\frac{1}{t^3}$ equals A) 1 B) 2 C) 0 D) 3 E) 6 [C]

24. (AHSME1956) If $x^{-1}-1$ is divided by $x-1$ the quotient is: A) 1 B) $\frac{1}{x-1}$ C) $\frac{-1}{x-1}$ D) $\frac{1}{x}$ E) $-\frac{1}{x}$ [E]

25. (AHSME1957) The simplest form of $1-\frac{1}{1+\frac{a}{1-a}}$ is? [a, if $a \neq 1$]

26. (AHSME1957) When $x^9 - x$ is factored as completely as possible into polynomials and monomials with integral coefficients, the number of factors is: A) more than 5 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2 [B]

27. (AHSME1960) For x^2+2x+5 to be a factor of $x^4 + px^2 + q$, the values of p and q must be? [6; 25]

28. (AHSME1981) If $x \neq 0$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x}$ equals A) $\frac{1}{2x}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{5}{6x}$ D) $\frac{11}{6x}$ E) $\frac{1}{6x^3}$ [D]

29. (MT1993) If $x + 1/x = 3$, $a = x^2 + 1/x^2$, and $b = x^3 + 1/x^3$, find $a + b$. [25]

Working together

This question was assigned at AHSME in 1999.
Let $P(x)$ be a polynomial such that when $P(x)$ is divided by $x - 19$, the remainder is 99, and when $P(x)$ is divided by $x - 99$, the remainder is 19. What is the remainder when $P(x)$ is divided by $(x - 19) \cdot (x - 99)$?
From the hypothesis, $P(19) = 99$ and $P(99) = 19$. Let $P(x) = (x - 19) \cdot (x - 99) \cdot Q(x) + ax + b$, where a and b are constants and $Q(x)$ is a polynomial. Then $99 = P(19) = 19a + b$ and $19 = P(99) = 99a + b$. It follows that $99a - 19a = 19 - 99$, hence $a = -1$ and $b = 99 + 19 = 118$. Thus the remainder is $R(x) = -x + 118$.

30. (MT1995) If $m + n = 3$ and $m^2 + n^2 = 6$, find the numerical value for $m^3 + n^3$. [13,5]
31. (MT1996) Given that $K^2 - 3K + 5 = 0$, determine the value of $K^4 - 6K^3 + 9K^2 - 7$. [18]
32. (MT1997) Find the sum of the reciprocal of two numbers, given that these numbers have a sum of 50 and a product of 25. [2]
33. (A1998) Show that the following equation does not have a solution if a and b are positive whole numbers: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{b^2}=1$
34. (A1998) Which number is greater and why: $\frac{1919}{999999}$, or $\frac{1919191919}{999999999999}$? [None, they are equal]
35. (AHSME2000) Two non-zero real numbers, a and b, satisfy $ab = a - b$. Which of the following is a possible value of $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-ab$? A) −2 B) −1/2 C) 1/3 D) 1/2 E) 2 [E]

Attività di recupero

Operazione di divisione nell'insieme dei monomi

Fase 1: Osserva

- Vogliamo dividere fra loro i monomi $4x^4yz^2$ e $3xyz$. Poiché il primo monomio è un multiplo del divisore la divisione può effettuarsi. Facilmente si ha: $4x^4yz^2 = 3xyz \cdot \frac{4}{3}x^3z$. Possiamo perciò dire che si ha anche: $4x^4yz^2 : 3xyz = \frac{4}{3}x^3z$.
- Vogliamo dividere il polinomio $(7x^3 + 4x^2z - 3x)$ per il monomio $5x$. Poiché ciascun monomio del polinomio dividendo è multiplo del monomio divisore possiamo effettuare la divisione, dividendo appunto ciascun monomio per $5x$. abbiamo quindi: $(7x^3 + 4x^2z - 3x) : 5x = \frac{7}{5}x^2 + \frac{4}{5}xz - \frac{3}{5}$.

Fase 2: Completa …

- Dividiamo il monomio $\frac{3}{7}ab^2c^3$ per il monomio $2abc$. Poiché il primo monomio è …….. del secondo, la divisione può effettuarsi. Abbiamo perciò: $\frac{3}{7}ab^2c^3 : 2abc = \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}$ ……= ……
- Dividiamo il polinomio $6m^4p^3 - 2m^3p^2 + 8\,mp^3$ per il monomio $2mp$. Dato che ciascun ……del polinomio …….. è multiplo del …….. possiamo effettuare la divisione. Otteniamo così:
$$(6m^4p^3 - 2m^3p^2 + 8\,mp^3) : 2mp = 3m^3p^2 - \text{……..}$$

Fase 3: Prova!

***Effettuare, laddove possibile, le seguenti divisioni di un polinomio per un monomio* (*nelle risposte, se la divisione non è possibile si riscrive il polinomio dividendo*)**

1. $(5a^3b - 7a^2 + 10a) : a$; $(12b^4c^2 + 16b^3c^4 - 4b^5c^3) : 4b^2c^2$ $[5a^2b - 7a + 10$; $3b^2 + 4bc^2 - b^3c]$
2. $(3q^2 + 15m^5p^2 - 20m^3p^6q^3 + 25m^6q^3) : 5m^2$; $(12a^3x^2 + 13a^3x^4 + 14a^5x^3) : 3a^2x^2$
$[3q^2 + 15m^5p^2 - 20m^3p^6q^3 + 25m^6q^3$; $4a + 13/3ax^2 + 14/3a^3x]$
3. $(2m^3x + 4m^7 - 3m^4 + 2m^6x^2) : 3m^2x$; $(31x^3y^2 + 31x^5y^3z - 12x^8y^4z - x^4y^6z^4) : 41x^2z$
$[2m^3x + 4m^7 - 3m^4 + 2m^6x^2$; $31x^3y^2 + 31x^5y^3z - 12x^8y^4z - x^4y^6z^4]$
4. $(3b^3x^2 - 4b^4x^3 + 5bx^7 + 2x^3) : 4x^2$; $(4a^3b^2 - 5a^4b^3 + 6ab^5 + 7a^2b^7 + 8) : ab$
$[3/4b^3 - b^4x + 5/4bx^5 + 1/2x$; $4a^3b^2 - 5a^4b^3 + 6ab^5 + 7a^2b^7 + 8]$
5. $(4x^3 - 5x^2 + 6xy^3 + x^2y - xz) : 3x$; $(x^5y^4z^3 + 3x^4y^5z^3 + 4x^4y^3z^5 - 17x^5y^3z^4 + 3x^3y^4z^5 - x^3y^5z^4) : 12x^3y^3$
$[4/3x^2 - 5/3x + 2y^3 + 1/3xy - 1/3z) : 3x$; $1/12x^2yz^3 + 1/4xy^2z^3 + 1/3xz^5 - 17/12x^2z^4 + 1/4yz^5 - 1/12y^2z^4]$

Operazione di divisione nell'insieme dei polinomi in una variabile

Fase 1: Osserva

- Effettuare la seguente divisione 7534 : 13. Seguiamo la divisione con l'aiuto del seguente schema:
$$75 = 5 \cdot 13 + 10 \Rightarrow 103 : 13 = 7 \cdot 13 + 12 \Rightarrow 124 = 9 \cdot 13 + 7.$$
Adesso consideriamo i quozienti di ciascuna divisione e componiamo con essi un numero: 579, che sarà il quoziente delle divisione principale, mentre l'ultimo resto sarà il resto della divisione. Quindi abbiamo: $7534 = 579 \cdot 13 + 7$; cioè il quoziente della divisione è 579, il resto è 7. Potevamo effettuare la divisione anche nel modo per così dire *tradizionale*.

$$\begin{array}{r|l} 7534 & 13 \\ \hline 65 & 579 \\ \hline 103 & \\ 91 & \\ \hline 124 & \\ 117 & \\ \hline 7 & \end{array}$$

- Possiamo ripetere il precedente procedimento anche per dividere fra loro due polinomi nella stessa incognita. Per esempio supponiamo di volere effettuare la seguente divisione:

$$(7x^3 - 5x^2 + x - 4) : (x^2 - 3x + 1)$$

Dividiamo fra loro i due monomi di massimo grado, $7x^3 : x^2 = 7x$. questo monomio lo moltiplichiamo per tutti i monomi del polinomio divisore: $7x \cdot (x^2 - 3x + 1) = 7x^3 - 21x^2 + 7x$. Sottraiamo questo polinomio dal dividendo:

$$7x^3 - 5x^2 + x - 4 - (7x^3 - 21x^2 + 7x) = (7 - 7) \cdot x^3 + (-5 + 21) \cdot x^2 + (1 - 7) \cdot x - 4 = 16x^2 - 6x - 4$$

dato che questo polinomio non ha grado inferiore al dividendo continuiamo a dividere. Effettuiamo sempre la divisione fra i monomi di grado massimo: $16x^2 : x^2 = 16$. Moltiplichiamo questo risultato per il divisore: $16 \cdot (x^2 - 3x + 1) = 16x^2 - 48x + 16$. Effettuiamo la differenza fra il precedente polinomio e questo: $16x^2 - 6x - 4 - (16x^2 - 48x + 16) = (16 - 16)x^2 + (-6 + 48)x + (-4 - 16) = 42x - 20$. Dato che questo polinomio ha grado inferiore al divisore abbiamo finito, questo è il resto, mentre il quoziente è il polinomio somma algebrica delle due divisioni fra monomi, cioè $7x + 16$. Anche in questo caso possiamo effettuare la divisione mediante la consueta regola, in cui per facilitare i calcoli delle differenze, piuttosto che scrivere il risultato dei prodotti scriviamo gli opposti.

$$\begin{array}{r|l} 7x^3 - 5x^2 + x - 4 & x^2 - 3x + 1 \\ \hline -7x^3 + 21x^2 - 7x & 7x + 16 \\ \hline 16x^2 - 6x - 4 & \\ -16x^2 + 48x - 16 & \\ \hline 42x - 20 & \end{array}$$

Verifichiamo il risultato, moltiplicando fra loro quoziente e divisore e sommandovi il resto.

$$(7x + 16) \cdot (x^2 - 3x + 1) + 42x - 20 = 7x \cdot (x^2 - 3x + 1) + 16 \cdot (x^2 - 3x + 1) + 42x - 20 =$$
$$= 7x^3 - 21x^2 + 7x + 16x^2 - 48x + 16 + 42x - 20 =$$
$$= 7x^3 + (-21 + 16)x^2 + (7 - 48 + 42)x + 16 - 20 = 7x^3 - 5x^2 + x - 4$$

Che coincide con il polinomio dividendo, pertanto la divisione è corretta.

Fase 2: Completa ...

Vogliamo eseguire la seguente divisione fra polinomi: $(5a^4 - 3a^3 + a^2 - a + 2) : (a^2 + 3a - 4)$. Cominciamo a dividere fra loro i monomi di grado massimo, cioè $5a^4 : a^2 =$ …….. Adesso moltiplichiamo il precedente risultato per il polinomio ……. Ottenendo: ……. · $(a^2 + 3a - 4) =$ …….. Sottraiamo questo risultato dal polinomio …….. $5a^4 - 3a^3 + a^2 - a + 2 -$ (……) = ……. Poiché il polinomio differenza ha grado …… di quello del polinomio …… continuiamo la divisione, dividendo il coefficiente di grado massimo di quest'ultimo polinomio per il ……. del polinomio ……. Abbiamo così: ……: $a^2 =$ ……... Moltiplichiamo ancora una volta questo risultato per il polinomio dividendo e effettuiamo la sottrazione .....…… Continuiamo questo procedimento fino a ottenere un polinomio il cui grado sia ……. a quello del polinomio dividendo, questo è perciò il polinomio ……per quel che riguarda invece il polinomio quoziente dobbiamo considerare i risultati di tutte le divisioni per il monomio a^2, quindi il quoziente è ……. Volendo avremmo potuto eseguire la divisione anche in questo modo:

$5a^4 - 3a^3 + a^2 - a + 2 \;|\; a^2 + 3a - 4$

$-5a^4$ ……. $\;|\; 5a^2$ …….

……

……..

……..

……..

…….

Se volessimo verificare la correttezza del risultato dovremmo moltiplicare il …… per il ……e aggiungere a tale prodotto il …….. Se così facendo otteniamo il …….. la divisione è corretta. Verifichiamo!

……

……

……

Fase 3: Prova!

***Effettuare le seguenti divisioni verificandone i risultati* (*nei risultati prima il quoziente e poi il resto*)**

1. $(15x^4 + 13x^3 - x^2 + x + 9) : (3x + 2)$; $(8a^3 + 5a^2 + 2a + 5) : (a + 1)$
   $[(5x^3 + x^2 - x + 1, 7); (8a^2 - 3a + 5, 0)]$
2. $(4b^7 - 11b^5 - 3b^3 - b^2 + b - 2) : (b^2 - 3)$; $(c^7 - 2c^5 + c^4 + 2c^3 - c + 4) : (c^3 - c + 1)$
   $[(4b^5 + b^3 - 1, b - 5)$; $(c^4 - c^2 + 1, c^2 + 3)]$
3. $(4m^6 + 3m^5 + 13m^4 + 5m^3 + 20m^2 + 11m + 3) : (4m^2 + 3m + 1)$ $[m^4 + 3m^2 - m + 5, -3m - 2]$
4. $(10p^8 + 5p^6 - 23p^5 - 2p^4 + 11p^3 - 6p^2 + 14p - 26) : (2p^3 + p - 5)$ $[5p^5 + p^2 - p + 5, 4p - 1]$
5. $(12x^8 - 11x^7 + 27x^6 - 35x^5 + 47x^4 - 60x^3 + 30x^2 - 56x + 47) : (4x^3 - x^2 + 3x - 7)$
   $[3x^5 - 2x^4 + 4x^3 - x^2 + 5x - 6, 2x^2 - 3x + 5]$
6. $(21y^{13} - 42y^{12} - 2y^{10} + 18y^9 - 32y^8 - 9y^7 - 3y^6 + 28y^5 - 9y^4 - 6y^3 + 5y - 9) : (3y^5 - 6y^4 + y^2 - 5)$
   $[7y^8 - 3y^5 + y^3 - y + 2, 3y^4 - 2y^2 + 1]$
7. $(12z^4 + z^3 - 14z^2 + 5z - 3) : (3z^2 + z - 4)$ $[4z^2 - z + 1, 1]$
8. $(24t^{10} + 12t^8 - 12t^7 - 6t^6 - 6t^5 + 4t^4 + 6t^3 + 2t^2 - t + 3) : (4t^4 + 2t^2 - 1)$ $[6t^6 - 3t^3 + 1, 3t^3 - t + 4]$

Teorema e regola di Ruffini

Fase 1: Osserva

- Supponiamo di volere stabilire se il polinomio $(3x^4 - x^2 + x - 2)$ è divisibile per il binomio $(x - 2)$. Per il teorema di Ruffini, il resto della divisione si ottiene sostituendo il valore che annulla il binomio, cioè 2, al posto della variabile x, quindi è dato da $3 \cdot 2^4 - 2^2 + 2 - 2 = 3 \cdot 16 - 4 + 2 - 2 = 48 - 4 = 44$. Dato che il resto non è zero possiamo dire che il polinomio dato non è divisibile per il binomio.
- Vogliamo vedere se il polinomio $(3x^5 + 6x^4 - x^3 - x^2 - 2x - 8)$ è divisibile per $(x + 2)$. Per il teorema del resto abbiamo: $R = 3 \cdot (-2)^5 + 6 \cdot (-2)^4 - (-2)^3 - (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 8 = 3 \cdot (-32) + 6 \cdot 16 - (-8) - 4 + 4 - 8 = -96 + 96 + 8 - 4 + 4 - 8 = 0$. Quindi stavolta possiamo dire che il polinomio è divisibile per il binomio dato.
- Vogliamo eseguire la prima divisione vista. Per far ciò possiamo utilizzare una regola nota sotto il nome di *regola di Ruffini*. Vediamo come funziona. Costruiamo la seguente tabella:

	3	0	−1	1	−2
2					

Per la costruzione della tabella abbiamo ricopiato, nella prima riga i coefficienti del polinomio *completo*, quindi abbiamo inserito anche il coefficiente di x^3 che non è visibile, quindi è zero. Poi abbiamo *escluso* dalla griglia principale il termine noto (–2). Mentre nella seconda riga abbiamo scritto l'opposto del termine noto del binomio divisore, cioè + 2. Adesso vediamo come eseguire la divisione:

	3	0	−1	1	−2
2		6	12	22	46
	3	6	11	23	44

Abbiamo *abbassato* il primo coefficiente della prima riga, cioè 3. Abbiamo moltiplicato questo numero per 2 e abbiamo scritto il risultato sotto la seconda colonna. Abbiamo eseguito la somma fra gli elementi della stessa colonna, cioè 0 e 6. Abbiamo ripetuto il precedente procedimento anche per questo numero e così via, finché non abbiamo ottenuto 44, per il quale non ripetiamo la procedura, anche perché non sapremmo dove *posizionare* il risultato della sua moltiplicazione per 2. A questo punto diciamo che i numeri dell'ultima riga, all'interno delle barre verticali, sono i coefficienti del polinomio quoziente, il numero *esterno*, cioè 20 è il resto. Abbiamo i coefficienti, dobbiamo costruire il polinomio quoziente. Poiché stiamo dividendo un polinomio di IV grado per uno di I, il quoziente avrà grado 3. Quindi sarà $3x^3 + 6x^2 + 11x + 23$. Verifichiamo.

$$(3x^3 + 6x^2 + 11x + 23) \cdot (x - 2) + 44 = 3x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 23x - 6x^3 - 12x^2 - 22x - 46 + 44 =$$
$$= 3x^4 + (6 - 6)x^3 + (11 - 12)x^2 + (23 - 22)x + (44 - 46) = 3x^4 - x^2 + x - 2$$

- La regola di Ruffini può applicarsi anche in casi particolari, quali quelli in cui il binomio divisore non ha coefficiente direttore unitario. Vediamo un esempio.

Effettuare la seguente divisione: $(3x^4 - 2x^2 + x - 3) : (2x - 1)$. Poiché il coefficiente direttore non è 1, lo facciamo divenire tale dividendo tutti i monomi, del dividendo e del divisore, per 2. otteniamo così la nuova divisione: $\left(\frac{3}{2}x^4 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right) : \left(x - \frac{1}{2}\right)$. Questa nuova divisione può effettuarsi con la regola di Ruffini, però non ha le stesse soluzioni della divisione iniziale. In effetti è il resto a essere diverso, mentre il quoziente rimane uguale. Il resto ottenuto dovrà moltiplicarsi per 2 per ottenere il resto corretto della divisione di partenza. Vediamo:

	$\frac{3}{2}$	0	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$
$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{5}{16}$	$\frac{3}{32}$
	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{3}{16}$	$-\frac{45}{32}$

Possiamo perciò dire che il quoziente della data divisione è $\frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{8}x + \frac{3}{16}$, mentre il resto è $-\frac{45}{32} \cdot 2 = -\frac{45}{16}\cdot$ Verifichiamo i risultati

$$\left(\frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{8}x + \frac{3}{16}\right) \cdot (2x - 1) - \frac{45}{16} = 3x^4 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{3}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{8}x - \frac{3}{16} - \frac{45}{16} =$$
$$= 3x^4 + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)x^3 + \left(-\frac{5}{4} - \frac{3}{4}\right)x^2 + \left(\frac{3}{8} + \frac{5}{8}\right)x + \left(-\frac{3}{16} - \frac{45}{16}\right) = 3x^4 - 2x^2 + x - 3$$

che coincide con il polinomio dividendo.

Fase 2: Completa …

- Quanto vale il resto della divisione $(4x^5 - x^3 + 3x^2 + 1) : (x - 1)$? Possiamo utilizzare il teorema …….. Quindi dobbiamo sostituire alla variabile … nel polinomio ……. Il numero ….. Otteniamo così: $4 \cdot 1^5 - 1^3 +$ ……. = …… Questo è il resto della divisione, possiamo quindi dire che il polinomio $(4x^5 - x^3 + 3x^2 + 1)$ ….. divisibile per il binomio $x - 1$.
- Adesso vogliamo determinare anche il quoziente della precedente divisione. A questo scopo applichiamo la regola di ……. Quindi costruiamo la seguente tabella:

	4	0	−1	.....	.....
.....		.....			.....
	.....				.....

Effettivamente il resto così ottenuto coincide con quello ottenuto in precedenza. Per quel che riguarda il polinomio quoziente, possiamo dire che ha grado …… e che la sua espressione è la seguente:

$$Q(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

- Infine vogliamo verificare il precedente risultato. Per far ciò dobbiamo effettuare le seguenti operazioni: …… Eseguiamo. ……
  ……
  La verifica ha avuto esito positivo.
- Svolgere: $(5a^4 - 2a^3 + a - 1) : (3a + 1)$. Per potere applicare la regola di Ruffini dobbiamo dividere ciascun monomio per ……., ottenendo così la nuova divisione:

$$\left(\frac{5}{3}a^4 - \frac{2}{3}a^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\right) : (a + \ldots\ldots)$$

Questa divisione ha lo stesso ……. di quella iniziale, mentre invece il suo …… è diverso. Per ottenere il resto corretto dobbiamo …… il resto di quest'ultima divisione. Eseguiamo:

	$\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	.....	.....
$-\frac{1}{3}$		.....		.....
	.....			.....

Abbiamo così ottenuto il quoziente: …… e il resto …… Il primo coincide con il quoziente esatto, l'effettivo resto è invece: ……

Fase 3: Prova!

Utilizzando prima il teorema del resto e poi la regola di Ruffini, determinare resto e quoziente delle seguente divisioni. Infine verificare i risultati

1. $(5x^4 + 3x^3 - x^2 + 3) : (x + 2)$; $(4a^3 + a^2 + 12a + 1) : (a + 1)$
   $[(5x^3 - 7x^2 + 13x - 26, 55)$; $(4a^2 - 3a + 15, -14)]$
2. $(3b^6 - b^5 - 4b^4 - b^3 + 5b - 3) : (b - 1)$; $(2c^7 - c^5 + c^3 - c + 1) : (c + 1)$
   $[(3b^5 + 2b^4 - 2b^3 - 3b^2 - 3b + 2, -1)$; $(2c^6 - 2c^5 + c^4 - c^3 + 2c^2 - 2c + 1, 0)]$
3. $(3m^6 + m^5 + m^4 + m^3 + 3) : (m + 2)$; $(p^6 - 2p^5 - p^4 + p^3 - p^2 + p - 2) : (p - 1)$
   $[(3m^5 - 5m^4 + 11m^3 - 21m^2 + 42m - 84, 171)$; $(p^5 - p^4 - 2p^3 - p^2 - 2p - 1, -3)]$
4. $(4x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 1) : (x - 3)$; $(2y^5 - y^4 - 3y^3 + y - 2) : (y + 3)$
   $[(4x^3 + 10x^2 + 31x + 90, 271)$; $(2y^4 - 7y^3 + 18y^2 - 54y + 163, -491)]$
5. $(z^4 + z^3 - z^2 + z - 1) : (z - 4)$; $(3t^5 + t^4 - t^3 - 2t^2 - 3t + 4) : (t + 4)$
   $[(z^3 + 5z^2 + 19z + 77, 307)$; $(3t^4 - 11t^3 + 43t^2 - 174t + 693, -2768)]$

Determinare quoziente e resto delle seguenti divisioni, applicando la regola di Ruffini

6. $(2a^3 + 4a^2 + a + 1) : (3a + 1)$; $(4b^6 - 2b^5 - b^4 + 3b^3 + b - 1) : (2b - 1)$

$$\left[\left(\frac{2}{3}a^2+\frac{10}{9}a-\frac{1}{27},\frac{28}{27}\right);\left(2b^5-\frac{1}{2}b^3+\frac{5}{4}b^2+\frac{5}{8}b+\frac{13}{16},-\frac{3}{16}\right)\right]$$

7. $(c^6 - 3c^5 + 2c^4 - 3c + 1) : (2c + 1)$; $(4m^5 + 3m^4 + 2m^3 - 2m + 1) : (4m - 1)$

$$\left[\left(\frac{1}{2}c^5-\frac{7}{4}c^4+\frac{15}{8}c^3-\frac{15}{16}c^2+\frac{15}{32}c-\frac{111}{64},\frac{175}{64}\right);\left(m^4+m^3+\frac{3}{4}m^2+\frac{3}{16}m-\frac{29}{64},\frac{35}{64}\right)\right]$$

8. $(2p^5 - 3p^4 - 2p^2 + p - 1) : (2p - 3)$; $(3q^4 - q^3 + q^2 - q + 1) : (2q + 3)$

$$\left[\left(p^4-p-1,-4\right);\left(\frac{3}{2}q^3-\frac{11}{4}q^2+\frac{37}{8}q-\frac{119}{16},\frac{373}{16}\right)\right]$$

9. $(t^5 + 2t^4 - t^2 + 2) : (4t + 1)$; $(2x^4 + 3x^3 - x^2 + x) : (3x + 2)$

$$\left[\left(\frac{1}{4}t^4+\frac{7}{16}t^3-\frac{7}{64}t^2-\frac{57}{256}t+\frac{57}{1024},\frac{1991}{1024}\right);\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{9}x^2-\frac{19}{27}x+\frac{65}{81},-\frac{130}{81}\right)\right]$$

10. $(3y^5 - 2y^4 - y^3 - 2) : (3y - 2)$; $(3z^4 + 2z^3 - z^2 + z - 3) : (3z - 4)$

$$\left[\left(y^4-\frac{1}{3}y^2-\frac{2}{9}y-\frac{4}{27},-\frac{62}{27}\right);\left(z^3+2z^2++\frac{7}{3}z+\frac{31}{9},\frac{97}{9}\right)\right]$$

Scomposizione dei polinomi in fattori. Prodotti notevoli nelle scomposizioni

Fase 1: Osserva

- Scomporre il seguente polinomio: $4x^2 + 20x + 25$. Fra i prodotti notevoli studiati, prendiamo in considerazione quelli che hanno tre termini, cioè gli sviluppi di quadrati di binomi. In particolare concentriamo la nostra attenzione su quello in cui vi sono tutti segni +. L'avere tre monomi non implica che necessariamente abbiamo a che fare con un quadrato di binomio. Dobbiamo controllare che i tre monomi verifichino le particolarità del quadrato di binomio, cioè vi siano due quadrati di monomio e il loro doppio prodotto. Cerchiamo di riscrivere il nostro polinomio in questo modo:
$$4x^2 + 20x + 25 = (2x)^2 + 2 \cdot (4 \cdot 5) \cdot x + (5)^2$$
dato che ci siamo riusciti, possiamo concludere dicendo che in effetti abbiamo a che fare con un quadrato di binomio. Scriviamo perciò: $4x^2 + 20x + 25 = (2x + 5)^2$.
- Se avessimo avuto invece $4x^2 + 10x + 25$, non avremmo avuto un quadrato di binomio, dato che il termine intermedio, $10x$, non è il doppio prodotto delle basi degli altri due quadrati. Analogamente per $4x^2 + 20x - 25$, dato che in questo caso il secondo monomio, -25, non può essere quadrato di un monomio essendo negativo.
- Scomporre il polinomio $8x^3 - 125a^3$. Avendo a che fare con un binomio differenza di cubi usiamo tale prodotto notevole:
$$8x^3 - 125a^3 = (2x)^3 - (5a)^3 = (2x - 5a) \cdot [(2x)^2 + 2x \cdot 5a + (5a)^2] = (2x - 5a) \cdot (4x^2 + 10ax + 25a^2)$$
- Se avessimo avuto invece il seguente polinomio $8x^3 - 25a^3$, non saremmo riusciti a scomporlo, perché il primo monomio è un cubo mentre il secondo no.

Fase 2: Completa …

- Scomporre il polinomio: $m^3 - 6m^2 + 12m - 8$. Abbiamo a che fare con un quadrinomio, quindi pensiamo a un ……. Vediamo se la nostra sensazione corrisponde a realtà.
$$m^3 - 6m^2 + 12m - 8 = m^3 + 3 \cdot (m)^2 \cdot 2 + \ldots\ldots\ldots$$
Abbiamo effettivamente a che fare con un …….. possiamo perciò scrivere:
$$m^3 - 6m^2 + 12m - 8 = (m \ldots\ldots)$$
- Scomporre il polinomio $25t^4 - 81b^6$. Abbiamo un binomio differenza, pensiamo di avere a che fare quindi con un prodotto notevole del tipo ……. Proviamo.

$$25t^4 - 81b^6 = (5t)^2 - \ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

- Scomporre $16z^2 + 9a^4$. Abbiamo una somma di monomi, quindi l'unica alternativa possibile, fra quelle proposte, è …… Vediamo però che ciò non è possibile perché …… Lasciamo quindi il polinomio così com'è senza scomporlo.
- Scomporre $x^6 + 64$. Come nell'esempio precedente crediamo di avere a che fare con una somma di …….. Stavolta però la sensazione è reale, infatti scriviamo:

$$x^6 + 64 = (x^2)^3 + \ldots. = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Fase 3: Prova!

Scomporre, laddove possibile, i seguenti polinomi, utilizzando i prodotti notevoli

1. $a^4 - 16$; $b^3 - 25$; $7x^2 - 25z^4$; $36x^6 - 121y^{12}$; $3p^2 - 169$
   $[(a + 2)\cdot(a - 2)\cdot(a^2 + 4)$; $b^3 - 25$; $7x^2 - 25z^4$; $(6x^3 + 11y^6)\cdot(6x^3 - 11y^6)$; $3p^2 - 169]$
2. $8q^3 + 125$; $y^2 + 100$; $49ab^2 - c^2$; $289c^4t^8 - 256x^6$;
   $[(2q + 5)\cdot(4q^2 - 10q + 25)$; $y^2 + 100$; $49ab^2 - c^2$; $(16x^3 + 17c^2t^4)\cdot(17c^2t^4 - 16x^3)]$
3. $343x^3 - 64y^9$; $13x^3 + z^{12}$; $125x^{15} - 101z^3$ $[(7x - 4y^3)\cdot(49x^2 + 28xy^3 + 16y^6)$; $13x^3 + z^{12}$; $125x^{15} - 101z^3]$
4. $576z^{24} - 625a^2b^4c^6$; $676q^6 - n^{14}$; $a^3b^6c^9 + 1000$
   $[(24z^{12} + 25ab^2c^3)\cdot(24z^{12} - 25ab^2c^3)$; $(n^7 + 26q^3)\cdot(26q^3 - n^7)$; $(ab^2c^3 + 10)\cdot(a^2b^4c^6 - 10ab^2c^3 + 100)]$
5. $49b^2 - 14bc + c^2$; $476a^2 + 48a + 1$; $64c^2 - 16bc + 4b^2$; $25ax^2 + 100abx + 2b^2$
   $[(7b - c)^2$; $(14a + 1)\cdot(34a + 1)$; $4\cdot(b^2 - 4bc + 16c^2)$; $25ax^2 + 100abx + 2b^2]$
6. $16x^4 + 24mx^2 + 9m^2$; $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$; $17a^2 - 34ay + y^2$; $289x^4 + 34xy + y^2$
   $[(4x^2 + 3m)^2$; $(x + 1)^3$; $y^2 - 34ay + 17a^2$; $289x^4 + 34xy + y^2]$
7. $8x^3 + 6x^2 + 3x + 1$; $27x^3 - 3x^2 + 9x - 1$; $16x^6 + 40a^2x^3 + 25a^4$; $y^3 + 3y^2 - 3y + 1$
   $[(2x + 1)\cdot(4x^2 + x + 1)$; $(9x - 1)\cdot(3x^2 + 1)$; $(4x^3 + 5a^2)^2$; $y^3 + 3y^2 - 3y + 1]$
8. $64c^3 + 144c^2 + 108c + 27$; $27x^6 - 54x^4 + 36x^2 - 8$; $27a^6 + 54a^4b + 36a^2b^2 + 8b^3$
   $[(4c + 3)^3$; $(3x^2 - 2)^3$; $(3a^2 + 2b)^3]$

Messa in evidenza a fattor comune

Fase 1: Osserva

- Vogliamo scomporre il polinomio $3x^3 + 2x^2 - 4x$. Poiché MCD$(3x^3, 2x^2, -4x) = x$, possiamo scrivere: $3x^3 + 2x^2 - 4x = x \cdot (3x^2 + 2x - 4)$, che è la scomposizione cercata.
- Vogliamo scomporre il polinomio $6ab^3 + 4a^2b^4 + 8ab^2c$. Poiché MCD$(6ab^3, 4a^2b^4, 8ab^2c) = 2ab^2$, possiamo scrivere: $6ab^3 + 4a^2b^4 + 8ab^2c = 2ab^2 \cdot (3b + 2ab^2 + 4c)$, che è la scomposizione cercata.
- Vogliamo scomporre il polinomio $12mn^4p - 5m^2n^3 - 3mn^2p + 4$ Poiché MCD$(12mn^4p, 5m^2n^3, 3mn^2p, 4) = 1$, non possiamo scomporre il polinomio, non almeno con la regola di scomposizione totale.

Fase 2: Completa …

- Vogliamo scomporre il polinomio $6c^2m^4 + 3m^4p + 9mn$. Poiché MCD$(6c^2m^4, 3m^4p, 9mn)$ = ……., possiamo scrivere: $6c^2m^4 + 3m^4p + 9mn$ = ... · (…….), che è la scomposizione cercata.
- Vogliamo scomporre il polinomio $16axy^4 + 24x^2y^3 + 15ax^3y^5z$. Poiché MCD$(16axy^4, 24x^2y^3, 15ax^3y^5z)$ = ……, possiamo scrivere: $16axy^4 + 24x^2y^3 + 15ax^3y^5z$ = …….· (……..), che è la scomposizione cercata.
- Vogliamo scomporre il polinomio $24abc^3d - 4a^2b^3 + 3bc^2d + 2acd$. Poiché MCD$(24abc^3d - 4a^2b^3 + 3bc^2d + 2acd)$ = ….., ……
  ……..

Fase 3: Prova!

Mediante il procedimento di raccoglimento totale scomporre, ove possibile, i seguenti polinomi

1. $3a^5 - 9b$; $12ab^3 - 17a^3b$; $12xy^2z - 18x^4yz^2 + 6xy^3$
   $[3 \cdot (a^5 - 3b)$; $ab \cdot (12b^2 - 17a^2)$; $6\,xy \cdot (2yz - 3x^3z^2 + y^2]$
2. $28x^3 - 21x^4y + 7x^5 - xy^2$; $8p^2q - 12pq^2 + 16p^2q^2 + 4pqr$; $18qt^3 + 32pq^3t^2 - 4pt^3 + 6p^3q^2$
   $[x \cdot (28x^2 - 21x^3y + 7x^4 - y^2)$; $4pq \cdot (2p - 3q + 4pq + r)$; $2 \cdot (9qt^3 + 16pq^3t^2 - 2pt^3 + 3p^3q^2]$
3. $y^4 + x^3y - xy^3 + z$; $48xy^2 - x^2y + 3x^3$; $4a^4 + 2a^3b - 4a^2b^2 + 6ab^3 - 8$
   $[y^4 + x^3y - xy^3 + z$; $x \cdot (48y^2 - xy + 3x^2)$; $2 \cdot (2a^4 + a^3b - 2a^2b^2 + 3ab^3 - 4]$
4. $34x^2 - 17x^4 + 51x^3 - 28x$; $3ab^2 - 6ab^4 + 9ab^3 - 12ab^5$; $15a^2c^4 - 45a^4c^3 + 30a^3c^2 - 75a^4$
   $[x \cdot (34x - 17x^3 + 51x^2 - 28)$; $3ab^2 \cdot (1 - 2b^2 + 3b - 4b^3)$; $15a^2 \cdot (c^4 - 3a^2c^3 + 2ac^2 - 5a^2)]$
5. $45xy^3 - 18x^3y^2 + 27xy^5$; $32a^3p^4 - 16a^4p + 8a^5p^3 - 64ab^2$; $15p^2tz - 12pt^2 + 18p^2tz^2 + 21ptz$
   $[9xy^2 \cdot (5y - 2x^2 + 3y^3)$; $8a \cdot (4a^2p^4 - 2a^3p + a^4p^3 - 8b^2)$; $3pt \cdot (5pz - 4t + 6pz^2 + 7z)]$
6. $31at^3 + 32ab^3t - 33at^4 + 34b^2t^2$; $4abc^4 + 3ab^3c - 2abc^3 + 6c$; $12xz^3 - 14xz^2 + 26xz^3 - 34$
   $[t \cdot (31at^2 + 32ab^3 - 33at^3 + 34b^2t)$; $c \cdot (4abc^3 + 3ab^3 - 2abc^2 + 6)$; $2 \cdot (6xz^3 - 7xz^2 + 13xz^3 - 17)]$
7. $mn^4 + 2m^3n - 4m^3n^3 + 8mn^5 - mn$; $125bx^2 - 150b^4x^3 + 5b^3x - 25bx$
   $[mn \cdot (n^3 + 2m^2 - 4m^2n^2 + 8n^4 - 1)$; $5bx \cdot (25x - 30b^3x^2 + b^2 - 5)]$

Messa in evidenza con raggruppamenti parziali

Fase 1: Osserva

- Scomporre in fattori il seguente polinomio: $3x \cdot (x - y) + 5z \cdot (x - y)$. Notiamo che vi è un fattore comune, $(x - y)$, quindi possiamo applicare il procedimento precedente della messa in evidenza a fattor comune, scrivendo: $3x \cdot (x - y) + 5z \cdot (x - y) = (x - y) \cdot (2x + 5z)$.
- Scomporre in fattori il seguente polinomio: $4ab \cdot (3x - 2y) + 7c \cdot (3x - 2y)^2$. Ancora una volta vi è un fattore comune, $(3x - 2y)$, applichiamo perciò la messa in evidenza a fattor comune, scrivendo: $4ab \cdot (3x - 2y) + 7c \cdot (3x - 2y)^2 = (3x - 2y) \cdot [4ab + 7c \cdot (3x - 2y)] = (3x - 2y) \cdot (4ab + 21cx - 15cy)$.
- Scomporre in fattori il seguente polinomio: $5ab^2 - 2a^2b + 15bc - 6ac$. Non vi sono fattori comuni, possiamo però cercare di rifarci al caso precedente. Per far ciò mettiamo in evidenza a coppie, scrivendo: $5ab^2 - 2a^2b + 15bc - 6ac = ab \cdot (5b - 2a) + 3c \cdot (5b - 2a)$. In questo modo abbiamo effettivamente ottenuto un fattore comune, $5b - 2a$, quindi possiamo metterlo in evidenza: $5ab^2 - 2a^2b + 15bc - 6ac = (5b - 2a) \cdot (ab + 3c)$.
- Scomporre in fattori il seguente polinomio: $4xy^2 + 6x^3y + 10xz + 5yz$. Ancora una volta non vi sono fattori comuni, cerchiamo di rifarci alla scomposizione parziale. Mettiamo in evidenza a coppie, scrivendo: $4xy^2 + 6x^3y + 10xz + 5yz = 2xy \cdot (2y + 3x^2) + 5z \cdot (2x + y)$. Stavolta non abbiamo ottenuto alcun fattore comune, tentiamo un diverso accoppiamento. $4xy^2 + 6x^3y + 10xz + 5yz = 2x \cdot (2y^2 + 5z) + y \cdot (6x^3 + 5z)$. Ancora una volta niente da fare. Quindi concludiamo che il predetto polinomio non è scomponibile, almeno non con i metodi finora visti.

Fase 2: Completa …

- Scomporre in fattori il seguente polinomio: $5x^3y^2 \cdot (3ab + 2c - 1) + 4 \cdot (3ab + 2c - 1)$. Notiamo che vi è un fattore comune, ……, quindi possiamo applicare il procedimento della messa in evidenza a fattor comune, scrivendo: $5x^3y^2 \cdot (3ab + 2c - 1) + 4 \cdot (3ab + 2c - 1) = (3ab + 2c - 1) \cdot$ (……).
- Scomporre in fattori il seguente polinomio: $(ab + 1) \cdot (x - y + 2) + (2ab - 3) \cdot (x - y + 2)$. Ancora una volta vi è un fattore comune, ……., applichiamo perciò la messa in evidenza a fattor comune, scrivendo: $(ab + 1) \cdot (x - y + 2) + (2ab - 3) \cdot (x - y + 2) =$ …….
- Scomporre in fattori il seguente polinomio: $12a^2xy - 9axz + 8ayz - 6z^2$. Mettiamo in evidenza a coppie, scrivendo: $12a^2xy - 9axz + 8ayz - 6z^2 = 3ax \cdot (4ay - 3z) +$ …….. Abbiamo ottenuto un

fattore comune, ……, quindi possiamo metterlo in evidenza: $12a^2xy - 9axz + 8ayz - 6z^2 =$ ……...

Fase 3: Prova!

Scomporre in fattori i seguenti polinomi utilizzando, ove possibile, il raccoglimento parziale

1. $2ab \cdot (z + 2b) - 3c \cdot (z + 2b)$; $ax^2 \cdot (3a + b^2) + 2 \cdot (3a + b^2)$ $[(z + 2b)\cdot(2ab - 3c); (3\cdot a + b^2)\cdot(ax^2 + 2)]$
2. $4m^2 \cdot (3m + 2n) + n^2 \cdot (3m + 2n)$; $5a \cdot (2a - 3b) + 2b \cdot (2a - 3b) - 3c\,(2a - 3b)$
$[(3m + 2n)\cdot(4m^2 + n^2); (2a - 3b)\cdot(5a + 2b - 3c)]$
3. $6x^2 \cdot (x + y) + y \cdot (x + y) - 2 \cdot (x + y)^2$; $5abc \cdot (a + x^2) + 3m \cdot (a + x)^2$
$[(x + y) \cdot (6x^2 - 2x - y); 5abc \cdot (a + x^2) + 3m \cdot (a + x)^2]$
4. $7pq^3 \cdot (a + b - 1) + 3z \cdot (a + b + 1)$; $6a^2 + 9az - 10ay - 15yz$
$[7pq^3 \cdot (a + b - 1) + 3z \cdot (a + b + 1) ; (3z + 2a) \cdot (3a - 5y)]$
5. $6a^3 - 18a^2b^2 + 8ab - 24b^3$; $20x^5 - 4x^4 - 5x^2 + x$ $[2 \cdot (a - 3b^2) \cdot (3a^2 + 4b); x \cdot (5x - 1) \cdot (4x^3 - 1)]$
6. $4a^2 - 6ab + 6ay - 2a - 9by + 3b$; $-a^3 - 3a^2x + ax^2 + 3x^3$
$[(2a - 3b) \cdot (3y + 2a - 1) ; (x - a) \cdot (x + a) \cdot (3x + a)]$
7. $x^5 + x^3y - x^2 - y$; $12ab^2 - 10a^2b + 3ab^3 - 6$; $10a^2bc - 12ab^2 + 8a^2c^2 + 6bc$
$[(x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) \cdot (x^2 + y); 12ab^2 - 10a^2b + 3ab^3 - 6 ; 2 \cdot (5a^2bc - 6ab^2 + 4a^2c^2 + 3bc)]$

Trinomi notevoli

Fase 1: Osserva

- Scomporre in fattori il trinomio: $x^2 + 8x + 15$. Notiamo che non riusciamo ad applicare nessuna delle regole per la messa in evidenza viste in precedenza. Allora pensiamo di potere avere a che fare con un cosiddetto trinomio notevole, cerchiamo quindi, se esistono, due numeri interi la cui somma sia il coefficiente di primo grado, cioè +8, e il cui prodotto sia il termine noto, ossia +15. Facilmente si trovano i due numeri: +3 e +5. Pertanto la scomposizione cercata è $(x - 3) \cdot (x - 5)$.
- Se avessimo avuto il trinomio $x^2 + 8x - 15$, invece i detti numeri interi non esisterebbero perché –15, si ottiene solo come prodotto delle seguenti coppie di numeri interi: (+1; –15), (–1; + 15), (+3; –5), (–3; + 5) e la somma di tali coppie fornisce rispettivamente: –14, + 14, –2 e + 2.
- Scomporre in fattori il trinomio: $b^6 + 4b^3 - 5$. Anche se il trinomio non è di secondo grado, possiamo rifarci al caso precedente, ponendo $b^3 = x$, ottenendo $x^2 + 4x - 5$. I due numeri cercati si trovano subito: +5 e – 1, pertanto la scomposizione di questo secondo trinomio è $(x + 1) \cdot (x - 5)$. Risostituendo, otteniamo: $(b^3 + 1) \cdot (b^3 - 5)$. Il primo fattore è ulteriormente scomponibile, negli interi:
$$(b + 1) \cdot (b^2 - b + 1) \cdot (b^3 - 5).$$

Fase 2: Completa …

- Scomporre in fattori il trinomio: $x^2 + 13x + 22$. Potrebbe essere un trinomio ……, quindi dobbiamo cercare due numeri interi, la cui somma è ..... e il cui prodotto è ..... Numeri del genere esistono e sono ..... e ..... Pertanto la corretta scomposizione è .....
- Scomporre in fattori il trinomio $x^2 + 11x + 20$. Anche stavolta pensiamo che possa essere un trinomio notevole. Cerchiamo due numeri interi la cui somma sia .... e il cu prodotto sia .... Partiamo da quest'ultimo, di numeri interi il cui prodotto è 20, ci sono le coppie (+1; + 20), ... Considerando tutte le loro somme otteniamo 21, ... dato che nessuno di tali numeri è uguale a ..... possiamo dire che il trinomio non è scomponibile nell'insieme dei numeri .....
- Scomporre $z^4 + 3z^2 - 28$. Anche se il trinomio non è di secondo grado, possiamo rifarci al caso precedente, ponendo .... = x, ottenendo ..... – 28. Dobbiamo cercare due numeri la cui somma è ..... e il cui prodotto è ..... I due numeri cercati sono: ..... e ..... Pertanto la scomposizione di questo secondo trinomio è $(x$ .....$) \cdot (x$ .....$)$. Risostituendo, otteniamo: $(z^2$ .....$) \cdot (z^2$ .....$)$. Non possiamo ulteriormente scomporre, negli interi.

Fase 3: Prova!

Scomporre in fattori i seguenti polinomi utilizzando, ove possibile, i trinomi particolari

1. $a^2 + 5a - 14$; $b^2 + 6b + 91$; $c^2 + 6c - 91$ $[(a + 7)\cdot(a - 2)$; $b^2 + 6b + 91$; $(c + 13) \cdot (c - 7)]$
2. $m^2 + 11m + 10$; $n^2 - 11n + 10$; $p^2 + 16p - 15$ $[(m + 1)\cdot(m + 10)$; $(n - 1)\cdot(n - 10)$; $p^2 + 16p - 15]$
3. $q^2 - 7q + 8$; $t^2 + 13t + 42$; $u^2 - 4u - 45$ $[q^2 - 7q + 8$; $(t + 6) \cdot (t + 7)$; $(u - 9) \cdot (u + 5)]$
4. $z^2 + 3z + 40$; $x^2 - 3x + 40$; $y^2 - 3y - 40$ $[z^2 + 3z + 40$; $x^2 - 3x + 40$; $(y - 8) \cdot (y + 5)]$
5. $r^2 + 16r + 39$; $t^2 - 16t + 39$; $v^2 - 16v - 39$ $[(r + 3) \cdot (r + 13)$; $(t - 3)\cdot (t - 13)$; $v^2 - 16v - 39]$
6. $a^4 + 4a^2 + 3$; $b^4 + 8b^2 - 20$; $c^4 + 11c^2 - 60$
   $[(a^2 + 1) \cdot (a^2 + 3)$; $(b^2 - 2) \cdot (b^2 + 10)$; $(c - 2) \cdot (c + 2) \cdot (c^2 + 15)]$
7. $z^6 + z^3 - 2$; $w^6 + 7w^3 - 8$; $x^6 + 12x^3 - 27$
   $[(z - 1) \cdot (z^2 + z + 1) \cdot (z^3 + 2)$; $(w - 1) \cdot (w + 2) \cdot (w^2 + w + 1) \cdot (w^2 - 2w + 4)$; $x^6 + 12x^3 - 27]$
8. $x^8 + 29x^4 + 100$; $z^{10} + 33z^5 + 32$; $y^{12} + 8y^6 - 48$
   $[(x^4 + 25) \cdot (x^2 + 2x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 2)$; $(z^5 + 1) \cdot (z^5 + 32)$; $(y^3 + 2) \cdot (y^3 - 2) \cdot (y^6 + 12)]$

Riduzione ai minimi termini di frazioni algebriche

Fase 1: Osserva

- Ridurre ai minimi termini la seguente frazione algebrica: $\frac{x^2 - y^2}{3x - 3y}$. La riduzione ai minimi termini di una frazione algebrica consiste nella scomposizione in fattori dei polinomi al denominatore e al numeratore e nella conseguente eventuale semplificazione di termini simili. In questo caso possiamo scrivere: $\frac{x^2 - y^2}{3x - 3y} = \frac{(x - y)\cdot(x + y)}{3\cdot(x - y)}$, avendo riconosciuto nel numeratore una differenza di quadrati e nel denominatore il fattore comune 3. In questo modo abbiamo rilevato la presenza del fattore $(x - y)$, comune a numeratore e denominatore, che può perciò essere eliminato: $\frac{\cancel{(x - y)}\cdot(x + y)}{3\cdot\cancel{(x - y)}} = \frac{x + y}{3}$.

- Ridurre ai minimi termini la seguente frazione algebrica: $\frac{4a^2 - 12ab + 9b^2}{8a^3 - 27b^3}$. Per scomporre i due polinomi utilizziamo due prodotti notevoli: il quadrato di un binomio al numeratore e la differenza di cubi al denominatore, scrivendo: $\frac{4a^2 - 12ab + 9b^2}{8a^3 - 27b^3} = \frac{(2a - 3b)^2}{(2a - 3b)\cdot\left(4a^2 + 6ab + 9b^2\right)}$. Eliminiamo il fattore comune $(2a - 3b)$, ottenendo la riduzione richiesta: $\frac{(2a - 3b)^{\cancel{2}}}{\cancel{(2a - 3b)}\cdot\left(4a^2 + 6ab + 9b^2\right)} = \frac{2a - 3b}{4a^2 + 6ab + 9b^2}$

- Ridurre ai minimi termini la seguente frazione algebrica: $\frac{3x^2 - 6xy - 4x + 8y}{6x^3 - 24x^2y + 24xy^2}$. Al numeratore tentiamo una scomposizione parziale, al denominatore invece notiamo il fattore comune $6x$: $\frac{3x^2 - 6xy - 4x + 8y}{6x^3 - 24x^2y + 24xy^2} = \frac{3x\cdot(x - 2y) - 4\cdot(x - 2y)}{6x\cdot(x^2 - 4xy + 4y^2)}$. In effetti al numeratore ci è andata bene, al denominatore notiamo che all'interno della parentesi abbiamo un quadrato di binomio. Continuiamo: $\frac{3x\cdot(x - 2y) - 4\cdot(x - 2y)}{6x\cdot(x^2 - 4xy + 4y^2)} = \frac{(3x - 4)\cdot(x - 2y)}{6x\cdot(x - 2y)^2}$. Abbiamo ottenuto un fattore comune: $(x - 2y)$, che eliminiamo ottenendo la riduzione richiesta: $\frac{(3x - 4)\cdot\cancel{(x - 2y)}}{6x\cdot(x - 2y)^{\cancel{2}}} = \frac{3x - 4}{6x}$.

Fase 2: Completa …

- Ridurre ai minimi termini la seguente frazione algebrica: $\frac{8ax-4ay+2z}{2\cdot(4ax-2ay+z)-a\cdot(4ax-2ay+z)}$. Al numeratore notiamo un fattore comune, …….., così come al denominatore, ……, quindi mettiamoli in evidenza: $\frac{2\cdot(4ax.....)}{(4ax-2ay+z)\cdot(.....)}$. In questo modo abbiamo ottenuto un fattore comune a numeratore e denominatore, che può perciò essere eliminato, ottenendo così la riduzione cercata: $\frac{8ax-4ay+2z}{2\cdot(4ax-2ay+z)-a\cdot(4ax-2ay+z)}=\frac{.....}{.....}$
- Ridurre ai minimi termini la seguente frazione algebrica: $\frac{b^4-10b^2+25}{13b^2-65}$. Al numeratore riconosciamo il prodotto notevole noto sotto il nome di …….. mentre al denominatore vi è il fattore comune …….. Procediamo: $\frac{b^4-10b^2+25}{13b^2-65}=\frac{(.....)^2}{..\cdot(.....)}$. Eliminiamo il fattore comune ……., ottenendo la riduzione richiesta: ……
- Ridurre ai minimi termini la seguente frazione algebrica: $\frac{54x^6-16y^9}{36x^4-16y^6}$. Sia al numeratore che al denominatore notiamo fattori comuni, rispettivamente …….. e …….. $\frac{54x^6-16y^9}{36x^4-16y^6}=\frac{....\cdot(.....)}{....\cdot(.....)}$. Abbiamo già un termine da semplificare, cosa che facciamo: $\frac{54x^6-16y^9}{36x^4-16y^6}=\frac{.....}{.....}$. Notiamo però che possiamo ancora scomporre sia il numeratore che il denominatore, infatti nel primo caso abbiamo un …….. e nel secondo un ……. Quindi procediamo: $\frac{54x^6-16y^9}{36x^4-16y^6}=\frac{.....}{.....}$. Vi è ancora un fattore comune, ……, che eliminiamo, ottenendo la riduzione finale.

Fase 3: Prova!

Ridurre ai minimi termini le seguenti frazioni algebriche

1. $\frac{9a^2-16b^2}{15a+20b}$; $\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$; $\frac{3x^6-12}{12x^3-16}$; $\frac{4a^2-20a+25}{4a^2-25}$; $\frac{3x^2-1}{3x+1}$

$$\left[\frac{3a-4b}{5};\frac{a^2+ab+b^2}{a+b};\frac{3\cdot\left(x^6-4\right)}{4\cdot\left(3x^3-4\right)};\frac{2a-5}{2a+5};\frac{3x^2-1}{3x+1}\right]$$

2. $\frac{m^3-p^2}{2m-2p}$; $\frac{12a^3-9ab^3}{12a^3-16a^2b-9ab^3+12b^4}$; $\frac{27x^5-36x^3y^3+12xy^6}{4x\cdot(3x^2-2y^3)+x\cdot(3x^2-2y^3)}$

$$\left[\frac{m^3-p^2}{2m-2p};\frac{3a}{3a-4b};\frac{3\cdot\left(3x^2-2y^3\right)}{5}\right]$$

3. $\frac{3a^4-9a^3b+9a^2b^2-3ab^3}{6a^3b+6a^2b^2-12ab^3}$; $\frac{108m^4n^2+4mn^8}{72m^4n-24m^3n^3+8m^2n^4}$; $\frac{m^3-8}{m^2-2m+4}$

$$\left[\frac{a^2-2ab+b^2}{2b\cdot\left(a+2b\right)};\frac{n\cdot\left(27m^3+n^6\right)}{2m\cdot\left(9m^2-3mn^2+n^3\right)};\frac{m^3-8}{m^2-2m+4}\right]$$

4. $\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2-2x+1}\ ;\ \dfrac{8x^3-1}{8x^3+1};\ \dfrac{4ab-6ac-6b^2+9bc}{-6ab+4ac+9b^2-6bc}$ $\left[x-1;\dfrac{8x^3-1}{8x^3+1};\dfrac{3c-2b}{3b-2c}\right]$

5. $\dfrac{p^3-3p^2-3p+1}{3p^2+6p+3}\ ;\ \dfrac{y^3-3xy^2+3x^2y-x^3}{x^3+y^3}\ ;\ \dfrac{5ab\cdot(1-3x)\ -\ 2\cdot(1-3x)^2}{1-3x+8a-24ax}$

$\left[\dfrac{p^2-4p+1}{3\cdot(p+1)};\dfrac{y^3-3xy^2+3x^2y-x^3}{x^3+y^3};\dfrac{6x+5ab-2}{8a+1}\right]$

6. $\dfrac{x^2+9}{x^3+27}\ ;\ \dfrac{25m^2+10mn-1}{625m^4-1};\ \dfrac{3\cdot(1+x)-x\cdot(1+x)+a\cdot(1+x)}{ax+a+x^2+4x+3}$ $\left[\dfrac{x^2+9}{x^3+27};\dfrac{25m^2+10mn-1}{625m^4-1};\dfrac{a-x+3}{a+x+3}\right]$

Operazioni con le frazioni algebriche

Fase 1: Osserva

- Semplificare la seguente espressione: $\dfrac{x}{3y}-\dfrac{4x}{2y}+\dfrac{2}{y^2}-1$. Naturalmente le regole valide per la semplificazione di una espressione di numeri frazionari continuano a valere anche per le espressioni di frazioni algebriche. Dobbiamo quindi determinare il minimo comune multiplo dei denominatori, il che si fa abbastanza facilmente, dato che i monomi possono considerarsi particolari scomposizioni in fattori primi di numeri. Abbiamo perciò $mcm(3y, 2y, y^2, 1) = 6y^2$. Portiamo quindi ciascuna frazione a questo denominatore: $\dfrac{x}{3y}-\dfrac{4x}{2y}+\dfrac{2}{y^2}-1=\dfrac{x\cdot 2y}{6y^2}-\dfrac{4x\cdot 3y}{6y^2}+\dfrac{2\cdot 6}{6y^2}-\dfrac{6y^2}{6y^2}$. A questo punto scriviamo tutto in un'unica frazione con il denominatore comune effettuando le moltiplicazioni indicate:

$$\frac{2xy-12xy+12-6y^2}{6y^2}=\frac{-10xy+12-6y^2}{6y^2}$$

Abbiamo anche sommato i termini simili. Non ci rimane che ridurre la frazione ai minimi termini, il che si fa mettendo in evidenza il fattore comune del denominatore e dividendo per il denominatore:

$$\frac{-10xy+12-6y^2}{6y^2}=\frac{2\cdot(-5xy+6-3y^2)}{6^3\,y^2}=\frac{-5xy+6-3y^2}{3y^2}$$

Questo è il risultato finale.

- Semplificare la seguente espressione: $\dfrac{a+3}{2a-1}+\dfrac{3a-5}{6a-3}-\dfrac{6a^2-5a+1}{2a^2-a}$. Anche se i denominatori adesso sono polinomi il procedimento non varia, cominciamo con lo scomporre ciascun singolo denominatore: $\dfrac{a+3}{2a-1}+\dfrac{3a-5}{3\cdot(2a-1)}-\dfrac{6a^2-5a+1}{a\cdot(2a-1)}$. Possiamo dire che il *mcm* è $3a\cdot(2a-1)$, quindi riportiamo tutte le frazioni allo stesso denominatore: $\dfrac{3a\cdot(a+3)}{3a\cdot(2a-1)}+\dfrac{a\cdot(3a-5)}{3a\cdot(2a-1)}-\dfrac{3\cdot(6a^2-5a+1)}{3a\cdot(2a-1)}$, sviluppiamo le moltiplicazioni e poniamo tutto su un unico denominatore:

$$\frac{3a^2+9a+3a^2-5a-(18a^2-15a+3)}{3a\cdot(2a-1)}=\frac{3a^2+9a+3a^2-5a-18a^2+15a-3}{3a\cdot(2a-1)}$$

notiamo in particolare la presenza del segno meno davanti all'ultima frazione che interessa tutti i termini del numeratore e non solo il primo. Adesso riduciamo i termini simili:

$$\frac{(3+3-18)a^2+(9-5+15)a-3}{3a\cdot(2a-1)}=\frac{-12a^2+19a-3}{3a\cdot(2a-1)}$$

Dato che non riusciamo a scomporre il numeratore possiamo dire che, sulle base delle nostre conoscenze, la frazione è ridotta ai minimi termini.

- Semplificare la seguente espressione: $\frac{3x^2-6xy-4x+8y}{6x^3-24x^2y+24xy^2}$. Al numeratore tentiamo una scomposizione parziale, al denominatore invece notiamo il fattore comune $6x$: $\frac{3x^2-6xy-4x+8y}{6x^3-24x^2y+24xy^2}=\frac{3x\cdot(x-2y)-4\cdot(x-2y)}{6x\cdot(x^2-4xy+4y^2)}$. In effetti al numeratore ci è andata bene, al denominatore notiamo che all'interno della parentesi abbiamo un quadrato di binomio. Continuiamo: $\frac{3x\cdot(x-2y)-4\cdot(x-2y)}{6x\cdot(x^2-4xy+4y^2)}=\frac{(3x-4)\cdot(x-2y)}{6x\cdot(x-2y)^2}$. Abbiamo ottenuto un fattore comune: $(x - 2y)$, che eliminiamo ottenendo la riduzione richiesta: $\frac{(3x-4)\cdot\cancel{(x-2y)}}{6x\cdot(x-2y)^{\cancel{2}}}=\frac{3x-4}{6x\cdot(x-2y)}$.

- Semplificare: $\frac{\left(\frac{3x-4}{x+4}+\frac{x+8}{x-4}-\frac{x\cdot(x+20)}{x^2-16}\right)^2}{\left(1-\frac{8}{x+4}\right)^3}$. La presenza di più livelli di frazioni non ci deve impaurire, la regola d'oro a cui ubbidire è sempre quella di svolgere gli esercizi con ordine e senza *panico*. Cominciamo quindi a scomporre il terzo denominatore della prima espressione fra parentesi e contemporaneamente semplifichiamo la seconda espressione fra parentesi, per la quale vi è un solo denominatore che sarà perciò il minimo comune denominatore.

$$\frac{\left(\frac{3x-4}{x+4}+\frac{x+8}{x-4}-\frac{x\cdot(x+20)}{x^2-16}\right)^2}{\left(1-\frac{8}{x+4}\right)^3}=\frac{\left(\frac{3x-4}{x+4}+\frac{x+8}{x-4}-\frac{x\cdot(x+20)}{(x-4)\cdot(x+4)}\right)^2}{\left(\frac{x+4-8}{x+4}\right)^3}=$$

$$=\frac{\left(\frac{(3x-4)\cdot(x-4)}{(x-4)\cdot(x+4)}+\frac{(x+8)\cdot(x+4)}{(x-4)\cdot(x+4)}-\frac{x\cdot(x+20)}{(x-4)\cdot(x+4)}\right)^2}{\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^3}$$

Adesso svolgiamo le moltiplicazioni all'interno della prima parentesi:

$$\frac{\left(\frac{3x^2-12x-4x+16+x^2+4x+8x+32-x^2-20x}{(x-4)\cdot(x+4)}\right)^2}{\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^3}=\frac{\left(\frac{(3+1-1)x^2+(-12-4+4+8-20)x+(16+32)}{(x-4)\cdot(x+4)}\right)^2}{\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^3}=$$

$$=\frac{\left(\frac{3x^2-24x+48}{(x-4)\cdot(x+4)}\right)^2}{\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^3}=\frac{\left(\frac{3\cdot(x^2-8x+16)}{(x-4)\cdot(x+4)}\right)^2}{\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^3}$$

Adesso eliminiamo la linea di frazione principale, applicando la regola: *prodotto della prima frazione per l'inverso della seconda*:

$$\frac{\left(\frac{3\cdot(x^2-8x+16)}{(x-4)\cdot(x+4)}\right)^2}{\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^3}=\left(\frac{3\cdot(x^2-8x+16)}{(x-4)\cdot(x+4)}\right)^2\cdot\left(\frac{x+4}{x-4}\right)^3=\left(\frac{3\cdot(x-4)^2}{(x-4)\cdot(x+4)}\right)^2\cdot\left(\frac{x+4}{x-4}\right)^3$$

Abbiamo anche scomposto il numeratore all'interno della prima parentesi. Possiamo semplificare adesso la prima frazione, dividendo per il fattore comune $(x-4)$: $\left(\frac{3\cdot(x-4)}{(x-4)\cdot(x+4)}\right)^2\cdot\left(\frac{x+4}{x-4}\right)^3$. Adesso distribuiamo le potenze: $\frac{3^2\cdot(x-4)^2}{(x+4)^2}\cdot\frac{(x+4)^3}{(x-4)^3}$. Non ci rimane che da semplificare eventuali numeratori e rispettivi denominatori uguali: $\frac{9\cdot(x-4)^2}{(x+4)^2}\cdot\frac{(x+4)^3}{(x-4)^3}=\frac{9\cdot(x+4)}{x-4}$

Fase 2: Completa …

- Semplificare la seguente espressione: $\frac{a+1}{3a}-\frac{a^2-3}{a^2}+\frac{3}{4}$. Determiniamo il minimo comune multiplo dei …… che è …… Adesso riduciamo tutte le frazioni allo stesso ……: $\frac{a+1}{3a}-\frac{a^2-3}{a^2}+\frac{3}{4}=\frac{(a+1)\cdot.....}{.....}-\frac{(a^2-3)\cdot.....}{.....}+\frac{3\cdot....}{.....}$. Adesso effettuiamo le moltiplicazioni e scriviamo tutto in un'unica frazione.

  ……

  Possiamo concludere che questo è il risultato finale dato che ……..……..
- Semplificare la seguente espressione: $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}$. Poiché entrambi i denominatori sono polinomi ……, possiamo determinare immediatamente il minimo comune denominatore, che è: …… Quindi possiamo scrivere:

  $$\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}=\frac{(x+2)\cdot(.....)}{(x-2)\cdot(.....)}-\frac{(x-2)\cdot(.....)}{(x+2)\cdot(.....)}$$

  Eseguiamo le moltiplicazioni, scriviamo su un'unica frazione e riduciamo gli eventuali termini simili:

  ……

  Non essendoci termini simili, questo è il risultato finale.
- Semplificare: $\frac{8x-24}{x^2-6x+9}-\frac{x+2}{x-3}+2$. Scomponiamo il primo denominatore, che riconosciamo essere un ……., abbiamo così $\frac{8x-24}{(.....)}-\frac{x+2}{x-3}+2$. Facilmente determiniamo il minimo comune denominatore, che è …… Riduciamo tutte le frazioni al precedente denominatore: $\frac{8x-24}{(.....)}-\frac{(x+2)\cdot(.....)}{(.....)}+\frac{2\cdot(.....)}{(.....)}$. Sviluppiamo i calcoli, riduciamo i termini simili

  ……

  e otteniamo la seguente frazione: ……. In essa notiamo la presenza di un fattore comune, …….., che semplifichiamo, ottenendo il risultato finale: ……..

Fase 3: Prova!

Semplificare le seguenti espressioni, riducendole a un'unica frazione algebrica ridotta ai minimi termini

1. $\frac{a^2-a+1}{2a}-\frac{a^2+a-1}{3a}$; $\frac{4m^2-1}{3m^2}-\frac{m+2}{m^2}-1$; $\frac{p^2+2p+1}{p^2}-\frac{p+1}{2p}-\frac{2p-1}{3p}$

   $$\left[\frac{a^2-5a+5}{6a};\frac{m^2-3m-7}{3m^2};\frac{-p^2+11p+6}{6p^2}\right]$$

2. $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^3}-\dfrac{x^2-x+1}{x^2}+\dfrac{x-1}{x}\ ;\ \dfrac{2y-3}{y^2}+\dfrac{2y-3}{4y}-\dfrac{1}{3y}+2$ $\left[\dfrac{x^3-x^2-1}{x^3};\dfrac{30y^2+11y-36}{12y^2}\right]$

3. $\dfrac{2}{a+1}+\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{2a}{a^2-1}\ ;\ \dfrac{3x}{x+2}+\dfrac{2x^2-5x}{x^2-4}-\dfrac{5x}{x-2}$ $\left[\dfrac{1}{a+1};\dfrac{21x}{4-x^2}\right]$

4. $\dfrac{m^2+1}{m^3-m^2}-\dfrac{m-3}{m^2-m}-\dfrac{3m^2+4}{m^4-m^3}\ ;\ \dfrac{2x^2+5}{x-5}+\dfrac{x-6}{x+3}-\dfrac{2x+42}{x^2-2x-15}$ $\left[\dfrac{m-4}{m^3\cdot(m-1)};\dfrac{2x^3+7x^2-8x+3}{x^2-2x-15}\right]$

5. $\dfrac{p-1}{p^3+p^2+p+1}+\dfrac{p-3}{p^2-1}+\dfrac{2p}{p^3-p^2+p-1}\ ;\ \dfrac{4x+7}{4x-7}+\dfrac{4x-7}{4x+7}+2$ $\left[\dfrac{p^3+6p^2+p+4}{p^4-1};\dfrac{64x^2}{16x^2-49}\right]$

6. $\dfrac{12a}{9-a^2}+\dfrac{a+3}{a-3}-\dfrac{a-3}{a+3}\ ;\ \dfrac{t^2}{4+2t}-\dfrac{2}{t^2-2t}-\dfrac{4+t}{4t-t^3}\ ;\ \dfrac{x^2}{x-y}-\dfrac{x}{2x^2-2xy}+\dfrac{3x}{4x-4y}$

$\left[0;\dfrac{t^3-2t^2-2}{2\cdot(t^2-4)};\dfrac{4x^2+3x-2}{4\cdot(x-y)}\right]$

7. $\left(\dfrac{x^2+x-2}{x^3-4x}-\dfrac{1}{2x-4}-\dfrac{1}{3x+6}\right)\cdot\dfrac{18x^3}{3x^2\cdot(x-2)\cdot(x+6)}\ ;\ \left(\dfrac{x-5}{3x+10}+\dfrac{25-5x}{9x+30}\right)\cdot\dfrac{6}{10-2x}$ $\left[\dfrac{1}{x^2-4};\dfrac{2}{3x+10}\right]$

8. $\left(\dfrac{8m}{1-8m}+\dfrac{1}{1-6am^2}\right)\cdot\dfrac{(64m^2-16m+1)\cdot(1+8m)}{1-512m^3}\ ;\ \dfrac{a-x}{a^2-2a}-\dfrac{a+x}{a^2+2a}+\dfrac{3}{a^2-4}$

$\left[\dfrac{384am^4+48am^3-8m-1}{(64m^2+8m+1)\cdot(6am^2-1)};\dfrac{2x-7}{4-a^2}\right]$

9. $\dfrac{4z^2+9}{4z^2-9}+\dfrac{4z^2}{9-6z}+\dfrac{3}{2z+3}+1\ ;\ \dfrac{x-y}{x-2-xy+2y}-\dfrac{2y}{1-y^2}-\dfrac{3y}{x-xy^2-2+2y^2}$ $\left[\dfrac{3-2z}{3};\dfrac{xy-x+y^2}{(x-2)\cdot(y^2-1)}\right]$

10. $\left(\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{5-x}{1-x^2}-\dfrac{3}{x+1}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x^2+1}\right)\ ;\ \dfrac{\dfrac{a^2+2}{a^3+1}+\dfrac{a+2}{a^2-a+1}-\dfrac{1-4a}{a^3-a^2+a}-\dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{a+1}}$

$\left[\dfrac{2x\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x^2+1)};\dfrac{a^3+7a^2+7a-2}{a\cdot(a^2-a+1)}\right]$

11. $\dfrac{\dfrac{m^2}{4}+\dfrac{4}{m^2}+1}{\dfrac{m}{2}+\dfrac{2}{m}+1}-1-\dfrac{m^2+4-4m}{2m}\ ;\ \dfrac{\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{1}{x-5}}{\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x-5}}\cdot\dfrac{b^2-1}{2x+2bx-9-9b}$ $[0;\ 1-b]$

12. $\left(\dfrac{p-2}{p+2}-\dfrac{px-2x}{px-p+2x-2}-\dfrac{4-2px}{px^2+2x^2-p-2}\right)\cdot\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}$ $\left[\dfrac{1}{x-1}\right]$

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito

http://mathinterattiva.altervista.org/volume_1_2.htm

3. Geometria del piano

3.1 Prime nozioni di geometria

Prerequisiti
- Possedere nozioni intuitive di forma
- Possedere nozioni elementari sugli insiemi
- Avere il concetto di ordine

Obiettivi
- Riconoscere le forme geometriche piane elementari.
- Riconoscere la differenza fra la scienza geometrica e la geometria della natura.
- Descrivere oggetti geometrici piani.
- Costruire oggetti geometrici piani di cui viene fornita una descrizione verbale.
- Conoscere gli enti geometrici piani fondamentali.
- Riconoscere le figure piane dalla loro rappresentazione grafica.
- Potenziare l'intuizione geometrica per acquisire la consapevolezza che talvolta i propri sensi e l'intuizione possono essere inaffidabili.
- Conoscere il sistema di misurazione sessagesimale degli angoli e abituarsi alla semplificazione di semplici espressioni contenenti misure di angoli espressi in gradi sessagesimali.
- Acquisire un pensiero razionale, logico e rigoroso.

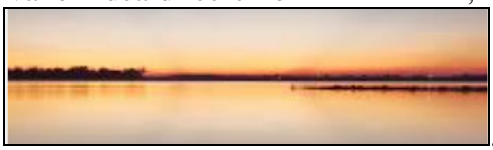
Contenuti
- Postulati ed enti primitivi della geometria euclidea del piano. Le rette.
- Il concetto di isometria. Segmenti e poligoni.
- Concetto di angolo piano e sua misurazione in gradi sessagesimali

Parole Chiave
Allineati – Angolo – Angolo giro– Angolo piatto – Angolo Retto – Collineari – Estremi – Isometria – Uguale – Lato – Poligonale – Poligono – Rette Incidenti – Rette Coincidenti – Rette Parallele – Segmento – Semiretta – Semipiano – Vertice

Simbologia
$//$	Indica il fatto che due rette, due piani o una retta e un piano sono fra di loro paralleli
$\perp$	Indica che due rette, o due loro porzioni (segmenti, semirette), o due piani o una retta e un piano sono fra loro perpendicolari
AB	Indica un segmento di estremi i punti A e B
$\overline{AB}$	Indica la misura del segmento AB
$A\hat{B}C$	Indica un angolo di vertice il punto B, con A e C due punti scelti a caso sui due distinti lati dell'angolo, in modo che il lato che contiene A preceda, nel verso antiorario, quello che contiene B
$\angle A\hat{B}C$	Indica la misura dell'angolo $A\hat{B}C$
$^\circ$	Indica la misura di un angolo in gradi sessagesimali
$'$	Indica la misura di un angolo in primi sessagesimali
$''$	Indica la misura di un angolo in secondi sessagesimali

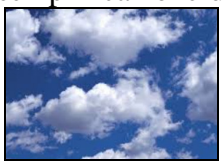
Postulati ed enti primitivi della geometria euclidea del piano. Le rette.

Nel riprendere la geometria in questo ciclo di studi si pone la necessità di fornire alcune precisazioni.
Occorre sottolineare innanzitutto che, se è possibile usare delle figure per semplificare alcuni concetti o per chiarire ciò che vogliamo dire, tale uso tuttavia non può MAI essere finalizzato per dimostrare un fatto.
Così come in aritmetica il verificare la validità di una proprietà per un numero enorme di casi non costituisce una dimostrazione, analogamente in geometria il mostrare la figura e dire *VEDI!* non ha valore di dimostrazione.
Del resto dobbiamo essere consapevoli che anche le figure disegnate con la massima precisione, non saranno mai altro che delle approssimazioni delle figure geometriche, la cui essenza è contenuta solo nelle definizioni che saranno date.

Sin dall'antichità gli uomini hanno imparato a distinguere alcune forme in base al fatto che talune apparivano più *regolari*, più gradevoli a vedersi o più utili in certe applicazioni (un oggetto di forma circolare rotola, uno di forma quadrata no!). Molte forme venivano in qualche modo suggerite dall'osservazione della natura circostante; la luna piena, il sole, le corolle dei fiori fornivano l'idea di cerchio  , il concetto di retta era suggerito per esempio dalla linea dell'orizzonte  . Ma vi sono naturalmente molte altre forme, basta pensare per esempio ai diversi tipi di frutta  .
L'osservazione della natura stimola l'imitazione, il desiderio cioè di ripetere ciò che vediamo. Ne sono dimostrazione le diverse costruzioni antiche e moderne.


Stonehenge


Arc de Triomphe

All'imitazione subentra una fase più matura, nella quale ci si comincia a chiedere perché una forma è da preferire a un'altra. Entra in gioco il cervello, la razionalità. Si avvia anche il processo di astrazione che porta allo studio di forme più complesse, come per esempio quelle delle nuvole, ma anche alla semplificazione di operazioni e procedimenti. 
In effetti la natura che ci circonda è tridimensionale e da nessuna parte vediamo rette, triangoli o cerchi, tutt'al più vediamo sfere, cubi e piramidi o per meglio dire figure che cercano di assomigliare a queste, ma molto più spesso hanno forme per così dire strane e poco ″regolari″. A volte però non è così, per esempio l'osservazione del vento che disegna sulla sabbia ci suggerisce la scrittura su supporti piani.



Il punto più alto dell'intelletto umano si raggiunge quando dalla fase di riprodurre si arriva a quella del creare.

L'angolo storico

Perché sia nata la geometria come studio delle figure è una questione sulla quale diversi storici e filosofi hanno avanzato numerose ipotesi. Essendo però le origini di tale disciplina anteriori alla nascita della scrittura, e quindi del più importante mezzo di trasmissione nel corso della storia, la questione è destinata a rimanere senza risposta.
Le ipotesi più interessanti sono comunque quelle legate al famoso filosofo Aristotele e allo storico Erodoto.
Il primo pensava che la geometria fosse nata come strumento dell'astrologia, a opera quindi dei sacerdoti che ne avevano bisogno per lo studio delle stelle e per l'interpretazione di certi segni nelle loro operazioni di predizione.
Il secondo invece attribuiva l'origine a necessità pratiche: il periodico straripare del Nilo nell'antico Egitto, cancellando i confini dei terreni rendeva arduo, dopo l'inondazione, determinare la parte di terreno di ciascun proprietario.
È proprio perché tale ipotesi è stata ritenuta maggiormente plausibile rispetto ad altre, che la disciplina è stata chiamata *Geometria*, significando tale parola appunto *misurazione della terra*. Quale che sia la vera ragione della sua creazione, non può negarsi che la geometria sia stata utile nello studio di entrambe le applicazioni suggerite dai due grandi e in molte altre ancora.
La geometria si è sviluppata all'inizio molto più rapidamente dell'aritmetica; ciò si deve anche all'opera di un grande matematico, Euclide di Alessandria, che intorno al 300 a.*C*. ebbe il merito di raccogliere in un'opera in tredici volumi, gli *Elementi*, tutta la geometria nota fino a quel periodo. Vi è da dire che in tale opera erano presenti anche risultati di natura aritmetica ma che spesso, come vedremo, essi erano proposti e risolti in forma geometrica e che in ogni caso la parte geometrica era preponderante rispetto al resto.

I protagonisti



Aristotele nacque a Stagira in Macedonia, nel 384 a.C. Poiché suo padre era amico e medico personale del re di Macedonia, egli trascorse parte della giovinezza a corte. A 17 anni si recò a studiare alla famosa Accademia di Platone ad Atene. All'inizio abbracciò interamente le idee platoniche, ma verso la fine della sua vita sviluppò punti di vista originali. Nel 342 a.C., Filippo II di Macedonia lo invitò a fare da tutore a suo figlio tredicenne, quello che divenne poi il famoso Alessandro Magno. Le sue opere più importanti, fra quelle ritrovate, sono *Organon* (un trattato di logica), la *Retorica*, la *Poetica*, la *Metafisica*. Aristotele morì a Calcide nell'Eubea nel 322 a.C.
Erodoto. Incerte sono le date della sua nascita e della sua morte; probabilmente nacque ad Alicarnasso in Asia Minore, nel 484 a.C. e morì nel 425 a.C. È chiamato il padre della storia. I suoi scritti a carattere storico e geografico sono una fonte molto importante per capire come si viveva nell'antichità, nonché per acquisire informazioni sulla vita di personaggi illustri. Amico del tragediografo ateniese Sofocle, si recò spesso ad Atene e viaggiò moltissimo, visitando le più importanti città del suo tempo, in Italia, in Egitto e in Asia.

Che cosa significa?

Geometria. Il termine è composto dai vocaboli greci *ge* che vuol dire terra (nella mitologia greca Gea è la dea della terra) e *metria* nel significato di misurazione. Nel senso letterale la geometria si occupa della misurazione della terra.

In geometria, ma più in generale in tutte le matematiche, abbiamo a che fare con una serie di oggetti (numeri, punti, linee, ...) che costituiscono gli *esseri* del mondo geometrico e una serie di *regole* che ci dicono come questi oggetti sono in relazione fra loro, che tipo di altri oggetti fanno parte di questo mondo, quali proprietà essi verificano e via di questo passo. Quindi quel che dobbiamo fare è intanto definire gli oggetti, ossia stabilire quali sono i loro caratteri identificativi e associare loro un nome.

Esempio 1

Consideriamo il mondo in cui viviamo, in esso vi sono esseri viventi (animali, piante, ...), esseri costruiti artificialmente (macchine, edifici, ...). Ogni oggetto di questo nostro mondo ha un nome (leopardo, carta, pelle, ...), ma ha anche una definizione, ossia una serie di proprietà che servono a dirci cosa è e quindi anche cosa non è. Se guardando un certo animale lo riconosciamo come cane, perché ha quattro zampe, una coda (che potrebbe anche non avere perché gli è stata amputata), abbaia, ha il pelo e tutte le altre caratteristiche

dei cani, riconosciamo anche che non è un gatto, né una sedia o un ascensore. Infatti, nella vita di tutti i giorni è fondamentale che non vi siano equivoci, pertanto quando due persone che parlano la stessa lingua si riferiscono a un oggetto devono essere certi che sia lo stesso per entrambi.
Naturalmente gli equivoci capitano ugualmente per diversi motivi, perché esistono gli omonimi (una famosa storiellina del grande umorista Achille Campanile, giocava sul fatto che il tasso è sia un animale sia un albero, ma anche il tasso d'interesse e così via); o per distrazione o per altri motivi ancora.

Il problema più grosso è che per definire oggetti dobbiamo usare parole che già conosciamo.

Esempio 2

Leggiamo la definizione di candela che viene fornita da un vocabolario: *cilindretto costituito prevalentemente di cera e contenente lungo l'asse un lucignolo, usato come mezzo di illuminazione*.
Per comprendere cos'è una candela dobbiamo conoscere tutte le parole usate, quindi anche le regole grammaticali della lingua italiana. Dobbiamo perciò sapere cos'è un *cilindretto*, cos'è la *cera*, cosa un *asse*, cosa un *lucignolo* e che significano *mezzo* e *illuminazione*. Ciò significa che andremo a cercare ciascuna di queste parole sul vocabolario. Naturalmente accadrà che ciascuna di esse userà altri vocaboli che dobbiamo conoscere e così via. Il problema è proprio questo ″è così via″, che presuppone un procedimento senza fine.
C'è anche un ulteriore problema, ossia che ci sono candele che, per esempio, come mostrato in figura, per esempio non hanno forma cilindrica o non sono fatte di cera.





In effetti quando cerchiamo una parola sul vocabolario, i vocaboli che la spiegano e che realmente non conosciamo, sono relativamente pochi, quindi con poche ricerche, spesso nessuna, riusciamo a comprendere il significato della parola cercata. Questo perché il nostro modo di apprendere le parole non è sequenziale, e perché molti vocaboli li conosciamo in modo per così dire *intuitivo* e non abbiamo mai cercato sul vocabolario che significa per esempio la parola *candela*, perché ne abbiamo appreso il significato con l'esperienza di ogni giorno e che ci ha permesso di riconoscere come candele anche quelle delle figure precedenti, che non soddisfacevano tutte le richieste della definizione del vocabolario.
Anche nelle matematiche usiamo una tecnica simile, dato che molti oggetti, come i numeri, i punti e così via, li abbiamo compresi usandoli. Però quello che non accadrà mai è che un oggetto definito in un certo modo possa avere più o meno proprietà di quelle usate nella definizione, per intenderci, se la candela fosse un oggetto matematico, essa sarebbe **sempre cilindrica e di cera**, Un oggetto matematico non cilindrico o non di cera, non sarebbe una candela matematica.
Quindi dobbiamo cercare di essere un po' più precisi, perciò dobbiamo cominciare a imparare a definire gli oggetti matematici. Dato che però anche per questi oggetti rischiamo di attivare un processo senza fine, decidiamo di considerare alcuni di essi in modo intuitivo, associamo loro solo un nome ma non li definiamo, al massimo li descriviamo, cioè cerchiamo di fare capire agli altri cosa intendiamo. Questi oggetti li chiamiamo **enti primitivi**.
In geometria gli enti primitivi che usiamo sono i **punti**, le **rette**, il **piano** e lo **spazio**.
Per fare capire cosa intendiamo quando parliamo di punto, retta, piano e spazio diamo alcune definizioni-descrizioni, come le seguenti.

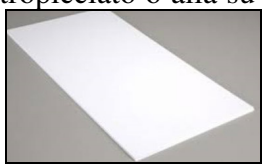
- Il punto è ciò che possiamo ottenere premendo una matita bene appuntita su un foglio o il gesso sulla lavagna. Punto è participio passato del verbo pungere, quindi il punto è in qualche modo ciò che si ottiene dalla puntura di un ago o di un insetto.



- L'idea di linea retta è legata alla linea dell'orizzonte, sia per la regolarità, sia per la forma, sia per il fatto che a essa non associamo un inizio o una fine. Linea deriva dal latino *lineus*, che è il lino, la pianta del lino ha fili particolarmente sottili e diritti.



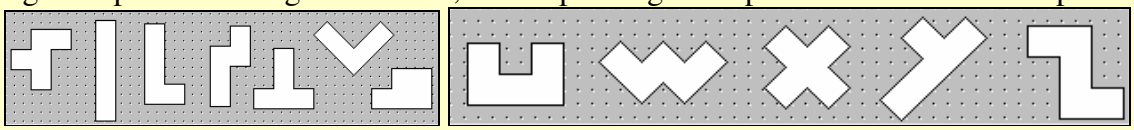
- Il piano può essere associato a un luogo assimilabile a un foglio non piegato né stropicciato o alla superficie di una lavagna: anche qui pensiamo che il piano sia privo di confini



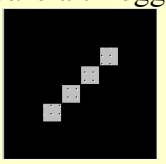
- Lo spazio è assimilabile all'ambiente in cui viviamo.

Esempio 3

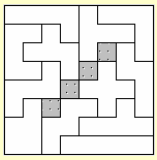
Consideriamo il gioco dei pentomini, che consiste nell'assemblare i seguenti dodici pezzi, in modo da ottenere certe figure. I pezzi sono seguenti dodici, e sono perciò gli enti primitivi del mondo dei pentomini.



Mediante l'uso di tutti e 12 i pezzi, possiamo *creare* altri oggetti di questo mondo, per esempio il seguente



Infatti il precedente oggetto, che perciò non è primitivo, si ottiene nel modo seguente



Abbiamo poi bisogno anche di stabilire alcuni concetti primitivi. Uno di essi è quello di infinito. Diciamo che abbiamo a che fare con infiniti oggetti se il procedimento di contarli non ha termine, come accade quando cerchiamo di contare i numeri interi. Accettiamo poi il fatto che il punto è in qualche modo il costituente fondamentale, ossia ogni oggetto geometrico che non è un punto è formato solo da punti.
Poi consideriamo la possibilità di potere fissare, scegliere, un oggetto geometrico, un punto su una retta o sul piano, una retta e così via.
Dopo avere considerato gli oggetti che popolano il nostro mondo, dobbiamo stabilire le regole cui devono ubbidire. Anche in questo caso dobbiamo considerare delle proprietà per così dire fondamentali, tali cioè che esse costituiscano in qualche modo i pilastri del nostro mondo, sui quali tutte le altre proprietà si sorreggono. Naturalmente cambiando le proprietà iniziali in generale cambierà anche il mondo che su di esse si regge. Chiameremo **Assiomi** o **Postulati** queste proprietà che assumiamo vere senza discussione; in qualche modo sono le nostre regole del gioco.

Esempio 4

Consideriamo il gioco degli scacchi, in esso abbiamo 16 pezzi di un colore, di solito bianco, e 16 di un altro colore, in genere nero. I pezzi non sono tutti uguali né nei nomi, né nella forma, vi sono 8 pedoni, 2 torri, 2 alfieri, 2 cavalli, 1 re e una regina. Ciascuno di questi pezzi ha delle regole di gioco, per esempio la regina può muoversi di quanti passi vuole in orizzontale, in verticale e in diagonale, se uno dei percorsi è impedito da un altro pezzo lo mangia e si mette al suo posto; invece l'alfiere può muoversi di quanti passi vuole ma solo in diagonale e così via. Queste regole di gioco, insieme ad altre sono gli *assiomi* del gioco degli scacchi. Se imponiamo che la regina si possa muovere al massimo di 3 passi in orizzontale, 2 in verticale e 1 in diagonale, avremo altri assiomi, quindi avremo un gioco diverso dagli scacchi che conosciamo.

Tenuto conto dell'esempio precedente possiamo chiederci quali regole siano migliori, quelle classiche con la

regina che si muove di quanti passi vuole o quelle da noi proposte? La risposta è naturalmente personale, non ci sono regole che stabiliscono quali assiomi sono migliori. Certo ci sono regole di buon senso, che permettono di stabilire se gli assiomi sono in qualche modo *coerenti*, se per esempio stabiliamo che l'alfiere e la regina ubbidiscono alle stesse regole, non vi è ragione di distinguere i due pezzi. Allo stesso modo vi sono altre motivazioni per stabilire che se ogni pezzo può muoversi solo in verticale, il gioco risulta poco interessante e magari porta a situazioni di blocco, e così via.
Quindi la scelta degli assiomi della geometria è in parte casuale, ma in parte è fondata sulla possibilità di creare un mondo che non sia *morto o incomprensibile* in partenza.

Esempio 5

Spesso si dice che gli assiomi della geometria euclidea debbano essere in accordo con le nostre sensazioni, ossia che la geometria da noi fondata, ci possa permettere di descrivere anche il mondo che ci circonda. Ciò è in parte vero, nel senso che certamente non metteremo fra gli assiomi delle proprietà che contrastano con i nostri sensi, ma è anche vero che la geometria che creiamo non è il nostro mondo, e in ogni caso i sensi spesso ci tradiscono, così per esempio la linea dell'orizzonte che giuriamo di vedere sappiamo benissimo che non esiste. La seguente vignetta è un modo divertente di pensare che gli assiomi della geometria che stiamo studiando, cioè della geometria fondata da Euclide, sono stati in qualche modo *dettati* da Dio, garantendo così la loro verità.



Che cosa significa?

Assioma. Deriva dal greco *axioma* che significa stima e che viene esteso al senso di degno di fiducia.
Postulato. Dal latino *postulatum* che significa richiesta.
Quindi un assioma è qualcosa che ha una dignità, che cioè è degno di fiducia. Mentre un postulato è qualcosa al quale non si richiede nulla, la cui verità non viene messa in discussione.

Dobbiamo allora scegliere gli assiomi della nostra geometria. Noi sviluppiamo quella che è stata impostata migliaia di anni fa da un uomo chiamato Euclide e che perciò si chiama geometria euclidea. In effetti di tanto in tanto cambieremo qualcosa rispetto a ciò che stabilì Euclide, ma complessivamente la geometria che svilupperemo, il mondo che creeremo sarà in larga parte coincidente con quello euclideo.

I protagonisti



Euclide. Nonostante sia uno dei più importanti matematici di tutti i tempi e che la sua principale opera, gli E*lementi,* sia l'opera più tradotta e diffusa nel mondo dopo la *Bibbia*, le notizie sulla sua vita sono scarse. Si presume che sia nato ad Alessandria, in Egitto, probabilmente verso il 365 a.C., abbia insegnato nel cosiddetto Museo di Alessandria e sia morto intorno al 300 a.C. Egli scrisse molti trattati, la maggior parte dei quali sono però andati perduti. Gli *Elementi* è un'opera che riflette la maggior parte delle conoscenze matematiche note al tempo di Euclide, scritta e usata sin dal primo momento come un vero e proprio manuale scolastico. È probabile che l'opera di Euclide sia consistita quasi esclusivamente in un riordinamento, in una sistemazione organica, di tutte le conoscenze geometriche dell'epoca. È però presumibile che diversi teoremi siano stati enunciati e dimostrati da lui per primo, così come siano dovute a lui molte dimostrazioni di fatti già enunciati ma mai provati precedentemente.

La geometria dei libri di Euclide riguarda sia il piano sia lo spazio e considera solo cinque postulati per quella piana, e nessuno in quella dello spazio. Vi è però da dire che talvolta, anche se non lo dice esplicitamente, Euclide considera altri postulati. Per ovvi motivi non saremo così precisi e rigorosi come Euclide, perché allora le cose diverranno molto complicate, pertanto per semplificare le cose noi sceglieremo altri postulati.

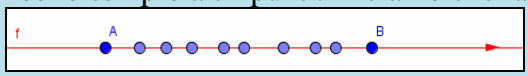
Postulato 1

Su ogni retta del piano possiamo stabilire un ordinamento in modo che scelti comunque due punti su di essa, possiamo sempre dire chi di essi viene prima e chi viene dopo. Diciamo che la retta è un insieme totalmente ordinato di punti.



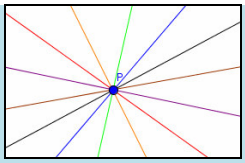
Postulato 2

Ogni retta è formata solo da punti e fra due punti qualsiasi di essa ci sono sempre altri punti. Diciamo che la retta è un insieme continuo e infinito di punti.



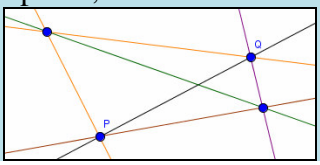
Postulato 3

Qualsiasi punto scegliamo sul piano per esso passano infinite rette.



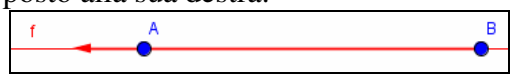
Postulato 4

Comunque scegliamo due punti distinti nel piano, vi è un'unica retta che li contiene entrambi.



Vediamo di spendere qualche parola sui precedenti postulati.

- Il postulato 1 dice che la retta è un insieme ordinato di punti nello stesso senso che abbiamo usato per le relazioni, cioè se scegliamo due punti qualsiasi sulla retta (ecco perché diciamo che l'insieme è ordinato totalmente), che indichiamo con i simboli A e B, possiamo dire che A precede B se è posto alla sua sinistra, diciamo anche che B segue A. Diamo ai concetti di sinistra e destra rispetto a chi osserva il consueto significato. È chiaro che avremmo potuto considerare un diverso ordinamento della retta dicendo per esempio che A precedeva B se era posto alla sua destra.

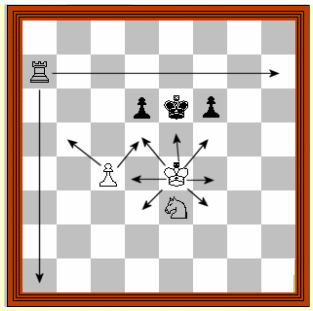


- Il postulato 2 si riferisce a un fatto molto importante, la retta non solo è **densa**, che significa che se consideriamo due punti qualsiasi, non importa quanto ″vicini″ li disegniamo, fra questi due punti ve ne sono altri, ma soprattutto che è un insieme continuo, cioè che è privo di buchi. Quindi, dati due punti possiamo dire chi viene prima e chi dopo ma non possiamo dire chi viene subito prima e chi subito dopo. Fra i pazienti di un medico, fissatone uno diverso dal primo e dall'ultimo ad entrare, possiamo sempre dire chi entra subito prima e chi subito dopo il paziente fissato, fra i punti questo non lo possiamo fare. È un po' come se lavorassimo con un microscopio, non importa quanto grande scegliamo il nostro ingrandimento troviamo sempre dei punti.
- I postulati 3 e 4 dicono che una retta è caratterizzata ogni qualvolta fissiamo due suoi punti. Scegliere un punto nel piano non è invece sufficiente a riconoscere una retta, perché appunto un punto appartiene ad infinite rette. Invece due punti appartengono ad una sola retta, quindi la determinano, la caratterizzano.

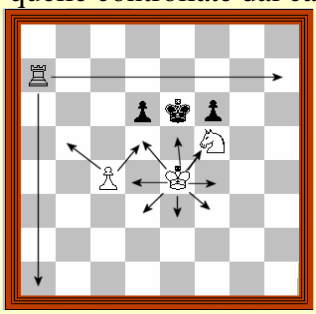
Come accade con gli enti primitivi e quelli da essi derivati, anche dagli assiomi possiamo trarre altre proposizioni che dobbiamo dimostrare usando gli assiomi o altre proposizioni già provate e che chiameremo **Teoremi**.

Esempio 6

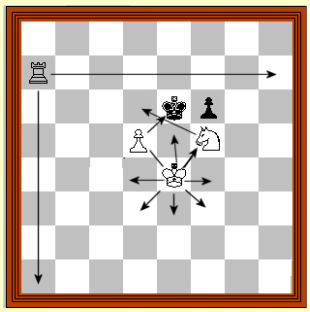
Per mostrare cosa intendiamo per teorema e per sua dimostrazione, considerando un esempio tratto dal gioco degli scacchi. Supponiamo di avere la seguente situazione di pezzi, con il bianco che deve muovere.



Viene detto che il bianco matta in 2 mosse. Vediamo perché ciò accade. Con delle frecce abbiamo indicato le celle controllate dal bianco, trascurando quelle controllate dal cavallo. Ecco la prima mossa del bianco.



Cosa può fare il nero? Come si vede sia il pedone più a destra, sia il re sono bloccati, quindi può muovere solo il pedone a sinistra, che però è soggetto a cattura da parte del pedone bianco. Fatto che accade e che provoca anche lo scacco matto.



Abbiamo quindi provato che altro non si poteva fare, cioè che è realmente vero che il bianco vince in due mosse. Naturalmente se il bianco vuole vincere, diversamente potrebbe fare mosse senza senso, che lo potrebbero anche portare a perdere.
Evidentemente abbiamo mostrato la *dimostrazione di un teorema scacchistico* molto semplice, dato che le mosse del nero erano molto limitate, in casi più complicati la dimostrazione può divenire più laboriosa o addirittura impossibile, se ci sono troppi pezzi sulla scacchiera e si sono fatte poche mosse.

Un teorema è un fatto da provare sotto certe condizioni, è perciò formato da una o più questioni che si suppongono essere vere, e che chiamiamo **ipotesi**, e da uno o più fatti che invece vogliamo provare essere veri, che chiamiamo **tesi**.
Quindi un teorema, in aritmetica come in geometria o in calcolo delle probabilità e così via, è uno schema di deduzione, cioè è un qualcosa che ci permette di affermare che solo dal sapere che uno o più fatti sono veri possiamo dedurre, quindi affermare, la verità di uno o più altri fatti.
Dobbiamo fare particolare attenzione a cosa significa ipotesi e cosa tesi. In genere un teorema si cerca di esprimere nella forma *se accade un fatto A, allora accade anche un fatto B*. Cioè un teorema è una frase ipotetica, che perciò non afferma che accade il fatto *A*, ma che *se esso accade* allora accade anche *B*.

Esempio 7

Con riferimento all'esempio precedente abbiamo visto che se avevamo la configurazione iniziale della scacchiera e se il bianco muoveva per primo allora vinceva in 2 mosse, ecco il nostro *teorema*, non stiamo dicendo che il bianco vince sempre in 2 mosse, né che giocando a scacchi capita sempre di arrivare alla situazione mostrata. Così variando anche una sola delle ipotesi, come il fatto che non fosse il bianco a muovere per primo potrebbe (in effetti in questo caso non accade), cambiare anche la tesi del teorema.

Vediamo adesso un esempio tratto dalle matematiche.

Esempio 8

Supponiamo di sapere che se un numero è pari allora il suo quadrato è un numero divisibile per 4; per esempio $2^2 = 4$, $4^2 = 16 = 4 \cdot 4$, $6^2 = 36 = 4 \cdot 9$ e così via. Ciò non significa che qualsiasi numero pensiamo o scriviamo questo deve essere un numero pari, ma che *se scegliamo un numero pari qualsiasi*, che indichiamo per esempio con $2n$, allora certamente il quadrato di questo numero, che sarà $4n^2$, sarà divisibile per 4, e questo indipendentemente dal fatto che abbiamo pensato al numero 4 o al numero 32456. Come si vede in questo caso la dimostrazione è dipesa dalla scelta dei simboli, dato che il numero è pari si scrive come 2 per qualcosa e perciò il suo quadrato è 4 per qualcosa. Se lo avessimo indicato con n, la dimostrazione non sarebbe stata così chiara, perché n^2 non si vede che è un multiplo di 4.

Quando un teorema si ottiene come immediata conseguenza di un precedente teorema, il primo si dice che è un **corollario** del secondo.

Esempio 9

Riferendoci all'esempio precedente e al teorema che afferma che se un numero è pari allora il suo quadrato è un numero divisibile per 4, poiché tutti i numeri divisibili per 4 sono pari, possiamo dire che un corollario, cioè un'immediata conseguenza del precedente teorema è che *se un numero è divisibile per* 4 *allora anche il suo quadrato è divisibile per* 4.
Non possiamo invece dire che un corollario del detto teorema è: *se un numero è divisibile per* 4 *allora il suo quadrato è divisibile per* 16, non perché non sia vero, ma perché non è una conseguenza del teorema.

Nelle dimostrazioni dei teoremi accettiamo i principi della logica classica. Ossia quello detto di non contraddizione, che ricordiamo afferma che *se abbiamo provato la verità di una certa proposizione non possiamo provare che è anche falsa*. Quindi nel nostro caso anche se abbiamo affermato che un certo postulato è vero, non è possibile provare che il dato postulato è falso, o porre un altro postulato che faccia tale affermazione.
L'altro principio che accettiamo è quello del terzo escluso. Ricordiamo anche questo: *una qualsiasi proposizione è o vera o falsa*. Quindi se facciamo vedere che non può essere falsa, ciò equivale a mostrare che essa è vera.

Esempio 10

- Dato che supponiamo di avere dimostrato che se un numero naturale è pari anche il suo quadrato lo è, è chiaro che non potrà mai accadere di provare che il quadrato di un numero pari è dispari. Se ciò dovesse verificarsi all'interno della dimostrazione di un teorema, ciò significa che la dimostrazione proposta è sbagliata.
- Allo stesso modo per provare che il quadrato di un numero pari è pari, potremmo mostrare che il quadrato di un numero pari non è dispari. Infatti, dato che ogni numero naturale è o pari o dispari, se non è dispari allora deve essere pari.

Dobbiamo fare particolare attenzione quando proviamo che un fatto non è vero, a dedurre quale altro fatto è vero.

Esempio 11

Supponiamo di avere provato che *non è vero che il prodotto di due numeri negativi non è negativo*, non possiamo dedurre da questo fatto che allora *il prodotto di due numeri negativi è positivo*. Ciò perché se un numero non è negativo, non possiamo dedurre che è positivo, dato che potrebbe anche essere nullo. Quindi la corretta deduzione è che il numero non è negativo. Al solito osserviamo che in effetti è vero che il prodotto di due negativi è positivo, solo che non si deduce da quanto affermato qui, ma da altre ipotesi.

Che cosa significa?

Teorema. Dal greco *theòrema* che significa meditazione o anche esaminare.
Ipotesi. Dal greco *ypòthesis* che significa pongo sotto, cioè sottopongo a discussione in questo caso.

Tesi. Dal greco *thésis* che significa porre.
Quindi un teorema consiste nell'*esaminare* un certo fatto, l'*ipotesi*, e vedere se mediante queste conoscenze riesco a *porre*, a mostrare, la verità di un altro fatto, la *Tesi*.
Corollario. Dal latino *corollarium* che era il denaro che nell'antica Roma veniva regalato agli attori che si mostravano particolarmente bravi. Era quindi una conseguenza della loro bravura.

Cominciamo a stabilire i primi teoremi della nostra geometria. Cominceremo naturalmente dagli enti più semplici, ossia dalle rette. Pensiamo a due rette come a due fili di lino, in accordo con il significato etimologico della parola, *dritti*, posti cioè in una forma che mentalmente associamo alle rette. Ci chiediamo: in quanti punti riusciamo a far toccare i due fili senza che essi si sovrappongano? Ci pare chiaro che la risposta sia: in un solo punto. Questa però è solo un'affermazione e non una dimostrazione di quello che abbiamo detto. Se vogliamo che la nostra intuizione divenga verità matematica dobbiamo dimostrarla.
Nella dimostrazione dei teoremi useremo uno schema, nel quale saranno indicati i vari passi, l'azione effettuata, la conseguenza che essa causa e la giustificazione del perché accade ciò che stiamo dicendo.

Teorema 1

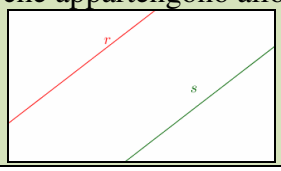
Due rette distinte hanno zero punti in comune o un solo punto in comune.
Dimostrazione
Per provare questo teorema usiamo il principio del terzo escluso, facendo vedere che non esistono due rette distinte che hanno più di un punto in comune.

Schema dimostrativo			
Passo	**Azione**	**Conseguenza**	**Giustificazione**
1	Supponiamo che esistano due distinte rette, che chiamiamo r e s, che hanno due punti in comune. Indichiamo questi punti con A e B.	Per i punti distinti A e B passano due rette distinte r e s.	
2	La conseguenza 1 è impossibile.		Il Postulato 4 dice che per due punti distinti passa una sola retta.
3	Il Teorema è dimostrato		Non potendo stabilire un risultato che contrasta con un postulato, deduciamo che le due rette possono avere al massimo un punto in comune.

Adesso vediamo le diverse posizioni che possono occupare due rette sul piano.

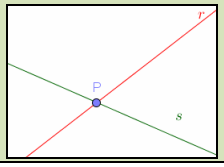
Definizione 1

Due rette che non hanno punti in comune e che appartengono allo stesso piano si dicono fra loro parallele.



Definizione 2

Due rette che hanno un solo punto in comune si dicono fra loro **incidenti**.



Definizione 3

Due rette che hanno più di un punto in comune si dicono fra loro **coincidenti**.

Notazione 1

Per indicare che due rette r e s sono fra di loro parallele scriveremo $r \parallel s$. Questo simbolo veniva usato già dal matematico Erone di Alessandria nel 150 d.*C*.

Che cosa significa?

Parallele. Dal greco *parallelos* composto da *parà* che vuol dire presso e *allelos* che significa l'un l'altro: due rette parallele sono vicine l'una all'altra, ossia non si toccano.
Incidenti. Proviene da *incidere* cioè fare una incisione, tagliare. Infatti due rette incidenti sembra che si taglino l'un l'altra.
Coincidenti. Da *coincidere* cioè cadere dentro insieme: ossia una retta cade dentro, si assimila a un'altra, diviene con essa un unico oggetto.

Nella definizione 1 abbiamo aggiunto che le rette appartengano allo stesso piano, anche se stiamo parlando di geometria nel piano, per evitare che possano sorgere equivoci quando affronteremo la geometria dello spazio, in cui due rette possono non avere punti in comune e non essere parallele, ma sghembe.
Da un punto di vista intuitivo due rette coincidenti sono lo stesso oggetto, occupano lo stesso spazio, sembrerebbe quindi inutile chiamare coincidenti cose che in realtà sono un singolo oggetto. Ma ciò serve perché le relazioni di incidenza e parallelismo fra rette sono relazioni binarie ed è quindi importante stabilire se esse verificano o meno la proprietà riflessiva.

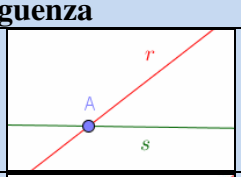
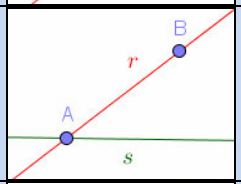
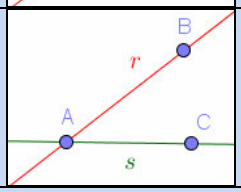
Esempio 12

Lo scrittore Luigi Pirandello può essere caratterizzato, cioè individuato in maniera precisa, anche come l'autore del romanzo *Il fu Mattia Pascal* o come il vincitore del premio Nobel per la letteratura del 1934 o in altre centinaia di modi diversi, tutti però riferiti esclusivamente a lui.

Enunciamo adesso un altro teorema.

Teorema 2

Esistono almeno tre punti del piano non appartenenti alla stessa retta.
Dimostrazione
Che cosa vogliamo provare? Che per ogni retta esiste almeno un punto del piano non appartenente a essa.

Schema dimostrativo			
Passo	**Azione**	**Conseguenza**	**Giustificazione**
1	Consideriamo un punto A e tracciamo due rette passanti per A, chiamiamole r e s.		Per il Postulato 3.
2	Fissiamo un punto B su r, diverso da A.		Perché una retta ha infiniti punti.
3	Fissiamo un punto C su s, diverso da A.		Perché una retta ha infiniti punti.
4	Noi diciamo che i punti A, B e C sono i tre punti che cercavamo.		Se esistesse una retta alla quale appartengono i punti A, B e C, questa retta dovrebbe coincidere con r, perché contiene A e B,

			e con *s*, perché contiene *A* e *C*. Ciò non è possibile perché *r* e *s* sono rette distinte.

Definizione 4

Due o più punti appartenenti a una stessa retta si dicono **allineati** o **collineari**.

Definizione 5

Oggetti geometrici (punti, rette, ...) appartenenti a uno stesso piano si dicono **complanari**.

Che cosa significa?

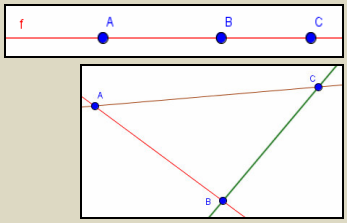
Il prefisso co. Proviene dal latino *cum*, nel senso di con, insieme. Quindi *collineari*, significa insieme su una linea (linea significa retta); *complanari* significa insieme su un piano e così via .

È chiaro che due punti sono sempre collineari e tre punti sono sempre complanari.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vediamo di risolvere la seguente questione.
Dati tre punti, quante rette distinte contenenti ciascuna almeno due dei punti dati, si possono condurre?
Nelle seguenti figure proponiamo tutto ciò che può accadere:



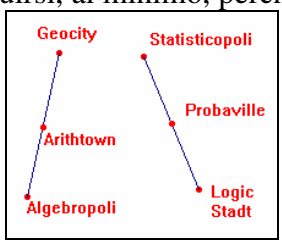
- i punti stanno tutti sulla stessa retta

- esattamente due dei tre punti stanno su una retta distinta

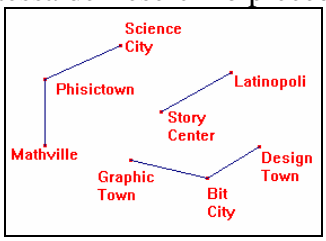
In conclusione vi possono essere una o tre rette che rispondono al quesito.

Livello 1

1. Dati tre punti, quante rette distinte contenenti ciascuna almeno uno dei punti dati, e tutte fra di loro parallele, possono tracciarsi al massimo? [3]
2. In figura sono indicate simbolicamente sei città e due linee ferroviarie esistenti che ne collegano alcune di esse. Quante nuove linee ferroviarie devono costruirsi, al minimo, perché ogni città sia raggiungibile per ferrovia da una qualunque delle altre cinque? [1]

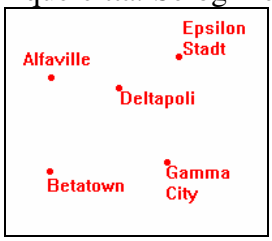


3. La domanda cui dare risposta è la stessa dell'esercizio precedente, considerando però la seguente mappa. [2]



Livello 2

4. Dati quattro punti, quante rette distinte contenenti ciascuna almeno due dei punti dati, si possono condurre massimo? [6]
5. Come nell'esercizio precedente ma con cinque punti. [10]
6. In figura sono indicate simbolicamente cinque città. Se ogni città è collegata alle altre da una linea di pullman, quante sono tutte le linee? [10]



7. Quanti punti, al minimo, si devono fissare per potere tracciare 21 rette distinte, contenenti ciascuna almeno 2 dei punti? [6]

Livello 3

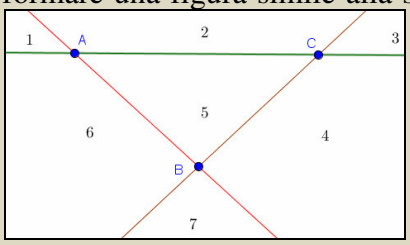
8. Con riferimento ai quesiti sulle città, se le città sono n ed ognuna è collegata alle altre da una linea di pullman, quante sono tutte le linee? $\left[\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]$

Lavoriamo insieme

Vediamo di risolvere la seguente questione.

Tre rette si incontrano a due a due. In quanti insiemi di punti privi di punti in comune dividono il piano?

Abbiamo già visto che tre rette che si incontrano a due a due vengono a formare una figura simile alla seguente, dalla quale si evince che la risposta al quesito è **sette**.



Livello 2

9. Quattro rette si incontrano a due a due. In quanti insiemi di punti privi di punti in comune dividono il piano, al massimo? [11]
10. Come nell'esercizio precedente ma con cinque rette. [16]
11. In pratica, sapendo la risposta al quesito con 5 rette, per ottenere quella per il quesito a 6 rette, dobbiamo aggiungere alla risposta precedente, quale numero? [6]
12. Se le 4 rette sono distinte fra loro, ma possono non incontrarsi a due a due, in quante parti possono dividere il piano? Cosa dovrà accadere?
[10; la quarta retta dovrà passare per uno dei tre punti in cui si incontrano le altre]
13. La relazione di parallelismo fra rette di quali proprietà gode? [Relazione di equivalenza]

Livello 3

14. Con riferimento al precedente quesito, rispondere per il caso di 5 rette. [13 o 14]

Lavoriamo insieme

Risolvere il seguente problema.

A un ricevimento sono presenti 11 *persone, se ciascuna dà la mano a tutti gli altri, quante strette di mano vengono scambiate*?

Per risolvere questo problema usiamo un'impostazione geometrica. Associamo un punto a ciascun ragazzo: abbiamo quindi 11 punti nel piano. Una stretta di mano è una relazione che lega fra loro due punti, quindi è una retta. Bisogna perciò stabilire quante rette passano per 11 punti distinti, in modo che non ve ne siano tre che appartengano alla stessa retta.

Per ogni punto, per esempio A, passano 10 rette che lo collegano con i rimanenti punti; se prendiamo un altro punto, per esempio B, le rette sono ancora 10, ma ne dobbiamo contare solo 9, dato che la retta BA e la retta AB coincidono. Quindi per un terzo punto, C, conteremo solo 8 rette, poiché abbiamo già contato le rette CA e CB. Continuando questo procedimento possiamo dire che le rette, quindi le strette di mano, sono state: $10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 55$.

Livello 1

15. Otto ragazzi si incontrano per partecipare a un torneo di tennis a due, in cui ciascuno incontra gli altri. Quante partite si svolgono in tutto? [28]
16. 12 ragazzi si dividono in gruppi di 6 ed effettuano un torneo di ping-pong, in cui ciascuno incontra una sola volta tutti quelli del suo gruppo. Quindi si qualificano i primi due per gruppi che faranno un torneo a 4, come i precedenti. Quante partite in totale si sono giocate? [36]
17. Con riferimento al precedente quesito, come cambia la risposta se per il torneo finale se ne qualificano 3 per girone? [45]
18. Con riferimento ai quesiti precedenti, quante partite si giocano se i gironi eliminatori sono 4, ciascuno composto da 6 giocatori, 2 dei quali si qualificano per il torneo finale? [88]

Livello 2

19. Sei ragazzi e quattro ragazze partecipano a un gioco a squadre, in cui ogni squadra può essere composta o da due persone di sesso diverso o da tutte le persone dello stesso sesso. Quante diverse squadre possono formarsi? E se le squadre fossero formate da due persone dello stesso sesso? [6; 25]

20. Le famiglie Bianchi, Rossi e Verdi sono composte rispettivamente da 3, 4 e 5 persone. Una sera si incontrano tutte insieme per partecipare a un gioco di carte fra due squadre. In questo gioco ogni squadra può essere composta o da due persone di diversa famiglia o da tutte le persone della stessa famiglia. Quante diverse squadre possono formarsi? [50]

Livello 3

21. $6n$ ragazzi si dividono in gruppi di 6 ed effettuano un torneo di ping-pong, in cui ciascuno incontra una sola volta tutti quelli del suo gruppo. Quindi si qualificano i primi due per gruppi che faranno un torneo come i precedenti. Se in totale si sono giocate 57 partite, quanti sono i ragazzi? [18]
22. $4n$ ragazzi si dividono in gruppi di n ed effettuano un torneo di ping-pong, in cui ciascuno incontra una sola volta tutti quelli del suo gruppo. Quindi si qualificano i primi due per gruppi che faranno un torneo come i precedenti. Quante partite in totale si sono giocate? [$n \cdot (4n + 3)$]

Il concetto di isometria. Segmenti e poligoni.

Usiamo spesso, anche nel linguaggio di ogni giorno l'aggettivo uguale. Nel caso di due gemelli per esempio, diciamo che sono *uguali come due gocce d'acqua*, ma abbiamo già visto, quando abbiamo parlato della relazione di equivalenza, che il concetto di uguaglianza è molto delicato. I gemelli sono esseri fisicamente diversi, che si distinguono fra loro non solo perché occupano spazi diversi o perché hanno cellule diverse e così via, ma anche perché hanno certamente qualcosa che li contraddistingue, uno dei due è qualche etto più pesante dell'altro, il colore o il taglio dei capelli di uno dei due non è esattamente lo stesso, e via dicendo. Anche la più moderna tecnologia non è in grado di creare due oggetti perfettamente uguali, ma solo oggetti che la nostra stessa tecnologia riconosce uguali ma con un certo margine di errore.
Nelle matematiche si ha particolare interesse a stabilire il concetto di uguaglianza fra oggetti. Solo che tale concetto ha diversi significati, possiamo dire che due figure sono uguali perché si *assomigliano* o perché hanno alcune proprietà comuni.

Esempio 13

Quando andiamo a comprare un panino, a parte l'eventuale differenza di cottura, uno qualunque dei panini disponibili viene considerato uguale per il nostro interesse principale che è quello di placare la fame.
Ma vi è di più, da un punto di vista economico, una moneta da 1 euro è uguale a 2 monete da 50 centesimi. In questo caso non solo abbiamo a che fare con oggetti del tutto diversi per peso, colore e caratteristiche, ma addirittura per quantità 1 moneta è uguale, monetariamente, a 2 monete.

Come accade nella vita quotidiana anche nelle matematiche abbiamo diversi concetti di uguaglianza. Useremo perciò diversi termini per distinguere i diversi concetti. Vediamo il primo di essi.

Esempio 14

In prima A oggi c'è compito in classe di matematica, Gianni, il solito distratto, ha dimenticato a casa il foglio protocollo; chiede allora alla sua compagna Milena un foglio in prestito. La ragazza, che invece è molto previdente, ha portato un foglio in più e lo presta molto volentieri: prende il foglio dal suo zaino e lo porge a Gianni. Da un punto di vista fisico e geometrico vi è un movimento di un oggetto nello spazio. Durante questo movimento il foglio probabilmente si spiegazza un po', il suo stato fisico e quello chimico sono stati certamente alterati. Il foglio varia la propria temperatura, probabilmente vi saranno delle modifiche a livello microscopico, qualche goccia di sudore si è attaccata dalla mano di Milena al foglio e così via. Da un punto di vista macroscopico, quindi geometrico, però, né Gianni né Milena avvertono alcun cambiamento, il foglio che adesso ha Gianni è lo stesso foglio che aveva Milena. Ha mantenuto il suo colore, il suo formato, le righe o i quadretti e via dicendo; si è semplicemente spostato nello spazio.

Due oggetti che, come i fogli dell'esempio precedente, sono in qualche modo assimilabili a quelli che sono prodotti in serie da una fabbrica, ci forniscono la nostra prima idea di oggetti geometricamente uguali.
Poniamo qualche definizione.

Definizione 6

Diciamo che una figura è stata sottoposta a un **movimento rigido** se alla fine del movimento la figura non ha variato nessuna delle proprie proprietà geometriche.

Definizione 7

Diciamo che due figure geometriche sono fra loro **isometriche o uguali**, se esiste un movimento rigido che le fa sovrapporre, cioè fa occupare loro la stessa identica posizione. Pertanto non vi è alcun punto della prima figura che non appartenga alla seconda e viceversa.

Per evitare confusioni e complicazioni, nel seguito dell'opera useremo quasi sempre il vocabolo *uguale* per intendere *uguale*, cioè di *uguale misura.*

Che cosa significa?

Isometria. Composto dal greco *ìsos* nel senso di uguale e *métron* che vuol dire misura. Quindi due figure isometriche hanno la stessa misura.

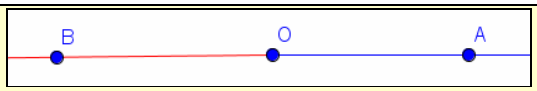
Adesso aggiungiamo un nuovo postulato a quelli già enunciati.

Postulato 5

Tutte le rette sono uguali.

Ciò significa che riusciamo sempre a spostare due rette nel piano in modo che esse si sovrappongano.
In seguito considereremo altre idee di uguaglianza. Adesso riprendiamo in considerazione la relazione di ordine totale stabilita sulla retta.
Il postulato che noi abbiamo indicato con il numero 1, afferma che *una retta è un insieme totalmente ordinato di punti*. Abbiamo poi supposto che possa farsi l'operazione di fissare un determinato punto su una retta. Tale operazione presuppone la suddivisione dei punti della retta in tre classi: il punto stesso, l'insieme dei punti che stanno *da una parte* rispetto al punto e quelli che stanno *dall'altra parte*. Diciamo che da un punto di vista intuitivo il fissare un punto su una retta equivale a porre una specie di *confine* e quindi a considerare appartenenti a due *regioni* diverse i punti che stanno da parti opposte rispetto a questo punto.

Esempio 15

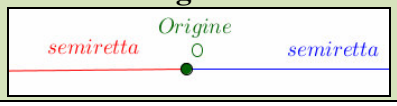


In figura abbiamo *diviso* la retta nelle due parti di diversi colori mediante la scelta del punto O. In questo modo abbiamo due regioni, quella dei punti, come A, che stanno a destra di O e quella dei punti come B, che stanno a sinistra di O.

Diamo adesso un nome a ciascuna delle regioni suddivise dal punto O nell'esempio precedente.

Definizione 8

Fissato un punto P su una retta ordinata, l'insieme formato da P e da tutti i punti che lo precedono o lo seguono, si chiama **semiretta**. Il punto P si chiama **origine** della semiretta.



Che cosa significa?

Semi. Come prefisso viene comunemente usato con il significato di *metà*; per esempio il semicerchio è metà di un cerchio, la semifinale è una partita che serve a determinare una delle due finaliste, cioè la metà dell'insieme dei finalisti. In realtà tale prefisso viene usato anche con il significato di *parte di una cosa*; per esempio semianalfabeta si riferisce a chi sa leggere e scrivere molto male, non a chi sa scrivere o leggere a metà. Quindi per semiretta non deve intendersi la metà di una retta, cosa priva di significato, ma una parte di retta.

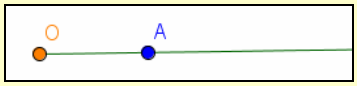
Poiché la semiretta è un oggetto che ha un inizio (la sua origine) ma non ha una fine, è opportuno stabilire il seguente postulato.

Postulato 6

Tutte le semirette sono uguali.

Esempio 16

Se non avessimo stabilito il precedente postulato ci saremmo scontrati con dei fatti paradossali (che sfuggono cioè al senso comune).



Infatti consideriamo il modello di semiretta fornito in figura, di origine O, contiene la semiretta di origine A,

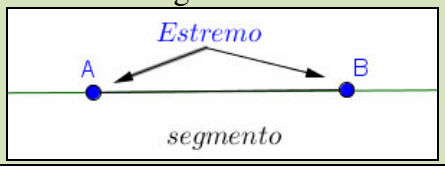
quindi sembrerebbe lecito dire che quest'ultima è più *piccola* della prima. Se però spostiamo A e lo facciamo coincidere con O, la *differenza* fra le due semirette, che era misurata da tutti i punti compresi tra O e A, sparisce. Ora se le due semirette fossero finite, allora ci troveremmo di fronte a quel che accade nella pratica quando piantiamo un chiodo, la parte che viene a mancare all'esterno quando lo piantiamo, passa all'interno, sembra sparita, ma si è semplicemente spostata nello spazio. nel verso consueto, cioè da sinistra a destra di chi guarda. Quindi se il confronto fosse stato fra due porzioni finite di retta, l'eccedenza si sarebbe semplicemente spostata da sinistra a destra. In questo caso non è così, dato che A e B sono punti di una stessa retta, ed essa è infinita, a *destra di B non vi è spazio per spostarsi*.

Pertanto ci si rende conto che ragionare sugli insiemi e sugli oggetti infiniti con le stesse idee usate per gli insiemi e gli oggetti finiti, può condurre a dei veri e propri paradossi, cioè a idee che contrastano con i nostri sensi. È proprio per evitare ciò che abbiamo enunciato il **Postulato 6**.

Il passo successivo è naturalmente quello di *limitare* una porzione di retta da entrambi i lati.

Definizione 9

Fissati due punti distinti A e B su una retta ordinata, con A che precede B, diciamo **segmento** determinato da A e B, l'insieme formato da A, B e da tutti i punti della retta passante per A e B, che seguono il punto A e precedono il punto B. I punti che determinano il segmento si chiamano **estremi** del segmento.



Notazione 2

Per indicare un segmento di estremi A e B scriveremo semplicemente AB oppure BA.

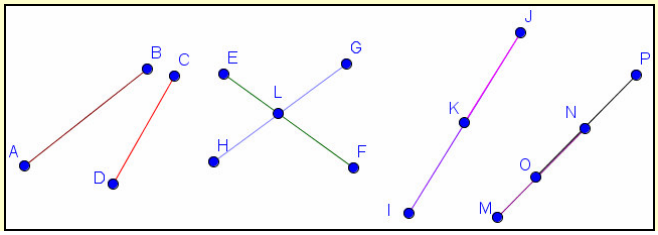
Che cosa significa?

Segmento. Dal latino *segmentum* che era uno strumento per tagliare. Quindi il segmento è *ritagliato* dalla retta, ossia è una porzione di retta.

Vediamo di considerare adesso come possono essere disposti due segmenti distinti nel piano.
Essendo essi parte di rette possono avere 0, 1 o infiniti punti in comune senza essere coincidenti.

Esempio 18

Consideriamo le seguenti figure. I segmenti AB e CD non hanno alcun punto in comune; i segmenti EF e GH hanno in comune il punto L; i segmenti JK e IK hanno in comune il segmento JK; i segmenti MN e OP hanno in comune il segmento ON.



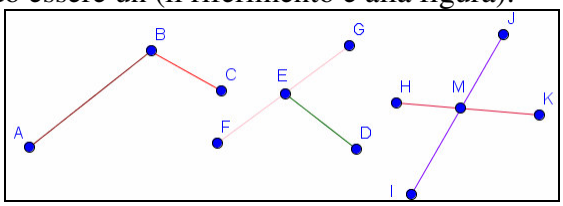
Tenuto conto dell'esempio precedente, stabiliamo alcune definizioni che distinguano i vari casi mostrati.

Definizione 10

Due segmenti che hanno

- 0 punti comuni si dicono fra loro **esterni**;
- 1 punto comune si dicono fra loro **incidenti**;
- tutti i punti comuni si dicono **coincidenti**;
- più di un punto in comune, ma non sono coincidenti, si dicono **sovrapposti**.

Consideriamo adesso i segmenti che hanno un punto in comune, sono possibili tre casi, che visualizziamo in figura, in cui il punto comune può essere un (il riferimento è alla figura):



- estremo comune a entrambi i segmenti (*B*);
- un estremo di uno dei due segmenti (*E*) ma non dell'altro;
- essere un punto non estremo (*M*) di alcuno dei due segmenti.

Daremo un nome particolare ai segmenti che si trovano nella prima posizione.

Definizione 11

Diciamo **consecutivi** due segmenti non sovrapposti che hanno un estremo in comune.

All'interno dei segmenti consecutivi risulta opportuno distinguere un altro caso particolare, ossia se i due segmenti fanno parte anche della stessa retta.

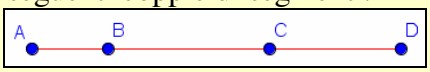
Definizione 12

Diciamo **adiacenti** due segmenti consecutivi appartenenti a una stessa retta.

Vediamo un esempio.

Esempio 19

Considerata la figura seguente:, in essa possiamo distinguere sei diversi segmenti: *AB*, *AC*, *AD*, *BC*, *BD*, *CD*. Pertanto possiamo considerare le seguenti coppie di segmenti.



(*AB*, *AC*), (*AB*, *AD*), (*AB*, *BC*), (*AB*, *BD*), (*AB*, *CD*), (*AC*, *AD*), (*AC*, *BC*), (*AC*, *BD*), (*AC*, *CD*), (*AD*, *BC*), (*AD*, *BD*), (*AD*, *CD*), (*BC*, *BD*), (*BC*, *CD*), (*BD*, *CD*). Di queste 15 coppie di segmenti, quelle adiacenti sono solo 4: (*AB*, *BC*), (*AB*, *BD*), (*AC*, *CD*), (*BC*, *CD*). Vi sono poi 10 coppie di segmenti sovrapposti: (*AB*, *AC*), (*AB*, *AD*), (*AC*, *AD*), (*AC*, *BC*), (*AC*, *BD*), (*AD*, *BC*), (*AD*, *BD*), (*AD*, *CD*), (*BC*, *BD*), (*BD*, *CD*). E infine 1 sola coppia di segmenti esterni: (*AB*, *CD*).

Che cosa significa?

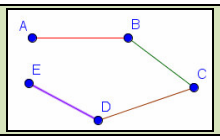
Consecutivo. Significa: *che segue*, *che viene dopo*. Qui è usato nel senso: *che viene immediatamente dopo*. Pensiamo a una fila a uno sportello postale: ogni cliente, escluso l'ultimo, ha esattamente una persona che lo segue.

Adiacente. Dal latino *ad iacens*, cioè che giace vicino. Il verbo giacere è usato spesso in geometria: una retta giace su un piano, cioè è parte di esso. Quindi i segmenti adiacenti giacciono vicini e fanno parte di una stessa retta.

Adesso proviamo a costruire figure più complesse, mediante l'unione di più segmenti, ma tali figure non dovranno essere *frammentate*, composte cioè da segmenti staccati. Affinché ciò accada occorrerà fare in modo che i segmenti utilizzati siano a due a due consecutivi.

Definizione 13

Un insieme di tre o più segmenti a due a due fra loro consecutivi ma non adiacenti, si chiama **poligonale**.

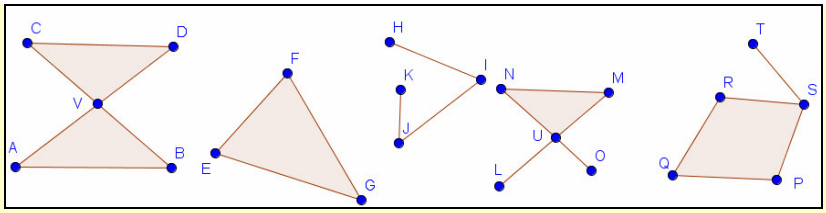


Che cosa significa?

Poli. Come prefisso significa letteralmente *molti*, ricordiamo il *polinomio*. Come suffisso significa invece *città* (metropoli, acropoli, baraccopoli, ...). Vi è però da dire che nei due casi la parola greca a cui ci si riferisce è diversa, anche se poi in italiano viene tradotta sempre con poli.

Di seguito proponiamo alcuni esempi grafici di poligonali.

Esempio 20



Possiamo notare che queste poligonali sono diverse fra loro.

- la prima e la quarta hanno segmenti che hanno in comune punti che non sono estremi di entrambi i segmenti (nel linguaggio di ogni giorno diremmo che sono *intrecciate*);
- la prima e la seconda racchiudono una parte di piano;
- la quarta e la quinta racchiudono una parte di piano ma solo con una parte di esse;
- Le prime due poligonali non hanno punti che non sono estremi di almeno una coppia di segmenti, le altre tre li hanno.

Riferendoci all'esempio precedente enunciamo la seguente definizione.

Definizione 14

In una poligonale, gli eventuali estremi di un segmento che non risultano comuni a un altro segmento vengono detti **estremi liberi**.

Con riferimento all'esempio 20, sono estremi liberi H e K per la terza poligonale; O e L per la quarta; T per la quinta. È chiaro che una poligonale può avere al massimo 2 estremi liberi e al minimo 0. La definizione precedente permette di effettuare le seguenti distinzioni.

Definizione 15

Una poligonale priva di estremi liberi si dice **poligonale chiusa**, diversamente viene chiamata **poligonale aperta**.

Sono perciò poligonali chiuse la prima e la seconda.

Definizione 16

Una poligonale in cui due segmenti qualsiasi hanno in comune al massimo un estremo viene detta **poligonale semplice**.

Sono poligonali semplici la seconda, la terza e la quinta.

Definizione 17

Una poligonale in cui almeno due segmenti hanno in comune un punto che non risulta estremo per almeno uno dei due segmenti viene detta **poligonale intrecciata**.

Sono poligonali intrecciate la prima e la terza. Perciò la prima poligonale è intrecciata chiusa; la seconda semplice chiusa; la terza e la quinta sono semplici aperte; la quarta intrecciata aperta.
Le poligonali chiuse risultano una specie di gabbia, di contenitore, e separano il piano in tre insiemi di punti:
- quelli che stanno sulla poligonale;
- quelli che stanno *dentro*;
- quelli che stanno *fuori*.

I concetti di *dentro* e *fuori* sono qui utilizzati con lo stesso significato del linguaggio comune.
La figura formata da una poligonale chiusa e dall'insieme di punti che essa *racchiude* merita un nome.

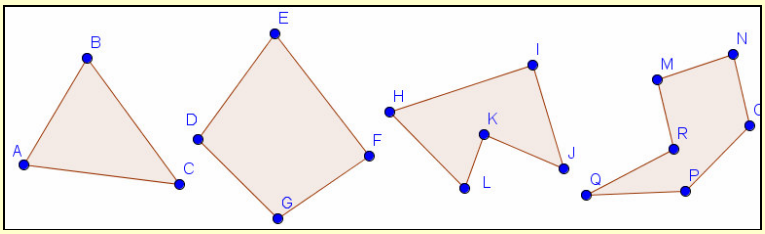
Definizione 18

L'insieme formato dai punti del piano delimitati da una poligonale chiusa e dai punti della poligonale si dice **poligono,** i segmenti che lo compongono si chiamano **lati**, gli estremi dei lati si dicono **vertici**.

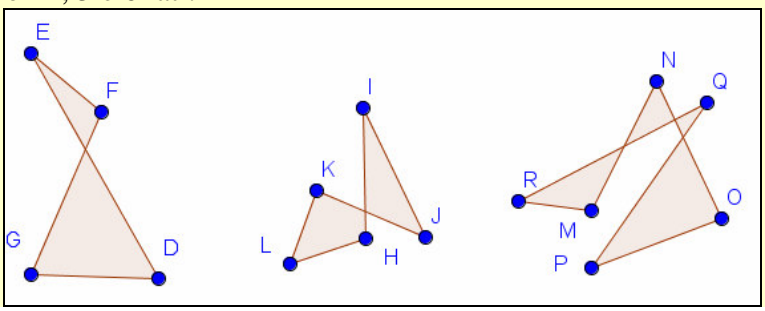
Un poligono evidentemente deve avere almeno tre lati. A seconda del numero dei suoi lati un poligono sarà chiamato con un vocabolo formato
- da un prefisso riferito a tale numero (tri = 3, quadri = 4, penta = 5, esa = 6, etta = 7,...)
- dai suffissi *gono*, *angolo* o *latero* (triangolo, quadrangolo o quadrilatero, pentagono, ...).

Esempio 21

Ecco alcuni esempi di poligoni semplici con 3 (Triangolo), 4 (Quadrangolo o Quadrilatero), 5 (Pentagono) e 6 (Esagono) lati



e di poligoni intrecciati con 4, 5 e 6 lati.



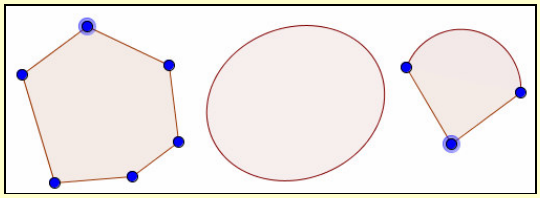
Facciamo ancora una distinzione tra le figure piane chiuse.

Definizione 19

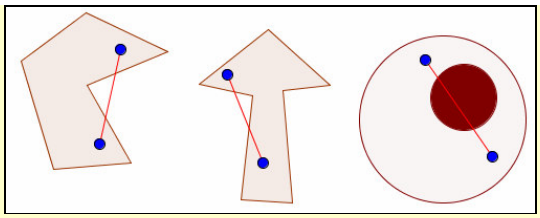
Una figura si dice **convessa** se, ogniqualvolta scegliamo due suoi punti qualsiasi, l'intero segmento che li congiunge è formato solo da punti appartenenti alla figura stessa, diversamente la figura si dice **concava**.

Esempio 22

Esempi di figure convesse



e di figure concave



I segmenti tracciati servono per provare che le figure sono concave, in particolare la parte più scura della terza figura indica un buco.

Che cosa significa?

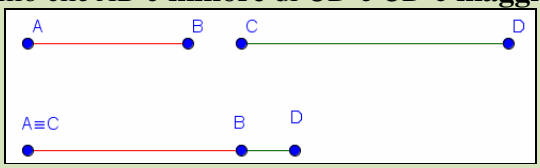
Convesso. È composto da *cum* e *vexus*, dove *vexus* è una forma del verbo *vehere* che significa trasportare con il carro. Quindi convesso significa letteralmente che si può effettuare un trasporto.
Concavo. È composto da *cum* e *cavus,* letteralmente con una cavità.

Abbiamo già dato il concetto di figure fra loro uguali, esso è perciò valido anche per i segmenti e i poligoni. Mediante un movimento rigido possiamo perciò portarli su una stessa retta, in modo che abbiano un estremo in comune e siano sovrapposti l'uno all'altro, potranno accadere tre casi per i quali riserviamo la seguente definizione.

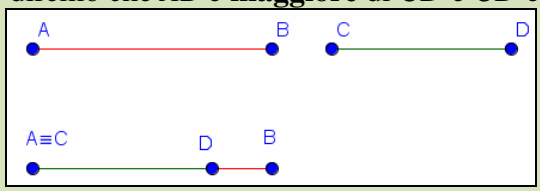
Definizione 20

Dati due segmenti AB e CD, con un movimento rigido ne sovrapponiamo uno dei due all'altro, per esempio CD, in modo che i segmenti abbiano un estremo in comune, per esempio A e C. Consideriamo adesso l'estremo D se

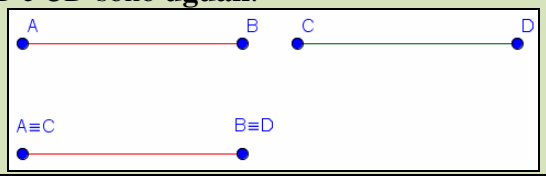
- è un punto esterno ad AB, diremo che AB è **minore** di CD e CD è **maggiore** di AB;



- è un punto di AB diverso da B, diremo che AB è **maggiore** di CD e CD è **minore** di AB;



- coincide con D, diremo che AB e CD sono **uguali**.



Notazione 3

Per indicare che i segmenti AB e CD sono fra loro uguali scriveremo $\overline{AB} = \overline{CD}$. Per indicare che AB è maggiore di CD scriveremo $\overline{AB} > \overline{CD}$ oppure $\overline{CD} < \overline{AB}$.
La notazione per segnare un segmento è dovuta al matematico italiano Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647).

Se un segmento è maggiore di un altro, la differenza sarà data proprio dal segmento che misura l'eccedenza, cioè quel che il segmento maggiore ha in più rispetto al minore.

Definizione 21

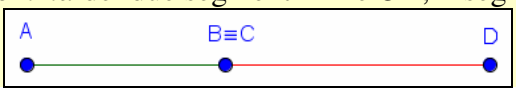
Se nell'operazione di confronto fra i segmenti AB e CD risulta $\overline{AB} > \overline{CD}$, diciamo che il segmento DB è la differenza fra i segmenti AB e CD.



Cambiando semplicemente il modo di *attaccare* i segmenti, possiamo dare anche il concetto di somma di segmenti.

Esempio 23

Consideriamo due segmenti e invece di sovrapporli mediante un movimento rigido li disponiamo fra loro adiacenti. Se osserviamo l'ente geometrico così ottenuto notiamo che è ancora un segmento, formato dall'unione fisica dei due segmenti, come mostrato in figura.
Risulta quindi naturale chiamare *somma* dei due segmenti *AB* e *CD*, il segmento *AD*.



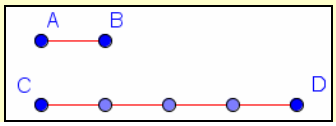
Definizione 22

Dati due segmenti *AB* e *CD*, mediante un movimento rigido essi vengono posti in modo da essere fra loro adiacenti, con gli estremi comuni *B* e *C*. Il segmento *AD* si dice **somma** dei due segmenti *AB* e *CD*.

Ci proponiamo ora di usare i numeri per misurare i segmenti. Dato che abbiamo già definito la somma di segmenti, è di immediata intuizione il concetto di multiplo di un segmento o di un angolo: basta sommare più volte la stessa grandezza. Risulta ovvio anche il concetto di sottomultiplo, poiché se un segmento *AB*, per esempio, è multiplo del segmento *CD* quest'ultimo è sottomultiplo del primo.

Esempio 25

I segmenti *AB* e *CD* sono tali che *CD* è multiplo secondo il fattore 4 di *AB* e naturalmente *AB* è sottomultiplo di *CD* secondo lo stesso fattore.



Con il procedimento precedente siamo in grado anche di *misurare* numericamente i segmenti, cioè di associare a ogni segmento un numero che esprime la sua lunghezza, in modo che due segmenti non uguali abbiano associati numeri diversi. Basta considerare un segmento qualsiasi e considerarlo come unità di misura, dire cioè che esso rappresenta il numero 1 e a partire da esso costruire i segmenti che misurano 2, 3 e così via. Questo procedimento è quello che si effettua normalmente quando misuriamo le distanze utilizzando i metri, i centimetri, i chilometri .... In questo caso un accordo internazionale ha stabilito qual è l'unità di misura chiamata *metro*.

Esempio 26

Con riferimento al precedente esempio, se scegliamo *AB* come unità di misura, cioè se $\overline{AB} = 1$, allora avremo anche $\overline{CD} = 4 \cdot \overline{AB} = 4$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

La misura di un monitor o di uno schermo televisivo è comunemente misurata in pollici, (in inglese inch e si indica con ″), intendendo come misura quella della diagonale del rettangolo che forma lo schermo. Quanto misura in centimetri uno schermo da 15″?
Sappiamo che un pollice equivale a circa 2.54 *cm*, pertanto $15'' \approx (2{,}54 \cdot 15)\ cm = \approx 38{,}1\ cm$. Quindi uno schermo da 15″ ha una diagonale che misura circa 38 *cm*.

Livello 1

1. Quanto misura in centimetri un monitor da 17″? E uno da 19″? [43,18; 48,26]
2. Tommaso si trova in Inghilterra con la sua macchina il cui tachimetro è tarato in chilometri con una tacca posta ogni 5 *km*. La strada su cui viaggia ha un limite di velocità di 80 miglia orarie (un miglio è ≈ 1609,34 *m*). Qual è la massima velocità che potrà segnare il tachimetro della macchina di Tommaso, affinché non incorra in una contravvenzione? [125]
3. William ha un auto inglese il cui tachimetro è tarato in miglia, un suo amico italiano gli ha detto che per non incorrere in eccesso di velocità su una certa strada non deve superare 65 miglia l'ora. Qual è il limite di velocità espresso in decine di *km* l'ora? [110]
4. Alessio si trova a passare sotto un ponte in Inghilterra, con il suo camion alto 3,5 *m*. Prima del sottopasso un cartello avvisa che possono passare solo i mezzi alti meno di 4 yarde (una yarda è ≈ 0,9144 *m*). Alessio può passare o deve cambiare strada? Giustificare la risposta. [No]
5. Con riferimento al problema precedente, se il camion ha anche un'altezza di 50 *cm*, quanto deve essere il limite di altezza espresso con una cifra decimale? [4,5 yarde]
6. I punti *A*, *B*, *C*, *D* sono posti nell'ordine su una retta. Considerati i precedenti punti come estremi di segmenti determinare il risultato delle seguenti operazioni insiemistiche: $AC \cup BD$; $AD \cap BC$; $BC \setminus AD$; $CD \,\Delta\, AD$. [AD; BC ; $\varnothing$; AC]
7. I punti *A*, *B*, *C*, *D* ed *E* sono posti nell'ordine su una retta. Considerati i precedenti punti come estremi di segmenti determinare il risultato delle seguenti operazioni insiemistiche: $AC \setminus BD$; $BE \cap AC$; $AE \cup CD$; $CD \,\Delta\, AE$ [AB ; BC ; AE ; $AC \cup DE$]
8. Se *AB* è il doppio di *CD*, che a sua volta è il triplo di *EF*, possiamo dire che *AB* rispetto ad *EF* è? [6 volte]
9. Se *AB* è il doppio di *CD*, che a sua volta è un terzo di *EF*, possiamo dire che *AB* rispetto ad *EF* è? [2/3]
10. All'interno del segmento *AB* scegliamo 5 punti che lo dividono in 6 parti uguali. Chiamiamo i punti nell'ordine *C*, *D*, *E*, *F*, *G*. Se *CF* misura 3 *cm*, quanto misura *AB*? [6 *cm*]
11. Con riferimento al precedente quesito, se *CE* misura 4 *cm*, quanto misura *DG*? [6 *cm*]

Livello 2

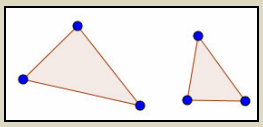
12. Alfredo deve comprare un televisore da porre all'interno di una cavità a sezione rettangolare delle dimensioni di 30 *cm* × 40 *cm*. Qual è il più grande televisore, misurato in pollici, che può acquistare? [19]
13. Realisticamente, Alfredo dovrà lasciare un po' di spazio, intorno al televisore, diciamo 1 *cm* a sinistra, 1 a destra e 2 in alto, cambia la risposta precedente? Se sì quanto diventa? [Sì; 18]
14. Con riferimento al problema precedente, se Alfredo riesce a sistemare un televisore da 27", sempre con gli spazi da lasciare, se in orizzontale ha a disposizione 50 *cm*, quanti *cm* gli servono almeno in verticale? [51]
15. I punti *A*, *B*, *C*, *D* ed *E* sono posti nell'ordine su una retta. Considerati i precedenti punti come estremi di segmenti determinare il valore di $(AC \cup BD) \setminus (BE \cap AD)$. [$AB$]
16. I punti *A*, *B*, *C*, *D*, *E* ed *F*, sono posti nell'ordine su una retta. Considerati i precedenti punti come estremi di segmenti determinare il valore di $(AC \cup BE \cap CF) \cap (AD \cap BC) \cup (AB \cap AF)$. [$AC$]
17. Se $\overline{AB} = \frac{3}{2}\overline{CD}; \overline{CD} = \frac{5}{3}\overline{EF}; \overline{EF} = \frac{7}{2}\overline{GH}; \overline{AB} = k\overline{GH}$, quanto vale *k*? $\left[\frac{35}{4}\right]$
18. Se $\overline{AB} = \frac{1}{4}\overline{CD}; \overline{EF} = \frac{7}{5}\overline{GH}; \overline{GH} = \frac{4}{3}\overline{CD}; \overline{AB} = k\overline{EF}$, quanto vale *k*? $\left[\frac{15}{112}\right]$

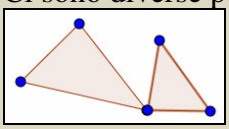
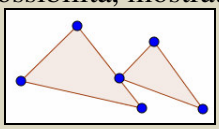
Quali proprietà delle relazioni (riflessiva, antiriflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva, di connessione) verificano le seguenti relazioni fra rette del piano?

19. La relazione di non avere punti in comune fra le rette del piano. [*AR*, *S*]
20. La relazione di isometria nell'insieme dei triangoli [Relazione di equivalenza]
21. La relazione di avere la stessa misura nell'insieme dei segmenti. [Relazione di equivalenza]
22. La relazione di avere lo stesso numero di lati nell'insieme dei poligoni [Relazione di equivalenza]

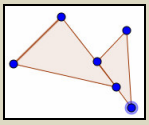
Lavoriamo insieme

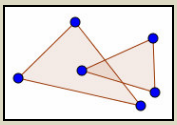
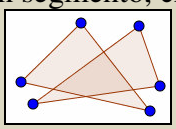
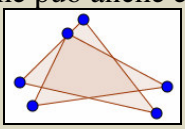
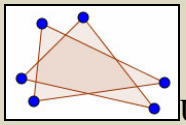
Due triangoli in quanti punti si possono incontrare?

Ci sono diverse possibilità, mostrate nelle figure seguenti.  0 punti.

  1 punto.

Possono avere poi infiniti punti in comune, di diverso tipo.

 Un segmento, che può anche essere un intero lato.

    Una parte poligonale di forma triangolare, quadrilatera, pentagonale o esagonale. Non è possibile ottenere un poligono con un numero maggiore di lati, perché al massimo possiamo incontrare, con due lati un lato del triangolo in due punti.

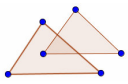
Livello 2

23. Studiare l'intersezione di un triangolo con un quadrilatero convesso, il poligono che si ottiene quanti lati può avere? [Da 3 a 7]
24. Studiare l'intersezione di due quadrilateri convessi, il poligono che si ottiene quanti lati può avere? [Da 3 a 8]
25. Studiare l'intersezione di due pentagoni convessi, il poligono che si ottiene quanti lati può avere? [Da 3 a 10]
26. Studiare l'intersezione di un quadrilatero e un pentagoni convessi, il poligono che si ottiene quanti lati può avere? [Da 3 a 9]

Livello 3

Giustificare le risposte ai seguenti quesiti

27. L'unione di due figure convesse è sempre una figura convessa? E di due figure concave?

[No,  ; No ]

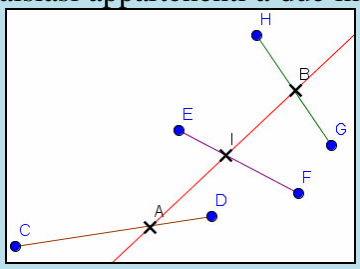
28. L'intersezione non vuota di due figure convesse è sempre una figura convessa? E di due figure concave? [Sì; No, ]
29. La differenza non vuota di due figure convesse è sempre una figura convessa? E di due figure concave? [No,  ; No, ]

Concetto di angolo piano e sua misurazione in gradi sessagesimali

Disponiamo a questo punto dei mezzi per definire un altro importante concetto geometrico. Se tracciamo una retta questa suddivide il piano in tre insiemi, quello dei punti della retta e due insiemi disgiunti di punti non appartenenti alla retta. Prima di nominare ciascuno di questi due ultimi insiemi di punti, enunciamo un altro postulato.

Postulato 7

Tracciata una qualsiasi retta del piano, i punti a essa esterni fanno parte di due insiemi disgiunti, tali che ogni segmento che congiunge due punti qualsiasi appartenenti a due insiemi diversi incontra sempre la retta in un punto.



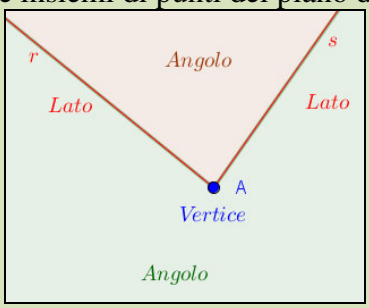
Definizione 23

Ciascuno degli insiemi disgiunti determinati da una retta nel piano si chiama **semipiano**.

Abbiamo visto che una retta divide il piano in tre insiemi, quindi due rette incidenti lo divideranno in 6 parti e così via. Noi siamo interessati invece a considerare sempre la suddivisione del piano in due parti, ma in modo diverso da quello che si ottiene con una retta. Consideriamo perciò due semirette aventi la stessa origine, anche queste dividono il piano in tre parti, l'insieme dei punti che stanno sulle semirette e gli altri due insiemi anch'essi disgiunti, che verificano analoghe proprietà che i semipiani e stabilite dal Postulato 7. Per queste due porzioni di piano riserviamo un nome particolare.

Definizione 24

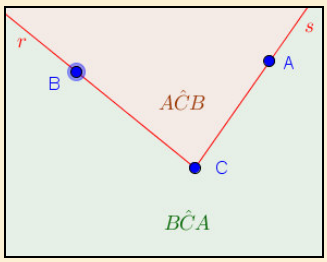
Diciamo **angolo** di lati le semirette r e s di origine comune C, ciascuno dei due insiemi di punti del piano determinati da r e s, che hanno in comune solo le semirette.



La precedente definizione non distinguere i due angoli fra loro, dobbiamo perciò stabilire una convenzione. Intanto fissiamo come ordine di lettura quello antiorario (contrario a quello delle lancette dell'orologio) e ciò varrà per qualsiasi figura geometrica. Poi utilizziamo la seguente notazione.

Notazione 4

Per indicare un angolo di vertice C, si scelgono un punto A e un punto B su ciascuno dei due lati, quindi scriveremo $A\hat{C}B$ oppure $B\hat{C}A$, a seconda che nel verso antiorario di lettura incontreremo prima A e poi B o viceversa.



Che cosa significa?

Vertice è derivato dal verbo *vertere*, cioè volgere verso l'alto o verso il basso.

Naturalmente anche i semipiani sono angoli, dato che una retta può essere considerata come un caso particolare di due semirette aventi l'origine in comune. A parte questo caso, le semirette individuano due angoli, cioè due regioni piane che sono una convessa e l'altra concava, in accordo con la Definizione 19. Poniamo delle definizioni specifiche per gli angoli.

Definizione 25

Diciamo angolo **nullo** la parte di piano determinata da due semirette coincidenti ugualmente orientate.

Definizione 26

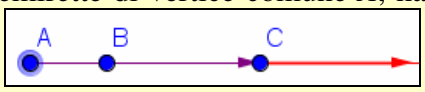
Diciamo angolo **piatto** la parte di piano determinata da due semirette coincidenti e diversamente orientate. L'angolo giro coincide con un semipiano.

Definizione 27

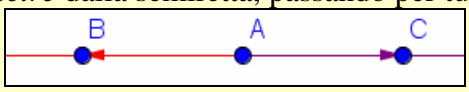
Diciamo angolo g**iro** l'intero piano.

Esempio 27

- Considerando la figura seguente, in cui le semirette di vertice comune A, hanno lo stesso orientamento, pertanto $C\hat{A}B$ è l'angolo nullo.



- Invece nella figura seguente, le semirette hanno diverso verso, quindi per passare da B a C, dobbiamo *cambiare* verso, quindi siamo costretti a *uscire* dalla semiretta, passando per tutti i punti del piano; perciò $C\hat{A}B$ è un angolo giro.



Vediamo adesso di distinguere particolari coppie di angoli piani, rammentando ciò che abbiamo già detto sui segmenti.

Definizione 28

Diciamo fra loro **consecutivi** due angoli che hanno il vertice e un lato in comune.

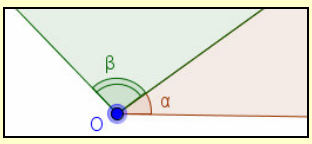
Definizione 29

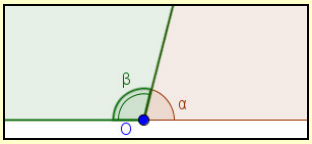
Diciamo fra loro **adiacenti** due angoli consecutivi in cui i due lati non comuni appartengono alla stessa retta.

Esempio 28

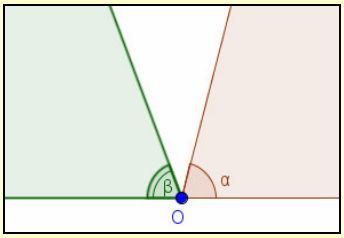
Rappresentiamo graficamente

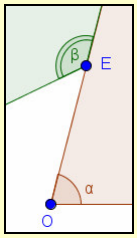
- angoli fra loro consecutivi e non adiacenti:

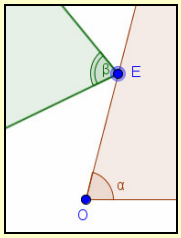




- angoli fra loro adiacenti:







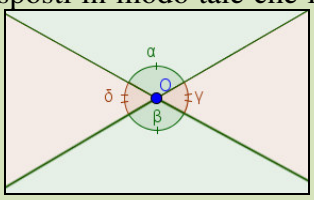
- angoli non consecutivi:

Osservando gli angoli non consecutivi notiamo che nel primo caso gli angoli hanno in comune il vertice, ma nessuno dei lati, nel secondo invece hanno in comune una parte di un lato ma non il vertice, nel terzo né vertice, né alcuno dei lati.

Se invece di considerare due semirette prendiamo due rette incidenti, otteniamo quattro angoli, a due a due adiacenti.

Definizione 30

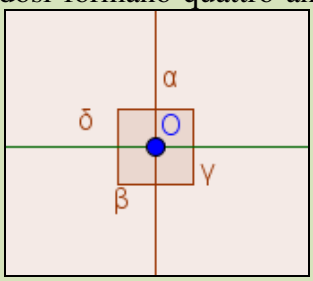
Diciamo angoli **opposti al vertice** due angoli aventi il vertice in comune e i lati disposti in modo tale che i prolungamenti dei lati dell'uno risultano lati dell'altro.



In figura sono opposti al vertice angoli ugualmente segnati e colorati.

Definizione 31

Si dicono fra loro **perpendicolari** o anche **ortogonali** due rette che incontrandosi formano quattro angoli uguali Ciascuno degli angoli da esse formato si chiama angolo **retto**.



Notazione 5

Per indicare che le rette r e s sono perpendicolari scriviamo $r \perp s$.
Il simbolo $\perp$ fu usato per la prima volta da Pierre Hérigone nel 1634 nell'opera *Cursus mathematicus*.

Che cosa significa?

Perpendicolare. È un vocabolo derivato da *perpendiculum* che significa filo a piombo. Tale strumento è utile in muratura proprio per stabilire se una determinata costruzione è perpendicolare alla superficie di appoggio e si fonda sul principio fisico secondo il quale tutti i corpi sulla superficie terrestre sono attratti verso il centro della terra.
Retto. Deriva da *reggere*, il cui prefisso *reg* indica un movimento in linea retta. In alcune lingue, compreso l'italiano, ha anche il senso di onesto (uomo retto). L'angolo retto è in qualche modo un angolo privilegiato e suggerisce l'idea di perfezione.
Ortogonale. È composto dalle parole greche *orthòs* che significa retto e *gonìa* che vuol dire angolo.

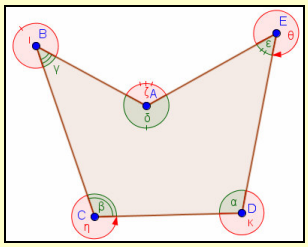
Se consideriamo un poligono, i suoi lati consecutivi appartengono a semirette con l'origine in comune, appunto l'estremo comune ai lati, formano perciò una coppia di angoli; un angolo che contiene punti del poligono diversi da quelli sui lati e uno che invece non contiene punti del poligono diversi da quelli sui lati. Pertanto per ogni poligono vi sono due diverse tipologie di angoli. Definiamole.

Definizione 32

Dato un poligono semplice, chiamiamo suoi **angoli** quelli aventi come lati le semirette contenenti due lati consecutivi del poligono e come vertice quello comune ai detti lati. Chiameremo **angoli interni** quelli che contengono anche punti del poligono non appartenenti ai lati; chiameremo **angoli esterni** quelli che hanno in comune con il poligono solo punti appartenenti ai lati.

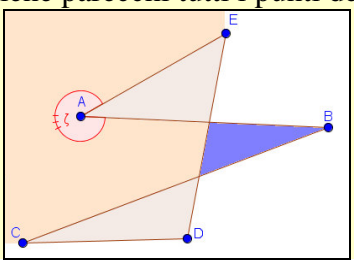
Esempio 29

In figura abbiamo rappresentato un pentagono semplice in cui abbiamo segnato gli angoli interni in verde e quelli esterni in rosso.



Dato che usiamo la notazione antioraria, gli angoli interni li indichiamo: $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$, $C\hat{D}E$, $D\hat{E}A$, $E\hat{A}B$, mentre quelli esterni sono: $B\hat{A}E$, $A\hat{E}D$, $E\hat{D}C$, $D\hat{C}B$, $C\hat{B}A$.

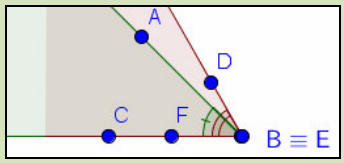
La Definizione 32 non è più valida se il poligono non è semplice, come mostrato in figura, dato che per esempio l'angolo esterno di vertice A contiene parecchi tutti i punti del poligono segnati in blu.



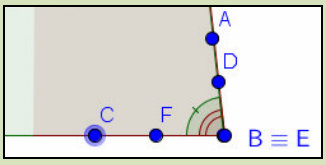
Vediamo di stabilire una maniera per confrontare gli angoli, cioè per individuare l'angolo maggiore e l'angolo minore.

Definizione 33

Dati due angoli $A\hat{B}C$ e $D\hat{E}F$, con un movimento rigido portiamo a coincidere i vertici B ed E e uno dei loro lati, per esempio BC ed EF, in modo che gli angoli non siano consecutivi.
Consideriamo adesso il lato AB se



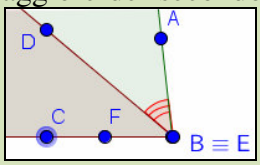
- è interno a $D\hat{E}F$, $A\hat{B}C$ è **minore** di $D\hat{E}F$ e $D\hat{E}F$ è **maggiore** di $A\hat{B}C$;



- coincide con $D\hat{E}F$, diremo che $A\hat{B}C$ e $D\hat{E}F$ sono **uguali**.

Definizione 34

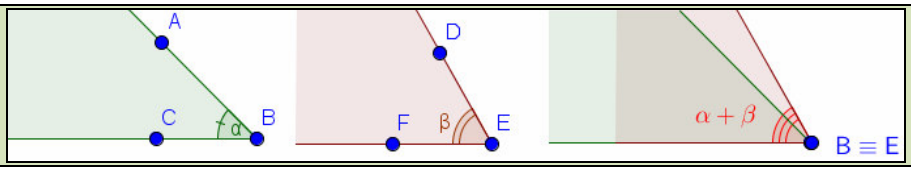
Dati due angoli $A\hat{B}C$ e $D\hat{E}F$, con il primo maggiore del secondo, diciamo differenza di $A\hat{B}C$ da $D\hat{E}F$ l'angolo $A\hat{B}D = A\hat{E}D$.



Vediamo come sommare due angoli.

Definizione 35

Dati i due angoli $A\hat{B}C$ e $D\hat{E}F$, mediante un movimento rigido essi vengono posti in modo da essere fra di loro consecutivi, con i vertici B ed E in comune. Diremo che l'angolo $A\hat{B}F$ è la **somma** dei dati angoli.



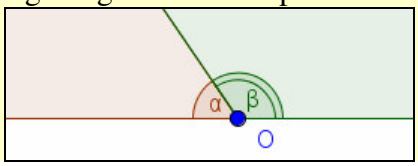
Definizione 36

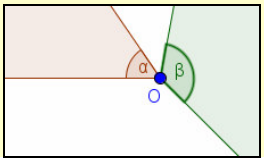
Due angoli dati sono tra loro
- **complementari** se la loro somma è un angolo retto;
- **supplementari** se loro somma è un angolo piatto;
- **esplementari** se loro somma è un angolo giro.

Naturalmente due angoli adiacenti sono sempre supplementari, mentre in generale due angoli supplementari non per forza sono adiacenti, cioè essere adiacenti è condizione sufficiente perché due angoli siano supplementari; essere supplementari è condizione necessaria perché due angoli siano adiacenti.

Esempio 30

In figura abbiamo rappresentato prima due angoli adiacenti, quindi supplementari; poi abbiamo ruotato il secondo angolo. Così facendo gli angoli non sono più adiacenti, ma chiaramente rimangono supplementari.





Risulta opportuno enunciare il seguente postulato.

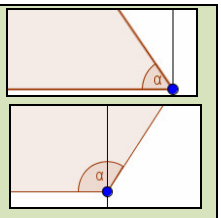
Postulato 8

Dati due angoli, α e β, fra loro uguali se a entrambi aggiungiamo o togliamo un angolo uguale a un altro angolo γ, gli angoli risultanti sono ancora uguali. In simboli; $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$ e $\alpha - \gamma = \beta - \gamma$.

Siamo ora anche in grado di confrontare un angolo qualsiasi con un angolo retto.
Vista l'importanza che abbiamo dato a quest'ultimo tipo di angolo, sarà opportuno distinguere, con nomi appropriati, gli angoli minori e quelli maggiori di un angolo retto.

Definizione 37

- Un angolo minore di un angolo retto viene detto angolo **acuto**.
- Un angolo maggiore di un angolo retto, ma minore di un angolo piatto, viene detto **ottuso**.



Che cosa significa?

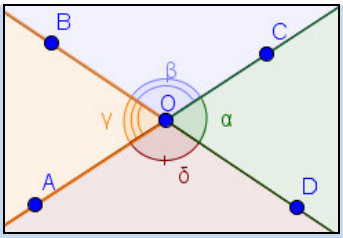
Acuto. Dal latino *acutus*, cioè dotato di punta.
Ottuso. Dal latino *obtusus* che, riferito a una punta, vuol dire smussato.
Quindi un angolo acuto appare più appuntito, più *stretto*, un angolo acuto appare invece più arrotondato, più *largo*.

A questo punto possiamo enunciare e provare i seguenti teoremi.

Teorema 3

Due angoli opposti al vertice sono uguali.
Dimostrazione
Consideriamo per riferimento la seguente figura in cui abbiamo indicato con lettere greche le misure dei vari

angoli.



Schema dimostrativo			
Passo	**Azione**	**Conseguenza**	**Giustificazione**
1	Consideriamo gli angoli opposti al vertice α e γ.	Entrambi sono angoli supplementari dell'angolo β (in realtà anche dell'angolo δ).	Sono angoli adiacenti.
2	Sottraiamo all'angolo piatto formato da α e β, l'angolo β.		
3	Sottraiamo all'angolo piatto formato da γ e β, l'angolo β.	Gli angoli α e γ sono uguali.	Per il Postulato 8.

Teorema 4

Angoli complementari, supplementari o esplementari di angoli fra loro uguali sono uguali.

Dimostrazione

Effettuiamo la dimostrazione solo per il caso di angoli complementari e lasciamo per esercizio la dimostrazione degli altri casi.

Schema dimostrativo			
Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Supponiamo che gli angoli $A\hat{B}C$ e $D\hat{E}F$ siano complementari di uno stesso angolo $G\hat{H}I$	$A\hat{B}C + G\hat{H}I = D\hat{E}F + G\hat{H}I$	La somma è in entrambi i casi un angolo retto.
2	Sottraiamo all'angolo $A\hat{B}C + G\hat{H}I$ la quantità $G\hat{H}I$.		
3	Sottraiamo all'angolo $D\hat{E}F + G\hat{H}I$ la quantità $G\hat{H}I$.	$A\hat{B}C = D\hat{E}F$	Per il Postulato 8.

Per misurare gli angoli si usa un metodo simile a quello già considerato per i segmenti. Seguiamo un procedimento dovuto ai Babilonesi che lo stabilirono parecchi secoli prima della nascita di Cristo. Essi proposero di suddividere l'angolo giro in 360 parti uguali, ciascuna delle quali fu detta grado; a sua volta il grado venne suddiviso in 60 parti uguali, chiamati primi e questi a loro volta in 60 parti uguali detti secondi. Per quel che riguarda i sottomultipli è la stessa suddivisione usata per la misurazione del tempo, in ore, minuti e secondi.

Notazione 6

Per indicare i gradi sessagesimali si usa il simbolo °, per indicare i primi si usa il simbolo ′, per indicare i secondi il simbolo ″.

Notazione 7

Per indicare la misura di un angolo, per esempio $A\hat{B}C$, scriveremo $\angle A\hat{B}C$.

In questo sistema, detto sessagesimale proprio per il suo collegamento con il numero 60, l'angolo giro misura 360 gradi e viene indicato con 360°, l'angolo piatto 180°, l'angolo retto 90°.
Si badi però che MAI nella geometria euclidea parleremo di angoli piatti, come angoli di 180°.
Tutti i risultati di geometria che enunceremo saranno privi di alcun collegamento con le misure numeriche.

Esempio 31

Dati gli angoli le cui misure in gradi sessagesimali sono 25°42′47″ e 45°26′52″, come determinare la misura dell'angolo ottenuto dalla loro somma? Come possiamo sommare i valori?
Ci rendiamo conto che non è possibile sommare fra loro gradi e primi o primi e secondi o gradi e secondi e dobbiamo quindi sommare fra loro soltanto le grandezze dello stesso genere (omogenee).

$$\begin{array}{r} 25°42'47" \quad + \\ 45°26'52" \\ \hline 70°68'99" \end{array}$$

Notiamo che il risultato potrebbe essere scritto meglio. 99″ = (60 + 39)″ = 1′39″ (infatti 1′ = 60″); potremmo così scrivere la precedente somma come 70°69′39″. Analogamente 69′ = (60 + 9)′ = 1°9′. Quindi infine scriveremo 25°42′47″ + 45°26′52″ = 71°9′39″.

Vediamo la sottrazione.

Esempio 32

Dati gli angoli le cui misure sono 123°22′16″ e 87°42′31″ come determinare la loro differenza?
Anche stavolta comprendiamo che devono sottrarsi solo grandezze fra di loro omogenee. Vi è però un altro problema: come sottrarre 31″ da 16″? Possiamo pensare di usare una tecnica simile a quella del ″prestito della decina″ che si usa nella sottrazione fra i numeri interi, solo che qui il fattore di moltiplicazione è 60. Così scriveremo il primo angolo nel seguente modo: 123°21′76″ e dato che avremo lo stesso problema con la sottrazione fra i primi lo scriveremo meglio come 122°81′76″.

$$\begin{array}{r} 122°81'76" \quad - \\ 87°42'31" \\ \hline 35°41'45" \end{array}$$

Passiamo alla questione dei multipli di un angolo.

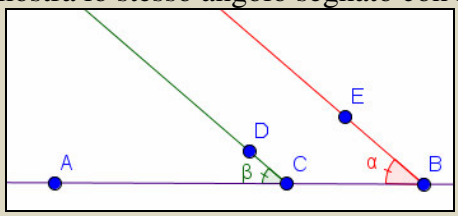
Esempio 33

- Dato l'angolo la cui misura è 38°56′27″ come determinare il suo multiplo secondo il fattore 7? Abbiamo ormai capito che le operazioni devono essere distinte per le singole categorie, quindi moltiplicheremo ciascuna unità per 7 ottenendo così 266°392′189″. A questo punto è chiaro che effettueremo le consuete operazioni che portano i primi e i secondi a essere scritti come quantità inferiori a 60. Poiché 189 = 3 · 60 + 9 avremo 266°395′9″ e dato che 395 = 6 · 60 + 35 scriviamo la forma finale del risultato: 272°35′9″.
- Dato l'angolo la cui misura è 251°6′58″ come determinare il suo sottomultiplo secondo il fattore 5? Anche questa volta dividiamo per categorie. 251 = 5 · 40 + 1: otteniamo così 40° con il resto di 1° che viene perciò trasformato in 60′, i quali sommati agli altri 6′ fanno sì che si debba calcolare 66 : 5. Dato che 66 = 5 · 13 + 1, trasformiamo 1′ = 60″ che sommati ai 58″ danno come risultato 118, ed effettuiamo la divisione 118″ : 5 che possiamo approssimare con 23″ o 24″. Il risultato approssimato per difetto della divisione è 40°13′23″, mentre quello approssimato per eccesso è 40°13′24″.

Verifiche

Lavoriamo insieme

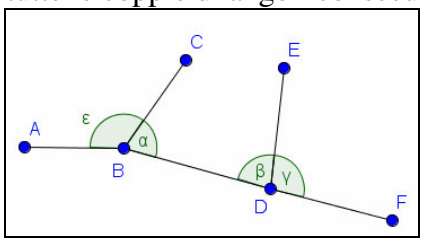
Distratto De Pasticcionis si è appena iscritto al primo anno delle superiori e fedele al suo nome e soprattutto al suo cognome, nonostante studi molto, spesso si confonde, dimentica quello che ha studiato, si fa delle idee sbagliate. Poiché è importante scambiarsi idee, anche se sbagliate, di tanto in tanto sentiremo quello che Distratto pensa di avere imparato e cercheremo di aiutarlo nel giungere alle giuste conclusioni.
Distratto, dopo aver visto le figure che abbiamo disegnato sugli angoli, si è convinto che l'angolo è il segno grafico che lo indica, o comunque la parte di piano contenuta fra il simbolo e i lati. Così, quando gli abbiamo mostrato la seguente figura che mostra lo stesso angolo segnato con nomi e simboli diversi

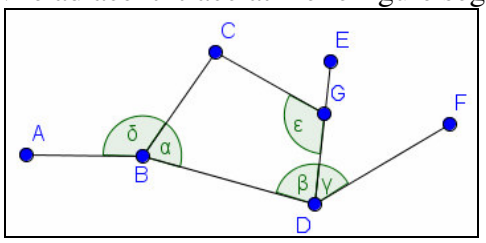


ha detto che l'angolo $C\hat{B}E$ è maggiore dell'angolo $A\hat{C}D$, perché il simbolo usato per segnare quest'ultimo è più piccolo di quello usato per segnare il primo.
Abbiamo invitato Distratto a leggere attentamente la Definizione 27 e la Notazione 5 e, con un po' di fatica, lo abbiamo convinto che non ha ragione. Per vedere quale dei due angoli è il maggiore o se sono uguali, dobbiamo inventare un altro metodo, che vedremo in seguito.

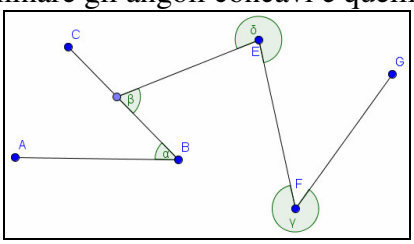
Livello 1

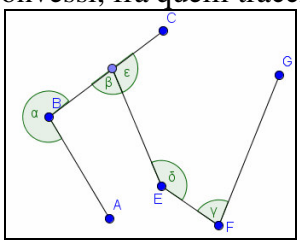
1. Determinare tutte le coppie di angoli consecutivi e adiacenti tracciati nelle figure seguenti.

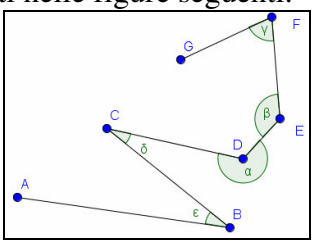




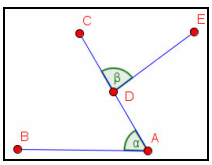
2. Determinare gli angoli concavi e quelli convessi, fra quelli tracciati nelle figure seguenti.



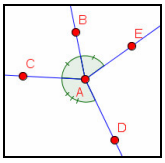




Di seguito descriviamo a parole alcune figure, scegliere all'interno di ciascuna parentesi il vocabolo adatto

3. 

Si fissi un punto A e si traccino due [*segmenti*, *semirette*] fra loro [incidenti, coincidenti]. Su una delle due semirette si fissi un [*punto*, *estremo*] D. Si segnino poi gli angoli [$C\hat{D}E$, $E\hat{D}C$] e [$B\hat{A}C$, $C\hat{A}B$]

4. 

Da un punto A si traccino [3, 4] semirette, su ciascuna si fissi un [*punto*, *vertice*]. Tracciati gli angoli [$E\hat{B}A$, $E\hat{A}B$], [$B\hat{A}C$, $C\hat{A}B$] e [$C\hat{A}D$, $C\hat{D}A$]. Notiamo che gli angoli [$E\hat{A}B$ e $B\hat{A}C$, $E\hat{A}B$ e $C\hat{D}A$] sono [*consecutivi*, *adiacenti*].

5. Se le rette r e s sono fra loro perpendicolari e le rette s e t sono fra di loro perpendicolari, anche le rette r e t sono fra loro perpendicolari? Giustificare la risposta. [No]
6. Se le rette r e s sono fra loro parallele e la retta t è perpendicolare a r, è perpendicolare anche a s? Giustificare la risposta. [Sì]
7. Se le rette r e s sono fra loro incidenti e le rette s e t sono fra loro incidenti, anche le rette r e t sono sempre fra loro incidenti? Giustificare la risposta. [No]

Lavoriamo insieme

Vogliamo semplificare la seguente espressione coinvolgente misure di gradi sessagesimali

$$[(12° 23′41″ + 21°13′40″) \cdot 2 – 10°24′13″] : 4.$$

Cominciamo a svolgere la somma all'interno delle parentesi, per il momento sommando grandezze dello stesso tipo: $[33° 36′81″ \cdot 2 – 10°24′13″] : 4 = [33° 37′21″ \cdot 2 – 10°24′13″] : 4$. Abbiamo trasformato in primi i secondi *eccedenti* i 60. Adesso svolgiamo la moltiplicazione.

$$[33° 37′21″ \cdot 2 – 10°24′13″] : 4 = [66° 74′42″ – 10°24′13″] : 4 = [67° 14′42″ – 10°24′13″] : 4.$$

Passiamo alla sottrazione: $[67° 14′42″ – 10°24′13″] : 4 = = 56° 50′29″ : 4$. Non ci rimane che svolgere l'ultima operazione: $56° 50′29″ : 4 = \approx 14° 12′37″$.

Livello 1

Effettuare le seguenti operazioni fra angoli

8. $25°13′14″ + 124°51′38″$; $14°32″ + 73°21′$; $23°41′ + 13°53″$ [150°4′52″; 87°21′32″; 36°41′53″]
9. $132°25″ + 74°49″$; $140°21″ + 32°48′$; $79°21″ – 34°15′$ [206°1′14″; 172°48′21″; 44°45′21″]
10. $139°23′ – 74°12″$; $145°21′3″ – 59°42′37″$; $175°13′ – 48°23′4″$ [65°22′48″; 83°38′26″; 126°49′56″]
11. $25°3″ – 24°15′46″$; $180° – 42°35′49″$; $24°51′13″ \cdot 12$ [44′17″; 137°24′11″; 298°14′36″]
12. $131°47″ \cdot 2$; $12°23′34″ \cdot 8$; $31°55′44″ \cdot 11$ [262°1′14″; 99°8′32″; 351°13′4″]

Livello 2

13. $234°15′6″ : 2$; $317°20″ : 4$; $251°10′ : 5$ [117°7′33″; 79°15′5″; 50°14′]
14. $125°48′9″ : 9$; $257°48″ : 12$; $258°46′ : 7$ [13°58′41″; 21°25′4″; 36°58′]
15. $37°48′21″ + 73°12′ + 39°23″$; $(23°4′7″ – 12°32′9″) \cdot 4$ [150°44″; 42°7′52″]
16. $[(35°41′12″ + 32°3′) \cdot 3 – 120°] : 5$ [16°37′48″]
17. $[(14°21′13″ + 21°13′12″) \cdot 3 – 73°] \cdot 2$ [67°26′30″]
18. $[(121°11″ – 7°3″) : 4 + 31°23′] \cdot 2 – 15°32′$ [104°14′4″]
19. $[(73°12′33″ + 4°11′) \cdot 3 + 130°7″] : 11$ [32°55′31″]
20. $\{[12°31′37″ \cdot 5 – (37°12″ + 15°13′)] \cdot 7 + 21°13′23″\} – 49°17′$ [44°50′34″]
21. $\{[77°21″ : 7 + (15°2′32″ – 7°2′) \cdot 3] \cdot 2 – 9°2′37″\} \cdot 4$ [244°2′44″]
22. $\{123°41′ – [12°13′ \cdot 3 + (21°7″ – 13°12′) \cdot 2]\} : 7$ [10°12′15″]
23. $\{74°13′ + [43°8″ – (131°7′ – 101°13″)] : 3\} \cdot 2 + 11°2″$ [170°1′36″]

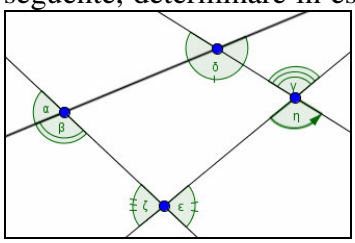
Lavoriamo insieme

Supponiamo di dividere l'angolo giro in 100 parti uguali, chiamando angolo centesimale ciascuna di queste parti, che a sua volta suddivideremo in 100 parti uguali e così via. Indichiamo con la scritta x^c, la misura di un angolo in gradi centesimali.

Un angolo misura x gradi centesimali. Se x è un numero intero, quale proprietà deve verificare affinché anche la sua misura in gradi sessagesimali sia ancora intera? Noi sappiamo, dalla definizione appena data, che $100^c = 360°$, quindi $x^c = \frac{100}{360°} \cdot x = \frac{5}{18°} \cdot x$. Pertanto la misura in gradi sessagesimali sarà ancora intera solo se x^c è un multiplo di 5. Così per esempio $90^c = \frac{18°}{\cancel{5}^{1}} \cdot \cancel{90}^{18} = 324°$.

Livello 1

24. La somma di due angoli acuti può essere: a) un angolo retto? b) Un angolo ottuso? c) Un angolo piatto? d) Un angolo giro? Giustificare le risposte. [Sì; Sì; No; No]

25. Prendendo a riferimento la figura seguente, determinare in essa tutte le eventuali coppie di angoli opposti al vertice, fra quelli segnati.  [ε e ζ; γ e η]
26. Due angoli opposti al vertice possono essere fra loro complementari? Se sì quando accade? [Quando misurano entrambi 45°]
27. Due angoli opposti al vertice possono essere fra loro supplementari? Se sì quando accade? [Se sono retti]
28. Due angoli opposti al vertice possono essere fra loro esplementari? Se sì quando accade? [Se sono piatti]
29. Quanto misura un angolo piatto nel sistema centesimale? Un angolo retto? Un angolo di 60°? [50; 25; 50/3]

Livello 2

30. Un angolo misura $x°$, con x numero naturale. Quale proprietà deve verificare x, affinché la sua misura in gradi centesimali sia rappresentata ancora da un numero naturale? [Multiplo di 18]
31. Quanto misura il complementare del supplementare di un angolo di 100°? [10°]
32. Quanto misura l'esplementare del complementare di un angolo di 75°? [335°]
33. Quanto misura l'esplementare del complementare del supplementare di un angolo di 130°? [320°]
34. Quanto misura l'esplementare del supplementare del complementare di un angolo di 50°? [220°]
35. Quanto misura il supplementare del complementare dell'esplementare di un angolo di 270°? [180°]
36. Quanto misura il complementare del supplementare dell'esplementare di un angolo di 200°? [70°]

Livello 3

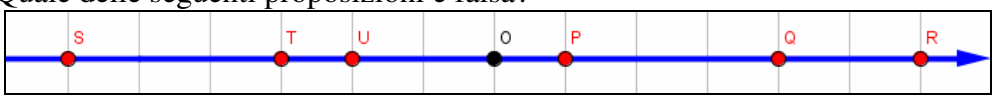
37. Un angolo misura quanto il complementare del suo supplementare. Quanto misura? [Impossibile]
38. Un angolo misura quanto la metà del complementare del suo supplementare. Quanto misura? [90°]
39. Un angolo misura quanto il doppio del supplementare del suo complementare. Quanto misura? [180°]
40. L'angolo α è il triplo di β, mentre il complementare di β è il triplo del complementare di α. Quanto misurano i due angoli? [22°30′; 67°30′]

Per la prova Invalsi

Lavoriamo insieme

Abbiamo un poligono convesso di 7 lati, quante diagonali ha?
Una diagonale è un segmento che unisce un vertice con un altro vertice a esso non adiacente. Da ogni vertice possiamo tracciare 4 diagonali, dato che non possiamo unire il punto con sé stesso, né con i due vertici adiacenti perché otterremmo dei lati e non delle diagonali. Quindi dovremmo avere $7 \cdot 4 = 28$ diagonali, solo che in tal modo conteremmo due volte una stessa diagonale. Infine la richiesta è 14.

1. (Invalsi 2007) Su una retta orientata, O è l'origine. I punti S, T, U, P, Q, R, sono immagini di numeri interi relativi. Quale delle seguenti proposizioni è falsa? [A]



A) T è il punto medio tra S e U B) S e R sono simmetrici rispetto ad O C) P è il punto medio tra U e Q D) P e U rappresentano numeri di segno opposto
2. Da ogni vertice di un triangolo quante diagonali possiamo tracciare? [0]
3. Tracciate tutte le diagonali di un esagono convesso, ciascuna quante delle altre ne incontra? [2]
4. La somma di un angolo con il proprio complementare e il proprio supplementare è 230°, quanto misura l'angolo? [40°]
5. La differenza fra metà del supplementare di un angolo e il doppio del proprio complementare è 15°, quanto misura l'angolo? [70°]

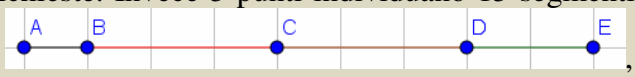
La sfida

1. *n* rette a due a due incidenti dividono il piano in quante regioni? $\left[\frac{n^2+n+2}{2}\right]$
2. α è *k* volte β, mentre il complementare di β è *k* volte il complementare di α. In che relazione sono i due angoli? $[\alpha = \beta]$

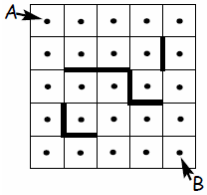
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

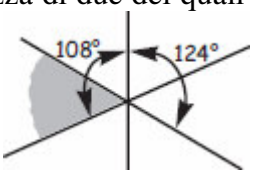
Davanti a ogni esercizio vi è un simbolo che si riferisce alla gara da cui è tratto.
AHSME = Annual High School Mathematics Examination K = Kangourou MT = Mathematics Teacher, rivista della NCTM

Lavoriamo insieme

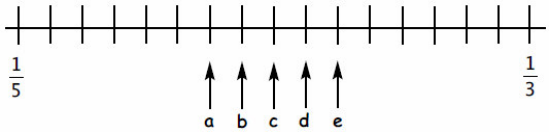
Vediamo un quesito assegnato ai Kangourou del 2008 nella categoria Cadet riservata agli studenti di Terza media e prima superiore.
Su una retta sono segnati dei punti. Alcune delle distanze tra di essi sono: 1 *cm,* 2 *cm,* 3 *cm,* 4 *cm,* 5 *cm,* 6 *cm,* 7 *cm,* 8 *cm,* 9 *cm. Qual è il minimo numero di punti che permette di realizzare questa condizione?*
Quattro punti *A, B, C, D* allineati individuano solo 6 segmenti: *AB, AC,AD, BC, BD, CD*: quindi non sono sufficienti a realizzare le 9 distanze richieste. Invece 5 punti individuano 15 segmenti. In particolare prendendo i punti come mostrato in figura 

, in cui ogni tacca misura 1 *cm*, abbiamo soddisfatto i requisiti richiesti.

1. (MT1993) I punti *A*, *B*, *C* e *D* giacciono sulla stessa retta, nell'ordine indicato. Se *AB* : *AC* = 1 : 3 e *BC* : *CD* = 4 : 1, calcolare *AB* : *CD*. [2]
2. (K2003) Una retta taglia una scacchiera 4x4 senza passare per il vertice di nessuna casella. Qual è il più grande numero di caselle (quadrati 1x1) che la retta può intersecare? A) 3 B) 4 C) 6 D) 7 E) 8 [D]
3. (K2003) Quattro segmenti non possono avere esattamente quanti punti di intersezione (cioè punti in cui si intersechino almeno due di essi)? A) 2 B) 3 C) 5 D) 6 E) 7 [E]
4. (K2003) Su una retta sono segnati da sinistra a destra i sei punti A, B, C, D, E, F nell'ordine in cui li abbiamo elencati. Se *AD* = *CF* e *BD* = *DF*, deve succedere necessariamente che [D]
   A) *AB* = *BC* B) *BC* = *DE* C) *BD* = *EF* D) *AB* = *CD* E) *CD* = *EF*
5. (K2006) In figura è rappresentato un quadrato suddiviso in 25 quadretti, in ciascuno dei quali è segnato il centro; con tratto più spesso sono segnati 3 ostacoli. 

Vogliamo andare da *A* a *B* passando da un centro all'altro solo per linee verticali e/o orizzontali, evitando gli ostacoli e per la via più breve. Quanti sono i cammini da *A* a *B* che rispettino tutte queste condizioni? [12]
6. (K2007) Sei diversi punti sono individuati su due rette parallele: quattro su una e due sull'altra. Quanti sono i triangoli che hanno per vertici i punti in questione? A) 18 B) 16 C) 12 D) 8 E) 6 [B]
7. (K2008) In figura sono rappresentate tre rette *a*, *b*, *c* che si intersecano in un punto, formando angoli l'ampiezza di due dei quali (in gradi) è indicata in figura. Quanti gradi misura l'angolo dipinto di grigio? 

A) 52 B) 53 C) 54 D) 55 E) 56 [A]

8. (K2009) In figura è rappresentato il segmento di retta numerica compreso tra le frazioni 1/5 e 1/3, suddiviso da tacche in segmenti di ugual lunghezza. Allora 1/4 corrisponde alla tacca indicata con quale delle cinque lettere segnate? 

[a]

Questions in English

Working together

This is a question was published in the issue of January 1997 of the magazine Mathematics Teacher.
How many degrees are in the acute angle formed by the hands of a clock at 2:20?
The hour hand[1] would be one-third of the way from 2 to 3, given that 20 is 1/3 of 60. the minute hand will be at 4. Hence the measure of the acute angle, in degrees, is given by

$$\frac{4-\left(2+\frac{1}{3}\right)}{\cancel{12}}\cdot\cancel{360}^{30}=\left(4-\frac{7}{3}\right)\cdot 30=\frac{5}{\cancel{3}}\cdot\cancel{30}^{10}=50$$

9. (AHSME1951) At 2:15 o'clock, the hour and minute hands of a clock form an angle of? [22,5°]
10. (AHSME1951) In connection with proof in geometry, indicate which one of the following statements is incorrect: A) Some statements are accepted without being proved; B) In some instances there is more than one correct order in proving certain propositions; C) Every term used in a proof must have been defined previously; D) It is not possible to arrive by correct reasoning at a true conclusion if, in the given, there is an untrue proposition; E) All the other are incorrect [E]
11. (AHSME1951) A total of 28 handshakes were exchanged at the conclusion of a party. Assuming that each participant was equally polite[2] toward all the others, the number of people present was? [8]
12. (AHSME1952) Given 12 points in a plane no three of which are collinear, the number of lines they determine is: A) 24 B) 54 C) 120 D) 66 E) None of these [D]
13. (AHSME1965) Line l2 intersects line l1 and line l3 is parallel to l1. The three lines are distinct and lie in a plane. The number of points equidistant from all three lines is: A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 8 [C]
14. (AHSME1984) When Dave walks to school, he averages 90 steps per minute, and each of his steps is 75 cm long. It takes him 16 minutes to get to school. His brother, Jack, going to the same school by the same route, averages 100 steps per minute, but his steps are only 60 cm long. How long does it take Jack to get to school? [18 minutes]

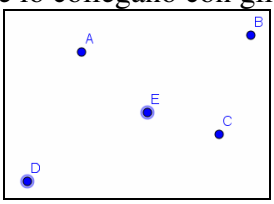
[1] Lancetta delle ore
[2] educato

Attività di recupero

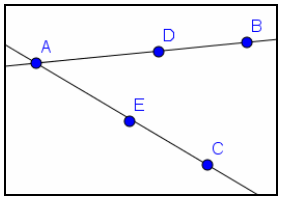
Postulati ed enti primitivi della geometria euclidea del piano. Le rette.

Fase 1: Osserva

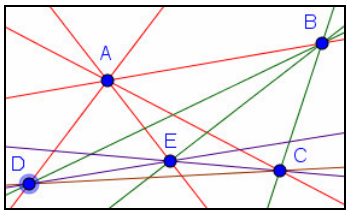
Per un punto passano infinite rette per due punti ne passa una sola, ciò significa che, fissato un punto a piacere, per ogni altro punto del piano passa una sola retta. Quindi se consideriamo i 5 punti in figura, per ciascuno di essi passano esattamente 4 rette che lo collegano con gli altri punti.



non è detto che queste rette siano tutte diverse, come mostrato nella seguente figura



Abbiamo quindi un minimo di 1 retta, se tutti i punti sono allineati fino a un massimo di 10 rette, se invece ciascuna coppia di punti appartiene a una retta diversa.



Adesso, tenuto conto dei precedenti esempi ti vengono proposte delle attività parzialmente compilate che tu devi completare

Fase 2: Completa …

Tracciamo 4 punti, questi possono appartenere minimo a _____ retta, e ciò accade quando sono _____
Se invece 3 stanno su una stessa retta e il quarto su un'altra, possiamo tracciare in generale _____ rette.
Abbiamo poi il caso in cui i punti sono a due a due su rette distinte, e in questo caso il totale di rette che contengono i punti è di _____
E infine mettiti alla prova svolgendo degli esercizi completi.

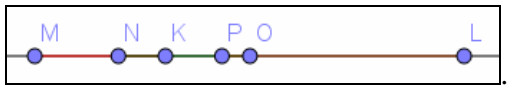
Fase 3: Prova!

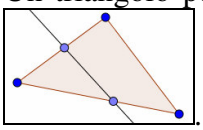
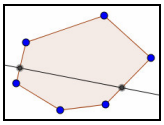
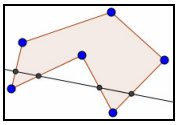
1. Tracciamo una retta e scegliamo su essa un punto, tracciamo da questo punto altre 5 rette, una retta che incontra tutte queste rette, quanti punti determina? [5]
2. Tracciamo due rette fra loro parallele e altre due fra loro parallele che incontrano le precedenti, quanti punti hanno in comune le rette, in totale? [4]
3. Tracciamo alcune rette fra loro parallele e due altre rette fra loro parallele che incontrano le altre in un totale di 16 punti, quante sono le rette, in totale? E se i punti fossero 15? [8; Impossibile]
4. Tracciamo due rette fra loro parallele e altre due fra loro incidenti che incontrano le precedenti, quanti punti hanno in comune le rette, in totale? [5]
5. Tracciamo alcune rette fra loro parallele e due altre rette fra loro incidenti che incontrano le altre in un totale di 25 punti, quante sono le rette, in totale? E se i punti fossero 26? [12; Impossibile]
6. Date tre rette che si incontrano a due a due, in quanti punti si incontrano in totale? [3]
7. Quante rette si incontrano a due a due in 10 punti in totale? [4]
8. Due rette fra loro parallele ed una terza retta che le incontra, quanti punti determinano? [2]

9. Date quattro rette a due a due fra loro parallele ed una quinta retta che le incontra tutte, quanti punti hanno in comune, a due a due, in totale? [8]
10. Scegliamo 3 punti su una retta e 3 su una a questa parallela, quanti sono in totale le rette che possiamo tracciare per 2 qualsiasi dei 6 punti? [11]
11. Su ciascuna di tre rette fra loro parallele scegliamo 3 punti, quanti sono in totale, al massimo le rette che possiamo tracciare per 2 qualsiasi dei 9 punti? [30]

Il concetto di isometria. Segmenti e poligoni.

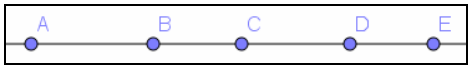
Fase 1: Osserva

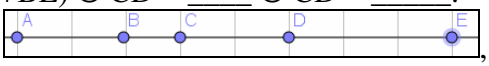
- In figura abbiamo tracciato alcuni segmenti allineati 

. L'intersezione fra MP e NL è evidentemente il segmento NP, invece la loro unione è il segmento ML. Abbiamo poi MP \ NL = MN, mentre NL \ MP = PL.
- Se il segmento AB è doppio del segmento CD, che è a sua volta triplo del segmento EF, è ovvio che il segmento AB è 6 volte EF.
- Un triangolo può essere incontrato da una retta in un massimo di due punti, come mostrato in figura.  . E ciò vale per ogni poligono convesso, come mostrato nel caso di un esagono.  Se invece il poligono è concavo, come in figura, i punti possono essere anche più di 2. 

Adesso, tenuto conto dei precedenti esempi ti vengono proposte delle attività parzialmente compilate che tu devi completare

Fase 2: Completa …

- Dati i segmenti in figura, 

vogliamo determinare (AD ∩ BE) ∪ CD. Abbiamo facilmente (AD ∩ BE) ∪ CD = ____ ∪ CD = _____.
- Con riferimento alla figura 

, in cui ogni tacca misura 1, possiamo dire che (AD Δ BE) \ (CE ∪ AD) misura _____
- Uniamo ogni vertice di un pentagono convesso, con gli altri, escludendo i lati già tracciati, otteniamo un totale di ____ segmenti. Questi si incontrano a due a due in un totale di __ punti.

E infine mettiti alla prova svolgendo degli esercizi completi.

Fase 3: Prova!

1. Su una retta scegliamo 6 punti in successione, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, ottenendo quanti segmenti possibili? Si tenga conto che un segmento ha per estremi due qualsiasi dei 6 punti. [15]
2. Con riferimento all'esercizio precedente, determinare (*AD* Δ *CF*) ; (*BE* ∪ *CF*); (*AC* \ *BE*) ; (*BF* ∩ *CE*). [*AC* ∪ *EF*; *BF*; *AB*; *CE*]
3. Con riferimento all'esercizio precedente, se i punti scelti distano ciascuno dal precedente 1, quanto misurano i risultati? [3; 4; 1; 2]

4. Su una retta scegliamo 6 punti in successione, A, B, C, D, E, F, in modo che B si trovi a 1 *cm* a destra di A, C a 2 *cm* a destra di B, e così via, aumentando ogni volta di 1 *cm* la distanza. Quanto misurano AD e BF? [7; 14]
5. Su una retta scegliamo 4 punti in successione, A, B, C, D, in modo che CD sia il doppio di AB, che a sua volta è il doppio di BC. Se AD misura 21 *cm*, quanto misura AB? [6 *cm*]
6. Da uno dei vertici di un esagono convesso tracciamo tutti i segmenti che lo uniscono agli altri vertici. Escludendo i lati già tracciati, quanti sono? [3]
7. Con riferimento al precedente quesito, facciamo lo stesso con il vertice consecutivo a quello già usato, i segmenti ottenuti si incontrano in un totale di quanti punti? [6]
8. Con riferimento al precedente quesito, la risposta cambia se i vertici scelti non sono consecutivi? Giustificare la risposta. [Sì, in questo caso possono essere 2 o 3]
9. Dato un pentagono convesso uniamo ciascuno dei vertici con tutti gli altri, i segmenti si uniscono determinando i vertici di un altro poligono convesso. Quanti lati ha? [5]
10. Dato un esagono convesso uniamo ciascuno dei vertici con tutti gli altri, i segmenti si incontrano in un totale di quanti punti? [15]

Concetto di angolo piano e sua misurazione in gradi sessagesimali

Fase 1: Osserva

- Vogliamo dividere un angolo giro in 12 parti uguali, quanto misurerà ciascuno di essi? Un angolo giro misura 360°, pertanto ciascuna delle parti uguali misurerà 360°:12 = 30°.
- Se volessimo dividere un angolo piatto in 11 parti uguali, avremmo un problema, dato che 180°:11 è un numero periodico semplice, $16,\overline{36}$. Possiamo allora dire che ciascun angolo misura circa 16,36°. Per essere più precisi possiamo usare primi e secondi. $0{,}36° = 0{,}36 \cdot 60' = 21{,}6' = 21' + 0{,}6 \cdot 60'' = 36''$. Pertanto ogni angolo misura circa 16°21′36″.
- La somma 72°54′28″ + 23°47′51″, formalmente si esegue sommando fra loro gli elementi omogenei, ossia gradi con gradi, primi con primi e secondi con secondi, ottenendo 95°101′79″. Però possiamo convertire gli "eccessi" di 60 in unità superiori, ottenendo così: 95°101′79″ = 95°102′19″ = 96°42′19″.

Adesso, tenuto conto dei precedenti esempi ti vengono proposte delle attività parzialmente compilate che tu devi completare

Fase 2: Completa …

Esegui le seguenti operazioni fra angoli.

- 19°13′47″ + 34°57′39″. Sommiamo i termini omogenei, ottenendo: _____, che possiamo anche semplificare in _____
- 62°14′24″ – 44°31′20″. Non ci sono problemi a sottrarre 20″ da 24″, ottenendo così ___″. Non è invece possibile sottrarre 31′ da 14′, quindi trasformiamo 1° in 60′, ottenendo 61°74′24″ – 44°31′20″, a questo punto il risultato sarà _____
- 18°34′57″ · 3. Moltiplichiamo per 3 ciascuna grandezza, ottenendo _____ quindi semplifichiamo eliminando gli eccessi di primi e secondi, ottenendo: _____

E infine mettiti alla prova svolgendo degli esercizi completi.

Fase 3: Prova!

1. Dividi un angolo retto in 6 parti uguali, quanto misura ciascuna di esse? [15°]
2. Dividi un angolo piatto in 13 parti uguali, quanto misura ciascuna di esse? [≈13°50′46″]
3. Dividi un angolo giro in 27 parti uguali, quanto misura ciascuna di esse? [≈13°20′]
4. Abbiamo diviso l'angolo giro in un certo numero di parti uguali, ciascuna di circa 8°22′20″. Quante sono le parti? [43]

5. Abbiamo diviso l'angolo piatto in tre parti, la prima doppia della seconda che a sua volta è tripla della terza. Quanto misurano le tre parti? [18°; 54°; 108°]
6. Esegui 24°18′33″ + 65°47′38″ [90°6′11″]
7. Esegui 46°22′37″ – 17°36′40″ [28°45′57″]
8. Esegui 21°6′41″ · 4 [84°26′44″]
9. Esegui 224°21′46″ : 12 [≈ 18°41′49″]
10. Esegui (34°51′26″ · 3) – (27°30′4″ : 5) [≈ 99°4′18″]
11. Esegui (48°32′10″ + 37°7′42″) · 3 – 57°31′28″ : 3 [≈ 237°49′7″]
12. Esegui [(9°24′31″ · 4) + 13°5′9″] : 5 [≈ 10°8′39″]

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito

http://mathinterattiva.altervista.org/volume_1_3.htm

3. Geometria del piano

3.2 La geometria del triangolo

Prerequisiti

- Nozioni di geometria euclidea: segmenti, rette, semirette, angoli e loro misurazione
- Insiemistica
- Nozioni di logica: implicazione e schemi deduttivi
- Corrispondenza biunivoca
- Movimento rigido

Obiettivi

- Utilizzare un linguaggio rigoroso
- Effettuare ragionamenti geometrici
- Riuscire a fornire controesempi
- Comprendere l'enunciato di un teorema
- Distinguere l'ipotesi dalla tesi
- Distinguere le ipotesi necessarie da quelle inutili nell'enunciato di un teorema
- Eseguire semplici deduzioni logiche
- Riconoscere i vari passi logici nella dimostrazione di un teorema, distinguendo i passi in cui vengono utilizzate le diverse ipotesi
- Provare la falsità di un teorema al quale viene a mancare una o più ipotesi
- Individuare nella realtà fisica oggetti a cui si possono associare enti geometrici
- Creare modelli geometrici per risolvere semplici problemi reali

Contenuti

- Criteri di isometria dei triangoli.
- Rette parallele tagliate da una trasversale. Classificazione dei triangoli rispetto agli angoli
- Classificazione dei triangoli rispetto ai lati. Segmenti e punti notevoli.

Parole Chiave

Angoli alterni – Angoli corrispondenti – Angoli coniugati – Altezza – Asse – Baricentro – Bisettrice – Cateto – Circocentro o circumcentro – Incentro – Ipotenusa – Mediana – Ortocentro – Triangolo acutangolo – Triangolo equilatero – Triangolo isoscele – Triangolo ottusangolo – Triangolo rettangolo – Triangolo scaleno

Simbologia

LAL Indica il I criterio di isometria dei triangoli (Lato – Angolo – Lato)
ALA Indica il II criterio di isometria dei triangoli (Angolo – Lato – Angolo)
LLL Indica il III criterio di isometria dei triangoli (Lato – Lato – Lato)

Criteri di isometria dei triangoli

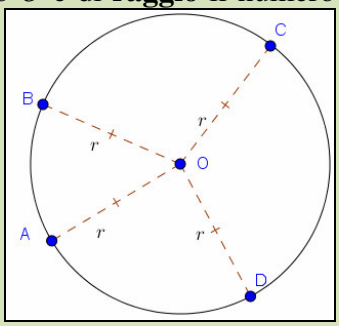
Il problema

Vogliamo sostituire il piano di appoggio in legno di un tavolino, che è a forma di triangolo, con uno in marmo. In pratica vogliamo costruire un triangolo uguale a uno dato (in effetti si tratta di un solido a sezione triangolare, ma noi semplifichiamo il problema considerando solo la sezione piana). Per essere sicuri di non sbagliare potremmo portare il vecchio piano d'appoggio al marmista, che provvederà a porlo sulla lastra di marmo da tagliare, ricalcandone i contorni. Questa operazione potrebbe essere complicata o perché il piano è rotto in diversi pezzi, o perché è particolarmente pesante o ingombrante. In questi casi quindi si preferisce portare le misure. Ma quali misure, quelle dei lati, degli angoli o di cos'altro? E quante ne dobbiamo portare, tutte, o ne bastano solo alcune?

Prima di affrontare il problema abbiamo l'esigenza di definire una figura geometrica che, per le sue proprietà, risulta fondamentale per la costruzione dei triangoli, e non solo di essi.

Definizione 1

Diciamo **circonferenza** di **centro** il punto O e di **raggio** il numero reale positivo r, l'insieme dei punti del piano che distano r da O.



Una circonferenza è ciò che si ottiene utilizzando lo strumento del compasso, che risulta, insieme alla riga non graduata uno dei due unici strumenti ammessi per la costruzione delle figure geometriche. L'importanza della circonferenza, e quindi del compasso, consiste nel fatto che mediante essa possiamo riportare e tracciare segmenti di uguale misura.

In un triangolo abbiamo tre lati e tre angoli interni: sono necessarie tutte e sei queste misure, o ne bastano di meno, o addirittura di più? Ossia come possiamo essere certi che non vi siano errori? Cerchiamo di vedere se è possibile determinare dei *criteri*, cioè dei teoremi che, dati due triangoli, possano dirci se sono uguali, conoscendo qualche coppia di elementi corrispondenti uguali.
Abbiamo già dato il concetto di figure uguali, legato strettamente al movimento rigido. È chiaro che un procedimento di questo tipo non è in generale agevole per stabilire se due date figure sono uguali.

Notazione 1

Per indicare che due triangoli ABC e DEF sono fra loro uguali scriveremo $ABC \overset{\Delta}{=} DEF$.

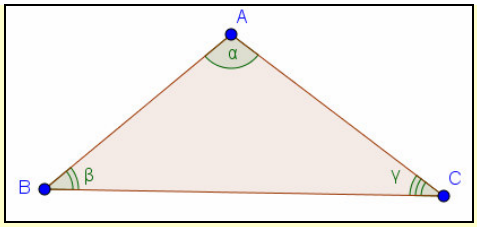
Cominciamo a dare qualche definizione.

Definizione 2

Dato un lato di un triangolo diciamo **angolo a esso opposto** l'angolo formato dagli altri due lati.

I concetti di lato e angolo a esso opposto sono intercambiabili, nel senso che si parla analogamente di lato opposto a un dato angolo di un triangolo.

Esempio 1

Nella figura seguente, 

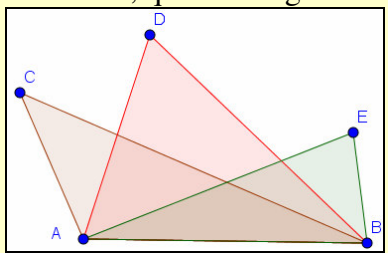
l'angolo opposto al lato AB è quello di vertice C, o meglio l'angolo $B\hat{C}A$ o γ come è indicato in figura. Naturalmente il lato opposto all'angolo $B\hat{C}A$ è il lato AB. Possiamo quindi stilare la seguente tabella di corrispondenza fra lati e angoli a essi opposti e viceversa. Una semplice regola da usare è quella secondo la quale, l'angolo opposto a un dato lato di un triangolo ha il vertice che si esprime con la lettera non presente nel lato e viceversa.

Vertice	Angolo	Lato opposto
A	$B\hat{A}C=\alpha$	BC
B	$C\hat{B}A=\beta$	CA
C	$B\hat{C}A=\gamma$	AB

Osserviamo che nel precedente esempio abbiamo indicato con lettere greche gli angoli, anzi abbiamo usato la corrispondenza per cui l'angolo di vertice A (prima lettera del nostro alfabeto) si indica con la prima lettera dell'alfabeto greco antico, cioè α (alfa), allo stesso modo l'angolo di vertice B (seconda lettera del nostro alfabeto) si indica con la seconda lettera dell'alfabeto greco antico, cioè β (beta), e infine quello di vertice C con la lettera greca γ (gamma). Ciò si fa spesso in geometria.
Torniamo alla risoluzione del nostro problema.
Se inviamo al marmista la misura di **un solo lato** è evidente che egli non sarà in grado di riprodurre il triangolo di partenza, perché su un lato si possono costruire infiniti triangoli.

Esempio 2

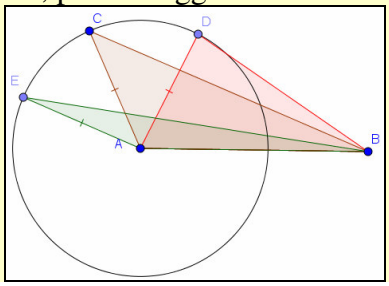
Nella figura seguente, abbiamo disegnato 3 triangoli, ABC, ABD, ABE, tutti fra loro non uguali, che però hanno un lato in comune, quello indicato con AB, quindi di uguale misura.



Ci rendiamo conto facilmente che, anche se comunichiamo la misura di un solo angolo, metteremo in seria difficoltà il nostro artigiano.
Supponiamo allora di comunicare la misura di **due lati**. Se non conosciamo la misura dell'angolo da essi determinato, il problema è ancora non risolvibile

Esempio 3

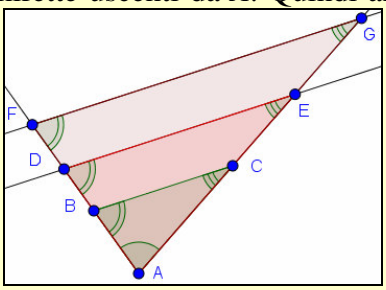
In figura abbiamo costruito tre triangoli, ABC, ABD, ABE, non uguali, che però hanno due lati, AB e quelli segnati allo stesso modo, uguali fra di loro, perché raggi di una stessa circonferenza.



Anche se conosciamo solo le misure di **due angoli** non riusciamo a determinare il triangolo.

Esempio 4

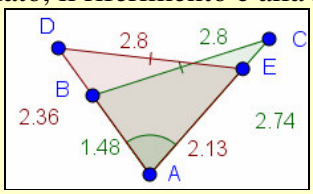
Conoscendo la misura di due angoli, abbiamo costruito tre triangoli, *ABC*, *ADE*, *AFG*, fra loro non uguali, con un vertice, *A*, e un angolo in *A* in comune. Questi triangoli hanno addirittura tutti e tre gli angoli uguali, che sono quelli segnati allo stesso modo. Questo fatto dovrebbe provarsi, ma per il momento lo consideriamo da un punto di vista intuitivo. Infatti i segmenti *BC*, *DE* ed *FG* sono fra loro paralleli per cui hanno la stessa inclinazione con le semirette uscenti da *A*. Quindi anche le misure degli angoli così formati saranno uguali.



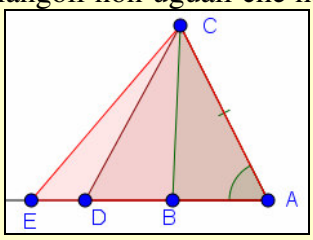
Adesso supponiamo di comunicare al marmista le misure di **un lato e un angolo** comunque disposto rispetto al lato.

Esempio 5

- Nel caso in cui l'angolo sia opposto al lato, il riferimento è alla figura che segue



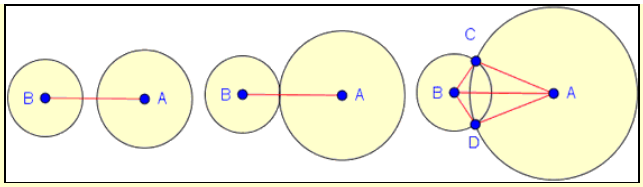
  nella quale i due triangoli *ABC* e *ADE*, non sono uguali, dato che *AD* e *AC*, hanno misure diverse da quelle di *AB* e *AC*, però hanno un angolo in comune, quello di vertice A, e un lato, opposto all'angolo, uguale, *BC* e *DE*.
- Nella figura successiva abbiamo triangoli non uguali che hanno uguali un angolo, di vertice *A*, e un lato, *AC*, a esso adiacente.



Abbiamo perciò stabilito che dobbiamo comunicare al marmista più di due misure. Dall'esempio 4 sappiamo che queste non devono essere solo le misure degli angoli.
Comunichiamo allora le misure dei **tre lati**.

Esempio 6

Una volta che l'artigiano conosce queste misure come può costruire il triangolo? Può sfruttare ancora una volta le proprietà della circonferenza. Quindi traccerà un segmento e poi punterà il compasso nel primo estremo con apertura lunga come il primo lato ripetendo questa costruzione nel secondo estremo con apertura data dal secondo lato. Si potranno avere tre situazioni che rappresentiamo in figura:



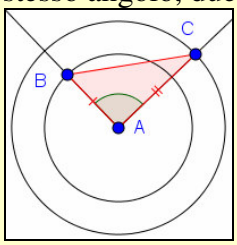
Come si vede o il triangolo non esiste, come nei primi due casi, oppure è perfettamente determinato. In realtà la terza figura sembra suggerirci che di triangoli ve ne siano due, ma in effetti è facile notare che essi sono l'uno simmetrico dell'altro, quindi in realtà sono lo stesso triangolo.

Il precedente esempio ci dice innanzitutto che la conoscenza della misura di tre lati è sufficiente a determinare il triangolo e poi che tre numeri qualsiasi non sempre costituiscono le misure dei lati di un triangolo. Infatti per esempio con due stuzzicadenti e un ombrello non possiamo costruire un triangolo, perché l'ombrello è troppo lungo rispetto agli stuzzicadenti, o se preferite, gli stuzzicadenti sono troppo corti, rispetto all'ombrello.
Quanto osservato nel precedente esempio ci permette di enunciare il seguente risultato.

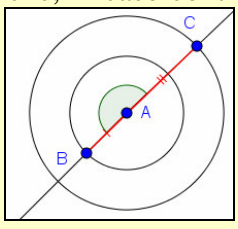
Teorema 1 (Disuguaglianza triangolare).
Tre segmenti possono rappresentare i lati di uno stesso triangolo solo se ciascuno di essi è minore della somma degli altri due.

Nel teorema abbiamo detto che un lato deve essere minore e non uguale alla somma degli altri, perché, se così fosse, saremmo nel caso della seconda figura, cioè i tre lati non *racchiuderebbero* alcuna superficie.
Passiamo adesso al caso in cui conosciamo le misure di **due lati e un angolo**, distinguendo il fatto che l'angolo sia quello compreso tra i due lati o quello adiacente a uno solo dei due lati.

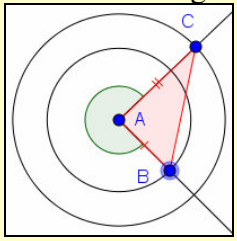
Esempio 7
Per costruire il triangolo disegniamo l'angolo e poi tracciamo, con centro nel vertice dello stesso angolo, due



circonferenze di raggio i lati noti, come esemplificato in figura.
È chiaro che stavolta, quali che siano le misure dei lati le circonferenze incontreranno sempre i lati in due punti, ottenendo quindi sempre due triangoli, che sono però fra loro uguali. Il vincolo stavolta deve essere posto sulla misura dell'angolo noto, che dovrà essere inferiore a un angolo piatto, perché, in caso contrario,



potrebbero accadere le cose strane che visualizziamo di seguito.



Se l'angolo è piatto i punti sono allineati. Come si vede dalla figura, se l'angolo supera un angolo piatto, il triangolo non si può costruire perché l'angolo non è interno a esso.

Quindi la misura di due lati e dell'angolo da essi compreso, purché inferiore a un piatto, determina il triangolo. L'esempio ci fa perciò enunciare quest'altro risultato.

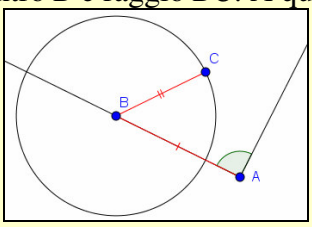
Teorema 2

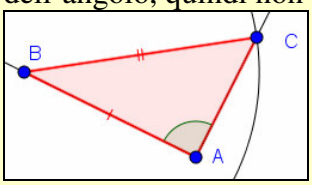
Ciascuno degli angoli interni di un triangolo misura meno di un angolo piatto.

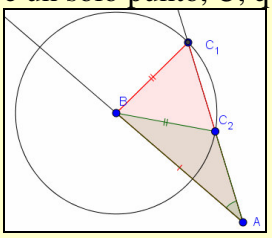
Vediamo adesso il caso in cui conosciamo le misure di due lati, e di uno dei due angoli adiacenti a uno solo dei due lati.

Esempio 8

Cominciamo con il costruire l'angolo noto (in figura è quello di vertice *A*) e il lato a esso adiacente (*AB* in figura). Adesso c'è il problema di costruire l'altro lato *BC*. Di esso infatti conosciamo la misura ma non l'angolo che forma con *AB*, non sappiamo quindi di quanto *inclinarlo*. Costruiamo allora la circonferenza di centro *B* e raggio *BC*. A questo punto sono possibili i tre casi mostrati di seguito.

- 

Ossia la misura di *BC* è tale che la circonferenza non incontra il secondo lato dell'angolo, quindi non esiste il triangolo;
- 

la misura di *AB* è tale che l'intersezione fra la circonferenza e il lato dell'angolo è un solo punto, *C*, quindi il triangolo cercato è solo uno: *ABC*;
- 

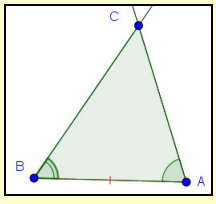
infine la circonferenza incontra il lato in due punti distinti C_1 e C_2, esistono perciò due triangoli ABC_1 e ABC_2, diversi fra loro, verificanti le richieste del problema (cioè tali che abbiano $\overline{BC_1} = \overline{BC_2}$, lato *AB* in comune e $\angle C_1\hat{A}B = \angle C_2\hat{A}B$).

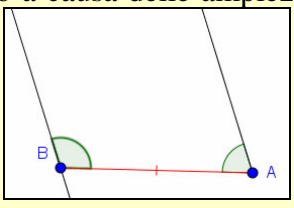
In conclusione la conoscenza di due lati e di uno degli angoli adiacenti a uno dei lati non è sufficiente a poter costruire il triangolo.

Infine consideriamo il caso in cui conosciamo la misura di due angoli e di uno dei due lati. Comunichiamo al marmista le misure di due angoli e del lato adiacente a entrambi.

Esempio 9

Stavolta il triangolo è univocamente determinato. Infatti basta far partire dagli estremi del lato dato due semirette tali da delimitare gli angoli dati. Se tali semirette si incontreranno in un punto il triangolo sarà determinato univocamente. È anche possibile che le semirette non si incontrino a causa delle ampiezze degli angoli. Approfondiremo in seguito questo fatto.





Possiamo allora riepilogare quanto abbiamo visto. Sono solo tre i casi nei quali il nostro artigiano riuscirà a costruire perfettamente il piano d'appoggio del nostro tavolino. Abbiamo quindi trovato tre proprietà che risultano condizioni necessarie e sufficienti a individuare un triangolo, ossia costituiscono dei criteri di isometria dei triangoli.

Teorema 3 (1° criterio di isometria dei triangoli).
Due triangoli che hanno ordinatamente uguali due lati e l'angolo da questi compreso, sono fra loro uguali.

Usando una maniera tipica dei libri di testo americani, questo criterio può chiamarsi brevemente LAL (lato-angolo-lato)

Teorema 4 (2° criterio di isometria dei triangoli).
Due triangoli che hanno ordinatamente uguali due angoli e il lato a questi adiacente, sono fra loro uguali.

Il precedente criterio si può chiamare brevemente ALA (angolo-lato-angolo). Si può dimostrare che il criterio ALA vale anche se i due angoli uguali non sono adiacenti al lato.

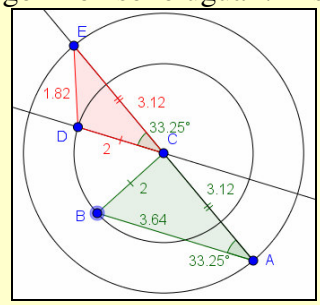
Teorema 5 (3° criterio di isometria dei triangoli).
Due triangoli che hanno ordinatamente uguali i tre lati, sono fra loro uguali.

Il precedente criterio si può chiamare brevemente criterio LLL (lato-lato-lato)

L'angolo storico
Tutte le proprietà che abbiamo visto finora sono descritte, in altro modo e con altri intenti, nel libro I degli *Elementi*. Questo libro si apre con 23 definizioni, che per Euclide sono piuttosto delle descrizioni a parole di ciò che intende dire; vi sono poi 5 postulati e 8 nozioni comuni, cioè proprietà generali, quali le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva dell'uguaglianza. In effetti non vi è accordo negli storici nel ritenere che tutte e 8 queste nozioni siano dovute a Euclide. Vi sono poi 48 proposizioni, che partono dalla costruzione di un triangolo equilatero (proposizione 1) all'inverso del teorema di Pitagora (proposizione 48). Questo libro tratta non solo di triangoli ma anche di quadrilateri.

Le dimostrazioni di questi criteri possono effettuarsi utilizzando le costruzioni da noi fornite. Stiamo però attenti a considerare che tutte le ipotesi dei tre criteri enunciati siano esatte.

Esempio 10
Vogliamo costruire due triangoli che hanno ordinatamente uguali due lati e un angolo, che per uno dei due triangoli è quello compreso tra i detti lati, mentre per l'altro triangolo è quello opposto a uno dei due lati dati. Facciamo vedere che in generale i triangoli non sono uguali. Disegniamo la seguente figura.



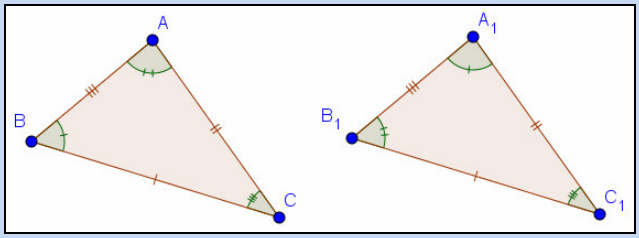
Per primo costruiamo il triangolo *ABC*. Passiamo alla costruzione del triangolo *CDE* che deve avere due lati e un angolo di uguali misura di quelli di *ABC*. Il vertice *E* è l'intersezione della circonferenza di raggio *AC* con la retta per *AC*. *CD* è parallelo ad *AB* in questo modo gli angoli risultano uguali; infine *D* è intersezione di tale parallela con la circonferenza di centro *C* e raggio *BC*. Abbiamo quindi costruito due triangoli, *ABC* e

CDE, che hanno rispettivamente uguali due lati ($\overline{BC} = \overline{CD}, \overline{AC} = \overline{CE}$) e un angolo ($C\hat{A}B = E\hat{C}D$). Questo però nel triangolo *ABC* è compreso tra *AB* e *AC*, mentre nel triangolo *CDE* è compreso tra *CE* e *CD*. Poiché i lati *AB* e *CE* in generale non sono uguali non possiamo dire che i due triangoli sono uguali, pur avendo due lati e un angolo uguali ma non *ordinatamente uguali*.

Il precedente esempio ci suggerisce quindi di individuare, nelle coppie di triangoli fra loro uguali, quali lati e quali angoli sono fra loro uguali.

Teorema 6

Dati due triangoli fra di loro uguali, l'isometria che fa corrispondere due lati uguali fa corrispondere anche gli angoli a essi opposti e viceversa.



Ipotesi 1. $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}, \overline{BC} = \overline{B_1C_1}, \overline{AC} = \overline{A_1C_1}$

Tesi 1. $\angle B\hat{C}A = \angle B_1\hat{C}_1A, \ \angle C\hat{A}B = \angle C_1\hat{A}_1B_1, \ \angle A\hat{B}C = \angle A_1\hat{B}_1C_1$

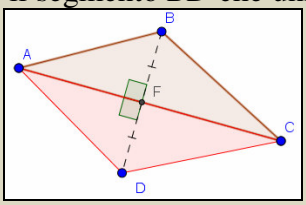
Ipotesi 2. $\angle B\hat{C}A = \angle B_1\hat{C}_1A, \ \angle C\hat{A}B = \angle C_1\hat{A}_1B_1, \ \angle A\hat{B}C = \angle A_1\hat{B}_1C_1$

Tesi 2. $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}, \overline{BC} = \overline{B_1C_1}, \overline{AC} = \overline{A_1C_1}$

Dimostrazione. Proviamo il primo teorema, lasciando l'inverso per esercizio.
I criteri di isometria dei triangoli sono condizioni necessarie e sufficienti, quindi non solo se due triangoli verificano uno dei tre criteri sono fra loro uguali, ma se sono uguali debbono soddisfare tutti e tre i criteri. Ma allora ai nostri triangoli possiamo applicare il primo criterio di isometria.
Ciò significa che, poiché $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$ e $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$, gli angoli compresi tra questi lati devono essere uguali, cioè $\angle C\hat{A}B = \angle C_1\hat{A}_1B_1$. Ragionando in modo analogo con le altre coppie di lati uguali dimostreremo la tesi rimanente.

Verifiche

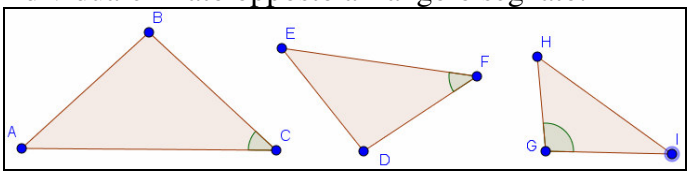
Lavoriamo insieme

In figura il triangolo *ABC* e il triangolo *CDA* hanno il lato *AC* in comune e il segmento *BD* che unisce i loro vertici è diviso dal lato *AC*, a esso perpendicolare, in due segmenti uguali, 

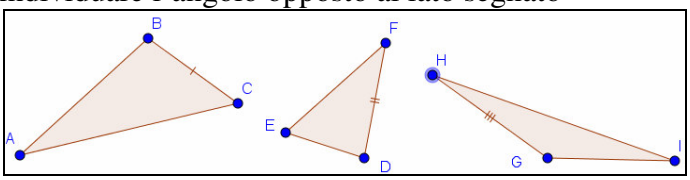
vogliamo provare che anche i triangoli sono uguali.
Consideriamo i triangoli *ABF* e *DAF*. Essi hanno in comune il lato *AF*, inoltre hanno entrambi un angolo retto, e i lati *BF* e *FD* fra loro uguali. Quindi sono uguali per LAL. Ragionando in modo del tutto analogo proviamo che anche i triangoli *FBC* e *DFC* sono uguali. Ma l'unione di figure uguali sono figure uguali, quindi abbiamo dimostrato quanto voluto.

Livello 1

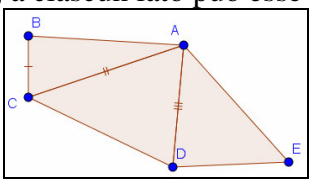
1. Nelle seguenti figure individuare il lato opposto all'angolo segnato.



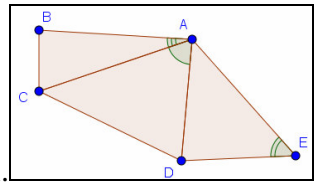
2. Nelle seguenti figure individuare l'angolo opposto al lato segnato

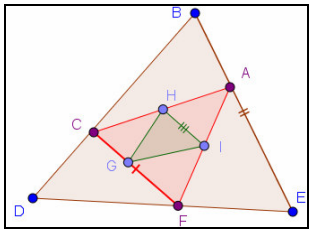


3. Nei triangoli della seguente figura individuare gli angoli opposti ai lati segnati, a ciascun lato può essere opposto più di un angolo, a seconda del triangolo considerato.

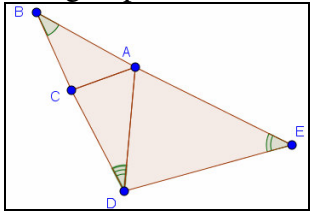


4. Nei triangoli della seguente figura individuare i lati opposti agli angoli segnati.

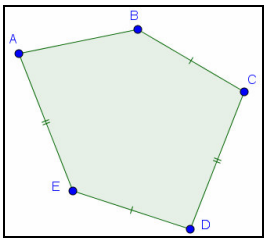


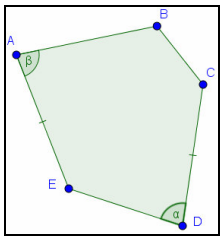


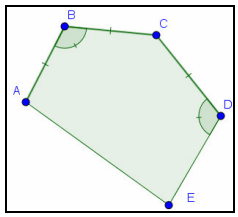
5. Nella seguente figura individuare gli angoli opposti ai lati segnati ed ispessiti.
6. Nella seguente figura individuare i lati opposti agli angoli segnati. Alcuni di tali angoli possono essere considerati riferiti a più di un triangolo.

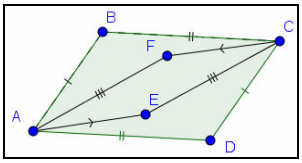


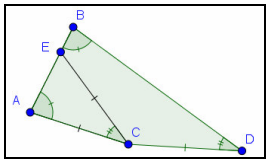
7. Le seguenti figure sono associate a certe proprietà geometriche. In esse simboli uguali riferiti a enti geometrici della stessa natura indicano che essi sono fra loro uguali. Scrivere le ipotesi relative a tali proprietà.

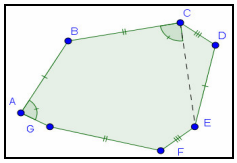
a) 

b) 

c) 

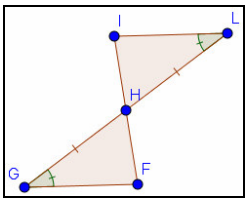
d) 

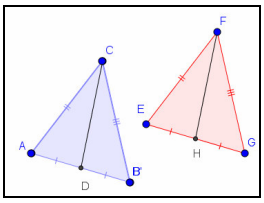
e) 

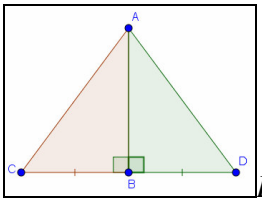
f) 

Livello 2

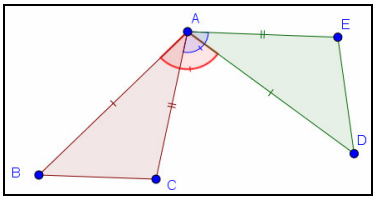
Nelle figure seguenti elementi omogenei segnati allo stesso modo sono fra loro uguali, provare quanto richiesto

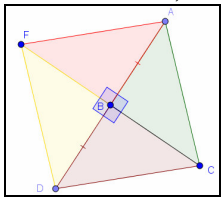
8. 

$\overline{IH} = \overline{FH}$; 

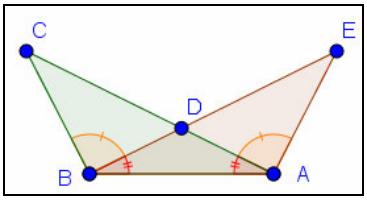
$\overline{CD} = \overline{FH}$; 

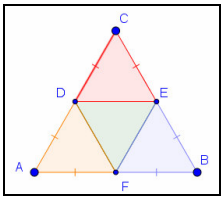
$\overset{\Delta}{BCA} = \overset{\Delta}{BAD}$

9. 

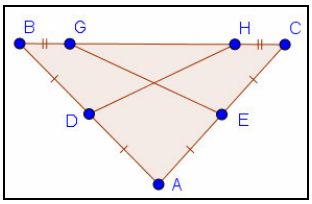
$\overset{\Delta}{BAC} = \overset{\Delta}{DAE}$; 

$\overset{\Delta}{ACB} = \overset{\Delta}{CDB} = \overset{\Delta}{DFB} = \overset{\Delta}{BFA}$

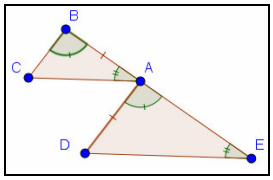
10. 

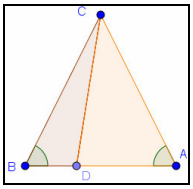
$\overline{AC} = \overline{BE}$; 

$\overset{\Delta}{ADF} = \overset{\Delta}{DCE} = \overset{\Delta}{DEF} = \overset{\Delta}{EBF}$

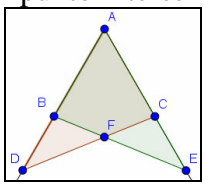
11. 

$\overline{GE} = \overline{DH}$

12. I due triangoli ABC e ADE in figura ovviamente non sono fra loro uguali, eppure hanno rispettivamente un lato ($\overline{AB} = \overline{AD}$) e due angoli ($\angle B\hat{A}C = \angle A\hat{E}D, \angle C\hat{B}A = \angle D\hat{A}E$) fra loro uguali. Come è possibile? Spiega. 

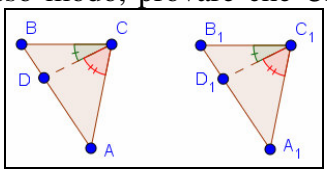
13. Usando la figura provare che è falso affermare che sono uguali due triangoli che hanno uguali due lati e l'angolo opposto a uno di essi. 

14. Dato un angolo di vertice *A*, si scelgano due punti, *B* e *D*, su un lato dell'angolo e altri due punti, *C* ed *E* sull'altro lato, in modo che si abbia $\overline{AB} = \overline{AC}, \overline{AD} = \overline{AE}$. Provare che i triangoli *ABE* e *ACD* sono fra loro uguali. Detto poi *F* il punto intersezione di *BE* e *CD*, provare che sono uguali anche i triangoli *BDF* e *CFE*.

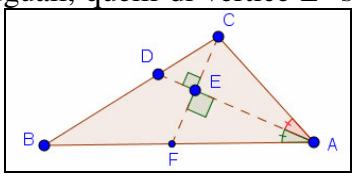


Livello 3

15. Dato un quadrato *ABCD*, sul suo lato *AB* si consideri il punto *E* e si congiunga con *D*, sia *F* l'intersezione della perpendicolare ad *ED* per *D* e il prolungamento di *BC*. Se $\overline{DE} = 1$, determinare la misura di *DF*. [1]
16. Provare che non sono fra loro uguali due triangoli che hanno uguali due lati e non uguale l'angolo compreso tra detti lati.
17. Utilizzando il risultato enunciato nell'esercizio precedente provare il criterio LLL.
18. Provare che triangoli uguali hanno uguali le altezze condotte dai vertici corrispondenti. Ricordiamo che chiamiamo altezza condotta da un vertice il segmento condotto perpendicolarmente al lato opposto o al suo prolungamento.
19. I triangoli in figura sono uguali, così come gli angoli indicati allo stesso modo, provare che *CD* e C_1D_1, sono uguali. Una ipotesi non è ben esplicitata: quale?)

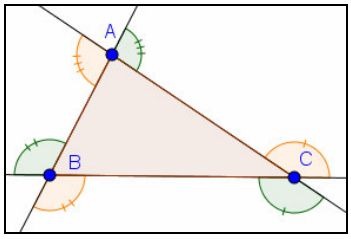


20. Nel triangolo *ABC* in figura gli angoli segnati allo stesso modo sono uguali, quelli di vertice *E* sono retti. Provare che $\overline{CE} = \overline{EF}$.



Rette parallele tagliate da una trasversale e classificazione dei triangoli rispetto agli angoli

Finora abbiamo parlato di angoli di un triangolo, sottintendendo che fossero gli angoli interni, ciascuno dei quali ha per vertice un vertice del triangolo e per lati le semirette che contengono i lati del triangolo uscenti da esso. Possiamo però parlare anche degli angoli esterni, ciascuno dei quali ha per vertice un vertice del triangolo e per lati la semiretta di un lato e l'opposta di quella dell'altro lato consecutivo, come quelli evidenziati nella figura seguente.

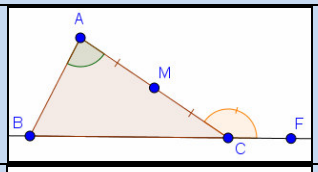
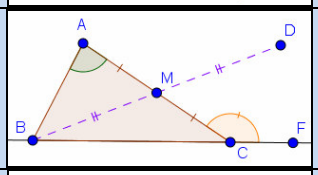
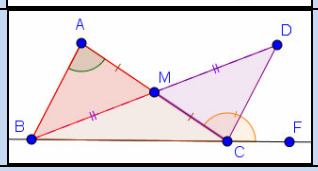
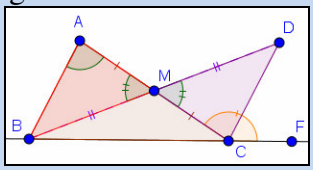


Come si vede, gli angoli esterni relativi a ciascun angolo interno possono segnarsi in due modi, ma essi risulterebbero opposti al vertice e perciò fra loro uguali.
Vi è una relazione fra gli angoli esterni e quelli interni? Certamente ve ne è una fra gli angoli esterni e interni relativi allo stesso vertice, dato che essi sono supplementari, c'è però anche una relazione fra gli angoli interni e quelli esterni non adiacenti.

Teorema 7

In un triangolo, ciascun angolo esterno è maggiore di ognuno degli angoli interni non adiacenti a esso.

Ipotesi: $A\hat{C}F$ è un angolo esterno del triangolo ABC *Tesi*: $\angle A\hat{C}F > \angle C\hat{A}B$; $\angle A\hat{C}F > \angle A\hat{B}C$

SCHEMA DIMOSTRATIVO			
PASSO	AZIONE	CONSEGUENZA	GIUSTIFICAZIONE
1	Costruiamo il punto medio M di AC, cioè il punto che divide il segmento in due parti uguali.		
2	Prolunghiamo BM dalla parte di M, in modo da ottenere un segmento MD uguale a BD.		
3	Costruiamo i triangoli AMD e CMD.		
4	Confrontiamo i detti triangoli.	Sono uguali. 	Per LAL. Infatti hanno • $\overline{AM} = \overline{MC}$, perché M è punto medio di AC. • $\overline{BM} = \overline{ME}$, per costruzione. • $\angle A\hat{M}B = \angle C\hat{M}D$, perché angoli opposti al vertice.
5	Consideriamo $B\hat{A}M$ e $D\hat{C}M$.	Sono uguali.	Per il teorema 6.
6.	La tesi.	$\angle B\hat{A}C = \angle B\hat{A}M = \angle D\hat{C}M < \angle A\hat{C}F$	Perché l'angolo esterno contiene l'angolo $D\hat{C}M$

In modo analogo si prova che l'angolo esterno è maggiore anche dell'altro angolo interno non adiacente a esso, quello di vertice B.

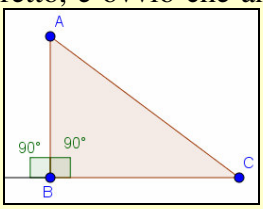
Dal precedente teorema si ha la seguente ulteriore ovvia proprietà.

Corollario 1

Un triangolo non può avere più di un angolo retto.

Esempio 11

A proposito del triangolo con un angolo interno retto, è ovvio che anche il relativo angolo esterno è retto, dato che i due angoli sono fra loro supplementari.



Vogliamo dire qualcosa di più degli angoli interni di un triangolo e per farlo abbiamo bisogno di esaminare prima qualche proprietà delle rette parallele, anche per dimostrare alcuni fatti che finora abbiamo considerato solo da un punto di vista intuitivo.
Ricordiamo che due rette si dicono parallele se non hanno punti in comune e giacciono sullo stesso piano. Consideriamo gli otto angoli formati da due rette parallele tagliate da una terza retta.

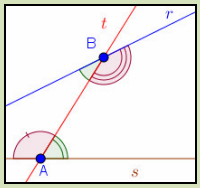
Definizione 3

Date due rette, una terza retta che le incontra entrambe in punti diversi si chiama retta **trasversale** rispetto alle precedenti.

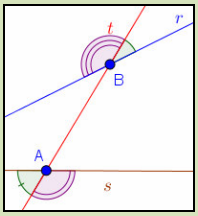
Definizione 4

Date due rette *r* e *s*, tagliate da una trasversale *t*, chiamiamo (le coppie di angoli hanno lo stesso colore)

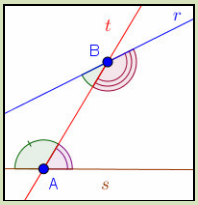
- angoli **alterni interni** quelli che sono contenuti fra *r* e *s* e si trovano da parti opposte rispetto a *t*.



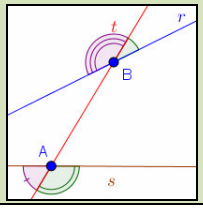
- angoli **alterni esterni** quelli che sono contenuti al di fuori della striscia limitata da *r* e *s* e si trovano da parti opposte rispetto a *t*.



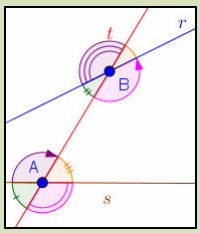
- angoli **coniugati interni** quelli che sono contenuti fra *r* e *s* e si trovano dalla stessa parte rispetto a *t*.



- angoli **coniugati esterni** quelli che sono al di fuori di *r* e *s* e si trovano dalla stessa parte rispetto a *t*.



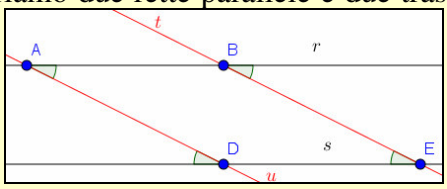
- angoli **corrispondenti** quelli che sono uno interno e uno esterno rispetto alla striscia limitata da r e s e si trovano dalla stessa parte rispetto a t.



Parleremo allora di coppie di angoli alterni interni e di coppie di angoli alterni esterni. Non esiste un angolo alterno interno o esterno, ma due angoli sono fra loro alterni interni o alterni esterni.

Esempio 12

Se consideriamo due rette parallele e due trasversali a esse, fra loro anche parallele, avremo diverse coppie di angoli.



In figura abbiamo tracciato 4 angoli che sono rispettivamente alterni interni (di vertici A e D rispetto alle parallele r ed s tagliate da u; di vertici B ed E rispetto alle parallele r ed s tagliate da t); o corrispondenti (di vertici A e B rispetto alle parallele t ed u tagliate da r; di vertici D ed E rispetto alle parallele t ed u tagliate da s).

Adesso dobbiamo enunciare un postulato che è stato oggetto di discussione per secoli e che è noto come *quinto postulato della geometria euclidea* perché questo è il posto che occupava nell'elenco dei postulati di Euclide.

Quinto postulato della geometria euclidea.

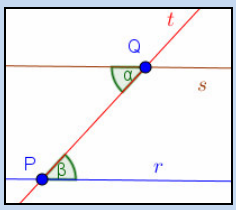
Dato un punto P e una retta r che non lo contiene, esiste ed è unica la retta per P parallela a r.

Il postulato sembra intuitivo e, tenuto conto che l'analogo risultato per le rette perpendicolari è stato provato, sembrerebbe anch'esso dimostrabile. Ciò non è possibile. Usando tale postulato dimostreremo un risultato relativo alle rette parallele tagliate da una trasversale.

Teorema 8

Condizione necessaria e sufficiente affinché due rette siano parallele è che tagliate da una trasversale verifichino almeno una delle seguenti proprietà

- formino una coppia di angoli alterni interni o esterni fra loro uguali;
- formino una coppia di angoli coniugati interni o esterni fra loro supplementari;
- formino una coppia di angoli corrispondenti fra loro uguali.



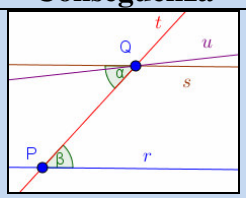
Dimostrazione. Proviamo il teorema nel primo caso. Ci riferiamo alla seguente figura

Condizione sufficiente. *Ipotesi*: $\alpha = \beta$ *Tesi*: $s \parallel r$

Schema dimostrativo			
Passo	**Azione**	**Conseguenza**	**Giustificazione**
1	Ragioniamo per assurdo, supponendo che le rette r e s non siano parallele.	Determiniamo l'intersezione T delle rette r e s.	

2	Costruiamo il triangolo PQT	Assurdo.	α è angolo interno al triangolo PQT, β angolo esterno allo stesso triangolo non adiacente ad α.

Condizione necessaria. *Ipotesi*: $s \parallel r$ *Tesi*: $\alpha = \beta$

Schema dimostrativo			
Passo	**Azione**	**Conseguenza**	**Giustificazione**
1	Ragioniamo per assurdo, supponendo $\alpha \neq \beta$, per esempio $\beta > \alpha$	 Esiste una retta u che taglia β in due parti in modo che una di esse sia uguale ad α.	Per il postulato di continuità.
2	Consideriamo le rette u e r.	Sono parallele.	Per la condizione sufficiente di questo teorema, dato che determinano una coppia di angoli alterni interni uguali.
3	Consideriamo le rette u e s.	Sono due parallele a r condotte da uno stesso punto Q.	Assurdo perché contraddiciamo il quinto postulato.

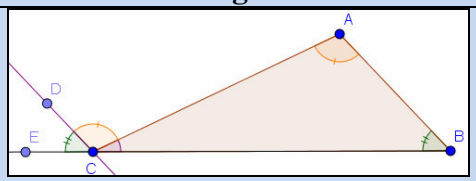
Esempio 13

In relazione all'esempio precedente possiamo perciò dire che i 4 angoli segnati erano tutti fra loro uguali. Infatti $\angle\hat{A} = \angle\hat{D}$ perché alterni interni, ma $\angle\hat{D} = \angle\hat{E}$ perché corrispondenti, quindi per transitività $\angle\hat{A} = \angle\hat{E}$. Inoltre $\angle\hat{B} = \angle\hat{E}$, perché alterni interni, quindi, sempre per transitività $\angle\hat{A} = \angle\hat{B}$

Possiamo adesso caratterizzare i triangoli in relazione ai loro angoli interni.

Teorema 9

La somma degli angoli interni di un triangolo equivale a un angolo piatto.

Schema dimostrativo			
Passo	**Azione**	**Conseguenza**	**Giustificazione**
1	Dal vertice C tracciamo la retta r parallela al lato AB.	 Abbiamo suddiviso l'angolo piatto formato da $B\hat{C}A$ e dal proprio angolo esterno, in tre angoli	
2	Consideriamo $C\hat{A}B$ e $D\hat{C}A$	Sono uguali.	Perché angoli alterni interni rispetto alla parallele CD e AB, tagliate dalla trasversale AC.
3	Consideriamo $A\hat{B}C$ e $D\hat{C}E$	Sono uguali.	Perché sono angoli corrispondenti rispetto alla parallele DC e AB, tagliate dalla trasversale EB.
4	Sommiamo gli angoli interni di ABC.	Otteniamo un angolo piatto.	$\angle A\hat{B}C + \angle B\hat{C}A + \angle C\hat{A}B =$ $= \angle D\hat{C}E + \angle D\hat{C}A + \angle C\hat{A}B = 180°$

Esempio 14

Dal precedente corollario segue quindi che se un triangolo ha un angolo retto, ha gli altri due angoli fra loro complementari.

Dalla dimostrazione del precedente teorema si evince immediatamente la validità del seguente risultato.

Corollario 2

In un triangolo un angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti a esso.

A questo punto siamo in grado di classificare i triangoli in base ai loro angoli.

Definizione 5

Un triangolo che ha
- tutti gli angoli interni acuti si dice **acutangolo**;
- che ha un angolo interno retto si dice **rettangolo**;
- che ha un angolo interno ottuso si dice **ottusangolo**.

È ovvio che in un triangolo rettangolo, per il teorema 7, il lato opposto all'angolo retto è maggiore di ciascuno degli altri due.

Definizione 6

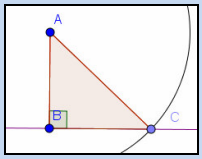
Il lato maggiore di un triangolo rettangolo si chiama **ipotenusa**, gli altri due lati si chiamano entrambi **cateti**.

Che cosa significa?

Cateto. Dal greco *kàthetos* che vuol dire linea perpendicolare mandata giù.
Ipotenusa. Dal greco *hypotheinusa* che significa linea che tende sotto. Euclide chiamò l'ipotenusa *lato opposto all'angolo retto*. Fu poi Erone a indicarla con tale nome e a chiamare gli altri due lati *cateti*.

Per i triangoli rettangoli i tre criteri di isometria possono essere riassunti in uno solo.

Teorema 10

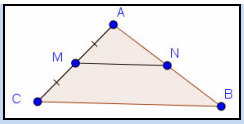
Due triangoli rettangoli che hanno rispettivamente uguali due lati o un lato e un angolo acuto sono fra loro uguali.
Dimostrazione
Proponiamo solo il caso in cui i triangoli hanno due lati uguali, lasciando il resto per esercizio.
- Se i lati sono i cateti, allora i triangoli sono uguali per LAL, dato che i cateti contengono in entrambi i casi l'angolo retto.
- Se invece abbiamo un cateto e l'ipotenusa, la seguente costruzione ci permette di determinare il triangolo rettangolo 

Conosciamo la misura del cateto AB, tracciamo la perpendicolare a esso, e poi la circonferenza di centro A e raggio AC, che è la misura dell'ipotenusa. Questa circonferenza deve incontrare la perpendicolare ad AB, perché l'ipotenusa è maggiore del cateto.

Vale anche quest'altro importante risultato.

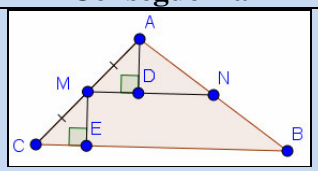
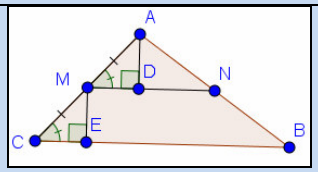
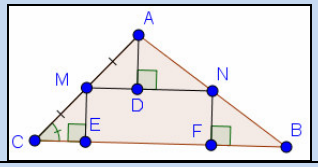
Teorema 11

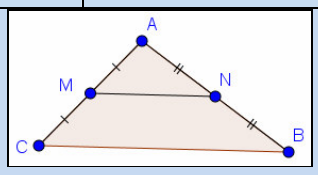
In un triangolo il segmento che unisce i punti medi di due lati è parallelo al terzo lato e viceversa.
Dimostrazione



Ipotesi: $\overline{AM} = \overline{MC}$, $MN \,//\, BC$ *Tesi*: $\overline{AN} = \overline{NB}$

Schema dimostrativo

Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Tracciamo le perpendicolari da A a MN e da M a BC.	 Otteniamo i triangoli rettangoli ADM e MEC	
2	Consideriamo i triangoli ADM e MEC	 Sono uguali.	Per il criterio di isometria dei triangoli rettangoli, perché hanno uguali, l'ipotenusa per ipotesi e gli angoli di vertici M e C perché corrispondenti rispetto alle parallele MN e BC tagliate da AC.
3	Consideriamo AD e ME	Sono uguali.	Per il passo precedente.
4	Tracciamo la perpendicolare a BC da N.	Otteniamo il triangolo rettangolo NBF. 	
5	Consideriamo AD e NF.	Sono uguali per la proprietà transitiva	$\overline{AD} = \overline{ME} = \overline{NF}$, la seconda uguaglianza perché distanza delle parallele MN e BC.
6	Consideriamo AND e NBF	Sono uguali per il criterio di isometria dei triangoli rettangoli	• $\overline{AD} = \overline{NF}$, per il passo precedente; • $\angle A\hat{N}D = \angle N\hat{B}F$, perché corrispondenti rispetto alle parallele MN e BC tagliate da AB.
7	Consideriamo AN e NB.	Sono uguali.	Perché ipotenuse di triangoli rettangoli uguali.

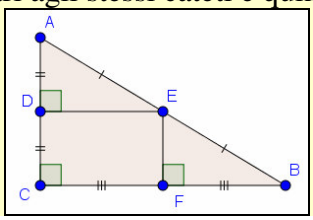


Ipotesi: $\overline{AM} = \overline{MC}$, $\overline{AN} = \overline{NB}$ *Tesi*: $MN \,//\, BC$

Supponiamo per assurdo che i segmenti non siano paralleli. Allora esiste $P \in AB$ con $P \neq N$, per cui $AP \,//\, BC$. Ma allora per la dimostrazione precedente, P è punto medio di AB. Ciò è impossibile perché un segmento ha un solo punto medio.

Esempio 15

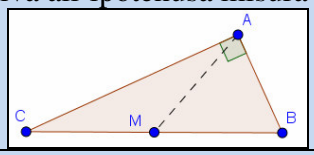
Per il precedente risultato possiamo dire che i segmenti che uniscono il punto medio di un cateto con il punto medio dell'ipotenusa sono perpendicolari agli stessi cateti e quindi determinano due triangoli rettangoli.

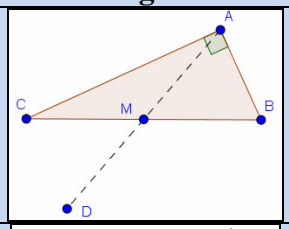
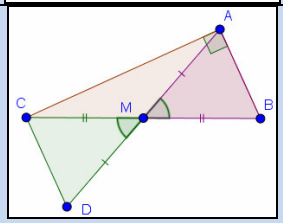


Vale un altro importante risultato sui triangoli rettangoli.

Teorema 12

In un triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa misura quanto metà dell'ipotenusa.



Schema dimostrativo			
Passo	**Azione**	**Conseguenza**	**Giustificazione**
1	Prolunghiamo AM dalla parte di M, fino ad ottenere il segmento uguale MD.		
2	Consideriamo i triangoli MDC e ABM.	 Sono uguali per LAL.	Hanno uguali i lati segnati ugualmente, per costruzione. Gli angoli sono opposti al vertice.
3	Siano i lati AB e CD. E gli angoli $M\hat{A}B$ e $M\hat{D}C$.	Sono uguali.	Per il passo precedente.
4	Siano AB e CD.	Sono paralleli.	Perché $M\hat{A}B$ e $M\hat{D}C$ sono angoli alterni interni rispetto alla trasversale AD.
5	Consideriamo $D\hat{C}A$.	È retto.	Per il passo precedente.
6	Siano i triangoli ADC e ABC.	Sono uguali per il criterio sui triangoli rettangoli	AC in comune e gli altri cateti uguali per i punti precedenti.
7	Consideriamo BC e AD.	Sono uguali.	Per il passo precedente, quindi abbiamo la tesi.

L'angolo storico

Il cosiddetto quinto postulato della geometria euclidea è il più controverso sin da quando è stato enunciato e almeno fino alla fine del secolo XIX. Dobbiamo dire intanto che la sua "formulazione" originale è la seguente:

Se in un piano una retta, intersecando due altre rette, forma con esse, da una medesima parte, angoli interni la cui somma è minore di due angoli retti, allora queste due rette indefinitamente prolungate finiscono con l'incontrarsi dalla parte detta.

Come si vede un'enunciazione molto complicata, in cui si mette in risalto il fatto che se una "trasversale" incontra due rette con angoli alterni interni non uguali allora le rette non sono parallele. Cioè quello che noi abbiamo considerato un teorema.

Vi è da dire che da sempre si è avuta l'impressione che il V postulato fosse "anomalo", certamente diverso dagli altri quattro (che ricordiamo dicono: *che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto a ogni altro punto; che una retta terminata si possa prolungare continuamente in linea retta; che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e ogni distanza; che tutti gli angoli retti siano uguali fra loro*), per moltissimi motivi. Intanto lo stesso Euclide è refrattario ad usarlo, infatti nei 48 teoremi del primo libro, lo usa per la prima volta nel n. 29 (quello che afferma: *Una trasversale determina su due parallele angoli alterni interni uguali*) e poi nel 30, e in quelli dal 32 al 48.

Quanto abbiamo detto innesca la più lunga "sfida" che abbia mai interessato la storia delle Scienze, centinaia di matematici di tutti i tempi si sono affannati a cercare di provare che il V postulato non è tale, ma che può essere derivato dagli altri quattro. Tutti i tentativi sono stati veni perché hanno fatto diventare il detto postulato un teorema ma al suo posto ne hanno messo uno che lo equivale.

Di seguito proponiamo solo alcuni dei postulati sostitutivi, cioè quelli che riguardano questioni che finora abbiamo trattato. Li riportiamo dal libro "La rivoluzione non euclidea", di R. Trudeau, stampato per la prima volta in Italia nel 1991 da Boringhieri. Fra parentesi indichiamo, ove sia noto, l'autore che lo ha enunciato.

- *Rette parallele sono equidistanti* (Posidonio, I sec. a. C.)
- *La distanza fra due rette infinite parallele rimane sempre minore di una distanza fissata*. (Proclo V sec. d. C.)
- *Esiste almeno una coppia di rette equidistanti*.
- *Rette parallele ad una stessa retta sono parallele*.
- *Se due rette AB e CD sono tagliate da una terza retta PQ perpendicolare solo ad una di esse, CD, allora le perpendicolari tracciate da AB a CD sono minori di PQ dalla parte di PQ in cui AB forma un angolo acuto con PQ e sono maggiori di PQ dalla parte in cui AB forma un angolo ottuso*. (Nasir al –Din, sec. XIII)
- *La totalità dei punti equidistanti da una retta data e dalla medesima parte di essa costituisce una linea retta* (Cristoforo Clavio, 1574)
- *Rette che non sono equidistanti convergono in una direzione e divergono nell'altra*. (Pietro Cataldi, 1603)
- *Per un punto esterno ad una retta può tracciarsi una sola parallela* (John Playfair, fine sec. XVIII)
- *La somma degli angoli interni di un triangolo è pari ad un angolo piatto*. (G. Saccheri, 1733; A. Legendre, inizio sec. XIX)
- *È possibile costruire un triangolo la cui area sia maggiore di qualunque area data* (K. F. Gauss, 1799)
- *Ogni retta tracciata per un punto interno a un angolo, prolungata incontra almeno un lato dell'angolo il suo prolungamento* (A. Legendre, inizio sec. XIX)
- *Dati tre punti non giacenti sulla stessa retta è sempre possibile costruire un cerchio passante per i tre punti* (A. Legendre, F. Bolyai, inizio sec. XIX).

Notiamo alcune cose.

- Intanto il postulato da noi usato, che è il più diffuso nei libri di testo almeno da cinquant'anni a questa parte, cioè il cosiddetto postulato dell'unicità della parallela, è dovuto a un matematico non particolarmente brillante, John Playfair, ed è relativamente recente, un paio di secoli.

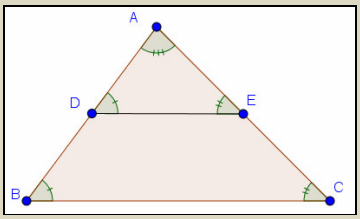
- Inoltre, il fatto che i precedenti postulati siano equivalenti al V postulato indica anche che tutti i precedenti, con l'enunciato originale di Euclide, divengono teoremi che possono essere dimostrati **solo** usando quel postulato.

Naturalmente l'aumentare dei tentativi vani di dimostrare il postulato, cominciarono a far sorgere l'idea che non solo il postulato rimaneva tale, ma che potevano costruirsi geometrie "diverse" da quella euclidea. Geometrie cioè in cui non valeva il V postulato e quindi anche tutte le proprietà da esso dipendenti.
Fu Gerolamo Saccheri, un monaco, che nel libro intitolato *Euclides ab omni naevo vindicatus* (il *neo* da cui doveva essere *liberato* Euclide era proprio il V postulato), pubblicato nell'anno della propria morte, 1733, fornì, inconsciamente, il primo esempio di geometria non euclidea.
In seguito, nel 1820, il grande matematico Gauss cercò di verificare che il mondo in cui viviamo è euclideo, misurando la somma degli angoli interni del triangolo i cui vertici sono le cime dei monti Hohenhagen, Brocken e Inselberg, nella foresta nera, trovando che essa è circa 180°.
Lo stesso Gauss, a partire dal 1813 cominciò ad avere l'idea che il V postulato non solo fosse indimostrabile, ma indipendente dagli altri, quindi che la sua negazione portasse alla creazione di geometrie non euclidee.
Il primo libro pubblicato sulle geometrie non euclidee è però *La scienza assoluta dello spazio*, del 1832, opera di Jànos Bolyai. Precedentemente, nel 1830, il russo Nicolaj Ivanovic Lobacevskij aveva pubblicato l'articolo *Sui principi della geometria*, in cui si esponeva una geometria non euclidea. Esso però aveva avuto poca diffusione in occidente, perché scritto in russo.

Verifiche

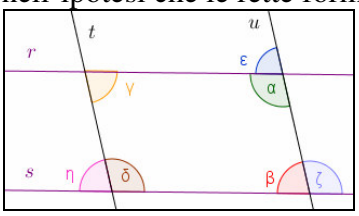
Lavoriamo insieme

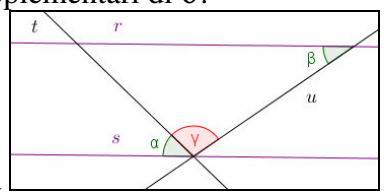
Vogliamo dimostrare che la misura di tre angoli non è sufficiente a caratterizzare un triangolo, come abbiamo più volte affermato.



Nella figura precedente abbiamo costruito due triangoli che sono certamente non uguali fra loro, *ABC* e *ADE*, ma che hanno gli angoli a due a due uguali. Infatti per prima cosa notiamo che l'angolo di vertice *A* è comune. Inoltre, essendo la retta *DE* parallela a *BC*, possiamo dire che gli angoli di vertici *B* e *D* sono fra loro uguali, perché corrispondenti rispetto a *DE//BC*, tagliate dalla trasversale *AB*. Analogamente sono corrispondenti rispetto alle stesse parallele, tagliate però da *AC*, anche gli angoli di vertici *E* e *C*, quindi anch'essi sono uguali.

Livello 1

1. Provare il teorema 8 nell'ipotesi che le rette formino una coppia di angoli alterni esterni uguali.
2. Provare il teorema 8 nell'ipotesi che le rette formino una coppia di angoli coniugati interni supplementari.
3. Provare il teorema 8 nell'ipotesi che le rette formino una coppia di angoli coniugati esterni supplementari.
4. Provare il teorema 8 nell'ipotesi che le rette formino una coppia di angoli corrispondenti uguali.
5. In figura *r//s* e *t//u* 

Quali fra gli angoli segnati sono uguali ad α? Quali sono supplementari di δ? [δ, ζ; β, ε, η, γ]
6. In figura 

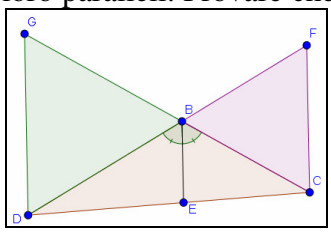
r//s, $\angle\alpha = 45°, \angle\beta = 35°$, quanto misura γ? [100°]
7. Sui lati di un angolo di vertice *O* scegliamo i punti *A*, *B*, *C*, *D* alternativamente sui due lati, in modo che sia $\overline{OA} = \overline{OB}, \overline{OC} = \overline{OD}$. Provare che *AB* // *CD*.
8. Provare che, date due rette parallele tagliate da una trasversale, le bisettrici di due angoli alterni interni sono fra loro parallele.
9. Provare che, date due rette parallele tagliate da una trasversale, le bisettrici di due angoli alterni esterni sono fra loro parallele.
10. Provare che, date due rette parallele tagliate da una trasversale, le bisettrici di due angoli corrispondenti sono fra loro parallele.
11. Dato un triangolo con due lati uguali *AC* e *BC*, prolunghiamo tali lati dalla parte di *C*, dei segmenti uguali *CE* e *CD*. Provare che *DE* // *AB*.

Livello 2

12. Date due rette parallele tagliate da una trasversale, le bisettrici di due angoli coniugati interni o esterni sono fra loro parallele? Giustificare la risposta. [No]
13. Nel triangolo *ABC*, sia *r* la bisettrice dell'angolo di vertice *A* che incontra *BC* in *D*. Per *D* conduciamo

la parallela al lato AB che incontri AC in E. Provare che ADE ha due angoli uguali.

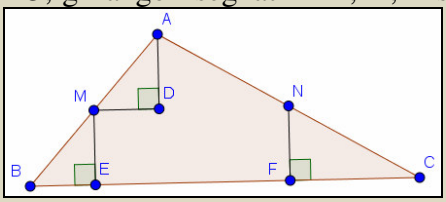
14. Nel triangolo in figura si ha $\angle E\hat{B}C = \angle D\hat{B}E = 60°$, DG, EB e FC sono fra loro paralleli. Provare che i triangoli BFC e DGB sono equiangoli.



15. In un triangolo qualsiasi uniamo a due a due i punti medi dei suoi lati, dividendo così il triangolo in 4 triangoli più piccoli. Dimostrare che i detti triangoli sono fra loro uguali.
16. In un triangolo qualsiasi tracciamo le parallele ai lati condotte dai vertici opposti, ottenendo così un triangolo più grande, diviso in 4 triangoli più piccoli, fra cui quello di partenza. Dimostrare che tali triangoli sono fra loro uguali.
17. Nel triangolo ABC, siano M ed N i punti medi di AB e AC rispettivamente. Dal vertice C tracciamo la parallela ad AB che incontra in P la retta per MN. Dimostrare che N è punto medio di MP.
18. Dato il triangolo ABC, prolunghiamo BC dalla parte di B di un segmento BD uguale ad AB. provare che il segmento AD è parallelo alla bisettrice di $A\hat{B}C$.

Lavoriamo insieme

Nella figura seguente, ABC è un triangolo qualsiasi; M e N sono i punti medi rispettivamente dei lati AB e AC; gli angoli segnati in E, D, F sono retti . Vogliamo dimostrare che i segmenti AD, ME, NF sono uguali.



Consideriamo i triangoli MAD e BME. Cosa sappiamo di essi?

- $\overline{AM} = \overline{MB}$, perché M è punto medio di AB;
- $\angle A\hat{D}M = \angle M\hat{E}B$, perché sono entrambi retti;
- $\angle D\hat{M}A = \angle E\hat{B}M$, perché angoli corrispondenti rispetto alle parallele MD e BE tracciate rispetto alla trasversale AB.

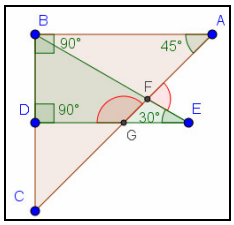
Possiamo allora applicare il criterio di isometria dei triangoli rettangoli per concludere che MAD e BME sono fra loro uguali, in particolare sono uguali i cateti ME e AD.
Considerando invece i triangoli AND e NCF, con simili ragionamenti si prova che i segmenti AD e NF sono fra loro uguali. Applicando la proprietà transitiva possiamo dire che i tre segmenti sono uguali, cioè quello che volevamo provare.

Livello 1

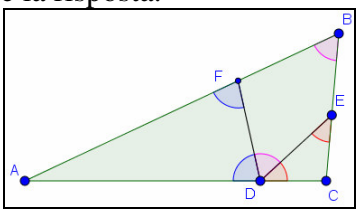
19. Provare che le bisettrici di due angoli adiacenti sono fra loro perpendicolari.
20. Provare che le bisettrici degli angoli formati da due rette incidenti sono fra loro perpendicolari.
21. In un triangolo con due angoli uguali, il terzo angolo è di 40°, quanto misura l'angolo che la bisettrice di uno degli angoli uguali forma con il lato opposto? [60°]
22. In un triangolo con due angoli uguali il segmento condotto perpendicolarmente da uno dei vertici di questi angoli forma con il lato comune un angolo di 35°, quanto misura il terzo angolo? [70°]
23. I cateti di un triangolo rettangolo possono essere uguali fra loro? Giustificare la risposta.
24. Provare il teorema 10, nell'ipotesi che i due triangoli rettangoli abbiano uguali rispettivamente un lato e un angolo acuto.
25. Provare il teorema 10, nell'ipotesi che i due triangoli rettangoli abbiano uguali rispettivamente l'ipotenusa e un angolo acuto.
26. In un triangolo con due angoli uguali di misura 50°, quanto misura l'angolo che la bisettrice di uno di

essi forma con il lato opposto? [75°]

27. In un triangolo *ABC* con due angoli uguali, il terzo angolo, $\hat{A}$, misura 70°, dal vertice *B* tracciamo la perpendicolare ad *AC*. Quanto misura l'angolo formato da tale retta e da *BC*? [35°]
28. In relazione con la figura seguente determinare le misure degli angoli segnati in rosso. [75°; 135°]



Livello 2

29. Gli angoli interni di un triangolo stanno fra loro come i numeri 2, 3, 4. Determinare le loro misure. [40°, 60°, 80°]
30. Gli angoli interni di un triangolo sono diversi tra loro, quello di misura intermedia differisce di 10° da ciascuno degli altri due. Determinare le loro misure. [50°, 60°, 70°]
31. Gli angoli interni di un triangolo sono diversi tra loro, quello di misura intermedia differisce di 20° da ciascuno degli altri due. Determinare le loro misure. [40°, 60°, 80°]
32. Gli angoli interni di un triangolo sono diversi tra loro, quello di misura intermedia differisce di *h*° da ciascuno degli altri due. Quale che sia *h,* uno dei tre angoli ha sempre la stessa misura, quale e quanto misura? [Quello intermedio; 60°]
33. In un triangolo rettangolo un angolo acuto è 2/3 dell'altro. Determinarne le misure. [36°, 54°]
34. In un triangolo con due angoli uguali di misura 2α°, quanto misura l'angolo che la bisettrice di uno di essi forma con il lato opposto? [3α]
35. In un triangolo *ABC* con due angoli uguali, il terzo angolo, $\hat{A}$, misura α, dal vertice *B* tracciamo la perpendicolare ad *AC*. Quanto misura l'angolo formato da tale retta e da *BC*? [α/2]
36. È dato un triangolo i cui angoli misurano α, β e γ con $\alpha > \beta > \gamma$. L'angolo γ venga diviso dalla perpendicolare uscente dal suo vertice condotta al lato opposto, nei due angoli γ_1 e γ_2 con $\gamma_1 > \gamma_2$. Provare che $\gamma_1 - \gamma_2 = \alpha - \beta$.
37. La misura di un lato, di un angolo a esso adiacente e dell'altezza a esso relativa, sono sufficienti a determinare un triangolo? Giustificare la risposta.
38. È dato il triangolo *ABC* e l'angolo esterno relativo al suo vertice *B*. Quando la bisettrice di tale angolo è parallela al lato *AC*? Giustificare la risposta. [Quando $\angle\hat{A} = \angle\hat{C}$]
39. Dato il triangolo *ABC* in figura, 

gli angoli di uguale colore sono fra loro uguali. Quanto misura $A\hat{B}C$? [60°]
40. All'interno di un triangolo *ABC* in cui gli angoli di vertici *B* e *C* sono fra loro uguali, si sceglie un punto *D* in modo che si abbia $\angle D\hat{B}C = \angle D\hat{C}A$, calcolare $\angle C\hat{D}B + \angle A\hat{B}C$. [180°]
41. Nel triangolo rettangolo *ABC*, sia $CH \perp AB$ e *M* il punto medio dell'ipotenusa *AB*. Se $\angle A\hat{B}C = 50°$, determinare l'angolo formato da *CH* e *CM*. [10°]
42. In un triangolo *ABC* con due angoli uguali, il terzo angolo misura 130°. Tale angolo lo dividiamo in 13 parti uguali, e consideriamo le intersezioni di questi angoli con la base opposta, ottenendo 13 triangoli, ciascuno con un angolo di 10°. Quanto misurano ciascuno degli altri due angoli di tali triangoli? [(25°, 145°); (35°, 135°); (45°, 125°); ...; (145°, 25°)]

Livello 3

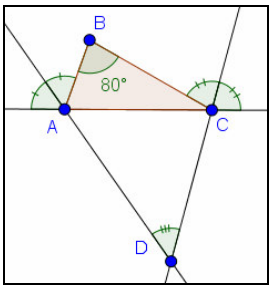
43. Provare che due triangoli sono uguali se hanno uguali due lati e l'angolo opposto al maggiore di essi.
44. Provare che due triangoli sono uguali se hanno uguali due lati e l'angolo opposto a uno di essi, sapen-

do che per entrambi i triangoli l'angolo opposto all'altro lato è acuto oppure ottuso.

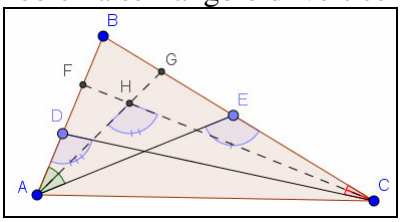
45. Nel triangolo rettangolo *ABC*, sia $CH \perp AB$ e *M* il punto medio dell'ipotenusa *AB*. Se $\angle A\hat{B}C = \alpha$, determinare l'angolo formato da *CH* e *CM*. [$|90° - 2\alpha|$]

46. Nel triangolo *ABC* si ha $\angle A\hat{B}C - \angle C\hat{A}B = 22°$. Si scelga un punto *D* su *AC* in modo che sia $\angle C\hat{D}B = \angle D\hat{B}C$, Determinare la misura di $A\hat{B}D$. Quanto deve valere la differenza fra i due angoli affinché *DB* sia bisettrice di $A\hat{B}C$? [11°; Impossibile]

47. Nel triangolo *ABC* in figura *AD* e *CD* sono bisettrici degli angoli esterni. Determinare la misura dell'angolo di vertice *D*. [50°]



48. Risolvere il precedente problema se l'angolo di vertice *B* misura 2α. [$90° - \alpha$]



49. Nel triangolo in figura, *D* ed *E* sono due punti qualsiasi presi sui lati *AB* e *BC* rispettivamente, *H* è il punto d'incontro delle bisettrici *CF* e *AG* degli angoli $E\hat{A}B$ e $B\hat{C}D$. Provare che $\angle C\hat{D}A + \angle C\hat{E}A = 2 \cdot \angle C\hat{H}A$

50. Nel triangolo *NOP*, si tracciano i segmenti perpendicolari ai lati opposti, *PR* e *NQ*. Si prolunghi *PR* dalla parte di *R* fino a staccare il segmento *BR* uguale a *NQ*. Da *B* tracciamo la parallela a *ON* e sia *A* la sua intersezione con il prolungamento di *OP*. Provare che *AO* e *ON* sono uguali.

Classificazione dei triangoli rispetto ai lati. Segmenti e punti notevoli

Esaminiamo adesso qualche particolare tipo di triangolo. Cosa possono avere di particolare i lati di un triangolo? Possono essere tutti e tre uguali, solo due uguali oppure tutti e tre di diversa misura. Precisiamo questi concetti che in modo intuitivo abbiamo già utilizzato.

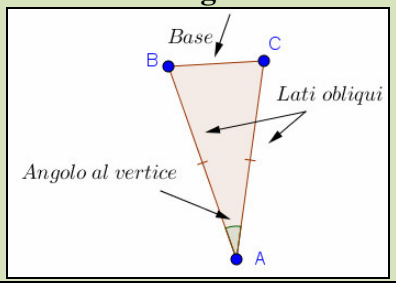
Definizione 7

Un triangolo che ha
- 3 lati uguali, si dice **equilatero**;
- almeno 2 lati uguali, si dice **isoscele**;
- 3 lati di misura diversa, si dice **scaleno**.

Si noti che la definizione precedente fa sì che l'insieme dei triangoli isosceli e quello dei triangoli equilateri non siano disgiunti, ma il primo contenga il secondo, ossia un triangolo isoscele potrebbe essere equilatero e tutti i triangoli equilateri sono isosceli.

Definizione 8

In un triangolo isoscele non equilatero i lati uguali vengono chiamati **lati obliqui**, mentre l'altro lato viene detto **base**. Infine l'angolo opposto alla base si dice **angolo al vertice**

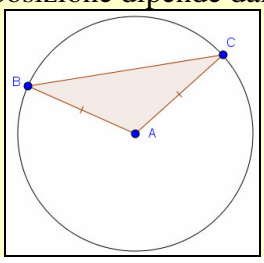


Che cosa significa?

Isoscele. È composto dalle parole greche *isos*, che già sappiamo che vuol dire uguale, e *skélos* che significa invece gamba. Quindi un triangolo isoscele è quello che ha le gambe della stessa misura. L'etimologia di questa parola e il fatto che in alcune lingue il lato di un triangolo venga ancora denominato braccio o gamba (per esempio in inglese è *leg*) fanno pensare che l'idea di triangolo, così come di angolo, fu fornita dall'osservazione della figura formata dalle gambe degli esseri umani rispetto alla base di appoggio.
Scaleno. Dal greco *skàlenos* che significa disuguale, zoppicante. Si riferisce al fatto che un triangolo scaleno appare *strano*, *anormale*.

Esempio 16

Come possiamo costruire un triangolo isoscele con riga e compasso? L'idea è semplice. Basta considerare la circonferenza di centro il vertice A del triangolo isoscele, e raggio uno dei lati obliqui AB, mentre l'altro vertice C è un punto sulla circonferenza la cui posizione dipende dalla misura dell'angolo al vertice.



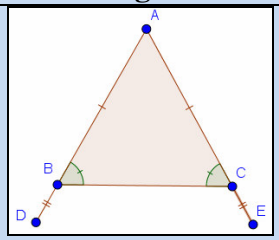
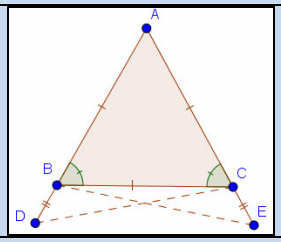
Adesso possiamo provare un importante risultato sui triangoli isosceli.

Teorema 13

In un triangolo isoscele gli angoli adiacenti alla base sono uguali.

Ipotesi: $\overline{AB} = \overline{AC}$ *Tesi*: $\angle C\hat{B}A = \angle A\hat{C}B$

Schema dimostrativo

Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Prolunghiamo i lati uguali AC e AB di due segmenti fra loro uguali, rispettivamente CE e BD.	 $\overline{AD} = \overline{AE}$	Perché sono somma di segmenti fra loro uguali ($\overline{AB} = \overline{AC}$ per ipotesi, $\overline{BD} = \overline{CE}$ per costruzione).
2	Congiungiamo B con E, e D con C.		
3	Consideriamo i triangoli ACD e ABE.	I triangoli sono uguali per LAL.	$\overline{AE} = \overline{AD}, \overline{AC} = \overline{AB}$ e l'angolo di vertice A è in comune.
4		$\overline{CD} = \overline{BE}$	Per il passo 3.
5	Consideriamo i due triangoli BDC ed ECB	Sono uguali per LLL	BC in comune e $\overline{BE} = \overline{CD}, \overline{CE} = \overline{BD}$
6		$\angle D\hat{C}B = \angle C\hat{B}E$	Per il teorema 6.
7	Consideriamo $A\hat{B}C, B\hat{C}A$	Sono uguali.	Perché essi sono supplementari degli angoli uguali $D\hat{B}E$ e $E\hat{C}B$.

Dal precedente teorema si deduce il seguente

Corollario 3

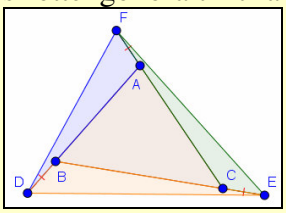
Un triangolo equilatero ha tutti gli angoli uguali.

L'angolo storico

Il teorema 13 era noto nel Medioevo come il *Pons Asinorum*, poiché separava gli ignoranti dai sapienti: coloro che erano a conoscenza e sapevano provare tale teorema potevano *attraversare* il ponte che separava l'ignoranza dalla sapienza.

Esempio 17

Dato un triangolo ABC, prolunghiamo ciascun lato dei segmenti BD, CE, AF fra di loro uguali. In tal modo si ottengono altri triangoli. Si vuol sapere se i triangoli AFD, BDE e CEF possono essere fra loro uguali.



Per rispondere alla domanda dobbiamo chiederci cosa hanno di uguale fra loro i tre triangoli. L'unica uguaglianza certa è: $\overline{AF} = \overline{BD} = \overline{CE}$, quindi non possiamo applicare alcuno dei criteri enunciati. Quindi in generale i detti triangoli non sono fra loro uguali.

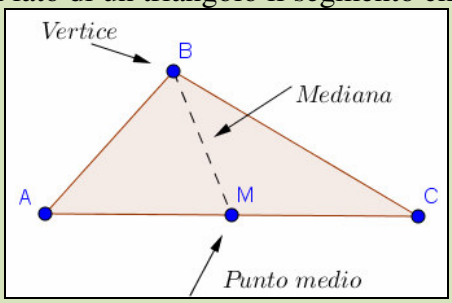
Se però il triangolo ABC fosse equilatero, potremmo dire che anche le seguenti uguaglianze sono valide:

$\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}$, dato che ciascuno dei segmenti risulta somma di segmenti fra loro uguali. In questo caso il triangolo è anche equiangolo, per il corollario 3. In questo caso $D\hat{A}F, E\hat{C}F, D\hat{B}E$ sarebbero uguali perché supplementari di angoli fra loro uguali. Potremmo quindi applicare il criterio LAL e dire che in questo caso i triangoli *AFE*, *ECD* e *BFD* sono fra loro uguali.

Vediamo adesso di considerare altri enti che possano interessarci nello studio della geometria del triangolo.

Definizione 9

Diciamo **mediana** relativa a un lato di un triangolo il segmento che ha per estremi il punto medio del lato e il vertice a esso opposto.

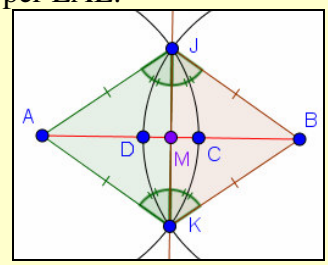


Per quanto detto ogni triangolo ha esattamente tre mediane.

Esempio 18

Vogliamo costruire il punto medio di un segmento con riga e compasso.
Sia dato il segmento *AB*: facendo centro su *A*, con un'apertura di compasso *AC* maggiore della metà di *AB* tracciamo una circonferenza e con la stessa apertura un'altra circonferenza di centro *B*. Il segmento congiungente i punti d'intersezione *C* e *D* delle due circonferenze è perpendicolare ad *AB* e lo incontra nel suo punto medio *M*. Infatti i triangoli *AJK* e *JBK* sono uguali per LLL dato che i lati segnati sono raggi di circonferenze di uguale raggio e hanno *JK* in comune. Ma allora sono uguali fra loro gli angoli segnati, quindi i triangoli *AMJ* e *JBC* sono fra loro uguali per LAL.

In figura proponiamo la costruzione.



Consideriamo un altro segmento notevole, prima però dobbiamo provare un risultato che per essere dimostrato ha però bisogno dell'enunciazione di un ulteriore postulato, detto di continuità. Questo teorema dice una cosa apparentemente banale ma che non riesce a provarsi in nessun modo.

Postulato 1

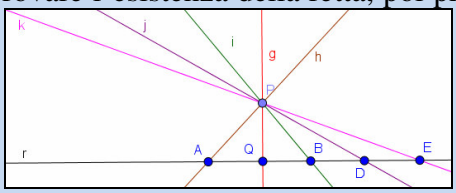
Se una semiretta ruota attorno alla propria origine descrivendo un angolo, allora la semiretta incontra tutti i punti dell'angolo.

Nella dimostrazione del seguente teorema utilizzeremo il metodo di dimostrazione noto con il nome di *dimostrazione per assurdo*. Vediamo di chiarirne il funzionamento. Abbiamo già visto nell'unità 1 il principio di non contraddizione secondo il quale un fatto è *o* vero *o* falso (*o* inteso come *aut*); abbiamo visto anche il principio del terzo escluso che afferma che un fatto ha un solo valore di verità. Quindi per provare la validità di un teorema, potremmo anche negare la validità della tesi, cioè di ciò che vogliamo provare e così facendo facciamo vedere che anche l'ipotesi deve essere falsa. Ma le ipotesi sono sempre vere, quindi cadiamo in una contraddizione, il che vuol dire che la tesi non può essere falsa, quindi deve essere vera.

Teorema 14

Dati una retta r e un punto P, vi è una sola retta g che contiene P ed è perpendicolare a r.

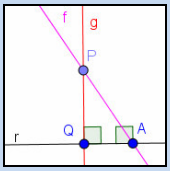
Dimostrazione

Cominciamo intanto a provare l'esistenza della retta, poi proveremo che è unica. Riferiamoci alla figura seguente per la notazione. 

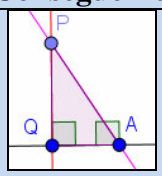
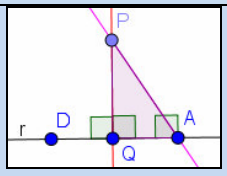
Se il punto è Q, ossia se appartiene alla retta r, si tratta di trovare la retta che divide in due parti uguali un angolo piatto. Per il postulato 1 tale retta esiste, basta ruotare r attorno a Q finché i due angoli adiacenti divengono uguali.

Vediamo il caso in cui il punto è P, cioè non appartiene a r.

Schema dimostrativo			
Passo	**Azione**	**Conseguenza**	**Giustificazione**
1	Consideriamo una retta per P e incidente a r. La chiamiamo k.	Se essa risulta ortogonale a r abbiamo finito	Se cioè passa per il punto Q che abbiamo visto esiste e divide l'angolo piatto in due angoli retti.
2	Se non accade ciò che è detto al passo 1. Ruotiamo k intorno a P facendogli occupare le diverse posizioni h, i, j e via dicendo.	In tal modo suddividiamo l'angolo piatto in due angoli adiacenti. Deve perciò esistere almeno una posizione tale che i due angoli siano anche uguali. Ossia esiste una perpendicolare g condotta da P a x.	Per il postulato 1.

Adesso proviamo che la retta trovata in precedenza è unica e lo facciamo con il metodo di dimostrazione per assurdo. Ci riferiamo alla figura seguente 

Ipotesi: $P \notin r$; $Q \in r$; $A \in r$; $PQ \perp r$, $PA \perp r$ *Tesi*: $Q \equiv A$

Schema dimostrativo			
Passo	**Azione**	**Conseguenza**	**Giustificazione**
1	Ragioniamo per assurdo, supponendo che $Q \neq A$.	 Costruiamo il triangolo PAQ.	
2	Consideriamo $P\hat{A}Q$	È retto.	Per ipotesi PA è perpendicolare alla retta r.
3	Consideriamo l'angolo $D\hat{Q}P$	 È retto.	Perché PQ è perpendicolare alla retta r.
4	Assurdo.	$D\hat{Q}P = P\hat{A}Q$	Contraddice il teorema 7, dato che nel triangolo PQA il primo è angolo esterno e il secondo è angolo interno non adiacente a esso.

Nella dimostrazione precedente dire che la retta non era unica voleva dire che ve ne erano più di una, due, tre, ..., mille o più. Noi abbiamo considerato il caso minimo, che le rette fossero due, e abbiamo visto che questo non era possibile, quindi è inutile provare che non fossero tre, quattro e così via.

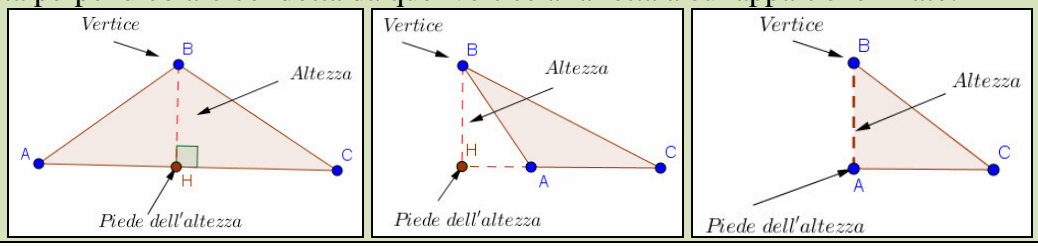
Definizione 10

Dato un punto P e una retta r o parte di essa, diciamo **piede** della perpendicolare condotta da P a r il punto intersezione di questa perpendicolare con r.

Per quanto visto è chiaro che se P appartiene a r esso coincide con il proprio piede.

Definizione 11

Diciamo **altezza** relativa a un lato di un triangolo il segmento che ha per estremi il vertice opposto al lato e il piede della retta perpendicolare condotta da quel vertice alla retta a cui appartiene il lato.



Per la stessa definizione, ogni triangolo ha esattamente tre altezze, che non sono sempre tutte interne al triangolo, come mostrato nelle figure a corredo della definizione.

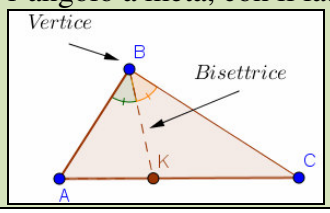
Esempio 19

Sempre considerando le figure della definizione 11, facilmente ci rendiamo conto che se il triangolo è rettangolo due delle tre altezze del triangolo coincidono con due lati; e se è ottusangolo, due delle tre altezze, quelle relative ai lati dell'angolo ottuso, cadono fuori dal triangolo.

Consideriamo ancora un altro segmento notevole.

Definizione 12

Diciamo **bisettrice** di un angolo interno di un triangolo il segmento che ha per estremi il vertice dell'angolo e l'intersezione della semiretta che divide l'angolo a metà, con il lato opposto all'angolo.



Anche le bisettrici di un triangolo sono tre ed evidentemente sono sempre interne al triangolo.
Quindi dato un triangolo qualsiasi possiamo segnare 9 segmenti speciali: 3 altezze, 3 mediane e 3 bisettrici. Potrebbe capitare che alcuni di questi 9 segmenti coincidano.

Teorema 15

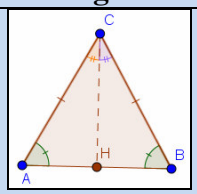
In un triangolo isoscele la bisettrice relativa all'angolo al vertice, la mediana e l'altezza relativa alla base sono lo stesso segmento.

Dimostrazione

Faremo vedere che la bisettrice dell'angolo al vertice è sia altezza sia mediana.

Ipotesi: $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\angle A\hat{C}H = \angle H\hat{C}B$ *Tesi*: $\angle C\hat{H}A = \angle B\hat{H}C; \overline{AH} = \overline{BH}$

Schema dimostrativo

Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Consideriamo i triangoli ACH e BHC.	 Sono uguali.	Per LAL. Infatti hanno CH in comune, $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\angle A\hat{C}H = \angle H\hat{C}B$ per ipotesi.
2	Studiamo le corrispondenze uguali.	$\angle C\hat{H}A = \angle B\hat{H}C; \overline{AH} = \overline{BH}$	Per il teorema 6, perché rispettivamente opposti a lati e angoli di uguale misura.

È immediata la validità del seguente

Corollario 4

In un triangolo equilatero le altezze relative a un lato coincidono con le mediane relative allo stesso lato e con le bisettrici dell'angolo opposto a quel lato.

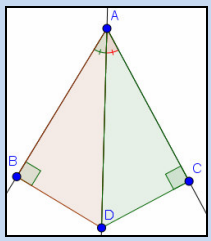
È anche semplice provare quest'altro risultato.

Teorema 16

I punti della bisettrice di un angolo sono ugualmente distanti dai lati dell'angolo.

Dimostrazione

Per distanza di un punto da una retta si intende il segmento di perpendicolare condotto dal punto alla retta.



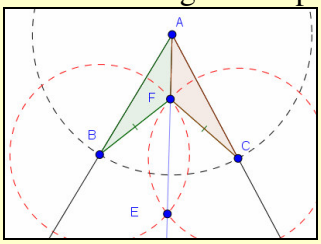
Ipotesi: $\angle B\hat{A}D = \angle D\hat{A}C$; $DB \perp AB$; $DC \perp AC$ *Tesi*: $\overline{DC} = \overline{DB}$

Schema dimostrativo			
Passo	**Azione**	**Conseguenza**	**Giustificazione**
1	Consideriamo i triangoli BAD e DAC.	Sono uguali.	Per il criterio sui triangoli rettangoli dato che hanno AD in comune e $\angle B\hat{A}D = \angle D\hat{A}C$.
2	Studiamo le corrispondenze uguali.	$\overline{DC} = \overline{DB}$	Per il teorema 6.

Vediamo un esempio.

Esempio 20

Vogliamo costruire la bisettrice di un angolo dato con riga e compasso. Ci riferiamo alla seguente figura.



Sia dato l'angolo di vertice A: con centro in A tracciamo una circonferenza che incontra i lati dell'angolo in B e C. Con centro in B tracciamo una circonferenza a piacere, in modo che si intersechi con la circonferenza di uguale raggio e centro in C. Siano F e G i punti di intersezione di tali circonferenze. Diciamo che la semiretta AFE è la bisettrice cercata. Infatti i triangoli AFB e AFC sono uguali per LLL, dato che hanno AF in

comune; $\overline{AB} = \overline{AC}$ perché raggi della stessa circonferenza di centro A; $\overline{FB} = \overline{FC}$ perché raggi di circonferenze uguali.

Possiamo enunciare anche il seguente risultato.

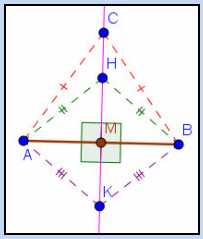
Teorema 17

I punti del piano ugualmente distanti dai lati di un angolo appartengono alla bisettrice dell'angolo.

Lasciamo la sua facile dimostrazione per esercizio. Quindi la proprietà di essere equidistanti dai lati di un angolo è tipica dei punti della bisettrice dello stesso angolo. In geometria gli insiemi di punti che verificano una data proprietà geometrica si chiamano **luoghi geometrici**.
Un altro importante luogo geometrico è definito nel seguente enunciato.

Teorema 18

Il luogo geometrico dei punti del piano equidistante dagli estremi di un segmento è la retta perpendicolare al segmento e passante per il suo punto medio.

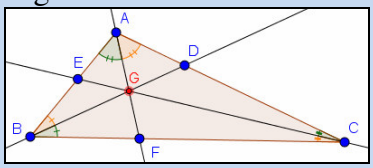


Dimostrazione per esercizio usando la seguente figura

Il precedente luogo viene detto **asse di un segmento**. Tenuto conto dei precedenti risultati se ne provano facilmente altri che adesso mostreremo.

Teorema 19

Le bisettrici degli angoli interni di un triangolo si incontrano in uno stesso punto.



Ipotesi: $\angle C\hat{B}D = \angle D\hat{B}A; \angle A\hat{C}E = \angle E\hat{C}B; EC \cap BD = \{G\}$ *Tesi*: $\angle F\hat{A}C = \angle B\hat{A}F$

Schema dimostrativo			
Passo	**Azione**	**Conseguenza**	**Giustificazione**
1	Consideriamo le bisettrici degli angoli $C\hat{B}A$ e $A\hat{C}B$.	Si incontrano in un punto G.	Poiché i lati non sono paralleli, neanche le bisettrici lo sono.
2	Consideriamo il punto G.	La distanza di G da AB è la stessa che da BC.	G appartiene alla bisettrice di $C\hat{B}A$.
3	Consideriamo il punto G.	La distanza di G da AC è la stessa che da BC.	F appartiene alla bisettrice di $A\hat{C}B$.
4	La tesi.	G appartiene alla bisettrice di $B\hat{A}C$.	Per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, G dista ugualmente da AB e AC.

Diamo ancora delle definizioni.

Definizione 13

Una retta si dice **tangente** a una circonferenza se ha con essa un solo punto in comune.

Definizione 14

Un poligono si dice **circoscritto** a una circonferenza se tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza. In questo caso la circonferenza si dice **inscritta** nel poligono.

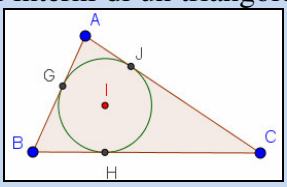
Definizione 15

Un poligono si dice **inscritto** in una circonferenza se i suoi vertici sono gli unici punti che le due figure hanno in comune. La circonferenza si dice **circoscritta** al poligono.

Tenuto conto di quanto stabilito dal teorema 19 e usando la terminologia delle precedenti definizioni, possiamo enunciare il seguente risultato.

Teorema 20

Il punto d'incontro delle bisettrici degli angoli interni di un triangolo è il centro della circonferenza inscritta nel triangolo. Tale punto si chiama **incentro**.

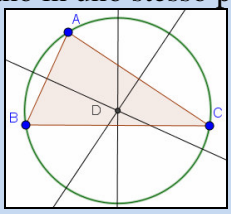


Dimostrazione per esercizio.

Ragionando in modo analogo a quanto visto in precedenza possiamo facilmente provare quest'altro risultato.

Teorema 21

Gli assi dei lati di un triangolo si incontrano in uno stesso punto che si chiama **circocentro** ed è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo.



Dimostrazione per esercizio.

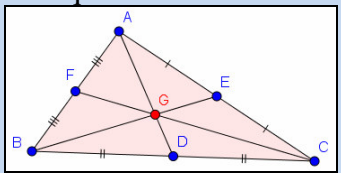
Esempio 21

In ogni triangolo l'incentro è ovviamente interno al triangolo, come mostrato in figura anche per i triangoli rettangoli e ottusangoli.

Possiamo osservare che in un triangolo equilatero incentro e circocentro coincidono. Valgono anche i seguenti teoremi che enunciamo per coerenza con quanto detto sinora, ma che dimostreremo nella prossima unità perché non abbiamo ancora le conoscenze per farlo.

Teorema 22

Le mediane dei lati di un triangolo si incontrano in uno stesso punto che si chiama **baricentro**, il quale divide ciascuna mediana in due parti in modo che quella che contiene il vertice sia doppia dell'altra.



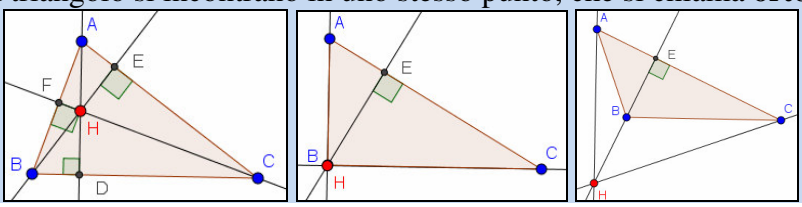
Che cosa significa?

Baricentro. È composto dalle parole di origine greca *barys* che significa grave e *kéntron* che vuol dire

centro, quindi è un centro grave, cioè pesante. In questo caso si sottolinea il significato fisico come centro di gravità di un oggetto, che nel caso di corpi omogenei di forma triangolare coincide appunto con il baricentro geometrico.

Teorema 23

Le altezze dei lati di un triangolo si incontrano in uno stesso punto, che si chiama **ortocentro**.



Nasce spontanea un'altra questione: all'interno di uno stesso triangolo, per esempio un triangolo scaleno, gli angoli come si comportano? Sono anch'essi tutti disuguali? E se lo sono quale dei tre è il maggiore? Quale il minore? Consideriamo un fatto intuitivo, ossia supponiamo di avere un compasso che possiamo considerare come modello di un triangolo isoscele, se lo "allarghiamo", cioè se aumentiamo l'angolo al vertice di questo ipotetico triangolo isoscele il lato opposto cosa farà? Evidentemente aumenterà anch'esso. Questa intuizione ci fa enunciare il seguente teorema.

Teorema 24

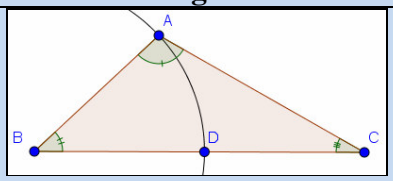
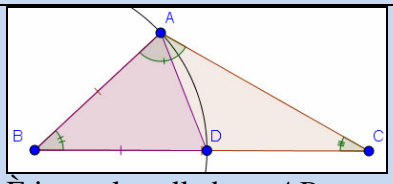
In un triangolo a lato maggiore sta opposto angolo maggiore e viceversa.

Ipotesi 1: $\overline{BC} > \overline{AB};\ \overline{BC} > \overline{AC}$ *Tesi* 1: $\angle B\hat{A}C > \angle C\hat{B}A; \angle B\hat{A}C > \angle A\hat{C}B$

Ipotesi 2: $\angle B\hat{A}C > \angle C\hat{B}A; \angle B\hat{A}C > \angle A\hat{C}B$ *Tesi* 2: $\overline{BC} > \overline{AB};\ \overline{BC} > \overline{AC}$

Dimostriamo solo il teorema diretto, lasciando per esercizio quello inverso.

Schema dimostrativo

Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Puntiamo il compasso su B e con apertura AB, determiniamo su BC un punto D.	 $\overline{AB} = \overline{BD}$	Perché raggi di una stessa circonferenza.
2	Consideriamo il triangolo ABD.	 È isoscele sulla base AD.	AB e BD sono raggi della stessa circonferenza.
3	Consideriamo gli angoli del triangolo ABD.	$\angle A\hat{D}B = \angle B\hat{A}D$	Perché sono angoli alla base di un triangolo isoscele.
4	Confrontiamo gli angoli del triangolo ABC con quelli del triangolo ABD.	$\angle B\hat{A}C > \angle B\hat{A}D = \angle A\hat{D}B > \angle A\hat{C}D$	Per il teorema 7 $\angle A\hat{D}B$ è angolo esterno rispetto al triangolo ACD, in cui $A\hat{C}D$ è angolo interno a esso non adiacente

L'Antologia

Vogliamo dare qualche esempio di proposizione così come viene enunciata e provata da Euclide negli *Elementi*, ci serviremo dell'edizione UTET, curata da Attilio Frajese nel 1970.

Euclide, *Elementi libro* I

Proposizione I.

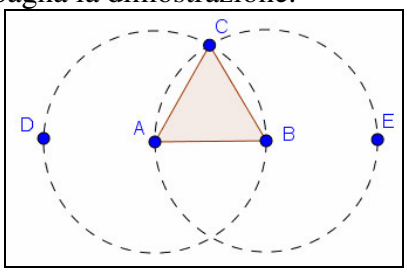
Su una retta terminata data costruire un triangolo equilatero.

Notiamo immediatamente che Euclide parla di *retta terminata* e non di segmento. Infatti per Euclide *retta* è ciò che noi chiamiamo segmento, però una *retta euclidea* ha in sé la possibilità di essere estesa a piacere, fino a raggiungere e superare qualsiasi lunghezza fissata. In effetti Euclide e in generale gli studiosi del suo periodo avevano un forte timore a trattare con oggetti che fossero realmente infiniti, quindi cercavano di evitare il problema considerando il cosiddetto infinito potenziale, cioè appunto un qualcosa che potesse "aumentarsi" a dismisura senza limite. Quindi *retta terminata* è un segmento che non ha più questa possibilità di essere esteso.
Vediamo adesso la dimostrazione.

"Sia AB la retta terminata data. Si deve dunque costruire sulla retta AB un triangolo equilatero. Con centro A e raggio AB risulti descritto il cerchio BCD, di nuovo risulti descritto, con centro B e raggio BA, il cerchio ACE, e dal punto C, in cui i cerchi si tagliano fra loro, risultino tracciate ai punti a, B le rette congiungenti CA, CB."

Facciamo alcune osservazioni.

- Innanzi tutto il fatto che si possa tracciare un cerchio con centro e raggio qualsiasi è il III dei 5 postulati.
- Poi Euclide indica un cerchio con tre suoi punti.
- Infine veniamo alla questione più controversa. Euclide parla dell'intersezione di due cerchi e questo né lo dimostra né usa un postulato; quello che dovrebbe essere utilizzato è quello cosiddetto di continuità, che afferma appunto che se abbiamo a che fare con una linea retta o no, essa possiamo suddividerla in quante parti vogliamo ottenendo sempre sue parti. Così i due cerchi avendo lo stesso raggio devono per forza "tagliarsi", incontrandosi nel terzo vertice del triangolo equilatero. la seguente figura, certamente aggiunta nelle edizioni più recenti, accompagna la dimostrazione.



"Ora, poiché il punto A è centro del cerchio CDB, si ha che AC è uguale ad AB; di nuovo, poiché il punto B è centro del cerchio CEA, si ha che BC è uguale a BA. Ma fu dimostrato che pure CA è uguale ad AB; quindi ciascuna delle rette CA, CB è uguale alla retta AB. Ma cose che sono uguali a una stessa sono uguali anche fra loro: sono perciò uguali anche CA, CB; quindi le tre rette CA, AB, BC sono uguali fra loro. Dunque il triangolo ABC è equilatero. Ed è stato costruito sulla retta terminata data AB. Come dovevasi fare."

Concludiamo con le ultime osservazioni.

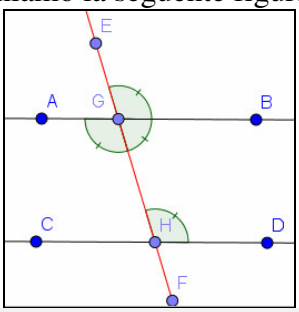
- Euclide usa l'aggettivo *uguale* al posto del nostro *uguale*.
- Viene usata la proprietà transitiva dell'uguaglianza, che Euclide ha enunciato come nozione comune I.
- La conclusione risulta prolissa, ripetendo più volte il fatto che abbiamo raggiunto il nostro obiettivo.

- La dimostrazione si conclude con una formula tradizionale: *Come dovevasi fare*, nel resto del libro si trova anche un'altra formula: *come dovevasi dimostrare.*

Consideriamo adesso la *"famigerata"* proposizione 29 del libro I degli *Elementi*, la prima in cui Euclide usa il V postulato.

> *Proposizione* 29.
> *Una retta che cada su rette parallele forma gli angoli alterni uguali fra loro, l'angolo esterno uguale all'angolo interno ed opposto, ed angoli interni dalla stessa parte la cui somma è uguale a due retti.*

Cominciamo a osservare l'enunciazione del teorema, molto prolissa. In effetti è la condizione necessaria del teorema 30, cioè se due rette sono parallele ogni trasversale determina su di esse angoli alterni interni e angoli corrispondenti uguali, angoli coniugati supplementari.
Per seguire meglio la dimostrazione proponiamo la seguente figura.



> *"Infatti, la retta EF venga a cadere sulle rette parallele AB, CD; dico che essa forma gli angoli alterni AGH, GHD uguali, l'angolo esterno EGB uguale all'angolo interno e opposto GHD, e gli angoli interni BGH, GHD, dalla stessa parte, la cui somma è uguale a due retti."*

Osserviamo che un angolo è indicato con tre suoi punti, il secondo dei quali è il vertice, ma non pone alcun segno speciale su esso.

> *"Se l'angolo AGH fosse difatti disuguale rispetto all'angolo GHD, uno di essi sarebbe maggiore. Sia maggiore l'angolo AGH; si aggiunga in comune l'angolo BGH; la somma degli angoli AGH, BGH è quindi maggiore della somma degli angoli BGH, GHD. Ma la somma di AGH, BGH è uguale a due retti. La somma di BGH, GHD è perciò minore di due retti."*

Procede per assurdo, supponendo che gli angoli alterni interni siano disuguali. Utilizza poi una *nozione comune*, la IV, che afferma: "*Se cose uguali sono addizionate a cose disuguali, le totalità sono disuguali*".

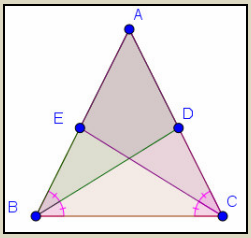
> *"Ma rette che vengono prolungate illimitatamente a partire da angoli la cui somma sia minore di due retti, si incontrano;* **[Ecco dove viene usato il V postulato]** *quindi AB, CD prolungate illimitatamente, si incontreranno; ma non si incontrano invece, poiché per ipotesi sono parallele; l'angolo AGH non è perciò disuguale rispetto all'angolo GHD, e dunque è uguale.* [Qui viene utilizzato il procedimento per assurdo] *Ma l'angolo AGH è uguale all'angolo EGB;* [perché angoli opposti al vertice] *quindi sono uguali pure gli angoli EGB, GHD. Si aggiunga in comune l'angolo BGH; la somma di EGB, BGH risulta allora uguale alla somma di BGH, GHD. E poiché la somma degli angoli EGB, BGH è uguale a due retti,* [perché angoli fra loro adiacenti, quindi supplementari] *anche la somma degli angoli BGH, GHD è uguale a due retti."*

Le parti racchiuse fra parentesi quadrate sono note aggiunte da noi.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo provare che in un triangolo isoscele le bisettrici relative agli angoli alla base sono segmenti fra lo-



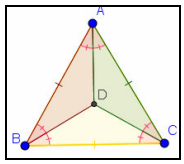
ro uguali. Riferiamoci alla seguente figura. Consideriamo i triangoli *BAD* e *ACE*, ognuno dei quali ha per lato una delle due bisettrici. Vogliamo provare che tali triangoli sono uguali.

- Infatti essi hanno uguali i lati *AB* e *AC* perché lati obliqui del triangolo isoscele di partenza.
- Hanno poi l'angolo di vertice *A* in comune.
- Infine hanno $\angle D\hat{B}A = \angle A\hat{C}E$, perché ciascuno è metà di due angoli che sono fra loro uguali perché angoli alla base del triangolo isoscele *ABC*.

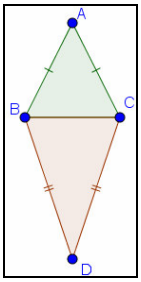
Siamo quindi nelle ipotesi del criterio ALA. Pertanto i triangoli sono uguali e in particolare hanno uguali i lati *BD* e *CE*, perché opposti all'angolo comune di vertice *A*, che è proprio quello che volevamo dimostrare.

Livello 1

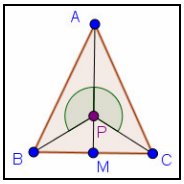
1. Utilizzando riga e compasso costruire un triangolo equilatero.
2. Provare che se un triangolo ha due angoli uguali, esso è isoscele sulla base comune ai due angoli. *Suggerimento*: ragionare per assurdo
3. In figura *ABC* è un triangolo equilatero, *D* è il punto d'incontro delle bisettrici dei suoi angoli interni. Provare che i triangoli *ACD*, *DCB* e *BAD* sono uguali.



4. Se due triangoli isosceli hanno uguali il lato obliquo e uno degli angoli adiacenti alla base sono uguali? *Suggerimento*: considerare la costruzione di un triangolo isoscele. [Sì]
5. La figura seguente è formata da due triangoli isosceli *BAC* e *CDB* aventi la base comune *BC*. Provare che i triangoli *DBA* e *ACD* sono uguali.



6. Provare l'inverso del teorema 13, ossia che un triangolo che ha due angoli uguali è isoscele.
7. Provare il teorema 13 usando il criterio ALA.
8. Provare il teorema 13 usando il criterio LLL.
9. Provare che le mediane relative ai lati obliqui di un triangolo isoscele sono fra loro uguali.
10. Dato un triangolo isoscele *ABC* di base *BC*, sulla mediana *AM* si fissi un punto qualsiasi *P*: provare che $\angle C\hat{P}A = \angle A\hat{P}B$.

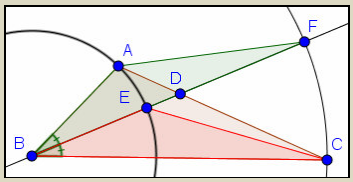


11. Sui lati di un angolo di vertice *O* scegliamo i punti *A*, *B*, *C*, *D* alternativamente sui due lati, in modo che sia $\overline{OA} = \overline{OB}, \overline{OC} = \overline{OD}$, sia *E* l'intersezione di *AD* e *BC*, provare che *OE* biseca l'angolo.

12. L'incentro e il circocentro sono sempre punti interni al triangolo? Giustificare la risposta. [Sì; No]
13. L'ortocentro e il baricentro sono sempre punti interni al triangolo? Giustificare la risposta. [No ; Sì]
14. Su un lato obliquo di un triangolo isoscele *ABC* di base *BC*, si fissi un punto *D* e da esso si tracci la parallela alla base. Tale retta incontrerà l'altro lato obliquo in *E*. Provare che *ADE* è un triangolo isoscele.

Lavoriamo insieme

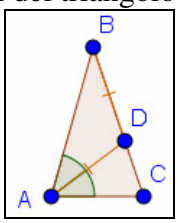
In figura abbiamo un triangolo *ABC*, nel quale abbiamo tracciato la bisettrice del suo angolo di vertice *B*. Poi abbiamo tracciato le circonferenze di centro *B* e raggi *BA* e *BC* rispettivamente. Abbiamo indicato con *E* ed *F* due delle intersezioni di tali circonferenze con la bisettrice. Consideriamo i triangoli *ABF* e *BCE*.



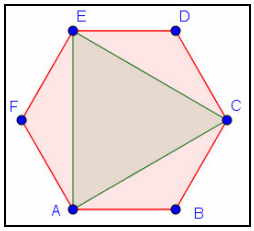
Cosa hanno di particolare questi triangoli? Per prima cosa possiamo dire che *AB* e *BE* sono uguali perché raggi di una stessa circonferenza, così pure *BF* e *BC* e $\angle F\hat{B}A = \angle C\hat{B}D$ perché *FB* è bisettrice dell'angolo di vertice *B*. Ma allora possiamo applicare il criterio LAL ai due triangoli, che avranno perciò anche i rimanenti lati uguali, cioè *AF* e *CE*.

Livello 2

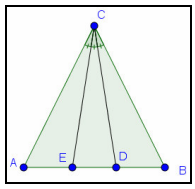
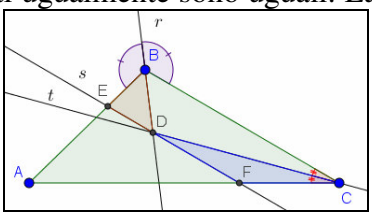
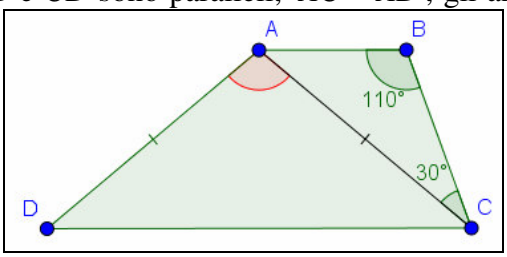
15. Provare che in un triangolo rettangolo i cui angoli acuti sono uno doppio dell'altro, l'ipotenusa è doppia del cateto minore.
16. Nel triangolo rettangolo di lati 3, 4 e 5, quanto misura la mediana relativa all'ipotenusa? [3]
17. Con riferimento al precedente problema, in generale se le misure dei lati sono $a < b < c$, quanto misura la mediana? [a]
18. Se nel triangolo *ABC* si ha $\overline{AB} = 2\overline{AC}$, possiamo sempre dire che $\angle B\hat{C}A = 2\angle C\hat{A}B$? Giustificare la risposta. [No]
19. Se nel triangolo *ABC* si ha $\angle B\hat{C}A = 2\angle C\hat{A}B$, possiamo sempre dire che $\overline{AB} = 2\overline{AC}$? Giustificare la risposta. [No]
20. Il triangolo *ABC* è isoscele sulla base *AB*; costruito sul lato *BC* un quadrato *BCDE*, determinare la misura dell'angolo $D\hat{A}B$. [45°]
21. Il triangolo *ABC* in figura è isoscele sulla base *AC*, *AD* è bisettrice dell'angolo di vertice *A*; $\overline{AD} = \overline{BD}$. Determinare le misure degli angoli interni del triangolo *ABC*. [36°, 72°, 72°]



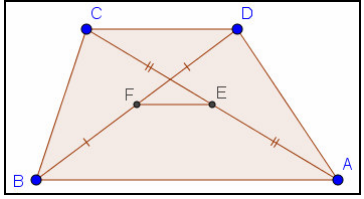
22. Provare che le altezze relative ai lati uguali di un triangolo isoscele sono fra loro uguali.
23. Provare che un triangolo in cui le altezze relative a due suoi lati sono fra loro uguali è isoscele, con base il terzo lato.
24. Provare che il triangolo formato unendo alternativamente tre vertici di un esagono regolare (cioè con lati uguali fra loro e angoli uguali fra loro) è equilatero.



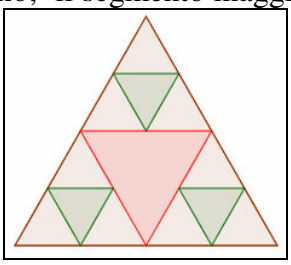
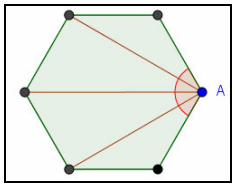
25. Provare il teorema 15, partendo dall'ipotesi che *CH* sia mediana di *AC*.

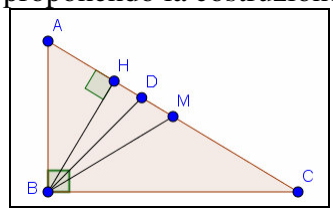
26. Provare il teorema 15, partendo dall'ipotesi che *CH* sia altezza di *AC*.
27. Provare il teorema 20.
28. Le bisettrici di due angoli esterni di un triangolo e del terzo angolo interno si incontrano sempre in un punto? Giustificare la risposta. [Sì]
29. Nella figura seguente i punti *D* ed *E* sono scelti sulla base *AB* del triangolo isoscele *ABC*, in modo che sia $\angle A\hat{C}E = \angle E\hat{C}D = \angle D\hat{C}B$. Provare che il triangolo *CDE* è isoscele sulla base *DE*. In che relazione sono *AE*, *ED* e *DB*?  [Sono uguali]
30. Nell'esercizio precedente è necessario che valga l'uguaglianza, affinché *CDE* sia isoscele? Giustificare la risposta. [No, basta che sia $\angle A\hat{C}E = \angle D\hat{C}B$]
31. Sulla base *AB* di un triangolo isoscele *ABC* sono scelti due punti *D* ed *E*, in modo che sia $\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{EB}$. Provare che il triangolo *CDE* è isoscele.
32. La retta *r* è asse dei segmenti *AB* e *CD*, provare che essi non hanno punti in comune e che $\overline{AD} = \overline{BC}$.
33. Provare che in un triangolo rettangolo isoscele l'altezza relativa all'ipotenusa misura quanto metà dell'ipotenusa.
34. In figura gli angoli segnati e colorati ugualmente sono uguali. La retta *t* è parallela a *BC*. Provare che i triangoli *BDE* e *CFD* sono isosceli. 
35. Nel quadrilatero *ABCD* in figura i lati *AB* e *CD* sono paralleli, $\overline{AC} = \overline{AD}$, gli angoli hanno la misura indicata. Determinare la misura di $D\hat{A}C$.  [100°]

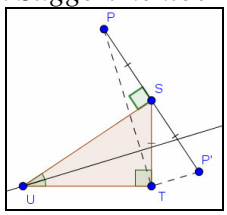
Livello 3

36. In un triangolo isoscele non equilatero quale condizione deve essere verificata dai lati affinché il baricentro sia in posizione inferiore rispetto al circocentro? [Base minore del lato obliquo]
37. In un triangolo isoscele non equilatero quale condizione deve essere verificata dai lati affinché il baricentro sia in posizione inferiore rispetto all'ortocentro? [Base maggiore del lato obliquo]
38. Provare che in un triangolo equilatero la circonferenza circoscritta ha raggio doppio di quella inscritta. (Suggerimento: si tenga conto che tipo di triangolo è quello formato dai due raggi e da mezzo lato del triangolo).
39. Provare che un triangolo in cui le mediane relative a due suoi lati sono fra loro uguali è isoscele, con base il terzo lato. *Suggerimento*: sfruttare le proprietà del baricentro
40. In figura *AB*// *CD* in figura, *E* e *F* sono punti medi di *BD* e *AC* rispettivamente. Se *AB* è il doppio di *CD*, quanto vale *EF* in termini di *AB*?  [1/4]
41. Se dividiamo l'angolo al vertice di un triangolo isoscele *ABC* di vertice *A*, in 41 parti uguali, quanti

triangoli isosceli di vertice *A* otteniamo? Giustificare la risposta. [20]

42. Un quadrato è un poligono di quattro lati tutti fra loro uguali, i cui angoli interni sono tutti retti. Provare che gli angoli del quadrato hanno per bisettrici le diagonali.
43. La figura seguente è stata ottenuta spezzando un'unica bacchetta di legno e usando poi tutti i pezzi. Sapendo che: tutti i triangoli mostrati sono equilateri; tutti i vertici, esclusi quelli del triangolo *grande*, sono punti medi dei segmenti a cui appartengono; il segmento maggiore misura 1; determinare la misura della bacchetta prima di essere spezzata.  [27/4]
44. In figura è mostrato un esagono regolare (un esagono cioè in cui tutti i lati sono fra loro uguali e tutti gli angoli sono fra loro uguali). Uniamo uno dei suoi vertici, *A*, con gli altri che sono estremi dei lati a cui *A* non appartiene. Provare che i segmenti ottenuti dividono l'angolo di vertice *A* in 4 parti a due a due fra loro uguali. 

45. Due triangoli che hanno uguali due lati e la mediana relativa a uno di essi sono sempre uguali? Ovvero: le misure di due lati e della mediana relativa a uno di essi, determinano un solo triangolo? Giustificare la risposta, proponendo la costruzione con riga e compasso. [Sì]
46. Due triangoli che hanno uguali due lati e l'altezza relativa a uno di essi sono sempre uguali? Ovvero: le misure di due lati e dell'altezza relativa a uno di essi, determinano un solo triangolo? Giustificare la risposta, proponendo la costruzione con riga e compasso. [Sì]
47. In figura 

ABC è rettangolo in *B*; *BH* è perpendicolare ad *AC*; *M* è punto medio di *AC*, *BD* è bisettrice dell'angolo retto. Provare che *BD* è anche bisettrice dell'angolo formato da *BM* e *BH*. *Suggerimento*: La mediana relativa all'ipotenusa misura quanto metà dell'ipotenusa
48. In figura 

STU è rettangolo in *T*; *P* e *P'* sono tali che sia *S* punto medio di *PP'*, che a sua volta è perpendicolare a *US*. Provare che *PT* è perpendicolare e *P'S* parallelo alla bisettrice di $T\hat{U}S$.

Lavoriamo insieme

Vogliamo provare che in ogni triangolo un lato misura sempre meno della metà del perimetro. Questo fatto è un corollario della cosiddetta disuguaglianza triangolare. Infatti, chiamiamo *a*, *b* e *c* le misure dei lati di un triangolo. Naturalmente se proviamo che il lato maggiore misura meno del semiperimetro abbiamo provato la proprietà.

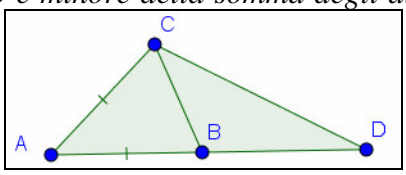
- Se il triangolo è equilatero di lato lungo *a*, ha perimetro 3°; evidentemente $a < \frac{3}{2}a$.
- Supponiamo che il triangolo sia isoscele e che i suoi lati misurino *a*, *a* e *b*. Se il lato maggiore misura *a*, il

semiperimetro misura $\frac{a+a+b}{2}=\frac{2a+b}{2}=\frac{2a}{2}+\frac{b}{2}=a+\frac{b}{2}$, e $a<a+\frac{b}{2}$.

- Se il triangolo è isoscele di lato maggiore b, per la disuguaglianza triangolare abbiamo $b<2a$ da cui dividendo per 2, avremo anche $\frac{b}{2}<a$. Possiamo scrivere allora: $b=\frac{b}{2}+\frac{b}{2}<a+\frac{b}{2}$, che è proprio quello che volevamo provare.
- Consideriamo adesso l'ultimo caso, supponiamo cioè che il triangolo sia scaleno e le sue misure siano tali che si abbia: $a<b<c$. Il semiperimetro in questo caso misura $\frac{a+b+c}{2}$. D'altro canto la disuguaglianza triangolare dice anche che $a<b+c$. Ragionando come prima: $a=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}<\frac{a}{2}+\frac{b+c}{2}=\frac{a+b+c}{2}$. Quest'ultima disuguaglianza rappresenta la tesi.

Livello 2

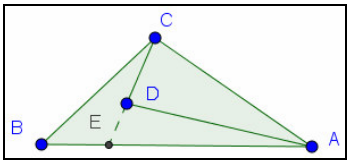
49. Provare che mediante la costruzione descritta in figura si dimostra la cosiddetta disuguaglianza triangolare: *in un triangolo un lato è minore della somma degli altri due*. In figura *AD* è il lato maggiore, *AB* e *AC* sono fra loro uguali.



50. Provare che in un triangolo ad angolo maggiore sta opposto lato maggiore, inverso del teorema 24.
51. Provare che in un triangolo ogni altezza relativa a un lato è minore della semisomma degli altri due lati.
52. Provare che in un triangolo ogni mediana relativa a un lato è minore della semisomma degli altri due lati.
53. Provare che in un triangolo la somma delle mediane è minore del perimetro.
54. Provare che la somma delle distanze di un punto interno a un triangolo *ABC* dai suoi vertici è minore del semiperimetro.

Livello 3

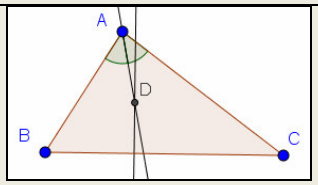
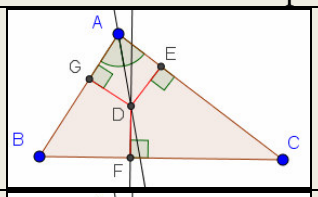
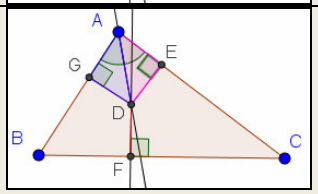
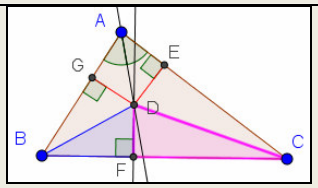
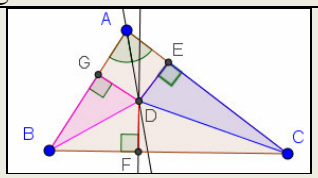
55. I lati *AB*, *AC* e *BC* del triangolo *ABC* sono lunghi rispettivamente 17 *cm*, 18 *cm* e 19 *cm*. Si sceglie un qualsiasi punto *P* interno al triangolo e per esso si conducono tre rette passanti per i vertici che con i lati opposti determinano i segmenti *AD*, *BE* e *CF*. Provare che la somma delle misure di questi tre segmenti è minore di 56 *cm*. *Suggerimento*. Considerare che ognuno dei tre segmenti deve essere minore di uno dei due lati uscenti dallo stesso vertice
56. Dato un triangolo *ABC*, in cui *AB* è il lato maggiore, si scelga un punto *D* al suo interno. Provare che $\overline{AD}+\overline{DC}<\overline{AB}+\overline{BC}$. *Suggerimento*. Prolungare *AD* fino a incontrare *AC*



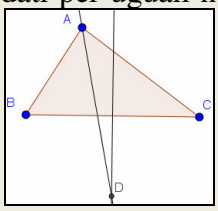
57. Dato un triangolo acutangolo provare che la somma delle sue altezze è minore del perimetro. La proprietà vale anche per gli altri tipi di triangoli? Giustificare la risposta. [Sì]
58. Quanti triangoli isosceli esistono con il perimetro uguale a 19 *cm* e con le misure dei lati espresse da numeri interi? [5]
59. Quanti triangoli scaleni esistono con il perimetro uguale a 15 *cm* e con le misure dei lati espresse da numeri interi? [3]

Giochiamo alla matematica

Vogliamo proporre una "dimostrazione", naturalmente falsa, che ogni triangolo è isoscele. Essa è dovuta a W.W. Rouse Ball, ed è stata pubblicata nel libro *Mathematical recreations and problems* per la prima volta nel 1892. Proponiamo questa dimostrazione errata per far comprendere allo studente che nelle matematiche non debbono mai trarsi conclusioni affrettate, ma si deve giustificare ogni affermazione.

SCHEMA DIMOSTRATIVO			
PASSO	AZIONE	CONSEGUENZA	GIUSTIFICAZIONE
1	Tracciamo la bisettrice dell'angolo $B\hat{A}C$ e l'asse del segmento BC	 Le due rette si incontrano nel punto D.	
2	Tracciamo DE, DF e DG perpendicolari ai lati AC, CB e AB rispettivamente		
3	Consideriamo i triangoli AED e DGA.	 Sono uguali.	Per il criterio di isometria dei triangoli rettangoli, hanno • il lato AD in comune; • gli angoli di vertice A uguali (AD è bisettrice)
4	Consideriamo AE e AG, e DE e DG.	Sono coppie di cateti uguali.	Per il passo 3.
5	Consideriamo i triangoli BDF e DCF	 Sono uguali.	Per il criterio di isometria dei triangoli rettangoli. hanno • il cateto DF in comune; • $\overline{DB} = \overline{DC}$ perché DF è asse di BC.
6	Consideriamo DC e DB.	Sono uguali.	Per il passo 5.
7	Consideriamo i triangoli DEC e GDB.	 Sono uguali.	Per il criterio di isometria dei triangoli rettangoli. Hanno • i cateti DE e DG uguali per il passo 4; • $\overline{DB} = \overline{DC}$
8	Consideriamo EC e GB.	Sono uguali.	Per il passo 7.
9	Consideriamo AC e AB.	Sono uguali, quindi ABC è isoscele.	Sono somma di segmenti fra loro uguali.

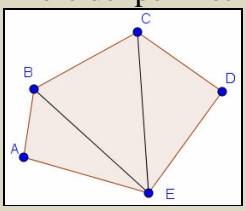
L'assurdità del risultato dipende dal fatto che è vero che la bisettrice di $B\hat{A}C$ e l'asse di BC si incontrano in un punto D mentre non lo è che in un triangolo qualsiasi D è interno ad ABC. In effetti se ABC non è isoscele sulla base AB, il punto D è esterno ad ABC, come si vede nella figura seguente. Del resto le figure usate mostrano che effettivamente i triangoli dati per uguali non lo sono, proprio perché la retta per DF non è il varo asse di BC.



Per la prova Invalsi

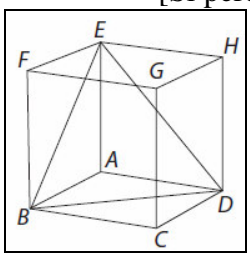
Lavoriamo insieme

In figura abbiamo disegnato un pentagono convesso e da uno dei suoi vertici abbiamo tracciato i segmenti che lo uniscono con i due vertici a esso non adiacenti (cioè non appartenenti allo stesso lato). Vogliamo provare che la somma di questi due segmenti è minore del perimetro del pentagono

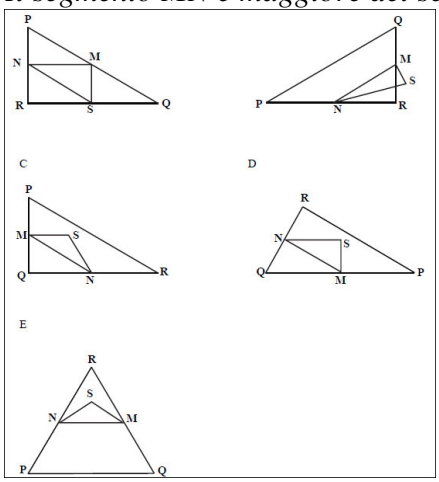


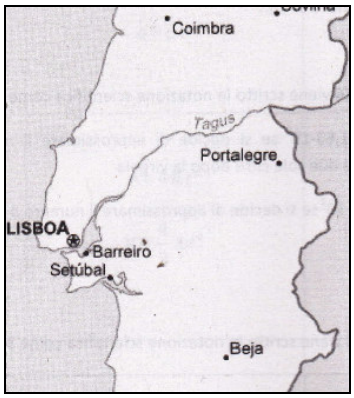
Consideriamo il triangolo *ABE*; per la disuguaglianza triangolare possiamo dire che *EB* è minore degli altri due lati, cioè $\overline{EB} < \overline{EA} + \overline{AB}$. Adesso consideriamo il triangolo *CDE*, sempre per la stessa proprietà precedente possiamo scrivere: $\overline{CE} < \overline{CD} + \overline{DE}$. Se adesso sommiamo membro a membro queste disuguaglianze, otteniamo: $\overline{EB} + \overline{CE} < \overline{EA} + \overline{AB} + \overline{CD} + \overline{DE}$. Dato che il secondo membro contiene un lato in meno del perimetro del poligono è un valore minore dello stesso perimetro. Abbiamo così mostrato ciò che volevamo.

1. (Invalsi 2005) In un triangolo isoscele l'angolo al vertice è metà dell'angolo alla base. Quanto misurano gli angoli del triangolo? [A]
   A) 72º , 72º , 36º B) 30º , 60º , 90º C) 36º , 36º , 72º D) 90º , 45º , 45º
2. (Invalsi 2011) Un triangolo ha un lato di 6 *cm* e uno di 10 *cm*. Quale tra le seguenti non può essere la misura della lunghezza del terzo lato? A) 6,5 *cm* B) 10 *cm* C) 15,5 *cm* D) 17 *cm* [D]
3. (Invalsi 2012) La seguente figura rappresenta in prospettiva un cubo che è stato sezionato con il piano passante per i vertici B, D, E. Marina afferma: "*Il triangolo BDE è un triangolo equilatero*". Marina ha ragione? Giustificare la risposta. [Sì perché i triangoli cui appartengono sono uguali]

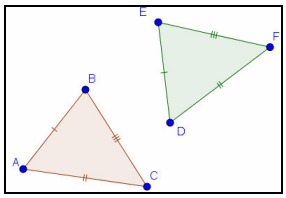


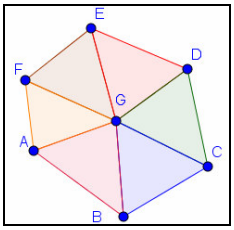
4. (OCSE-PISA) Tra le figure rappresentate qui sotto, cerchia l'unica che corrisponde alla descrizione seguente: *il triangolo PQR è un triangolo rettangolo con l'angolo retto in R. Il segmento RQ è minore del segmento PR. M è il punto medio del segmento PQ ed N è il punto medio del segmento QR. S è un punto all'interno del triangolo. Il segmento MN è maggiore del segmento MS.* [D]



5. (Invalsi 2017) 

Sulla cartina geografica sono indicate alcune città del Portogallo. Tra di esse ci sono: Lisbona (in portoghese Lisboa), Coimbra (a circa 180 km in linea d'aria da Lisbona) e Beja (a circa 140 km in linea d'aria da Lisbona). La distanza in linea d'aria tra Beia e Coimbra è A) sicuramente maggiore di 320 km e minore di 500 km B) sicuramente maggiore di 40 km e minore di 320 km C) circa 320 km D) circa 40 km [B]

6. Nella figura seguente sono disegnati due triangoli uguali 

con i lati della stessa misura segnati allo stesso modo. Quale fra le seguenti uguaglianze è corretta? [D]
A) $\angle A\hat{B}C > \angle D\hat{E}F$ B) $\angle A\hat{B}C = \angle C\hat{A}B$ C) $\angle B\hat{C}A = \angle F\hat{D}E$ D) $\angle C\hat{A}B = \angle F\hat{D}E$
7. Quale fra le seguenti affermazione NON è corretta? A) In un triangolo isoscele tutte le mediane sono fra loro uguali B) In un triangolo isoscele due altezze sono fra loro uguali C) In nessun triangolo isoscele tutte le bisettrici sono anche mediane D) In un triangolo scaleno mediane e bisettrici sono segmenti distinti. [C]
8. In figura abbiamo costruito l'esagono *ABCDEF* mediante l'unione di sei triangoli. Quanto misura la somma degli angoli interni di *ABCDEF*? 

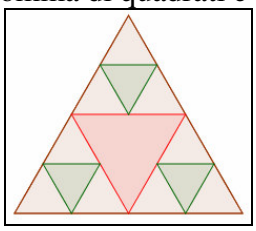
[720°]
9. Se nell'esercizio precedente, tutti i triangoli fossero stati equilateri, quanto misurerebbe ciascuno degli angoli interni dell'esagono? A) 60° B) 90° C) 120° D) Gli angoli non hanno tutti la stessa misura [C]
10. Un triangolo isoscele ha un angolo di 70°, quanto misurano gli altri due angoli? A) 70° e 40° B) 55° e 55° C) Non esistono triangoli isosceli del genere D) Le informazioni non sono sufficienti per potere rispondere [D]
11. Quali fra le seguenti coppie di misure non possono rappresentare quelle degli angoli acuti di un triangolo rettangolo scaleno? A) (45°; 45°) B) (60°; 30°) C) (15°30′20″; 74°29′40″) D) (1°; 89°) [A]

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi

1. In un triangolo *ABC* isoscele, l'angolo al vertice $2n \cdot \alpha°$. Tale angolo lo dividiamo in $2n$ parti uguali, e consideriamo le intersezioni di questi angoli con la base opposta, ottenendo n triangoli isosceli. Quanto misurano ciascuno degli angoli alla base di tali triangoli?
[$90° - n \cdot \alpha°$; $90° - (n-1) \cdot \alpha°$; $90° - (n-2) \cdot \alpha°$; ... ; $90° - \alpha°$]
2. Dimostrare che se le misure a, b e c dei lati di un triangolo verificano l'uguaglianza $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$, allora il triangolo è equilatero. Suggerimento: esprimere l'uguaglianza come somma di tre

quadrati e tenere conto che se la somma di quadrati è zero allora tutti i quadrati sono zero.

3. Consideriamo la seguente figura,  in cui il triangolo maggiore è equilatero, gli altri hanno per vertici i punti medi dei segmenti più piccoli cui appartengono. Chiamiamo passo ogni volta che passiamo a un triangolo più piccolo. Così il passo 0 è il triangolo iniziale; il passo 1, quello con il triangolo rosso; il passo 2 quello con i 3 triangoli verdi. Se continuiamo la costruzione fino al passo 100, quanti triangolini costruiremo in questo passo? Quanto misurerà il loro lato se il lato del triangolo grande è 1 *cm*? [3^{99}; $1/2^{100}$ *cm*]
4. Qual è il minimo perimetro che può avere un triangolo isosceli, i cui lati hanno misure espresse da numeri interi, se è un numero pari? E se è un numero dispari? [8; 7]
5. Qual è il minimo perimetro che può avere un triangolo scaleno, i cui lati hanno misure espresse da numeri interi, se è un numero pari? E se è un numero dispari? [12; 9]

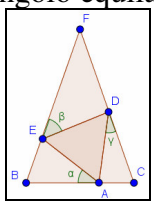
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
AHSME = Annual High School Mathematics Examination K = Kangourou MT = Mathematics Teacher, rivista della NCTM

Lavoriamo insieme

Questo quesito è stato pubblicato nel numero di Marzo 1994 della rivista Mathematics Teacher.
Qual è la minima somma fra i due angoli più grandi di un triangolo scaleno i cui angoli hanno tutti misure intere, in gradi?
Dato che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180° ed il triangolo è scaleno, i suoi angoli sono tutti e tre diversi e i casi estremi sono (1°, 2°, 177°), in cui la somma fra i due maggiori è la massima possibile, 179°, e (59°, 60°, 61°) in cui la detta somma è la minima possibile, 121°.

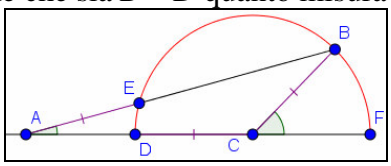
1. (AHSME 1957) Consideriamo il teorema *Se due angoli di un triangolo sono uguali allora il triangolo è isoscele*. Esattamente due dei seguenti enunciati equivalgono a esso. Quali sono? [C) e D)]
A) *Se due angoli di un triangolo non sono uguali il triangolo non è isoscele* B) *Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali.* C) *Se un triangolo non è isoscele non ha due angoli uguali.* D) *Condizione necessaria affinché due angoli di un triangolo siano uguali è che il triangolo sia isoscele.*
2. (AHSME 1957) Nel triangolo *ABC* la differenza fra le misure degli angoli di vertici *A* e *B* è 30°. Sul lato *BC* si scelga un punto *D* in modo che *ACD* risulti isoscele sulla base *AD*, determinare la misura dell'angolo $D\hat{A}B$. [15°]
3. (AHSME 1960) Il triangolo in figura è isoscele sulla base *BC*, *ADE* è un triangolo equilatero i cui vertici appartengono ai lati di *BFC*. Quale delle seguenti uguaglianze è vera? [D]



A) $\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}$ B) $\beta = \frac{\alpha-\gamma}{2}$ C) $\alpha = \frac{\beta-\gamma}{2}$ D) $\alpha = \frac{\beta+\gamma}{2}$ E) Nessuna delle altre

4. (AHSME 1961) Il triangolo *ABC* è isoscele sulla base *AC*. Sui lati obliqui *BC* e *AB* si possono fissare rispettivamente i punti *P* e *Q* in modo che i segmenti *AC*, *AP*, *PQ* e *QB* siano fra loro uguali. Determinare la misura dell'angolo di vertice *B*. [≈ 25°42′51″]
5. (AHSME 1977) Di un triangolo isoscele *ABC* di base *BC* sappiamo che $\angle B\hat{A}C = 80°$. Si considerino

tre punti *D*, *E* e *F* rispettivamente sui lati *BC*, *AC* e *AB* in modo che si abbia $\overline{CE} = \overline{CD}, \overline{BF} = \overline{BD}$. Determinare la misura di $F\hat{D}E$. [50°]

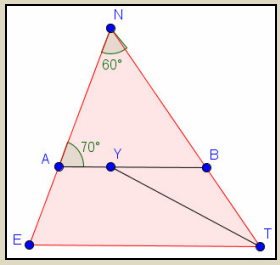
6. (AHSME 1978) In un triangolo *ADE* l'angolo in *D* misura 140°, i punti *B* e *C* appartengono rispettivamente ai lati *AD* e *AE* e i punti *A*, *B*, *C*, *D*, *E* sono tutti distinti. Se $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE}$, quanto misura $E\hat{A}D$? [10°]
7. Se nell'esercizio precedente si suppone che sia $B \equiv D$ quanto misura $E\hat{A}D$? [20°]
8. (AHSME1979) Nella figura seguente 

DF è diametro di una semicirconferenza di centro *C*, *A* appartiene al prolungamento di *DF*, *B* appartiene alla circonferenza ed *E* è il punto d'intersezione di *AB* con la circonferenza. Sapendo che $\overline{AE} = \overline{CD}$ e che $\angle F\hat{C}B = 45°$, determinare la misura di $F\hat{A}B$. *Suggerimento*. Congiungere *E* con *C* [15°]

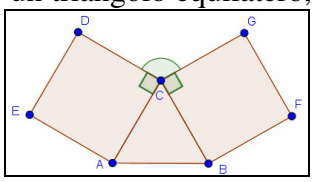
Lavoriamo insieme

Il seguente quesito è stato pubblicato sul numero di Novembre 1995 del Mathematics Teacher.

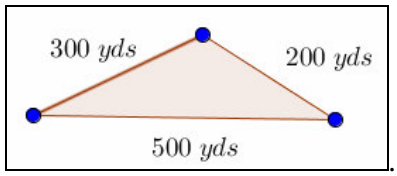
In figura AB // ET, TY biseca $B\hat{T}E$, $\angle T\hat{N}E = 60°, \angle N\hat{A}B = 70°$. *Determinare* $\angle B\hat{Y}T + \frac{1}{2}\angle A\hat{E}T$.



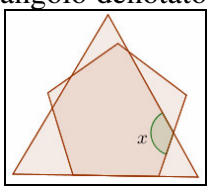
Abbiamo $\angle A\hat{B}N = 180° - (60° + 70°) = 50°$. Poi $\angle A\hat{E}T = \angle N\hat{A}B = 70°$, perché corrispondenti rispetto alle parallele *AB* ed *ET* tagliate dalla trasversale *EN*. Poi $\angle E\hat{T}B = 180° - (60° + 70°) = 50°$ E perciò $\angle Y\hat{T}B = \angle E\hat{T}Y = \frac{1}{2}\angle E\hat{T}B = 25°$. Che è lo stesso valore di $\angle B\hat{Y}T$, perché alterno interno con $\angle E\hat{T}Y$. Infine $\angle B\hat{Y}T + \frac{1}{2}\angle A\hat{E}T = 25° + \frac{1}{2}\cdot 70° = 60°$.

9. (AHSME 1980) In figura *ABC* è un triangolo equilatero, i quadrilateri sono due quadrati. Determinare la misura di $D\hat{C}G$. 

[120°]
10. (AHSME 1986) *ABC* è un triangolo rettangolo in *C* e con $\angle C\hat{A}B = 20°$. Se *BD* è la bisettrice di $A\hat{B}C$, determinare la misura di $B\hat{D}C$. [55°]
11. (AHSME 1989) Nel triangolo *ABC* gli angoli misurano rispettivamente 100°, 50° e 30°. Siano *AH* un'altezza e *BM* una mediana. Determinare la misura dell'angolo $M\hat{H}C$. [30°]
12. (AHSME 1993) Nel triangolo *ABC* gli angoli di vertici *A* e *C* rispettivamente misurano 55° e 75°, *D* è un punto su *AB* ed *E* è su *BC*. Sapendo che $\overline{DB} = \overline{BE}$, determinare la misura di $B\hat{E}D$. [75°]
13. (MT1994) Un contadino lesse un avviso di vendita per un lotto di terreno al prezzo di $ 1250.

Nell'avviso vi era il seguente disegno del lotto 

. Perché il contadino non comprò il terreno? [Le misure sono certamente sbagliate perché ...]

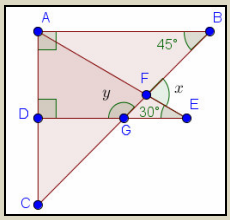
14. (K2005) In un triangolo ABC l'angolo in A ha misura tripla di quella dell'angolo in B e metà di quella dell'angolo in C. Quanti gradi misura l'angolo in A? A) 30 B) 36 C) 54 D) 60 E) 72 [C]
15. (K2005) In figura sono rappresentati un triangolo equilatero ed un pentagono regolare, parzialmente sovrapposti; in particolare, uno dei lati del triangolo giace sulla stessa retta su cui sta uno dei lati del pentagono. Quanto misura in gradi l'angolo denotato con x? A) 136 B) 132 C) 128 D) 124 E) servono più informazioni 

[B]

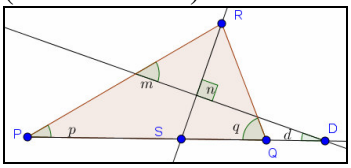
Questions in English

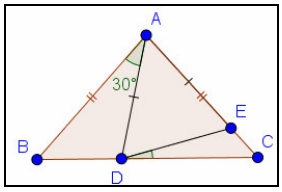
Working together

This question was published by Mathematics Teacher in the issue of November 1994.

Given the diagram shown, determine the measures of angles x and y. 

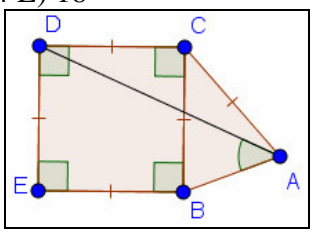
We have $\angle D\hat{A}E = 60° \Rightarrow \angle E\hat{A}B = 30°, \angle B\hat{F}A = 180° - (30° + 45°) = 105°$, x is supplementary respect this last angle, so x = 75°. Analogously $\angle E\hat{F}G = \angle B\hat{F}A = 105° \Rightarrow \angle E\hat{G}F = 180° - (30° + 105°) = 45°$, and its supplementary is y = 135°.

16. (AHSME1953) If the three points of contact of a circle inscribed in a triangle are joined, the angles of the resulting triangle are always: A) equal to 60° B) one obtuse angle and two unequal acute angles C) one obtuse angle and two equal acute angles D) acute angles E) unequal to each other [D)]
17. (AHSME1954) In ΔABC, $\overline{AB} = \overline{AC}, \angle\hat{A} = 40°$ .Point O is within the triangle with $\angle O\hat{B}C = \angle O\hat{C}A$ The number of degrees in $\angle B\hat{O}C$ is: A) 110° B) 35° C) 140° D) 55° E) 70° [A)]
18. (AHSME1954) Given ΔPQR with RS bisecting $\angle\hat{R}$, PQ extended to D and $\angle n = 90°$, then: 

A) $\angle m = \frac{\angle p - \angle q}{2}$ B) $\angle m = \frac{\angle p + \angle q}{2}$ C) $\angle d = \frac{\angle p + \angle q}{2}$ D) $\angle d = \frac{\angle m}{2}$ E) none of these is correct [B]
19. (AHSME1956) In the figure 

$\overline{AB} = \overline{AC}, \angle B\hat{A}D = 30°$ and $\overline{AE} = \overline{AD}$, then $\angle C\hat{D}E$ is? A) 7,5° B) 10° C) 12,5° D) 15° E) 20° [D)]

20. (AHSME1956) The number of scalene triangles having all sides of integral lengths, and perimeter less than 13 is: A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 18 [C)]

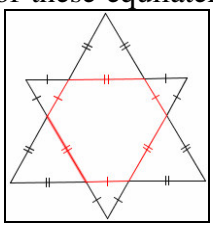
21. (AHSME1956) In the figure 

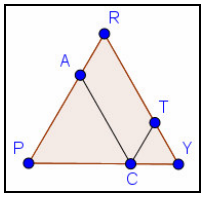
the sides, except AB are equals. The angles in B,C, D and E are right. The angle $D\hat{A}E$ A) depends upon ΔABC B) is independent of the triangle C) may equal $\angle C\hat{A}D$ D) can never equal $\angle C\hat{A}B$ E) is greater than 45° and less than 90° [B)]

22. (AHSME1957) The number of distinct lines representing the altitudes, medians, and interior angle bisectors of a triangle that is isosceles, but not equilateral, is: A) 9 B) 7 C) 6 D) 5 E) 3 [B)]

23. (AHSME1962) Let the bisectors of the exterior angles at B and C of ΔABC meet at D. Then, if all measurements are in degrees, $\angle B\hat{D}C$ equals [C)]

A) $\frac{90° - \hat{A}}{2}$ B) $90° - \hat{A}$ C) $\frac{180° - \hat{A}}{2}$ D) $180° - \hat{A}$ E) $180° - 2\hat{A}$

24. (MT1995) The lengths of the sides of these equilateral triangles are 15 and 12. Find the perimeter of the inner hexagon.  [27]

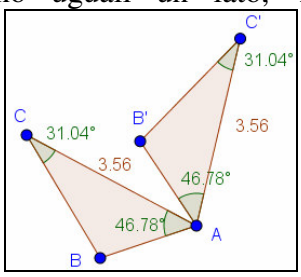
25. (MT1995) In the figure, the triangle PRY is equilateral, 

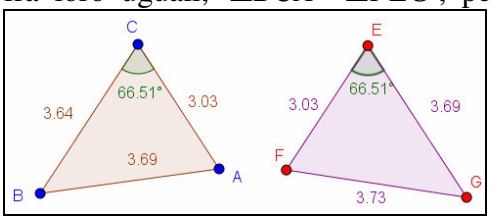
its perimeter is 36; AC // PY, AR // TC. Find the perimeter of $CART$. [24]

Attività di recupero

Criteri di isometria dei triangoli

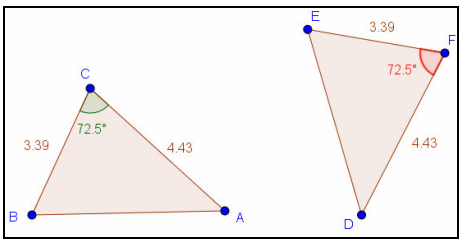
Fase 1: Osserva

- In figura i due triangoli hanno uguali un lato, $\overline{AC} = \overline{AC'}$, e gli angoli a esso adiacenti, $\angle B\hat{C}A = \angle B'\hat{C}'A, C\hat{A}B = C'\hat{A}B'$. 

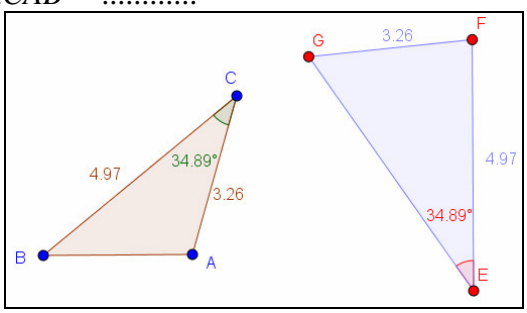
Pertanto sono uguali per il II criterio di isometria dei triangoli, quello noto con la sigla ALA. La corrispondenza fra gli altri enti uguali è la seguente: $\overline{BC} = \overline{BC'}, \overline{AB} = \overline{AB'}, \angle A\hat{B}C = \angle A\hat{B}'C'$.
- Invece i due triangoli in figura non sono uguali, anche se hanno due lati, $\overline{CA} = \overline{FE}, \overline{AB} = \overline{EG}$, e un angolo fra loro uguali, $\angle B\hat{C}A = \angle F\hat{E}G$, perché l'angolo dato non è quello compreso tra i due lati uguali. 

Fase 2: Completa ...

- In figura consideriamo due triangoli uguali per il criterio LAL, in cui abbiamo segnato ugualmente enti fra loro uguali.



Vogliamo determinare le corrette corrispondenze di isometria fra i rimanenti enti dei due triangoli.
Non vi sono problemi per i lati, dato che vi è una sola coppia, quindi possiamo scrivere: …… = ……. Adesso passiamo agli angoli. Per quel che riguarda $A\hat{B}C$, poiché esso è opposto al lato …… e quest'ultimo è uguale al lato ……, possiamo dire che si ha: $\angle A\hat{B}C = \angle$ ..... . È evidente quindi che si ha anche: $\angle C\hat{A}B =$ .....

- In figura 

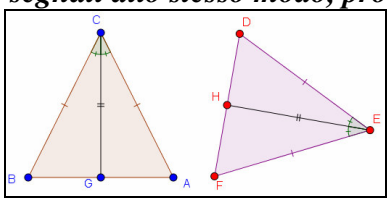
i due triangoli hanno due lati e un angolo uguali. Però non possiamo dire che i triangolo sono ..... perché l'angolo uguale, nel triangolo *ABC* è opposto al lato ..... mentre nel triangolo *FEG* è opposto al lato ..... che è uguale invece al lato ..... pertanto non possiamo applicare il criterio .....

Fase 3: Prova!

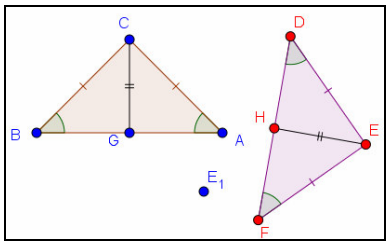
1. ABC e DEF sono due triangoli con tutti e tre i lati uguali, possiamo dire che sono uguali se $\overline{AB} = \overline{DF}$? Giustificare la risposta. [Sì]

Nelle figure seguenti, enti uguali sono segnati allo stesso modo, provare quanto richiesto

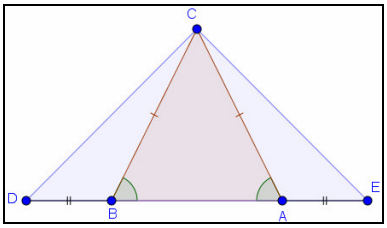
2. $ABC \overset{\Delta}{=} DEF$



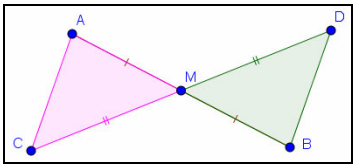
3. $ABC \overset{\Delta}{=} DEF$



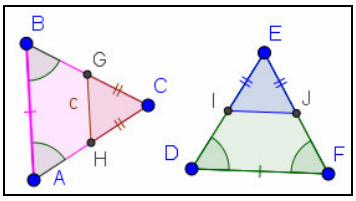
4. $BDC \overset{\Delta}{=} CEA$



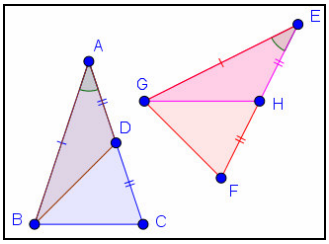
5. $AMC \overset{\Delta}{=} BMD$



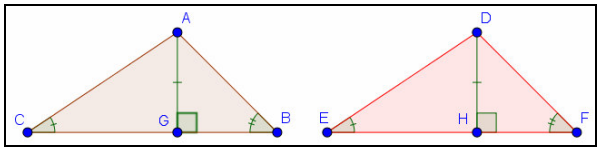
6. $HGC \overset{\Delta}{=} IEJ$



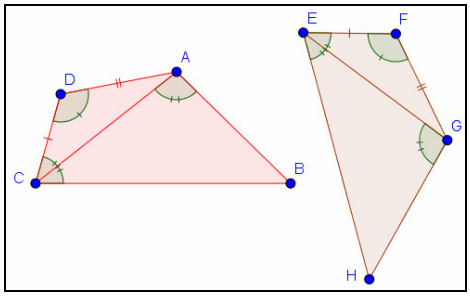
7. $BAD \overset{\Delta}{=} GEH ; BDC \overset{\Delta}{=} GHF$



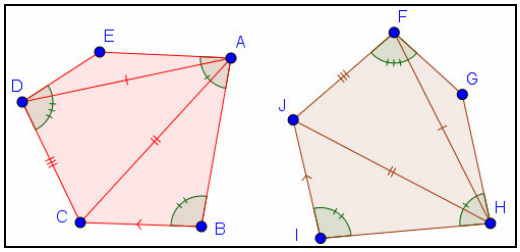
8. $ABC \overset{\Delta}{=} EDF$



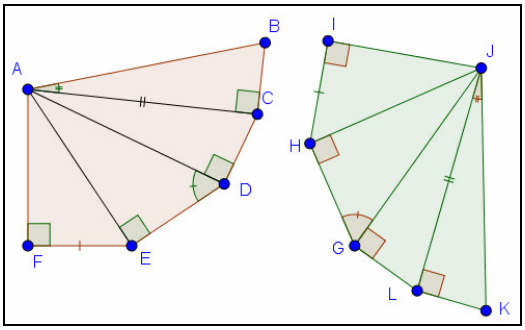
12. $ABCD \overset{\Delta}{=} EFGH$



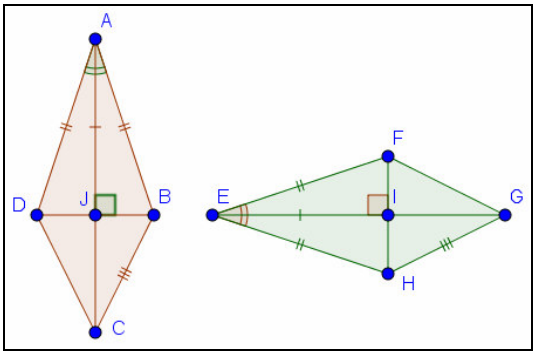
13. $ABCDE \overset{\Delta}{=} FGHIJ$



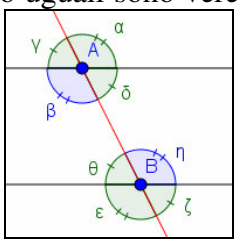
14. $ABCDEF \overset{\Delta}{=} GHIJKL$

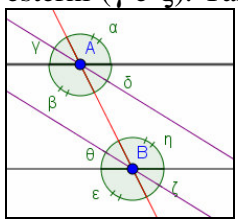


15. $ABCD \overset{\Delta}{=} EFGH$

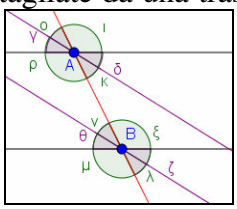


Rette parallele tagliate da una trasversale. Classificazione dei triangoli rispetto agli angoli

- Vogliamo provare che se due angoli alterni interni sono uguali sono vere tutte le altre proprietà riportate nei richiami teorici. Consideriamo la seguente figura: 

stiamo supponendo che, per esempio, si abbia: $\beta = \eta$. Possiamo dire che si ha anche $\alpha = \varepsilon$ (angoli alterni esterni), perché questi sono angoli opposti al vertice dei precedenti e sono perciò a essi uguali. Ma si ha anche $\delta = \theta$ (gli altri due angoli alterni interni) entrambi supplementari di β e η rispettivamente; $\gamma = \theta$, $\alpha = \eta$, $\beta = \varepsilon$ e $\delta = \zeta$ (angoli corrispondenti), perché supplementari di angoli uguali. Ci rimane perciò solo da provare che gli angoli coniugati di uno stesso tipo sono fra loro supplementari. Ma anche questo è semplice: per esempio consideriamo α e ζ, si ha $\alpha = \eta = 180° - \zeta$.
- In figura abbiamo tracciato le bisettrici relative a una coppia di angoli alterni interni (δ e θ) e quindi anche a una coppia di angoli alterni esterni (γ e ζ). Tali rette appaiono fra loro parallele, vogliamo provare che questa sensazione è corretta. 

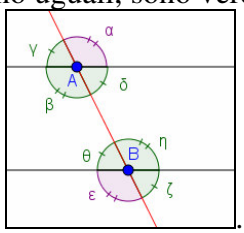
Poiché anche queste rette sono tagliate dalla stessa

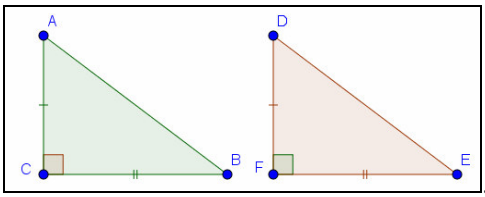
trasversale, per provare che sono parallele basta provare che per esse vale una qualsiasi delle proprietà valide per le rette parallele tagliate da una trasversale. Tracciamo i nuovi angoli e lasciamo dei "vecchi" angoli, solo quelli bisecati.. 

Dato che le rette sono bisettrici di γ e δ, è evidente che $\gamma = 2 \cdot o$ e $\theta = 2 \cdot \nu$. Ma allora, visto che $\gamma = \theta$ è anche $o = \nu$, cioè vi è una coppia di angoli corrispondenti uguali, quindi le bisettrici sono parallele.

- In un triangolo isoscele l'angolo al vertice è doppio di uno degli angoli alla base, quanto misurano gli angoli del triangolo? Indichiamo con α la misura di uno degli angoli alla base, quindi la misura dell'angolo al vertice è 2α; la somma di tutti gli angoli interni del triangolo è perciò $\alpha + \alpha + 2\alpha = 4\alpha$. Poiché la precedente somma deve essere uguale a 180°, abbiamo che α è un quarto di 180°, cioè 45°, quindi $2\alpha = 90°$. Cioè il triangolo è anche rettangolo.
- Gli angoli interni di un triangolo stanno fra loro come i numeri 2, 3, 4: quanto misura ciascuno di essi? Dire che gli angoli stanno fra loro come i numeri 2, 3 e 4, vuol dire che esiste un'unità di misura, indicata per esempio con α, secondo la quale gli angoli sono rispettivamente 2α, 3α e 4α. La loro somma è perciò $2\alpha + 3\alpha + 4\alpha = 9\alpha$; ma, poiché tale somma deve essere uguale a 180°, si ha $9\alpha = 180°$. Quindi $\alpha = 20°$. I tre angoli sono quindi rispettivamente di 40°, 60°, 80°.

Fase 2: Completa …

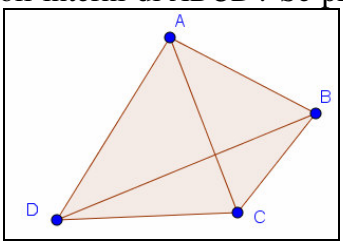
- Vogliamo provare che, se due angoli alterni esterni sono uguali, sono vere tutte le altre proprietà riportate nei richiami teorici. Consideriamo la seguente figura: 

. Stiamo supponendo che, per esempio, sia: $\alpha = \varepsilon$. Possiamo dire che si ha anche $\beta = \eta$ (angoli alterni …….), perché questi sono angoli …… dei precedenti, sono perciò a essi uguali. Si ha anche $\delta =$ …… e $\gamma =$ ..... (angoli corrispondenti), perché i primi sono supplementari di ..... e i secondi di ....., quindi angoli supplementari di angoli uguali sono fra loro uguali. Abbiamo perciò provato che si ha: $\alpha =$ ..... $=$ ..... $=$ ..... e $\delta =$ ..... $=$ ..... $=$ ..... Vogliamo adesso provare che gli angoli ……. sono fra loro supplementari. Consideriamo per esempio β e θ. Si ha: …… ……...
- In figura sono rappresentati due triangoli rettangoli 

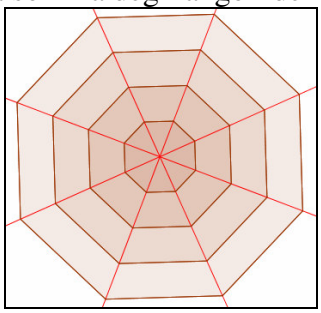
. Vogliamo giustificare la validità del criterio di isometria dei triangoli rettangoli, nel caso in cui sono rispettivamente uguali i cateti. possiamo applicare immediatamente il criterio ....., dato che l'angolo che i cateti hanno in comune è, per entrambi i triangoli, l'angolo ……
- Se a essere rispettivamente uguali sono un cateto e l'ipotenusa, possiamo, per il nostro scopo, utilizzare le costruzioni. Infatti, dopo aver costruito l'angolo retto, abbiamo fissato i cateti uguali *AC* e .... rispettivamente. Per costruire le ipotenuse apriamo il compasso con la stessa apertura e lo puntiamo una volta su *A* e una volta su ...: le intersezioni di queste circonferenze con le rette per *C* e *F*, perpendicolari ad ..... e ....., sono i punti *C* e *F*. È perciò evidente che *C* disti da *B* quanto *F* dista da ....., cioè i cateti …… ed …… sono uguali, possiamo quindi applicare il criterio ……

Fase 3: Prova!

1. Provare che se due rette hanno una coppia di angoli coniugati interni supplementari allora hanno anche gli angoli alterni interni, alterni esterni e corrispondenti fra loro uguali, e le coppie di angoli coniugati fra loro supplementari.
2. Provare che se due rette hanno una coppia di angoli coniugati esterni supplementari allora hanno anche gli angoli alterni interni, alterni esterni e corrispondenti fra loro uguali, e le coppie di angoli coniugati fra loro supplementari.
3. Provare che se due rette hanno una coppia di angoli corrispondenti uguali allora hanno anche gli angoli alterni interni, alterni esterni e gli altri corrispondenti fra loro uguali, e le coppie di angoli coniugati fra loro supplementari.
4. Provare che bisettrici relative a una coppia di angoli corrispondenti formati da due parallele tagliate da una trasversale sono rette fra loro parallele.
5. Provare che il triangolo formato tracciando una parallela a un lato di un qualsiasi triangolo, intercettandone due lati, ha gli angoli della stessa misura del triangolo di partenza.
6. Provare che due triangoli rettangoli che hanno uguali un cateto e l'angolo a essi opposti, sono uguali.
7. Provare che due triangoli rettangoli che hanno uguali l'ipotenusa e un angolo acuto, sono uguali.
8. Determinare la misura degli angoli interni di un triangolo con due angoli uguali, in cui il terzo angolo è quadruplo di ciascuno degli angoli alla base. [30°, 30°, 120°]
9. Determinare la misura degli angoli interni di un triangolo con due angoli uguali, in cui il terzo angolo è i quattro terzi di ciascuno degli angoli alla base. [54°, 54°, 72°]
10. Gli angoli interni di un triangolo stanno fra loro come i numeri 3, 6, 9. Determinare le loro misure. Che tipo di triangolo è? [30°, 60°, 90°; rettangolo]
11. Gli angoli interni di un triangolo stanno fra loro come i numeri 4, 5, 6. Determinare le loro misure. [48°, 60°, 72°]
12. In un triangolo rettangolo un angolo acuto è triplo dell'altro. Determinarne le misure. [22°30′, 67°30′]
13. In un triangolo rettangolo un angolo acuto è quadruplo dell'altro. Determinarne le misure. [36°, 54°]
14. In figura abbiamo costruito il quadrilatero *ABCD* mediante l'unione di quattro triangoli. Sai dire quanto misura la somma degli angoli interni di *ABCD*? Se prendiamo altri 4 triangoli, la risposta cambia? Giustificarla. [360°; No, purché rimanga convesso]



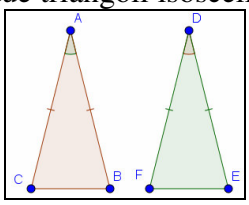
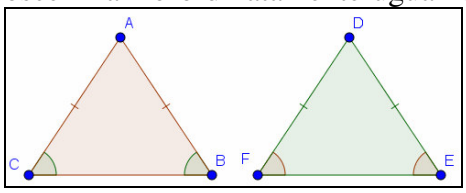
15. In figura abbiamo modellizzato la tela di un ragno, considerando 8 triangoli che abbiamo suddiviso con rette parallele. Quanto misura la somma degli angoli dell'intera *ragnatela*? [10080°]

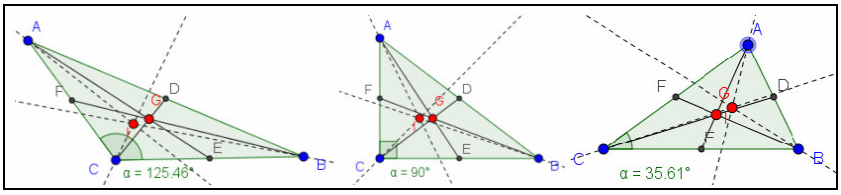


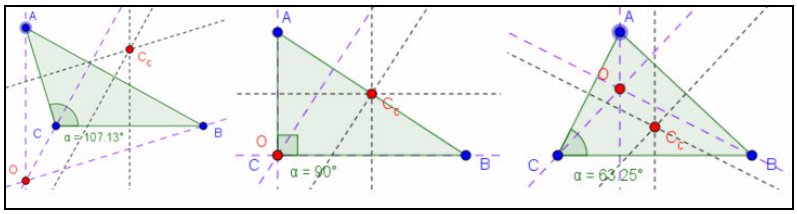
Classificazione dei triangoli rispetto ai lati. Segmenti e punti notevoli.

Fase 1: Osserva

Facciamo alcune considerazioni sui criteri di isometria relativamente ai triangoli isosceli.

- In figura sono rappresentati due triangoli isosceli sulle rispettive basi *BC* ed *EF*. Supponiamo che sia : $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\angle C\hat{A}B = \angle F\hat{D}E$.  Come si vede i due triangoli hanno solo un lato obliquo e un angolo ordinatamente uguali, eppure possiamo affermare che sono fra loro uguali. Ciò dipende dal fatto che i triangoli sono isosceli, quindi avremo anche $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{DE} = \overline{DF}$, perciò per la proprietà transitiva dell'uguaglianza possiamo concludere che si ha anche $\overline{AC} = \overline{DF}$, il che ci permette di potere invocare la validità del criterio LAL.
- Consideriamo adesso il caso in cui due triangoli isosceli hanno ordinatamente uguali sempre un lato obliquo ma l'angolo è uno degli angoli alla base.  Dato che sappiamo che nel triangolo isoscele gli angoli alla base hanno la stessa ampiezza e che la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto (di ampiezza 180° in gradi sessagesimali), possiamo concludere che sono uguali anche gli angoli al vertice e ricadiamo nel caso precedente. Quindi per i triangoli isosceli, nei casi precedentemente illustrati, il criterio LAL si modifica semplicemente nel criterio LA.
- È semplice provare che sia il baricentro sia l'incentro sono sempre interni a qualsiasi triangolo. Infatti sia le mediane sia le bisettrici, per loro stessa definizione sono interne al triangolo, quindi anche il loro punto d'incontro sarà interno al triangolo, quale che sia la sua specie. Non lo sono ortocentro e circocentro, che per i triangoli ottusangoli sono esterni e per i triangoli rettangoli coincidono rispettivamente con il vertice dell'angolo retto e con il punto medio dell'ipotenusa. Mostriamo il tutto nelle successive figure.

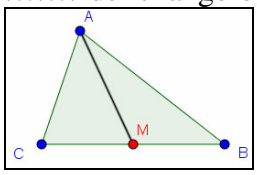




Fase 2: Completa …

- Consideriamo un triangolo qualsiasi e una sua mediana, come mostrato in figura. Vogliamo provare che una sua qualsiasi mediana è minore del semiperimetro. Consideriamo il triangolo *ABM*; per la disuguaglianza triangolare possiamo scrivere: $\overline{AM} < \ldots\ldots + \ldots\ldots$. Adesso consideriamo il triangolo *AMC*; sempre per la predetta proprietà possiamo scrivere: $\overline{AM} < \ldots\ldots + \ldots\ldots$. Sommiamo membro a membro le due pre-

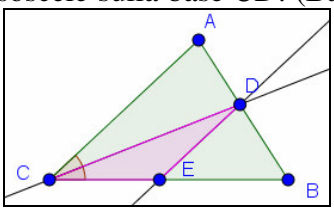
cedenti disuguaglianze: $2 \cdot \overline{AM} < \ldots\ldots + \ldots\ldots$. Il membro destro rappresenta il …… del triangolo, quindi basta dividere tutto per due per ottenere quanto richiesto.



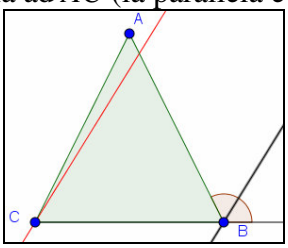
- L'incentro ha questo nome perché è il centro della circonferenza inscritta nel triangolo. Proviamolo. Infatti noi sappiamo che la bisettrice di un angolo verifica la seguente proprietà: ……... Questo significa che l'intersezione di due qualsiasi bisettrici di un triangolo, l'incentro, ha la stessa distanza da ……. Quindi possiamo puntare un compasso nell'incentro e con apertura pari alla distanza costante tracciare una circonferenza che ha la proprietà di toccare ……. Cioè questa circonferenza è proprio ……
- Il circocentro e l'ortocentro sono gli unici fra i quattro punti notevoli di un triangolo che possono appartenere al perimetro dello stesso triangolo. Infatti il baricentro non può fare parte del triangolo perché ……; per l'incentro, due bisettrici non possono incontrarsi su uno dei lati del triangolo perché ciò vorrebbe dire che anche la terza bisettrice ……, dovrebbe coincidere ……., fatto assurdo. Invece due altezze possono incontrarsi sul triangolo, anzi ciò accade sempre per i triangoli ……, dato che in questo caso le altezze coincidono con i cateti. Anche per gli assi l'incontro può essere su uno dei lati del triangolo, e anche in questo caso il triangolo è ……, anzi il circocentro è punto medio ……

Fase 3: Prova!

1. Provare che due triangoli isosceli che hanno uguali la base e uno degli angoli alla base, sono uguali.
2. Provare che due triangoli isosceli che hanno uguali la base e l'angolo al vertice, sono uguali.
3. In figura *ABC* è un qualsiasi triangolo, *CD* è bisettrice dell'angolo di vertice *C*, *DE* è parallela ad *AC*. Provare che il triangolo *DEC* è isoscele sulla base *CD*. (Basta provare che gli angoli alla base sono uguali).



4. In figura *ABC* è un triangolo isoscele sulla base *BC*, la retta nera è bisettrice dell'angolo esterno di vertice *B*, come si vede essa non è parallela ad *AC* (la parallela è la retta rossa). Quando i due oggetti sono paralleli? [Se *ABC* è equilatero]



5. Provare che in un triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo esterno di quello al vertice è parallela alla base.
6. Provare che due triangoli rettangoli che hanno uguali un cateto e l'altezza relativa all'ipotenusa sono uguali.
7. Provare che due triangoli rettangoli che hanno uguali un cateto e la mediana relativa all'ipotenusa sono uguali.
8. Provare che due triangoli rettangoli che hanno uguali l'ipotenusa e la mediana a essa relativa non sono per forza uguali.

9. Provare che due triangoli rettangoli che hanno uguali l'altezza e la mediana relativa all'ipotenusa sono fra loro uguali.
10. Provare che due triangoli rettangoli che hanno uguali l'ipotenusa e l'altezza a essa relativa sono uguali.
11. Dimostrare che in ogni triangolo equilatero l'altezza è minore del semiperimetro.
12. Provare che il risultato precedente vale anche per un'altezza qualunque di un triangolo qualsiasi.
13. Dimostrare che in ogni triangolo la somma delle mediane è minore del perimetro.
14. Provare che se incentro e circoncentro di un triangolo sono lo stesso punto, il triangolo è equilatero.
15. In un triangolo isoscele non equilatero quanti sono i diversi punti notevoli, quanti i diversi segmenti notevoli? [4; 10]
16. Provare che in un triangolo isoscele i quattro punti notevoli appartengono alla stessa retta.
17. Quanti punti notevoli sono interni a un triangolo rettangolo isoscele? [2]
18. Quanti punti notevoli sono distinti in un triangolo rettangolo isoscele? [3]
19. Con riferimento al precedente quesito, quali punti notevoli coincidono? [Circocentro e ortocentro]
20. Provare che tracciando le bisettrici degli angoli esterni di un triangolo equilatero si ottiene ancora un triangolo equilatero.

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito

http://mathinterattiva.altervista.org/volume_1_3.htm

3. Geometria del piano

3.3 La geometria dei poligoni con più di tre lati

Prerequisiti
- Concetto di poligono
- Criteri di isometria dei triangoli
- Rette parallele e rette perpendicolari
- Punti notevoli di un triangolo

Obiettivi
- Sviluppare capacità di astrazione
- Creare modelli geometrici di oggetti fisici
- Conoscere le più importanti proprietà di alcuni tipi di quadrilateri
- Sviluppare capacità di distinguere fra i diversi quadrilateri
- Riconoscere le proprietà che caratterizzano alcuni quadrilateri particolari
- Comprendere il concetto di poligono regolare

Contenuti
- Poligoni con più di tre lati
- I parallelogrammi
- Applicazioni ai triangoli. I trapezi.

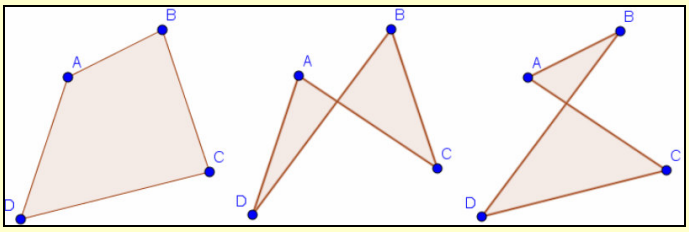
Parole Chiave
Parallelogramma – Rettangolo – Rombo – Quadrato – Trapezio

Poligoni con più di tre lati

Dopo avere considerato, nell'unità didattica precedente, i poligoni a tre lati, appare naturale estendere il discorso a poligoni con più di tre lati, cominciando ovviamente da quelli a quattro lati, anche detti quadrilateri o quadrangoli. La prima differenza che notiamo fra i triangoli e i poligoni con più di tre lati consiste nel fatto che, nel caso del triangolo, è unico il modo di unire i vertici con dei segmenti. invece ciò non accade già a partire dal quadrilatero.

Esempio 1

Dati i quattro vertici *A*, *B*, *C* e *D* in figura, possiamo unirli con una poligonale chiusa formata da quattro lati, nei seguenti diversi modi.



Naturalmente non ha senso considerare poligonali in cui da un vertice partono più di due segmenti.

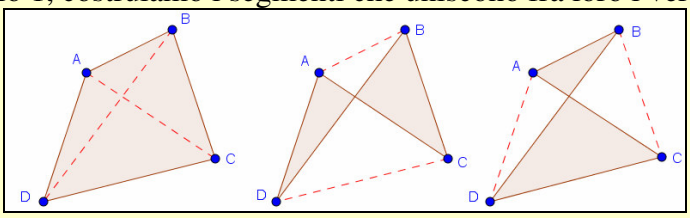
Nei poligoni con più di tre lati possiamo sempre congiungere anche vertici che non appartengono allo stesso lato, ottenendo altri segmenti.

Definizione 1

Un segmento che unisce due vertici non appartenenti a uno stesso lato di un poligono convesso si chiama **diagonale** del poligono.

Esempio 2

Nei quadrilateri dell'esempio 1, costruiamo i segmenti che uniscono fra loro i vertici a due a due.

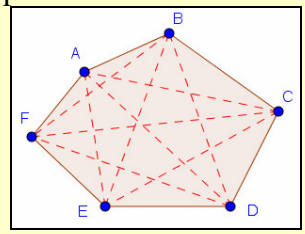


Osserviamo che praticamente abbiamo tracciato tre volte la stessa figura, l'unica differenza consiste solo nel fatto che a volte un segmento ha il tratto continuo, a volte no. Notiamo però anche un'altra cosa. Solo se il poligono è convesso i segmenti che non sono lati sono interni al poligono, ecco perché, nella definizione 1, abbiamo sottolineato il fatto che il poligono doveva essere convesso perché avesse senso il concetto di diagonale.

Ci chiediamo: quante diagonali ha un quadrilatero? Prima di rispondere consideriamo quest'altra domanda: *quanti segmenti si possono tracciare da un vertice a un altro*? La risposta è: Tre, dato che un vertice non può unirsi con se stesso. Bene! Quanti di questi segmenti sono diagonali? Un vertice di un poligono è comune a due soli lati. Quindi da ogni vertice di un quadrilatero parte una sola diagonale.
Ma quante ne vediamo? Solo due perché le diagonali *AC* e *CA*, per esempio, sono chiaramente coincidenti.

Esempio 3

In un esagono convesso da ogni vertice possiamo tracciare tre diagonali, per un totale quindi di 9 diagonali visibili.



Dagli esempi precedenti si enuncia il seguente ovvio risultato.

Teorema 1

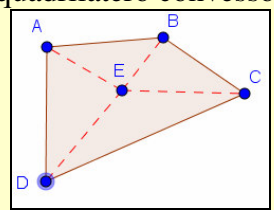
Da ognuno dei vertici di un poligono convesso di n lati ($n > 3$), si tracciano $n - 3$ diagonali, per un totale di $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$ diagonali visibili.

Dimostrazione per esercizio

Vogliamo determinare la somma degli angoli interni di un generico poligono, come abbiamo fatto per i triangoli. Cominciamo con un qualsiasi quadrilatero convesso.

Esempio 4

Fissiamo un qualsiasi punto interno al quadrilatero e uniamolo con i vertici. In tal modo otteniamo quattro triangoli la cui somma degli angoli interni è perciò quattro angoli piatti. Tale somma coincide con quella cercata? No perché ha qualcosa di più e precisamente un angolo giro, come si nota facilmente in figura. Quindi la somma degli angoli interni di un quadrilatero convesso è uguale a un angolo giro.



Facilmente si generalizza quanto visto nel precedente esempio.

Teorema 2

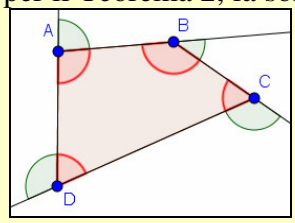
La somma degli angoli interni di un poligono convesso di n lati è uguale a $(n - 2)$ angoli piatti.

Dimostrazione per esercizio

Determiniamo adesso la somma degli angoli esterni.

Esempio 5

Abbiamo tracciato gli angoli interni e quelli esterni di un quadrilatero convesso. La loro somma totale è ovviamente quella di 4 angoli piatti. Dato che per il Teorema 2, la somma degli angoli interni è un angolo giro, anche quella degli angoli esterni è 360°.



La precedente procedura può facilmente estendersi a un poligono convesso con un numero qualsivoglia di lati, come testimonia il seguente risultato.

Teorema 3

La somma degli angoli esterni di un poligono convesso di N lati è uguale a un angolo giro.

Dimostrazione per esercizio

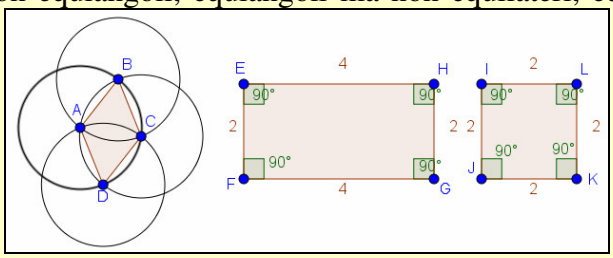
Esempio 6

Tenuto conto del teorema 2 possiamo dire che la somma degli angoli interni di un decagono convesso è pari a 8 angoli piatti, cioè in gradi sessagesimali a $8 \cdot 180° = 1440°$. Invece la somma degli angoli esterni è 360°.

Può accadere che un poligono abbia i lati e/o gli angoli della stessa misura.

Esempio 7

Un triangolo equilatero è anche equiangolo. Ciò non è vero per i poligoni con più di tre lati. Per esempio ci sono quadrilateri equilateri ma non equiangoli, equiangoli ma non equilateri, equilateri ed equiangoli. Lo mostriamo nelle figure seguenti.



In particolare osserviamo che i quadrilateri equiangoli hanno ovviamente tutti angoli retti, dato che la loro somma è un angolo giro. Per il quadrilatero equilatero ma non equiangolo, *abcd*, lo abbiamo costruito con il compasso, per essere sicuri che i lati fossero uguali, anche se non misurati, i suoi angoli si vede subito che non sono invece tutti uguali.

Poniamo adesso una definizione.

Definizione 2

Un poligono equilatero ed equiangolo si dice **poligono regolare**.

Tenuto conto della precedente definizione e del teorema 2, si ha il seguente ovvio risultato.

Teorema 4

Ciascuno degli angoli interni di un poligono equiangolo di n lati misura $\frac{n-2}{n}\cdot 180°$.

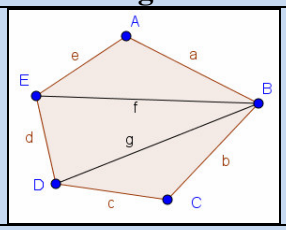
Dimostrazione per esercizio

Vale anche il seguente risultato, generalizzazione della cosiddetta disuguaglianza triangolare.

Teorema 5

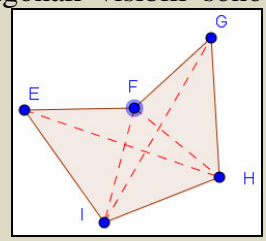
In un poligono convesso ogni lato è minore del semiperimetro.

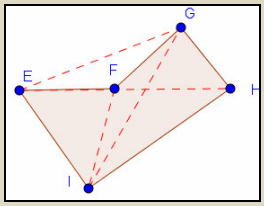
Dimostrazione lavoriamo su un pentagono, la procedura si generalizza a qualsiasi poligono.

Schema dimostrativo			
Passo	**Azione**	**Conseguenza**	**Giustificazione**
1	Dal vertice B tracciamo le diagonali f e g		Dal Teorema 1 da ogni vertice si tracciano 5 – 3 = 2 diagonali.
2	Consideriamo il triangolo ABE	Si ha $a < e + f$	Per la disuguaglianza triangolare.
3	Consideriamo il triangolo BDE	Si ha $f < g + d$	Per la disuguaglianza triangolare.
4	Consideriamo il triangolo BCD	Si ha $g < b + c$	Per la disuguaglianza triangolare.
5	Consideriamo le disuguaglianze dei passi da 2 a a 4	Si ha $a < e + f < e + g + d < e + b + c + d$	Per la proprietà transitiva delle disuguaglianze
6	Sommiamo a a entrambi i membri della disuguaglianza precedente	Si ha $2a < a + e + b + c + d$	
7	Dividiamo per 2	$a < (a + e + b + c + d)/2$. È la tesi	Il secondo membro è metà del perimetro del pentagono

Verifiche

Lavoriamo insieme

Consideriamo un pentagono, se è convesso sappiamo che le sue diagonali visibili sono in numero di $\frac{5\cdot(5-3)}{2}=\frac{5\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}}=5$. E se è concavo? Consideriamo la seguente figura. 

Se consideriamo solo quelle interne esse sono in numero di 4. Considerando anche *EF* invece rimangono sempre 5. In effetti però non possiamo dire che le *diagonali* di un pentagono concavo sono sempre 5, come mostrato nella figura seguente 

in cui la diagonale *EH* si sovrappone al lato *EF* e alla diagonale *FH*, quindi alla fine non si conta.

Livello 1

1. Disegnare poligoni convessi di 6, 7 e 8 lati con le relative diagonali. Quante ne vediamo? [9; 14; 20]
2. Quante diagonali ha un poligono di 30 lati? Quante di esse sono distinte? [810; 405]
3. Da un vertice di un poligono di 42 lati conduciamo tutte le diagonali agli altri vertici. In quanti triangoli viene suddiviso il poligono? [40]
4. Da due vertici adiacenti di un pentagono convesso tracciamo tutte le diagonali. In quanti triangoli viene suddiviso il poligono? [8]
5. La risposta precedente cambia se i vertici non sono adiacenti? [Sì, diventano 5]
6. Quante delle diagonali distinte di un quadrilatero concavo sono tutte formate da punti appartenenti al poligono? [0]
7. Studiare il numero di diagonali visibili di un pentagono concavo.
8. Dimostrare il teorema 1.

Livello 2

9. Un poligono convesso ha tante diagonali distinte quanti lati. Quanti lati ha il poligono? [5]
10. Un poligono convesso ha tante diagonali quanti lati. Quanti lati ha il poligono? [4]
11. Un poligono convesso ha tante diagonali distinte quanto il doppio dei lati. Quanti lati ha il poligono? [7]
12. Un poligono convesso ha tante diagonali quanto il triplo dei lati. Quanti lati ha il poligono? [6]
13. Le diagonali condotte dai vertici di un poligono convesso si incontrano in un totale di 5 punti distinti. Quanti vertici ha il poligono? [5]
14. Le diagonali condotte dai vertici di un poligono convesso si incontrano in un totale di 13 punti distinti. Quanti vertici ha il poligono? [6]
15. Usando la disuguaglianza triangolare provare che un lato di un poligono è minore della somma dei rimanenti lati.

Livello 3

16. Può esistere un poligono che ha 44 diagonali distinte? Se sì quanti lati ha? E un poligono con 13 diagonali distinte? Giustificare tutte le risposte. [Sì; 11; No]
17. Provare che il numero di diagonali visibili di un poligono convesso, a partire dal pentagono è formato da una successione ripetuta di due numeri dispari e due numeri pari.
18. Trovare il minimo numero di lati che deve avere un poligono, perché il numero delle sue diagonali distinte sia un quadrato perfetto. Quanto vale il successivo valore? [6; 27]
19. Dato un poligono P, diciamo che il poligono P_1 è interno a P se tutti i vertici di P_1 appartengono a P o

ai suoi lati. Provare che se P_1 è interno a P, il perimetro di P_1 è minore di quello di P.

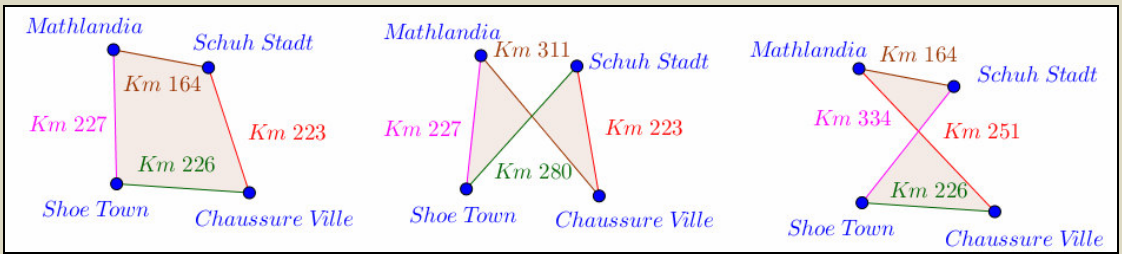
Lavoriamo insieme

Il cosiddetto *problema del commesso viaggiatore* rimane in generale ancora senza soluzione, nonostante diversi tentativi effettuati da valenti matematici. Finora ne sono stati risolti solo alcuni casi particolari. Il problema è il seguente. *Un commesso viaggiatore, nel suo consueto giro settimanale, deve visitare alcune città e, per risparmiare tempo e benzina, vorrebbe determinare il percorso più breve fra tutti quelli possibili che passano una sola volta per tutte le città del suo giro.*Si intende che dobbiamo considerare il fatto che il commesso parte dalla propria città a ad essa deve tornare. Da un punto di vista geometrico il problema è quello di trovare il poligono di perimetro minimo fra tutti quelli che hanno per vertici la sua città e le altre del giro.

Se dovesse visitare solo due città non vi sarebbe alcun problema. Vi è un solo triangolo che ha per vertici tre punti. Allo stesso modo se tutte le città fossero allineate la soluzione sarebbe unica perché unico è il percorso, anche se sarebbe costretto a passare due volte per le città intermedie. Noi dobbiamo considerare il caso generale in cui non vi sono neanche tre città allineate.

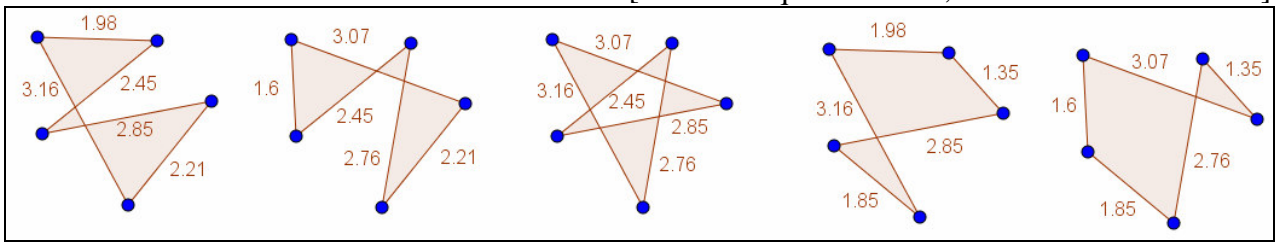
Per semplicità trattiamo il caso particolare di tre città. Il commesso viaggiatore, rappresentante di calzature, parte da Mathlandia e deve recarsi nelle città di Shoe Town, Chaussure Ville e Schuh Stadt, distanti dalla sua città rispettivamente: *Km* 227, *Km* 311, *Km* 164. Inoltre Shoe Town dista da Chaussure Ville *Km* 226 e da Schuh Stadt *Km* 334. Infine le ultime due città distano tra loro *Km* 223.

In questo caso, come si ottiene determinando i perimetri dei poligoni mostrati nella figura seguente, il percorso più breve, che poi ritorna a Mathlandia è il primo, che misura *Km* 840. Gli altri due misurano rispettivamente *Km* 1041 e *Km* 975.



Livello 2

20. Se le città da visitare sono 2, quanti sono i possibili percorsi che il commesso può effettuare per visitarle tutte e due e tornare a casa? [1]
21. Considerare il problema del commesso viaggiatore per il seguente tracciato (*A* è la città di partenza), determinando il percorso minimo e quello massimo. Le misure delle diverse distanze in *Km* sono: $\overline{AB}=209;\ \overline{AC}=95;\ \overline{AD}=175;\ \overline{BC}=128;\ \overline{BD}=200;\ \overline{CD}=117$ [*ACBD*, *Km* 598]
22. Considerare il problema del commesso viaggiatore per le seguenti città, con *A* città di partenza, nell'ipotesi semplificata che siano possibili solo i percorsi segnati in figura. Determinare i percorsi minimo e massimo. [minimo il quinto: 10.62; massimo il terzo: 14.29]



Livello 3

23. Un commesso viaggiatore parte dalla città *A* per il suo giro che lo porta a passare per le città *B*, *C* e *D* prima di tornare a casa. Sappiamo che *A* dista dalle tre città rispettivamente *Km* 96, *Km* 140 e *Km* 183. I tre possibili percorsi sono: *ABCDA*, che misura *Km* 563, *ABDCA*, che misura *Km* 667 e *ACBDA*, che misura *Km* 650. Determinare la distanza fra le città *B* e *C*, *C* e *D* , *B* e *D*. [*Km* 90; *Km* 194; *Km* 237]
24. Un commesso viaggiatore parte da Business City per il suo giro che lo porta a visitare quattro città prima di ritornare a casa. Se ogni città è collegata a tutte le altre, in quanti diversi modi il commesso può compiere il suo tragitto? [12]

25. Un commesso viaggiatore parte da Market Town per il suo giro che lo porta a visitare quattro città prima di ritornare a casa. Nella tabella seguente sono segnate con delle croci le città collegate fra di loro. In quanti diversi modi il commesso può compiere il suo tragitto? [1]

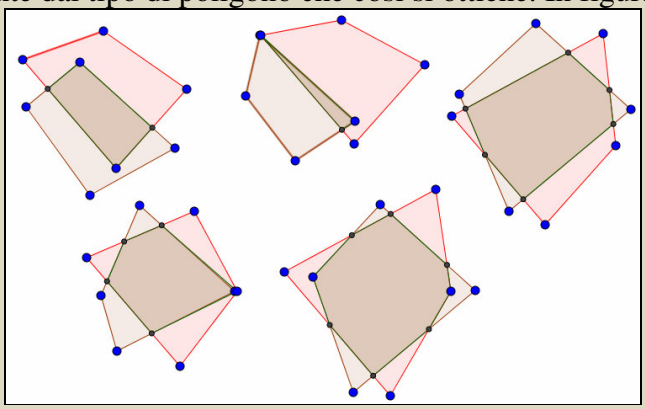
	M.T.	*A*	*B*	*C*	*D*
M.T.		X	X	X	X
A	X			X	
B	X			X	
C	X	X	X		X
D	X			X	

26. Come nell'esercizio precedente, ma con quest'altra tabella. [3]

	M.T.	*A*	*B*	*C*	*D*
M.T.		X	X		X
A	X		X	X	
B	X	X			X
C		X			X
D	X		X	X	

Lavoriamo insieme

Quanto misura la somma degli angoli interni del poligono ottenuto intersecando due quadrilateri convessi? La risposta dipende ovviamente dal tipo di poligono che così si ottiene. In figura mostriamo qualche caso.



Come si vede possiamo ottenere un triangolo come un ottagono, come i poligoni con un numero di lati intermedi fra i precedenti. Quindi la somma degli angoli interni varia da 1 a 6 angoli piatti.

Livello 1

27. Quanto vale la somma degli angoli interni di un pentagono convesso? E di un esagono? [540°; 720°]
28. Dimostrare il teorema 2.
29. Dimostrare il teorema 3.
30. Dimostrare il teorema 4.
31. Quanto vale la somma degli angoli interni di un quadrilatero concavo non intrecciato? [360°]
32. Quanto vale la somma degli angoli interni di un quadrilatero concavo intrecciato? [360°]
33. Quanto vale la somma degli angoli esterni di un esagono convesso? E di un ottagono convesso? [360°]
34. Se la somma degli angoli interni di un poligono convesso è 2340°, quanti lati ha il poligono? [13]
35. Se la somma degli angoli interni di un poligono convesso è 3050°, quanti lati ha il poligono? [Impossibile]
36. Quanto vale la somma degli angoli esterni di un quadrilatero concavo non intrecciato? [360°]
37. Quanto misura ciascuno degli angoli interni di un pentagono equiangolo? [108°]
38. Se un angolo interno di un poligono equiangolo misura 140°, quanti lati ha il poligono? [9]
39. Se un angolo interno di un poligono equiangolo misura 130°, quanti lati ha il poligono? [Impossibile]
40. Ovviamente all'aumentare del numero di lati di un poligono equiangolo aumenta pure la misura dell'angolo interno. Possiamo dire allora che ci sono poligoni equiangoli che hanno angoli interni che misurano 200° ciascuno? Motivare la risposta. [No, in ogni caso ogni angolo è minore di 180°]

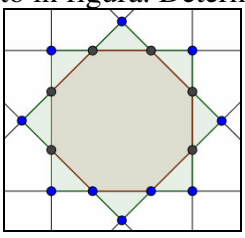
41. Quanto misura ciascuno degli angoli interni di un poligono di 1000 lati equiangolo? [179°38′24″]

Livello 2

42. Provare che un angolo interno di un poligono convesso è sempre minore di un angolo piatto.
43. Provare che, se un poligono ha un angolo interno maggiore di un angolo piatto, allora il poligono è concavo.
44. Se un angolo esterno di un poligono regolare misura 18°, quanti lati ha il poligono? [20]
45. Dato un poligono regolare di 40 lati prolunghiamo i due lati adiacenti a un lato qualsiasi, fino a farli incontrare, determinare la misura dell'angolo formato da tali prolungamenti. Aumentando il numero dei lati la misura di questo angolo aumenta o diminuisce? [162°; aumenta]
46. Con riferimento all'esercizio precedente. Quanti lati deve avere il poligono di partenza perché l'angolo considerato misuri 60°? 90°? 180°? [6; 8; Impossibile]
47. Quanti poligoni equiangoli hanno solo angoli interni acuti? [1]

Livello 3

48. Dato un poligono regolare di 8 lati, prolunghiamo ciascun lato fino a formare un poligono concavo di 16 lati a forma di stella, come mostrato in figura. Determinare la somma degli angoli interni di tale poligono. [1800°]



49. Con riferimento all'esercizio precedente, se sappiamo che la somma dei detti angoli è 3240°. Quanti lati ha il poligono regolare? [12]
50. Quanti angoli interni acuti al massimo può avere un quadrilatero convesso? [3]
51. Quanti angoli interni acuti al massimo può avere un pentagono convesso? [3]
52. Quanti angoli interni acuti al massimo può avere un poligono convesso? [3]
53. Un poligono è tale che ogni suo angolo interno è il quintuplo del corrispondente angolo esterno. Determinare quanti lati ha il poligono. [12]

Lavoriamo insieme

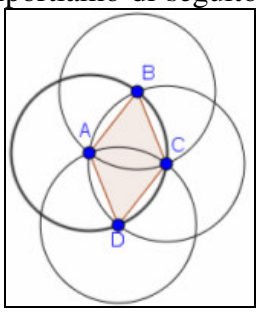
Quanti lati ha al massimo un poligono regolare i cui angoli esterni sono misurati da numeri interi?
Se un poligono è regolare tutti i suoi angoli interni hanno la stessa misura, quindi anche i relativi angoli esterni hanno la stessa misura. La somma degli angoli esterni di un qualsiasi poligono convesso di n lati è 360°, quindi ogni angolo esterno di un poligono regolare di n lati misura: $\frac{360°}{n}$. Dato che questo deve essere un valore intero, lo sarà solo per valori di n divisibili per 360 e maggiori di 2, il cui maggiore è 360. In questo caso ogni angolo esterno misurerà 1° e quindi il relativo angolo interno misurerà 179°.

Livello 2

54. Quanti poligoni regolari hanno angoli interni la cui misura è un numero intero? [22]
55. Qual è il più piccolo intero positivo che non può costituire la misura in gradi sessagesimali dell'angolo esterno di un poligono regolare? [7]
56. Gli angoli interni di un poligono regolare misurano $\alpha°$, con α numero intero. Quelli esterni di un altro poligono regolare misurano anch'essi $\alpha°$. Per quali valori di α ciò è possibile? [60; 90; 120]

I Parallelogrammi

Abbiamo già visto nell'esempio 8, che un triangolo equilatero è anche equiangolo, mentre un quadrilatero equilatero non è sempre equiangolo. Se consideriamo però la costruzione, che riportiamo di seguito, osser-



viamo che i lati dei quadrilateri equilateri sembrano a due a due fra loro paralleli.
Per questo motivo consideriamo quei particolari quadrilateri che hanno i lati opposti paralleli, per vedere se tale condizione risulta sufficiente per affermare che i quadrilateri sono equilateri.

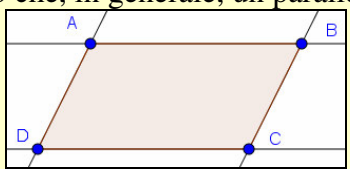
Definizione 3

Un quadrilatero con i lati opposti paralleli si chiama **parallelogramma**.

Costruiamo un parallelogramma con riga e compasso.

Esempio 8

La figura seguente mostra che non è vero che, in generale, un parallelogramma sia equilatero.

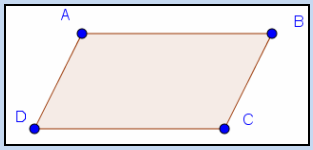


In ogni caso i parallelogrammi avranno sicuramente delle caratteristiche importanti, dato che i loro lati sono coppie di segmenti paralleli, almeno relativamente agli angoli. In effetti vale il seguente risultato.

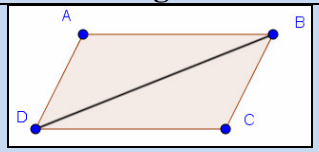
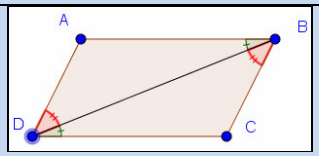
Teorema 6

I lati opposti di un parallelogramma sono uguali.

Dimostrazione

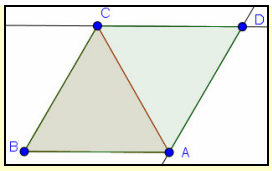
Ci riferiamo alla figura 

Ipotesi: $AB \parallel CD$; $BC \parallel AD$ *Tesi*: $\overline{AB} = \overline{CD}$; $\overline{BC} = \overline{AD}$

Schema dimostrativo			
Passo	**Azione**	**Conseguenza**	**Giustificazione**
1	Tracciamo la diagonale *BD*	 Otteniamo i due triangoli *ABD* e *BCD*	
2	Consideriamo i triangoli *ABD* e *BCD*.	 Sono uguali.	Per il criterio ALA. Infatti hanno • il lato *BD* in comune; • $\angle A\hat{B}D = \angle C\hat{D}B$ perché alterni interni rispetto alle rette parallele passanti per *AB* e *CD*, tagliate dalla retta per *BD*; • $\angle D\hat{B}C = \angle B\hat{D}A$ perché alterni interni ri-

			spetto alle rette parallele per AD e BC tagliate sempre dalla retta per BD
3	Consideriamo $D\hat{A}B$ e $B\hat{C}D$.	Sono uguali	Per il passo 2.
4	Consideriamo le coppie di lati AB, CD e BC, AD.	Sono coppie di lati uguali	Perché lati opposti ad angoli fra loro uguali.

Esempio 9

Consideriamo il triangolo equilatero ABC in figura: 

dai suoi vertici A e C tracciamo le parallele ai lati BC e AB rispettivamente. Tali rette si incontrano nel punto D, formando così il parallelogramma $ABCD$. Per il teorema precedente, AB e CD sono uguali, così come BC e AD. Poiché il triangolo ABC è equilatero, lo è anche il parallelogramma $ABCD$.

Considerando i risultati del teorema 6., emersi durante la dimostrazione, possiamo enunciare le seguenti altre condizioni necessarie che sono verificate da un parallelogramma, la cui dimostrazione lasciamo per esercizio.

Teorema 7

In un parallelogramma gli angoli opposti sono uguali.

Teorema 8

In un parallelogramma gli angoli adiacenti a ciascun lato sono supplementari.

Teorema 9

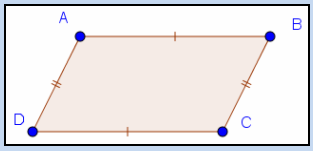
Le diagonali di un parallelogramma si incontrano nel loro punto medio.

A questo punto vogliamo provare una condizione che è sia necessaria sia sufficiente per affermare che un dato quadrilatero è un parallelogramma.

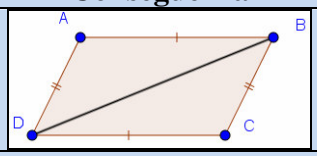
Teorema 10

Un quadrilatero convesso con i lati opposti uguali è un parallelogramma.

Dimostrazione.

Consideriamo il quadrilatero $ABCD$ in figura 

Ipotesi: $\overline{AB} = \overline{CD}$; $\overline{BC} = \overline{AD}$ *Tesi*: $ABCD$ è un parallelogramma

Schema dimostrativo			
Passo	**Azione**	**Conseguenza**	**Giustificazione**
1	Tracciamo la diagonale BD		
2	Prendiamo in considerazione i triangoli ABD e BCD	Sono uguali.	Per il criterio LLL. Dato che hanno il lato BD in comune e gli altri lati a due a due uguali per ipotesi.
3	Consideriamo gli angoli	Sono uguali.	Perché angoli opposti a lati fra loro uguali.

	$A\hat{B}D$ e $C\hat{D}B$.		
4	Consideriamo i segmenti AB e CD.	Sono paralleli.	Perché $A\hat{B}D$ e $C\hat{D}B$ sono alterni interni rispetto alle rette per AB e CD, tagliate dalla retta per BD.
5	Consideriamo i segmenti AD e BC.	Sono paralleli.	Perché $D\hat{B}C$ e $B\hat{D}A$ sono fra loro uguali e sono alterni interni rispetto alle rette per AD e BC, tagliate dalla retta per BD.

Possono provarsi anche i seguenti teoremi, lasciati sempre per esercizio.

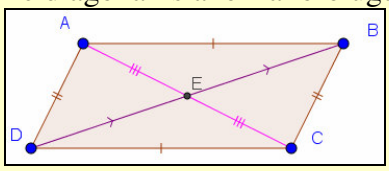
Teorema 11
Un quadrilatero convesso con gli angoli opposti uguali è un parallelogramma.

Teorema 12
Un quadrilatero convesso le cui diagonali si incontrano nel loro punto medio è un parallelogramma.

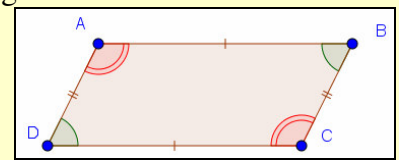
Teorema 13
Un quadrilatero convesso con due lati opposti uguali e paralleli è un parallelogramma.

Quindi tutte le precedenti proprietà sono condizioni necessarie e sufficienti affinché un quadrilatero convesso sia un parallelogramma.

Esempio 10
In figura abbiamo tracciato un parallelogramma e tutti i suoi segmenti uguali, come enunciati nei risultati precedenti. Ovviamente non è detto che le diagonali siano fra loro uguali.



Adesso vediamo invece i suoi angoli uguali.



Adesso passiamo a considerare più in dettaglio i quadrilateri equilateri.

Definizione 4
Un quadrilatero equilatero si chiama **rombo** o **losanga**.

Per il teorema 10, il rombo è un parallelogramma, verifica quindi tutte le proprietà già enunciate per tali quadrilateri, ma, come vediamo di seguito, ne verifica anche altre, la cui semplice dimostrazione lasciamo al lettore.

Teorema 14
In un rombo le diagonali sono perpendicolari.

Teorema 15
In un rombo le diagonali sono bisettrici degli angoli relativi ai vertici che uniscono.

Passiamo ai quadrilateri equiangoli, dato che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è un angolo giro, in questo caso gli angoli interni sono tutti retti. Ciò ci suggerisce il nome da associare a tali quadrilateri.

Definizione 5

Un quadrilatero equiangolo si dice **rettangolo**.

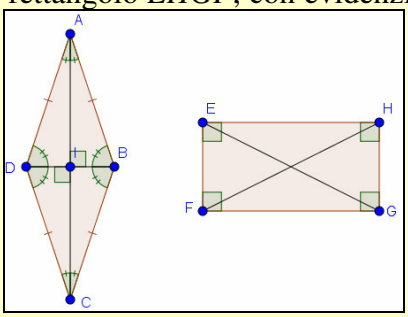
Osserviamo che nella precedente definizione non abbiamo specificato se il quadrilatero dovesse essere convesso, ciò è inutile, poiché non esistono quadrilateri concavi equiangoli. Per quanto già visto è ovvio che un rettangolo è un parallelogramma, verifica quindi le proprietà dei parallelogrammi ma anche le ulteriori proprietà che enunciamo.

Teorema 16

In un rettangolo le diagonali sono fra loro uguali.

Esempio 11

In figura abbiamo il rombo *ABCD* e il rettangolo *EHGF*, con evidenziate le proprietà caratteristiche stabilite dai teoremi precedenti.

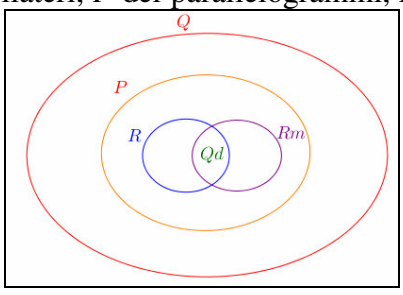


Abbiamo già visto che i triangoli equilateri sono gli unici triangoli regolari, mentre i poligoni con più di 3 lati, in generale se sono equilateri non è detto che siano equiangoli e viceversa. Diamo loro un nome nel caso dei quadrilateri.

Definizione 6

Un quadrilatero equilatero ed equiangolo si chiama **quadrato**.

Dal punto di vista insiemistico possiamo quindi costruire il seguente diagramma di Eulero–Venn, che rappresenta gli insiemi *Q* dei quadrilateri, *P* dei parallelogrammi, *Rm* dei rombi, *R* dei rettangoli e *Qd* dei quadrati:

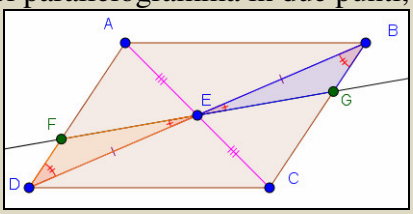


Perciò possiamo dire che l'insieme dei quadrati è l'intersezione dell'insieme dei rombi con l'insieme dei rettangoli.

Verifiche

Lavoriamo insieme

In figura *ABCD* è un parallelogramma ed *E* è il punto d'incontro delle sue diagonali. Vogliamo provare che ogni retta passante per *E* taglia i lati del parallelogramma in due punti, *F* e *G*, equidistanti da *E*.

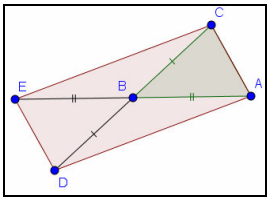


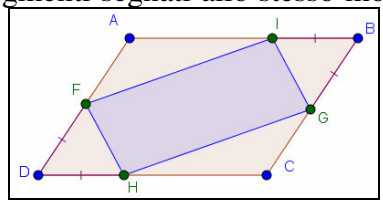
Consideriamo infatti i triangoli *EDF* e *BEG*: diciamo che sono uguali per ALA. Infatti essi hanno

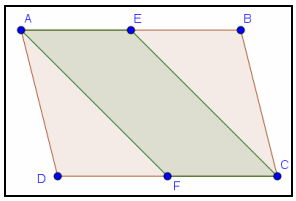
- i lati *ED* e *EB* di uguale misura perché *E* è il punto d'incontro delle diagonali che le dimezza;
- gli angoli di vertice *E* uguali perché opposti al vertice;
- gli angoli $E\hat{D}F$ e $E\hat{B}G$ uguali perché alterni interni rispetto alle parallele *AD* e *BC* tagliate dalla trasversale *BD*.

Ne consegue quindi che i segmenti *EF* e *EGF*, così come *FD* e *BG* sono fra loro uguali.

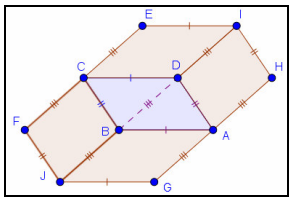
Livello 1

1. Dimostrare il teorema 7.
2. Dimostrare il teorema 8.
3. Dimostrare il teorema 9.
4. Dimostrare il teorema 11
5. Dimostrare il teorema 12
6. Dimostrare il teorema 13.
7. Fornire dei controesempi che mostrino che i teoremi 11, 12 e 13, sono falsi se il quadrilatero non è convesso.
8. 

In figura *ABC* è un triangolo qualsiasi, i segmenti segnati allo stesso modo sono fra loro uguali. Dimostrare che il quadrilatero *ADEC* è un parallelogramma.
9. In figura *ABCD* è un parallelogramma e i segmenti segnati allo stesso modo sono fra loro uguali. Dimostrare che *FIGH* è un parallelogramma. 

10. Provare che il quadrilatero che ha per vertici 

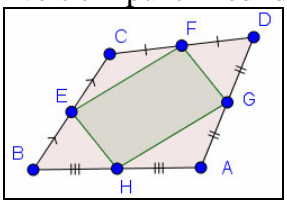
i punti medi di due lati opposti di un parallelogramma e due vertici opposti, come in figura, è un parallelogramma.
11. Provare che le bisettrici di angoli opposti di uno stesso parallelogramma sono fra loro parallele.
12. Provare che le bisettrici di angoli adiacenti di uno stesso parallelogramma sono fra loro perpendicolari.
13. In figura è mostrato un parallelogramma *ABCD*, sui cui lati sono costruiti altri 4 parallelogrammi, in modo che lati ugualmente segnati siano fra loro uguali. Sapendo che $\overline{AB}=6, \overline{BC}=4, \overline{DB}=5$, determi-



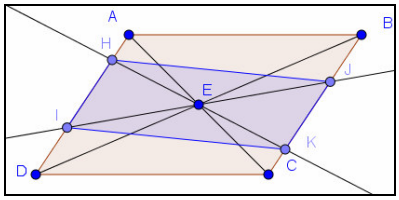
nare la misura del perimetro dell'esagono *EIHGJF*. [40]

Livello 2

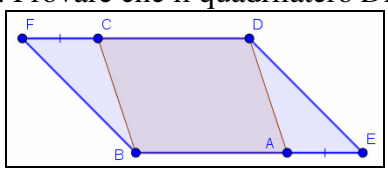
14. Provare che il quadrilatero avente per vertici i punti medi dei lati di un altro quadrilatero convesso è un parallelogramma.



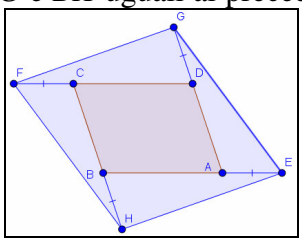
15. Quanto detto nell'esercizio precedente continua a valere se il quadrilatero di partenza è concavo? Giustificare la risposta. [Sì]
16. Si considerino due rette passanti per il punto d'incontro delle diagonali di un parallelogramma *ABCD*. Provare che il quadrilatero *IHJK* avente per vertici i punti d'intersezione delle rette date con i lati del parallelogramma è anch'esso un parallelogramma.



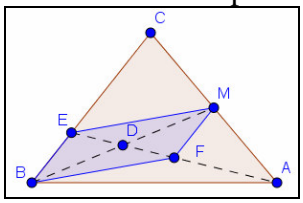
17. Prolunghiamo in direzioni fra loro opposte i lati opposti *AB* e *CD* di un parallelogramma *ABCD* dei segmenti *AE* e *CF* fra loro uguali. Provare che il quadrilatero *DEBF* è un parallelogramma.

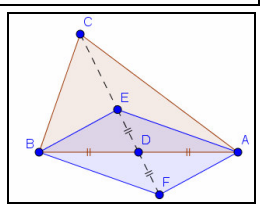


18. Ripetiamo il procedimento dell'esercizio precedente, riportando anche sugli altri due lati e sempre in direzioni fra loro opposte, due segmenti *DG* e *BH* uguali ai precedenti due. Il quadrilatero *FGEH* è un parallelogramma? Giustificare la risposta. [Sì]



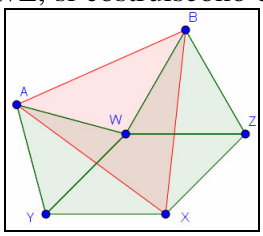
19. Sulla diagonale *BD* del parallelogramma *ABCD* scegliamo due punti *E* ed *F* in modo che *BE* ed *FD* siano segmenti fra loro uguali. Provare che *AEFC* è un parallelogramma.
20. Nel triangolo *ABC*, si consideri la mediana *BM*. Si tracci poi il segmento *AE*, con *E* sul lato *BC*, che incontra *BM* nel suo punto medio *D*. Si consideri infine il punto *F* su *AD*, in modo che *D* sia punto medio di *EF*. Provare che *BEMF* è un parallelogramma.

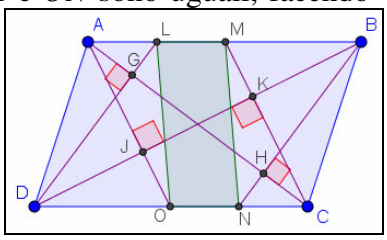




21. In figura *D* è punto medio di *AB* e *EF*. Provare che *AFBE* è un parallelogramma.
22. *E* ed *F* sono punti medi di due lati opposti di uno stesso parallelogramma *ABCD*. Provare che *AFCE* è un parallelogramma.

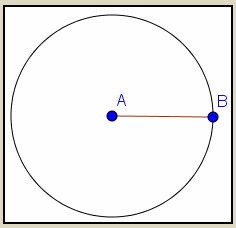
Livello 3

23. *AMOR* è un parallelogramma in cui si sono presi due punti *N* ed *E* rispettivamente sui lati opposti *AR* e *OM* in modo che *EN* è lungo 12 *dm*, $\overline{AR} = 3\overline{AN}$ e $\overline{MO} = 3\overline{EO}$. Se il perimetro di *AMEN* è 40 *dm*, calcola la misura del perimetro di *AMOR*. [56 *dm*]
24. Perché in generale il quadrilatero avente per vertici i punti medi dei lati di un parallelogramma non è equilatero? Perché non è equiangolo? Fornire due diverse giustificazioni per ogni caso, prima ragionando sugli angoli interni del parallelogramma di partenza e poi sulle diagonali del parallelogramma inscritto.
25. Con riferimento all'esercizio precedente, che tipo di parallelogramma deve essere quello di partenza, perché il parallelogramma avente per vertici i suoi punti medi sia equilatero? Sia equiangolo? Fornire due diverse giustificazioni per ogni caso, prima ragionando sugli angoli interni del parallelogramma di partenza e poi sulle diagonali del parallelogramma inscritto. [Equiangolo; equilatero]
26. Sui lati adiacenti *YW* e *WZ* di uno stesso parallelogramma *XYWZ*, si costruiscono due triangoli equilateri *YAW* e *WBZ*. Provare che il triangolo *ABX* è equilatero. 

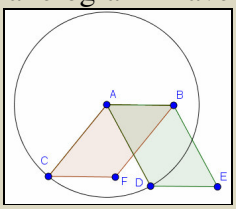
Adattato da Posamentier, Salkind, *Challenging problems in geometry*
27. In figura *ABCD* è un parallelogramma, *BH* e *DG* sono segmenti perpendicolari alla diagonale *AC*, *AJ* e *CK* sono perpendicolari alla diagonale *BD*. Provare che il quadrilatero *LMNO* è un parallelogramma. Suggerimento: provare che *LM* e *ON* sono uguali, facendo vedere che sono uguali i triangoli *ADL* e *CBN* e i triangoli *ADO* e *CMB*. 

Lavoriamo insieme

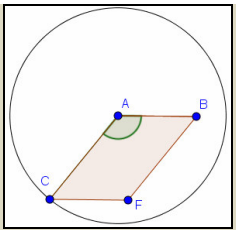
Vogliamo costruire con riga e compasso un parallelogramma di cui conosciamo le misure dei lati. Dato che conosciamo le misure dei lati possiamo cominciare con il costruire un segmento a piacere la cui misura coincide con una delle misure note. Per l'altra misura dobbiamo puntare il compasso su uno degli estremi del segmento precedente e con apertura pari alla misura dell'altro lato tracciare una circonferenza.



Il problema è che non conosciamo la misura dell'angolo formato dai lati, pertanto non sappiamo come scegliere il punto sulla circonferenza che risulterà estremo del secondo lato. Pertanto il problema è indeterminato. In figura abbiamo costruito due diversi parallelogrammi aventi i lati di misure assegnate.



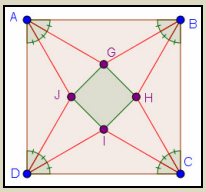
Se invece avessimo conosciuto anche la misura dell'angolo formato dai lati il problema sarebbe stato risolvibile facilmente, come di seguito è mostrato.



Livello 2

28. È possibile costruire con riga e compasso un parallelogramma di cui sono note le misure delle diagonali e di uno degli angoli da essi formati? In caso di risposta affermativa eseguire la costruzione. [Sì]
29. È possibile costruire con riga e compasso un parallelogramma di cui sono note le misure dei lati e di una diagonale? In caso di risposta affermativa eseguire la costruzione. [Sì]
30. È possibile costruire con riga e compasso un parallelogramma di cui sono note le misure delle diagonali e di uno dei lati? In caso di risposta affermativa eseguire la costruzione. [Sì]
31. Un quadrilatero con due lati paralleli e due angoli adiacenti a uno stesso lato supplementari è sempre un parallelogramma? Giustificare la risposta. Se la risposta è affermativa costruire la figura. [No]
32. Un quadrilatero con due lati paralleli e le diagonali che si dividono scambievolmente è sempre un parallelogramma? Giustificare la risposta. Se la risposta è affermativa costruire la figura. [Sì]
33. Un quadrilatero con due lati opposti uguali e le diagonali che si dividono scambievolmente è sempre un parallelogramma? Giustificare la risposta. Se la risposta è affermativa costruire la figura. [Sì]

Lavoriamo insieme

Nel quadrato *ABCD* in figura i segmenti tracciati trisecano i quattro angoli retti. Che tipo di quadrilatero è *GHIJ*? 

Apparentemente sembra un quadrato. Ma abbiamo più volte detto che l'apparenza inganna e comunque non è decisiva. Vediamo allora cosa sappiamo di questa figura.

Per prima cosa notiamo che i triangoli *ABG*, *BCH*, *CDI* e *AJD* sono fra loro uguali e isosceli. Il che ci permette di dire che anche i triangoli *BHG*, *CIH*, *DJI* e *AGJ* sono fra loro uguali e isosceli. Quindi abbiamo stabilito che *GHIJ* è un rombo. Determiniamo ora le misure dei suoi angoli.

Prendiamo in considerazione il triangolo *ABG*. Si ha: $\angle B\hat{G}A = 180° - 2 \cdot \angle A\hat{B}G = 180° - 60° = 120°$.

Allo stesso modo, considerando il triangolo *BHG*: $\angle H\hat{G}B = \angle B\hat{H}G = \dfrac{180° - \angle G\hat{B}H}{2} = \dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$

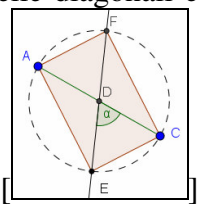
Ma allora anche: $\angle J\hat{G}H = 360° - \angle A\hat{G}J - \angle B\hat{G}A - \angle H\hat{G}B = 360° - 75° - 120° - 75° = 90°$. Quindi *GHIJ* è anche un rettangolo, per cui è un quadrato.

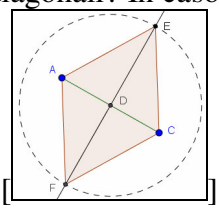
Livello 1

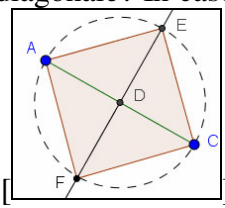
34. Dimostrare il teorema 14.
35. Dimostrare il teorema 15.
36. Dimostrare il teorema 16.
37. Dimostrare che le bisettrici degli angoli di un rettangolo incontrandosi formano un quadrato. Se il rettangolo di partenza è un quadrato, cosa accade? [Le diagonali si incontrano in uno stesso punto]
38. Un quadrilatero con le diagonali fra loro perpendicolari è sempre un rombo? Giustificare la risposta. Se la risposta è negativa quale altra condizione si deve aggiungere? [No. Si incontrano nei punti medi]
39. Un quadrilatero con le diagonali fra loro perpendicolari e uguali è sempre un quadrato? Giustificare la risposta. Se la risposta è negativa quale altra condizione si deve aggiungere? [No. Si incontrano nei punti medi]
40. Fissiamo un segmento *AB* e tracciamo una retta *r* a esso parallela. Tracciamo gli infiniti parallelogrammi aventi *AB* come uno dei lati e il lato opposto su *r*. Ne esiste uno più *piccolo* degli altri (cioè con il perimetro minore)? E uno più *grande*? Giustificare le risposte. [Sì, il quadrato; no]

41. Un quadrilatero con le diagonali fra loro uguali è sempre un rettangolo? Giustificare la risposta. Se la risposta è negativa quale altra condizione si deve aggiungere? [No. Si incontrano nei punti medi]

Livello 2

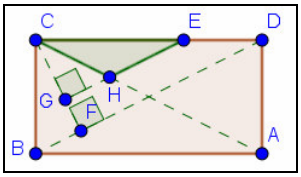
42. Con riferimento all'esercizio 8, che tipo di triangolo deve essere *ABC*, affinché *ADEC* sia un rettangolo? Oppure un rombo? Oppure un quadrato? Giustificare le risposte.
[Isoscele di base *AC*; Rettangolo; Rettangolo e isoscele]
43. Con riferimento all'esercizio 9, che tipo di parallelogramma deve essere *ABCD* affinché *FIGH* sia un rettangolo? Oppure un rombo? Oppure un quadrato? Giustificare le risposte.
[Rombo; Quadrato; Quadrato]
44. Con riferimento all'esercizio precedente possiamo ottenere un rombo non quadrato? [No]
45. Con riferimento all'esercizio 10 può accadere che *ACEF* sia un rettangolo? Oppure un rombo? Giustificare le risposte. [No; no; no]
46. È possibile costruire con riga e compasso un rettangolo di cui sono note le misure delle diagonali e dell'angolo da esse formato? In caso di risposta affermativa eseguire la costruzione. [

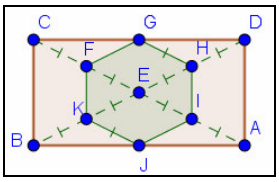
]
47. È possibile costruire con riga e compasso un rombo di cui sono note le misure delle diagonali? In caso di risposta affermativa eseguire la costruzione. [

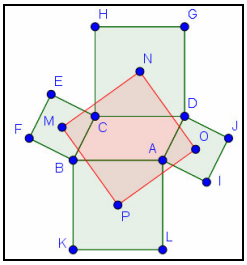
]
48. È possibile costruire con riga e compasso un quadrato di cui è nota la misura della diagonale? In caso di risposta affermativa eseguire la costruzione. [

]

Livello 3

49. Nel rettangolo *ABCD* in figura, 

E è un punto qualsiasi di *CD*, *CF* ⊥ *BD*, *EG* ⊥ *CF*, *H* è l'intersezione di *AC* e *GE*. Provare che il triangolo *CEH* è isoscele. Adattato da Posamentier, Salkind, *Challenging problems in geometry*
50. In figura è disegnato un rettangolo *ABCD* e un esagono *FGHIJK*, 

costruito considerando i punti medi dei segmenti *BE*, *CE*, *CD*, *DE*, *AE* e *AB*, con *E* punto di incontro delle diagonali del rettangolo. Provare che l'esagono è regolare (cioè ha tutti i lati e gli angoli fra loro uguali) solo se la diagonale del rettangolo è doppia di *AD*.
51. Sui lati del parallelogramma *ABCD* in figura 

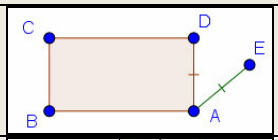
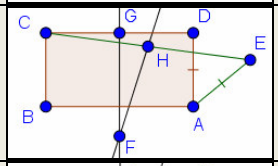
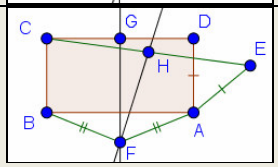
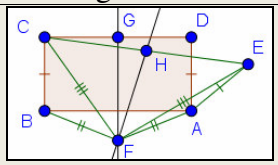
abbiamo costruito dei quadrati. Prova-

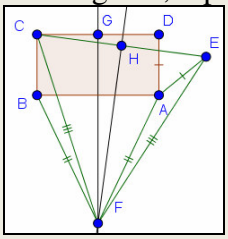
re che il quadrilatero *MNOP*, i cui vertici sono i centri di questi quattro quadrati è anch'esso un quadrato. *Suggerimento*: provare che *MNC*, *NDO*, *OPA* e *PBM* sono fra loro uguali. Adattato da Posamentier, Salkind, *Challenging problems in geometry*

Giochiamo alla matematica

Vogliamo fare vedere che, facendo poca attenzione a costruire una figura, si possono ottenere facilmente risultati contraddittori.

La seguente è una falsa dimostrazione del fatto che un angolo retto e un angolo ottuso sono uguali. Essa è dovuta a W.W. Rouse Ball, ed è stata pubblicata nel libro *Mathematical recreations and problems* per la prima volta nel 1892.

SCHEMA DIMOSTRATIVO			
PASSO	AZIONE	CONSEGUENZA	GIUSTIFICAZIONE
1.	Tracciamo un rettangolo *ABCD* ed esternamente a esso un segmento *AE* uguale a *DA*.		
2.	Tracciamo il segmento *CE* e gli assi dei segmenti *CD* e *CE*, che si incontrano in *F*.		
3	Consideriamo i segmenti *FB* e *AF*.	 Sono uguali.	Per la proprietà dell'asse di un segmento
4	Consideriamo i segmenti *FC* e *EF*.	 Sono uguali.	Per la proprietà dell'asse di un segmento
5	Consideriamo i triangoli *CFB* e *AFE*.	Sono uguali.	Per LLL come si vede con i lati ugualmente segnati.
6	Consideriamo gli angoli $F\hat{B}C$ e $E\hat{A}F$	Sono uguali.	Per il passo 5.
5	Consideriamo gli angoli $F\hat{B}A$ e $B\hat{A}F$	Sono uguali.	Perché *FBA* è isoscele.
7	Consideriamo gli angoli $A\hat{B}C$ e $E\hat{A}B$	Sono uguali.	Perché differenza di angoli uguali.

Pertanto abbiamo provato il fatto assurdo che un angolo retto è uguale a un angolo ottuso. In effetti, osserviamo che la figura 4 non ci convince molto. Non sembra proprio che i segmenti *FC* e *EF* siano uguali e in effetti abbiamo costruito apposta una figura sbagliata, a partire dall'asse di *CE* che invece è quello mostrato di seguito, in cui *EF* non attraversa *AB*.  Da essa ci accorgiamo che quanto abbiamo detto non può ripetersi e quindi non vi sono le conclusioni contraddittorie che abbiamo ottenuto.

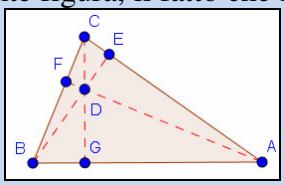
Applicazioni ai triangoli. I trapezi.

Adesso possiamo dimostrare i teoremi dell'unità didattica 3.2, relativi al baricentro e all'ortocentro, che avevamo solo enunciato per completezza. Cominciamo con il provare il seguente risultato.

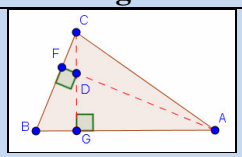
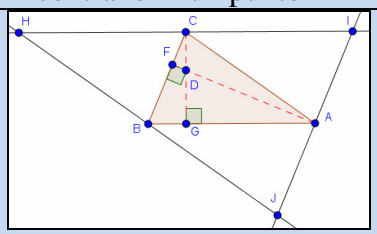
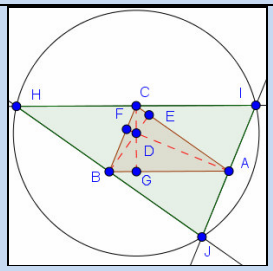
Teorema 17

Le altezze dei lati di un triangolo si incontrano in uno stesso punto.

Dimostrazione. Ci riferiamo alla seguente figura, il fatto che il triangolo sia acutangolo non varia la validità del risultato.



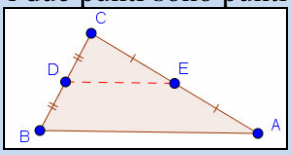
Ipotesi: $AF \perp BC$, $BE \perp AC$, $CG \perp AB$ *Tesi*: $\exists\, D$: $AF \cap BE \cap CG = \{D\}$

Schema dimostrativo			
Passo	**Azione**	**Conseguenza**	**Giustificazione**
1	Consideriamo le altezze *AG* e *CF*.	 Si incontrano in un punto *D*	Non sono rette fra loro parallele.
2	Da ogni vertice del triangolo *ABC* tracciamo le parallele ai lati opposti.	 Si incontrano nei punti *H*, *I*, *J*.	Non sono rette fra loro parallele.
3	Consideriamo i quadrilateri *BCAJ* e *ABCI*.	Sono dei parallelogrammi.	Per la costruzione effettuata al passo 2.
4	Consideriamo i lati *BC*, *AJ* e *AI*.	Sono tutti fra loro uguali.	Perché a due a due lati opposti di uno stesso parallelogramma e per la proprietà transitiva dell'uguaglianza.
5	Consideriamo il punto *A*.	È punto medio di *IJ*.	Per il passo 4.
6	Consideriamo *AF*.	$AF \perp IJ$. Quindi appartiene all'asse di *IJ*.	Perché $AF \perp BC \,//\, IJ$.
7	Ripetiamo i passi precedenti per le altezze *BE* e *AF*.	*BE* appartiene all'asse di *HJ* e *CG* all'asse di *HI*.	Giustificazioni analoghe a quelle usate in precedenza per *AF*.
8	Consideriamo il triangolo *HIJ*.	 *AF*, *BE* e *CG* si incontrano in uno stesso punto *D*.	Perché gli assi dei lati di un triangolo passano per uno stesso punto *D*. Questo è circocentro di *HIJ* e ortocentro di *ABC*.

Prima di provare il teorema sul baricentro abbiamo bisogno di dimostrare il seguente risultato.

Teorema 18

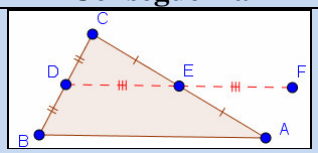
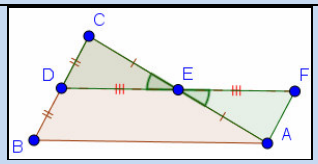
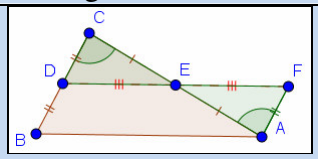
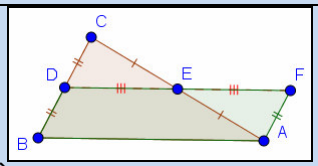
Dati due punti appartenenti a due lati di un triangolo, il segmento che li congiunge è parallelo al terzo lato e uguale alla sua metà, se e solo se i due punti sono punti medi dei rispettivi lati.

Ci riferiamo alla figura seguente 

Abbiamo già provato con il Teorema 11 dell'unità 3.2, che i segmenti sono paralleli. Dimostriamo quindi solo la parte relativa alle misure. Cominciamo con la condizione *necessaria*.

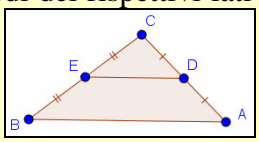
Ipotesi: $\overline{BD} = \overline{DC}; \overline{CE} = \overline{EA}$ *Tesi*: $DE \,//\, AB$; $\overline{DE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$

Schema dimostrativo

Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Costruiamo il punto F allineato con DE, in modo che E sia punto medio di DF.		
2	Consideriamo i triangoli CDE e EFA.	 Sono uguali.	Per il criterio LAL.
3	Consideriamo i segmenti CD e FA e gli angoli $D\hat{C}E$ e $F\hat{A}E$	 Sono uguali	Per il punto 2
4	Consideriamo i segmenti BD e FA.	Sono uguali	Per la proprietà transitiva: $\overline{BD} = \overline{DC} = \overline{FA}$.
5	Consideriamo i segmenti BC e AF	Sono paralleli	Perché $D\hat{C}E$ e $F\hat{A}E$ sono alterni interni rispetto alla trasversale AD, e, per il passo 4 sono uguali
6	Consideriamo il quadrilatero $BDFA$.	 È un parallelogramma.	Per il teorema 13, dato che ha due lati opposti uguali (passo 4) e paralleli (passo 5).
8	Consideriamo i segmenti AB e DE.	Il primo è doppio del secondo.	$\overline{AB} = \overline{DF}$, perché lati opposti di uno stesso parallelogramma e $\overline{DF} = 2 \cdot \overline{DE}$ per costruzione.

La dimostrazione della condizione *sufficiente* la lasciamo per esercizio, sulla falsariga di quanto fatto nel Teorema 11 dell'unità 3.2

Esempio 12

In figura il triangolo CDE ha il perimetro lungo 7 *cm*, D ed E sono punti medi dei rispettivi lati di appartenenza. Possiamo determinare la misura del perimetro del triangolo ABC? 

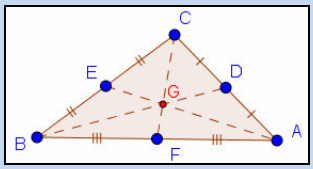
Sì. Infatti, grazie al teorema 15 possiamo dire che AB è doppio di DE, e dato che BC è doppio di CE e AC è doppio di DC, possiamo dire che il perimetro del triangolo ABC è doppio di quello di CDE, cioè misura 14 *cm*.

Non ci rimane da provare che il teorema sul baricentro.

Teorema 19

Le mediane di un triangolo si incontrano nel baricentro e tale punto divide ciascuna mediana in due parti, in modo che quella che contiene il vertice sia doppia dell'altra.

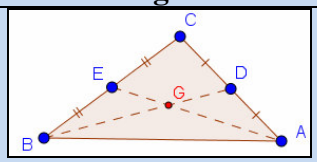
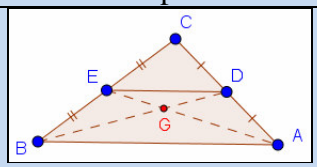
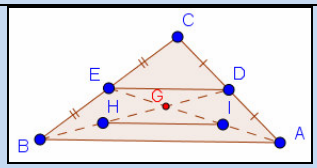
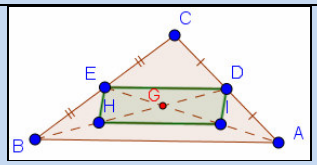
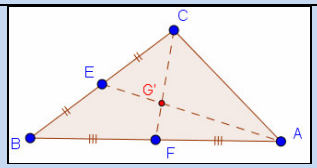
Dimostrazione



Ipotesi: $\overline{AF} = \overline{FB}; \overline{BE} = \overline{EC}; \overline{CD} = \overline{DA}$

Tesi 1: $\exists\, G: AE \cap BD \cap CF = \{G\}$ *Tesi* 2: $\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GE}; \overline{CG} = 2 \cdot \overline{GF}; \overline{BG} = 2 \cdot \overline{GD}$

Schema dimostrativo

Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Consideriamo le mediane *AE* e *BD*.	 Si incontrano in un punto *G*.	*AE* e *BD* appartengono a rette che non sono parallele
2	Tracciamo il segmento *DE*.	 È parallelo ad *AB* ed è la metà di esso	Per il teorema 15.
3	Consideriamo i punti medi *H* ed *I*, dei lati *BG* e *AG* nel triangolo *BGA*. E consideriamo *HI*.	 È parallelo ad *AB* ed è la metà di esso.	Per il teorema 15 applicato al triangolo *BGA*.
4	Consideriamo il quadrilatero *EDIH*.	 È un parallelogramma.	Ha due lati opposti (*ED* e *IH*) uguali e paralleli.
5	Consideriamo le coppie di segmenti *EG*, *GI* e *HG*, *GD*.	Gli elementi di una stessa coppia sono uguali.	*G* è punto di incontro delle diagonali *ME* e *ND*.
6	Consideriamo le coppie *AG*, *GE* e *BG*, *GD*.	Il primo elemento di ciascuna coppia è doppio del rispettivo secondo elemento. Tesi 2.	Per i passi 3 e 5.
7	Consideriamo le mediane *AE* e *CF* e il loro punto d'incontro *G′*.	 *G′* divide sia *AE* sia *CF* in due parti una doppia dell'altra. In particolare *AG′* sarà doppio di *G′E*.	Ripetiamo le precedenti procedure
8	Consideriamo i punti *G′* e *G*.	Coincidono.	Un segmento non può essere diviso nelle stesse proporzioni da punti diversi.

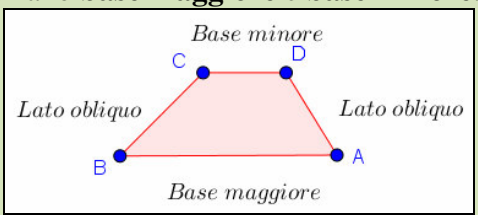
Esempio 13

In un triangolo equilatero le mediane sono anche altezze, bisettrici e assi. Quindi in ogni triangolo equilatero l'altezza è divisa in due parti, una doppia dell'altra, dall'ortocentro. In un triangolo isoscele ciò accade solo per l'altezza relativa alla base.

Consideriamo infine un altro importante tipo di quadrilatero.

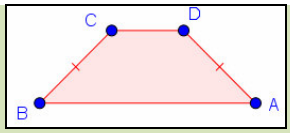
Definizione 7

Un quadrilatero con solo due lati opposti paralleli si chiama **trapezio**. I lati non paralleli si chiamano **lati obliqui**, i lati fra loro paralleli si chiamano **base maggiore** e **base minore**.



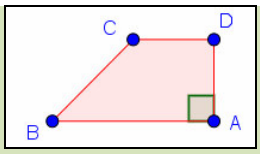
Definizione 8

Un trapezio i cui lati obliqui sono uguali si dice **trapezio isoscele**.



Definizione 9

Un trapezio nel quale un lato è perpendicolare alle basi si dice **trapezio rettangolo**.



Che cosa significa?

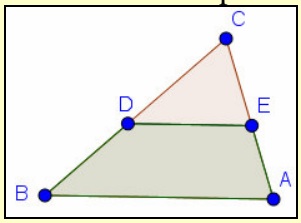
Trapezio. Vuol dire semplicemente tavola, il suo nome non è perciò indicativo né delle proprietà che verifica, né della sua forma.

Dobbiamo dire che non vi è accordo universale sul fatto che un trapezio possa essere un parallelogramma o, come lo abbiamo inteso noi, possa non esserlo. Questo è uno dei tanti esempi che anche se si dice che *la matematica non è un'opinione*, invece in essa ci sono dei punti di vista.
Vale il seguente teorema, di facile dimostrazione.

Teorema 20

In un trapezio isoscele gli angoli adiacenti a ciascuna base sono uguali.

Esempio 14

Consideriamo un triangolo ABC. Fissiamo un punto D sul lato BC e da esso tracciamo la parallela al lato AB che incontra AC nel punto E. 

Il quadrilatero $ABDE$ è evidentemente un trapezio. Se il triangolo ABC è isoscele sulla base AB, anche $ABDE$ è isoscele. Se il triangolo ABC è rettangolo con AB uno dei cateti, $ABDE$ è trapezio rettangolo.

L'Antologia

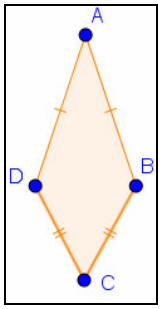
Vediamo come Euclide tratta i quadrilateri nei suoi *Elementi*. Li classifica immediatamente nella penultima delle sue definizioni

Euclide, *Elementi libro* I

> *Definizione XXII*
> *Delle figure quadrilatere, è quadrato quella che p insieme equilatera e ha gli angoli retti, rettangolo quella che ha gli angoli retti, ma non è equilatera, rombo quella che è equilatera, ma non ha gli angoli retti, romboide quella che ha i lati e gli angoli opposti uguali fra loro, ma non è equilatera né ha gli angoli retti. E le figure quadrilatere oltre a queste si chiamino trapezi.*

Cominciamo a osservare alcune cose.

- Intanto ogni classe di figure è differente dall'altra, quindi non accade, come abbiamo fatto noi, che i quadrati siano i rombi rettangoli. I rettangoli non sono quadrati, anzi il vocabolo usato nell'originale greco significa *oblungo*, cioè con i lati diversa misura.
- Poi Euclide introduce il cosiddetto romboide, che ha la forma seguente.



- Infine, tutti gli altri quadrilateri vengono chiamati genericamente *trapezi*.
- Notiamo altresì che non si parla di parallelogrammi nella precedente definizione.

Invece la prima proposizione in cui si tratta di quadrilateri, la 34 del libro I, risulta la seguente:

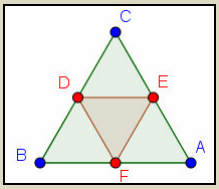
> *I parallelogrammi hanno lati e angoli opposti uguali fra loro, e sono divisi dalla diagonale in due parti uguali.*

Come abbiamo già segnalato il problema nasce sempre dal famoso V postulato delle parallele, dato che esso serve per provare la precedente proposizione. Euclide non tratta nei dettagli i rettangoli e i quadrati, ma nel libro II tratta di quadrati e rettangoli per provare geometricamente delle formule che invece noi di solito usiamo in algebra, e che presenteremo successivamente.

Verifiche

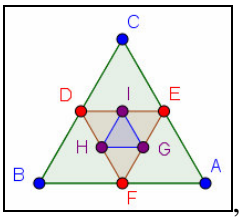
Lavoriamo insieme

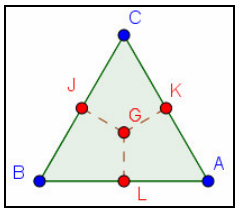
Uniamo i punti medi dei lati di un triangolo equilatero, ottenendo 4 triangoli fra loro uguali. Di che tipo sono tali triangoli?

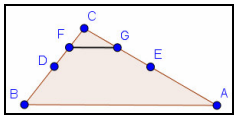
Consideriamo la figura 

per quanto visto nella teoria possiamo dire che ciascuno dei segmenti *DE*, *EF* e *FD* è parallelo al lato del triangolo *ABC* ad esso opposto ed è la metà di tale lato. Essendo *ABC* equilatero ciascuno dei quattro triangoli è equilatero. Anzi sono tutti e quattro fra loro uguali, col perimetro metà di quello del triangolo *ABC*.

Livello 1

1. In figura 

, *ABC* è equilatero di perimetro 8 *cm*, *D*, *E* ed *F* sono i punti medi dei suoi lati; *G*, *H* ed *I* sono i punti medi del triangolo *DEF*. Quanto misura il perimetro di *GHI*? [2 *cm*]
2. Con riferimento al precedente quesito, se il perimetro di *GHI* è 3 *cm*, quanto misura quello di *ABC*? [12 *cm*]
3. Dimostrare che in un triangolo equilatero *ABC*, la somma delle distanze del baricentro *G* dai lati è un segmento uguale a una delle altezze del triangolo dato. 

4. Dedurre dal risultato dell'esercizio precedente, che il raggio della circonferenza inscritta in un triangolo equilatero misura $\frac{1}{3}$ dell'altezza.
5. In figura 

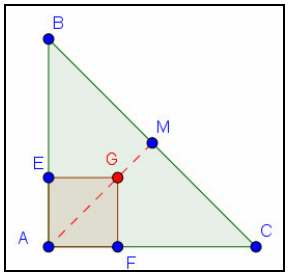
D ed *E* sono punti medi dei rispettivi lati, *F* e *G* punti medi di *CD* e *CE* rispettivamente. Provare che *FG* è parallelo ad *AB* e che misura $\frac{1}{4}$ di esso.
6. Dato un triangolo equilatero *ABC*, suddividiamo il suo lato *AB* in quattro parti fra loro uguali mediante i punti *D*, *E* ed *F*. Provare che il baricentro del triangolo *CDF* coincide con quello di *ABC*.

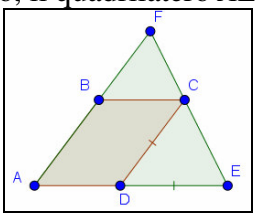
Livello 2

7. In un triangolo rettangolo isoscele *ABC*, i cui cateti sono lunghi ciascuno 4 *cm*, si tracci l'altezza *AH* relativa all'ipotenusa *BC*. Siano *D* ed *E* i piedi delle perpendicolari condotte da *H* ai due cateti. Determinare la misura del perimetro del quadrilatero *ADHE*. [4 *cm*]
8. Per il punto d'incontro delle diagonali di un parallelogramma *ABCD* si traccino due rette parallele ai suoi lati che incontrino i lati opposti *AB* e *CD* rispettivamente in *E* e *G* e *BC* e *AD* rispettivamente in *F* e *H*. Sapendo che la somma delle diagonali di *ABCD* è di 20 *cm*, determinare la misura del perimetro di *EFGH*. [20 *cm*]
9. Con riferimento all'esercizio precedente, provare che, qualunque sia il parallelogramma *ABCD*, la misura del perimetro di *EFGH* è uguale alla somma delle misure delle diagonali di *ABCD*.
10. Dato il triangolo *ABC*, siano *AM*, *BN* e *CP* le sue mediane. Detto *D* il punto di intersezione di *AM* e

CP ed *E* quello di *CP* ed *MN*, provare che *DE* è $\frac{1}{6}$ di *CP*.

11. Dato il triangolo *ABC*, i cui lati sono lunghi rispettivamente: 4 *cm*, 5 *cm* e 6 *cm*, da ciascun vertice si traccino le parallele ai lati opposti, ottenendo il triangolo *DEF*. Determinare la misura del perimetro di *DEF*. [30 *cm*]
12. Con riferimento all'esercizio precedente, provare che i quattro triangoli in cui è diviso *DEF* sono fra loro uguali.
13. È dato un triangolo rettangolo e isoscele *ABC*, la cui ipotenusa è *BC*. Detto *G* il suo baricentro, siano *E* ed *F* i piedi delle perpendicolari condotte da *G* ai cateti *AB* e *AC* rispettivamente. Prova che il quadrilatero *AEGF* è un quadrato.

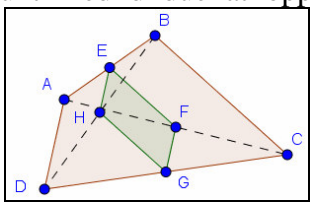


14. Con riferimento all'esercizio precedente, sapendo che il cateto *AB* è lungo 3 *cm*, determinare la misura del perimetro di *AEGF*. [4 *cm*]
15. Con riferimento all'esercizio 13, se consideriamo un generico punto *G* della mediana, piuttosto che il baricentro, il quadrilatero *AEGF* è ancora un quadrato? Giustificare la risposta. [Sì]
16. In figura 

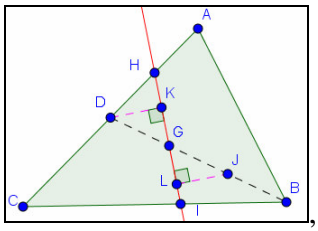
ABCD è un parallelogramma, $\overline{CD} = \overline{ED}$. Provare che *AFE* è isoscele.

Livello 3

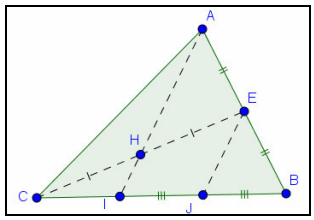
17. Nel triangolo *ABC* le mediane *BE* e *AF* sono fra loro perpendicolari. Sapendo che $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{AB}$, provare che non è possibile che *ABC* sia isoscele con base *AB*.
18. Se *ABCD* è un qualsiasi quadrilatero convesso, provare che il quadrilatero *EFGH* avente come vertici i punti medi di due lati opposti di *ABCD* e i punti medi delle diagonali di *ABCD*, è un parallelogramma.



Adattato da Posamentier, Salkind, *Challenging problems in geometry*

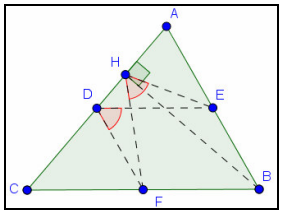
19. Nelle ipotesi dell'esercizio precedente, determinare la misura del perimetro del quadrilatero *EFGH*, sapendo che i lati di *ABCD* su cui non sono stati scelti i punti, misurano 4 *cm* e 8 *cm*. [12 *cm*]
20. Con riferimento al problema precedente, provare che il perimetro di *EFGH* è sempre somma delle misure di *BC* e *AD*.
21. Nel triangolo *ABC* in figura, 

, *BD* è una mediana, *G* è il baricentro, *HI* è una retta per *G* che incontra *AC* e *BC*. *J* è punto medio di *BG*, $JL \perp HI$, $DK \perp HI$. Provare che $\overline{DK} = \overline{LJ}$. Adattato da Posamentier, Salkind, *Challenging problems in geometry*

22. Nel triangolo ABC in figura, 

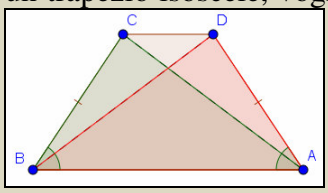
i punti E, H e J sono rispettivamente punti medi dei segmenti AB, CE e BI. Sapendo che AI è lungo 8 cm, determinare la misura di EJ.

23. Con riferimento al problema precedente, provare che il perimetro di EJ è sempre metà di AI. Provare inoltre che $\overline{CI} = \overline{IJ}$.

24. Nel triangolo ABC in figura, 

D, E, F sono punti medi dei lati ed è $BH \perp AC$. Provare che è $\angle F\hat{D}E = \angle F\hat{H}E$. Adattato da Posamentier, Salkind, *Challenging problems in geometry*

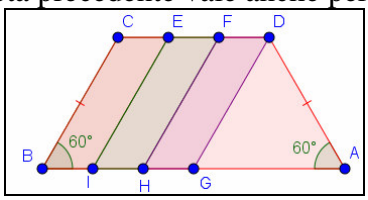
Lavoriamo insieme

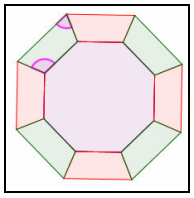
Consideriamo un trapezio isoscele, vogliamo provare che le sue diagonali sono uguali. Ci riferiamo alla seguente figura. 

Teniamo conto del teorema 20 che afferma che gli angoli adiacenti alla base maggiore sono fra loro uguali; allora i triangoli ABD e ABC sono uguali per LAL. Infatti hanno anche il lato AB in comune e i lati AD e BC uguali per ipotesi. Quindi abbiamo provato ciò che volevamo.

Livello 1

1. Dimostrare il teorema 20.
2. Cosa possiamo dire degli angoli adiacenti a uno dei lati obliqui di un trapezio isoscele? [Sono supplementari]
3. La proprietà precedente vale anche per un trapezio qualsiasi? [Sì]
4. Cosa possiamo dire degli angoli adiacenti alla base minore di un trapezio isoscele? [Sono uguali]
5. La proprietà precedente vale anche per un trapezio qualsiasi? [No]
6. Cosa possiamo dire di due angoli opposti di un trapezio isoscele? [Sono supplementari]
7. La proprietà precedente vale anche per un trapezio qualsiasi? [No]

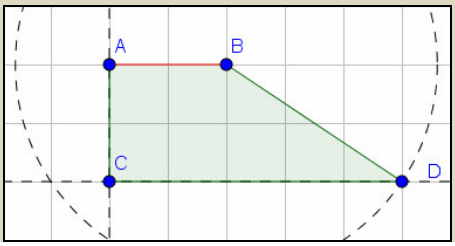
8. In figura, 

$ABCD$ è un trapezio isoscele con gli angoli adiacenti alla base maggiore che misurano 60°. $BCEI$, $EFHI$ e $FDGH$ sono tre parallelogrammi fra loro uguali. Se il lato obliquo misura 9 m, determinare la misura di CE. [3 m]
9. Provare che le bisettrici degli angoli interni adiacenti a uno dei lati obliqui di un qualsiasi trapezio sono fra loro perpendicolari.
10. Otto tavoli uguali a forma di trapezio isoscele sono sistemati in modo da formare un tavolo più grande come in figura. Quanto misurano gli angoli interni dei trapezi?  [67°30′, 112°30′]
11. Dato un triangolo equilatero il cui lato è lungo 1 cm, si tracci il segmento avente per estremi i punti

medi di due lati, dividendo così il triangolo in un trapezio e un altro triangolo. Quanto misura il perimetro del trapezio? [2,5 *cm*]

Lavoriamo insieme

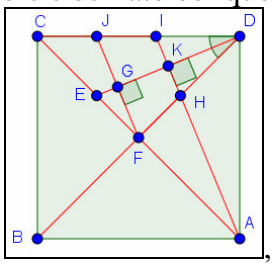
Possiamo costruire con riga e compasso un trapezio rettangolo di cui conosciamo le misure della base minore, l'altezza e il lato obliquo? La risposta è positiva, come possiamo osservare nella seguente figura In essa abbiamo costruito la base minore, *AB*, poi abbiamo tracciato la perpendicolare a uno dei suoi estremi, *A*, e abbiamo tracciato il segmento *AC*. Dato che i due lati sono perpendicolari abbiamo potuto tracciare la retta cui appartiene la base maggiore. Quindi abbiamo tracciato la circonferenza di centro *B* e raggio pari alla misura del lato obliquo. Dalle intersezioni fra quest'ultima circonferenza e la parallela precedente, abbiamo determinato *D*.



Livello 2

12. È possibile costruire un trapezio isoscele conoscendo le misure dei suoi lati? Giustificare la risposta e, se positiva, effettuare la costruzione. [Sì]
13. In relazione al quesito precedente, sono necessarie le misure di tutti i lati? [Sì]
14. È possibile costruire un trapezio isoscele conoscendo le misure delle basi e di uno degli angoli che formano con i lati obliqui? Giustificare la risposta e, se positiva, effettuare la costruzione. [Sì]
15. È possibile costruire un trapezio scaleno conoscendo le misure dei suoi lati? Giustificare la risposta e, se positiva, effettuare la costruzione. [No]
16. È possibile costruire un trapezio scaleno conoscendo le misure di una base, dei lati obliqui e di uno degli angoli che la base forma con uno dei lati obliqui? Giustificare la risposta e, se positiva, effettuare la costruzione. [Sì]
17. Dato un triangolo equilatero, si tracci il segmento avente per estremi due punti che dividono ciascuno dei lati cui appartengono nel rapporto $\frac{1}{8}$. Se il perimetro del trapezio che così si ottiene è 23 *cm*, quanto misura il lato del triangolo? [8 *cm*]
18. Nel trapezio isoscele *ABCD*, la base minore *CD* è lunga 3 *cm*, mentre il lato obliquo è lungo 7 *cm*. Sapendo che $\angle B\hat{C}D = 2\angle D\hat{A}B$, determinare la misura della base maggiore *AB*. [10 *cm*]

Livello 3

19. Provare che in un trapezio isoscele in cui gli angoli opposti sono uno doppio dell'altro, la base maggiore è somma della base minore e del lato obliquo.
20. Nel quadrato *ABCD* in figura 

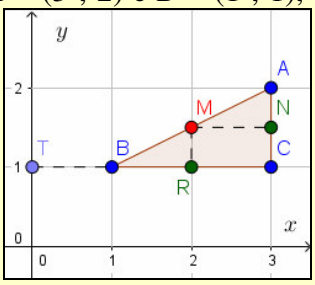
, *ED* è bisettrice di $C\hat{D}B$, *AI*⊥*ED*, *FJ* // *ED*. Provare che $\overline{CJ} = \overline{JI}; \overline{JD} = \overline{DF}, \overline{ID} = \overline{DH}; \overline{JI} = \overline{HF}$. Quanto vale $\frac{\overline{CI}}{\overline{HF}}$? Adattato da Posamentier, Salkind, *Challenging problems in geometry* [2]

Quelli che … vogliono sapere di più

Applicazioni di geometria analitica

Grazie al teorema 18 possiamo determinare le coordinate del punto medio di un segmento di cui conosciamo le coordinate dei suoi estremi. Iniziamo col considerare un esempio.

Esempio 15

Consideriamo il segmento AB in figura, in cui $A \equiv (3\ ;\ 2)$ e $B \equiv (1\ ;\ 1)$, vogliamo determinare la posizione, cioè le coordinate, del punto medio M di AB. 

costruiamo il triangolo rettangolo ACB, in cui i cateti AC e BC sono paralleli all'asse y e x rispettivamente. Così facendo ci rendiamo facilmente conto che A e C hanno le stesse ascisse e B e C le stesse ordinate. Siano N e R i punti medi di AC e BC.
Grazie al teorema 18, possiamo dire che MN misura metà di BC ed è a esso parallelo, quindi M e N hanno le stesse ordinate, allo stesso modo M e R hanno le stesse ascisse. Quindi trovare le coordinate di M equivale a trovare l'ascissa di R e l'ordinata di N.
Cominciamo col determinare l'ascissa di R. È facile capire che, poiché siamo nel 1° quadrante, essa equivale alla misura del segmento TR. D'altro canto $\overline{TR} = \overline{TC} - \overline{RC}$. Inoltre $MNCR$ è un rettangolo, quindi MN e RC hanno la stessa misura, così RC è la metà di BC, cioè $\overline{TR} = \overline{TC} - \dfrac{\overline{BC}}{2}$. Ragionando in modo analogo a quanto già fatto possiamo anche scrivere la seguente uguaglianza:

$$\overline{TR} = \overline{TC} - \frac{\overline{TC} - \overline{TB}}{2} = \frac{2\overline{TC} - (\overline{TC} - \overline{TB})}{2} = \frac{\overline{TC} + \overline{TB}}{2}$$

ma le misure di TC e TB non sono altro che le ascisse di C e B rispettivamente, cioè di A e di B. Poiché questi sono valori che conosciamo, abbiamo trovato l'ascissa di R, cioè quella di M, cioè $x_M = \dfrac{3+1}{2} = 2$. Se ripetiamo questo identico ragionamento per l'ordinata di M troveremo che $y_M = \dfrac{2+1}{2} = \dfrac{3}{2}$.

Il precedente esempio ci può servire come *modello* per dimostrare il seguente risultato generale.

Teorema 21

Dato il segmento AB, con $A \equiv (x_A; y_A)$ e $B \equiv (x_B; y_B)$ punti posti nello stesso riferimento cartesiano ortogonale, le coordinate x_M e y_M del punto medio di AB sono: $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$; $\quad y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

Esempio 16

Determinare le coordinate del punto medio del segmento di estremi i punti $A \equiv (-1; 3)$ e $B \equiv (4; -5)$. Applicando le formule stabilite nel teorema 21, troviamo facilmente: $M \equiv \left(\dfrac{-1+4}{2}; \dfrac{3-5}{2}\right) \equiv \left(\dfrac{3}{2}; -1\right)$.

Allo stato attuale delle nostre conoscenze non siamo in grado di provare il seguente teorema, che perciò ci limitiamo a enunciare.

Teorema 22

Dato il triangolo ABC, con $A \equiv (x_A; y_A)$, $B \equiv (x_B; y_B)$ e $C \equiv (x_C; y_C)$, le coordinate x_G e y_G del suo baricentro sono: $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$; $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$.

Esempio 17

Determinare le coordinate del baricentro del triangolo di vertici i punti $A \equiv (1; 0)$, $B \equiv (-2; 3)$ e $C \equiv (-1; -2)$.
Le coordinate cercate si ottengono mediante le formule stabilite nel teorema 22, quindi sono:

$$x_G = \frac{1-2-1}{3} = -\frac{2}{3}; \quad y_G = \frac{0+3-2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Verifiche

Lavoriamo insieme

Del segmento di estremi A e B conosciamo le coordinate di $A \equiv (1; 3)$ e del punto medio $M_{AB} \equiv (–3; 0)$, vogliamo determinare le coordinate dell'altro estremo B. Basta applicare il procedimento inverso a quello visto per determinare le coordinate del punto medio conoscendo quelle degli estremi. Indichiamo con $B \equiv (x_B; y_B)$ le coordinate di B. ricaviamo adesso le coordinate di M_{AB}, con la ben nota formula: $M_{AB} \equiv \left(\frac{1+x_B}{2}; \frac{3+y_B}{2}\right)$, queste due espressioni simboliche hanno però un valore numerico che conosciamo, cioè (–3; 0). Uguagliamo allora termine a termine: $\frac{1+x_B}{2} = -3 \wedge \frac{3+y_B}{2} = 0 \Rightarrow 1+x_B = -6 \wedge 3+y_B = 0 \Rightarrow x_B = -7 \wedge y_B = -3$. Verifichiamo che effettivamente il punto medio di A e $B \equiv (–7; –3)$ è $M_{AB} \equiv \left(\frac{1-7}{2}; \frac{3-3}{2}\right) \equiv \left(-\frac{6}{2}; \frac{0}{2}\right) \equiv (-3;0)$.

Livello 1

1. Determinare le coordinate dei punti medi dei segmenti di cui vengono fornite le coordinate degli estremi:

   a) $A \equiv (1; 2)$, $B \equiv (0; –3)$; b) $C \equiv (–1; –2)$, $D \equiv (4; 0)$; c) $E \equiv \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right), F \equiv \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$;

   d) $G \equiv (13; 12)$, $H \equiv (12; 13)$; e) $I \equiv \left(\frac{1}{4}; -\frac{3}{8}\right), J \equiv \left(-\frac{4}{3}, -\frac{3}{2}\right)$; f) $K \equiv (0; 2)$, $L \equiv (–4; 0)$

   $\left[M_{AB} \equiv \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right); M_{CD} \equiv \left(\frac{3}{2}; -1\right); M_{EF} \equiv \left(0; \frac{1}{4}\right); M_{GH} \equiv \left(\frac{25}{2}; \frac{25}{2}\right); M_{IJ} \equiv \left(-\frac{13}{24}; -\frac{15}{16}\right); M_{KL} \equiv (-2;1)\right]$

2. Determinare le coordinate dei baricentri dei triangoli di cui vengono fornite le coordinate dei vertici:

   a) $A \equiv (3; 1)$, $B \equiv (3; 2)$, $C \equiv (–1; –3)$; b) $D \equiv (–4; 0)$, $E \equiv \left(0; -\frac{1}{2}\right), F \equiv \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$;

   c) $H \equiv (2; –3)$, $I \equiv (–2; –2)$, $J \equiv (–3; 2)$; d) $K \equiv (0; –1)$, $L \equiv (–2; 0)$; $M \equiv (1; 1)$

   $\left[G_{ABC} \equiv \left(\frac{5}{3}; 0\right); G_{DEF} \equiv \left(-\frac{7}{6}; -\frac{1}{4}\right); G_{HIJ} \equiv (-1;-1); G_{KLM} \equiv \left(-\frac{1}{3}; 0\right)\right]$

Livello 2

3. Determinare le coordinate di un estremo dei segmenti di cui conosciamo le coordinate dell'altro e del loro punto medio:

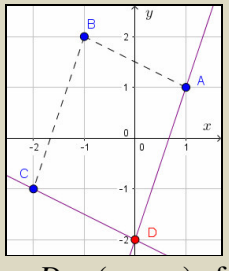
   a) $A \equiv (–1; 1)$, $M_{AB} \equiv (1, 3)$; b) $C \equiv (2; 0)$, $M_{CD} \equiv (4, –1)$; c) $E \equiv (4; 4)$, $M_{EF} \equiv (–4, –1)$;

   d) $G \equiv (0; –2)$, $M_{GH} \equiv (–2, 0)$; e) $I \equiv \left(\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}\right), M_{IJ} \equiv \left(-\frac{3}{4}; \frac{2}{3}\right)$

   $[B \equiv (3; 5); D \equiv (6; –2); F \equiv (–12; –6); H \equiv (–4; 2); J \equiv (–2; 2)]$

Lavoriamo insieme

Conosciamo le coordinate di tre dei vertici di un parallelogramma: $A \equiv (1; 1)$, $B \equiv (–1 ; 2)$, $C \equiv (–2 ; –1)$, vogliamo determinare le coordinate del quarto vertice D. Per far ciò basta applicare le proprietà dei parallelogrammi, tracciando le parallele da ciascuno dei vertici ai lati opposti, come esemplificato in figura.



Per determinare le coordinate del quarto vertice $D \equiv (x_D, y_D)$ sfruttiamo il fatto che le diagonali AC e BD del

parallelogramma si incontrano in un punto che è punto medio di entrambe. Quindi $M_{AC} \equiv M_{BD}$. Dato che $M_{AC} \equiv \left(\frac{1-2}{2};\frac{1-1}{2}\right) \equiv \left(-\frac{1}{2};0\right)$ e $M_{BD} \equiv \left(\frac{-1+x_D}{2};\frac{2+y_D}{2}\right)$, uguagliando le coordinate omonime avremo: $-\frac{1}{2} = \frac{-1+x_D}{2} \Rightarrow x_D = 0, \frac{0}{2} = \frac{2+y_D}{2} \Rightarrow y_D = -2$, quindi $D \equiv (0, -2)$, come ottenuto graficamente.

Livello 1

4. Determinare le coordinate del quarto vertice di un parallelogramma di cui vengono fornite le coordinate degli altri tre vertici:
   a) $A \equiv (1; 1)$, $B \equiv (1; 7)$, $C \equiv (9; 3)$; b) $D \equiv (–1; 2)$, $E \equiv (2; 2)$, $F \equiv (0; 4)$; c) $G \equiv (–5; 1)$, $H \equiv (–5; –1)$, $I \equiv (–3; 0)$; d) $J \equiv (–2; –4)$, $K \equiv (1; –4)$, $L \equiv (2; –2)$; e) $M \equiv (5; 0)$, $N \equiv (6; –1)$, $P \equiv (6; 1)$
   [a) ≡ (9; –3); b) ≡ (–3; 4); c) ≡ (3; 2); d) ≡ (−1; −2); e) ≡ (5; 2)]

Livello 2

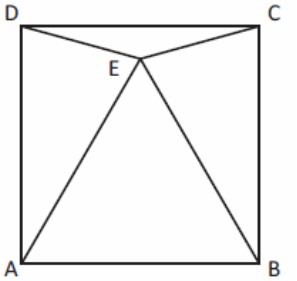
5. Se le coordinate degli estremi di un segmento sono entrambe intere, le coordinate del punto medio del segmento sono sempre intere? Giustificare la risposta. [No]
6. Data la seguente affermazione: Se le coordinate del punto A sono numeri interi uguali al triplo delle corrispondenti coordinate del punto B, allora le coordinate del punto medio del segmento AB sono entrambe intere. Tale condizione è necessaria, sufficiente o necessaria e sufficiente? Giustificare la risposta. [Sufficiente]
7. Se le coordinate dei vertici di un triangolo sono tutte intere, le coordinate del baricentro del triangolo sono sempre intere? Giustificare la risposta. [No]
8. Data la seguente affermazione: Se le coordinate dei vertici di un triangolo ABC sono numeri interi multipli di 3, allora le coordinate del baricentro di ABC sono entrambe intere. Tale condizione è necessaria, sufficiente o necessaria e sufficiente? Giustificare la risposta. [Sufficiente]
9. Di un parallelogramma conosciamo le coordinate di due suoi vertici consecutivi, $A \equiv (1; 3)$ e $B \equiv (–2; 0)$ e le coordinate del punto d'incontro delle diagonali, $E \equiv (4; –1)$. Determinare le coordinate degli altri vertici del parallelogramma. [(10; –2); (7; –5)]
10. Con riferimento al precedente esercizio, se A e B fossero vertici opposti il problema sarebbe risolvibile? Giustificare la risposta. [No]

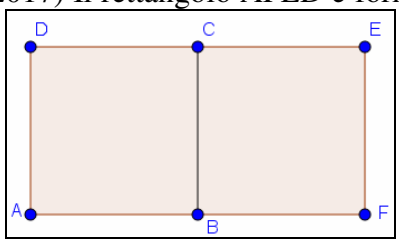
Per la prova Invalsi

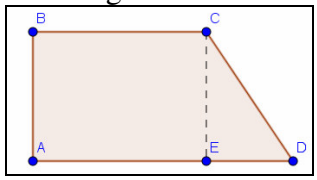
Lavoriamo insieme

Consideriamo un quesito assegnato nei quesiti Invalsi del 2003. *Un esagono regolare e un quadrato hanno lo stesso perimetro. Quanto vale il rapporto fra un lato dell'esagono e un lato del quadrato*?
A) 2/3 B) 3/4 C) 1 D) 3/2 E) *Dipende dal valore del perimetro*.
Il perimetro del quadrato è $4q$, in cui q indica la misura del lato del quadrato; Il perimetro dell'esagono è $6e$, in cui e indica la misura del lato del quadrato. Dato che $4q = 6e$, segue che $\frac{6e}{4q}=1$, quindi che $\frac{3e}{2q}=1$. Noi dobbiamo calcolare $\frac{e}{q}$, quindi dobbiamo "spostare" i numeri 3 e 2 dal primo al secondo membro. Per fare ciò basta moltiplicare per 2 e dividere per 3 entrambi i membri, ottenendo così $\frac{e}{q}=\frac{3}{2}$. Quindi la risposta corretta è la D).

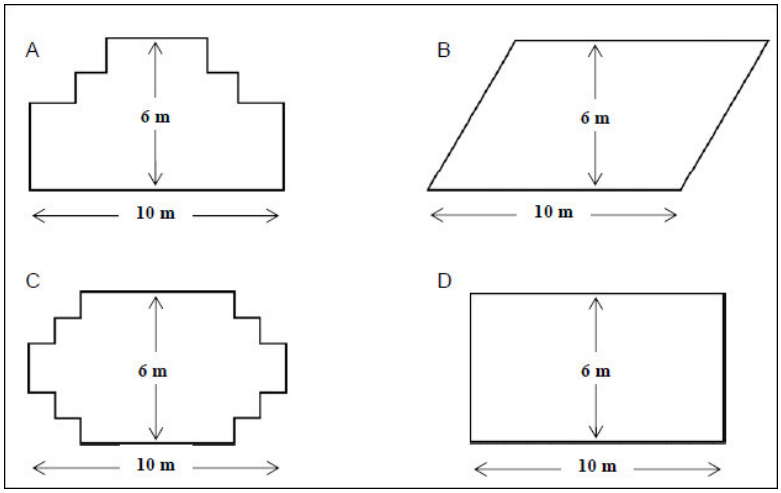
1. (Invalsi 2003) Quale fra le seguenti proprietà è falsa per tutti i parallelogrammi? [C]
   A) I lati opposti sono uguali B) Gli angoli adiacenti sono supplementari C) Gli angoli opposti sono supplementari D) I lati opposti sono paralleli E) Le diagonali si dimezzano scambievolmente
2. (Invalsi 2015) Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni e vera (V) o falsa (F).
   Condizione necessaria affinché un quadrilatero abbia le diagonali uguali è che sia un rettangolo; [F]
   Condizione sufficiente affinché un quadrilatero abbia le diagonali uguali è che sia un rettangolo; [V]
   Condizione necessaria e sufficiente affinché un rombo sia un quadrato è che abbia le diagonali uguali. [V]
3. (Invalsi 2015) Osserva la seguente figura piana: *ABCD* è un quadrato e *ABE* è un triangolo equilatero. Quali segmenti hanno la stessa lunghezza del segmento *AB*? [*AE*, *BE*, *BC*, *CD*, *AD*]



4. (Invalsi 2017) Il rettangolo AFED è formato da due quadrati congruenti ABCD e BFEC con un lato in comune. 

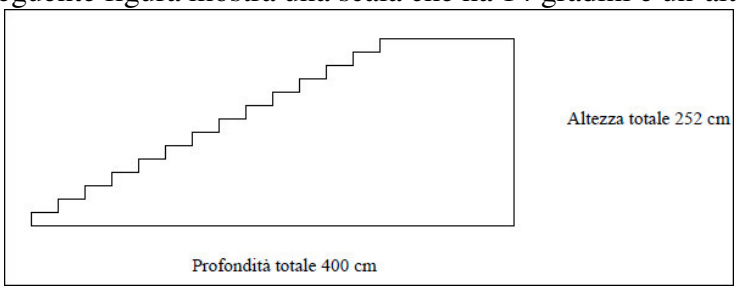
   Il perimetro di ciascuno dei quadrati misura 36 *cm*. Quanto misura il perimetro del rettangolo AFED? [54 *cm*]
5. (Invalsi 2017) Se si fa ruotare il trapezio rettangolo ABCD di un giro completo attorno alla sua base minore si ottiene un solido formato da: 

   A) un cilindro e due coni sovrapposti B) un cilindro e un cono sovrapposti C) un cilindro con una cavità conica D) un tronco di cono [C]
6. (OCSE–PISA) Un carpentiere ha 32 metri di tavole di legno e vuole fare il recinto a un giardino. Per il recinto prende in considerazione i seguenti progetti.



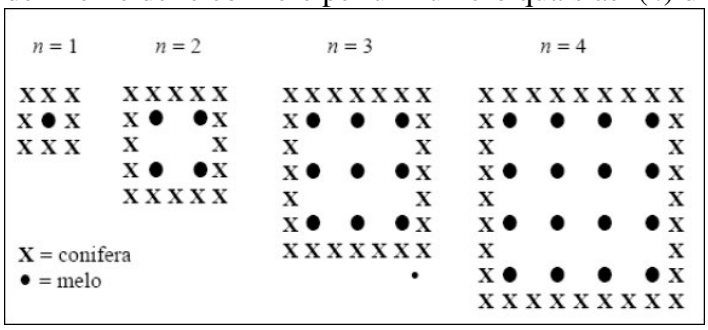
Indica per quali progetti è possibile realizzarlo con 32 metri di tavole. [A; C; D]

7. (OCSE–PISA) La seguente figura mostra una scala che ha 14 gradini e un'altezza totale di 252 *cm*.



Qual è l'altezza di ciascuno dei 14 gradini? [18 *cm*]

8. (OCSE–PISA) Un agricoltore pianta dei meli in modo da formare un quadrato. Per proteggere questi alberi dal vento, pianta delle conifere intorno al frutteto. Qui sotto puoi vedere uno schema che rappresenta la disposizione dei meli e delle conifere per un numero qualsiasi (n) di filari di meli:

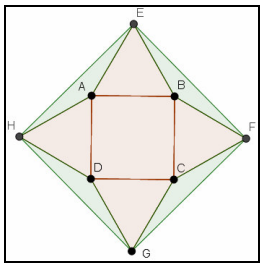


Completa la tabella:

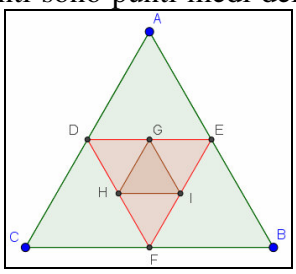
n =	Numero di meli	Numero di conifere
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

Con le due formule seguenti puoi calcolare il numero di meli e il numero di conifere della disposizione descritta prima: Numero di meli = n^2; Numero di conifere = $8n$, dove n è il numero di filari di meli.
Vi è un valore di n per cui il numero di meli è uguale al numero di conifere. Trova il valore di n e mostra il metodo che hai usato per calcolarlo. [8]
Supponi che l'agricoltore voglia ingrandire il frutteto con molti filari di alberi. Man mano che l'agricoltore ingrandisce il frutteto, che cosa aumenta più velocemente: il numero di meli o il numero di conifere? Spiega come hai trovato la risposta. [meli]

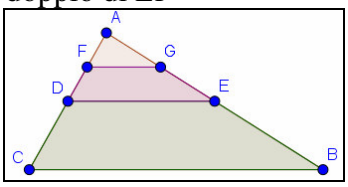
9. Quanti poligoni regolari hanno angoli interni minori di 150°? [11]

10. In figura 

ABCD è un quadrato, i triangoli costruiti sui suoi lati sono triangoli equilateri. Possiamo dire che il quadrilatero *EFGH* A) Non è un parallelogramma B) È un rombo non quadrato C) È un rettangolo non quadrato D) È un quadrato [D]

11. In figura *ABC* è equilatero gli altri punti sono punti medi dei segmenti cui appartengono. Quali fra le seguenti affermazioni non sono vere? 

A) *DEF* è equilatero B) *GHI* ha perimetro 1/3 di quello di *ABC* C) In totale possiamo contare 7 triangoli D) Possiamo ripetere la costruzione per un numero finito di volte E) *AB* è il doppio di *EF* [B; C; D]

12. In figura *ABC* è un triangolo qualsiasi, 

D ed *E* sono punti medi di *AC* e *AB* rispettivamente, *F* e *G* sono punti medi di *AE* e *AG* rispettivamente. Indichiamo con p_1, p_2, e p_3, i perimetri rispettivi di *ABC*, *BCDE* e *DFGE*. Possiamo dire che
A) $p_2 = 2p_3$ B) $p_1 = 2p_2$ C) $p_1 = 3p_3$ D) $p_1 = p_2 + p_3$ E) $p_1 = p_2 - p_3$ [A]

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi

1. Può esistere un poligono che ha un numero primo dispari di diagonali distinte? Giustificare la risposta. [Solo se è un pentagono]
2. In un poligono convesso il numero di diagonali distinte è uguale a k volte il numero dei lati. Quanti lati ha il poligono? [$2k + 3$]
3. In un poligono convesso il numero di diagonali è uguale a k volte il numero dei lati. Quanti lati ha il poligono? [$k + 3$]

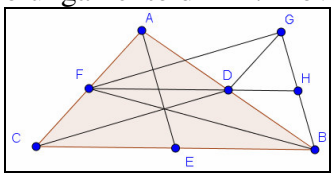
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
OMI = Olimpiadi della Matematica italiane
MT = Mathematics Teacher, rivista della NCTM
TAMU = Texas A&M University test ammission

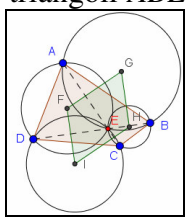
Lavoriamo insieme

Consideriamo un quesito assegnato agli AHSMEdel 1999.
Qual è il massimo numero di angoli interni acuti che può avere un esagono convesso?
La somma degli angoli interni di un esagono convesso è $(6 - 2) \cdot 180° = 720°$. Ovviamente ogni angolo è minore di un angolo piatto, diversamente il poligono non sarebbe convesso. Allora se ci sono 4 angoli acuti la loro somma è inferiore a $4 \cdot 90° = 360°$, perciò la somma dei rimanenti angoli deve essere maggiore di 360°, quindi uno almeno dei due deve essere maggiore di un angolo piatto. Pertanto ci possono essere al massimo tre angoli acuti. In effetti quanto detto vale per qualsiasi poligono convesso, che non può avere più di 3 angoli acuti.

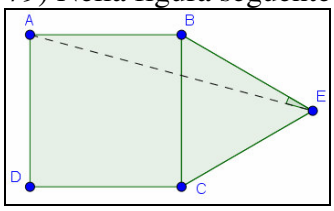
1. (AHSME1955) In figura *AE*, *BF* e *CD* sono mediane del triangolo *ABC*, *FG* è uguale e parallelo a *CD*, *H* è il punto d'incontro di *BG* col prolungamento di *FD*. Provare che *AE* e *BG* sono uguali.

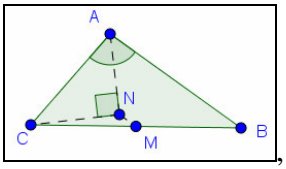


2. (AHSME1973) La somma di tutti gli angoli interni tranne uno, di un poligono convesso è 2190°. Quanti lati ha il poligono? [15]
3. (AHSME1977) Dato un quadrilatero convesso *ABCD*, sia *E* il punto d'incontro delle sue diagonali. Provare che il quadrilatero i cui vertici sono i centri delle circonferenze circoscritte ai triangoli *ABE*; *BCE*, *CDE*, *DAE*, è un parallelogramma.

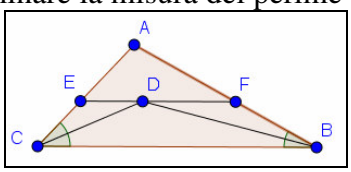


4. (AHSME1979) Nella figura seguente *ABCD* è un quadrato, *ADE* è un triangolo equilatero. Quanto misura $B\hat{E}A$? [15°]



5. (AHSME1981) Nel triangolo *ABC* in figura 

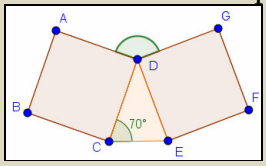
, *M* è il punto medio di *BC*, *AN* biseca $C\hat{A}B$, $CN \perp AN$, $AB\ \overline{AC} = 14\,cm, \overline{AB} = 19cm$. Determinare la misura di *MN*. *Suggerimento*: prolungare *CN* fino a incontrare *AB*. [2,5 *cm*]
6. (AHSME1982) Nella figura seguente *CD* biseca $C\hat{B}A$, *BD* biseca $A\hat{B}C$ ed *EF* è parallela a *BC*. Se *AB*, *BC* e *AC* sono rispettivamente lunghi, in centimetri, 18, 24 e 12, determinare la misura del perimetro del triangolo *AMN*. Sono necessari tutti i dati del problema?



[30; No, la misura di *BC* è inutile]
7. (AHSME1985) Un poligono convesso ha esattamente tre angoli interni ottusi. Quanti lati può avere al massimo tale poligono? [6]

Lavoriamo insieme

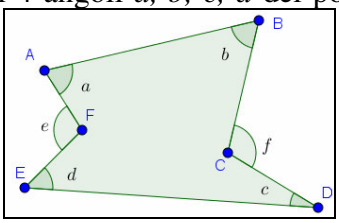
Il seguente quesito è stato assegnato nell'ambito delle selezioni per le Olimpiadi della matematica del 1994.



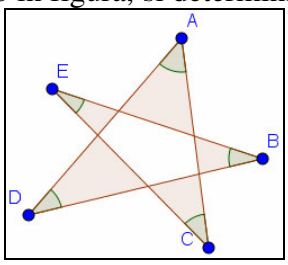
Relativamente alla figura si sa che $\angle D\hat{C}E = 70°$, *ABCD e DEFG sono quadrati uguali. Determinare la misura di* $G\hat{D}A$.

Come possiamo procedere? Per prima cosa notiamo che il triangolo *DCE* è isoscele sulla base *CE*, dato che i lati *DC* e *DE* sono lati appartenenti a quadrati uguali. Ciò vuol dire che gli angoli alla base hanno uguale misura. Poiché la somma degli angoli interni di un triangolo vale 180°, si ha: $\angle E\hat{D}C = 180° - 2 \cdot \angle D\hat{C}E = 180° - 140° = 40°$, da cui $\angle G\hat{D}A = 360° - \angle C\hat{D}A - \angle E\hat{D}C - \angle E\hat{D}G = 360° - 90° - 40° - 90° = 140°$.

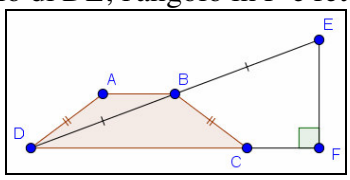
8. (OMI1992) Conoscendo i valori dei 4 angoli *a, b, c, d* del poligono in figura, quanto vale la somma degli angoli *e* ed *f*? [$a + b + c + d$]



9. (OMI1994) Dato il poligono intrecciato in figura, si determini la somma delle misure dei cinque angoli indicati. [180°]



10. (AHSME1989) In figura *ABCD* è un trapezio isoscele i cui lati obliqui sono lunghi 5, mentre le basi sono lunghe 4 e 10. *B* è punto medio di *DE*, l'angolo in *F* è retto. Determinare la lunghezza di *CF*. [4]

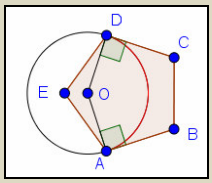


Questions in English

Working together

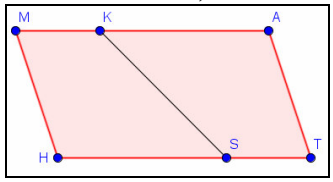
This is a question assigned at AHSME in 1995.

Given regular pentagon ABCDE, a circle can be drawn in such a way that the radius OD and OA are orthogonal yo the sides DC and AB. The number of degrees in minor arc AD is?



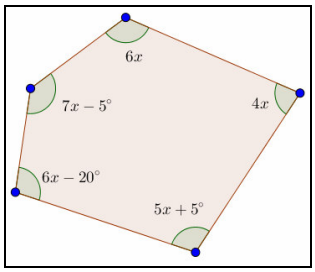
Let *O* be the centre of the circle. Since the sum of the interior angles in any *n*–gon[1] is $(n-2)\cdot 180°$, the sum of the angles in *ABCDO* is 540°. Since $\angle A\hat{B}C = \angle B\hat{C}D = 108°$ and $\angle O\hat{A}B = \angle O\hat{D}C = 90°$, it follows that the measure of $A\hat{O}D$, and thus the measure of minor arc *AD*, equals 144°.

11. (AHSME1981) In trapezoid *ABCD*, sides *AB* and *CD* are parallel and diagonal *BD* and side *AD* have equal length. If $\angle D\hat{C}B = 110°, \angle C\hat{B}D = 30°$, then $\angle A\hat{D}B$ is? [100°]
12. (MT1995) *MATH* is a parallelogram in which *SK* = 12, *MK* = 1/3 *MH*, and *ST* = 1/3*AT*. If the perimeter of *MASK* is 40, find the perimeter of *MATH*. [56]

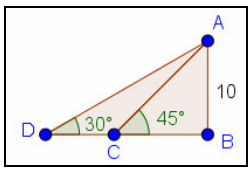


13. (MT1995) Consider a square and an equilateral triangle. The ratio of the measures of the interior angles of this pair of polygons is 3/2. How many other distinct pairs of regular polygons have this property? [2]

[1] Poligono con *n* lati



14. (TAMU1999) Find x. [20°]
15. (TAMU2000) A side of an equilateral triangle is 20 inches long. A second equilateral triangle is inscribed in it by joining midpoints of the sides of the first triangle. The process is continued. Find the perimeter of the 5th inscribed equilateral triangle. [15/8]
16. (TAMU2001) The interior angles of a certain convex polygon add up to 900 degrees. How many sides does the polygon have? [7]



17. (TAMU2001) Find the value of CD in the adjacent figure: $\left[10\sqrt{3}-10\right]$
18. (TAMU2009) The rectangle $ABCD$ has the two sides AD and BC of length 21. Point F is on side BC and point E is on side CD. Moreover, $AB = AE$, $CE = CF$ and $FB = FE$. What is AB? $\left[21\sqrt{2}\right]$

Attività di recupero

Poligoni con più di tre lati

Fase 1: Osserva

- In un poligono convesso di n lati si tracciano $n - 3$ diagonali da ogni vertice, per un totale di $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$ diagonali visibili, dato che la diagonale AX coincide con la diagonale XA. Se un poligono convesso ha 90 diagonali visibili quanti lati ha? Dato che 180 (il doppio di 90) si può scrivere $15 \cdot 12 = 15 \cdot (15 - 3)$, possiamo dire che ha 15 lati. Non ha soluzione il problema in cui le diagonali sono 100, dato che 200 non può scriversi come prodotto di due numeri interi che differiscono di 3.
- Un poligono convesso ha angoli interni la cui somma è uguale a tanti angoli piatti quanto sono i lati meno un angolo giro. Così un poligono di 13 lati ha angoli interni la cui somma è $11 \cdot 180° = 1980°$. Se perciò si chiede di trovare quanti lati ha un poligono la cui somma degli angoli interni è 3060°, basta dividere per 180, ottenendo 17. Quindi il poligono ha 17 + 2 = 19 lati. Non esiste perciò un poligono la somma dei cui angoli interni è 1000°, perché questo non è un multiplo di 180°.

Fase 2: Completa …

- Quanti lati ha un poligono convesso per il quale da un suo vertice abbiamo potuto tracciare un totale di 7 diagonali? Dato che da ogni vertice possono tracciarsi ..... diagonali in meno del numero dei ..... del poligono, possiamo concluder che il poligono ha ..... lati.
- Quante diagonali si possono tracciare in un poligono convesso di 14 lati? Da ogni vertice possiamo tracciare ..... diagonali, quindi dovrebbero essere 14 · ..... = ..., ma siccome a due a due le diagonali sono ..... in realtà le diagonali totali sono .....
- Un poligono convesso di 23 lati ha angoli interni la cui somma è ... · 180° = ... Invece la somma dei suoi angoli esterni è .....
- Un poligono convesso i cui angoli interni hanno somma 1200° ..... perché .....
- Se la somma fosse stata 3240, invece il poligono avrebbe avuto ..... lati. Se poi fosse stato un poligono regolare, ognuno dei suoi angoli interni misurerebbe ..... e ognuno dei suoi angoli esterni .....

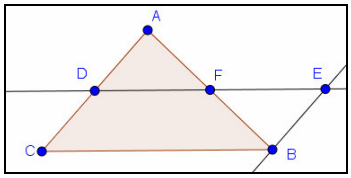
Fase 3: Prova!

1. Quante diagonali ha un poligono convesso di 19 lati? E uno di 25? [152; 275]
2. Quanti lati ha un poligono convesso in cui possiamo tracciare in totale 130 diagonali? [Non esiste]
3. Quanti lati ha un poligono convesso in cui possiamo tracciare in totale 252 diagonali? [24]
4. Un poligono convesso di 23 lati ha angoli interni la cui somma è? [3780]
5. Quanti lati ha un poligono convesso i cui angoli interni hanno somma 3960°? [24]
6. Quanti lati ha un poligono convesso i cui angoli interni hanno somma 5200°? [Non esiste]
7. Quanto misura un angolo interno di un poligono regolare di 18 lati? E ogni angolo esterno? [160°; 20°]
8. Dato un esagono regolare, congiungiamo i punti medi dei suoi lati consecutivi, ottenendo un altro esagono convesso. Provare che anche questo è un esagono regolare. (Suggerimento: tracciare le bisettrici degli angoli interni dell'esagono iniziale).
9. Provare che unendo alternativamente i vertici di un esagono regolare si ottiene un triangolo equilatero.
10. Consideriamo un pentagono regolare e tracciamo le bisettrici dei suoi angoli interni. Provare che ogni bisettrice passa per il punto medio del lato opposto.

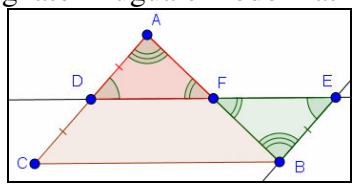
I parallelogrammi

Fase 1: Osserva

- Consideriamo la seguente figura, in cui ABC è un qualsiasi triangolo, D è punto medio di AC, DF è parallelo a BC, BE è parallelo ad AC.



È evidente che in questo modo abbiamo costruito il parallelogramma *DEBC*. Per le proprietà sui parallelogrammi possiamo dire che $\overline{EB} = \overline{CD}, \overline{DE} = \overline{BC}$. Adesso prendiamo in considerazione i triangoli *ADF* e *FEB*. Nella figura seguente abbiamo segnato in uguale modo i lati e gli angoli fra loro uguali.



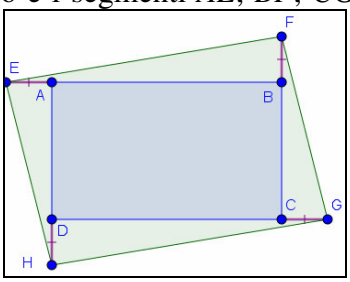
Infatti:

- $\overline{AD} = \overline{DC}$ perché *D* è punto medio di *AC*, *CD* è perciò uguale a entrambi;
- gli angoli di vertice *F* sono uguali perché opposti al vertice;
- gli angoli di vertice *A* e *B* sono uguali perché alterni interni rispetto alle parallele *AC* e *BE* tagliate da *AB*.
- gli angoli di vertici *D* ed *E* sono fra loro uguali per differenza

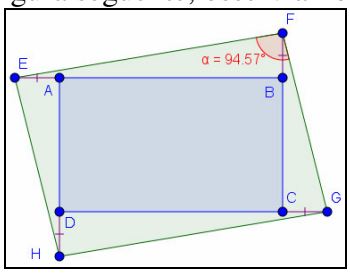
Quindi i triangoli *AFD* e *FED* sono uguali per ALA. Il che significa che si ha:

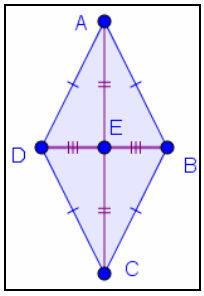
- $\overline{AF} = \overline{BF}$, cioè *F* é punto medio di *AB*;
- $\overline{DF} = \overline{FE}$, cioè *F* é anche punto medio di *DE*.

Proprio quest'ultimo fatto, tenendo conto che *DE* è uguale a *BC*, ci dice che *DF* misura quanto metà *BC*.

- In figura *ABCD* è un rettangolo e i segmenti *AE*, *BF*, *CG* e *DH* sono fra loro uguali, possiamo dire che anche *EFGH* è un rettangolo? 

Non possiamo dirlo, dato che l'unica cosa che possiamo dire è che i triangoli rettangoli *DGH* e *BEF* sono fra loro uguali così come lo sono i triangoli rettangoli *AHE CFG*. Del resto nella figura seguente, osserviamo che uno degli angoli interni non è retto.

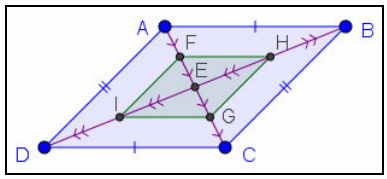




- Vogliamo provare che in un rombo le diagonali sono fra loro perpendicolari. Ci riferiamo alla figura precedente. Consideriamo i triangoli *ABE* e *AED*: questi sono uguali per LLL, infatti *AB* e *AD* sono uguali perché il rombo è un parallelogramma equilatero, *AE* è comune, *BE* ed *ED* sono uguali perché *E* è punto medio di *BD* (accade in tutti i parallelogrammi). Per lo stesso motivo sono uguali tutti e quattro i triangoli formati dalle diagonali. Ma allora sono tutti uguali anche i loro angoli di vertice *E*, che perciò sono ciascuno la quarta parte di un angolo giro, cioè un angolo retto.

Fase 2: Completa …

- In figura abbiamo disegnato un parallelogramma *ABCD* con le relative diagonali; poi abbiamo determinato i punti medi di ciascuna semidiagonale e li abbiamo uniti, ottenendo il quadrilatero *FHGI*, che sembra un parallelogramma. Vediamo se la nostra sensazione è vera.



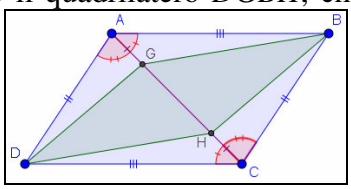
Consideriamo i triangoli *AED* e *BCE*, essi sono uguali, perché hanno

- ❖ $\overline{AD} = \overline{BC}$ perché lati opposti di ……..
- ❖ $\overline{AE} = \overline{EC}$ perché il punto d'incontro delle diagonali di un parallelogramma ……
- ❖ $\overline{BE} = \overline{ED}$ perché ……

Quindi sono uguali per …….Inoltre poiché $\overline{AF} = \overline{FE}, ... = \overline{EG} \Rightarrow \overline{FI} = \frac{1}{2}\overline{AD}, FI \,//$ **…..**

Analogamente anche $\overline{BH} = \overline{HE}, ... = \overline{EG} \Rightarrow \overline{HG} = \frac{1}{2}\overline{BG}, HG \,//$ .....

Ma, essendo *ABCD* un parallelogramma, $\overline{AB} = \overline{CD}$ e ..... // $..... \Rightarrow \overline{FI} = \overline{GH}$ E $..... // GH$, quindi *EFGH* è un parallelogramma.

- In figura abbiamo disegnato un parallelogramma *ABCD*; sulla sua diagonale abbiamo scelto due punti, *G* e *H*, in modo tale da essere ugualmente distanti dagli estremi della stessa diagonale; infine abbiamo costruito il quadrilatero *DGBH*, che sembra un parallelogramma. Vogliamo provare che è effettivamente così. 

Abbiamo segnato allo stesso modo gli enti geometrici fra loro uguali. Vediamo di giustificare le nostre scelte.

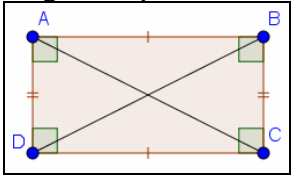
- ❖ $\overline{AB} = \overline{DC}$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$ perché …….
- ❖ $\overline{AG} = \overline{HC}$ perché ……
- ❖ $\angle G\hat{A}B = \angle D\hat{H}C$ perché angoli alterni interni rispetto alle parallele …… e ……. tagliate dalla trasversale ……

Quindi i triangoli *ABG* e *CDH* sono uguali per il criterio …… Perciò possiamo dire che si ha: $\overline{DH}$ = ……

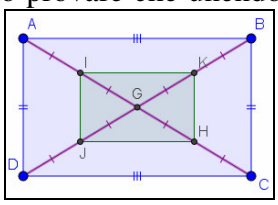
Poi consideriamo i triangoli *DAG* e .... che sono uguali per il criterio ……. Quindi abbiamo anche …….. = ……

Ma allora il quadrilatero *DGBH* ha i lati opposti …….. quindi è un parallelogramma, che è quel che voleva provarsi.

- Vogliamo provare che le diagonali di un rettangolo sono fra loro uguali. Consideriamo la seguente figura:



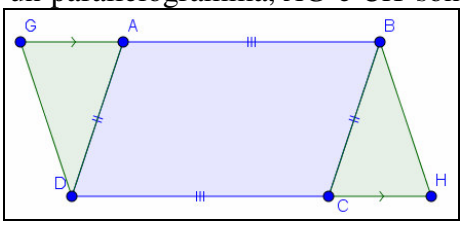
Dato che la somma degli angoli interni di un quadrilatero convesso è pari a un angolo giro, e il rettangolo è un quadrilatero equiangolo, i suoi angoli sono tutti e quattro retti. Quindi i triangoli *ABD* e *BCD* sono entrambi rettangoli e hanno anche i lati *AB* e *CD*, *BC* e *AD* rispettivamente uguali, perché …….... Perciò, per il criterio di isometria dei triangoli rettangoli, *ABD* e *BCD* sono uguali e hanno uguali anche le rispettive ipotenuse, che sono appunto le ……del rettangolo.

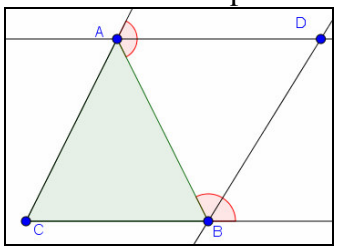
- Vogliamo provare che unendo i punti medi delle semidiagonali di un rettangolo si ottiene ancora un rettangolo. 

Consideriamo il precedente disegno. Possiamo dire che $\overline{IK} = \overline{JH}$ e .... = ... perché i segmenti che uniscono i punti medi dei lati di uno stesso triangolo misurano metà del terzo lato e poiché per ipotesi $\overline{AB}$ = ... e .... = ... *IKHJI* è un parallelogramma. Adesso proviamo che ha tutti gli angoli retti. Possiamo dire che si ha:
  - ❖ $\angle G\hat{I}K = \angle I\hat{A}B$ perché angoli …… rispetto alla rette parallele *AB* ed *IK* tagliate dalla trasversale ……..
  - ❖ $\angle J\hat{I}G = \angle$..... perché ……

  Quindi l'angolo di vertice *I* è formato da due angoli la cui somma equivale all'angolo di vertice *A*, cioè è un angolo ……., che è quel che si voleva provare.

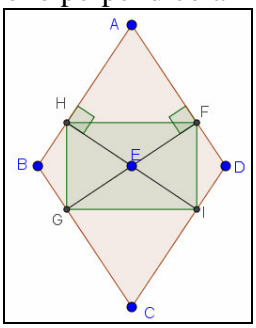
Fase 3: Prova!

1. Provare che un quadrilatero con i lati opposti uguali è un parallelogramma.
2. Provare che un quadrilatero con gli angoli opposti uguali è un parallelogramma.
3. Provare che un quadrilatero con gli angoli adiacenti a ciascun lato supplementari è un parallelogramma.
4. Provare che un quadrilatero le cui diagonali si incontrano nel punto medio è un parallelogramma.
5. Di un parallelogramma conosciamo le misure di due suoi lati consecutivi e l'angolo da essi compreso. Costruire il parallelogramma.
6. Di un parallelogramma conosciamo le misure di un lato e delle sue diagonali. Costruire il parallelogramma.
7. Provare che la somma delle diagonali di un parallelogramma è minore del perimetro.
8. In figura *ABCD* è un parallelogramma, *AG* e *CH* sono fra loro uguali. Provare che anche *BHDG* è un parallelogramma. 

9. In figura *ABC* è un triangolo isoscele sulla base *BC*, *D* è l'intersezione delle bisettrici degli angoli esterni di vertici *A* e *C*. Possiamo dire che *ABCD* è un parallelogramma? Giustificare la risposta. [No] 

10. Sulle diagonali di un rettangolo *ABCD* scegliamo quattro punti, *E*, *F*, *G*, *H*, in modo tale che *AE*, *BF*, *CG* e *DH* siano segmenti fra loro uguali. Provare che *EFGH* è un rettangolo.
11. Con riferimento all'esercizio precedente dimostrare che se *ABCD* è un rombo anche *EFGH* lo è.
12. Dedurre dai due esercizi precedenti che se *ABCD* è un quadrato anche *EFGH* o è.
13. Provare che un parallelogramma con i lati uguali è un rombo.
14. Provare che un quadrilatero le cui diagonali sono bisettrici degli angoli interni, è un rombo.
15. Costruire un rettangolo di cui conosciamo le misure di due suoi lati consecutivi.
16. Costruire un rettangolo di cui si conoscono le misure di un lato e della diagonale.
17. Costruire un rombo di cui conosciamo le misure di un lato e di uno dei suoi angoli interni.
18. Costruire un rombo di cui conosciamo le misure delle sue diagonali.

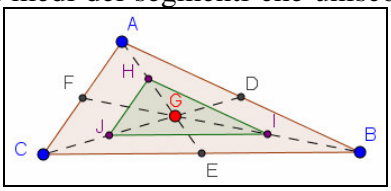
19. Provare che, se *ABC* è un triangolo equilatero, e *D* è l'intersezione delle bisettrici degli angoli esterni di vertici *A* e *C*, *ABCD* è un rombo.
20. Con riferimento al problema precedente, *ABCD* può essere un quadrato? Giustificare la risposta.
21. Dimostrare che le bisettrici degli angoli interni di un parallelogramma formano un rettangolo.
22. In figura *ABCD* è un rombo, *HI* e *FG* sono perpendicolari ai lati. dimostrare che *FIGH* è un rettangolo.

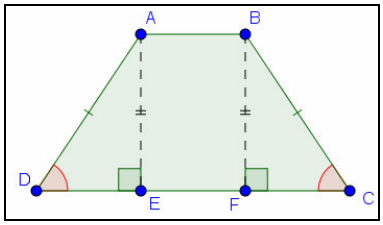


23. Con riferimento all'esercizio precedente, cosa accade di *FIGH* se *ABCD* è un quadrato? Giustificare la risposta. [Diventa un quadrato]

Applicazioni ai triangoli. I trapezi.

Fase 1: Osserva

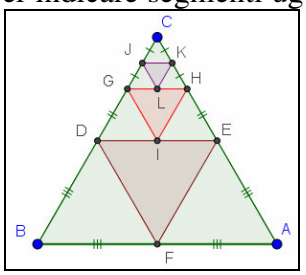
- In figura abbiamo tracciato un triangolo, con le sue mediane e il baricentro *G*. Poi abbiamo considerato i punti medi dei segmenti che uniscono il baricentro con i vertici e li abbiamo uniti ottenendo il triangolo *HIJ*. 

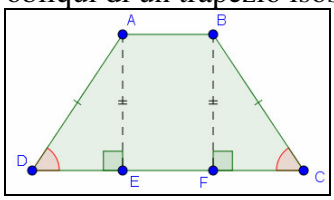
Vogliamo provare che tale triangolo ha perimetro metà di quello di *ABC*. Consideriamo il triangolo *ABG* in esso i punti *I* e *H* sono punti medi dei suoi lati, quindi *IH* è parallelo ad *AB* e pari alla sua metà. Ragionando allo stesso modo sui triangoli *BCG* e *AGC*, proviamo che *IJ* è metà di *BC* e *JH* metà di *AC*. Quindi effettivamente il perimetro di *HIJ* è la metà di quello di *ABC*. Inoltre, proprio per il parallelismo fra i lati, possiamo dire che le mediane di *HIJ* appartengono alle rispettive mediane di *ABC* e quindi *ABC* e *HIJ* hanno lo stesso baricentro.
- Vogliamo provare che gli angoli adiacenti a ciascuna base in un trapezio isoscele sono fra loro uguali. Consideriamo la seguente figura 

in cui abbiamo segnato allo stesso modo i lati uguali, e le altezze condotte dai vertici *A* e *B* rispettivamente; in rosso gli angoli dei quali dobbiamo *dimostrare* l'isometria. Per il criterio di isometria dei triangoli rettangoli, *AED* e *BCF* avendo l'ipotenusa e un cateto (*AE* e *BF*) fra loro uguali, sono uguali. In particolare sono uguali gli angoli di vertici *D* e *C*, cioè quelli adiacenti alla base maggiore, e anche gli angoli interni ai due triangoli, $\angle D\hat{A}E = \angle F\hat{B}C$. Del resto $\angle E\hat{A}B = \angle A\hat{B}F = 90°$, quindi anche gli angoli adiacenti alla base minore sono fra loro uguali.

Fase 2: Completa …

- In un triangolo di perimetro 12 unità uniamo i punti medi dei lati ottenendo così un altro triangolo. Quanto misura il perimetro di quest'ultimo? Abbiamo già visto che ciascuno dei lati di questo triangolo è ……. Perciò è evidente che anche il suo perimetro sarà ……; sarà perciò …….

- In figura *ABC* è equilatero di lato 8 *cm*, i restanti punti sono punti medi di opportuni segmenti, come mostrato usando lo stesso segno per indicare segmenti uguali. Vogliamo determinare la somma dei perimetri dei triangoli *DEF*, *GHI* e *JKL*. 

Intanto calcoliamo la misura del perimetro di *ABC* che è …….. Per quanto visto nelle precedenti attività possiamo dire che il perimetro di *DEF* è ……, quindi è ….., ma anche il perimetro di …. ha lo stesso valore. Per analoghe ragioni *GHI* ha perimetro ……..quindi è ……., e anche *AIH* ha perimetro ….. Infine il perimetro di *JKL* è ……., cioè è ….. .Concludendo la somma cercata è …….
- Vogliamo dimostrare che le proiezioni dei lati obliqui di un trapezio isoscele sulla base maggiore sono fra loro uguali. Consideriamo la figura seguente: 

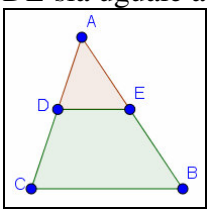
nella quale abbiamo segnato allo stesso modo enti geometrici fra loro uguali. Vediamo il perché di tali scelte.
  - ❖ $\overline{AD} = \overline{BC}$ perché *ABCD* è un trapezio ……
  - ❖ $\angle B\hat{C}D$ = …….. perché …….

Ciò ci basta a potere affermare che i triangoli ……. sono fra loro uguali, dato che applichiamo il criterio ……. Sono perciò uguali anche i cateti ….. e ……, che è quel che volevamo provare. Questo fatto ci permette di potere ricavare una relazione fra questi segmenti e le basi, scrivendo che si ha: $\overline{DE} = \overline{CF} = \frac{\text{.....} - \text{.....}}{2}$.

Fase 3: Prova!

1. In un triangolo *ABC* indichiamo con *H*, *I*, *J* i punti medi dei segmenti che congiungono il baricentro con i vertici. Uniamo questi punti ottenendo il triangolo *HIJ* di perimetro 18 cm. Quanto vale il perimetro di *ABC*? [36 *cm*]
2. Uniamo fra loro i punti medi di un triangolo rettangolo isoscele. Di che tipo è il triangolo così costruito? Giustificare la risposta. [Rettangolo isoscele]
3. Consideriamo il classico triangolo rettangolo di lati 6 *cm*, 8 *cm*, 10 *cm*; congiungiamo, una coppia alla volta, i punti medi dei lati opposti, ottenendo tre trapezi. Quanto misurano i loro perimetri? [18 *cm*, 20 *cm*, 22 *cm*]
4. Ripetiamo quanto detto nell'esercizio precedente per un triangolo equilatero di lato 6 *cm*. Quanto misura il perimetro di uno dei tre trapezi, che adesso sono uguali? [15 *cm*]
5. Con riferimento al problema precedente, esprimere il perimetro di uno dei trapezi mediante il lato *l* del triangolo equilatero. [$2p = 5l/2$]
6. Con riferimento a quanto visto nella costruzione del secondo quesito della Fase 2, calcolare la somma dei perimetri dei tre triangoli interni, in funzione del lato *l* del triangolo equilatero di partenza. [21/8 *l*]
7. Con riferimento al precedente problema, se il triangolo minore ha perimetro 3 *cm*, quanto vale il perimetro del triangolo maggiore? [24 *cm*]
8. Dimostrare che se le proiezioni dei lati obliqui di un trapezio sopra la base maggiore sono uguali allora il trapezio è isoscele.
9. Costruire un trapezio isoscele di cui conosciamo le misure di una base, del lato obliquo e di uno degli angoli interni, nei vari casi in cui l'angolo conosciuto è adiacente a una delle basi e che la base è la minore o la maggiore.

10. Provare che la conoscenza delle misure delle basi e dell'altezza non permette di costruire un solo trapezio.
11. Provare che invece il precedente esercizio è risolvibile se il trapezio è isoscele o rettangolo.
12. Dimostrare che le conoscenze delle misure dei lati di un trapezio non sono sufficienti costruirlo.
13. In figura *ABC* è un triangolo, *DE* è un segmento parallelo a *BC*, quindi *BCDE* è un trapezio. È possibile che il perimetro di *BCDE* sia uguale a quello di *ABC*? Se sì quando accade? Se no, perché non accade?



[No, per la disuguaglianza triangolare]
14. È possibile che un trapezio isoscele abbia i lati obliqui uguali alla base maggiore? Giustificare la risposta. [No, così si ottiene sempre un rombo]
15. In un trapezio rettangolo la base minore e l'altezza sono fra loro uguali, la base maggiore è doppia di quella minore. Dimostrare che una delle due diagonali del trapezio è uguale al lato obliquo.

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito

http://mathinterattiva.altervista.org/volume_1_3.htm

3. Geometria del piano

3.4 Trasformazioni isometriche

Prerequisiti
- Nozioni di geometria euclidea
- Nozioni di insiemistica
- Nozioni di logica
- Il concetto di movimento rigido
- Poligoni e loro proprietà
- Il piano cartesiano

Obiettivi
- Individuare nella realtà fisica oggetti a cui si possono associare enti geometrici
- Creare modelli geometrici per risolvere semplici problemi reali
- Determinare visivamente il tipi di trasformazione che è applicata a due date figure ottenute una dall'altra mediante una trasformazione isometrica
- Individuare simmetrie in particolari figure geometriche

Contenuti
- Concetto di trasformazione geometrica. Le traslazioni
- Le Simmetrie
- Le Rotazioni

Parole Chiave
Punto unito – Retta unita – Rotazione – Simmetria – Traslazione – Vettore

Simbologia

$\vec{v}$	Indica un vettore
$\tau\ (P)$	Se τ è una trasformazione e P è un punto, indica il corrispondente del punto P mediante la trasformazione τ

Concetto di trasformazione geometrica. La traslazione.

In questa unità vogliamo rendere più rigoroso il concetto di movimento rigido che è stato usato in modo intuitivo nell'unità sui triangoli.
Se due figure ottenute l'una dall'altra mediante un movimento rigido vuol dire che le due figure sono formate dagli stessi punti, i quali si succedono allo stesso modo. Se vogliamo sono due oggetti ottenuti dallo stesso stampo, con lo stesso procedimento, con una perfezione che non ci fa notare alcuna differenza fra di loro. Ma allora matematicamente abbiamo una corrispondenza biunivoca fra punti del piano! Vogliamo dare un nuovo nome a questa corrispondenza.

Definizione 1

Una corrispondenza biunivoca fra punti del piano o dello spazio si chiama **trasformazione geometrica**.

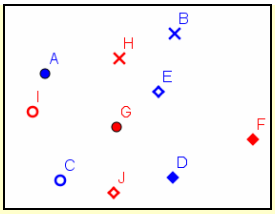
Definizione 2

Una trasformazione geometrica τ che conserva le distanze, tale cioè che il corrispondente di qualunque segmento AB mediante la τ è un segmento $A'B'$ isometrico ad AB si dice trasformazione **isometrica o isometria**.

Notazione 1

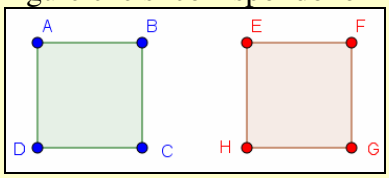
Data una trasformazione geometrica τ e un punto P, con il simbolo $\tau(P)$ indichiamo il corrispondente del punto P mediante la trasformazione τ.

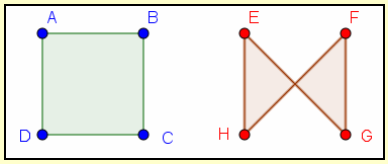
Esempio 1

- In figura 

è rappresentata la trasformazione geometrica $\tau : X \to Y$, che all'insieme $X = \{A, B, C, D, E\}$, formato da cinque punti, associa l'insieme $Y = \{F, G, H, I, J\}$, con la legge $\tau(A) = G$, $\tau(B) = H$, $\tau(C) = I$, $\tau(D) = F$, $\tau(E) = J$. Per comodità abbiamo segnato in blu gli elementi di X e in rosso quelli di Y, inoltre abbiamo usato lo stesso simbolo per indicare punti corrispondenti.
- Ma avremmo potuto definire infinite altre trasformazioni, per esempio associando ogni punto a sé stesso, cioè, una trasformazione geometrica $\tau' : X \to X$, definita dalla legge: $\tau'(A) = A$, $\tau'(B) = B$, $\tau'(C) = C$, $\tau'(D) = D$, $\tau'(E) = E$.
- O anche una trasformazione τ'': $X \to Y$, definita da $\tau''(A) = F$, $\tau''(B) = G$, $\tau''(C) = H$, $\tau''(D) = I$, $\tau''(E) = J$.
- O infinite altre.

Naturalmente il problema di stabilire quante delle precedenti trasformazioni sono isometrie è tutta un'altra questione.

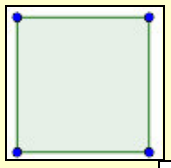
- In figura abbiamo rappresentato due figure che si corrispondono in una certa trasformazione geometrica 

anche se non sappiamo come è avvenuta la trasformazione, intuitivamente ci rendiamo conto che abbiamo a che fare con una isometria, perché le due figure, "appaiono" isometriche.
- Allo stesso modo ci rendiamo conto immediatamente che la trasformazione rappresentata dalla seguente figura non può essere una isometria. 

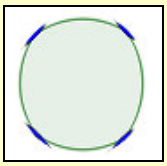
Vediamo adesso un esempio "pratico" di trasformazioni geometriche.

Esempio 2

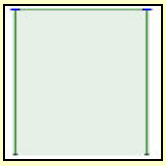
Consideriamo la seguente fotografia del grande matematico David Hilbert, vogliamo "giocare" un po' con essa modificandola mediante uno dei tanti programmi grafici disponibili. Tanto per fare il raffronto, effettuiamo le stesse trasformazioni anche su un quadrato.

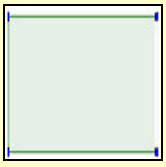
La prima operazione è il cosiddetto effetto cerchio

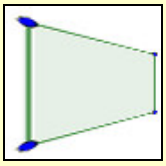
Effetto cilindro orizzontale

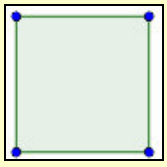
Effetto cilindro verticale

Effetto prospettiva orizzontale

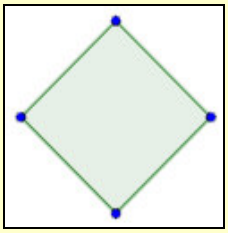



Tutte le precedenti trasformazioni effettuate sulla foto sono certamente non isometriche.
Vediamo invece qualche effetto che mantiene inalterate le proprietà isometriche della foto.

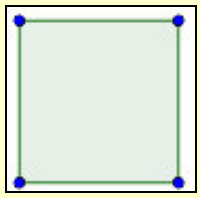
Effetto specchio

in cui non si nota differenza alcuna nel quadrato, mentre si osserva che la tesa del cappello di Hilbert è adesso sulla sua sinistra.

Effetto rotazione

in cui non si deve considerare il riquadro e quindi le sue dimensioni, ma solo ciò che vi è dentro.
Concludiamo con un'altra trasformazione che, pur non essendo isometrica, mantiene inalterate proprietà geometriche come la "forma".

L'effetto ingrandimento

L'angolo storico

La cosiddetta geometria delle trasformazioni è relativamente recente. Per secoli fare geometria ha significato studiarla secondo quanto prescrisse Euclide nei suoi Elementi, scritti attorno al 300 a.C. Euclide considera sì il concetto di movimento da un punto di vista intuitivo e meccanico, ma non lo descrive, non dice cioè come possa avvenire, né lo considera come una "trasformazione".
Solo nel XIX secolo la geometria si avvia a trattare le trasformazioni geometriche, da un punto di vista algebrico, quindi come applicazioni da insiemi di punti a insiemi di punti. La vera e propria consacrazione si ha nel cosiddetto programma di Erlangen, ossia nella prolusione che il famoso matematico tedesco Felix Klein presentò all'Università di Erlangen come "presentazione" dei suoi studi, quando fu lì nominato professore.
Klein suggeriva appunto di studiare la geometria come una corrispondenza fra insiemi di punti; lo studio doveva poi fissarsi sui cosiddetti "invarianti", cioè su quegli enti che non cambiavano durante la trasformazione, come appunto la misura di segmenti o angoli, la direzione di rette e altre proprietà più complesse.

Adesso vediamo quali possono essere le più elementari trasformazioni isometriche.
Cominciamo con l'operazione di spostare la figura lungo una direzione, come se scorresse su binari paralleli. Dobbiamo premettere la definizione di alcuni strumenti necessari.

Definizione 3

Chiamiamo **vettore** un segmento sul quale abbiamo stabilito un orientamento. Un vettore è caratterizzato da 3 grandezze: **ampiezza** (la lunghezza del segmento), **direzione** (la retta a cui appartiene il segmento), **verso** (l'ordine con cui ci si sposta sulla retta direzione).

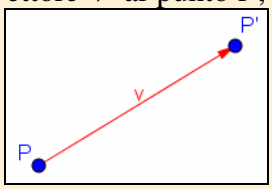
Definizione 4

Due vettori che hanno uguali ampiezza, direzione e verso si dicono fra loro **equipollenti**.

Notazione 2

Indichiamo con il simbolo $\vec{v}$, un vettore di nome *v*.

Notazione 3

Indichiamo con $P + \vec{v}$ l'applicazione del vettore $\vec{v}$ al punto *P*, cioè il raggiungimento del punto *P'* a partire da *P* come è chiarito nella figura seguente. 

Vale il seguente risultato.

Teorema 1

La relazione di equipollenza tra vettori è una relazione di equivalenza.

Che cosa significa?

Vettore. Dal latino *vehere* che significa trasportare con il carro. Il vettore indica quindi un movimento. Ricordiamo che in astronautica la parola vettore indica un razzo.

Quindi, fissato un punto del piano, il vettore è un segmento che ci indica di quanto, in che direzione e in che verso ci dobbiamo spostare, mediante la sua ampiezza, la retta a cui appartiene e l'ordine su di essa stabilito. Possiamo perciò dire che un vettore è individuato dalla sua ampiezza, dalla sua direzione e dal suo verso.

Esempio 3

Spesso nel linguaggio comune si parla di distanza in linea d'aria. Per esempio se dobbiamo spostarci da casa nostra al centro della città, diciamo che in linea d'aria questo è un percorso per esempio di 1 chilometro. Ciò significa che, se consideriamo il percorso più corto possibile, appunto quello che si effettuerebbe *volando*

senza ostacoli di alcuna natura, dovremmo percorrere 1 *Km*. In realtà nel nostro percorso siamo vincolati a seguire le strade tracciate, se andiamo con un mezzo siamo anche limitati dai divieti di circolazione e così via. Se però consideriamo il segmento orientato da casa (punto di partenza) al centro (punto di arrivo) e lungo 1 *Km* otteniamo il *vettore* che rappresenta il percorso minimo, anche se solo teorico.

Anche se potrebbe sembrare ovvio è importante definire anche il concetto seguente.

Definizione 5

Diciamo **vettore nullo** il vettore che applicato a qualsiasi punto del piano gli associa lo stesso punto.

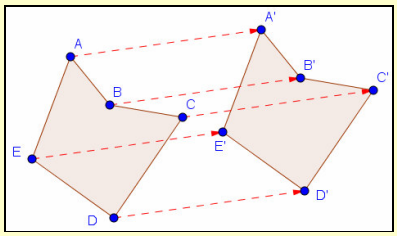
In effetti lo stare fermi è un tipo molto particolare di movimento, appunto il movimento nullo. Ce ne rendiamo meglio conto dall'osservazione fisica di un corpo in movimento. Anche se il corpo rimane fermo, da un punto di vista fisico qualcosa sta variando: il tempo.
Passiamo adesso a definire la prima corrispondenza biunivoca che vogliamo trattare.

Definizione 6

Diciamo **traslazione** di vettore $\vec{v}$ la trasformazione geometrica τ che a ogni punto P associa il punto $P + \vec{v}$.
Cioè in formula: $\tau(P) = P + \vec{v}$

Esempio 4

Di seguito proponiamo un esempio grafico di traslazione di un poligono, in questo caso basta traslare solo i vertici, dato che questi determinano univocamente il poligono. Non bisogna però dimenticare che si traslano tutti i punti del piano e non solo i vertici o i punti dei poligoni. Per facilitare le cose abbiamo indicato con lo stesso nome, ma seguito da un apice il vertice che si ottiene mediante la traslazione.

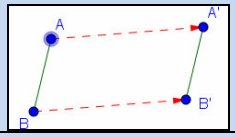


Osserviamo che i vettori che congiungono i vertici corrispondenti sono tutti paralleli fra loro.

Enunciamo il seguente risultato abbastanza intuitivo.

Teorema 2

Una traslazione è una isometria.
Dimostrazione
Per provare la tesi basta far vedere che traslando un segmento generico il suo traslato è isometrico a esso.

Schema dimostrativo			
Passo	**Azione**	**Conseguenza**	**Giustificazione**
1	Trasliamo un segmento AB di un generico vettore non nullo $\vec{v}$	Otteniamo il parallelogramma $AA'B'B$ 	Per definizione di traslazione AA' e BB' sono paralleli ed isometrici.
2	Consideriamo AB e $A'B'$	Sono isometrici	Perché lati opposti di uno stesso parallelogramma.

Una volta che siamo passati da un punto a un altro ci potrebbe interessare fare il contrario, andati in centro vogliamo ritornare a casa. Per far ciò abbiamo bisogno di definire quest'altro concetto.

Definizione 7

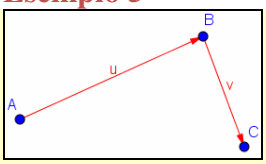
Dato un vettore $\vec{v}$, diciamo suo **vettore opposto**, quel vettore che ha la stessa ampiezza di $\vec{v}$, la stessa direzione ma verso opposto.

Notazione 4

Dato un vettore $\vec{v}$, il suo vettore opposto lo indichiamo con il simbolo $-\vec{v}$.

Consideriamo un'altra questione.

Esempio 5

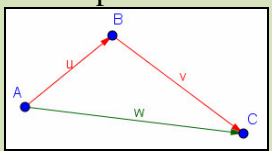


In figura, dal punto *A* siamo andati al punto *B* e poi al punto *C*, per tornare al punto *A* è necessario ripetere il percorso al contrario? Se consideriamo il percorso in linea d'aria certamente no, la strada che da *C* porta ad *A* è più corta della somma delle altre due. In effetti nella realtà potremmo essere vincolati dal fatto che non esiste una strada che da *C* porta direttamente ad *A* o che essa per vari motivi è meno preferibile del percorso più lungo *CBA*.

Vediamo di precisare quel che abbiamo evidenziato nell'esempio precedente.

Definizione 8

Dato il vettore $\vec{u}$ che collega fra loro i punti *A* e *B* e il vettore $\vec{v}$ che collega fra loro i punti *B* e *C*. Diciamo **somma** di $\vec{u}$ e $\vec{v}$ il vettore $\vec{w}$ che collega fra loro i punti *A* e *C*.



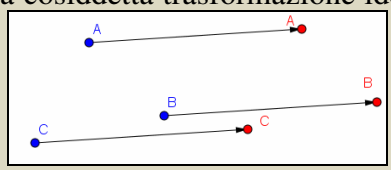
In pratica si usa la cosiddetta regola del parallelogramma, dato che il vettore $\vec{w}$ altri non è che la diagonale del parallelogramma in cui due lati consecutivi sono *AB* e *BC*.

Verifiche

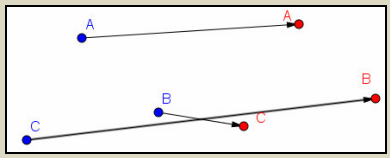
Lavoriamo insieme

Dato l'insieme $X = \{A, B, C\}$ di 3 punti nel piano, possiamo effettuare un totale di 6 diverse trasformazioni geometriche da X in se stesso. Vediamole:

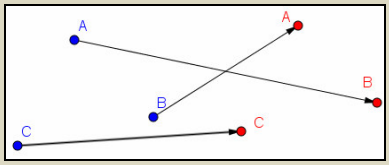
1. $\tau(A) = A$; $\tau(B) = B$; $\tau(C) = C$; è la cosiddetta trasformazione identica, in cui ogni punto viene associato a se stesso.



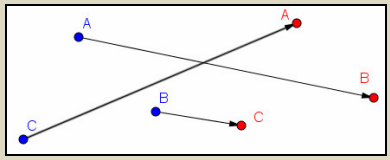
2. $\tau(A) = A$; $\tau(B) = C$; $\tau(C) = B$.



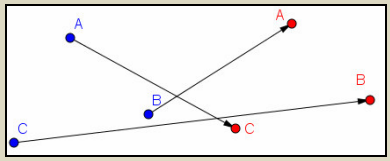
3. $\tau(A) = B$; $\tau(B) = A$; $\tau(C) = C$.



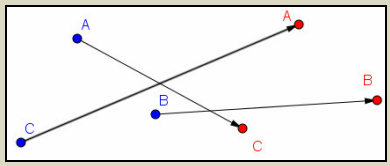
4. $\tau(A) = B$; $\tau(B) = C$; $\tau(C) = A$.



5. $\tau(A) = C$; $\tau(B) = A$; $\tau(C) = B$.



6. $\tau(A) = C$; $\tau(B) = B$; $\tau(C) = A$.

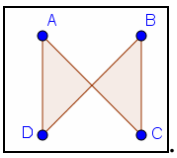


Livello 2

1. Quante diverse trasformazioni si possono effettuare dall'insieme $X = \{A, B\}$ a $Y = \{C, D\}$? [2]
2. Quante diverse trasformazioni si possono effettuare dall'insieme $X = \{A, B\}$ a $Y = \{C, D, E\}$? [6]
3. Quante diverse trasformazioni si possono effettuare dall'insieme $X = \{A, B, C\}$ a $Y = \{D, E, F\}$? [6]
4. Quante diverse trasformazioni dall'insieme $X = \{A, B, C\}$ a $Y = \{D, E, F\}$? associano A a D? [2]
5. Dato l'insieme $X = \{A, B, C, D\}$, quante diverse trasformazioni geometriche da X in se stesso, possiamo effettuare? [24]
6. Dato l'insieme $X = \{A, B, C, D\}$, quante delle trasformazioni geometriche da X in se stesso, hanno A fisso, cioè sono tali che sia $\tau(A) = A$? [6]
7. Dato l'insieme $X = \{A, B, C, D\}$, quante delle trasformazioni geometriche da X in se stesso, hanno sia A che B fisso? [2]
8. Dato l'insieme $X = \{A, B, C\}$, quante delle trasformazioni geometriche da X in se stesso, non hanno alcun punto fisso? [3]

Livello 3

9. Dato l'insieme $X = \{A, B, C, D\}$, quante delle trasformazioni geometriche da X in se stesso, non hanno alcun punto fisso? [9]
10. Dato un quadrato $ABCD$, quante delle trasformazioni che a ogni suo vertice associano un altro vertice dello stesso quadrato, hanno come risultato ancora un quadrato? Nel senso che i vertici della figura corrispondente devono essere uniti nello stesso ordine con cui vengono ottenuti. Per esempio $\tau(A) = C$; $\tau(B) = A$; $\tau(C) = D$; $\tau(D) = B$, da luogo al quadrilatero $CADB$, che non è un quadrato, come

mostrato in figura 

. [8]

Lavoriamo insieme

Nel piano cartesiano una trasformazione geometrica è una legge che stabilisce come si trasformano le ascisse e le ordinate dei punti. Per esempio data la trasformazione $\tau(x; y) = (3x + y\ ;\ x - 1)$, allora il trasformato del punto $(1; 2)$ sarà il punto $(3 \cdot 1 + 2; 1 - 1) = (5; 0)$.

Livello 1

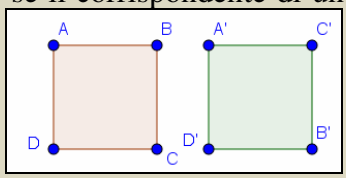
11. Determinare i corrispondenti dei seguenti punti secondo la trasformazione $\tau(x; y) = (2x + 3y\ ;\ x - y)$
$(1; 2)$; $(0; 0)$; $(-1; 3)$; $(2; -2)$; $(0; -4)$ $[(8; -1)$; $(0; 0)$; $(7; -4)$; $(-2; 4)$; $(-12; 4)]$
12. Determinare i corrispondenti dei seguenti punti secondo la trasformazione $\tau(x; y) = (x + y\ ;\ x - y + 1)$
$(2; 2)$; $(1; -1)$; $(-2; 0)$; $(0; -2)$; $(3; -4)$ $[(4; 1)$; $(0; 1)$; $(-2; -1)$; $(-1; 3)$; $(-1; 8)]$
13. Determinare i corrispondenti dei seguenti punti secondo la trasformazione $\tau(x; y) = (2\ ;\ 3x - y + 2)$
$(1; -3)$; $(2; 2)$; $(-2; -3)$; $(0; -1)$; $(-2; 0)$ $[(2; 8)$; $(2; 2)$; $(2; -1)$; $(2; 3)$; $(2; -4)]$

Livello 2

14. Determinare, se esistono, i punti uniti, cioè quelli per i quali si ha $\tau(x; y) = (x; y)$, nelle trasformazioni seguenti $\tau(x; y) = (x + y; y)$; $\tau(x; y) = (x + y + 1; x - y + 2)$; $\tau(x; y) = (2x + y - 1; 3)$
$[(x; 0); (-4; -1); (-2; 3)]$
15. Determinare, se esistono, i punti per i quali si ha $\tau(x; y) = (y; x)$, nelle trasformazioni seguenti $\tau(x; y) = (x; 2y)$; $\tau(x; y) = (x + y; 2)$; $\tau(x; y) = (2x + y - 1; x + 2y + 1)$ $[(0; 0); \varnothing; (-1/2; 1/2)]$
16. Determinare, se esistono, i punti per i quali si ha $\tau(x; y) = (x + y; y - x)$, nelle trasformazioni seguenti $\tau(x; y) = (x + y; y)$; $\tau(x; y) = (x + y + 1; x - y + 2)$; $\tau(x; y) = (2x + y - 1; 3)$ $[(0; y); \varnothing; (1; 4)]$

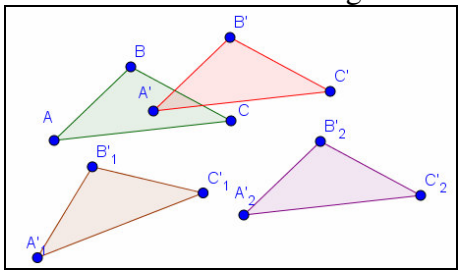
Lavoriamo insieme

In una traslazione non può mai accadere che si inverta l'ordine di lettura, nel senso per esempio che il quadrato $ABCD$ in figura non potrà mai diventare il quadrato $A'C'B'D'$ in figura, se il corrispondente di un vertice è quello che ha lo stesso nome con l'apice.

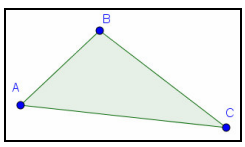


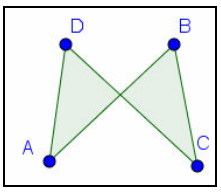
Livello 1

17. Quale vettore si ottiene sommando due vettori fra loro opposti? Giustificare la risposta. [Quello nullo]
18. Quali fra le seguenti figure non è una traslazione del triangolo ABC? $[A_1'B_1'C_1']$

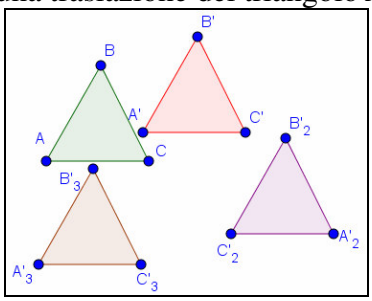


19. Effettuare la traslazione del seguente triangolo rispetto ai vettori: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC}$.

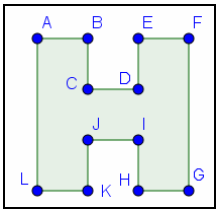




20. Effettuare la traslazione del seguente poligono rispetto ai vettori: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$.
21. Quali fra le seguenti figure non è una traslazione del triangolo ABC? [$A_2'B_2'C_2'$]



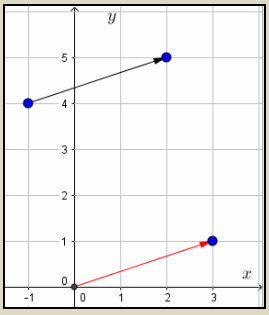
Livello 2



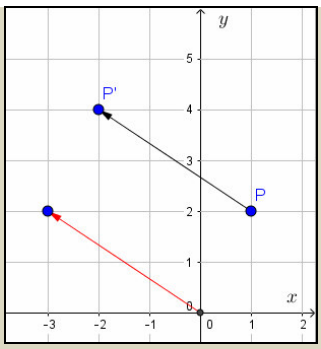
22. Effettuare la traslazione del seguente poligono rispetto ai vettori: $\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{EJ}$, $\overrightarrow{AG}$.
23. Generalizzando la regola data per sommare due vettori, ottenere una regola per sommare più di due vettori.
24. Data una figura $\mathcal{F}$, le si applichi una traslazione di vettore $\vec{v}$, ottenendo $\mathcal{F}$'. A $\mathcal{F}$' si applichi una traslazione di vettore $\vec{w}$, ottenendo $\mathcal{F}$''. Si dimostri che esiste una traslazione di vettore $\vec{v}+\vec{w}$ che permette di passare da $\mathcal{F}$ a $\mathcal{F}$''.
25. Per simulare il movimento di un oggetto sullo schermo di un PC, si disegna l'oggetto, quindi dopo un brevissimo intervallo di tempo, non percepibile dall'occhio umano, si cancella l'oggetto che viene ridisegnato a una certa distanza da prima. E così via. Supponiamo di voler simulare il movimento orizzontale di un segmento lungo 10 pixel, lungo uno schermo largo 1024 pixel. Se ogni volta disegniamo il segmento 4 pixel più a destra di prima, quante operazioni di disegno e cancellatura, dobbiamo fare in totale per mostrare l'oggetto che attraversa lo schermo, apparendo all'inizio con il suo estremo sinistro nel primo pixel dello schermo, e poi sparisce del tutto? [508]
26. Con riferimento al precedente quesito, se le operazioni in totale sono 450, di quanti pixel ci spostiamo ogni volta? [5]

Lavoriamo insieme

Nel piano cartesiano la traslazione ubbidisce a semplici regole, note anche dalla fisica. Intanto il vettore della traslazione è determinato dalle sue componenti, ossia dalle coordinate del punto che si ottiene ponendo il vettore sull'origine degli assi. In figura mostriamo come il vettore nero venga traslato in modo che il suo punto di applicazione risulti l'origine, quindi le sue componenti sono (3; 1)



A questo punto per determinare il corrispondente di un punto $P \equiv (x_P; y_P)$ rispetto alla traslazione di vettore di componenti $(x_v; y_v)$, basta sommare algebricamente ottenendo $P' \equiv (x_P + x_v; y_P + y_v)$.
In figura vediamo cosa accade per il punto $P \equiv (1; 2)$ che traslato secondo il vettore $v \equiv (-3; 2)$, diventa il



punto $P' \equiv (1 - 3; 2 + 2) \equiv (-2; 4)$.

Livello 1

Determinare i corrispondenti dei punti indicati rispetto ai vettori accanto indicati

27. $A \equiv (0; 0)$, $v \equiv (1; 4)$; $B \equiv (0; 2)$, $v \equiv (-1; 0)$; $C \equiv (3; 0)$, $v \equiv (0; -1)$
$[A' \equiv (1; 4)$; $B' \equiv (-1; 2)$; $C' \equiv (3; -1)]$
28. $D \equiv (1; 2)$, $v \equiv (-1; -2)$; $E \equiv (3; -1)$, $v \equiv (1; -3)$; $F \equiv (2; -2)$, $v \equiv (2; -2)$
$[D' \equiv (0; 0)$; $E' \equiv (4; -4)$; $F' \equiv (4; -4)]$
29. $G \equiv (3; -3)$, $v \equiv (2; -1)$; $H \equiv (-1; -4)$, $v \equiv (-3; -2)$; $I \equiv (5; -2)$, $v \equiv (3; -3)$
$[G' \equiv (5; -4)$; $H' \equiv (-4; -6)$; $I' \equiv (8; -5)]$

Livello 2

30. $L \equiv (1; -1)$, $v \equiv (a; -a)$; $M \equiv (-2; 0)$, $v \equiv (a; b)$; $N \equiv (a; -b)$, $v \equiv (b; -a)$
$[L' \equiv (1 + a; -1 - a)$; $M' \equiv (a - 2; b)$; $N' \equiv (a + b; -a - b)]$
31. $P \equiv (a; b)$, $v \equiv (b; a)$; $Q \equiv (a - b; a + b)$, $v \equiv (a + b; a - b)$; $R \equiv (a; a - 1)$, $v \equiv (1 - b; b - 1)$
$[P' \equiv (a + b; a + b)$; $Q' \equiv (2a; 2a)$; $R' \equiv (a - b + 1; a + b - 2)]$

Livello 3

32. Per quali valori di a il punto L' dell'esercizio 24 diventa l'origine degli assi? $[a = -1]$
33. Per quali valori di a e di b il punto M' dell'esercizio 24 diventa l'origine degli assi? $[a = 2; b = 0]$
34. Per quali valori di a e di b il punto Q' dell'esercizio 25 diventa l'origine degli assi? $[a = 0, b$ qualsiasi$]$
35. Per quali valori di a il punto L' dell'esercizio 24 diventa $(1; 2)$? [Impossibile]
36. Per quali valori di a il punto L' dell'esercizio 24 appartiene al I quadrante? [Impossibile]

Le simmetrie

Un altro tipo di trasformazione, che però non è un vero e proprio movimento piano, si può ottenere con un procedimento simile a quello che avviene quando ci si guarda allo specchio. Definiamolo.

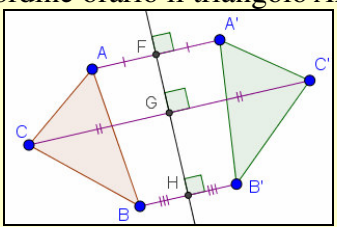
Definizione 9

Diciamo **simmetria assiale** di asse la retta a, la trasformazione geometrica che a ogni punto P del piano associa il punto P', ottenuto in modo che l'asse a sia perpendicolare al segmento PP' nel suo punto medio.

Vediamo qualche esempio grafico.

Esempio 6

In figura presentiamo la simmetria assiale del triangolo ABC rispetto a una retta. Abbiamo unito anche i vertici fra loro corrispondenti, per notare che tali segmenti sono effettivamente perpendicolari all'asse di simmetria e sono divisi a metà da tale asse. Osserviamo inoltre che la simmetria assiale non mantiene l'ordine di lettura, dato che, leggendo in ordine orario il triangolo ABC diventa il triangolo $A'C'B'$.



Enunciamo il seguente risultato abbastanza intuitivo.

Teorema 3

Una simmetria assiale è una isometria.
Dimostrazione per esercizio

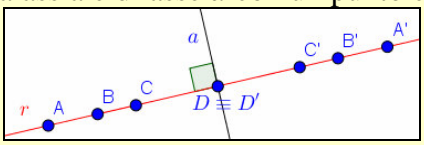
Negli esercizi del paragrafo precedente abbiamo usato un concetto che definiamo in modo più preciso.

Definizione 10

Data una trasformazione geometrica τ, diciamo che un ente geometrico X del piano o dello spazio (punto, retta, poligono, ...) è un **unito** per τ se $\tau(X) = X$.

Parliamo quindi di punti uniti, rette unite e così via. Ovviamente in una simmetria assiale lo stesso asse è una retta unita, dato che naturalmente ogni punto è associato a se stesso. Facciamo attenzione al fatto che una retta unita non deve essere formata necessariamente da punti uniti.

Esempio 7

Nella figura seguente la retta r è perpendicolare alla retta a, quindi ogni punto di r si corrisponde in una simmetria assiale di asse a con un punto che ancora fa parte di r, ma solo il punto D, intersezione di r con a, è unito. 

Invece la stessa retta a non solo è unita, sempre rispetto alla simmetria assiale di asse la stessa a, ma in più ha tutti i punti che sono uniti.

Risulta immediata la dimostrazione del seguente risultato.

Teorema 4

In una simmetria assiale
- i punti dell'asse sono gli unici punti uniti;
- l'asse è l'unica retta di punti uniti;
- le rette perpendicolari all'asse sono unite.

Un'altra cosa che accade per le simmetrie è il fatto che se applichiamo a una data figura F, una simmetria di asse la retta a, otteniamo una certa figura F'. Se applichiamo a F' la stessa simmetria riotteniamo F. Poniamo allora la seguente definizione

Definizione 11

Una trasformazione geometrica t per la quale si ha $t \circ t$ = Identità, si dice **involutoria**.

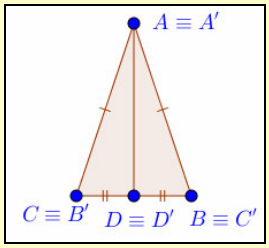
Una trasformazione involutoria è quindi inversa di sé stessa. È ovvia la validità del seguente risultato.

Teorema 5

Una qualsiasi simmetria assiale è involutoria.
Dimostrazione per la stessa definizione di simmetria assiale.

Esempio 8

In un qualsiasi triangolo isoscele la retta che contiene l'altezza relativa alla base è evidentemente asse di simmetria, come meglio mostrato in figura



In vista del precedente esempio poniamo la seguente definizione.

Definizione 12

Dato un poligono P per il quale esiste una simmetria assiale di asse una retta a, rispetto alla quale P è unito. La retta a si dirà **asse di simmetria** del poligono.

Perciò possiamo dire che nel triangolo equilatero vi sono 3 assi di simmetria.

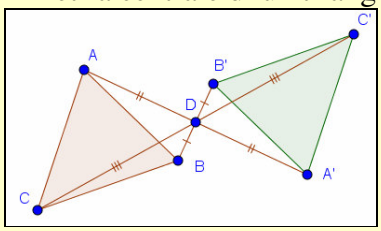
Adesso risulta naturale considerare un procedimento simile al precedente ma riferito a un punto, detto *centro*, piuttosto che a una retta. .

Definizione 13

Diciamo **simmetria centrale** di centro il punto C, la trasformazione geometrica che a ogni punto P associa il punto P', ottenuto in modo che i punti P, P' e C siano allineati e C sia il punto medio del segmento PP'.

Esempio 9

Di seguito proponiamo un esempio di simmetria centrale di un triangolo rispetto ad un punto a esso esterno.



In figura abbiamo tratteggiato i segmenti congiungenti i vertici corrispondenti, notando che essi passano per il centro, che è punto medio dei detti segmenti. Anche nel caso della simmetria centrale non viene conservato l'ordine di lettura.

Anche in questo caso enunciamo senza dimostrazione, che lasciamo per esercizio, i seguenti intuitivi risultati.

Teorema 6

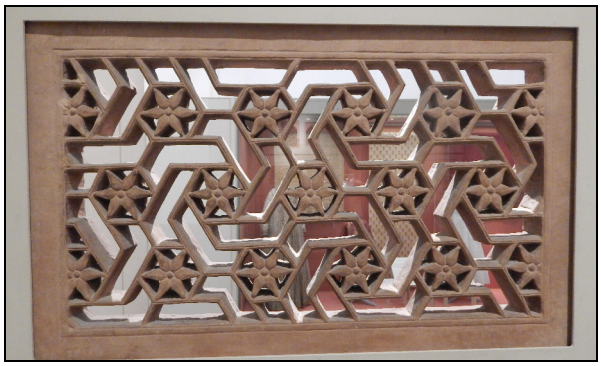
Ogni simmetria centrale è una isometria.

Teorema 7

In una simmetria centrale
- il centro è l'unico punto unito;
- ogni retta passante per il centro è una retta unita;
- non vi sono rette tutte formate da punti uniti.

Concludiamo osservando che in un triangolo equilatero, baricentro, incentro, ortocentro e circocentro coincidono e sono centri di simmetria per il triangolo.

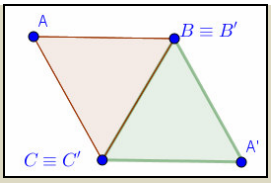
Sin da tempi remoti, soprattutto nelle culture arabe, le simmetrie sono state utilizzate nelle decorazioni di mattonelle, tappeti, vasi ecc. Vediamo un esempio in alcune decorazioni di origine araba, custodite presso il Victoria and Albert Museum di Londra.





Verifiche

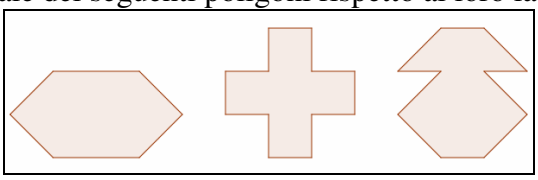
Lavoriamo insieme

In figura 

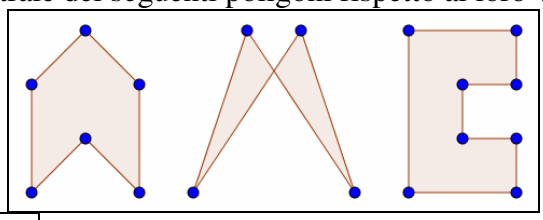
abbiamo effettuato la simmetria di un triangolo equilatero rispetto a uno dei suoi lati. Il quadrilatero $ABA'C$, sembra un parallelogramma ed in effetti lo è, dato che i lati opposti sono ovviamente a due a due isometrici, anzi sono tutti isometrici, pertanto abbiamo a che fare con un rombo.

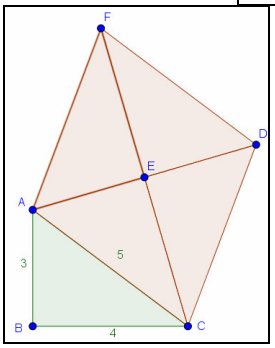
Livello 1

1. Se il triangolo ABC nel box lavoriamo insieme non è equilatero, possiamo dire che si ottiene sempre un parallelogramma? Giustificare la risposta. [No]
2. Con riferimento al quesito precedente, quando si può ottenere un parallelogramma anche se ABC non è equilatero? [Se è isoscele sulla base rispetto cui facciamo la simmetria]
3. Se ABC è rettangolo ed effettuiamo la simmetria rispetto a un cateto cosa otteniamo? [Un triangolo isoscele]
4. Se ABC è rettangolo ed effettuiamo la simmetria rispetto all'ipotenusa, cosa otteniamo? [Un quadrilatero con i lati a due a due isometrici, ma non quelli opposti]
5. Dato un triangolo ABC effettuiamo le simmetrie assiali rispetto ai 3 lati, possiamo dire che in questo modo otteniamo sempre un quadrilatero? Giustificare la risposta.
6. Dato un triangolo equilatero ABC effettuiamo le simmetrie assiali rispetto ai 3 lati, di che tipo è il poligono che ha per vertici i simmetrici dei punti opposti ai lati rispetto cui effettuiamo le simmetrie? Giustificare la risposta. [Triangolo equilatero]
7. Effettuare la simmetria assiale dei seguenti poligoni rispetto ai loro lati.



8. Effettuare la simmetria centrale dei seguenti poligoni rispetto ai loro vertici.



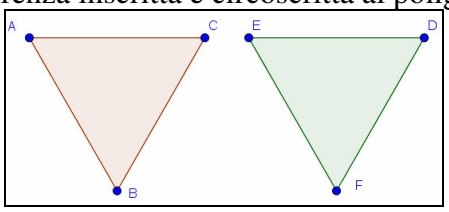
9. In figura 

i triangoli sono ottenuti a partire da ABC con delle simmetrie assiali rispetto ai lati. Quanto misura il perimetro del poligono $ABCDF$? [22]

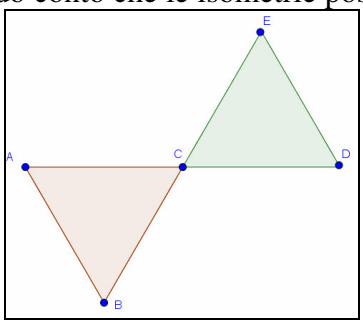
Livello 2

10. Dimostrare il Teorema 3.
11. Dimostrare il Teorema 5.
12. Dimostrare il Teorema 6.
13. Dimostrare il Teorema 7.
14. Il punto d'incontro delle diagonali di un generico parallelogramma è centro di simmetria per il poligono? Giustificare la risposta. [No]

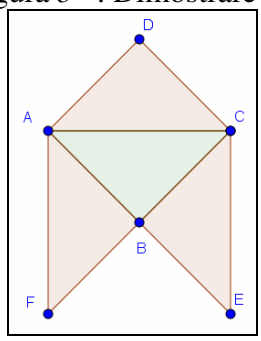
15. Un poligono regolare ha centro di simmetria? Giustificare la risposta.
[Sì, il centro della circonferenza inscritta e circoscritta al poligono]



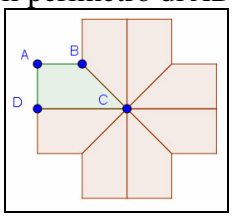
16. L'isometria in figura collega fra loro due triangoli equilateri. Questa isometria può essere sia una traslazione sia una simmetria assiale. In ciascuno dei due casi, individuare le coppie di vertici corrispondenti e le caratteristiche dell'isometria.
17. Come nell'esercizio precedente con questi altri triangoli equilateri, tenendo conto che le isometrie possono essere sia una simmetria assiale, sia una simmetria centrale.



18. Data una figura piana $\mathcal{F}$, le si applichi una simmetria assiale rispetto a un dato asse a per ottenere la figura $\mathcal{F}'$. A $\mathcal{F}'$ si applichi ancora una simmetria assiale rispetto a un asse a' parallelo ad a, ottenendo così la figura $\mathcal{F}''$. Dimostrare che possiamo passare da $\mathcal{F}$ a $\mathcal{F}''$ mediante una traslazione.



19. In figura il triangolo ABC è isoscele sulla base AB, i triangoli ADC, BCE e BFA sono simmetrici di ABC rispetto ai lati che hanno con esso in comune. Se $\overline{BA} = \overline{CB} = a, \overline{AC} = b$, quanto misura il perimetro di $ADCEBF$? [$4a + 2b$]



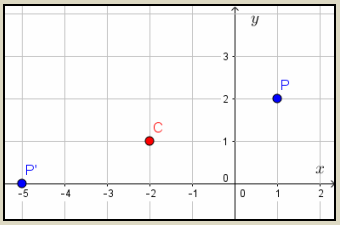
20. In figura il poligono è ottenuto a partire dal trapezio rettangolo $ABCD$, con successive simmetrie assiali, se $\overline{AD} = a, \overline{AB} = b, \overline{BC} = c, \overline{CD} = d$, quanto misura il perimetro del poligono?
[$8 \cdot (a + b)$]

Livello 3

21. Con riferimento al precedente esercizio, comunque sia scelto ABC isoscele otteniamo sempre un poligono $ADCEBF$ il cui perimetro misura quanto trovato? Giustificare la risposta. [No, solo se $b \leq 2a$]
22. In un poligono regolare esistono sempre rette passanti per i suoi vertici che sono assi di simmetria per lo stesso poligono? Giustificare la risposta. [Solo se il poligono ha un numero pari di lati]
23. In un poligono regolare con un numero dispari di lati ci sono assi di simmetria? [Sì, gli assi dei lati]
24. Quanti assi di simmetria ha un esagono regolare? E un ettagono (sette lati)? [6; 7]
25. Quanti assi di simmetria ha un poligono regolare di n lati? Giustificare la risposta. [n]
37. Componiamo la simmetria rispetto a due rette fra loro perpendicolari che tipo di trasformazione isometrica otteniamo? Giustificare la risposta. [Simmetria di centro il punto intersezione]
38. Componiamo la simmetria rispetto a due rette fra loro parallele, che tipo di trasformazione isometrica otteniamo? Giustificare la risposta. [Traslazione]

Lavoriamo insieme

Nel piano cartesiano le leggi della simmetria centrale si ottengono facilmente tenendo conto che, dato il punto $P \equiv (x_P; y_P)$ e il centro $C \equiv (x_C; y_C)$, il corrispondente $P' \equiv (x_{P'}; y_{P'})$ è tale che C è punto medio di PP'. Non è difficile capire che il punto medio è appunto tale da costituire la media aritmetica, pertanto le sue coordinate sono le medie aritmetiche delle coordinate degli estremi. Cioè $C \equiv \left(\frac{x_P + x_{P'}}{2}; \frac{y_P + y_{P'}}{2}\right)$. Quindi avremo che $\begin{cases} x_C = \frac{x_P + x_{P'}}{2} \\ y_C = \frac{y_P + y_{P'}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{P'} = 2x_C - x_P \\ y_{P'} = 2y_C - y_P \end{cases}$, che sono le leggi cercate. In figura mostriamo la validità delle formule trovate.



Abbiamo $P \equiv (1; 2)$, $C \equiv (-2; 1)$, secondo le formule dovrebbe essere $P' \equiv (2 \cdot (-2) - 1; 2 \cdot 1 - 2) \equiv (-5; 0)$, come effettivamente si ha.

Determinare i corrispondenti dei punti seguenti rispetto ai centri indicati

Livello 1

39. $A \equiv (0; 0)$, $C \equiv (2; 1)$; $B \equiv (0; 2)$, $C \equiv (0; 0)$; $D \equiv (1; 2)$, $C \equiv (2; 1)$
$[A' \equiv (4; 2)$; $B' \equiv (0; 2)$; $C' \equiv (3; 0)]$
40. $E \equiv (2; -3)$, $C \equiv (0; -1)$; $F \equiv (0; -1)$, $C \equiv (4; -3)$; $G \equiv (1; 0)$, $C \equiv (0; -1)$
$[E' \equiv (0; 1)$; $F' \equiv (8; -5)$; $G' \equiv (-1; -2)]$
41. $H \equiv (-2; -1)$, $C \equiv (-1; -2)$; $I \equiv (2; -4)$, $C \equiv (5; -6)$; $L \equiv (1; -3)$, $C \equiv (1; 3)$
$[H' \equiv (0; -3)$; $I' \equiv (8; -8)$; $L' \equiv (1; 9)]$

Livello 2

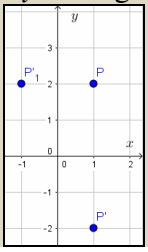
42. $M \equiv (0; 0)$, $C \equiv (a; b)$; $N \equiv (a; -b)$, $C \equiv (0; 0)$; $P \equiv (1; -1)$, $C \equiv (a; a)$;
$[M' \equiv (2a; 2b)$; $N' \equiv (-a ; b)$; $P' \equiv (2a - 1; 2a + 1)]$
43. $Q \equiv (a; b)$, $C \equiv (b; a)$; $R \equiv (a - b; a + b)$, $C \equiv (a + b; a - b)$; $S \equiv (a; a - 1)$, $C \equiv (-b; b - 1)$
$[Q' \equiv (2b - a; 2a - b)$; $R' \equiv (a + 3b; a - 3b)$; $S' \equiv (-a - 2b; 2b - a - 1)]$
44. Determinare le leggi della simmetria rispetto all'origine. $[(x' = -x; y' = -y)]$
45. Per quali valori di a il punto P' dell'esercizio 34 diventa l'origine degli assi? [Impossibile]
46. Per quali valori di a e di b il punto M' dell'esercizio 34 diventa l'origine degli assi? $[a = b = 0]$
47. Per quali valori di a e di b il punto Q' dell'esercizio 35 diventa (1; 1)? $[a = b = 1]$
48. Per quali valori di a e di b il punto N' dell'esercizio 35 diventa (1; 2)? $[a = -1, b = 2]$
49. Per quali valori di a il punto P' dell'esercizio 34 appartiene al II quadrante? $\left[-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}\right]$

Livello 3

50. Usando la geometria analitica provare che la simmetria centrale è una trasformazione involutoria.

Lavoriamo insieme

Nel piano cartesiano le leggi delle simmetrie rispetto agli assi cartesiani sono facili da determinare. Infatti facilmente si comprende che il corrispondente di $P \equiv (x_P; -y_P)$, analogamente il punto $P'' \equiv (-x_P; y_P)$ è il corrispondente di P rispetto alla simmetria di asse y. La figura seguente conferma l'intuizione.



Determinare i corrispondenti dei punti seguenti nelle simmetrie rispetto agli assi coordinati

Livello 1

51. $A \equiv (0; 0)$; $B \equiv (1; 2)$; $C \equiv (-1; 2)$; $D \equiv (3; -2)$
$[A' \equiv A'' \equiv (0; 0)$; $B' \equiv (1; -2)$, $B'' \equiv (-1; 2)$; $C' \equiv (-1; -2)$, $C'' \equiv (1; 2)$; $D' \equiv (3; 2)$, $D'' \equiv (-3; -2)]$

52. $E \equiv (-1; -2)$; $F \equiv (2; -3)$; $G \equiv (-1; 1)$; $H \equiv (0; -2)$
$[E' \equiv (-1; 2)$, $E'' \equiv (1; -2)$; $F' \equiv (2; 3)$, $F'' \equiv (-2; -3)$; $G' \equiv (-1; -1)$, $G'' \equiv (1; 1)$; $H' \equiv (0; 2)$, $H'' \equiv (0; 2)]$

Livello 2

53. $M \equiv (a; b)$; $N \equiv (a; -b)$; $P \equiv (a; a)$
$[M' \equiv (a; -b)$, $M'' \equiv (-a; b)$; $N' \equiv (a ; b)$, $N'' \equiv (-a; -b)$; $P' \equiv (a; -a)$, $P'' \equiv (-a; a)]$

54. $Q \equiv (a - b; a + b)$, $R \equiv (a + b; a - b)$; $S \equiv (a; a - 1)$ $[Q' \equiv (a - b; -a - b)$, $Q'' \equiv (-a + b; a + b)$; $R' \equiv (a + b; -a + b)$, $R'' \equiv (-a - b; a - b)$; $S' \equiv (a; 1 - a)$, $S' \equiv (-a; a - 1)]$

Livello 3

55. Per quali valori di a il punto P' dell'esercizio 45 diventa (2; 3)? [Impossibile]

56. Per quali valori di a e di b il punto M' dell'esercizio 45 diventa (–2; 3)? $[a = -2, b = -3]$

57. Per quali valori di a e di b il punto Q'' dell'esercizio 46 diventa (1; 1)? $[a = 0, b = 1]$

58. Per quali valori di a e di b il punto R'' dell'esercizio 46 diventa (1; 2)? $\left[a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}\right]$

59. Determinare le leggi della simmetria rispetto alla retta parallela all'asse x passante per (0; 2).
$\left[\begin{cases} x' = x \\ y' = 4 - y \end{cases}\right]$

60. Determinare le leggi della simmetria rispetto alla retta parallela all'asse y passante per (3; 0).
$\left[\begin{cases} x' = 6 - x \\ y' = y \end{cases}\right]$

La rotazione

Un altro tipo di movimento rigido è la rotazione, di cui abbiamo già parlato. Essa può farsi in due versi, o come girano le lancette dell'orologio o nel verso contrario. Per convenzione scegliamo come verso di rotazione quello contrario alle lancette dell'orologio, detto anche *antiorario*.

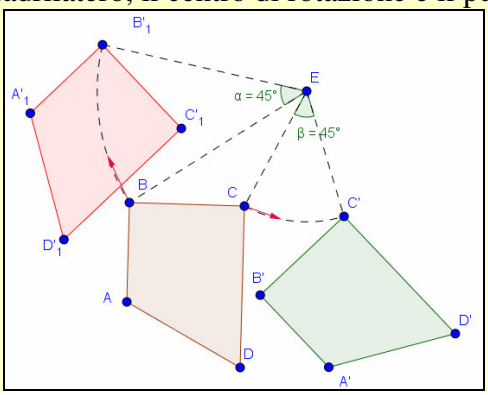
Definizione 14

Diciamo **rotazione** di centro C e angolo α la trasformazione geometrica che a ogni punto P associa il punto P', ottenuto considerando la circonferenza Γ di centro C e raggio CP e l'angolo α di vertice C, un lato del quale è la semiretta CP. Il punto P' è ottenuto dall'intersezione dell'altro lato dell'angolo con Γ.

Da un punto di vista per così dire pratico, la rotazione di un certo punto si effettua puntando il compasso sul centro della rotazione e, con l'apertura che va a toccare il punto, si sposta il compasso di un angolo uguale a quello della rotazione.

Esempio 10

Di seguito abbiamo ruotato il quadrilatero $ABCD$ di 45° prima in senso antiorario, ottenendo $A'B'C'D'$, e poi in senso orario, ottenendo l'altro quadrilatero, il centro di rotazione è il punto E.



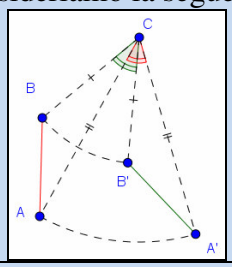
Anche in questo caso enunciamo e dimostriamo un risultato relativo all'isometria della trasformazione.

Teorema 8

Una rotazione è una isometria.

Dimostrazione

Per provare che una trasformazione è una isometria dobbiamo provare che, dato un qualsiasi segmento AB, il suo trasformato $A'B'$ è isometrico ad AB. Consideriamo la seguente figura per il riferimento.

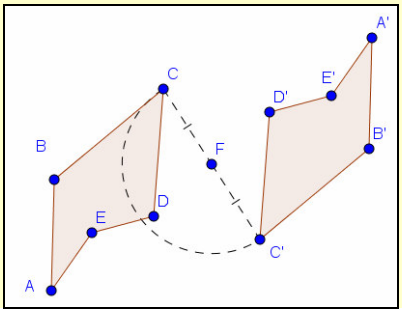


Schema dimostrativo			
Passo	**Azione**	**Conseguenza**	**Giustificazione**
1	Ruotiamo il segmento AB attorno al punto C di un angolo α.	Otteniamo $A'B'$. Si ha $\angle A\hat{C}A' = \angle B\hat{C}B' = \alpha$	Per definizione di rotazione.
2	Congiungiamo gli estremi dei due segmenti con il centro C.	Otteniamo i triangoli ABC e $A'B'C$.	
3	Confrontiamo i triangoli ABC e $A'B'C$.	I triangoli sono isometrici.	Per il criterio LAL. • $\overline{AC} = \overline{A'C}$; $\overline{BC} = \overline{B'C}$ sono raggi di uguali circonferenze;

			• $\angle B\hat{C}A = \angle B'\hat{C}A'$, si ottengono togliendo ad angoli isometrici uno stesso angolo, $A\hat{C}B'$.
4		La rotazione è una isometria.	Per il passo 3 anche AB e $A'B'$ sono isometrici.

Esempio 11

La figura seguente ci fa rendere conto facilmente che una simmetria centrale equivale a una rotazione di un angolo piatto rispetto lo stesso centro di simmetria.



Vale perciò il seguente risultato.

Teorema 9

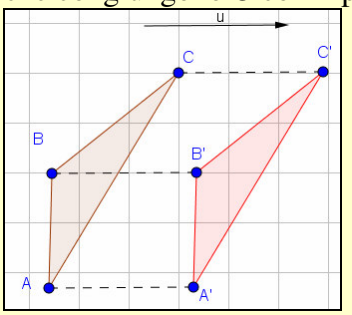
Una simmetria centrale di centro O equivale a una rotazione di un angolo piatto, sempre di centro O.

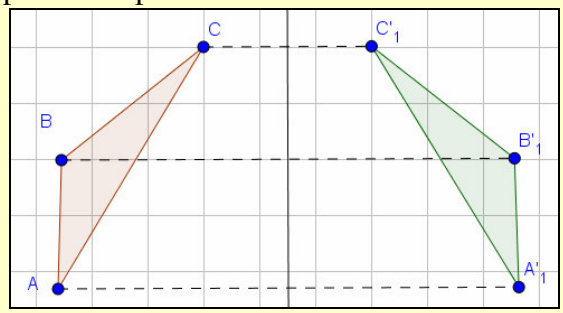
Da quel che abbiamo detto possiamo enunciare delle regole pratiche per stabilire, date due figure, se qualcuna delle trasformazioni isometriche trattate permette di passare da una all'altra.

- Se Congiungendo tra loro i vertici corrispondenti si ottengono segmenti fra loro paralleli, allora la trasformazione è una traslazione o una simmetria assiale. In tal caso la determinazione effettiva si ottiene dal constatare se la trasformazione è diretta o inversa. Infatti la traslazione è una isometria diretta, ossia non cambia l'ordine di lettura dei vertici (considerando a esempio un poligono che, utilizzando il verso antiorario, a partire da A si legge $ABCDEF$, il suo trasformato a partire da A' si legge $A'B'C'D'E'F'$), mentre la simmetria assiale è una isometria inversa perché cambia questo ordine (con riferimento al poligono $ABCDEF$ il trasformato a partire da A' si legge $A'F'E'D'C'B'$).

Esempio 12

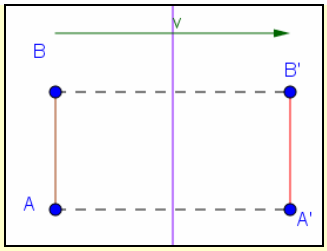
- In figura abbiamo trasformato lo stesso triangolo con una traslazione e una simmetria assiale, in modo che i segmenti che congiungono C con il proprio corrispondente siano in entrambi i casi isometrici.





  Come si nota, in entrambi i casi i segmenti che uniscono vertici corrispondenti sono paralleli fra loro, nel secondo caso però cambia il verso di lettura. Si può anche notare che nel primo caso sono isometrici anche gli altri segmenti che congiungono i vertici corrispondenti, nel secondo caso ciò non accade. Anche quest'ultimo fatto può servire a distinguere una traslazione da una simmetria assiale, ma non sempre.
- Nella seguente figura i segmenti AB e $A'B'$ si corrispondono tanto nella simmetria di asse la retta a, quanto nella traslazione di vettore $\vec{v}$ e non vi è alcun modo di distinguere quale delle due sia quella corretta. In questo caso particolare, le due trasformazioni applicate entrambe allo stesso oggetto

forniscono lo stesso risultato.

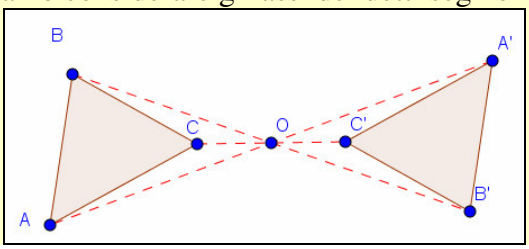


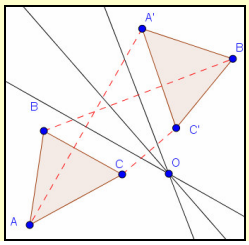
Continuiamo con le nostre regole pratiche.

- Se i segmenti congiungenti punti corrispondenti si incontrano in un punto la trasformazione è una simmetria centrale.
- Se gli assi dei segmenti congiungenti i punti corrispondenti si incontrano in un punto la trasformazione è una rotazione.

Esempio 13

Nella seguente figura, la prima trasformazione è una simmetria centrale, o una rotazione di 180°, la seconda è una rotazione di un angolo diverso da 180° e 360°. Nel primo caso i segmenti che uniscono i vertici corrispondenti si incontrano nel centro di simmetria. Nel secondo ciò non accade, per determinare il centro di rotazione dobbiamo considerare gli assi dei detti segmenti, che effettivamente si incontrano in *O*.





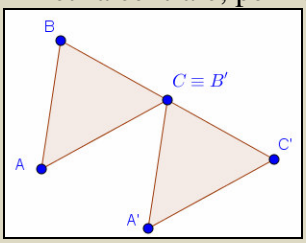
Vediamo un esempio di tavolino (custodito presso il Victoria and Albert Museum di Londra) decorato sfruttando largamente la simmetria centrale e la rotazione. L'origine del tavolino è turca, costruito circa nel 1560.



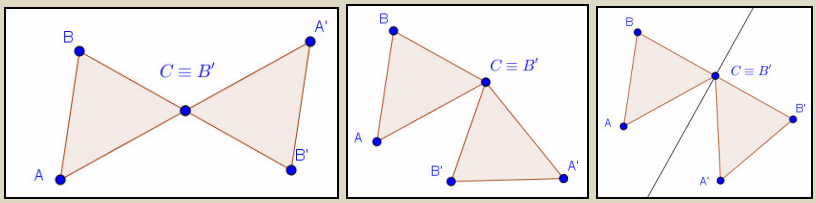
Verifiche

Lavoriamo insieme

Con riferimento alla figura seguente vogliamo stabilire quale delle quattro trasformazioni isometriche, traslazione, rotazione, simmetria assiale, simmetria centrale, permette di passare da ABC ad $A'B'C'$.



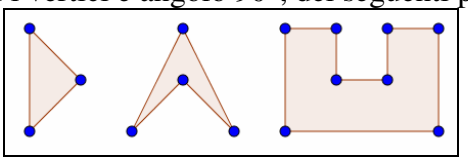
Abbiamo visto diversi metodi per rispondere alla nostra domanda, ciononostante potremmo ingannarci facilmente a causa del fatto che vi sono due punti delle due figure che coincidono. Questo infatti ci potrebbe far pensare che la trasformazione abbia un punto unito, facendoci optare quindi per una simmetria centrale o una rotazione. Ciò non è vero per il fatto che B' coincide con C e non con B, come dovrebbe se fosse unito. Questo ragionamento limita la nostra ricerca alle altre due trasformazioni: simmetria assiale o traslazione. Ma ancora una volta possiamo eliminare facilmente la prima di esse. Infatti, una simmetria è una trasformazione inversa, cioè cambia l'ordine di lettura dei vertici, così se per leggere ABC nella prima figura usiamo il verso orario, nella figura trasformata con una simmetria dovremmo leggere $A'C'B'$, cosa che qui non accade. Di seguito vediamo gli esempi di trasformazione con due vertici che si corrispondono nei diversi casi di simmetria centrale, rotazione di angolo non multiplo di un piatto e simmetria di asse perpendicolare al lato BC.



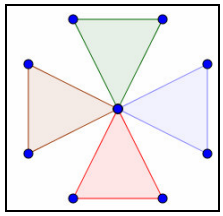
Tornando al nostro problema, possiamo concludere che la trasformazione è una traslazione di vettore $\overrightarrow{BC}$.

Livello 1

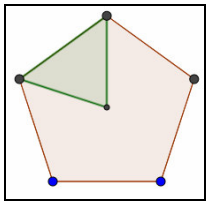
1. Effettuare le rotazioni di centri i vertici e angolo 90°, dei seguenti poligoni.



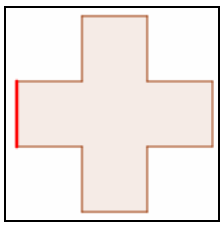
2. Costruire la seguente figura, nota come croce di Malta, mediante rotazione di un triangolo equilatero, scegliendo centro e angoli in modo opportuno.



3. Costruire un poligono regolare di 6, 8 e 10 lati, mediante la rotazione di un segmento attorno a un suo estremo, con angoli che misurano rispettivamente 60°, 45° e 36°.
4. Dopo avere costruito il seguente pentagono regolare, usando la rotazione attorno al centro segnato, effettuare la simmetria assiale rispetto alle rette contenenti i lati.



5. Con opportune rotazioni e a partire dal segmento rosso, costruire il seguente poligono a forma di croce

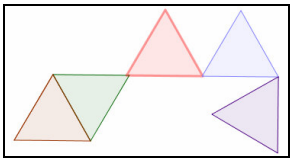


greca.

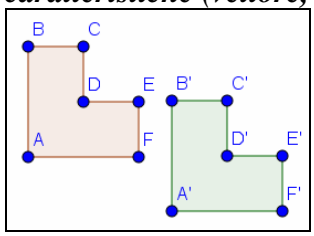
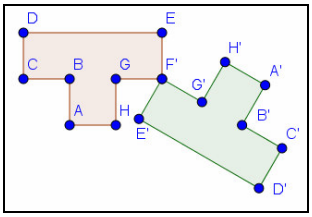
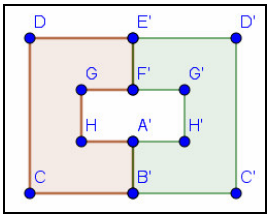
6. Con riferimento al precedente quesito determinare gli assi di simmetria del poligono.

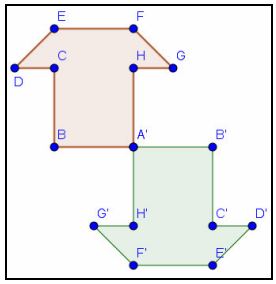
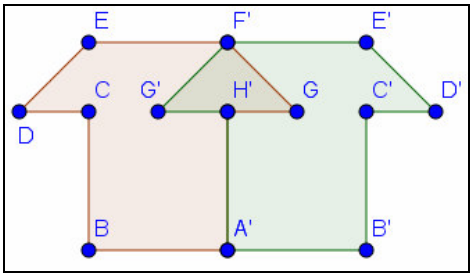
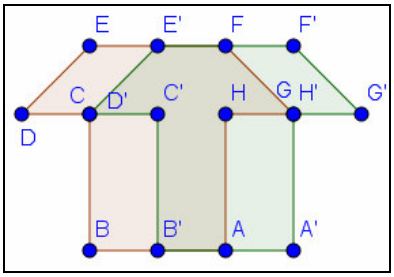
Livello 2

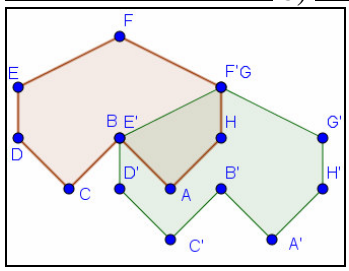
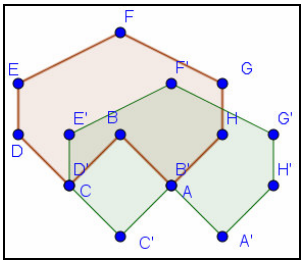
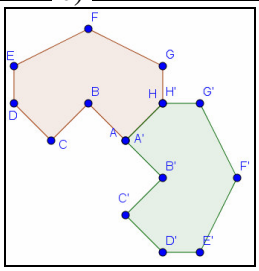
7. Costruire un poligono regolare di 6, 8 e 10 lati, mediante la rotazione di un triangolo attorno a un suo estremo. Scegliere in modo opportuno il triangolo di partenza.
8. Il tachimetro di un'automobile può considerarsi come la rotazione dell'indicatore della velocità rispetto a un suo estremo.  Se il tachimetro ha la forma di una semicirconferenza e misura massimo 240 *Km/h,* quando la macchina passa da 0 a 140 *km/h*, l'indicatore effettua una rotazione di quanti gradi? [105]
9. Il tachimetro in figura  permette la rotazione dell'indicatore, da 0 a 240 *Km/h*, con un angolo di 270°. Quando la macchina passa da 70 a 160 *km/h*, l'indicatore effettua una rotazione di quanti gradi? [101°15′]
10. A partire da un triangolo equilatero possiamo costruire un esagono regolare mediante l'applicazione ripetuta di alcune delle trasformazioni isometriche qui presentate. Determinare tali trasformazioni, che possono essere più di una.
11. La seguente figura è ottenuta a partire dal triangolo posto più a sinistra, applicando in successione le quattro trasformazioni isometriche. Individuarle nel giusto ordine.



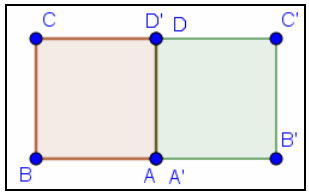
Determinare il tipo di isometria che permette di trasformare una figura nell'altra, determinando, se possibile le caratteristiche (vettore, centro, asse, angolo di rotazione)

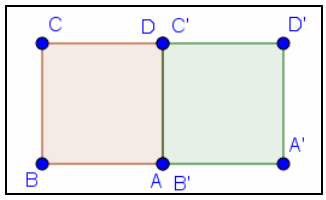
12. a)  b)  c) 

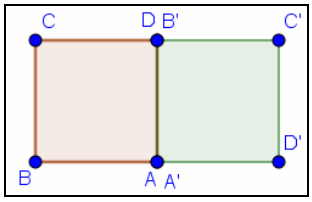
13. a)  b)  c) 

14. a)  b)  c) 

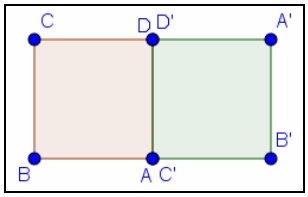
Livello 3

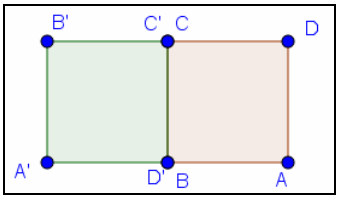
15. a) 

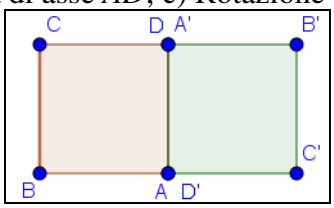
b) 

c) 

[a) Traslazione di vettore *BA*; b) Simmetria di asse *AD*; c) Rotazione di 90° di centro *A*]

16. a) 

b) 

c) 

[a) Rotazione di 270° di centro *D* b) Rotazione di – 90° di centro *C*; c) Simmetria di centro il punto medio di *AD*]

17. Studiare le isometrie che mutano in sé un triangolo equilatero, ossia che associano a un triangolo equilatero sé stesso. Verificare che ve ne sono 6.
18. Ripetere quanto detto nell'esercizio precedente per un quadrato, verificando che stavolta esse sono in numero di 8.

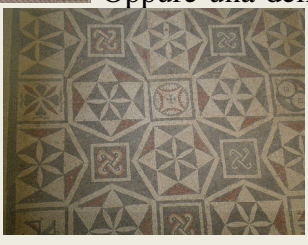
Intervallo matematico

Diverse sono state le civiltà che hanno sfruttato le trasformazioni geometriche, specialmente la simmetria, nelle arti decorative. In particolare lo hanno fatto e continuano a farlo le civiltà cosiddette islamiche, in particolare dell'attuale Iran. Di seguito mostriamo alcuni esempi di manufatti custoditi presso il Victoria and Albert Museum di Londra.



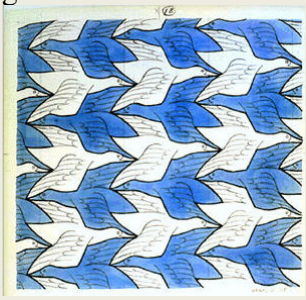


Ma anche nelle civiltà occidentali la ripetizione di decorazioni con traslazioni o rotazioni ha prodotto raffinate decorazioni, come per esempio nella seguente tazza d'oro datata V sec. A.C., ritrovata a Gela e custodita presso il British Museum di Londra. 

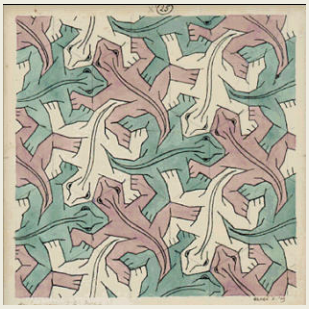
O nei mosaici di epoca romana, come testimoniato dal seguente mosaico di Dioniso, custodito presso il museo romano di Colonia.  Oppure una delle tante pavimentazioni della cosiddetta Villa romana del Casale di Piazza Armerina. 

Anche in tempi a noi più recenti gli artisti si sono interessati a queste procedure, in particolare si ricorda il

grafico olandese Mauritz Cornelis Escher (1898 – 1972), di cui proponiamo l'opera del 1938 *Due uccelli*



in cui i due uccelli sono simmetrici uno dell'altro e le loro riproduzioni sono frutto di traslazioni; in *Lucertole* del 1939,



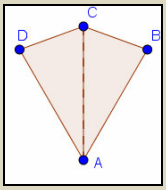
invece prevale la rotazione.
Ricordiamo infine l'artista americano Andy Warhol (1928 – 1987), che ha usato spesso la tecnica della riproducibilità, che matematicamente consiste in una serie di traslazioni in orizzontale e verticale, in cui però ogni oggetto differisce dal precedente per qualche dettaglio. Esempi sono le famose *Lattine della zuppa Campbell* o l'opera Marylin, custodita presso la Tate Modern di Londra, che di seguito proponiamo.



Per la prova Invalsi

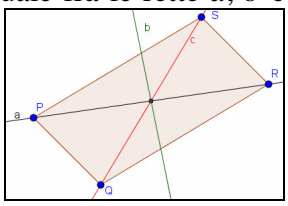
Lavoriamo insieme

Il seguente quesito è stato assegnato alle prove Invalsi del 2003. *Il quadrilatero seguente è simmetrico rispetto alla retta AC. Sapendo che* $B\hat{A}C = 30°, C\hat{D}A = 70°$, *quanto vale* $B\hat{C}D$?

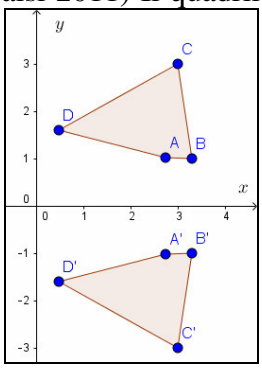


A) 140° B) 150° C) 160° D) 165° E) Le informazioni sono insufficienti.
Dato che la simmetria è una trasformazione isometrica i triangoli *ADC* e *CBA* sono fra loro isometrici, quindi l'angolo $B\hat{C}D$ è doppio di $D\hat{C}A$, il quale è supplementare rispetto alla somma dei due angoli dati, pertanto misura 180° – (30° + 70°) = 180° – 100° = 80°. Infine l'angolo cercato misura 2 · 80° = 160°. Pertanto la risposta corretta è la C).

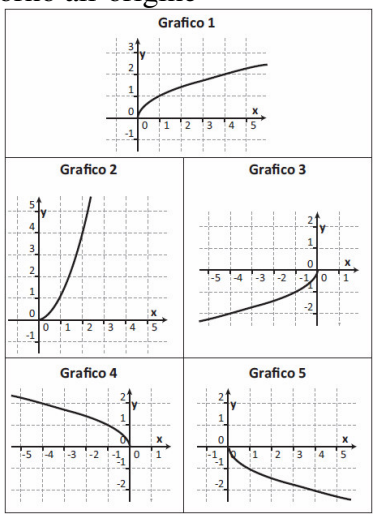
1. (Invalsi 2004) Un triangolo isoscele ha ciascuno dei due lati uguali lungo 6 *cm* e la base di lunghezza *x* (espressa in *cm*). Quale delle seguenti espressioni rappresenta il perimetro *p* del triangolo?
   A) $x = 12 + p$ B) $p = 6 + x$ C) $p = 12 + x$ D) $p = 6 \cdot x$ [C]
2. (Invalsi 2005) Quale tra le seguenti affermazioni è FALSA? A) Un rettangolo ha due assi di simmetria B) Un rombo ha un solo asse di simmetria C) Un quadrato ha quattro assi di simmetria D) Un parallelogramma generico non ha assi di simmetria [B]

3. (Invalsi 2011) Quale fra le rette *a*, *b* e *c*, nel piano della figura, è un asse di simmetria del parallelogramma *PQRS*? 

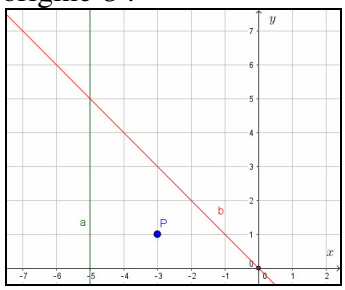
A) *a* B) *b* C) *c* D) Nessuna delle tre [B]

4. (Invalsi 2011) Il quadrilatero *A′B′C′D′* è ottenuto applicando al quadrilatero *ABCD* una trasformazione. 

Di quale trasformazione si tratta? A) Traslazione B) Simmetria rispetto all'asse *y* C) Simmetria rispetto all'asse *x* D) Rotazione attorno all'origine [C]



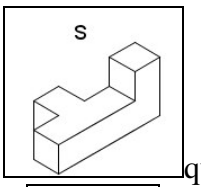
5. (Invalsi 2012) Di seguito sono rappresentati cinque grafici.
A) Quale grafico è il simmetrico del grafico 1 rispetto all'asse delle *x*? [5]
B) Quale grafico è il simmetrico del grafico 1 rispetto all'asse delle *y*? [4]
C) Quale grafico è il simmetrico del grafico 1 rispetto all'origine *O*? [3]

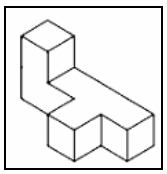
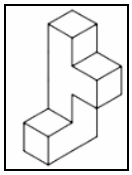
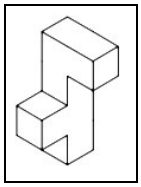
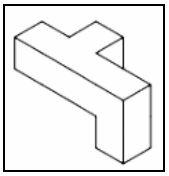


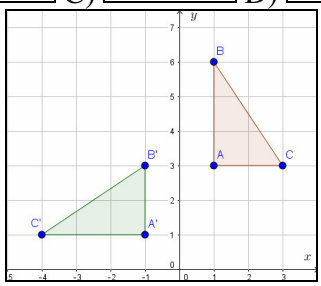
6. (Invalsi 2013) Il punto *P* in figura ha coordinate (– 3; 1).
A) Segna sulla figura il punto *Q*, simmetrico di *P* rispetto alla retta a.
B) Poi segna il punto *R*, simmetrico di *Q* rispetto alla retta b.
C) Quali sono le coordinate del punto *R*? A) (–7; 1) B) (1; 7) C) (7; 1) D) (–1;7) [D]



7. (Invalsi 2013) Osserva la seguente fotografia: Gli automobilisti che precedono l'autoambulanza vedono riflessa nello specchietto retrovisore la scritta: AMBULANZA Se la parola "AMBULANZA" fosse scritta normalmente sulle autoambulanze, in quale dei seguenti modi gli automobilisti la vedrebbero riflessa nello specchietto retrovisore? [A]
A) AMBULANZA B) AMBULANZA C) AMBULANZA D) AMBULANZA

8. (Invalsi 2013) Se il solido S viene fatto ruotare, 

quale tra le seguenti configurazioni non può assumere? A)  B)  C)  D)  [D]

9. (Invalsi 2014) Osserva la seguente figura. 

Il triangolo $A'B'C'$ è stato ottenuto dal triangolo ABC attraverso A) una simmetria di centro (0; 3) B) una rotazione antioraria di centro (0;0) e ampiezza 90° C) una simmetria assiale rispetto all'asse y D) una rotazione antioraria di centro (1; 1) e ampiezza 90° [D]
10. (Invalsi 2015) Ruotando di un giro completo un trapezio rettangolo attorno al lato perpendicolare alle basi si ottiene: A) un cono B) un cilindro con una cavità conica C) un cilindro con un cono sovrapposto D) un tronco di cono [D]
11. (Invalsi 2015) Solo una delle seguenti affermazioni è vera. Quale? A) Ogni triangolo ha un centro di simmetria B) Tutti i triangoli equilateri hanno un centro di simmetria C) Ogni triangolo ha almeno un asse di simmetria D) Alcuni triangoli hanno un asse di simmetria [D]

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi

1. Dato un poligono regolare di N lati, dimostrare che esistono esattamente $2N$ isometrie che lo mutano in sé. Distinguere il caso N pari da N dispari.
2. Determinare le leggi della simmetria rispetto alla retta parallela all'asse x passante per $(a; b)$.
$$\left[\begin{cases} x' = x \\ y' = 2b - y \end{cases}\right]$$
3. Determinare le leggi della simmetria rispetto alla retta parallela all'asse y passante per $(a; b)$.
$$\left[\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases}\right]$$
4. Componendo due simmetrie di assi fra loro paralleli si ottiene una traslazione, determinare, modulo, e direzione del vettore. [Il doppio della distanza fra le rette; perpendicolare agli assi]

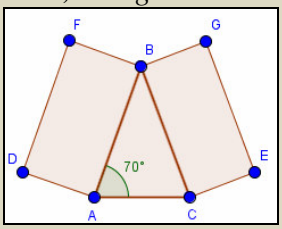
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
AHSME = Annual High School Mathematics Examination HSMC = High School Mathematcs Contest
K = Kangourou della Matematica MT = Mathematics Teacher, rivista della NCTM OMI = Olimpiadi della Matematica italiane

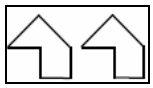
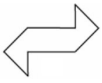
Lavoriamo insieme

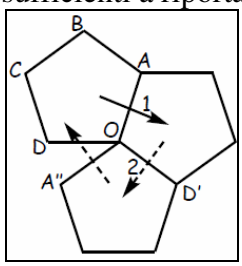
Questo quesito è stato pubblicato nel numero di Maggio 1991 della rivista Mathematics Teacher pubblicata dalla NCTM.

In figura, AB e BC sono isometrici, l'angolo in A è di 70°, *I due quadrilateri sono entrambi rettangoli, quanto misura l'angolo* $F\hat{B}G$?

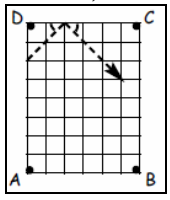


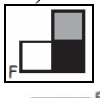
Essendo *ABC* isoscele di base *AC*, anche l'angolo in *C* è di 70°, quindi l'angolo in *B* è di 180° – 140° = 40°.
Dato che gli altri due angoli che servono a formare l'angolo $F\hat{B}G$.

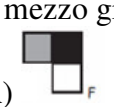
1. (OMI2003) Giovanni ha bevuto troppo e comincia a camminare in modo strano: fa 1 passo in avanti; poi si volta di 90° verso destra e fa 2 passi in avanti; poi si volta di 90° verso destra e fa 1 passo in avanti; poi si volta di 90° verso sinistra e fa 1 passo all'indietro; dopo di che ricomincia da capo. Ogni passo è di 1 metro. Dopo 186 passi cade a terra svenuto. A quanti metri da dove era partito finisce la passeggiata di Giovanni? A) 0 B) 1 C) 2 D) $\sqrt{5}$ E) 4 [C]
2. (K2004) Hai a disposizione due pezzi di cartone uguali fra loro come quelli in figura,  che puoi accostare, spostandoli nel piano a tuo piacimento ma non ribaltandoli. Quale delle seguenti figure non puoi ottenere? A)  B)  C)  D)  E)  [D]
3. (K2006) In figura è rappresentato un pentagono regolare *OABCD* ed i pentagoni che da esso si ottengono facendo prima una rotazione di centro *O* che porti il lato *OD* a sovrapporsi al lato *OA* (e *OA* a *OD*'), poi una rotazione di centro *O* che porti il lato *OA* a sovrapporsi al lato *OD*' (e *OD*' a *OA*"). Continuando in questo modo, qual è il minimo numero di rotazioni sufficienti a riportare il pentagono nella posizione iniziale? A) 6 B) 10 C) 12 D) 15 E) 20 [B]

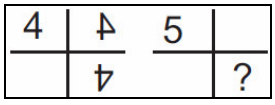


4. (K2007) Una palla di biliardo colpisce il bordo del tavolo con un angolo di 45°, come mostrato in figura. In quale delle buche cadrà? A) A B) B C) C D) D E) in nessuna [C]

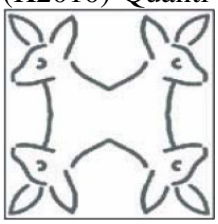


5. (K2010) Facendo fare mezzo giro alla figura  attorno al vertice F, si ottiene? [C]

A)  B)  C)  D)  E) 

6. (K2010) La cifra 4 si trova accanto a due specchi: la prima figura ti mostra l'effetto delle due riflessioni che ha subito. Quale è l'effetto finale delle riflessioni sulla cifra 5, cioè che cosa deve apparire al posto del punto di domanda? 

A)  B)  C)  D)  E)  [A]

7. (K2010) Quanti assi di simmetria si possono individuare nella figura contenuta nel quadrato a lato? 
A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) Infiniti [C]

8. (K2012) Un triangolo equilatero ruota, sempre nello stesso verso, intorno al suo centro prima di 3°, poi di 9°, poi di 27° e così via (cioè alla n esima rotazione ruota di $3n°$). Quante posizioni differenti (inclusa la prima) occuperà il triangolo nel corso di queste rotazioni? A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 360 [B]

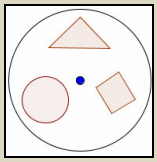
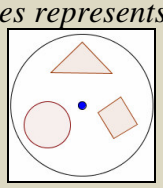
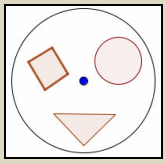
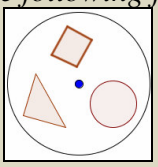
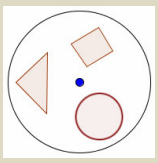
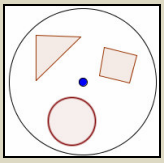
9. (K2016) Quale tra i seguenti segnali stradali ha il maggior numero di assi di simmetria? [A]

A)  B)  C)  D)  E) 

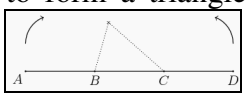
Questions in English

Working together

This is a question was published in the issue of September 1996 of Mathematics Teacher.

Which of the following figures represents the result when the following figure  *is rotated* 120 *degrees about its center*? A)  B)  C)  D)  E) 

Obviously A is the identity; B is a central symmetry around the center of the big circumference; C is the correct answer, while D and E are rotations but 90° and 45°.

10. (AHSME1979) Points A, B, C, and D are distinct and lie, in the given order, on a straight line. Line segments AB, AC and AD have lengths x, y, and z, respectively. If line segments AB and CD may be rotated about points B and C, respectively, so that points A and D coincide, to form a triangle with positive area, then which of the following three inequalities must be satisfied? 

[C]
I. $x < z/2$ II. $y < x + z/2$ III. $y < z/2$ A) only I B) only II C) only I and II D) only II and III E) I, II and III

11. (HSMC2006)The point $A \equiv (-3; 2)$ is rotated 90° counter clockwise around the origin to point B. Point B is then reflected about the bisector of the coordinate axes, to point C. What are the coordinates of C? [(−3; −2)]

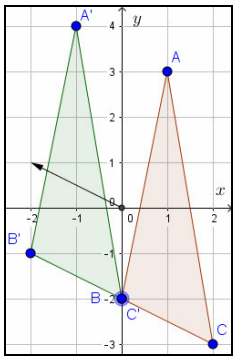
12. (K2007) CDE is the rotation of the triangle ABC on C of 80°, what is the measure of angle $A\hat{B}D$? [D]
A) 25° B) 30° C) 35° D) 40° E) 45°

13. (HSMC2008) Rectangle $PQRS$ lies in a plane with $PQ = RS = 2$ and $QR = SP = 6$. The rectangle is rotated 90° clockwise about R, then rotated 90° clockwise about the point to which S moved after the first rotation. What is the length of the path travelled by point P? $\left[\sqrt{80}+\sqrt{72}\right]$

Attività di recupero

Concetto di trasformazione geometrica. Le traslazioni.

Fase 1: Osserva

- Data la trasformazione $\tau(x; y) = (x + y\ ;\ 2x - y + 1)$ vogliamo trovare il corrispondente della coppia (1; 2), si ha: $\tau(1; 2) = (1 + 2\ ;\ 2 - 2 + 1) = (3; 1)$. Verifichiamo che la trasformazione non è commutativa. Infatti si ha $\tau(2; 1) = (2 + 1\ ;\ 4 - 1 + 1) = (3; 4)$.
- Vogliamo vedere se la precedente trasformazione ha punti uniti, cioè se esiste una coppia $(x; y)$ per cui si abbia $\tau(x; y) = (x; y)$, cioè $(x + y\ ;\ 2x - y + 1) = (x; y)$. Deve essere perciò $\begin{cases} x + y = x \\ 2x - y + 1 = y \end{cases}$, la prima scritta equivale ovviamente a $y = 0$, quindi sostituendo tale valore nella seconda si ha: $2x + 1 = 0$, cioè $x = -1/2$. Quindi l'unico punto unito è $(-1/2; 0)$.
- Dato il triangolo di vertici $A \equiv (1; 3)$, $B \equiv (0\ ;\ -2)$, $C \equiv (2; -3)$, vogliamo determinare il suo corrispondente rispetto alla traslazione di vettore $\vec{v} \equiv (-2, 1)$. Rappresentiamo in figura ABC e costruiamo graficamente il suo trasformato. 

In pratica, per ottenere le coordinate dei punti trasformati in modo analitico basta aggiungere a ciascuna coordinata la coordinata omonima del vettore. Così avremo:
$A' \equiv (1 - 2; 3 + 1) \equiv (-1; 4)$, $B' \equiv (0 - 2; -2 + 1) \equiv (-2; -1)$, $C' \equiv (2 - 2; -3 + 1) \equiv (0; -2)$.
Tali valori coincidono con quelli determinati usando solo il disegno.

Fase 2: Completa …

- Data la trasformazione $\tau(x; y) = (2x + 3y\ ;\ x - y)$ vogliamo trovare il corrispondente della coppia $(3; -2)$, si ha: $\tau(3; -2) = (2 \cdot 3$ ..... ; .....) = (....; ....). Verifichiamo che la trasformazione non è commutativa. Infatti si ha $\tau(-2; 3) =$ (..... ; .....) = (....; ....).
- Vogliamo vedere se la precedente trasformazione ha punti uniti, cioè se esiste una coppia $(x; y)$ per cui si abbia $\tau(x; y) =$ (....; ....), cioè $(2x + 3y\ ;$ .....) = (.....; .....). Deve essere perciò $\begin{cases} 2x + 3y = x \\ \text{.....} = \text{.....} \end{cases}$, la prima scritta equivale ovviamente a $y =$ ....., quindi sostituendo tale valore nella seconda si ha: ....., cioè $x =$ ..... Quindi l'unico punto unito è (....; ....).
- Una traslazione muta il punto $P \equiv (4; 3)$ nel punto $P' \equiv (-5; 4)$; possiamo determinare le coordinate del vettore? In generale il punto $P \equiv (x, y)$ in una traslazione di vettore $\vec{v} \equiv (v_x, v_y)$ viene trasformato in $P' \equiv$ ……. Nel nostro caso abbiamo: $x =$ …., $y =$ …., $x' =$ …., $y' =$ ….., i termini incogniti sono …… Scriviamo le seguenti uguaglianze: $P' \equiv (-5, 4) \equiv$ ……... Considerando le uguaglianze fra le coordinate omonime, otteniamo: …… Il vettore cercato ha perciò coordinate: …….

Fase 3: Prova!

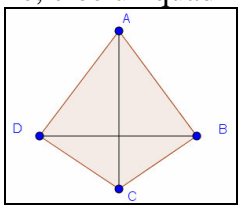
1. Determinare il trasformato del quadrato di vertici $A \equiv (1; 1)$, $B \equiv (1; 3)$, $C \equiv (3; 1)$, $D \equiv (3; 3)$, rispetto alla trasformazione $\tau(x; y) = (-2x + y; 2x - y)$ $[A' \equiv (-1; 1), B' \equiv (1; -1), C' \equiv (-5; 5), D' \equiv (-3; 3)]$
2. Determinare il trasformato del quadrilatero di vertici $A \equiv (3; 1)$, $B \equiv (2; -1)$, $C \equiv (-1; 5)$, $D \equiv (5; 0)$, rispetto alla trasformazione $\tau(x; y) = (y; x)$. $[A' \equiv (1; 3), B' \equiv (-1; 2), C' \equiv (5; -1), D' \equiv (0; 5)]$
3. Ci sono punti uniti nella trasformazione precedente? [Quelli che hanno ascissa e ordinata uguali]

4. Determinare il trasformato del quadrilatero di vertici $A \equiv (-2; -2)$, $B \equiv (-3; 1)$, $C \equiv (1; 0)$, $D \equiv (-4; 2)$, rispetto alla trasformazione $\tau(x; y) = (-y; -x)$. $[A' \equiv (2; 2), B' \equiv (-1; 3), C' \equiv (0; -1), D' \equiv (-2; 4)]$
5. Ci sono punti uniti nella trasformazione precedente? [Quelli che hanno ascissa e ordinata opposte]
6. Determinare il trasformato del quadrato di vertici $A \equiv (0; 0)$, $B \equiv (2; 0)$, $C \equiv (2; 2)$, $D \equiv (0; 2)$, rispetto alla trasformazione $\tau(x + y - 1; x + 2y)$. $[A' \equiv (-1; 0), B' \equiv (1; 2), C' \equiv (3; 6), D' \equiv (1; 4)]$
7. Ci sono punti uniti nella trasformazione precedente? $[(-1; 1)]$
8. Determinare il trasformato del quadrato di vertici $A \equiv (0; 0)$, $B \equiv (1; 0)$, $C \equiv (1; 1)$, $D \equiv (0; 1)$, rispetto alla trasformazione $\tau(3x - y - 1; -3x + y + 2)$. $[A' \equiv (-1; 2), B' \equiv (2; -1), C' \equiv (1; 0), D' \equiv (0; 3)]$
9. Ci sono punti uniti nella trasformazione precedente? $\left[\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)\right]$
10. Determinare il trasformato del quadrilatero di vertici $A \equiv (0; 3)$, $B \equiv (-1; 1)$, $C \equiv (-2; 2)$, $D \equiv (0; 1)$, rispetto alla traslazione di vettore $\vec{v} \equiv (-2; 3)$. $[A' \equiv (-2; 6), B' \equiv (-3; 4), C' \equiv (-4; 5), D' \equiv (-2; 4)]$
11. I punti $P \equiv (-2; 1)$ e $P' \equiv (4; 1)$ si corrispondono in una traslazione; determinare le componenti del vettore di traslazione. $[(6; 0)]$
12. Nell'esercizio precedente, quale sarebbe il vettore se scambiassimo i punti? $[(-6; 0)]$

Le simmetrie

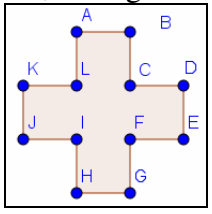
Fase 1: Osserva

- Una simmetria centrale muta il punto $P \equiv (2; -1)$ nel punto $P' \equiv (-1; 0)$; possiamo determinare le coordinate del centro? Sappiamo che, in generale, il punto $P \equiv (x, y)$ in una simmetria di centro il punto $C \equiv (a; b)$ viene trasformato nel punto $P' \equiv (2a - x; 2b - y)$. Quindi nel nostro caso avremo: $P' \equiv (-1; 0) \equiv (2a - 2; 2b - (-1)) \equiv (2a - 2; 2b + 1)$. Dato che due punti nel piano cartesiano sono coincidenti quando hanno nell'ordine le stesse coordinate deve aversi: $\begin{cases} 2a - 2 = -1 \\ 2b + 1 = 0 \end{cases}$; dalla seconda si ottiene subito $b = -1/2$, che sostituito nella prima fornisce $2a = 2 - 1$, cioè $a = 1/2$, che sono le coordinate del centro.
- Dato che la simmetria centrale è una trasformazione *involutoria*, avremo che nella trasformazione di centro $(-1/2; 1/2)$, il corrispondente di $P' \equiv (-1; 0)$ sarebbe $P \equiv (2; -1)$.
- Un rombo ha le diagonali che sono assi di simmetria, così come un generico aquilone, cioè un quadrilatero che ha due coppie di lati consecutivi fra loro isometrici. Lo mostriamo in figura.



Fase 2: Completa …

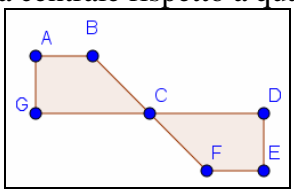
- Dato il punto $A \equiv (-2; 1)$, vogliamo determinare il suo corrispondente rispetto alla simmetria di centro il punto $C \equiv (1; 3)$. Le leggi della simmetria sono: $\tau(x; y) = (2 \cdot 1 - x; .....)$, quindi nel nostro caso avremo: $\tau(-2; 1) = (..... ; .....)$.
- Con riferimento alla simmetria precedente avremo: $\tau(1; 3) = (..... ; .....)$, questo vuol dire che la simmetria è una trasformazione .....
- Il seguente poligono concavo possiamo dire che ha un centro di simmetria, che è l'intersezione dei segmenti ..... e ..... Possiamo dire che ha ben 8 assi di simmetria, essi sono, il segmento AG, e i segmenti



....., ..., LF, ..., ... Nonché gli assi dei segmenti AB e .....

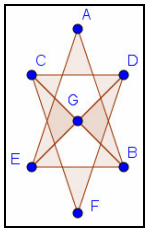
Fase 3: Prova!

1. Determinare il trasformato del quadrilatero di vertici $A \equiv (1; -2)$, $B \equiv (-2; 2)$, $C \equiv (-3; 1)$, $D \equiv (1; 3)$, rispetto alla simmetria di centro $C \equiv (2; -1)$. [$A' \equiv (3; 0)$, $B' \equiv (6; 0)$, $C' \equiv (7; -3)$, $D' \equiv (3; -5)$]
2. Determinare il trasformato del quadrilatero di vertici $A \equiv (1; 4)$, $B \equiv (-2; 3)$, $C \equiv (0; 2)$, $D \equiv (1; 0)$, rispetto alla simmetria di centro $C \equiv (0; 1)$. [$A' \equiv (1; -4)$, $B' \equiv (4; -3)$, $C' \equiv (2; -2)$, $D' \equiv (1; 0)$]
3. Determinare il trasformato del quadrilatero di vertici $A \equiv (2; 1)$, $B \equiv (-2; 1)$, $C \equiv (3; 4)$, $D \equiv (2; -1)$, rispetto alla simmetria di centro $C \equiv (2; 0)$. [$A' \equiv (2; -1)$, $B' \equiv (6; -1)$, $C' \equiv (1; -4)$, $D' \equiv (2; 1)$]
4. I punti $P \equiv (0; 1)$ e $P' \equiv (-6; -1)$ si corrispondono in una simmetria centrale rispetto a quale centro? [$(-3; 0)$]
5. I punti $P \equiv (2; -1)$ e $P' \equiv (-8; 7)$ si corrispondono in una simmetria centrale rispetto a quale centro? [$(-3; 3)$]
6. I punti $P \equiv (4; 0)$ e $P' \equiv (4; -2)$ si corrispondono in una simmetria centrale rispetto a quale centro?
7. Determinare il centro di simmetria della figura seguente.



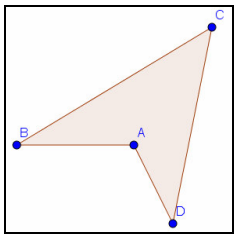
[C]

8. Determinare il centro di simmetria della figura seguente.



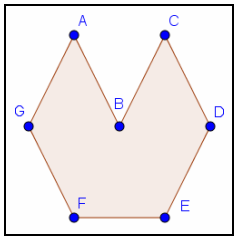
[G]

9. Determinare gli assi di simmetria della figura seguente.



[AC]

10. Determinare gli assi di simmetria della figura seguente.



[AB e BC]

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito

http://mathinterattiva.altervista.org/volume_1_3.htm

4. Problemi lineari

4.1 Equazioni di I grado in una incognita

Prerequisiti
- Conoscenze di algebra elementare
- Concetto di uguaglianza
- Concetto di relazione di equivalenza
- Concetto di implicazione e coimplicazione
- Calcolo polinomiale e fattorizzazione di polinomi

Obiettivi
- Distinguere se un'uguaglianza è una identità, una contraddizione o un'equazione
- Determinare il dominio di una identità
- Risolvere un'equazione di primo grado in un dato insieme
- Determinare le soluzioni ammissibili in una equazione fratta
- Riconoscere equazioni equivalenti
- Risolvere equazioni di grado superiore al primo riconducibili al prodotto di fattori di primo grado
- Discutere un'equazione parametrica

Contenuti
- Il concetto di uguaglianza in matematica
- Proprietà delle uguaglianze
- Classificazione delle equazioni e risoluzione delle equazioni di primo grado in una incognita
- Equazioni fratte
- Equazioni parametriche

Parole Chiave
Contraddizione – Equazione – Equazione fratta – Equazione letterale o parametrica – Equazione ridotta in forma semplificata – Identità – Incognita – Primo membro – Secondo membro – Soluzione – Termine noto

Concetto di uguaglianza

Il problema

Un falegname deve costruire un tassello di legno da incastrare in un piede di un tavolino. Come deve comportarsi? È evidente che la costruzione non deve essere approssimativa, una differenza anche solo di un centimetro in eccesso o in difetto provocherebbe dei guai. Un tassello troppo grande risulterebbe inutilizzabile perché non si incastrerebbe, uno troppo piccolo non servirebbe allo scopo poiché il tavolino non risulterebbe stabile. Il falegname deve quindi risolvere un problema di uguaglianza, deve determinare con la massima precisione consentitagli dagli strumenti di misura a sua disposizione, uno o più numeri che costituiscono le dimensioni del tassello.

Il problema di determinare uno o più valori che verificano un'uguaglianza è uno dei più importanti di tutta la matematica. È quindi bene definirlo con il massimo rigore.
Abbiamo già parlato di uguaglianze nei seguenti casi: proprietà caratteristica di un insieme, relazioni binarie, funzioni, enunciati logici, geometria. Il concetto quindi non è nuovo. In particolare abbiamo visto che, se ci riferiamo all'uguaglianza come a una scritta formale, cioè a una espressione simbolica del tipo $f = g$ con f e g simboli che rappresentano espressioni di tipo matematico (numeri, espressioni con numeri e variabili, enunciati logici, enti geometrici, ...), per tale scrittura può accadere che

1. sia sempre vera (per esempio 1 = 1);
2. sia sempre falsa (per esempio 7 = 2);
3. la verità o falsità dipendano dal "significato" o "valore" dei simboli (per esempio 2 + 3 = 5 è vera se consideriamo i simboli 2 e 3 come numeri espressi in base dieci, ma è falsa se li consideriamo come numeri in base 4, in questo caso infatti $[2]_4 + [3]_4 = [11]_4$).

Abbiamo fornito degli esempi di espressioni in cui i simboli che apparivano avevano un significato pressoché "assoluto", i numeri infatti, a parte il loro diverso valore a seconda della base di numerazione prescelta, rappresentano in tutti i casi delle quantità ben definite. È invece ovvio che sono molto più importanti scritte simboliche più generali, nelle quali anche i simboli usati hanno dei significati "variabili", ossia scritte del tipo seguente: $x = x$, $x = x + 1$, $x = y$. Comunque, anche utilizzando scritte di questo tipo possiamo trovarci di fronte ai tre casi visti prima.

- La scritta $x = x$ è nient'altro che l'enunciato della proprietà riflessiva ed è perciò una scritta vera indipendentemente dal fatto che x rappresenti il numero 2 o 13567 o un essere umano o una scarpa e così via.
- La scritta $x = x + 1$ rappresenta un'uguaglianza impossibile nell'insieme dei numeri reali, dato che, quale che sia il numero associato al simbolo x, non può mai accadere che tale numero coincida con lo stesso numero aumentato di 1.
- La scritta $x = y$ rappresenta ciò che in logica abbiamo chiamato enunciato aperto, il cui valore di verità non è definito una volta per tutte ma dipende dal significato o dal valore che associamo al simbolo; in particolare risulta una scritta vera se sostituiamo a x e a y lo stesso valore numerico, risulta falso se invece sostituiamo valori diversi alle diverse lettere.

Per il seguito considereremo solo uguaglianze fra numeri reali e per comodità di linguaggio stabiliamo alcune terminologie.

Definizione 1

Diremo **uguaglianza numerica** un'uguaglianza contenente solo dei numeri.

Definizione 2

Diremo **uguaglianza simbolica** un'uguaglianza contenente dei simboli.

Definizione 3

In una uguaglianza i termini che stanno da parti opposte rispetto al segno di uguale si chiamano **membri**. Il membro a sinistra del segno di uguale si dirà **primo membro**, l'altro **secondo membro**.

Definizione 4

Un'uguaglianza numerica o simbolica si dirà **identità** in un insieme numerico A, se

- è un'uguaglianza numerica che può scriversi in modo che in entrambi i membri vi sia lo stesso numero;
- è un'uguaglianza simbolica per la quale risultano vere tutte le uguaglianze numeriche che si ottengono da essa sostituendo ai simboli gli elementi di A.

Precisiamo che sostituire un numero a un simbolo significa sostituire lo stesso numero a tutti i simboli uguali.

Esempio 1

Sono identità le seguenti:

- $14 + 1 = 17 – 2$. Poiché eseguendo i calcoli diviene $15 = 15$.
- $\sqrt{3+1} = 7-5$. Poiché eseguendo i calcoli diviene $2 = 2$.
- $(2a + 3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$ in $\mathbb{R}$. Infatti al primo membro vi è un quadrato di binomio e al secondo membro il rispettivo polinomio sviluppo.
- $(3x – 4z) \cdot (3x + 4z) = 9x^2 – 16z^2$ in $\mathbb{R}$. Al primo membro c'è il prodotto notevole noto come somma per la differenza delle basi, al secondo membro il relativo polinomio sviluppo, noto come differenza di quadrati.
- $\frac{x^2+3x}{2x} = \frac{x+3}{2}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Infatti il primo membro può scriversi $\frac{x^2+3x}{2x} = \frac{x\cdot(x+3)}{2x}$. Se x è diverso da zero le due frazioni corrispondono a uno stesso numero. Se invece $x = 0$, il primo membro non ha alcun significato, dato che diviene: $\frac{0^2+3\cdot 0}{2\cdot 0} = \frac{0}{0}$, mentre il secondo membro vale $\frac{3}{2}$.
- $\sqrt{a+1} = \frac{2\sqrt{a+1}}{2}$, in $A = \{a \in \mathbb{R} : a \geq -1\}$. Infatti per valori inferiori a –1 l'espressione sotto la radice quadrata diventa negativa, quindi non rappresenta un numero reale.
- $(m – 1) \cdot (m – 2) \cdot (m – 3) \cdot (m – 4) \cdot (m – 5) = 0$, nell'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Se sostituiamo alla variabile m uno qualsiasi degli elementi di A, uno almeno dei fattori del primo membro si annulla, quindi l'intero primo membro diviene zero, uguale pertanto al secondo membro. Per esempio per $m = 1$ si ha: $(1 – 1) \cdot (2 – 1) \cdot (3 – 1) \cdot (4 – 1) \cdot (5 – 1) = 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 0$.

Un'identità in algebra corrisponde a una tautologia in logica, ossia un enunciato logico che assume sempre il valore di verità **vero** quale che siano i valori delle proposizioni componenti.

Definizione 5

Un'uguaglianza numerica o simbolica si dirà una **contraddizione,** in un certo insieme A, se

- è un'uguaglianza numerica che può scriversi in modo che numericamente i due membri rappresentano numeri che risultano diversi nell'insieme A;
- è un'uguaglianza simbolica per la quale risultano false tutte le uguaglianze che si ottengono da essa sostituendo ai simboli gli elementi di A .

Esempio 2

Sono contraddizioni, nei rispettivi insiemi indicati, le seguenti:

- $7 + 2 – 1 = 4 + 3$, perché eseguendo i calcoli si ottiene $8 = 7$, che è un'uguaglianza falsa.
- $\sqrt{3^2+4^2} = 10-15$, perché eseguendo i calcoli si ha: $5 = – 5$.
- $(2a + 3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2 + 1$ in $\mathbb{R}$. Dato che essa può anche scriversi $(2a + 3b)^2 = (2a + 3b)^2 + 1$. Il che è evidentemente assurdo.
- $9x^2 = – 1$ in $\mathbb{R}$. Infatti qualunque numero reale consideriamo il suo quadrato non può mai essere negativo.
- $2d = 3$ in $\mathbb{Z}$, perché il prodotto di qualsiasi numero intero per due non può mai essere dispari.
- $\frac{x^2+3x}{2x} = \frac{x+4}{2}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Infatti se $x \neq 0$, semplifichiamo la prima frazione, ottenendo $\frac{x+3}{2} = \frac{x+4}{2}$

che è una scritta certamente falsa. Mentre per $x = 0$ essa non è né vera e né falsa ma è semplicemente priva di significato.

- $\sqrt{c-2} = -3$, in $C = \{c \in \mathbb{R} : c \geq 2\}$, dato che il primo membro rappresenta un numero positivo e il secondo un numero negativo. Per $c < 2$ essa non è né vera e né falsa ma è semplicemente priva di significato, sempre nell'ambito dei numeri reali.

Una contraddizione in algebra corrisponde a quelle che anche in logica abbiamo chiamato *contraddizione*, ossia un enunciato logico che assume sempre il valore di verità **falso** quale che siano i valori delle proposizioni componenti. Arriviamo adesso all'ultimo di uguaglianza, forse quello più importante.

Definizione 6

Una uguaglianza simbolica si dirà un'**equazione** in un insieme A se, a seconda degli elementi di A che si sostituiscono ai suoi simboli, si ottengono sia identità numeriche sia contraddizioni numeriche.

Esempio 3

Sono equazioni le seguenti scritture.

- $4az + xu^2 = 5^x$ in $\mathbb{R}$. La quale risulta vera per esempio per $a = x = u = z = 1$ (si ha: $4 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1^2 = 5^1$, cioè $5 = 5$) e falsa per esempio per $a = z = 1$, $x = u = 0$ (si ha: $4 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0^2 = 5^0 \Rightarrow 4 = 1$). Naturalmente noi abbiamo dato solo alcuni esempi di valori che verificano o no l'uguaglianza, possono esservene molti altri.
- $x = 2$ in $\mathbb{R}$. È vera per $x = 2$ ($2 = 2$) e falsa, per esempio, per $x = 1$ ($1 = 2$).
- $\frac{3a^2 - 4a}{a+1} = \frac{ab-2}{b}$. Essa risulta vera per $a = 2$ e $b = 3$ $\left(\frac{3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2}{2+1} = \frac{2 \cdot 3 - 2}{3} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{4}{3}\right)$, falsa, per esempio, per $a = b = 1$ $\left(\frac{3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1}{1+1} = \frac{1 \cdot 1 - 2}{1} \Rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{0}{1} \Rightarrow -\frac{1}{2} = 0\right)$. In ogni caso il suo valore di verità si considererà per tutti i numeri reali a e b tranne che per $a = -1$ e $b = 0$ poiché per tali valori essa è priva di significato, dato che si annulla uno dei due denominatori.
- $\sqrt{x-y} = x - 2$. Risulta vera, per esempio, per $x = 3$ e $y = 2$ $\left(\sqrt{3-2} = 3 - 2 \Rightarrow \sqrt{1} = 1\right)$, falsa per $x = y = 1$ $\left(\sqrt{1-1} = 1 - 2 \Rightarrow \sqrt{0} = -1\right)$. Il suo valore di verità si considera per tutti i numeri reali x e y la cui differenza, nell'ordine, non risulta negativa, diversamente la scritta è priva di significato, dato che all'interno della radice quadrata vi saranno valori negativi.
- $(m - 2) \cdot (m - 4) = 0$. Essa risulta vera per $m = 2$ (si ha: $(2 - 2) \cdot (2 - 4) = 0 \Rightarrow 0 \cdot (-2) = 0$) e falsa per $m = 1$ (si ha: $(1 - 2) \cdot (1 - 4) = 0 \Rightarrow (-1) \cdot (-3) = 0 \Rightarrow 3 = 0$).

Un'equazione in algebra corrisponde a quello che, in logica, abbiamo chiamato *enunciato aperto*, ossia un enunciato logico che assume talvolta il valore di verità **vero**, talaltra quello di verità **falso**, a seconda dei valori di verità delle proposizioni componenti.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo stabilire fra le seguenti uguaglianze quali sono identità, quali contraddizioni, quali equazioni.

- $3x + 1 = 7 \cdot (x - 2) - 4 \cdot (x + 1)$. Semplifichiamo l'espressione a secondo membro, ottenendo: $3x + 1 = 7x - 14 - 4x - 4 \Rightarrow 3x + 1 = 3x - 18$. Che è ovviamente una contraddizione per qualunque valore reale di x, dato che non esistono numeri reali ai quali aggiungendo 1 o togliendo 18, si ottiene lo stesso numero.
- $\frac{x+1}{x} = \frac{x+2}{x+1} + \frac{1}{x \cdot (x+1)}$. Determiniamo il minimo comune denominatore al secondo membro: $\frac{x+1}{x} = \frac{x \cdot (x+2)+1}{x \cdot (x+1)} \Rightarrow \frac{x+1}{x} = \frac{x^2+2x+1}{x \cdot (x+1)} \Rightarrow \frac{x+1}{x} = \frac{(x+1)^2}{x \cdot (x+1)}$. Se x è un numero per cui non si annulla nessuno dei due denominatori, cioè $x \neq 0$ e $x \neq -1$, possiamo semplificare la seconda frazione, scrivendo: $\frac{x+1}{x} = \frac{x+1}{x}$. Diciamo perciò che abbiamo un'identità se $x \neq 0$ e $x \neq -1$; per questi due valori l'uguaglianza di partenza risulta priva di senso. Avremo: $\frac{0+1}{0} = \frac{0+2}{0+1} + \frac{1}{0 \cdot (0+1)} \Rightarrow \frac{1}{0} = \frac{2}{1} + \frac{1}{0}$ per $x = 0$ e $\frac{-1+1}{-1} = \frac{-1+2}{-1+1} + \frac{1}{-1 \cdot (-1+1)} \Rightarrow \frac{0}{-1} = \frac{1}{0} + \frac{1}{0}$ per $x = -1$.
- $4x = 3x$, invece è un'equazione, dato che se $x = 0$ avremo $0 = 0$, mentre per tutti gli altri numeri, ovviamente avremo un'uguaglianza falsa.

Date le seguenti uguaglianze stabilire, nell'insieme dei numeri reali, quali sono identità, quali contraddizioni e quali equazioni, stabilendo per ciascuna di esse per quali valori eventualmente esse perdono significato (nelle risposte, I = Identità, C = Contraddizione, E = equazione)

Livello 1

1. a) $\frac{2z-t}{3} = \frac{-t+2z}{4}$; b) $\frac{x-3y}{2} = \frac{3x-y}{2}$; c) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{5}{6}x$ [a) C; b) E; c) I]
2. a) $\frac{4x^2+9}{x^2} = -3$; b) $x + y = y - x$; c) $x + y - 1 = y + x - 2$ [a) C, $x \neq 0$; b) E; c) C]
3. a) $3x - 1 = 3x + 1$; b) $\frac{x^2+x}{x} = x + 1$; c) $\frac{x^2-x}{x} = x + 1$ [a) C; b) I, $x \neq 0$; c) C, $x \neq 0$]
4. a) $x + \sqrt{2} = y + 1$; $\sqrt{x} = x$; c) $\sqrt{x} = -x^2 - 1$ [a) E; b) E, $x \geq 0$; c) C, $x \geq 0$]
5. a) $(3x-1)^2 - (3x+1)^2 = \frac{-12xyz}{yz}$; b) $(x + y)^2 - (x - y)^2 = 2xy$ [a) I, $y, z \neq 0$; b) E]
6. a) $\left(\frac{3x-2a}{3}\right)^2 = \left(\frac{2a-3x}{3}\right)^2$; b) $(2z - t)^2 - (t - 2z)^2 = 1$ [a) I; b) E]
7. a) $(2x - y) \cdot (4x + y) = 8x^2 - 2xy - y^2$; b) $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1}{x+1}$ [a) I; b) E, $x \neq 1, -1$]
8. a) $a^2 - b^2 = a^2 + 2ab + b^2$; b) $m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = (m + 1)^3$ [a) E; b) I]
9. a) $(3p + q) \cdot (3p - q) = 9p^2 - q^2 - 3$; $(2x - 3y) \cdot (3x - 2y) = 9x^2 - 4y^2$ [a) C; b) E]
10. a) $\frac{3}{d-3} = 0$; b) $\frac{8x+1}{16x+2} = \frac{1}{2}$; c) $\frac{z+2t}{3} = \frac{z-2t}{2}$ [a) C, $d \neq 3$; b) I, $x \neq -1/8$; c) E]

Livello 2

11. a) $(2a - 3b + c) \cdot (2a + 3b - c) = 4a^2 - (3b - c)^2$; b) $\frac{x+y}{x^2-y^2} = \frac{x-y}{(x-y)^2}$ [a) I; b) I, $x \neq y$]
12. a) $x^3 + 8 = (x + 2) \cdot (x^2 + 2x + 4)$; b) $\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2} = x - y$ [a) E; b) E, $x \neq y, x \neq -y$]

13. a) $x^2 + y^2 = -z^2$; b) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; c) $\frac{2}{x} + \frac{x}{2} = 0$ [a) E; b) E; c) C, $x \neq 0$]

14. a) $\frac{x}{y} = \frac{y}{x}$; b) $\frac{x^2}{y^2} = -\frac{x^2}{y^2}$; c) $\frac{x^2+1}{2} + \frac{x^2+1}{3} + \frac{x^2+1}{6} = x^2 + 1$ [a) E, x, $y \neq 0$; b) E, $y \neq 0$; c) I]

15. a) $\frac{a^3 + m^3}{a+m} = a^2 - am + m^2$; b) $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$ [a) I, $a + m \neq 0$; b) E, $z \neq 1, -1$]

16. a) $\frac{x^4 - x^3 - x + 1}{x - 2} = 0$; b) $\frac{x^3 + y^3}{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3} = \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$ [a) E, $x \neq 2$; b) I, $x + y \neq 0$]

17. a) $2^x = x^2$; b) $3^{x^2 - x + 1} = 0$; c) $4^{\frac{1}{x}} = 1$; d) $\frac{x}{\frac{y}{x}} = \frac{x^2}{y}$ [a) E; b) C; c) C, $x \neq 0$; d) I, x, $y \neq 0$]

18. a) $\frac{x + y - 1}{(x+y)^2 - 1} = x + y + 1$; b) $\frac{\frac{x+1}{x-1}}{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{x-7}{x+1}$ [a) E, $x + y \neq 1, -1$; b) E, $x \neq 1, -1$]

Livello 3

19. a) $\frac{x+y}{x-y} = \frac{x-y}{x+y}$; b) $\frac{x^2 + y^2}{\frac{x+y}{x^2 - y^2}} = \frac{x+y}{\frac{1}{x^2 + y^2}} + 1$ [a) E, $x + y \neq 0$, $x - y \neq 0$; b) E, $x + y \neq 0$, $x - y \neq 0$]

20. a) $\sqrt[3]{2y - 1} = -3$; b) $\sqrt{x^2 + 1} = -2$; c) $\sqrt{x^2 - 1} = 1$ [a) E; b) C; c) E, $x^2 - 1 \geq 0$]

Proprietà delle uguaglianze

Consideriamo qualche proprietà delle uguaglianze, ricordando che la relazione di uguaglianza fra numeri è una relazione di equivalenza e gode pertanto delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva. Ricordiamo le espressioni simboliche di tali proprietà, x, y e z rappresentano una qualunque espressione fra numeri reali.

1. $x = x, \forall\, x \in \mathbb{R}$ (Proprietà riflessiva)
2. $x = y \Rightarrow y = x, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$ (Proprietà simmetrica)
3. $x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z, \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$ (Proprietà transitiva)

Valgono inoltre altre proprietà, che enunciamo di seguito, una alla volta.

4. $x = y \Leftrightarrow x + z = y + z, \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$

Questa uguaglianza è un fatto abbastanza intuitivo, che di seguito enunciamo a parole.

Principio della bilancia

Se a entrambi i membri di una stessa uguaglianza si aggiungono o si sottraggono uguali quantità, il valore di verità dell'uguaglianza non cambia.

In altre parole, aggiungendo o togliendo uguali quantità a entrambi i membri di un'uguaglianza si varia l'uguaglianza da un punto di vista formale, ma non si varia la sua verità o falsità.
Il nome *principio della bilancia* è dovuto al fatto che esso può anche enunciarsi nel seguente modo:

Se in entrambi i piatti di una bilancia a braccia uguali aggiungiamo o togliamo pesi di uguale valore, la bilancia non varia il suo stato di equilibrio (*cioè se è in equilibrio continua a esserlo e se non lo è continua a non esserlo, mantenendo inalterata in quest'ultimo caso la differenza di peso fra i due piatti*).

Abbiamo detto aggiungiamo o togliamo, infatti la quantità z potrebbe essere sia positiva (aggiungiamo), sia negativa (togliamo), sia nulla (non alteriamo i pesi sui due piatti).
Nell'uguaglianza 4 abbiamo usato il simbolo della doppia implicazione materiale $\Leftrightarrow$; ciò significa che, se è vero quel che è scritto alla sinistra del simbolo, è vero anche quel che è scritto a destra e viceversa.
In particolare l'implicazione 4 letta nel verso $\Leftarrow$, può essere enunciata a parole nel seguente modo.

Proprietà di semplificazione additiva

Eliminando da entrambi i membri di una stessa identità addendi uguali l'identità permane.

Vediamo un esempio.

Esempio 4

- Grazie al principio della bilancia, avendo l'identità $5 + 2 = 9 – 2$, aggiungendo a entrambi i membri la quantità $(6 – 3)$, possiamo scrivere l'identità: $5 + 2 + 6 –3 = 9 – 2 + 6 – 3$.
- Allo stesso modo, dalla contraddizione: $7 + 1 = 4 \cdot 5 – 3$, sottraendo a entrambi i membri la quantità $4\cdot 2\, 1 – 3$, otteniamo la contraddizione: $7 + 1 – (4\cdot 2\, 1 – 3) = 4 \cdot 5 – 3 – (4\cdot 2\, 1 – 3)$.
- Per la proprietà di semplificazione additiva dall'identità $12 – 3 = 2 + 4 – 3 + 6$, aggiungendo a entrambi i membri la quantità $+ 3$, deduciamo quest'altra identità: $12 = 2 + 4 + 6$.

L'esempio di applicazione della regola di semplificazione additiva, ci permette di enunciare la seguente

Regola 1 (di trasporto di un termine additivo da un membro all'altro di una uguaglianza)

Per trasferire un addendo da una parte all'altra del segno di uguale di una uguaglianza, basta semplicemente cambiare il suo segno.

Vediamo un'applicazione della precedente regola.

Esempio 5

Tenuto conto della regola 1, dall'identità $3 + 5 = 1 + 7$, possiamo ricavare, fra le infinite possibili, le seguenti identità: $3 = 1 + 7 – 5$; $3 + 5 – 1 = 7$; $3 + 5 – 1 – 7 = 0$.

L'applicazione della regola 1 permette di giustificare la cosiddetta "prova" della sottrazione, cioè se la differenza di due numeri è quella corretta, sommando tale differenza al sottraendo, dobbiamo ottenere il minuendo.

Esempio 6

Diciamo che l'operazione $175 – 34 = 141$, è corretta perché $141 + 34 = 175$. Questo modo di procedere è solo un'applicazione della regola 1, stiamo infatti applicando prima la proprietà simmetrica dell'uguaglianza: $141 = 175 – 34$ e poi la regola 1, trasportando il numero $– 34$ nell'altro membro: $141 + 34 = 175$.

Grazie alla regola 1, possiamo fare in modo che ogni uguaglianza sia scritta in modo che il suo secondo membro sia zero; basta infatti trasportare tutti gli elementi del secondo membro al primo.

Esempio 7

- L'uguaglianza $3x^2 + y = z – 1 + 2x – y$, applicando la regola 1, si scrive: $3x^2 + y – z + 1 – 2x + y = 0$, che, applicando le ben note proprietà di semplificazione di monomi simili, diviene: $3x^2 + 2y – z + 1 – 2x = 0$.
- $3x + 1 = 2 \cdot (x – 1) + x + 3$, si scrive: $3x + 1 – 2\cdot(x – 1) – x – 3 = 0 \Rightarrow 3x + 1 – 2x + 2 – x – 3 = 0 \Rightarrow 0 = 0$. Notiamo che abbiamo a che fare con un'identità, il che vuol dire che anche l'uguaglianza iniziale lo era.
- L'uguaglianza $4y^2 + 5 = 3y \cdot (y – 1) + y^2 + 3y$, si scrive: $4y^2 + 5 – 3y \cdot (y – 1) – y^2 – 3y = 0 \Rightarrow 4y^2 + 5 – 3y^2 + 3y – y^2 – 3y = 0 \Rightarrow 5 = 0$. Notiamo che stavolta abbiamo a che fare con una contraddizione.

Gli ultimi esempi ci permettono di porre una nuova definizione di identità e contraddizione.

Definizione 7

Un'uguaglianza numerica o simbolica si dirà un'**identità** in un certo insieme A, se può essere ricondotta alla scritta $0 = 0$.

Definizione 8

Un'uguaglianza numerica o simbolica si dirà una **contraddizione** in un certo insieme A, se può essere ricondotta alla scritta $a = 0$, dove a rappresenta un simbolo o un numero certamente diverso da zero.

Passiamo a un'altra proprietà che risulta una generalizzazione della 4.

5. $x = y \Leftrightarrow x \cdot z = y \cdot z, \forall\, x, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Questa proprietà diviene un caso particolare della proprietà numero 4 se z rappresenta un numero intero. Anche in questo caso i due sensi dell'implicazione possono essere etichettati: quella letta nel verso $\Rightarrow$ viene enunciata di seguito.

Principio generalizzato della bilancia

Se moltiplichiamo o dividiamo entrambi i membri di una stessa uguaglianza per una stessa quantità diversa da zero, il valore di verità dell'uguaglianza non cambia.

Vediamo un esempio.

Esempio 8

Dall'identità $7 \cdot 4 = 2 \cdot 14$, deduciamo le identità: $7 \cdot 4 \cdot 5 = 2 \cdot 14 \cdot 5$ e $7 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) = 2 \cdot 14 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right)$. Ma anche l'identità $7 \cdot 2 = 14$, ottenuta dividendo tutto per 2.

Vediamo adesso di ricavare una regola simile a quella enunciata in precedenza come regola 1.

Esempio 9

Applichiamo il principio generalizzato della bilancia all'identità $2 \cdot 6 = 3 + 9$, moltiplicando per $\frac{1}{6}$ entrambi i membri. Otteniamo così l'identità: $2 \cdot 6 \cdot \frac{1}{6} = (3 + 9) \cdot \frac{1}{6} \Rightarrow 2 = (3 + 9) \cdot \frac{1}{6}$.

L'esempio precedente ci permette di enunciare la seguente regola.

Regola 2 (di trasporto di un termine moltiplicativo da un membro all'altro di una uguaglianza).

Per trasferire un fattore diverso da zero, comune a tutti i termini di un membro di una uguaglianza dall'altra parte del segno di uguale, basta moltiplicare tutti i termini dell'altro membro per l'inverso del numero da trasferire.

La precedente proprietà risulta molto importante nella determinazione di alcune formule "inverse", così come della giustificazione della validità della cosiddetta "prova" della divisione fra due numeri interi il cui resto è zero.

Esempio 10

- Sappiamo che la misura A dell'area di un rettangolo la cui base e altezza misurano rispettivamente b e h si trova mediante la formula: $A = b \cdot h$. Se dobbiamo risolvere il problema inverso, ossia conosciamo la misura dell'area del rettangolo e di uno solo dei suoi lati, per esempio h, e volessimo ricavarci la misura dell'altro, b, dovremmo ricavarci dalla precedente formula il valore di b. Per la proprietà simmetrica possiamo scrivere: $b \cdot h = A$, adesso applichiamo la regola 2, ottenendo la formula richiesta: $b = A \cdot \frac{1}{h} = \frac{A}{h}$.
- Per verificare se la divisione $435 : 15 = 29$, è corretta, moltiplicando il quoziente per il divisore, dobbiamo ottenere il dividendo: $29 \cdot 15 = 435$. La precedente regola è giustificata proprio dalla regola 2, dato che abbiamo applicato prima la proprietà simmetrica e poi abbiamo trasportato il fattore 15 da una parte all'altra del segno di uguaglianza: $\frac{435}{15} = 29 \Leftrightarrow 435 \cdot \frac{1}{15} = 29 \Leftrightarrow 435 = 29 \cdot 15$.

Infine la proprietà 5, letta nel verso $\Leftarrow$ si può così esprimere.

Proprietà di semplificazione moltiplicativa

Eliminando da entrambi i membri di una stessa uguaglianza fattori uguali e non nulli l'uguaglianza permane.

Esempio 11

Dall'identità $(3 + 5) \cdot 4 = (11 – 3) \cdot 4$, semplificando il fattore comune 4, otteniamo l'identità $3 + 5 = 11 – 3$.

L'aver imposto il fattore moltiplicativo diverso da zero risulta un fatto indispensabile per la validità della precedente proprietà, come testimoniato dal seguente esempio.

Esempio 12

Se nell'identità $7 \cdot 0 = 8 \cdot 0$, eliminassimo il fattore comune zero, otterremo la contraddizione $7 = 8$.

Vediamo adesso altre due proprietà, che sono delle generalizzazioni delle proprietà 4 e 5, ottenute tenuto conto delle proprietà 1, 2 e 3.

6. $x = y \wedge z = t \Rightarrow x + y = z + t, \forall\, x, y, z, t \in \mathbb{R}$
7. $x = y \wedge z = t \Rightarrow x \cdot y = z \cdot t, \forall\, x, y, z, t \in \mathbb{R}$

La giustificazione delle due precedenti proprietà è immediata. Infatti per la 6, poiché sappiamo che $z = t$, vuol dire che z e t sono nomi diversi di oggetti uguali, in realtà noi stiamo sommando uguali oggetti a en-

trambi i membri di una stessa uguaglianza, cioè stiamo applicando la proprietà 4. Stesso discorso vale per la proprietà 7, nella quale moltiplichiamo entrambi i membri per una stessa quantità. Per tali proprietà non sono valide le implicazioni nel verso contrario.

Esempio 13

- Facciamo vedere che in generale non è vero che $x + y = z + t \Rightarrow (x = z) \wedge (y = t)$ (*) Infatti dall'identità $7 + 5 = 10 + 2$, l'applicazione della proprietà (*) porta alla contraddizione seguenti: $7 = 10$, $5 = 2$.
- Notiamo che è anche falsa l'implicazione $x + y = z + t \Rightarrow (x = t) \vee (y = z)$. Quindi non è vera neanche l'implicazione più "debole" $x + y = z + t \Rightarrow (x = z) \vee (y = t) \vee (x = t) \vee (y = z)$.
- Facciamo vedere che in generale non è vero che $x \cdot y = z \cdot t. \Rightarrow (x = z) \vee (y = t) \vee (x = t) \vee (y = z)$. Infatti dall'identità $6 \cdot 8 = 12 \cdot 4$, tutte le seguenti sono contraddizioni: $6 = 12$, $8 = 4$, $6 = 4$, $8 = 4$.

Ricordando quel che abbiamo detto per la fattorizzazione in $\mathbb{N}$, osserviamo che la deduzione precedente potrebbe effettuarsi nell'ipotesi in cui tutti i quattro simboli x, y, z e t rappresentino numeri primi.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Data la cosiddetta equazione di continuità della idrodinamica, $v_1 \cdot s_1 = v_2 \cdot s_2$, che stabilisce che la portata di un liquido è costante, ossia che il prodotto fra la velocità del liquido e la superficie che esso attraversa non cambia, vogliamo determinare le formule inverse per determinare una delle due velocità o una delle due superfici. In entrambi i casi applichiamo la regola 2, ottenendo $v_1 = \frac{v_2 \cdot s_2}{s_1}$ e $s_1 = \frac{v_2 \cdot s_2}{v_1}$. Analoghe formule valgono se scegliamo di determinare v_2 e s_2.

Trovare le formule inverse delle seguenti formule geometriche o fisiche, relative a tutte le variabili, salvo diversamente richiesto. Nelle risposte, se esse sono simmetriche, se ne riporta solo una

Livello 1

1. a) $A = \frac{b \cdot h}{2}$; b) $A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$; c) $V = a \cdot b \cdot c$ $\left[\text{a) } b = \frac{2A}{h};\ \text{b) } d_1 = \frac{2A}{d_2};\ \text{c) } a = \frac{V}{b \cdot c}\right]$

2. a) $A = \frac{b_1 + b_2}{2} \cdot h$; b) $V = \frac{a \cdot b \cdot h}{3}$; c) $V = \frac{l^2 \cdot h}{3}$, trova h $\left[\text{a) } b_1 = \frac{2A}{h} - b_2;\ \text{b) } a = \frac{3V}{b \cdot h};\ \text{c) } h = \frac{3V}{l^2}\right]$

3. a) $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$, trova h; b) $s = v \cdot t$; c) $s = s_0 + v \cdot t$ $\left[\text{a) } h = \frac{V}{\pi \cdot r^2};\ \text{b) } v = \frac{s}{t};\ \text{c) } s_0 = s - v \cdot t, v = \frac{s - s_0}{t}\right]$

4. a) $s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$, trova a; b) $s = s_0 + \frac{1}{2} a \cdot t^2$, trova a e s_0; c) $\frac{F_1}{s_1} = \frac{F_2}{s_2}$

$\left[\text{a) } a = \frac{2s}{t^2};\ \text{b) } a = \frac{2 \cdot (s - s_0)}{t^2}, s_0 = s - \frac{1}{2} a \cdot t^2;\ \text{c) } F_1 = \frac{F_2 \cdot s_1}{s_2}, s_1 = \frac{F_1 \cdot s2}{F_2}\right]$

5. a) $C = \frac{q}{V}$; b) $F = -k \cdot x$; c) $V = Ri$ $\left[\text{a) } q = C \cdot V, V = \frac{q}{C};\ \text{b) } x = -\frac{F}{k};\ \text{c) } R = \frac{V}{i}\right]$

6. a) $E = \frac{1}{2} m \cdot v^2$, trova m; b) $R = \rho \cdot \frac{l}{A}$; c) $a = \frac{2s}{t^2}$, trova s

$\left[\text{a) } m = \frac{2E}{v^2};\ \text{b) } \rho = \frac{R \cdot A}{l}, l = \frac{R \cdot A}{\rho}, A = \rho \cdot \frac{l}{R};\ \text{c) } s = \frac{a \cdot t^2}{2}\right]$

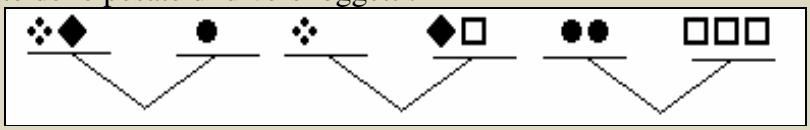
7. a) $a = \frac{v}{t}$; b) $L = l \cdot (1 + \lambda \cdot T)$; c) $F = m \cdot a$ $\left[\text{a) } v = a \cdot t, t = \frac{v}{a};\ \text{b) } l = \frac{L}{1 + \lambda \cdot T}, \lambda = \frac{L - l}{l \cdot T};\ \text{c) } m = \frac{F}{a}\right]$

8. a) $V = V_0 \cdot (1 + 3\lambda \cdot T)$; b) $U = m \cdot g \cdot h$; c) $P \cdot V = k$

$\left[\text{a) } V_0 = \frac{V}{1 + 3\lambda \cdot T}, \lambda = \frac{V - V_0}{3V_0 \cdot T};\ \text{b) } m = \frac{U}{g \cdot h};\ \text{c) } P = \frac{k}{V}\right]$

Lavoriamo insieme

Di seguito sono riportate delle pesate di diversi oggetti:



si chiede: quanti ◆ equivalgono a un ❖?

Per rispondere alla domanda osserviamo che dalla seconda pesata si evince che ❖ = ◆□ (*)

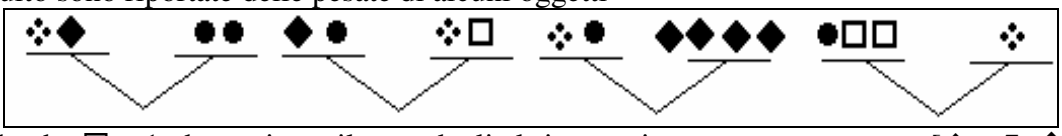
Utilizzando questa equivalenza possiamo scrivere ◆◆□ = ●. Ma allora la terza pesata ci permette di scrivere ◆◆◆◆□□ = □□□. Applicando a quest'ultima uguaglianza la proprietà di semplificazione additiva otteniamo la validità dell'uguaglianza seguente ◆◆◆◆ = □. Quindi, tenuto conto della uguaglianza (*) possiamo concludere dicendo che ❖ = ◆◆◆◆◆.

Livello 2

9. Sapendo che ❖ + ▭ = 12, ❖ + ◆ = 11 e ▭ + ◆ = 10, determinare quanto vale ❖ + ❖. [13]
10. Sapendo che Aldo ha 2 anni più di Bice e 3 anni meno di Carlo, il quale ha 2 anni meno di Daniela, ordinare le età dei ragazzi in ordine crescente. [Daniela, Carlo, Aldo, Bice]

Livello 3

11. Una bottiglia e un bicchiere pesano quanto una brocca; la bottiglia pesa quanto un bicchiere e un piatto e 3 piatti pesano quanto due brocche. Quanti bicchieri pesano quanto una bottiglia? [5]
12. Di seguito sono riportate delle pesate di alcuni oggetti



sapendo che □ = 1, determinare il peso degli altri oggetti. [❖ = 7, ◆ = 3, ● = 5]

Giochiamo alla matematica

Faremo vedere che, applicando in maniera errata la proprietà di semplificazione moltiplicativa, possiamo "dimostrare" la contraddizione 1 = 2.

Supponiamo di avere due numeri qualsiasi uguali e diversi da zero, che chiamiamo a e b. seguiamo la seguente procedura:

PASSO	CONSEGUENZA	GIUSTIFICAZIONE
1	$a = b$	Per ipotesi
2	$a^2 = ab$	Per il principio generalizzato della bilancia, abbiamo moltiplicato entrambi i membri per a
3	$a^2 - b^2 = ab - b^2$	Per il principio della bilancia, abbiamo aggiunto a entrambi i membri la quantità $-b^2$.
4	$(a - b) \cdot (a + b) = b \cdot (a - b)$	Per le proprietà dei prodotti notevoli
5	$a + b = b$	Dividiamo tutto per $(a - b)$, grazie alla proprietà di semplificazione moltiplicativa.
6	$2b = b$	Per l'ipotesi, dato che avevamo detto che $a = b$ sostituiamo al posto del simbolo a il simbolo b.
7	2 = 1	Per la proprietà di semplificazione moltiplicativa, dividiamo tutto per b diverso da zero.

Dove abbiamo sbagliato? Nell'applicare la proprietà di semplificazione moltiplicativa quando abbiamo diviso per $(a - b)$ perché, dato che $a = b$, risulta $(a - b) = 0$.

Attività

I seguenti sono esempi di applicazioni illecite delle proprietà enunciate in questo paragrafo grazie alle quali da identità si deducono contraddizioni; stabilire per ciascun procedimento quali proprietà o principi sono applicati in maniera errata.

1. $a = \frac{3}{2}b \Rightarrow 4a = 4 \cdot \frac{3}{2}b \Rightarrow 4a = 6b \Rightarrow 14a - 10a = 21\text{b} - 15b \Rightarrow 15b - 10a = 21b - 14a \Rightarrow 5 \cdot (3b - 2a) = 7 \cdot (3b - 2a) \Rightarrow \frac{5 \cdot (3b - 2a)}{3b - 2a} = \frac{7 \cdot (3b - 2a)}{3b - 2a} \Rightarrow 5 = 7$
2. $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = (-2)^2 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow 2 = -2$
3. $a = b = 1, c = d = 2 \Rightarrow a + c = d + b \Rightarrow a = d \Rightarrow 1 = 2$
4. $2 = 2 \Rightarrow 2a = 2a \Rightarrow a + a = 2a \Rightarrow a = 2a + a \Rightarrow a = 3a \Rightarrow 1 = 3$
5. $6 = 6 \Rightarrow 2 \cdot 3 = 5 + 1 \Rightarrow (2 \cdot 3) \cdot 4 = (5 + 1) \cdot 4 \Rightarrow (2 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 4) = 5 \cdot 4 + 1 \cdot 4 \Rightarrow 8 \cdot 12 = 20 + 4 \Rightarrow 8 \cdot 12 = 24 \Rightarrow 8 \cdot 12 = 8 \cdot 3 \Rightarrow 12 = 3$
6. $12 = 12 \Rightarrow 3 \cdot 4 = 6 + 6 \Rightarrow 3 \cdot 4 \cdot 5 = (6 + 6) \cdot 5 \Rightarrow 12 \cdot 5 = 6 \cdot 5 + 6 \Rightarrow 12 \cdot 5 = 36 \Rightarrow 12 \cdot 5 = 12 \cdot 3 \Rightarrow 5 = 3$
7. $x = 1 \Rightarrow x^3 = x^2 \Rightarrow x^3 - 1 = x^2 - 1 \Rightarrow (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) = (x - 1) \cdot (x + 1) \Rightarrow x^2 + x + 1 = x + 1 \Rightarrow 3 = 2$
8. $x = 1 \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x^2 - 1 = x - 1 \Rightarrow (x - 1) \cdot (x + 1) = x - 1 \Rightarrow \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} \Rightarrow x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow 1 = 0$

Classificazione delle equazioni e risoluzione delle equazioni di primo grado

Possiamo adesso considerare le equazioni e la loro risoluzione. Vogliamo cioè affrontare il problema di determinare gli eventuali numeri che verificano (rendono vera) le uguaglianze che abbiamo chiamato equazioni.

Esempio 14

Poiché sappiamo che $3 + 5 = 8$, possiamo dire che una soluzione dell'equazione $3 + x = 8$, è il numero $x = 5$. Per lo stesso motivo possiamo dire che il numero $t = 3$ è soluzione dell'equazione $t + 5 = 8$, e che i numeri $u = 3$ e $v = 5$ sono soluzioni dell'equazione $u + v = 8$.

Prima di procedere nella ricerca di un metodo generale per la risoluzione di un'equazione dobbiamo stabilire una loro classificazione, cioè una suddivisione delle diverse equazioni a seconda di certe caratteristiche che adesso vedremo.

Definizione 9

Diciamo che un'equazione è **ridotta in forma semplificata** se il suo secondo membro è zero e l'espressione algebrica al primo membro non è ulteriormente semplificabile.

Definizione 10

In un'equazione ridotta in forma semplificata, le variabili che in essa compaiono si dicono **incognite**.

Definizione 11

In un'equazione ridotta in forma semplificata, l'eventuale parte priva di incognite si dirà **termine noto**.

Che cosa significa?

Incognita. Incognito significa semplicemente non cognito, cioè non noto. Le variabili di un'equazione della quale devono determinarsi le "soluzioni" (cioè gli eventuali valori che sostituiti al posto di tali simboli verificano l'equazione), vengono così denominate appunto perché tali valori non sono noti.

Esempio 15

- La seguente equazione non è ridotta in forma semplificata: $5a \cdot (3b + 1) = 2c - 3c$. Per ridurla dobbiamo intanto effettuare tutte le operazioni in essa presenti ottenendo: $15ab + 5a = -c$. Poi applichiamo la regola 1, trasportando $-c$ al primo membro: $15ab + 5a + c = -c + c$, così ricaviamo la forma semplificata: $15ab + 5a + c = 0$. Il termine noto vale zero se l'equazione è considerata nelle tre incognite a, b e c. Mentre se solo a e b debbono essere considerate incognite allora il termine noto è c.
- Analogamente l'equazione: $3x + 2d - 1 = 2d + 4 - \sqrt{2}$, sarà ridotta in forma semplificata nel seguente modo: $3x - 1 = +4 - \sqrt{2} \Rightarrow 3x - 1 - 4 + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow 3x - 5 + \sqrt{2} = 0$. Essa ha come termine noto il binomio $(-5 + \sqrt{2})$.
- Per l'equazione $\frac{3v+7u}{4z+1} - 3u = \frac{v}{4z-1}$, si deve procedere come normalmente si fa con le frazioni algebriche ottenendo così: $\frac{3v+7u}{4z+1} - 3u - \frac{v}{4z-1} = 0 \Rightarrow \frac{(3v+7u)\cdot(4z-1) - 3u\cdot(16z^2-1) - (4z+1)\cdot v}{(4z+1)\cdot(4z-1)} = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{12vz - 3v + 28uz - 7u - 48uz^2 + 3u - 4vz - v}{(4z+1)\cdot(4z-1)} = 0 \Rightarrow \frac{8vz - 4v + 28uz - 4u - 48uz^2}{(4z+1)\cdot(4z-1)} = 0$, che è perciò un'equazione in tre incognite di termine noto zero.

La regola 1, utilizzata nell'esempio precedente, risulta molto utile nell'operazione di semplificazione dell'espressione che costituisce l'equazione; infatti, la riscrittura semplificata delle equazioni ci avvantaggia nella loro risoluzione.

Esempio 16

- Data l'equazione $5 + 6n = 3 – 8m^2$, per scriverla in forma semplificata dobbiamo trasferire al primo tutto il suo secondo membro; per far ciò applichiamo la regola 1, ottenendo $5 + 6n – 3 + 8m^2 = 0$, ossia l'equazione $8m^2 + 6n + 2 = 0$.
- L'equazione $4y – 5 = 3$, è una equazione in una incognita, infatti la sua riduzione in forma semplificata altera solo il suo termine noto.
- L'equazione $6a – 7b + c = 4$, è una equazione in tre incognite.
- L'equazione $4h – 3z = 5 – 3z$, è in una sola incognita, poiché applicando il principio di semplificazione additiva il termine $–3z$ (e quindi la variabile z) si elimina. L'equazione diviene: $4h – 5 = 0$.
- L'equazione $7s^2 – 4s^2t = 5s^2tv^3$, può scriversi, mettendo in evidenza il fattore s^2, dopo aver portato tutto al primo membro, nel seguente modo: $s^2 \cdot (7 – 4t – 5tv^3) = 0$. Si sarebbe tentati di semplificare ed eliminare così l'incognita s, ma ciò non è possibile perché l'equazione con s ammette come una delle sue soluzioni $s = 0$, mentre quella priva di s non ammette tale soluzione; ossia, l'equazione semplificata non è la stessa di quella non semplificata.

Tenuto conto di quanto visto nell'esempio precedente e di quanto detto a proposito dei termini noti, vi è da dire che non tutte le variabili presenti in una equazione debbono considerarsi incognite.

Definizione 12

Se in una equazione contenente due o più variabili, si decide di considerare come termini incogniti solo alcune delle variabili, ossia di risolvere l'equazione solo relativamente a tali variabili, l'equazione viene detta **letterale o parametrica**. Le variabili non incognite vengono dette **parametri**.

Esempio 17

L'equazione $x – 3y = 0$, può considerarsi sia come un'equazione nelle due incognite x e y sia come equazione nella sola incognita x, in cui y è il parametro, o anche come equazione nella incognita y in cui è x il parametro.

Riteniamo importante stabilire la "posizione" delle incognite cioè se esse sono presenti come addendi, come fattori, come esponenti, …

Definizione 13

Un'equazione che ridotta in forma semplificata rappresenta un polinomio uguagliato a zero si dirà **equazione algebrica**.

Definizione 14

In un'equazione algebrica il grado del polinomio che uguagliato a zero forma l'equazione si dirà **grado dell'equazione**.

Definizione 15

Un'equazione semplificata nella quale una almeno delle sue incognite si trova posta al denominatore di una frazione si dirà **equazione fratta**.

Esempio 18

- $4f^3g – 9f = 0$ è una equazione algebrica di quarto grado in due incognite, oppure è di terzo grado nella sola incognita f o infine è di primo grado nella sola incognita g.
- $6j^e + 5 = 0$ è una equazione non algebrica in due incognite, di cui una, e, si trova all'esponente.
- $\frac{3x+1}{x-2} = 0$ è una equazione fratta in una incognita.
- Invece $2tr + \frac{1}{2}r^2 = 0$ è una equazione algebrica di secondo grado in due incognite, oppure una equazione parametrica di secondo grado nella incognita r o di primo grado nella incognita t.

Passiamo adesso alla risoluzione delle equazioni, cioè alla ricerca delle loro soluzioni in un dato insieme, senza dimenticare che, per stabilire che una uguaglianza costituisce una equazione e non una identità o una contraddizione, dobbiamo prima ricondurla a forma semplificata. È evidente che conviene partire dalle equazioni che hanno il minimo grado e il minor numero di incognite, cioè dalle equazioni di primo grado in un'incognita.

Una equazione di primo grado in un'incognita in forma semplificata è del tipo $ax + b = 0$, dove a e b rappresentano in generale delle espressioni numeriche, mentre x rappresenta l'incognita. Risolvere una tale equazione significa rispondere al quesito seguente: *Esistono numeri reali che rendono vera la scritta ax+b=0? E se esistono, quanti sono e come si determinano*? In alcuni casi la risposta al quesito è molto semplice.

Esempio 19

- È banale dire che una soluzione dell'equazione $f - 1 = 0$, è $f = 1$, dato che $1 - 1 = 0$.
- Risulta un po' più complicato stabilire che una soluzione dell'equazione $3v + 7 = 0$, è $v = -\frac{7}{3}$, ma soprattutto rimane il dubbio se, per ciascuna delle equazioni precedenti, quella proposta è l'unica soluzione e più in generale se qualunque equazione di primo grado in un'incognita ammette o no soluzioni.

Procediamo con ordine, cercando un metodo che ci possa aiutare a risolvere una generica equazione di primo grado in una incognita. Si può procedere per tentativi, sostituendo dei numeri in modo più o meno casuale alla variabile dell'equazione finché non si verifica l'uguaglianza, ma questo è un metodo che potrebbe andare bene solo in un numero molto ridotto di casi.

Consideriamo allora un tipo particolare di equazioni, quelle cioè che sono espresse nella forma $x = m$, dove x è il nome dell'incognita e m rappresenta il termine noto. Qual è la soluzione, cioè quale numero x rende vera l'uguaglianza $x = m$? È ovvio che la soluzione sia proprio il numero m. Pensiamo allora che un metodo per risolvere un'equazione di primo grado sia appunto quello di scriverla nella seguente forma semplificata

incognita di coefficiente unitario = termine noto,

e, per ricondurre il termine noto tutto da una parte del segno di uguaglianza (non necessariamente a destra, perché l'equazione $m = x$ è evidentemente la stessa equazione $x = m$, per la proprietà simmetrica delle uguaglianze), si possono utilizzare le regole 1 e 2 precedenti.

Esempio 20

Risolvere l'equazione $3v + 7 = 0$. Per la regola 1, possiamo scrivere $3v = -7$ e per la regola 2: $\frac{3v}{3} = \frac{-7}{3}$, da cui otteniamo la soluzione cercata: $v = -\frac{7}{3}$.

Quanto visto nell'esempio precedente ci permette di enunciare il seguente risultato.

Teorema 1

Ogni equazione di primo grado in un'incognita ammette sempre una e una sola soluzione.

Dimostrazione

Una generica equazione di primo grado ridotta in forma semplificata è la seguente: $ax + b = 0$; per risolverla possiamo applicare successivamente le regole 1 e 2: $ax + b - b = -b \Rightarrow ax = -b \Rightarrow \frac{ax}{a} = -\frac{b}{a} \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$.

Facciamo attenzione

La regola 1 dice che i termini noti si portano tutti da una parte del segno di uguale cambiandone i segni se cambiano membro, mentre la regola 2 dice che il coefficiente dell'incognita si porta nell'altro membro scrivendo l'inverso. Può capitare invece che lo studente disattento applichi le due regole nel seguente modo **errato.**

Esempio 21

- Risolvere l'equazione $4 + 3w = 0$. Si ha $w = -\frac{3}{4}$. Tale soluzione è evidentemente **errata**; se infatti andiamo a verificare, sostituendo alla variabile w il valore numerico trovato: $4+3\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=4-\frac{9}{4}=\frac{16-9}{4}=\frac{7}{4}\neq 0$. Ci chiediamo allora: dove abbiamo sbagliato? L'errore consiste nell'aver applicato la seguente regola sbagliata: scrivere l'inverso del primo termine e l'opposto del secondo termine numerico. Osserviamo che la corretta risoluzione è invece $w = -\frac{4}{3}$. Verifichiamo: $4+\cancel{3}\cdot\left(-\frac{4}{\cancel{3}}\right)=4-4=0$. Stavolta funziona!
- Diamo un altro esempio di risoluzione errata molto comune. Risolvere l'equazione $3x = 0$. Più volte l'abbiamo vista risolta in uno dei seguenti tre modi, tutti **sbagliati**: $x = -3$; $x=\frac{1}{3}$; $x=-\frac{1}{3}$. Quali possono essere i motivi di tali errori? Nel primo caso dipende dall'applicazione della regola di trasporto di un elemento additivo mentre qui non vi è alcun elemento additivo. Negli altri due casi la scelta della regola da applicare è corretta, ma è errata la maniera di applicarla. Il procedimento esatto è invece il seguente: $3x = 0 \Rightarrow \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{0}{3} \Rightarrow x = 0$. Possiamo risolvere ancora più semplicemente cercando un numero x che moltiplicato per 3 dia zero. Per il principio di annullamento del prodotto tale numero deve essere per forza zero.

Vediamo ancora qualche esempio che ci pone l'attenzione sull'insieme dove cerchiamo la soluzione.

Esempio 22

- Vogliamo risolvere l'equazione $3x + 1 = 0$ in $\mathbb{Z}$. Applicando il procedimento risolutivo visto nel Teorema 1, otteniamo $3x = -1 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$, che però è un numero razionale ma non un numero intero. Quindi possiamo dire che l'equazione non ha soluzioni in $\mathbb{Z}$ (cioè è una contraddizione in $\mathbb{Z}$), mentre ha una sola soluzione in $\mathbb{Q}$.
- Vogliamo risolvere l'equazione $3x - 9 = 0$ nell'insieme P dei numeri pari. Il procedimento risolutivo ci porta a scrivere $3x = 9 \Rightarrow x=\frac{9}{3} \Rightarrow x = 3$. La soluzione non è un numero pari. Quindi possiamo dire che l'equazione non ha soluzioni in P.

Vediamo un'altra questione.
Consideriamo la seguente equazione: $(6h - 1) \cdot (8h + 3) = 0$. La prima idea che ci viene in mente per risolverla è probabilmente quella di sviluppare la moltiplicazione ottenendo così la seguente equazione di secondo grado: $48h^2 + 10h - 3 = 0$, che però, allo stato attuale delle nostre conoscenze, non sappiamo risolvere. Allora vediamo un altro metodo. Cosa significa trovare le soluzioni di una equazione?
Abbiamo detto che risolvere un'equazione significa trovare quei valori numerici che sostituiti al posto delle incognite rendono **vera** l'uguaglianza, in questo caso quindi vogliamo trovare dei numeri che rendano il primo membro nullo come il secondo.
Ricordiamo ora l'Esempio 21 nel quale abbiamo risolto l'equazione $3x = 0$ applicando il principio di annullamento del prodotto. Tale principio poteva applicarsi chiaramente solo al secondo fattore poiché il primo non era zero.
In questo caso invece applichiamo il principio a entrambi i fattori, poiché entrambi incogniti, ottenendo così le due soluzioni mediante la risoluzione delle seguenti due distinte equazioni di primo grado che sappiamo risolvere: $6h - 1 = 0 \Rightarrow h = \frac{1}{6}$ e $8h + 3 = 0 \Rightarrow h = -\frac{3}{8}$.
Vediamo alcune applicazioni di questa strategia risolutiva.

Esempio 23

- Risolvere l'equazione $(3t - 1) \cdot (5u - 2) \cdot (3 - 7s) = 0$. Se svolgessimo le moltiplicazioni otterremo l'equazione di terzo grado in tre incognite $45tu - 105stu - 18t + 42st - 15u + 35su - 14s + 6 = 0$, la cui risoluzione è ben lungi dalle nostre attuali conoscenze. Applicando invece il principio di annullamento del prodotto otterremo facilmente tutte le sue soluzioni: $t = \frac{1}{3} \vee u = \frac{2}{5} \vee s = \frac{3}{7}$.
- Risolvere l'equazione $6y^2 - 5y = 0$. Scriviamo $y \cdot (6y - 5) = 0$; possiamo perciò dire che le sue uniche soluzioni sono: $y = 0$ e $y = \frac{5}{6}$.
- Risolvere l'equazione $j^2 - 5j + 6 = 0$. Pensando il primo membro come un trinomio di secondo grado otteniamo l'equazione $(j - 2) \cdot (j - 3) = 0$, da cui le soluzioni $j = 2$ e $j = 3$.
- Risolvere l'equazione $9k^2 - 6k + 1 = 0$. Pensando il primo membro come un quadrato di binomio otteniamo l'equazione $(3k - 1)^2 = 0$. Ora è evidente che una potenza è nulla solo quando la sua base è nulla (l'esponente non è importante da questo punto di vista), quindi basta risolvere l'equazione $3k - 1 = 0$, che ha l'unica soluzione $k = \frac{1}{3}$. D'altro canto essa può anche scriversi $(3k - 1) \cdot (3k - 1) = 0$ e, applicando il metodo precedente, dovremmo quindi risolvere due volte la stessa equazione $(3k - 1) = 0$. Chiaramente basta risolverla una volta sola.
- Risolvere l'equazione $x^2 + 1 = 0$. Non riusciamo a scomporre il polinomio. Osserviamo però che il primo membro è una somma di un addendo non negativo e di un addendo positivo, pertanto tale somma non potrà mai essere zero, ossia l'equazione è priva di soluzioni reali.
- Risolvere l'equazione $3u^2 - u - 5 = 0$. Non riusciamo a scomporre il trinomio né riusciamo a provare che esso risulta una uguaglianza impossibile nell'insieme dei numeri reali. Ciò non vuol dire che non vi siano soluzioni reali, ma solo che noi non sappiamo trovarle. Ci occuperemo in seguito della risoluzione di tale equazione.

Vediamo adesso degli esempi in cui si applica in modo errato una "specie" di principio di annullamento del prodotto.

Esempio 24

Risolvere l'equazione $(x + 1) \cdot (x - 2) = 1$. Applichiamo una "specie" di annullamento del prodotto, scrivendo: $x + 1 = 1$ e $x - 2 = 1$, da cui le "soluzioni" (?) $x = 0$ e $x = 3$.
È chiaro che ciò non è corretto, intanto perché non stiamo "annullando" un bel niente e poi perché il prodotto di due fattori è uguale a 1 in infiniti modi e non solo quando **entrambi** valgono 1. Quindi quelle che abbiamo ottenute non sono le "soluzioni". Infatti si ha: per $x = 0$, $(0 + 1) \cdot (0 - 2) = -2 \neq 1$ e per $x = 3$, $(3 + 1) \cdot (3 - 2) = 4 \neq 1$.

Alcune volte il precedente procedimento può essere lecito.

Esempio 25

- Supponiamo di dover risolvere l'equazione $(x + 1) \cdot (x - 2) = 6$ in $\mathbb{Z}$, poiché cerchiamo soluzioni intere, dobbiamo vedere, fra i diversi modi di esprimere 6 come prodotto di due numeri interi, se, per lo stesso valore assegnato all'incognita x, sono verificate contemporaneamente le seguenti condizioni

  $x + 1 = 1 \wedge x - 2 = 6 \quad \Rightarrow x = 0 \wedge x = 8.$
  $x + 1 = -1 \wedge x - 2 = -6 \quad \Rightarrow x = -2 \wedge x = -4.$
  $x + 1 = 2 \wedge x - 2 = 3 \quad \Rightarrow x = 1 \wedge x = 5.$
  $x + 1 = -2 \wedge x - 2 = -3 \quad \Rightarrow x = -3 \wedge x = -1.$
  $x + 1 = 3 \wedge x - 2 = 2 \quad \Rightarrow x = 2 \wedge x = 4.$
  $x + 1 = -3 \wedge x - 2 = -2 \quad \Rightarrow x = -4 \wedge x = 0.$
  $x + 1 = 6 \wedge x - 2 = 1 \quad \Rightarrow x = 5 \wedge x = 3.$
  $x + 1 = -6 \wedge x - 2 = -1 \quad \Rightarrow x = -7 \wedge x = 1.$

  Non avendo ottenuto uguali soluzioni per le due equazioni di ciascuno degli otto casi possiamo affermare con certezza che l'equazione è priva di soluzioni in $\mathbb{Z}$.

Concludiamo il paragrafo con un'ultima osservazione.

Le equazioni: $7g - 2 = 0$ e $21h - 6 = 0$, hanno la stessa soluzione: $g = \frac{2}{7}, h = \frac{2}{7}$.

Definizione 16

Due equazioni che, su uno stesso insieme, hanno tutte e sole le stesse soluzioni si dicono **equivalenti** in quell'insieme.

È evidente che due equazioni equivalenti in un certo insieme non debbono avere per forza lo stesso grado.

Esempio 26

Consideriamo le seguenti equazioni $5h - 7 = 0$ e $(z^4 + 1) \cdot (7 - 5z) = 0$, la prima di primo grado, la seconda di quinto grado. Si riconosce facilmente che nell'insieme dei numeri reali esse sono equivalenti avendo lo stesso insieme di soluzioni: $\left\{\frac{7}{5}\right\}$.

Quanto detto significa che, se due equazioni sono equivalenti in uno stesso insieme, esse, con opportune operazioni algebriche, possono essere ricondotte ad avere anche la stessa forma.

Esempio 27

- Le due equazioni $3i - 1 = 0$ e $4 - 12l = 0$, sono equivalenti in $\mathbb{Q}$, avendo la stessa unica soluzione $\frac{1}{3}$, vediamo allora di farle diventare uguali anche nella forma. Consideriamo la seconda equazione e, per la regola di semplificazione moltiplicativa, dividiamo tutto per (-4) ottenendo così l'equazione $-1 + 3l = 0$, che per la proprietà commutativa può scriversi anche $3l - 1 = 0$. A questo punto, essendo la scelta del nome dell'incognita del tutto arbitraria, possiamo ottenere l'uguaglianza formale convenendo di chiamare l'incognita l con il nuovo nome i.
- Le due equazioni $(4x - 3) \cdot (12x - 12) = 0$ e $(3c + 9) \cdot (c - 1) = 0$, non sono equivalenti nell'insieme $\mathbb{Q}$ perché hanno rispettivamente i seguenti insiemi di soluzioni: $\left\{\frac{3}{4}, 1\right\}$ e $\{-3, 1\}$. Risultano però equivalenti in $\mathbb{N}$, poiché in tale insieme le soluzioni diverse, $\frac{3}{4}$ e -3, sono entrambe non accettabili. Allora possiamo dividere la prima equazione per il termine $(4x - 3)$ e la seconda per il termine $(3c + 9)$, che in $\mathbb{N}$ non sono mai zero, ottenendo anche l'uguaglianza formale (con il successivo cambio di nome della variabile).

L'angolo storico

Questioni di uguaglianza sono presenti nella storia delle matematiche sin dai suoi albori.
Diversi problemi che portano alla risoluzione di equazioni di primo grado si trovano, per esempio, nel cosiddetto papiro di Rhind (dal nome del suo scopritore) o di Ahmes (dallo scriba che lo trascrisse), databile circa al 1700 a.C. Abbiamo a che fare, naturalmente, con equazioni espresse in forma retorica, non si fa nessun uso di simbologia, l'incognita ha però un nome particolare: *aha* che vuol dire mucchio; inoltre la loro risoluzione è lontana da quella che abbiamo suggerito. Il metodo più usato era quello della cosiddetta falsa posizione. Vediamo un esempio.
Trovare il valore del mucchio se esso e un suo settimo sono uguali a 19. L'equazione da risolvere, in notazione moderna è $x + \frac{1}{7}x = 19$. Ahmes procede nel seguente modo. Per evitare di lavorare con frazioni, verifica se 7 può essere la soluzione. Poiché $7 + \frac{1}{7} \cdot 7 = 8 < 19$, vuol dire che il valore cercato deve essere $\frac{19}{8} \cdot 7 = \frac{133}{8}$. Infatti, poiché raccogliendo si ha $x \cdot \left(1 + \frac{1}{7}\right) = 19$ e $7 \cdot \left(1 + \frac{1}{7}\right) = 8$, è ragionevole pensare che si

abbia: $1+\frac{1}{7}=\frac{19}{x}$ e $1+\frac{1}{7}=\frac{8}{7}\Rightarrow\frac{19}{x}=\frac{8}{7}\Rightarrow 8x=19\cdot 7\Rightarrow x=\frac{133}{8}$.

Vi è da segnalare un altro importante fatto, Ahmes fornisce la soluzione nel seguente modo, più complicato: $16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$. Infatti: $\frac{133}{8}=16+\frac{5}{8}=16+\frac{4}{8}+\frac{1}{8}=16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$.

In altri casi Ahmes fornisce solo la soluzione, senza giustificarla.

Anche i babilonesi si occupano della risoluzione di equazioni, però si sono trovati pochi riscontri relativamente a quelle di primo grado (lo storico Boyer ritiene che fossero considerate troppo semplici), molti di più per quelle di secondo o di terzo grado.

In seguito l'interesse dei matematici si rivolse alla risoluzione di equazioni di grado superiore al primo. Una data molto importante per quel che riguarda la storia dell'algebra è l'830, anno nel quale l'arabo Mohammed ibn Musa – al – Khowârizmi, scrive un libro relativo alle formule per risolvere equazioni intitolato *Al – jabr w'al muqâbala*. Il significato del titolo sta nei procedimenti utilizzati nella risoluzione delle equazioni, cioè trasportare da un membro all'altro e semplificare. Infatti *al – jabr* significa ristabilire (ancora nel XVI secolo in Italia e Spagna algebristi erano coloro che sistemavano le ossa), mentre *muqâbala* vuol dire semplificare.

In seguito si chiamò *Algebra* la disciplina matematica che tratta della risoluzione delle equazioni e più in generale della semplificazione di espressioni variabili, mentre *Algoritmo* (derivato da al–Khowârizmi) divenne il nome per descrivere un qualsiasi procedimento risolutivo.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Di che tipo è l'equazione $2x^2-\sqrt{3}x+1=0$? Quel che conta sono solo le variabili e non i loro coefficienti, pertanto possiamo dire che è un'equazione algebrica di II grado nella sola variabile x.

Dopo averle ridotte in forma semplificata, classificare le seguenti equazioni stabilendone il numero delle variabili e, per quelle algebriche, il grado

Livello 1

1. $(3x-1)\cdot(3x+1)-4x=9x^2+3y$; $(x+y)^3-(x^3-y^3)=1$ [I grado in x o y ; II grado in x o y]
2. $(3xy-2z)^2=(3xy-2z)\cdot(3xy+2z)$; $(x+y)^2-(x+y-1)^2=0$ [II in z, I in x o y; I in xo y]
3. $\dfrac{12tv^2-4v^2-3t+1}{3t-1}=0$; $(x^2-1)\cdot(x^2+1)=x^4-x$ [II in v ; I in x]
4. $49^x-x^7=(7^x)^2$; $2^x+1=2^x-x$; $49^x-x^7=(7^x-1)^2$ [VII in x ; I in x ; non algebrica]
5. $(a-1)\cdot(a^2+a+1)=(a+1)\cdot(a^2-a+1)+b^2$; $\dfrac{3a-1}{3a+1}+\dfrac{2b+3}{2b-3}=1$ [II in b ; fratta in a e b]
6. $\dfrac{x^2+x}{x-1}=\dfrac{x^2-x}{x+1}$; $a^b+b^a=1$; $3^{x^2-x+1}=1$ [Fratta in x; Non algebrica; Non algebrica]
7. $2^5+m^3-(m-1)^3=0$; $(x^2-x+1)^3=2$ [II in m; VI in x]
8. $p^7+7p^6-p^5-(p^2-1)\cdot(p^3+1)\cdot(p^2+2)=0$; $[(x^2-1)^3]^4=3$ [VI in p; XXIV in x]
9. $\dfrac{2hk+3k^2}{4h^2-9k^2}=1$; $\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^2=x$ [Fratta in h e k; Fratta in x]

Lavoriamo insieme

Risolvere l'equazione $\dfrac{1}{18}x-\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}-x\right)+\dfrac{3}{4}=\left(\dfrac{1}{3}-x\right)\cdot\dfrac{3}{2}-2x+1$.

Cominciamo con lo svolgere le moltiplicazioni indicate: $\dfrac{1}{18}x-\dfrac{2}{9}+\dfrac{1}{3}x+\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}x-2x+1$, determiniamo adesso il minimo comune denominatore: $\dfrac{2x-8+12x+27}{36}=\dfrac{18-54x-72x+36}{36}$, sommiamo i termini simili in ciascun membro ed eliminiamo il denominatore comune: $14x+19=54-126x$. Trasportiamo i termini con la x al primo membro e i termini noti al secondo: $14x+126x=54-19\Rightarrow 140x=35$, infine dividiamo ambo i membri per 140, coefficiente dell'incognita, ecco la soluzione: $x=\dfrac{35}{140}\Rightarrow x=\dfrac{1}{4}$.

Risolvere le seguenti equazioni nell'insieme indicato, o, se non specificato, in $\mathbb{R}$

Livello 1

10. $3x-2=0$ in $\mathbb{Q}$; $8y+7=1$ in $\mathbb{N}$; $12z-4=0$ in $\mathbb{Z}$ [2/3; ∅; ∅]
11. $6u=-5$; $6t+4=3t-2$ in $\mathbb{Q}$; $13b+1=12b-2$ in $\mathbb{N}$ [–5/6; –2; ∅]
12. $3a-2=0$ in $\mathbb{Z}$; $4x+1=2x-3$ in $\mathbb{Z}$; $16c+4c-1=3c$ in $\mathbb{N}$ [∅;–1; ∅]
13. $\dfrac{1}{2}b-3=0$ in $\mathbb{N}$; $\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{3}x=0$ in $\mathbb{Q}$; $\dfrac{2}{3}y-1=\dfrac{1}{4}$ [6; 0; 15/8]
14. $\dfrac{3}{2}c=\dfrac{4}{3}$ in $\mathbb{Q}$; $\dfrac{3}{2}m+\dfrac{4}{3}m-\dfrac{1}{4}=1$; $\dfrac{7}{4}n+5\cdot\dfrac{n}{2}-1=0$ [2; 15/34; 4/17]
15. $-\dfrac{3}{8}x-\dfrac{7}{6}=0$; $\dfrac{4}{5}+\dfrac{1}{3}y-1=0$; $\dfrac{3}{8}x-2\cdot\dfrac{x}{5}=0$ [–28/9; 3/5; 0]
16. $3x+1=-3$; $8y+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$; $3-x+\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{3}$ [–4/3; 0; 43/12]

17. $7m-4=-2m+1;\ 4q+3-\frac{1}{2}=0;\ -\frac{1}{4}p+\frac{3}{2}=-\frac{1}{3}$ [5/9 ; –5/8 ; 22/3]

18. $1-4n=3-2n$ in $\mathbb{N}$; $2x-3=3x-2;\ 4-5z=5z-4$ [∅ ; 1; 4/5]

19. $2x-3=5x+1;\ x+1=-3\cdot(x-1);\ 2x+7=-7\cdot(x-4)+1$ [1 ; 1/2 : 22/9]

20. $\frac{3}{2}c-\frac{5}{3}c-\frac{7}{6}c=\frac{c}{4}+1$ in $\mathbb{Z}$; $\frac{3d-1}{3}-\frac{4d+1}{2}=\frac{5d-2}{5}+1$ in $\mathbb{Q}^+=\{q\in\mathbb{Q}:q<0\}$ [∅; ∅]

21. $\frac{6x-1}{4}-\frac{x-2}{3}-\frac{5x-1}{6}=\frac{3-2x}{2}+\frac{3x-2}{8}$ in $\mathbb{Q}^-=\{q\in\mathbb{Q}:q<0\}$ [∅]

22. $2-3\cdot(x-1)=4\cdot(x+2)-3;\ \frac{2y-5}{4}+\frac{3y-5}{6}-\frac{7y-1}{12}=\frac{14-y}{3}+\frac{2y-1}{2}$ [0; –74/3]

23. $\frac{3z+1}{6}+\frac{3z-2}{5}=\frac{4z-1}{10}+\frac{2-6z}{3}+\frac{8z+3}{2}$ in $\mathbb{Q}^-$; $\frac{2q-1}{5}+\frac{3q-2}{4}-\frac{5q-2}{10}-\frac{2-5q}{2}-\frac{3q-5}{8}=0$ [–23/13; 35/111]

24. $\frac{2w-1}{3}+\frac{5w-2}{4}-\frac{w-1}{6}=\frac{1-w}{9}-\frac{w-3}{12}$ in $\mathbb{Z}$; $\frac{s-3}{2}+\frac{4s-1}{3}-\frac{3s-4}{12}=\frac{4-2s}{4}+\frac{7s-1}{8}$ in $\mathbb{R}^-$ [37/70; ∅]

Livello 2

25. $2a\cdot(3-a)+a\cdot\left(2a+\frac{1}{2}\right)=3\cdot(a-1)-\frac{1}{3}a$ [–18/23]

26. $3y-4=3y+1;\ 4d-5=2d\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right);\ 3g+\frac{1}{2}\cdot(1-g)=-\frac{1}{2}$ [∅; 5/3; –2/5]

27. $(x-1)\cdot(y-2)-xy=3\cdot(x+1)-y$ in $\mathbb{Z}$ e nella variabile x [∅]

28. $(m+1)\cdot(m^2-m+1)-3\cdot(m^2+m-4)=(m-1)^3$ in $\mathbb{Q}$ [7/3]

29. $(a+b-c)\cdot(a-b+c)-4\cdot(c+3)=(a+b)\cdot(a-b)+2c\cdot\left(b-\frac{1}{2}c\right)$ [$c=-3$]

30. $(3a-1)\cdot(3a+1)-2a+3=(3a+5)^2$ [–23/32]

31. $(2b-3)^3-(b+1)\cdot(8b^2+36b-2)=4b\cdot(3-20b)$ in $\mathbb{Q}$ [25/8]

32. $(e+2)\cdot(f-3)-(e+3)\cdot(f-2)=3e+1-f$ in $\mathbb{Q}$ [$e=-1/4$]

33. $(b-1)\cdot(b-2)-b+2=b^2-3+2\cdot(b-1)-3b$ [3]

34. $(c-1)^3+3c\cdot(c-1)-c+2=2-3c+c^3-2c+1$ [1/2]

35. $(d-2)\cdot(d^2-d+1)+d\cdot(d-1)=(d-1)^3-2d+1+d^2$ [2]

36. $(4x-1)^2\cdot(3x-2)-(2x-1)^3=11\cdot(3-4x^2+3x^3)+7x\cdot(x-1)\cdot(x+1)-2x+3$ [37/22]

37. $(u+1)\cdot(u^2-u+1)-2u-6=u\cdot(u+3)\cdot(u-5)+2u^2$ in $\mathbb{Q}$ [5/13]

38. $(v^2-v+1)\cdot(v+1)-(v-1)\cdot(v^2+2v-1)+3=v\cdot(2-v)-1$ in $\mathbb{N}$ [∅]

39. $(2x-1)^2+(3x-2)^2-x+1=(5x-1)\cdot(3x+4)-2x\cdot(x-1)-36x+4$ [∅]

40. $(2x-5)^2-(x-1)\cdot(2x+3)-x+1+3\cdot(4x^2+7)=(3x-1)^2+(2x-1)\cdot(3x+2)-x^2+1-17x+50$ [Identità]

41. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x\cdot\left(x-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{12}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{2}{3}\cdot\left(x^2-1\right)$ [10/17]

42. $\left(2y-\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{3}{2}y+1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}y+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}y-1\right)^2+\frac{1}{4}y\cdot\left(5y-\frac{1}{3}\right)+\frac{277}{72}y$ [–76/325]

43. $\frac{\left(z-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(z+\frac{1}{2}\right)}{4}-\frac{\left(z+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}z-1\right)}{3}=\frac{\left(\frac{1}{2}z-1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}z+1\right)}{2}+1$ [31/17]

44. $\frac{1}{2}m-\frac{1}{12}\cdot(4m+2)\cdot(m-1)+\frac{1}{6}\cdot(2m+1)=\frac{1}{12}m\cdot(5-4m)+\frac{1}{4}$ [–1/7]

45. $\left(t-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(t+\frac{1}{2}\right)-3t\cdot\left(t+\frac{1}{4}\right)=5t-(2t+1)\cdot\left(t-\frac{1}{5}\right)$ in $\mathbb{Q}$ [–9/103]

L'angolo delle correzioni

Correggere gli errori commessi in ciascuna delle risoluzioni delle seguenti equazioni.

1. $2s-3=4+3s \Rightarrow 2s+3s=4-3 \Rightarrow 5s=1 \Rightarrow s=\frac{1}{5}$
2. $5t+3t-1=3t+2 \Rightarrow 8t^2=5t+1 \Rightarrow 3t=1 \Rightarrow t=\frac{1}{3}$
3. $3\cdot(x-1)+5\cdot(x-1)=3x-2 \Rightarrow 3x-1+5x-1=3x-2 \Rightarrow 8x-3x=-2+2 \Rightarrow 5x=0 \Rightarrow \Rightarrow x=-5$
4. $8\cdot(y-1)-2\cdot(y+3)=6y-4 \Rightarrow 8y-8-2y+6-6y=-4 \Rightarrow 0=-4+2 \Rightarrow y=-2$
5. $3z-1+4\cdot(z-2)=z-9 \Rightarrow 3z+4z-z=-9+1+8 \Rightarrow 6z=0 \Rightarrow z=-\frac{1}{6}$
6. $\frac{4u-1}{2}+\frac{3u+2}{3}=u-1 \Rightarrow \frac{3(4u-1)+2(3u+2)}{6}=u-1 \Rightarrow 12u-3+6u+4-u=-1 \Rightarrow 17u=-2 \Rightarrow u=-\frac{2}{17}.$
7. $7\cdot(h-1)+3\cdot(h+4)=2h \Rightarrow 7h-7+3h+12-2h=0 \Rightarrow 8h=-5 \Rightarrow h=\frac{-5}{-8} \Rightarrow h=\frac{5}{8}$
8. $14k-1=12k+5 \Rightarrow 14k-12k=5+1 \Rightarrow 2k=6 \Rightarrow k=6-2 \Rightarrow k=4.$

Lavoriamo insieme

Vogliamo determinare il valore del parametro h in modo che la divisione $(7hx^3+5x^2-hx-4):(x+1)$ risulti esatta, cioè abbia resto 0.
Per il cosiddetto teorema di Ruffini o del resto, il resto della divisione detta si trova sostituendo –1, quindi è: $7h\cdot(-1)^3+5\cdot(-1)^2-h\cdot(-1)-4=-7h+5+h-4=-6h+1$.
La divisione sarà esatta quando il resto sarà zero e quindi dobbiamo determinare il valore di h affinché l'espressione $-6h+1$ valga zero: $-6h+1=0$; pertanto la divisione sarà esatta solo se $h=\frac{1}{6}$.

Nelle seguenti divisioni determinare il valore del parametro h in modo che il resto r sia quello indicato

Livello 1

88. $(3a^3-14a^2+16a+h):(a-1)$, $r=3$; $(6b^4-7b^3+hb^2+11b-5):(b-2)$; $r=1$ $[h=-2;\ h=-14]$
89. $(7c^6+hc^5-13c^4+hc^3+3c^2+2c):(c+1)$, $r=-1$; $(x^4-hx^2+2x-h):\left(x+\frac{1}{3}\right)$, $r=\frac{37}{81}$ $[h=-2;\ h=-1]$
90. $(3d^5+hd^4-d^3+d^2-hd-5):(d-3)$, $r=-2$; $(e^5-he^4-e^3+he^2+e+4):(e-3)$, $r=7$ $\left[h=-\frac{118}{13};h=\frac{27}{8}\right]$
91. $(m^4-m^2+h):\left(m-\frac{1}{2}\right)$, $r=\frac{13}{16}$; $(hx^3+x^2-x+1):(x-2)$, $r=-13$ $[h=1;\ h=-2]$
92. $(x^4-x^2+hx-2):(x-3)$, $r=0$; $(3x^5+hx^3-x+1):(x+1)$, $r=2$ $\left[h=-\frac{70}{3};h=-3\right]$
93. $(hx^3-hx^2+2x-3):(x+2)$, $r=29$; $(x^4-hx^3+hx^2+3x-1):\left(x-\frac{1}{2}\right)$, $r=\frac{9}{16}$ $[h=-3;\ h=0]$
94. $(x^5-x^3+x-h):(x-1)$, $r=7$; $\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{4}x^2-hx+\frac{1}{2}h\right):\left(x+\frac{1}{2}\right)$, $r=2$ $\left[h=-6;h=\frac{17}{8}\right]$
95. $\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-hx+h\right):(x-1)$, $r=\frac{1}{2}$; $(hx^3-hx^2+hx+3):\left(x+\frac{2}{3}\right)$, $r=\frac{5}{27}$ $[\varnothing;\ h=2]$

Livello 2

96. $(m^4+hm^2+1):(m^2-2)$, $r=3$; $(n^6+n^3+h):\left(n^3-\frac{1}{4}\right)$, $r=-\frac{27}{16}$ $[h=-1;\ h=-2]$
97. $(p^8-2p^6+hp^4-p^2-5):(p^2-1)$, $r=-4$; $(hq^{12}-2q^9+3q^6-4q^3+h):(q^3-2)$, $r=5$ $[h=3;\ h=1]$

98. $(hx^3 + x^2 - 2x + 1) : (2x - 1)$, $r = \frac{5}{8}$; $(x^4 - 9hx^2 + 6hx + 2) : (3x + 2)$, $r = \frac{178}{81}$ $[h = 3; h = 0]$

99. $(-2x^3 + hx - h) : (2x + 1)$, $r = \frac{1}{4}$; $(x^3 - 3hx^2 + 5hx - 1) : (3x - 5)$, $r = \frac{98}{27}$ $[h = 0; \forall h]$

100. $(2x^7 - hx^5 + hx^3 - hx + 1) : (3x - 1), r = \frac{1}{3}$; $\left(\frac{1}{2}hx^3 - \frac{1}{3}hx^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\right) : (-2x + 1), r = 0$ $\left[h = \frac{20}{9}; h = 0\right]$

101. $\left(\frac{1}{2}hx^4 - \frac{1}{2}hx^2 + 2\right) : (-x + 3)$, $r = 2$; $\left(\frac{1}{4}hx^3 - \frac{1}{2}hx + h\right) : (-x + 2)$, $r = -1$ $\left[h = 0; h = -\frac{1}{2}\right]$

102. $(hx^6 - 3x^3 + 1) : (2x^3 - 1)$, $r = 1$; $(2x^8 - hx^6 + 2) : (-2x^2 + 1)$, $r = 2$ $[h = 6; h = 1]$

Lavoriamo insieme

Risolvere l'equazione $x^4 - 12x^3 + 51x^2 - 92x + 60 = 0$.

Abbiamo un'equazione di quarto grado di cui cerchiamo gli zeri utilizzando il teorema di Ruffini. Possibili candidati sono i divisori di 60: ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 5, ± 6, ± 12, ± 15, ± 20, ± 30, ± 60.

Proviamo con ± 1: $1^4 - 12 \cdot 1^3 + 51 \cdot 1^2 - 92 \cdot 1 + 60 = 1 - 12 + 51 - 92 + 60 \neq 0$ e $(-1)^4 - 12 \cdot (-1)^3 + 51 \cdot (-1)^2 - 92 \cdot (-1) + 60 = 1 + 12 + 51 + 92 + 60 \neq 0$. Nessuno dei due valori va bene. Anzi l'ultimo esempio ci mostra che è inutile provare con zeri negativi, perché avremo sempre la somma di termini positivi che perciò non potrà mai essere zero. Allora proviamo con $x = 2$.

$2^4 - 12 \cdot 2^3 + 51 \cdot 2^2 - 92 \cdot 2 + 60 = 16 - 12 \cdot 8 + 51 \cdot 4 - 184 + 60 = 16 - 96 + 204 - 184 + 60 = 0$.

Quindi 2 è una soluzione dell'equazione. Abbassiamo di grado mediante la regola di Ruffini.

	1	-12	51	-92	60
2		2	-20	62	-60
	1	-10	31	-30	0

Otteniamo così la soluzione $x = 2$ e la nuova equazione: $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$. Cerchiamo un altro zero. Tentiamo con $x = 3$: $3^3 - 10 \cdot 3^2 + 31 \cdot 3 - 30 = 27 - 10 \cdot 9 + 93 - 30 = 27 - 90 + 93 - 30 = 0$. Quindi $x = 3$ è ancora una soluzione. Abbassiamo di grado ancora una volta.

	1	-10	31	-30
3		3	-21	30
	1	-7	10	0

L'equazione è adesso divenuta di secondo grado: $x^2 - 7x + 10 = 0$. Questo polinomio può scomporsi come trinomio di secondo grado, determinando facilmente che i numeri la cui somma è – 7 e il prodotto fa 10 sono – 2 e – 5. Quindi scriviamo: $(x - 2) \cdot (x - 5) = 0$. Applicando il principio di annullamento del prodotto determiniamo le ultime due soluzioni: $x = 2$ (trovata per la seconda volta) e $x = 5$. Possiamo quindi dire che l'insieme delle soluzioni dell'equazione di partenza è {2, 3, 5}.

Utilizzando le opportune regole di scomposizione dei polinomi in fattori e di seguito il principio di annullamento del prodotto, risolvere le seguenti equazioni di grado superiore al primo, nell'insieme indicato, o, se non specificato, in $\mathbb{R}$

Livello 2

103. $(2x - 3) \cdot (3x - 1) = 0$; $(s - 3) \cdot (s + 3) = 0$ in $\mathbb{N}$; $(4m + 1) \cdot (3m - 2) = 0$

$\left[x \in \left\{\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right\}; s = 3; m \in \left\{-\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right\}\right]$

104. $(5q - 4) \cdot (6 - 3q) \cdot (2q + 1) = 0$; $(7r - 2)^3 \cdot (5r - 1)^2 = 0$ in $\mathbb{Q}$; $4x^2 - 9 = 0$

$\left[q \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, 2\right\}; r \in \left\{\frac{2}{7}, \frac{1}{5}\right\}; x \in \left\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}\right]$

105. $8m^3 - 12m^2 + 6m - 1 = 0$; $t^2 - 7t - 8 = 0$ in $\mathbb{Z}$; $6y^2 + y - 15 = 0$ in $\mathbb{Z}$ $\left[m = \frac{1}{2}; t \in \{-1, 8\}; \varnothing\right]$

106. $81y^2 - 1 = 0$; $13m^4 + 12 = 0$; $625a^4 - 256 = 0$; $4b^2 + 4b + 1 = 0$ $\left[y \in \left\{-\frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right\}; \varnothing; a \in \left\{-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right\}; b = -\frac{1}{2}\right]$

Livello 3

107. $6x^2 - 7x + 2 = 0.$; $-15y^2 + 11y - 2 = 0$; $-7a^2 + 10a - 3 = 0$ $\left[x \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right\}; y \in \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right\}; a \in \left\{\frac{3}{7}, 1\right\}\right]$

108. $(3u^2 + 5) \cdot (4u^2 - 1) = 0$ in $\mathbb{Q}^+$; $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ in $\mathbb{N}$; $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$ in $\mathbb{Z}$

$\left[u = \frac{1}{2}; x \in \{1, 2, 3\}; m \in \{-3, -1\}\right]$

109. $x^3 - 4x^2 - 11x + 30 = 0$; $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$; $2m^4 - m^3 - 11m^2 + 4m + 12 = 0$

$\left[x \in \{-3, 2, 5\}; x \in \{-3, -2, -1, 2\}; m \in \left\{\frac{3}{2}, 2\right\}\right]$

110. $(y^2 - 5y + 6) \cdot (y^2 - 7y + 10) = 0$; $(z^4 - 1) \cdot (z^2 - 9) = 0$ in $\mathbb{Z}^-$; $\left(2t + \sqrt{5}\right) \cdot (3t - 1) = 0$ in $\mathbb{Q}$

$\left[y \in \{2, 3, 5\}; z\{-3, -1\}; t = \frac{1}{3}\right]$

111. $(5g - 2) \cdot (g + 1)^2 = 0$ in $\mathbb{Z}$; $(3n^2 + 4n + 1) \cdot \left(2n - \sqrt{3}\right) \cdot (4n + 3) = 0$ $\left[g = -1; n \in \left\{-\frac{3}{4}, -\frac{1}{3}\right\}\right]$

112. $(v^2 - 1) \cdot (v^2 + 2) \cdot (v^3 + 3v - 3v^2 - 1) = 0$; $(9x^2 - 4)^5 \cdot (x^2 - 2x - 35)^4 = 0$ $\left[v \in \{-1, 1\}; x \in \left\{-5, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 7\right\}\right]$

Lavoriamo insieme

Risolvere l'equazione $(x + 4) \cdot (x - 2) = 7$ in $\mathbb{Z}$.
Dato che vogliamo solo soluzioni intere, cerchiamo intanto due numeri interi il cui prodotto sia 7, il che può accadere solo in due modi e cioè $1 \cdot 7$ oppure $(-1) \cdot (-7)$. In effetti data la validità della proprietà commutativa, i casi possibili sono i seguenti quattro: $x + 4 = 1 \wedge x - 2 = 7 \Rightarrow x = -3 \wedge x = 9$, che non va bene, dato che ovviamente i due fattori devono assumere i valori indicati per lo stesso valore di x. Potrebbe essere anche: $x + 4 = -1 \wedge x - 2 = -7; \Rightarrow x = -5 \wedge x = -5$. In questo caso la soluzione va bene, dato che è la stessa per entrambi. Abbiamo poi: $x + 4 = -7 \wedge x - 2 = -1 \Rightarrow x = -11 \wedge x = 1$, che non va bene. E infine: $x + 4 = 7 \wedge x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3 \wedge x = 3$, che invece è accettabile.
Quindi possiamo dire che le uniche soluzioni intere dell'equazione data sono $x = -5$, $x = 3$.

Risolvere le seguenti equazioni in $\mathbb{Z}$

Livello 3

113. $(x + 3) \cdot (x - 5) = 2$; $(x + 1) \cdot (x - 8) = -18$; $(x - 4) \cdot (x - 1) = -2$ $[\varnothing; x = 2 \vee x = 5; x = 2 \vee x = 3]$

114. $(x + 1) \cdot (x + 3) = 24$; $(x + 6) \cdot (x - 8) = -40$; $(a - 1) \cdot (a + 6) = 18$

$[x = -7 \vee x = 3; x = -2 \vee x = 4; a = -8 \vee a = 3]$

115. $(2m + 3) \cdot (m - 4) = 15$; $(4n + 1) \cdot (2n + 1) = 3$; $(3p - 2) \cdot (7p - 11) \cdot (p + 2) = 48$

$[\varnothing; n = -1; p = 2]$

116. $(2q + 5) \cdot (4q + 5) \cdot (13q + 12) = 3$; $(2t + 5) \cdot (3t + 1) \cdot (4t - 5) = -136$ $[\varnothing; t = -3]$

Lavoriamo insieme

Le equazioni $(x + 1) \cdot (x - 2) = 0$ e $(t + 5) \cdot (t - 2) = 0$ non sono equivalenti in $\mathbb{Z}$, dato che hanno rispettivamente le soluzioni $\{-1; 2\}$ e $\{-5; 2\}$. Sono invece equivalenti in $\mathbb{N}$, dato che in tale insieme hanno entrambe l'unica soluzione 2.

Determinare fra le seguenti coppie di equazioni quali sono equivalenti nell'insieme indicato e, in caso affermativo ricondurle alla stessa forma

Livello 2

117. $7x - 2 = 0$ e $7 - 2u = 0$ in $\mathbb{R}$; $v^2 + 3v - 4 = 0$ e $t^2 + 2t - 8 = 0$ in $\mathbb{Z}$ [No; No]

118. $v^2 + 3v - 4 = 0$ e $t^2 + 2t - 8 = 0$ in $\mathbb{N}$; $(2f - 1) \cdot (f + \sqrt{2}) = 0$ e $(3 - 6u) \cdot (u - \sqrt{2}) = 0$ in $\mathbb{R}$ [No; No]
119. $(2f - 1) \cdot \left(f + \sqrt{2}\right) = 0$ e $(3 - 6u) \cdot \left(u - \sqrt{2}\right) = 0$ in $\mathbb{Q}$ [Sì]
120. $t^2 - 2t + 1 = 0$ e $x^2 - 3x + 2 = 0$ in $A = \{a \in \mathbb{Z} : a < 2\}$ [Sì]
121. $t^2 - 2t + 1 = 0$ e $x^2 - 3x + 2 = 0$ in $\mathbb{Z}$; $(v^2 - 4) \cdot (v^2 - 9) = 0$ e $(y^2 - 5y + 6) \cdot \left(y + \sqrt{5}\right) = 0$ in $\mathbb{R}$ [No; No]
122. $(v^2 - 4) \cdot (v^2 - 9) = 0$ e $(y^2 - 5y + 6) \cdot \left(y + \sqrt{5}\right) = 0$ in $\mathbb{Z}$ [No]
123. $(v^2 - 4) \cdot (v^2 - 9) = 0$ e $(y^2 - 5y + 6) \cdot \left(y + \sqrt{5}\right) = 0$ in $\mathbb{N}$ [Sì]

Livello 3

124. Se verifichiamo che un'equazione di I grado, ha due soluzioni distinte, possiamo dire che è un'identità? Giustificare la risposta. [Sì]
125. Affinché un'equazione di IV grado sia sicuramente un'identità, per quanti valori distinti, minimo, dobbiamo verificare la validità dell'uguaglianza? Giustificare la risposta. [5]

Equazioni fratte

Consideriamo subito un esempio.

Esempio 28

Vogliamo risolvere la seguente equazione: $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}=2$. Cominceremo a procedere come siamo abituati a fare con le frazioni algebriche, ossia determinando il minimo comune denominatore e riconducendo il tutto a un'unica frazione:

$$\frac{x-1-(x+1)}{(x+1)\cdot(x-1)}=\frac{2\cdot(x+1)\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)}\Rightarrow\frac{x-1-x-1}{(x+1)\cdot(x-1)}=\frac{2\cdot(x^2-1)}{(x+1)\cdot(x-1)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{-2}{(x+1)\cdot(x-1)}=\frac{2x^2-2}{(x+1)\cdot(x-1)}\Rightarrow\frac{-2-2x^2+2}{(x+1)\cdot(x-1)}=0;\Rightarrow\frac{-2x^2}{(x+1)\cdot(x-1)}=0.$$

Il problema è adesso il seguente: c*osa dobbiamo fare del denominatore?*
Una frazione si annulla solo se il suo numeratore diviene zero, quindi il denominatore non dovrebbe avere alcun valore ai fini della ricerca della soluzione dell'equazione. Però esso è presente e quindi deve tenersene debito conto. Cosa fare allora?
Se pensiamo di eliminare il denominatore con la regola di semplificazione moltiplicativa, ci troviamo in imbarazzo non sapendo se il termine $(x^2 – 1)$ sia o no nullo. Dobbiamo quindi premunirci risolvendo l'equazione $(x^2 – 1) = 0 \Rightarrow (x – 1) \cdot (x + 1) = 0$, il cui insieme di soluzioni è $\{–1, 1\}$. A questo punto eliminiamo il denominatore comune e risolviamo l'equazione $– 2x^2 = 0$, la cui unica soluzione è $x = 0$, che è accettabile perché la soluzione ottenuta non coincide con alcuno dei valori che annullavano il denominatore.

Cosa facciamo invece se i valori che annullano il denominatore "risolvono" l'equazione? Vediamo il seguente esempio.

Esempio 29

Risolvere l'equazione fratta: $\frac{x}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x^2-1}$. Abbiamo $\frac{x}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x^2-1}\Rightarrow\frac{x(x+1)+x-1}{x^2-1}=\frac{2}{x^2-1}$ $\Rightarrow\frac{x^2+x+x-1-2}{x^2-1}=0\Rightarrow\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}=0$. Risolviamo adesso l'equazione $x^2 – 1 = 0$ e otteniamo l'insieme di soluzioni $\{–1, 1\}$. Eliminiamo il denominatore e continuiamo: $x^2 + 2x – 3 = 0 \Rightarrow (x – 1) \cdot (x + 3) = 0$. L'insieme delle soluzioni è perciò $\{–3, 1\}$.
Stavolta pensiamo che ci sia qualcosa che non funzioni, infatti una delle soluzioni ottenute coincide con uno dei valori che annulla il denominatore. Ciò significa che, quando sostituiamo i due valori soluzione, nel caso di $x = –3$ otteniamo l'identità seguente: $\frac{-3}{-4}+\frac{1}{-2}=\frac{2}{9-1}\Rightarrow\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{2}{8}\Rightarrow\frac{3-2}{4}=\frac{1}{4}$, mentre sostituendo a x il valore 1 otteniamo la scritta priva di significato: $\frac{1}{0}+\frac{1}{2}=\frac{2}{0}$. Diciamo allora che la soluzione $x = 1$ non è **accettabile**.

Regola 3 (di risoluzione delle equazioni fratte)

Per risolvere una equazione fratta

- si consideri l'insieme D di tutti i valori che annullano il minimo comune denominatore (tale insieme può essere vuoto);
- si risolva l'equazione ottenuta eliminando il denominatore comune le cui soluzioni si immettano in un insieme E;
- le soluzioni dell'equazione sono quelle dell'insieme $E \setminus D$ (tale insieme può essere vuoto).

Definizione 17

Data una equazione fratta, gli eventuali elementi di $E \cap D$, con E e D definiti nella regola 3, si diranno **soluzioni non accettabili** dell'equazione.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Risolvere l'equazione fratta: $\frac{2e+1}{e-5}-\frac{e-2}{e+2}=\frac{19e-18}{e^2-3e-10}$. Determiniamo il minimo comune denominatore.

Si ha: $e^2 - 3e - 10 = (e- 5) \cdot (e + 2)$, quindi abbiamo: $\frac{(2e+1)\cdot(e+2)-(e-2)\cdot(e-5)}{(e-5)\cdot(e+2)}=\frac{19e-18}{(e-5)\cdot(e+2)}$.

Imponiamo la condizione che il denominatore sia diverso da zero: $(e - 5) \cdot (e + 2) \neq 0 \Rightarrow e - 5 \neq 0 \wedge e + 2 \neq 0 \Rightarrow e \neq 5 \wedge e \neq -2$. Adesso possiamo eliminare il denominatore comune e continuare a risolvere l'equazione: $2e^2 + 4e + e + 2 - (e^2 - 5e - 2e + 10) = 19e - 18 \Rightarrow 2e^2 + 5e + 2 - (e^2 - 7e + 10) - 19e + 18 = 0 \Rightarrow 2e^2 + 5e + 2 - e^2 + 7e - 10 - 19e + 18 = 0 \Rightarrow e^2 - 7e + 10 = 0$.

Abbiamo così ottenuto un'equazione di secondo grado, la cui espressione è un trinomio di secondo grado che proviamo a scomporre nel prodotto di due fattori di primo grado. Notiamo che i numeri la cui somma è – 7 e il prodotto è + 10 sono –2 e – 5. Quindi scriviamo: $(e - 2) \cdot (e - 5) = 0 \Rightarrow e - 2 = 0 \wedge e - 5 = 0 \Rightarrow e = 2 \wedge e = 5$. Confrontando questi due valori con gli elementi dell'insieme delle soluzioni non accettabili: {–2, 5}, concludiamo che l'equazione ha come unica soluzione $e = 2$.

Risolvere le seguenti equazioni fratte in $\mathbb{R}$, distinguendo le soluzioni non accettabili.
Attenzione nelle scomposizioni delle somme o differenze di cubi (p. e. $x^3 + 1$ e $x^3 - 1$), il fattore di secondo grado (p. e. $x^2 - x + 1$ e $x^2 + x + 1$) non si annulla mai in $\mathbb{R}$

Livello 1

1. $\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+1}=0;\ \frac{7}{y-2}+\frac{5}{y+2}=0;\ 3+\frac{1}{z}=\frac{3z}{z+3}$ $\left[x=3;y=-\frac{1}{3};z=-\frac{3}{10}\right]$
2. $\frac{3m-1}{3m+1}=\frac{3m+1}{3m-1};\ \frac{2x-1}{4x-3}=\frac{x+1}{2x-3};\ \frac{6y-1}{3y+4}-\frac{2y+1}{y-3}=0$ $\left[m=0;x=\frac{2}{3};y=-\frac{1}{30}\right]$
3. $\frac{4}{m^2-1}-\frac{5}{m-1}=-\frac{1}{m+1};\frac{2z+3}{3z-2}-\frac{z-3}{3z+2}=\frac{3z^2}{9z^2-4};\ \frac{1}{a+1}-\frac{2}{a-1}+\frac{3a}{a^2-1}=0$ $\left[m=-\frac{1}{2};z=0;a=\frac{3}{2}\right]$

Livello 2

4. $\frac{p}{p-1}-\frac{2p-1}{p+3}=\frac{(p-2)\cdot(3-p)+2}{p^2+2p-3};\ \frac{3m}{2m+5}+\frac{m-1}{2m-5}=\frac{8m^2-3m+1}{4m^2-25}$ $\left[\varnothing;m=-\frac{2}{3}\right]$
5. $\frac{q+1}{2q-3}-\frac{2q-3}{q+1}=\frac{3q\cdot(1-q)}{2q^2-q-3};\ \frac{3t+1}{2t-7}-\frac{2t^2-1}{4t^2-28t+49}=1$ $\left[q=\frac{8}{11};t=\frac{55}{9}\right]$
6. $\frac{m+2}{m-1}=\frac{2m}{2m+1}+\frac{6m+1}{2m^2-m-1};\ \frac{5n}{n-2}-\frac{n-3}{n+2}=\frac{4n^2-n+1}{n^2-4}$ $\left[m=1;n=\frac{7}{16}\right]$
7. $\frac{1}{p^2-1}+\frac{2}{p-1}-\frac{3}{p+1}=0;\ \frac{z^2}{z^3-1}-\frac{2}{z^2+z+1}-\frac{1}{z-1}=0$ $\left[p=6;z=\frac{1}{3}\right]$
8. $\frac{3q^2-q+1}{q^2-9}-\frac{q-1}{q-3}-\frac{2q+3}{q+3}=0;\ \frac{5w^2-w+1}{w^3+1}+\frac{4w+1}{w+1}=\frac{4w^2-2w-1}{w^2-w+1}$ $\left[\varnothing;w=-\frac{3}{5}\right]$
9. $\frac{x-5}{x^2-5x+6}=\frac{x+1}{x^2-7x+10};\ \frac{1}{x^3-8}-\frac{1}{x^3+8}=0$ $\left[x=\frac{7}{2};\varnothing\right]$
10. $\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}=\frac{3}{10x^2+x-2};\ \frac{x^2}{x^2-4}-\frac{x^2}{x^2+4}=\frac{8x^2-7x+1}{x^4-16}$ $\left[x=\frac{1}{4};x=\frac{1}{7}\right]$
11. $\frac{5x-3}{5x-2}-\frac{2x-1}{2x+1}+\frac{8}{10x^2+x-2}=0;\ \frac{1}{m^2-5m+6}-\frac{1}{m^2-7m+10}=0$ $\left[x=-\frac{3}{8};\varnothing\right]$

12. $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=\frac{x-3}{x^2-1}-\frac{2}{x^2-2x+1}$; $\frac{x+1}{x^2-6x+8}-\frac{x-4}{x^2+2x-8}=0$ $\left[x=\frac{1}{3};x=\frac{12}{13}\right]$

13. $\frac{1}{n^3+1}+\frac{1}{n+1}=\frac{2}{n^2-n+1}$; $\frac{2m}{m-1}+\frac{m-1}{m+1}=\frac{3m+4}{m-2}-\frac{10m^2}{m^3-2m^2-m+2}$ $\left[n=0\vee n=3;m=-\frac{1}{2}\right]$

14. $\frac{3k-1}{k-2}+\frac{5k+2}{k+2}-\frac{7k^2+k-10}{k^2-4}=0$; $\frac{4}{x^2-4}-\frac{3}{x^2-4x+4}=\frac{1}{x^2+4x+4}$ $[k=2\,;x=-4]$

15. $\frac{2y-1}{y^2-1}-\frac{3y-1}{y^2+y-2}-\frac{2y-3}{y^2+3y+2}=0$; $\frac{1}{2z-1}-\frac{8z-3}{(2z-1)^3}=\frac{2z}{(2z-1)^2}$ $\left[\varnothing;z=\frac{2}{5}\right]$

16. $\frac{5n+1}{2n+3}-\frac{4n+3}{3n-1}=\frac{n^2-27n-7}{6n^2+7n-3}$; $\frac{1}{3x^2-x-2}-\frac{2}{2x^2+x-3}+\frac{3}{6x^2+13x+6}=0$ $[\varnothing;x=-4]$

Livello 3

17. $\frac{3b^2+1}{b^2-1}+\frac{4b}{b^2-6b+5}-\frac{1}{b^2-4b-5}+5+\frac{24}{b-5}+\frac{7b+2}{(b^2-1)\cdot(b-5)}=0$ $\left[b=\frac{1}{2}\right]$

18. $\frac{y+5}{2y-3}-\frac{y-3}{y+5}+\frac{y^2}{y^2+10y+25}=\frac{y^3+11y^2}{(y+5)\cdot(2y^2+7y-15)}$ $\left[y=-\frac{80}{111}\right]$

19. $\frac{z+1}{z^2-4}-\frac{2z-1}{z^2-5z+6}+\frac{1}{z^2-z-6}=0$; $\frac{2h^2+3h-1}{h^2-2h-35}-\frac{h^2-h+1}{h^2-5h-14}=\frac{h^3+3h^2-h+63}{h^3-39h-70}$

$[z=-3\vee z=-1;\varnothing]$

Equazioni parametriche

Abbiamo già detto che, per esempio, l'equazione $x + y = 2$ può considerarsi sia in due incognite sia in una incognita e un parametro. Poniamo la seguente definizione.

Definizione 18

Data una equazione in più variabili, se essa viene risolta in una delle variabili al variare delle altre, che vengono chiamate **parametri**, essa si dirà **equazione parametrica**.

Risolvere le equazioni parametriche appare abbastanza semplice, infatti il parametro deve considerarsi a tutti gli effetti un numero: così la soluzione dell'equazione precedente, considerata nella incognita x e nel parametro y, è $x = 2 – y$. Vediamo qualche esempio più impegnativo.

Esempio 30

Risolvere l'equazione $3a + 2b = ab$, considerando b un parametro. Abbiamo allora

$$3a – ab = –2b \Rightarrow a \cdot (3 – b) = – 2b \Rightarrow a = \frac{-2b}{3-b} \Rightarrow a = \frac{2b}{b-3}.$$

Notiamo che l'ultimo passaggio non era necessario, ma è stato fatto solo per questioni per così dire "estetiche". Dire che b è un parametro significa che in realtà l'equazione rappresenta infinite equazioni, una per ogni valore assegnato a b. Allora risulta interessante indagare se vi sono valori di b per cui l'equazione è un'identità o una contraddizione. Infatti, pensando a quanto già detto per le equazioni fratte, abbiamo che se $b = 3$, l'espressione al secondo membro non ha significato, dato che si annulla il denominatore, quindi per tale valore si ha una contraddizione. Non vi sono valori per cui l'uguaglianza è un'identità.

Abbiamo detto senza molte giustificazioni che nell'esempio precedente non vi sono valori di b che generano identità. Vediamo adesso di proporre un esempio in cui ciò invece accade.

Esempio 31

Risolvere l'equazione seguente nella incognita x: $4m^2x – 2m = x – 1$. Risolvendo nel modo consueto otteniamo: $4m^2x – x = 2m – 1 \Rightarrow x \cdot (4m^2 – 1\ ) = 2m – 1 \Rightarrow x = \frac{2m-1}{4m^2-1}$. Adesso siamo tentati di scomporre il numeratore e di semplificare la frazione, ma i procedimenti con le equazioni fratte ci suggeriscono cautela, pertanto diciamo che semplificheremo se $4m^2 – 1 \neq 0 \Rightarrow (2m – 1) \cdot (2m + 1) \neq 0 \Rightarrow m \neq \frac{1}{2}$ e $m \neq -\frac{1}{2}$. Così, se m è diverso da questi valori, allora la soluzione è $x = \frac{1}{2m+1}$.

E se invece? In questo caso non possiamo neanche dividere, però possiamo scrivere nel modo seguente: $x \cdot (2m – 1) \cdot (2m + 1) = 2m – 1$. Osserviamo così che per $m = \frac{1}{2}$ diviene l'identità $0 = 0$. Mentre se $m = -\frac{1}{2}$ otteniamo la contraddizione: $0 = –2$.

Visti i risultati dei precedenti esempi, possiamo enunciare la seguente regola.

Regola 4 (di risoluzione delle equazioni parametriche)

Un'equazione che scritta in forma semplificata è parametrica di primo grado in un'incognita, risulta

- un'identità per tutti i valori dei parametri che annullano sia il coefficiente dell'incognita sia il termine noto;
- una contraddizione per tutti i valori del parametro che annullano il coefficiente dell'incognita ma non il termine noto.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Risolvere l'equazione parametrica $(m^2 - 4m + 3)\,x = m^2 - 3m + 2$. Il coefficiente di x e il secondo membro sono trinomi di secondo grado. Scomponiamoli e scriviamo l'equazione di partenza nella seguente forma:

$$(m - 1) \cdot (m - 3)\,x = (m - 1) \cdot (m - 2).$$

Saremmo tentati di eliminare il fattore comune $m - 1$, ma ciò non è permesso, poiché possiamo eliminare da ambo i membri di un'equazione fattori non nulli. E siccome $m - 1$ è un termine variabile non possiamo dire che è sempre diverso da zero. E in effetti, se $m = 1$, esso è nullo e perciò rende l'uguaglianza precedente l'identità; $0 \cdot (-2) \cdot x = 0 \cdot (-1) \Rightarrow 0 = 0$.

Se invece $m \neq 1$ possiamo dividere per $m - 1$, ottenendo: $(m - 3)\,x = m - 2$. Ancora una volta penseremmo di risolvere nel modo consueto, scrivendo: $x = \dfrac{m-2}{m-3}$, ma ancora una volta dobbiamo osservare che ciò è possibile solo se è $m \neq 3$. Se invece $m = 3$ avremo la scritta assurda: $2 \cdot 0 \cdot x = 2 \cdot 1 \Rightarrow 0 = 2$.

In conclusione possiamo dire che la data equazione è un'identità per $m = 1$, una contraddizione per $m = 3$ e un'equazione di I grado con soluzione $x = \dfrac{m-2}{m-3}$, negli altri casi.

Risolvere le seguenti equazioni parametriche nell'incognita x, determinando i valori dei parametri, se esistono, per cui tali scritture rappresentano identità o contraddizioni

Livello 2

1. $3x = a - 1;\ 2x + 1 = 3b;\ 6c + 2x = x - 3c\ ;\ bx = 1$ $\quad \left[x = \dfrac{a-1}{3}; x = \dfrac{3b-1}{2}; x = -9c; x = \dfrac{1}{b}, b \neq 0\right]$

2. $3mx + 1 = 0;\ 4tx - t = 0\ ;\ (c - 1) \cdot x = c + 2;\ 4zx + z = 3z - x$

$$\left[x = -\frac{1}{3m}, m \neq 0; \begin{cases} Id. & t = 0 \\ x = \dfrac{1}{4} & t \neq 0 \end{cases}; x = \frac{c+2}{c-1}, c \neq 1; x = \frac{2z}{4z+1}, z \neq -\frac{1}{4}\right]$$

3. $(3u + 1) \cdot x = 3u - 1\ ;\ 4ax - 2a = a - x;\ qx - q = x - 1;\ tx - 2 = 2 - x$

$$\left[x = \frac{3u-1}{3u+1}, u \neq -\frac{1}{3}; x = \frac{3a}{4a+1}, a \neq -\frac{1}{4}; \begin{cases} Id. & q = 1 \\ x = 1 & q \neq 1 \end{cases}; x = \frac{4}{t+1}, t \neq -1\right]$$

4. $2x - 1 = ax + a;\ 3mx + m - 1 = mx - m + 1;\ 3v + 2vx - 1 = vx - v - 1$

$$\left[x = \frac{a+1}{2-a}, a \neq 2; x = \frac{1-m}{m}, m \neq 0; \begin{cases} Id. & v = 0 \\ x = -4 & v \neq 0 \end{cases}\right]$$

5. $3hx = h^2 - 1;\ (t^2 - 1) \cdot x = t + 1;\ (t - 1)^2 \cdot x = t - 1$

$$\left[x = \frac{h^2-1}{3h}, h \neq 0; \begin{cases} Id. & t = -1 \\ \varnothing & t = 1 \\ x = \dfrac{1}{t-1} & t \neq \pm 1 \end{cases}; \begin{cases} Id. & t = 1 \\ x = \dfrac{1}{t-1} & t \neq 1 \end{cases}\right]$$

6. $2m \cdot (x - 1) - x \cdot (m - 3) = 0;\ 4 \cdot (a - 1)^2 \cdot x + 2a - 2 = 0;\ 6mx - m^2 + m = 0$

$$\left[x = \frac{2m}{m+3}, m \neq -3; \begin{cases} Id. & a = 1 \\ x = \dfrac{1}{2 \cdot (1-a)} & a \neq 1 \end{cases}; \begin{cases} Id. & m = 0 \\ x = \dfrac{m-1}{6} & m \neq 0 \end{cases}\right]$$

7. $7mx - 3m = 0;\ 4zx - z = 4z - x;\ (3q + 1) \cdot x - 1 = 3x - q$

$$\left[\begin{cases} Id. & m = 0 \\ x = \dfrac{3}{7} & m \neq 0 \end{cases}; x = \frac{5z}{4z+1}, z \neq -\frac{1}{4}; x = \frac{1-q}{3q-2}, q \neq \frac{2}{3}\right]$$

8. $(3p-2)\cdot x = 9p^2-4;\ m^2x - m^2 - 1 = 2mx - x - 2m$ $\left[\begin{cases} Id. & p=\frac{2}{3} \\ x=3p+2 & p\neq\frac{2}{3} \end{cases}; \begin{cases} Id. & m=1 \\ x=1 & m\neq 1 \end{cases}\right]$

9. $p^3\cdot(x-1)+6p^2\cdot(1-x)+11p\cdot(x-1)-6\cdot(x-1)=0$ $[x=1]$

Livello 3

10. $(k^2-6k+9)\cdot x = k^2-9;\ (h^2-5h+6)\cdot x = h^2-7h+10$ $\left[\begin{cases} Id. & k=3 \\ x=\frac{k+3}{k-3} & k\neq 3 \end{cases}; \begin{cases} Id. & h=2 \\ \varnothing & h=3 \\ x=\frac{h-5}{h-3} & h\neq 2,3 \end{cases}\right]$

11. $(t^3-1)\cdot x = t^2+t+1;\ a^4x - 8a^2x + 16x = a^4-16$ $\left[x=\frac{1}{t-1}; \begin{cases} Id. & a=\pm 2 \\ x=\frac{a^2+4}{a^2-4} & a\neq\pm 2 \end{cases}\right]$

12. $(n^3-3n^2+3n-1)\cdot x = n^2-2n+1;\ 3x - a^2 - 3ax + a = a^2 - 3a + 2$ $\left[\begin{cases} Id. & n=1 \\ x=\frac{1}{n-1} & n\neq 1 \end{cases}; \begin{cases} Id. & a=1 \\ x=\frac{2\cdot(1-a)}{3} & a\neq 1 \end{cases}\right]$

13. $(p+1)^3\cdot x = (p^2-1);\ 2x - bx + b - 2 = bx - b + 3x - 3$ $\left[\begin{cases} Id. & p=-1 \\ x=\frac{p-1}{(p+1)^2} & p\neq -1 \end{cases}; \begin{cases} Id. & b=-\frac{1}{2} \\ x=1 & b\neq -\frac{1}{2} \end{cases}\right]$

14. $(9b^2-1)\cdot x = 3b+1;\ m^2x + m^2 - n^2x = n^2 + mx - 2m - mx + 2n$ $\left[\begin{cases} Id. & b=-\frac{1}{3} \\ \varnothing & b=\frac{1}{3} \\ x=\frac{1}{3b-1} & b\neq\pm\frac{1}{3} \end{cases}; \begin{cases} Id. & m=n \\ \varnothing & m=-n \\ x=-\frac{m+n+2}{m+n} & m\neq\pm n \end{cases}\right]$

15. $(4c^2-4c+1)\cdot x = 2c^2-7c+3;\ ax - 3a + bx - 3b - cx + 3c = 0$ $\left[\begin{cases} Id. & c=\frac{1}{2} \\ x=\frac{c-3}{2c-1} & c\neq\frac{1}{2} \end{cases}; \begin{cases} Id. & a+b-c=0 \\ x=3 & a+b-c\neq 0 \end{cases}\right]$

16. $(m^3-7m+6)\cdot x = m^2-4m+3;\ mx - 2m - nx + 2n + px - 2p = 0$ $\left[\begin{cases} Id. & m=1 \\ \varnothing & m=2,3 \\ x=\frac{m-3}{m^2+m-6} & m\neq 1,2,3 \end{cases}; \begin{cases} Id. & m-n+p=0 \\ x=2 & m-n+p\neq 0 \end{cases}\right]$

17. $z^3\cdot(x+1)-2z^2-z\cdot(7x+5)+6\cdot(x+1)=0$ $\left[\begin{cases} Id. & z=1,2 \\ \varnothing & z=-3 \\ x=\frac{3-z}{z+3} & z\neq 1,2,-3 \end{cases}\right]$

18. $[(q+1)^2-(2q-3)^2]\cdot x = 2q^2-7q-4;\ mx-3m+nx-3n = mx-m+2nx-2n$

$$\left[\begin{cases} Id. & q=4 \\ \varnothing & q=\frac{2}{3}; x=-\frac{2m+n}{n}, n\neq 0 \\ x=\frac{2q+1}{2-3q} & q\neq\frac{3}{2}, 4 \end{cases}\right]$$

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere l'equazione parametrica fratta $\frac{ax}{x^2+2x-a^2+1}=\frac{ax+1}{x+1-a}-\frac{ax-1}{x+a+1}$. Scomponiamo il primo denominatore: $\frac{ax}{(x+1)^2-a^2}=\frac{ax+1}{x+1-a}-\frac{ax-1}{x+a+1}\Rightarrow\frac{ax}{(x+1+a)\cdot(x+1-a)}=\frac{ax+1}{x+1-a}-\frac{ax-1}{x+a+1}$, portiamo tutto allo stesso denominatore: $\frac{ax-(ax+1)\cdot(x+a+1)+(x+1-a)\cdot(ax-1)}{(x+1+a)\cdot(x+1-a)}=0$. Come per tutte le equazioni fratte consideriamo la condizione per potere eliminare il denominatore: $x+1+a\neq 0\Rightarrow x\neq -a-1$ e $x+1-a\neq 0\Rightarrow x\neq a-1$. A questo punto otteniamo l'equazione $ax-ax^2-a^2x-ax-x-a-1+ax^2-x+ax-1-a^2x+a=0\Rightarrow -2a^2x-2x-2+ax=0\Rightarrow (a-2a^2-2)\cdot x=2$, da cui $x=\frac{2}{2a^2-a+2}$. Il denominatore non si annulla nei reali, dato che può scriversi $2\cdot\left(a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}\right)+2-\frac{1}{2}=2\cdot\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}>0$, quindi la soluzione è sempre questa.

Risolvere al variare dei parametri le seguenti equazioni fratte nell'incognita x

Livello 2

19. $\frac{ax+3}{3x-a}-\frac{ax-3}{3x+a}=0;\ \frac{1}{x+m}-\frac{2}{x-m}+\frac{3x}{x^2-m^2}=0$

$$\left[\begin{cases} x=0 & a\neq 0 \\ \varnothing & a=0 \end{cases}; \begin{cases} x=\frac{3}{2}m & m\neq 0 \\ \varnothing & m=0 \end{cases}\right]$$

20. $\frac{1}{x+2p}+\frac{2}{x-2p}+\frac{4p}{x^2-4p^2}=0;\ \frac{x-2a}{x+2a}+\frac{x+3a}{x-2a}=2$

$$\left[\varnothing; \begin{cases} x=-18a & a\neq 0 \\ Id. & a=0, x\neq 0 \end{cases}\right]$$

21. $\frac{1}{x^2-a^2}+\frac{1}{x^2-2ax+a^2}=\frac{2}{x^2+2ax+a^2};\ \frac{ax}{2a-x}-\frac{2ax}{2a+x}=\frac{3ax^2}{4a^2-x^2}$

$$\left[\begin{cases} x=\frac{a}{3} & a\neq 0 \\ Id. & a=0, x\neq 0 \end{cases}; \begin{cases} x=0 & a\neq 0 \\ Id. & a=0 \end{cases}\right]$$

Livello 3

22. $\frac{m+1}{x-m}+\frac{2m-1}{x-2m}-\frac{3m}{x-3m}=0;\ \frac{m-1}{m^3+x^3}=\frac{2m+1}{m^2-mx+x^2}$

$$\left[\begin{cases} x=\frac{3m\cdot(2m+1)}{4m+1} & m\neq 0, -\frac{1}{4} \\ Id. & m=0 \\ \varnothing & m=-\frac{1}{4} \end{cases}; \begin{cases} x=-\frac{2m^2+1}{2m+1} & m\neq -\frac{1}{2} \\ \varnothing & m=-\frac{1}{2} \end{cases}\right]$$

23. $\frac{5bx}{3x-2b}+\frac{6bx^2-24b^2x+bx-1}{9x^2-4b^2}=\frac{7bx+1}{3x+2b};\ \frac{x^2+x}{x^3-b^3}=\frac{x+1}{x^2+bx+b^2}$

$$\left[\begin{cases} x=\frac{1}{b} & b\neq 0 \\ \varnothing & b=0 \end{cases}; \begin{cases} x=-1 & b\neq 0 \\ Id. & b=0, x\neq 0 \end{cases}\right]$$

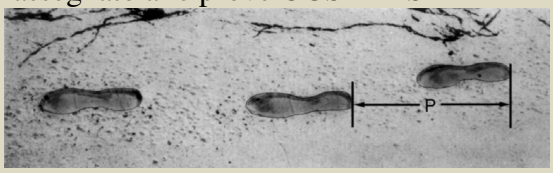
24. $\dfrac{z+3}{x^2+zx+z^2}-\dfrac{z-1}{x^2-zx+z^2}=\dfrac{4x^2+4z^2}{x^4+x^2z^2+z^4}$ $\left[\begin{cases} x=0 & z\neq -1,0 \\ Id. & z=-1,0 \end{cases}\right]$

25. $\dfrac{2t^2-x}{t-x}+\dfrac{3t^2-t+x}{t+2x}-\dfrac{t+x}{t-3x}=\dfrac{11x^3-3t^2x^2-5tx^2}{t^3-2t^2x-5tx^2+6x^3}$ $\left[\begin{cases} x=\dfrac{t\cdot(5t-2)}{2\cdot(7t-1)} & t\neq 0,\dfrac{1}{7} \\ Id. & t=0 \\ \varnothing & t=\dfrac{1}{7} \end{cases}\right]$

Per la prova Invalsi

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato alle prove OCSE–PISA



La figura mostra le orme di un uomo che cammina. La lunghezza P del passo è la distanza tra la parte posteriore di due orme consecutive. Per gli uomini, la formula $\dfrac{n}{P}=140$ *fornisce una relazione approssimativa tra n e P dove: n = numero di passi al minuto, e P = lunghezza del passo in metri.*

a) *Se la formula si applica all'andatura di Enrico ed Enrico fa* 70 *passi al minuto, qual è la lunghezza del passo di Enrico*?

Applichiamo la data formula sostituendo 70 a *n*, otteniamo la seguente equazione fratta in *P*: $\dfrac{70}{P}=140$, che fornisce la soluzione: $P=\dfrac{70}{140}\Rightarrow P=\dfrac{1}{2}$, che preferiamo scrivere: $P = 0{,}5\ m$.

b) *Bernardo sa che la lunghezza del suo passo è di* 0,80 *metri. La formula viene applicata all'andatura di Bernardo. Calcola la velocità a cui cammina Bernardo esprimendola in metri al minuto e in chilometri all'ora.*

Stavolta avremo: $\dfrac{n}{0{,}80}=140\Rightarrow n=140\cdot 0{,}80\Rightarrow n=112$ e la risposta è in *m/min*. Per passare in *Km/h* piuttosto che applicare formule memorizzate, facciamo il seguente ragionamento. Se in un minuto Bernardo percorre 112 *m*, allora in 60 minuti percorre 112 · 60 *m* = 6720 *m*, cioè 6,72 *Km*. Pertanto la sua velocità è 6,72 *Km/h*.

1. (OCSEPISA) Enrico è un grande appassionato di skateboard. Visita un negozio che si chiama SKATER per controllare alcuni prezzi. In questo negozio puoi comprare uno skateboard completo, oppure puoi comprare una tavola, un set di 4 rotelle, un set di 2 blocchi e un set di accessori per montare il tuo skateboard. I prezzi dei prodotti del negozio sono riportati nella tabella seguente.

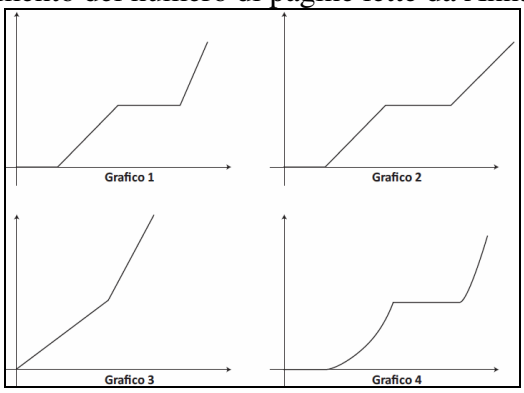
Prodotto	Prezzo in zed
Skateboard completo	82 o 84
Tavola	40, 60 o 65
Un set di 4 rotelle	14 o 36
Un set di 2 blocchi	16
Un set di accessori (cuscinetti a sfera, placchette di gomma, dadi e viti)	10 o 20

a) Enrico vuole montare da solo il suo skateboard. In questo negozio, qual è il prezzo minimo e il prezzo massimo degli skateboard «fai da te»? b) Il negozio offre tre tipi diversi di tavole, due tipi di set di

rotelle diversi e due tipi di set di accessori. C'è solo una possibilità per il set di blocchi. Quanti skateboard diversi può costruire Enrico? A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 c) Enrico può spendere 120 zed e vuole comprare lo skateboard più costoso che si può permettere. Quanto può permettersi di spendere Enrico per ciascuno dei 4 pezzi?

[a) min: 80 zed, max: 137 zed; b) 12; c) Tavola = 65, Rotelle = 14, Blocchi = 16, Accessori = 10]

2. (OCSEPISA) Per costruire una libreria, un falegname ha bisogno del seguente materiale: 4 assi di legno lunghe, 6 assi di legno corte, 12 ferri ad angolo piccoli, 2 ferri ad angolo grandi, 14 viti. Il falegname ha a disposizione 26 assi lunghe, 33 assi corte, 200 ferri ad angolo piccoli, 20 ferri ad angolo grandi e 510 viti. Quante librerie complete può costruire il falegname? [5]
3. (Invalsi 2003) Come puoi tradurre in linguaggio algebrico la frase "Aggiungendo 5 al triplo di un numero n si ottiene 26"? A) $3n + 5 = 26$ B) $3 (n + 5) = 26$ C) $5n + 3 = 26$ D) $5 (n + 3) = 26$ E) La risposta corretta non è tra le prime quattro proposte [A]
4. (Invalsi 2004) Una legge è espressa dalla relazione: $s = v \cdot t$, con t, v diversi da zero. Quale delle seguenti relazioni esprime la stessa legge? A) $s = t/v$ B) $s = v/t$ C) $v = s \cdot t$ D) $v = s/t$ [C]
5. (Invalsi 2004) Francesca spende 4/7 di quello che ha in tasca per acquistare una maglietta, 30€ per saldare il conto dell'idraulico. Alla fine le rimangono in tasca 6€. Quanti soldi aveva in tasca Francesca? A) 56 € B) 63€ C) 70€ D) 84€ [D]
6. (Invalsi 2005) In una prova di ammissione bisogna superare due test. 2/3 dei candidati superano il primo test e 1/6 di quelli che l'hanno superato passa anche il secondo test. Su 360 candidati, quanti saranno ammessi? A) 40 B) 60 C) 120 D) 280 [A]
7. (Invalsi 2007) Quale delle seguenti è la soluzione dell'equazione: $2x = 0$? [B]
   A) $x = ½$ B) $x = 0$ C) $x = – ½$ D) $x = –2$
8. (Invalsi 2011) La formula $l = l_0 + k \cdot P$ esprime la lunghezza l di una molla al variare del peso P applicato. l_0 rappresenta la lunghezza in centimetri "a riposo" della molla; k indica di quanto si allunga in centimetri la molla quando si applica una unità di peso. Quale delle formule elencate si adatta meglio alla seguente descrizione: "È una molla molto lunga e molto resistente alla trazione"? [C]
   A) $l = 15 + 0{,}5 \cdot P$ B) $l = 75 + 7 \cdot P$ C) $l = 70 + 0{,}01 \cdot P$ D) $l = 60 + 6 \cdot P$
9. (Invalsi 2011) Carlotta, nel periodo di Natale, lavora come commessa in un negozio di calzature e guadagna 8 euro all'ora più una commissione del 5% sul ricavo totale delle scarpe che riesce a vendere. Quale formula esprime il suo guadagno g, se lavora h ore e vende scarpe per un valore totale di s euro? A) $g = 8h + 0{,}05s$ B) $g = 8h + 0{,}5s$ C) $g = 5h + 8s$ D) $g = 8h + 5s$ [A]
10. (Invalsi 2012) Durante il periodo estivo Anna deve leggere un libro di 305 pagine come compito per le vacanze. Nel mese di giugno si riposa e a partire dal primo giorno di luglio legge 5 pagine al giorno per tutto il mese. In agosto va in vacanza con i genitori e dimentica il libro a casa; al suo ritorno, negli ultimi 10 giorni di vacanza, per terminare il libro legge 15 pagine al giorno. Quale, fra i seguenti grafici, può rappresentare l'andamento del numero di pagine lette da Anna nel periodo estivo? [Grafico 1]



11. (Invalsi 2012) Considera la funzione definita da: $y = 3x + 1$.
    A) Quale dei seguenti grafici può rappresentare questa funzione?

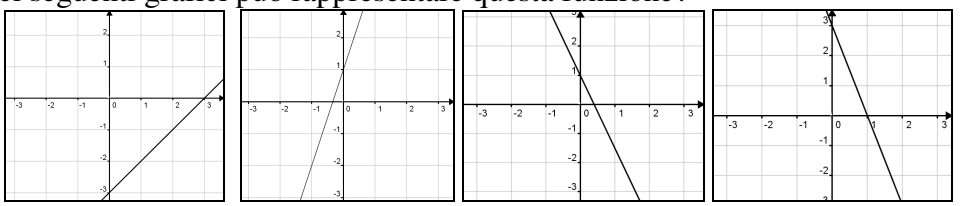


Grafico 1 Grafico 2 Grafico 3 Grafico 4

B) Quale valore di y si ottiene per $x = 0$? C) Per quale valore di x si ottiene $y = 0$? D) Per quali valori di x la y assume valori positivi? $\left[\text{A) } 2;\ \text{B) } 1;\ \text{C) } -\frac{1}{3};\ \text{D) } x > -\frac{1}{3}\right]$

12. (Invalsi 2012) È data l'equazione $(3k - 6) \cdot x - 5k + 2 = 0$, in cui x è l'incognita e k è un numero reale. La soluzione dell'equazione è 0 per k = ? [2/5]

13. (Invalsi 2012) L'equazione $x \cdot (x - 1) = 6$ ha fra le sue soluzioni A) $\frac{1}{6}$ B) 3 C) 6 D) 7 [B]

14. (Invalsi 2013) Una sorgente luminosa puntiforme è posta nel vuoto. I è l'intensità luminosa misurata a una distanza r dalla sorgente. Il prodotto fra l'intensità luminosa I e il quadrato della distanza r dalla sorgente è uguale a una costante k. a) Quale fra le seguenti formule esprime la relazione tra I e r? A) $I/r^2 = k$ B) $(I/r)^2 = k$ C) $I \cdot r^2 = k$ D) $(I \cdot r)^2 = k$ b) Se la distanza r raddoppia, allora l'intensità luminosa I : A) diventa il doppio B) diventa la metà C) diventa il quadruplo D) diventa un quarto [a) C; b) D]

15. (Invalsi 2014) È data l'equazione $(2k - 3) \cdot x + 1 - k = 0$, in cui x è l'incognita e k è un numero reale. La soluzione dell'equazione è 1 per k = ? [2]

16. In un supermercato le confezione di 1 Kg di frutta mista contengono 2 mele e 3 pere oppure 4 mele e 1 banana. Quale delle seguenti uguaglianze, in peso, è vera? [B]
A) 2 mele = 3 pere B) 2 mele + 1 banana = 3 pere C) 2 mele + 3 pere = 2 Kg D) 3 pere = 2 banane

17. L'equazione $(x + 2) \cdot (x - 2) = 7$, ha soluzioni A) intere B) non intere maggiori 4 C) non intere negative D) razionali [C]

18. L'uguaglianza $(x + a)^2 = (x - a)^2$, al variare del parametro reale a A) non è mai un'identità B) ha sempre soluzioni dipendenti da a C) ha sempre $x = 0$ come soluzione D) è un'identità se $a = 0$

19. Per risolvere il problema di *trovare un numero la cui metà aumentata di* 1 *supera di* 3 *unità la propria terza parte*, risolviamo quale delle seguenti equazioni? [D]
A) $\frac{x}{2}+1=\frac{x}{3}-3$ B) $\frac{y+1}{2}=\frac{y+3}{3}$ C) $\frac{t}{2}+1=t+3$ D) $\frac{p}{2}+1=\frac{p}{3}+3$

20. L'equazione $3 \cdot (n + 1) = 2m$, risolve il problema di *trovare quel numero il cui triplo del proprio consecutivo è* A) pari B) dispari C) nullo D) diverso da zero [A]

21. L'equazione $P=\frac{C+G}{1-I/100}$, stabilisce il prezzo di vendita P di un prodotto, comprato al prezzo C, su cui si paga una tassa I e su cui si vuole guadagnare G. Quale delle seguenti uguaglianze è corretta? [B]
A) $G=\frac{P-C}{1-I/100}$ B) $G=P\cdot(1-I/100)-C$ C) $G=\frac{P\cdot(1-I/100)}{C}$ D) $G=(P-C)\cdot(1+I/100)$

22. Sapendo che $x + y = 7$ e $x \cdot y = 5$, possiamo dire che $x^2 + y^2$ vale? [B]
A) 44 B) 39 C) 49 D) Non si può dire

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi

1. Determinare la soluzione dell'equazione $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1 = 0$. [$x = 1$]
2. Sapendo che l'equazione $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ ha come soluzioni $x = –2, 1, 3$ e l'equazione $x^3 + 2x^2 – 5x – 6 = 0$ ha come soluzioni $x = –3, –1, 2$, possiamo dire che l'equazione $x^6 – 14x^4 + 49x^2 – 36 = 0$, ha quali soluzioni? [$\pm3, \pm2, \pm1$]
3. Verificare le seguenti identità e usarle per esprimere 125, 200 e 481 come somma di due quadrati in due modi diversi: $(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad – bc)^2 = (ac – bd)^2 + (ad + bc)^2$.
[$11^2 + 2^2 = 10^2 + 5^2$; $14^2 + 2^2 = 10^2 + 10^2$; $20^2 + 9^2 = 16^2 + 15^2$]

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
AHSME = Annual High School Mathematics Examination MT = Mathematics Teacher, rivista della NCTM
OMI = Olimpiadi della matematica italiane

Lavoriamo insieme

Questo quesito è stato pubblicato nel numero di Ottobre 1995 della rivista Mathematics Teacher.
Se $4 \cdot (9a - 13b) = 6 \cdot (a - 2b)$, *quanto fa* a/b?
Eseguiamo i calcoli, intanto dividiamo tutto per 2: $2 \cdot (9a - 13b) = 3 \cdot (a - 2b) \Rightarrow 18a - 26b = 3a - 6b \Rightarrow 15a = 20b \Rightarrow 3a = 4b$. Dividiamo ambo i membri per b per trovare quanto richiesto: $a/b = 4/3$.

1. (AHSME 1992) Quanti numeri naturali k fanno sì che l'equazione $kx - 12 = 3k$, abbia soluzioni intere? [6]
2. (OMI2011) Sapendo che a e b sono due numeri reali positivi tali che $a^2(a - 3b) = b^2(b - 3a)$, quanti valori diversi può assumere il rapporto a/b? A) 0 B) 1 C) 3 D) 5 E) infiniti [B]
3. (OMI2011) Filippo scrive dei numeri sul quaderno. Inizialmente scrive 2; poi, per scrivere un nuovo numero prende l'ultimo numero che ha scritto e gli applica nell'ordine le seguenti operazioni: divide per due, somma due, moltiplica per due, sottrae due. Quanti numeri avrà scritto dopo che avrà annotato il primo numero di quattro cifre? A) 1000 B) 998 C) 500 D) 10 E) nessuna delle precedenti [C]
4. (OMI2011) Cangrande von Rottweiler, noto cambiavalute, oggi ha scambiato 2 Baiocchi per 3 Dobloni e 2 Dobloni per 1 Baiocco e 3 Carlini. Quanti Carlini servono per fare un Baiocco? [B]
   A) 6 B) 9 C) 10 D) 12 E) non è possibile stabilirlo
5. (OMI2012) Al 22 novembre 2012 il prezzo della benzina è dato per il 35% dal costo del prodotto, che è formato a sua volta da diverse voci (petrolio, raffinazione, costi di distribuzione, ecc.); il costo del petrolio costituisce oggi il 24% del costo del prodotto. Sapendo che il primo gennaio 2013 il prezzo del petrolio aumenterà del 10% e gli altri costi rimarranno invariati, di quanto aumenterà il prezzo della benzina in tale data? A) 10% B) 2,4% C) 3,5% D) 0,84 % E) nessuna delle precedenti [D]
6. (OMI2013) In una classe gli alunni biondi sono il 40%, del totale mentre i restanti sono castani. Tra tutti gli alunni biondi, il 75% sono femmine. Sapendo che nella classe il numero di femmine è uguale al numero di maschi, qual è la percentuale di maschi castani sul totale degli alunni della classe? [D]
   A) 20% B) 25% C) 30% D) 40% E) 50%
7. (OMI2014) Nel paese di Gnallucci circolano quattro monete: dobloni, zecchini, talleri e fufignezi. Un doblone vale quanto uno zecchino più un tallero e un fufignezo. Due dobloni valgono quanto uno zecchino più tre talleri e cinque fufignezi. Un tale entra in un negozio con uno zecchino e ne esce con un tallero. In fufignezi, quanto ha pagato? A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5 [C]
8. (OMI2014) Paperopoli dista da Topolinia 4 ore di viaggio. Paperino parte da Paperopoli alle 4 del mattino, ora locale, e, per via del fuso orario, arriva a Topolinia all'ora (locale) di pranzo. A che ora torna a Paperopoli se riparte due ore dopo? A) Alle 12 B) alle 14 C) alle 15 D) alle 16 E) dipende dall'ora a cui pranzano a Topolinia [B]
9. (OMI2014) In una certa azienda ogni dirigente percepisce uno stipendio pari a quattro volte quello di ogni operaio. Il costo complessivo che l'azienda sostiene per pagare gli stipendi di tutti i dipendenti è uguale a sei volte il costo complessivo degli stipendi di tutti i dirigenti. Quanti operai ci sono per ciascun dirigente? A) 5 B) 6 C) 20 D) 24 E) 30 [C]
10. (OMI2015) Ad una festa, ogni ragazzo ha danzato con 4 ragazze diverse ed ogni ragazza ha danzato con 3 ragazzi diversi. Sapendo che alla festa c'erano 9 ragazzi, quante erano le ragazze? [C]
    A) 6 B) 10 C) 12 D) 8 E) 16

Questions in English

Working together

This problem was assigned at AHSME in 1996.
Sunny runs at a steady rate, and Moonbeam runs m times as fast, where m is a number greater than 1. *If Moonbeam gives Sunny a head start of h meters, how many meters must Moonbeam run to overtake Sunny*?

A) hm B) $\frac{h}{h+m}$ C) $\frac{h}{m-1}$ D) $\frac{h\cdot m}{m-1}$ E) $\frac{h+m}{m-1}$

Let x be the number of meters that Moonbeam runs to overtake Sunny, and let r and $m \cdot r$ be the rates of Sunny and Moonbeam, respectively. Because Sunny runs $x - h$ meters in the same time that Moonbeam runs x meters, it follows that $\frac{x-h}{r}=\frac{x}{mr}$. Solving for x, we get $x=\frac{hm}{m-1}$.

11. (AHSME1952) The cost C of sending a parcel post package[1] weighing P pounds[2], P is an integer, is 10 cents for the first pound and 3 cents for each additional pound. The formula for the cost is [C]
A) $C = 10 + 3P$ B) $C = 10P + 3$ C) $C = 10 + 3(P - 1)$ D) $C = 9 + 3P$ E) $C = 10P - 7$
12. (AHSME1952) If $m=\frac{cab}{a-b}$, then b equals A) $\frac{m(a-b)}{ca}$ B) $\frac{cab-ma}{-m}$ C) $\frac{1}{1+c}$ D) $\frac{ma}{m+ca}$ E) $\frac{m+ca}{ma}$ [D]
13. (AHSME1953) The roots[3] of $(x^2 + 8x + 16) \cdot (4 - x)$ are: [D]
A) 0 B) 0; 4 C) 0; 4; –4 D) 0; 4; –4; –4 E) none of these
14. (AHSME1955) The equality $\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x-2}$ is satisfied by: A) no real values of x B) either $x = 1$ or $x = 2$ C) only $x = 1$ D) only $x = 2$ E) only $x = 0$ [E]
15. (AHSME1957) The numbers x, y, z are proportional to 2, 3, 5. The sum of x, y and z is 100. The number y is given by the equation $y = ax - 10$. Then a is: A) 2 B) 3/2 C) 3 D) 5/2 E) 4 [A]

Working together

This question was assigned at AHSME in 1998.
If $2^{1998}-2^{1997}-2^{1996}+2^{1995}=k\cdot 2^{1995}$, *what is the value of* k?
Factor the left side of the given equation: $2^{1995}\cdot\left(2^3-2^2-2+1\right)=k\cdot 2^{1995}\Rightarrow 3\cdot 2^{1995}=k\cdot 2^{1995}\Rightarrow k=3$

16. (AHSME1979) For all non–zero real numbers x and x such that $x - y = xy$, $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ equals [D]
A) $\frac{1}{xy}$ B) $\frac{1}{x-y}$ C) 0 D) –1 E) $y - x$
17. (AHSME1981) If $\frac{x}{x-1}=\frac{y^2+2y-1}{y^2+2y-2}$, then x equals [A]
A) $y^2 + 2y - 1$ B) $y^2 + 2y - 2$ C) $y^2 + 2y + 2$ D) $y^2 + 2y + 1$ E) $-y^2 - 2y + 1$
18. (AHSME1997) If x, y, and z are real numbers such that $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 = 0$, then $x + y + z$ is A) –12 B) 0 C) 8 D) 12 E) 50 [D]
19. (AHSME1999) At the end of 1994 Walter was half as old as his grandmother. The sum of the years in which they were born is 3838. How old will Walter be at the end of 1999? [D]
A) 48 B) 49 C) 53 D) 55 E) 101

[1] Pacchetto postale
[2] Libbre (una libbra è circa 450 *g*)
[3] Radici o soluzioni

Attività di verifica

Il concetto di uguaglianza in matematica

Fase 1: Osserva

- Consideriamo la seguente uguaglianza nelle variabili a e b: $\frac{a^2-ab-2a-2b}{a^2-4a+4}=\frac{a-b}{a-2}$. Ci chiediamo è un'identità, una contraddizione o un'equazione? Cerchiamo di ridurre ai minimi termini la frazione a sinistra del segno di uguale (primo membro): $\frac{a\cdot(a-b)-2\cdot(a-b)}{(a-2)^2}=\frac{a-b}{a-2}\Rightarrow\frac{(a-b)\cdot(a-2)}{(a-2)^2}=\frac{a-b}{a-2}$. Abbiamo scomposto il numeratore mediante il raccoglimento parziale e il denominatore come quadrato di binomio. Adesso saremmo tentati di semplificare il fattore comune $a - 2$, concludendo che abbiamo a che fare con un'identità, dato che le due espressioni ai lati dell'uguale sono coincidenti: $\frac{(a-b)\cdot\cancel{(a-2)}}{(a-2)\cancel{^1}}=\frac{a-b}{a-2}\Rightarrow\frac{a-b}{a-2}=\frac{a-b}{a-2}$. Il problema è che tale semplificazione non può farsi per tutti i valori assegnati alla lettera a, se infatti $a = 2$, l'espressione iniziale non ha significato:
$$\frac{a^2-ab-2a-2b}{a^2-4a+4}=\frac{a-b}{a-2}\Rightarrow\frac{2^2-2b-2\cdot2-2b}{2^2-4\cdot2+4}=\frac{2-b}{2-2}\Rightarrow\frac{\cancel{4}-4b-\cancel{4}}{4-8+4}=\frac{2-b}{0}\Rightarrow\frac{-4b}{0}=\frac{2-b}{0}$$
Possiamo perciò concludere dicendo che l'uguaglianza iniziale è un'identità solo se $a \neq 2$.
- Data la seguente uguaglianza nell'unica incognita y: $y^2 - 2y + 1 = y^2 + 2y + 1$. Cosa possiamo dire di essa? Cerchiamo ancora una volta di scomporre i due membri: $(y - 1)^2 = (y + 1)^2$. questa scritta è sempre vera, sempre falsa o talvolta vera e talvolta falsa? Facciamo delle prove. Se $y = 1$ si ha: $(1 - 1)^2 = (1 + 1)^2 \Rightarrow 0 = 4$, che è certamente falso, mentre se $y = 0$ abbiamo: $(0 - 1)^2 = (0 + 1)^2 \Rightarrow (- 1)^2 = (1)^2 \Rightarrow 1 = 1$, che è invece vera. Quindi abbiamo a che fare con una equazione.
- Adesso consideriamo l'uguaglianza: $z^2 + 3 = - 5 - z^4$. stavolta possiamo dire di avere a che fare con una contraddizione nell'insieme dei numeri reali. Infatti il primo membro risulta sempre positivo qualsiasi valore sostituiamo alla z, dato che z^2 non è mai negativo, allo stesso modo il secondo membro è sempre negativo.

Fase 2: Completa …

- Vogliamo stabilire che tipo di uguaglianza è la seguente: $\frac{x^2-9}{x^2-3x}=x+3$. Riduciamo ai minimi termini la frazione a sinistra del segno di uguale (primo membro): $\frac{x^2-9}{x^2-3x}=x+3\Rightarrow\frac{(.....)\cdot(.....)}{.....\cdot(.....)}=x+3$
Abbiamo scomposto il numeratore mediante ……. e il denominatore ……... Adesso saremmo tentati di semplificare il fattore comune ……, concludendo che abbiamo a che fare con …….., dato che le due espressioni ai lati dell'uguale sono ……..: ……... Il problema è che tale semplificazione non può farsi per tutti i valori assegnati alla lettera x, se infatti x = ….., l'espressione iniziale non ha significato:
$\frac{x^2-9}{x^2-3x}=x+3\Rightarrow$ ……..
Possiamo perciò concludere dicendo che l'uguaglianza iniziale è …….solo se …….
- Che tipo di uguaglianza è la seguente: $\frac{m^3+m}{3m}=\frac{m^4-m^2}{5m^2}$? Cerchiamo ancora una volta di ridurre ai minimi termini i due membri: $\frac{m^3+m}{3m}=\frac{m^4-m^2}{5m^2}$ = …….. prima di semplificare i due fattori comuni, ……. al primo membro e …… al secondo, osserviamo che ciò potrà farsi solo se m ……. Fatto ciò notiamo adesso che le due scritte rappresentano una ……. per-

ché …….. Quindi l'uguaglianza di partenza è una ……. nell'insieme ……

- Che tipo di uguaglianza è: $3z^2 + z - 1 = 3z^2 - z + 2$? Non riusciamo a scomporre le due espressioni, allora sostituiamo dei valori a caso alla variabile z. Cominciamo per esempio con $z = 1$, ottenendo $3 \cdot 1^2$ + ……= ……⇒ ……..= …… che è una scritta ……. Adesso proviamo con $z = \frac{3}{2}$, si ha: $3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2$ + ……= ……⇒ ……..= …… che è una scritta ……. Possiamo concludere dicendo che abbiamo a che fare con una ……., dato che abbiamo ottenuto ……

Fase 3: Prova!

***Stabilire di che tipo è ciascuna delle seguenti uguaglianze* (*Nelle risposte E = equazione, I = identità, C = contraddizione*)**

1. $x^3 + x^2 - x + 1 = x^3 - x - 4$; $4a^2 - 4a + 1 = 9a^2 - 6a + 1$; $a^3 + 1 = (a - 1) \cdot (a^2 + a + 1)$ [C; E; C]
2. $y^4 - 1 = y^2 - 1$; $z^2 - 2z + 1 = z^2 - 3z + 1$; $\frac{3x+1}{6x+2} = \frac{1}{2}$; $\frac{x+y}{x^2-y^2} = x - y$ [E ; E ; I ($x \neq -1/3$) ; E]
3. $\frac{8a^3 - 1}{4a^2 + 2a + 1} = 2a - 1$ ($4a^2 + 2a + 1$ non si annulla mai nell'insieme dei numeri reali) [I]
4. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x^2+x}$; $\frac{a^3 + 3a^2 + 3a + 1}{a+1} = a^2 + 2a + 1$; $\frac{7x+2}{7x-1} = 0$ [I ($x \neq 0, -1$) ; I ($a \neq -1$) ; E]
5. $\frac{x^2 + ax + ay + xy}{x^2 + ax} = \frac{x+y}{x} + 1$; $\frac{a^4 - a^2}{4a^2} = \frac{3a^6 + 3a^4}{2a^4}$; $\frac{x+y-1}{x-y+1} = 0$; $\frac{x+2}{y-3} = 1$ [C; C; E; E]

Classificazione delle equazioni e risoluzione delle equazioni di primo grado in una incognita

Fase 1: Osserva

- Risolvere l'equazione di I grado in una incognita: $4t - 2 = 3t + 1$. Dobbiamo ricondurla alla forma semplificata. Cominciamo a trasportare i termini noti a destra del segno di uguale e i termini incogniti a sinistra. Per far ciò usiamo la Regola 1: $4t - 3t = 1 + 2$, naturalmente i termini $4t$ e 1 che restano dalla stessa parte del segno di uguale dove si trovavano, rimangono inalterati. Adesso sommiamo i termini simili: $(4 - 3) \cdot t = 3 \Rightarrow t = 3$. Questa è la soluzione cercata. Verifichiamola, ossia sostituiamo, nell'equazione di partenza, 3 al posto della t: $4 \cdot 3 - 2 = 3 \cdot 3 + 1 \Rightarrow 12 - 2 = 9 + 1 \Rightarrow 10 = 10$. Poiché abbiamo ottenuto un'identità possiamo dire che la soluzione è corretta.
- Risolvere $7x + 2 \cdot (x - 5) + 1 = 4x - 3 \cdot (2x + 1) - x - 1$. Svolgiamo le moltiplicazioni:
$$7x + 2x - 10 + 1 = 4x - 6x - 3 - x - 1$$
Sommiamo i termini simili: $(7 + 2) \cdot x + (-10 + 1) = (4 - 6 - 1) \cdot x + (-3 - 1) \Rightarrow 9x - 9 = -3x - 4$. Adesso applichiamo la regola 1: $9x + 3x = -4 + 9 \Rightarrow 12x = 5$. Infine applichiamo la regola 2: $x = \frac{5}{12}$.
Verifichiamo la correttezza del risultato: $7 \cdot \frac{5}{12} + 2 \cdot \left(\frac{5}{12} - 5\right) + 1 = 4 \cdot \frac{5}{12} - 3 \cdot \left(2 \cdot \frac{5}{12} + 1\right) - \frac{5}{12} - 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{35}{12} + \cancel{2}^{1} \cdot \frac{5 - 60}{\cancel{12}^{6}} + 1 = \cancel{4}^{1} \cdot \frac{5}{\cancel{12}^{3}} - 3 \cdot \left(\cancel{2}^{1} \cdot \frac{5}{\cancel{12}^{6}} + 1\right) - \frac{5 + 12}{12} \Rightarrow \frac{35}{12} - \frac{55}{6} + 1 = \frac{5}{3} - \cancel{3}^{1} \cdot \frac{5 + 6}{\cancel{6}^{2}} - \frac{17}{12} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{35 - 110 + 12}{12} = \frac{20 - 66 - 17}{12} \Rightarrow -\frac{63}{12} = -\frac{63}{12}$. La verifica ha avuto esito positivo.
- Vogliamo risolvere l'equazione $(3n - 2) \cdot (n + 1) - 4 = 2 + 3n^2 - n - 2$. Svolgiamo le moltiplicazioni:
$$3n^2 + 3n - 2n - 2 - 4 = 2 + 3n^2 - n - 2$$

Riduciamo i termini simili: $3n^2 + (3 - 2) \cdot n + (-2 - 4) = 3n^2 - n + (-2 + 2) \Rightarrow 3n^2 + n - 6 = 3n^2 - n$. Mediante la regola 1 trasportiamo tutti i termini con le incognite da una parte e i termini noti dall'altra, poi riduciamo i termini simili: $3n^2 + n - 3n^2 + n = 6 \Rightarrow (3 - 3) \cdot n^2 + (1 + 1) \cdot n = 6 \Rightarrow 2n = 6$. Applichiamo la regola 2, ottenendo la soluzione finale: $n = \frac{6}{2} \Rightarrow n = 3$. Verifichiamo il risultato:

$(3 \cdot 3 - 2) \cdot (3 + 1) - 4 = 2 + 3 \cdot 3^2 - 3 - 2 \Rightarrow 7 \cdot 4 - 4 = 27 - 3 \Rightarrow 28 - 4 = 27 - 3 \Rightarrow 24 = 24$

Fase 2: Completa …

- Risolvere l'equazione $5x - 2 + x = 3 - 2x + 1$. Sommiamo i termini simili: $(5 + 1) \cdot x - 2 =$ …… $\Rightarrow$ $4x - 2 =$ ……. Adesso applichiamo la regola ……, trasportando …….. a sinistra del segno di uguale e i ……. a destra: …… Riduciamo i termini simili: …… Applichiamo la regola ……, ottenendo così la soluzione finale: $x =$ …… Verifichiamo il precedente risultato: $5 \cdot$ ….. $- 2 +$ ….. $= 3 - 2 \cdot$ ….. $+ 1$. Svolgiamo i calcoli: …….. La verifica ha avuto ……..
- Risolvere l'equazione $x \cdot (2x - 1) + 2x - 4 = (3 - x)(x - 1) + 3x^2 - 4x + 7$. Effettuiamo le moltiplicazioni: $2x^2 - x + 2x - 4 =$ …… Sommiamo i termini simili: …….. Applichiamo la regola ……, trasportando …….. a sinistra del segno di uguale e i ……. a destra: …… Riduciamo i termini simili: …… Otteniamo la seguente soluzione: ..... che verifichiamo: …… $\cdot (2 \cdot$ ……. $- 1) + 2 \cdot$ ……. $- 4 =$ $(3 -$ …….$)$ $($……. $- 1) + 3 \cdot$ …….$^2 - 4 \cdot$ ……. $+ 7$. Svolgiamo i calcoli: …….. La verifica ha avuto ……..

Fase 3: Prova!

Risolvere le seguenti equazioni verificandone i risultati

1. $3x + 2 = 5x - 1$; $7x + 4 - x = 2x - 3x + 1 - 2$; $2 \cdot (x - 1) - 2x + 3 = (3x - 1) \cdot 4 - 5x + 7$
$\left[x = \frac{3}{2}; x = -\frac{5}{7}; x = -\frac{2}{7}\right]$
2. $(7y + 1) \cdot 3 - 2 \cdot (3y + 1) = 2 \cdot (4y + 1) - y + 1 - 3$; $\frac{2}{3} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} = \frac{2}{5} \cdot (x + 2) - \frac{3}{5} + 3x$ $\left[y = -\frac{1}{8}; x = -\frac{47}{164}\right]$
3. $(2 - z) \cdot 5 - 2 \cdot (2 + z) - z + 1 = 8 \cdot (2z - 3) - 3 \cdot (8z + 1) + 3z - 1$ $\left[z = \frac{35}{3}\right]$
4. $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = \frac{1}{4} - \frac{5}{2}x$; $\frac{2}{3}x - \frac{1}{4} + x = \frac{2}{3}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}x$; $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(2x - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{4}$
$\left[x = \frac{7}{12}; x = 0; x = \frac{12}{7}\right]$
5. $(a - 1)^2 - 2a + 1 = (a - 3) \cdot (a + 3) - 2a + 1$; $(t^2 - 1)^2 - (t^2 + 1)^2 + 2t - 1 = 2t \cdot (1 - 2t) + 3t - 1$
$[a = 5; t = 0]$
6. $w^3 - 8 + 2w - 1 = (w - 1)^3 + 3w^2 + 7w - 4$; $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}x - 2 = \left(x + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{4} + x\right) - \frac{1}{2} - 3x$ $\left[w = -\frac{1}{2}; x = \frac{4}{5}\right]$
7. $(2h - 1) \cdot (3h - 2) - h \cdot (2h - 3) + 3h - 4 = 2 \cdot (2h^2 + 3) - 4h + 7$; $\frac{x - 1}{2} - \frac{3x + 1}{3} = \frac{x + 1}{2} - 1$ $\left[h = 5; x = -\frac{1}{3}\right]$
8. $\frac{2x + 5}{5} - \frac{3x + 1}{10} - x = \frac{3x + 1}{2} - 1$; $2m + 1 - 3 + m = 5m - 4 + 1$; $3 \cdot (m - 1) - 2 = 2 \cdot (m + 2) - 9$
$\left[x = \frac{7}{12}; m = 0; m = \frac{1}{2}\right]$
9. $(p + 2) \cdot (p^2 - 2p + 4) - p + 3 = (p - 2) \cdot (p^2 + 2p - 4) + 3p - 5$ $[p = -2]$

10. $(2x-3)\cdot(4x^2+6x+9)-3x+1=(2x+1)\cdot(4x^2-2x+1)-7x+3$ $\left[x=\frac{15}{2}\right]$

Risoluzione delle equazioni di primo grado in una incognita con il principio di annullamento del prodotto

Fase 1: Osserva

- Risolvere l'equazione $(s-2)\cdot(3s+1)=0$. Se sviluppiamo la moltiplicazione otteniamo una equazione di secondo grado, $3s^2-5s-2=0$, che non sappiamo risolvere. Se invece utilizziamo il principio di annullamento del prodotto, riduciamo il problema alla risoluzione di due equazioni di primo grado entrambe: $s-2=0 \vee 3s+1=0 \Rightarrow s=2 \vee 3s=-1 \Rightarrow s=-\frac{1}{3}$. Entrambi i numeri ottenuti, 2 e $-\frac{1}{3}$, sono soluzioni dell'equazione di partenza, dato che ciascuno dei due annulla uno dei due fattori, quindi tutto il prodotto.
- Risolvere l'equazione $(4x-1)\cdot(2x+1)\cdot(4-5x)=0$. Effettuando la moltiplicazione otterremo addirittura un'equazione di terzo grado, invece applicando il principio di annullamento del prodotto avremo la risoluzione di tre equazioni di primo grado: $4x-1=0 \vee 2x+1=0 \vee 4-5x=0 \Rightarrow 4x=1 \vee 2x=-1 \vee -5x=-4 \Rightarrow x=\frac{1}{4} \vee x=-\frac{1}{2} \vee x=\frac{-4}{-5} \Leftrightarrow x=\frac{4}{5}$. Tutte e tre i numeri ottenuti sono soluzioni dell'equazione iniziale.
- Risolvere $4x^2-9=0$. Abbiamo a che fare con una equazione di secondo grado, che perciò non sappiamo risolvere. Se però osserviamo che in effetti possiamo anche scomporla come differenza di quadrati: $(2x-3)\cdot(2x+3)=0$, abbiamo ricondotto il problema a uno che sappiamo risolvere. Applichiamo quindi il principio di annullamento del prodotto: $2x-3=0 \vee 2x+3=0 \Rightarrow 2x=3 \vee 2x=-3 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \vee x=-\frac{3}{2}$
- Risolvere $y^2-4y+4=0$. Ancora una volta abbiamo a che fare con una equazione di secondo grado. Riconosciamo nel primo membro un quadrato di binomio: $y^2-4y+4=0 \Leftrightarrow (y-2)^2=0$. Pertanto risolvere la precedente equazione equivale a risolvere due volte la stessa equazione: $y-2=0$, la cui soluzione è $y=2$.
- Risolvere $z^2+10z+21=0$. Non abbiamo a che fare con un quadrato di binomio, essendo però un trinomio di secondo grado vediamo se può essere uno di quelli *notevoli*, ossia uno di quelli che possiamo comporre trovando due numeri interi la cui somma è 10 (coefficiente del monomio di primo grado) e il cui prodotto è 21 (termine noto). Questi numeri si trovano facilmente, 3 e 7, quindi: $z^2+10z+21=0 \Rightarrow (z+3)\cdot(z+7)=0$. Risolviamo le due equazioni di primo grado: $z+3=0 \vee z+7=0 \Rightarrow z=-3 \vee z=-7$, che sono le soluzioni cercate.

Fase 2: Completa …

- Risolvere l'equazione $(4x+3)\cdot(x-2)=0$. Applichiamo il ……., così riduciamo il problema alla risoluzione di …….equazioni di …….. $4x+3=0 \vee$ ……. $\Rightarrow$ ……. Entrambi i numeri ottenuti, …. e ……., sono soluzioni dell'equazione di partenza, dato che ciascuno dei due annulla ……., quindi ……..
- Risolvere l'equazione $(7m-3)\cdot(5m+5)\cdot(3-2m)=0$. Applicando ancora una volta il …… scriviamo: $7m-3=0 \vee$ ……..$\vee$ …… risolviamo ciascuna delle precedenti: …… ecco le soluzioni dell'equazione di partenza: ……
- Risolvere $64z^2-1=0$. Il membro sinistro può considerarsi lo sviluppo del prodotto notevole ……., quindi scriviamo: $(8z-1)\cdot(\ldots\ldots\ldots)=0$. Applichiamo il principio ……: $8z-1=0 \vee$ ……. $=0 \Rightarrow$ ……..

- Risolvere $z^3 - 3z^2 - 3z + 1 = 0$. Riconosciamo nel primo membro lo sviluppo del prodotto notevole ……..: $z^3 - 3z^2 - 3z + 1 = 0 \Leftrightarrow$ …….. = 0. Pertanto risolvere la precedente equazione equivale a risolvere …… volte la stessa equazione: …… = 0, la cui soluzione è z = ..
- Risolvere $x^2 + x - 12 = 0$. Vediamo se possiamo avere a che fare con un trinomio di secondo grado cerchiamo quindi due numeri interi la cui somma è 1 (coefficiente del monomio di primo grado) e il cui prodotto è …… (termine noto). Questi numeri si trovano facilmente, 4 e …., quindi scriviamo: $x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow (x + 4) \cdot (x - ….) = 0$. Risolviamo le due equazioni di primo grado: $x + 4 = 0 \vee$ …… $= 0 \Rightarrow x =$ …. $\vee\, x =$ …., che sono le soluzioni cercate.

Fase 3: Prova!

Applicando il principio di annullamento del prodotto risolvere le seguenti equazioni

1. $(3 + x) \cdot (4 - 5x) = 0$; $(1 - 2x) \cdot (2 - 3x) = 0$; $(3 - 4p) \cdot (4 + 5p) = 0$
$\left[x = -3 \vee x = \frac{5}{4}; x = \frac{1}{2} \vee x = \frac{2}{3}; p = -\frac{5}{4} \vee p = \frac{3}{4}\right]$
2. $(1 - 3z) \cdot (3z - 1) = 0$; $(-x + 1) \cdot (7x + 11) = 0$; $(2k + 4) \cdot (4 + 2k) \cdot (k - 1) = 0$
$\left[z = \frac{1}{3}; x = -\frac{11}{7} \vee x = 1; k = -2 \vee k = 1\right]$
3. $(x - 1) \cdot (2x - 2) \cdot (3x - 3) = 0$; $(6y - 1) \cdot (6y + 1) \cdot (7y - 2) = 0$; $(13x - 1) \cdot (13x + 2) \cdot (13x + 4) = 0$
$\left[x = 1; y = \pm\frac{1}{6} \vee y = \frac{2}{7}; x = -\frac{4}{13} \vee x = -\frac{2}{13} \vee x = \frac{1}{13}\right]$
4. $q \cdot (q - 1) \cdot (2q - 3) \cdot (3q + 4) = 0$; $3x \cdot (2x + 4) \cdot (4x - 6) \cdot (3x + 9) = 0$; $(2w - 1)^2 \cdot (w - 3) = 0$
$\left[q = -\frac{4}{3} \vee q = 0 \vee q = 1 \vee q = \frac{3}{2}; x = -3 \vee x = -2 \vee x = 0 \vee x = \frac{3}{2}; w = \frac{1}{2} \vee w = 3\right]$
5. $(3x - 4)^2 \cdot (x - 1)^3 = 0$; $x^4 \cdot (17x - 11) \cdot (19x + 13) = 0$ $\left[x = \frac{3}{4} \vee x = 1; x = -\frac{13}{19} \vee x = 0 \vee x = \frac{11}{17}\right]$
6. $(2z - 8) \cdot (18z + 13) \cdot (14z - 1) \cdot (13z + 15) = 0$ $\left[z = -\frac{15}{13} \vee z = -\frac{13}{18} \vee z = \frac{1}{14} \vee z = 4\right]$

Dopo aver scomposto in fattori di primo grado i membri sinistri delle seguenti equazioni, risolverle

7. $x^2 - 12x + 36 = 0$; $a^2 - 12a + 20 = 0$; $9b^2 + 12b + 4 = 0$; $8c^3 + 12c^2 + 6c + 1 = 0$
$\left[x = 6; a = 2 \vee a = 10; b = -\frac{2}{3}; c = -\frac{1}{2}\right]$
8. $64n^2 + 48n + 9 = 0$; $x^2 - x - 30 = 0$; $x^2 + 2x - 35 = 0$; $p^2 - 13p + 36 = 0$
$\left[n = -\frac{3}{8}; x = -5 \vee x = 6; x = -7 \vee x = 5; p = 4 \vee p = 9\right]$
9. $x^2 - 5x - 36 = 0$; $t^2 + 5t - 36 = 0$; $x^2 + 13x + 36 = 0$; $27y^3 - 54y^2 + 36y - 8 = 0$
$\left[x = -4 \vee x = 9; t = -9 \vee t = 4; x = -9 \vee x = -4; y = \frac{2}{3}\right]$

Nei seguenti esercizi si consiglia di scomporre con il raccoglimento parziale

10. $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$; $h^3 + 3h^2 - 16h - 48 = 0$; $x^4 - 5x^2 + 4$
$[x = -2 \vee x = 2 \vee x = 1; h = -4 \vee h = 4 \vee h = -3; x = -2 \vee x = 2 \vee x = -1 \vee x = 1]$

Equazioni fratte

Fase 1: Osserva

- L'equazione $\frac{x}{x-1} = \frac{x-5}{x+1}$ ha significato solo se $x - 1 \neq 0$ e $x + 1 \neq 0$, cioè se $x \neq \pm 1$, intendendo con

questa scritta che deve essere diverso da entrambi i numeri. Infatti se fosse a essi uguale uno dei denominatori varrebbe zero e avremmo perciò una scritta priva di senso. Ciò significa che possiamo procedere nella risoluzione effettuando il minimo comune denominatore:

$$\frac{x\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{(x-5)\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)}\Rightarrow\frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}+x+5x-5}{(x-1)\cdot(x+1)}=0\Rightarrow\frac{7x-5}{(x-1)\cdot(x+1)}=0$$

Quindi possiamo eliminare il denominatore comune, e risolvere l'equazione del solo numeratore, ottenendo: $7x = 5 \Rightarrow x=\frac{5}{7}$. A questo punto basta solo osservare che tale soluzione è diversa dai valori non accettabili e concludere che è la soluzione dell'equazione data.

- L'equazione $\frac{x}{2x+1}=\frac{x^2-3x+2}{(2x+1)\cdot(x-2)}$ ha significato solo se $x - 2 \neq 0$ e $2x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1/2, 2$. Eseguiamo: $\frac{\cancel{x^2}-2x-\cancel{x^2}+3x-2}{(2x+1)\cdot(x-2)}=0\Rightarrow\frac{x-2}{(2x+1)\cdot(x-2)}=0$. Potremmo semplificare per $x - 2$, ma così "temiamo" di perdere la soluzione $x = 2$, in effetti tale soluzione, per la condizione di esistenza, non sarebbe accettabile. Pertanto l'equazione non ha soluzioni.

Fase 2: Completa ...

- L'equazione $\frac{2a-3}{4a-1}-\frac{a+2}{2a-3}=0$, ha significato solo se è $4a - 1 \neq 0$ e ....., cioè $a \neq$ ..... e $a \neq$ ..... Effettuiamo il minimo comune denominatore: $\frac{(2a-3)\cdot(.....)-.....}{(4a-1)\cdot(2a-3)}=0$, eseguiamo i calcoli e semplifichiamo: ..... otteniamo l'equazione di primo grado: ....., la cui soluzione $a =$ ..... è accettabile perché diversa da .....
- L'equazione $\frac{2}{3y+2}-\frac{4}{6y+1}=0$, ha significato solo se è $3y + 2 \neq 0$ e ....., cioè $y \neq$ ..... e $y \neq$ ..... Effettuiamo il minimo comune denominatore: ....., eseguiamo i calcoli e semplifichiamo: ..... otteniamo ..... da cui deduciamo che l'equazione iniziale .....

Fase 3: Prova!

Risolvi le seguenti equazioni fratte, tenuto conto delle condizioni di esistenza

1. $\frac{t-1}{t-2}+\frac{3-t}{t+2}=0$; $\frac{1}{3y+2}+\frac{4}{2y-1}=0$; $\frac{a}{a-3}-\frac{2}{a+1}=\frac{a^2}{(a-3)\cdot(a+1)}$ $\left[t=\frac{4}{3};y=-\frac{1}{2};a=-6\right]$
2. $\frac{x+2}{x-2}-\frac{3x+5}{3x-1}=0$; $\frac{4}{2y+1}-\frac{1}{2y-1}=\frac{3y}{4y^2-1}$; $\frac{b+2}{b-1}+\frac{1}{(b-1)^2}=1$ $\left[x=-\frac{4}{3};y=\frac{5}{3};b=\frac{2}{3}\right]$
3. $\frac{3h+1}{h-1}+\frac{h-1}{h+1}=1+\frac{3h}{h-1}$; $\frac{2k+1}{1-k}+\frac{k^2-2k+3}{1-k^2}=\frac{3k+2}{k+1}$; $\frac{1}{z-1}=\frac{z^2-z+2}{z^3-1}$ $\left[h=3;\varnothing;z=\frac{1}{2}\right]$
4. $\frac{x^2+x-1}{x^3-1}+\frac{3x-1}{x^2+x+1}=\frac{4}{x-1}$; $\frac{2t+3+t^2}{4-t^2}+\frac{3t+1}{t-2}=\frac{1+2t}{t+2}$ $\left[x=-\frac{4}{7};t=-\frac{1}{8}\right]$
5. $\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}=\frac{2}{z-3}$; $\frac{5}{t\cdot(t-1)}+\frac{6}{(t-1)\cdot(t+1)}-\frac{3}{t\cdot(t+1)}=0$ $\left[z=\frac{5}{3};\varnothing\right]$

Equazioni parametriche

Fase 1: Osserva

L'equazione $3tx - x = 1$, può considerarsi come equazione di I grado sia nell'incognita x che nell'incognita t. Così se la consideriamo in x, t si chiamerà parametro e l'equazione si studierà al variare di tale parametro. La risoluzione sarà: $(3t - 1) \cdot x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3t-1}$. Ma ciò accadrà solo se $3t - 1 \neq 0$, cioè $t \neq 1/3$. Mentre se $t = 1/3$ otterremo la contraddizione $0 = 1$.

- Se la precedente equazione la risolvessimo nell'incognita t e nel parametro x, avremmo: $3tx = x + 1$, cioè $t = \frac{x+1}{3x}$ se $x \neq 0$. E la contraddizione $0 = 1$, se $x = 0$.
- L'equazione $(1 - x^2) \cdot a = 1 - x$, considerata nell'incognita a, ammette la soluzione $a = \frac{1-x}{1-x^2}$, solo se $1 - x^2 \neq 0$, cioè $x \neq \pm 1$. In questo caso la soluzione si semplifica in $a = \frac{1}{1+x}$. Se invece si ha $x = 1$, otteniamo: $(1 - 1^2) \cdot a = 1 - 1 \Rightarrow 0 = 0$, cioè un'identità. Infine se si ha $x = -1$, otteniamo: $(1 - (-1)^2) \cdot a = 1 + 1 \Rightarrow 0 = 2$, cioè una contraddizione.

Fase 2: Completa ...

- L'equazione $2x + y = 1$, considerata come equazione nell'incognita x e nel ..... y, ha soluzione $x =$ ..... Ciò succede per ogni valore del parametro y. Allo stesso modo, risolta nell'incognita y e nel parametro ... ammette la soluzione $y =$ ..... e ciò accade .....
- L'equazione $(1 + h) \cdot z = (1 + h)^2$, nell'incognita z ha soluzione se è $1 + h$ ....., cioè $h \neq$ ..... E tale soluzione è $z =$ ..... Se si ha $h =$ ..... invece otteniamo ..... abbiamo cioè una .....

Fase 3: Prova!

Risolvi le seguenti equazioni al variare di entrambe le incognite presenti, discutendole

1. $3x + 2y = x - y$; $4ab - 1 = 2b + a$; $xy + 2x = 3y - 1$

$$\left[\left(x = -\frac{3}{2}y; y = -\frac{2}{3}x\right); \left(a = \frac{2b-1}{4b-1}, b \neq \frac{1}{4}; b = \frac{a+1}{2\cdot(2a-1)}, a \neq \frac{1}{2}\right); \left(x = \frac{3y-1}{y+2}, y \neq -2; y = \frac{2x+1}{3-x}, x \neq 3\right)\right]$$

2. $x + y = 1$; $a - b = 2$; $x^2y = x$

$$\left[(x = 1 - y; y = 1 - x); (a = b + 2; b = a - 2); \left(x = 0 \vee x = \frac{1}{y}, y \neq 0; y = \frac{1}{x}, x \neq 0, Id: x = 0\right)\right]$$

3. $(1 + x) \cdot (y - 2) = 1 - x^2$; $z \cdot (4 - t^2) = 2 + t$; $2hk + 1 = 4h$

$$\left[(x = 1 \vee x = 3 - y; y = 3 - x); \left(z = \begin{cases} \frac{1}{2-t} & t \neq \pm 2 \\ Id. & t = -2; t = -2 \vee \frac{2z-1}{z}, z \neq 0 \\ \varnothing & t = 2 \end{cases}\right); \left(h = \frac{1}{2\cdot(2-k)}, k \neq 2; k = \frac{4h-1}{2h}, h \neq 0\right)\right]$$

4. $(x - 2) \cdot (y - 1) = (x - 1) \cdot (y - 2)$; $(t - 1)^2 \cdot h = (t - 1) \cdot (h + 1)$

$$\left[(x = y; y = x); \left(t = 1 \vee t\frac{2h+1}{h}, h \neq 0; h = \begin{cases} \frac{1}{t-2} & t \neq 1, 2 \\ Id. & t = 1 \\ \varnothing & t = 2 \end{cases}\right)\right]$$

5. $2 = ac + c$; $my + y - 2 = m - y$; $3k + kx - 2 = x - k$

$$\left[\left(a = \frac{2-c}{c}, c \neq 0; c = \frac{2}{a+1}, a \neq -1\right); \left(m = \begin{cases} -2 & y \neq 1 \\ Id. & y = 1 \end{cases}; y = \begin{cases} 1 & m \neq -2 \\ Id. & m = -2 \end{cases}\right); \left(x = \frac{2\cdot(2k-1)}{1-k}, k \neq 1; k = \frac{x+2}{x+4}, x \neq -4\right)\right]$$

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito

http://mathinterattiva.altervista.org/volume_1_4.htm

4. Problemi lineari

4.2 Risolvere problemi

Prerequisiti

- Concetto di problema
- Risoluzione di equazioni e disequazioni lineari

Obiettivi

- Tradurre un problema in un’equazione o disequazione che lo risolva
- Distinguere fra soluzioni accettabili e soluzioni non accettabili del problema
- Risolvere un problema con metodi non standard

Contenuti

- Problemi risolubili per tentativi
- Problemi risolubili con equazioni di primo grado o a esse riconducibili

Problemi risolubili per tentativi

Anche se abbiamo trovato una soluzione soddisfacente, possiamo essere ancora interessati a cercare un'altra soluzione.
[...] *Due prove sono meglio di una.* *George Polya*

Il concetto di problema è intimamente collegato alle matematiche che, quindi, si propongono come discipline che studiano e risolvono i problemi. Il matematico, pertanto, si occupa prevalentemente di risolvere un problema, ma non in un modo qualsiasi; egli va in cerca di soluzioni più semplici, più eleganti, che possano aiutare nella risoluzione di altri problemi simili o più generali. Quindi anche noi non dobbiamo accontentarci di risolvere un problema ma anche del "come" lo facciamo.
In ogni caso insegnare a risolvere problemi non è facile.
Spesso il problema viene risolto con l'intuizione, ma talvolta anche per "imitazione" utilizzando o adattando il procedimento che è servito per uno analogo. Non potendo insegnare l'intuizione, noi cercheremo di fornire alcuni esempi su problemi generali, sperando che essi possano poi servire per risolvere alcune classi di problemi analoghi.
Vi sono alcuni problemi per i quali si richiede la determinazione univoca di un elemento che faccia parte di un insieme finito e verifichi certe proprietà. Se la cardinalità dell'insieme non è particolarmente elevata si potrebbe pensare di risolvere il problema per tentativi o, per meglio dire, per verifica.
Questo procedimento è anche noto come *trial and error*, ossia tenta e verifica.

Esempio 1

Determinare un numero intero di due cifre, sapendo che la sua cifra delle decine è doppia di quella delle unità e che la somma delle due cifre è uguale a 6.
Qual è l'insieme sul quale stiamo lavorando? Tenuto conto della prima ipotesi esso è {21, 42, 63, 84}. È allora abbastanza semplice andare a determinare la somma delle cifre dei quattro numeri scoprendo che il numero cercato è 42. Addirittura se si teneva conto del fatto che nessuna delle cifre può superare la richiesta somma delle cifre, cioè 6, la ricerca poteva effettuarsi solo all'interno di {21, 42}, semplificando ancor più il lavoro di verifica.

Nell'esempio precedente abbiamo visto che procedere per tentativi non significa, come vuole il senso comune, andare a caso o cercare di indovinare. Significa piuttosto ridurre il numero dei possibili "candidati" a elemento da determinare, mediante un'appropriata applicazione delle conoscenze sul problema: in tal modo l'operazione di verifica consisterà in un numero molto ridotto di controlli.

I problemi possono essere affrontati e risolti in modi diversi: vediamo come.

Esempio 2

Giocando alla roulette Carlo ha fatto una puntata e ha vinto raddoppiando il suo denaro, ha poi lasciato una mancia di 10 *euro al croupier. Ha poi puntato ancora, triplicando il suo denaro e lasciando* 12 *euro di mancia. Infine è andato via con* 60 *euro. Con quanti soldi è andato a giocare Carlo*?

Utilizziamo un procedimento che parta dalla fine. Carlo è andato via con 60 euro dopo averne dati 12 di mancia, quindi alla fine della seconda puntata aveva 72 euro, ma poiché in tale puntata aveva triplicato il suo denaro vuol dire che prima di puntare aveva 72 : 3 = 24 (euro). Se a questa somma aggiungiamo la prima mancia, troviamo che alla fine della prima puntata aveva 34 euro, ma poiché aveva raddoppiato il suo capitale iniziale, vuol dire che Carlo era andato a giocare con 34 : 2 = 17 (euro).
Volendo, a questo punto può verificarsi se tale valore iniziale conduce a quello finale. Verificare cioè la validità dell'uguaglianza seguente: $(17 \cdot 2 - 10) \cdot 3 - 12 = 60$.

Vediamo ancora un esempio.

Esempio 3

Un anello e un paio di orecchini costano insieme 120 *euro, un anello e un braccialetto costano insieme* 110 *euro, gli orecchini e il braccialetto* 100 *euro. Quanto costano due anelli*?

Se aggiungiamo il prezzo di un anello e degli orecchini (120) a quello di un anello e un braccialetto (110) otteniamo il prezzo di due anelli, un paio di orecchini e un braccialetto (330), ma poiché noi conosciamo il prezzo degli orecchini e il braccialetto (100), togliendolo dalla precedente somma troviamo proprio il prezzo di due anelli (330 – 100 = 230).

Non dobbiamo dimenticare poi di considerare quei problemi che non hanno soluzione, proprio per come sono impostati e che quindi non devono essere risolti cominciando a fare calcoli più o meno a caso. Piuttosto se cerchiamo di capire cosa vogliono dire, ci rendiamo conto che quanto da essi richiesto è impossibile e quindi non è necessario affrontarli.

Esempio 4

- *Ad una festa vengono invitate* 42 *persone, le ragazze sono* 5 *in più dei maschi, quanti sono i maschi*?
  Il problema è ovviamente privo di soluzione, infatti essendo gli invitati in numero pari, comunque li separiamo in due classi, queste saranno costituite da numeri entrambi pari o entrambi dispari, e quindi anche la loro differenza non potrà che essere pari. Quindi le ragazze non possono essere 5 in più dei maschi. Potrebbero invece essere 2, 4, 6, 8 ... in più.
- *Aumentando ciascuno dei lati di un quadrato di* 5 *cm*, *il suo perimetro aumenta di* 25 *cm*, *quanto misura il lato del quadrato iniziale*?
  Anche in questo caso il problema è impossibile, dato che se aumentiamo ogni lato di 5 *cm*, ovviamente il perimetro aumenterà di 20 *cm* e non di 25 *cm*. Quindi in realtà stiamo ponendo una questione che non ha senso, dato che la risposta sarà impossibile se diciamo che il nuovo perimetro aumenta di un numero diverso da 20, mentre sarà indeterminato se invece diciamo che è 20.

Nelle verifiche vedremo altri problemi che possono essere risolti con le tecniche qui presentate o con altre a esse simili.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Trovare un numero di tre cifre che addizionate diano per somma 12*, in cui la cifra delle decine superi di* 1 *quella delle unità e quella delle centinaia superi di* 2 *la somma delle altre due cifre.*

Dato che cerchiamo numeri di tre cifre, la nostra indagine avviene sull'insieme {100, ... , 999} che ha 900 elementi: quindi il metodo dei tentativi non è praticabile. Cerchiamo allora di ridurre la cardinalità dell'insieme iniziale, utilizzando quanto ci viene detto. *La cifra delle decine supera di* 1 *quella delle unità*, quindi i numeri sono del tipo *cdu*, con $d = u + 1$, sono cioè: {c10, *c*21, *c*32, *c*43, *c*54, *c*65, *c*76, *c*87, *c*98}, con *c* che varia da 1 a 9. In tal modo la cardinalità dell'insieme su cui lavorare è stato ridotta notevolmente: questi sono solo $9 \cdot 9 = 81$ elementi.

Possiamo ridurla ulteriormente: *c* deve essere *maggiore di due unità della somma delle altre due cifre* e, poiché ognuno dei 9 simboli precedenti rappresenta 9 distinti numeri per i quali la somma delle cifre delle unità e decine è rispettivamente: $1 + 0 = 1$, $2 + 1 = 3$, $3 + 2 = 5$, $4 + 3 = 7$, $5 + 4 = 9$, $6 + 5 = 11$, $7 + 6 = 13$, $8 + 7 = 15$, $9 + 8 = 17$, l'insieme di lavoro si riduce al seguente: {310, 521, 732, 943}. A questo punto verificare quale dei 4 numeri ha la somma delle cifre uguale a 12 è semplicissimo. Quindi il numero cercato è 732.

Risolvere i seguenti problemi operando con un metodo per tentativi

***Livello* 1**

1. Un coltello pesa quanto due cucchiai, tre cucchiai pesano quanto un coltello e una forchetta, un mestolo pesa quanto un coltello e un cucchiaio. Se una forchetta pesa 40 grammi, quanto pesano le altre posate? (Si consiglia di usare il metodo delle pesate) [Cucchiaio = 40, coltello = 80, mestolo = 120]
2. Un padre ha il doppio dell'età di suo figlio. Venticinque anni fa il padre aveva il triplo dell'età del figlio. Quanti anni hanno padre e figlio? [100; 50]
3. Un pastore disse a un altro: "*Se mi darai otto pecore avremo lo stesso numero di animali*". Rispose l'altro: "*Dammene tu otto e io ne avrò il doppio delle tue*". Quante pecore aveva ciascuno dei due pastori? [40; 56]
4. Alla morte di un ricco signore fu data lettura del suo testamento. Egli divise i suoi soldi nel seguente modo: la metà delle sue sostanze a suo figlio e dieci mila euro alla cameriera, metà di quello che era rimasto a suo nipote e altri dieci mila euro al suo cuoco, infine i tre quarti di quel che era rimasto a un caro amico, ancora dieci mila euro li ereditò il giardiniere e con i restanti trenta mila euro furono pagate le spese del notaio e i funerali. Quanti soldi lasciò in eredità? [€ 700000]
5. Un problema di Eulero. Un padre lascia quattro figli che dividono le sue sostanze nel modo seguente: il primo prende metà del totale meno 3000 denari; il secondo prende un terzo meno 1000 denari; il terzo prende un quarto; l'ultimo prende un quinto e 600 denari. Quanti denari costituivano l'intero patrimonio e quanto prese ciascuno dei figli? [12000; 3000]
6. Nel problema precedente, se avessimo saputo che i quattro prendevano la stessa somma, erano necessarie tutte le informazioni fornite? [No, ne bastavano solo 2]

Lavoriamo insieme

Un ragazzo va al cinema e, fra il prezzo del biglietto, gelati e altri dolci che compra, spende un terzo dei soldi che ha con sé; tornando a casa non si accorge di avere un buco in tasca e perde i due terzi del denaro che gli era rimasto. Alla fine si accorge di avere solo 12 *euro; quanti soldi aveva con sé*?

I 12 euro rimasti sono un terzo del denaro che aveva prima, quindi questo denaro era € $12 \cdot 3$ = € 36. Analogamente questi costituivano i 2/3 del denaro che aveva inizialmente, che perciò era € $36 \cdot 3/2$ = € 54.

Verifichiamo. Aveva € 54; ha speso €54/3 = € 18, quindi gli sono rimasti € (54 – 18) = € 36. Perde i 2/3, cioè perde € $36 \cdot 2/3$ = € 24 e gli rimangono appunto € (36 – 24) = € 12.

7. Uno spettacolo teatrale è stato così noioso che dopo alcuni minuti metà del pubblico è andato via, dopo altri cinque minuti un terzo dei rimanenti si è alzato, ancora 10 minuti e un quarto degli spettatori si è allontanato lasciando solo 9 spettatori. Quanti erano gli spettatori all'apertura del sipario? [36]
8. Marco ha comprato alcune caramelle, una la ha mangiata subito, metà delle rimanenti le ha messe in tasca e le altre le ha nascoste. Suo fratello Luca le ha trovate, e ha ripetuto ciò che aveva fatto Marco, ne ha mangiata una e ne ha prese metà delle rimanenti, rimettendo le altre dove le aveva trovate. Lo

stesso ha poi fatto il terzo fratello Matteo. Quando l'ultimo fratello, Giovanni, ha trovato le caramelle ne erano rimaste solo 7, che egli ha preso tutte. Quante erano le caramelle inizialmente? [63]

9. Con riferimento al problema precedente, è possibile che le caramelle all'inizio fossero 89? Giustifica la risposta. [No, perché già Luca non potrebbe dividere le caramelle in parti uguali]
10. Un avaro fece il seguente accordo con un ingenuo: *Ti farò arricchire rapidamente. Fammi vedere quanto denaro hai in tasca, poiché io te ne darò altrettanto ma poi tu dovrai darmi* € 16. *Continueremo in questo modo quante volte vorrai*. L'ingenuo accettò e accecato dalla prospettiva di arricchire facilmente e dall'illusione di vedersi raddoppiare ogni volta quanto aveva in tasca, non si accorse che dopo avere raddoppiato per quattro volte il denaro che aveva in tasca, gli rimasero solo € 16 che dovette perciò dare all'avaro, rimanendo senza soldi. Quanto denaro aveva in tasca prima di iniziare? [€ 15]
11. Con riferimento al problema precedente, se l'ingenuo avesse dato ogni volta € 32, dopo quante volte sarebbe rimasto senza soldi? E quanti soldi avrebbe avuto all'inizio? [5; € 31]
12. Alla parata ginnica 9 ragazzi sono in fila indiana, Manuel occupa una posizione in modo che il numero dei ragazzi che gli stanno dietro moltiplicati per il numero di quelli che gli stanno davanti, forniscono un numero che è di 3 unità più piccolo che se avessimo effettuato la stessa moltiplicazione con Manuel messo 3 posti più avanti. In che posizione si trova Manuel? [Terza]
13. Giuseppe dà a Nicola e Tommaso lo stesso numero di biglie che ciascuno di essi già possiede. Poi Nicola fa lo stesso con Giuseppe e Tommaso, infine Tommaso ripete la stessa azione con gli altri due. Se dopo questo gioco ognuno ha 16 biglie, quante ne aveva ciascuno all'inizio? [26; 14; 8]
14. Un nastro è lungo 62 *cm*; dove deve essere tagliato se si vuole che un pezzo misuri il triplo dell'altro? [In modo che i pezzi siano lunghi 15,5 *cm* e 46,5 *cm*]

Lavoriamo insieme

Debora colora 3 *fiori di carta in* 4 *minuti. In quanto tempo colora* 5 *fiori*?
Se Debora colora 3 fiori in 4 minuti, vuol dire che colora 1 fiore in 4/3 minuti. Quindi per colorare 5 fiori ha bisogno di $5 \cdot 4/3 = 20/3$ minuti cioè 6 minuti e 40 secondi.

Livello 2

15. Se il numero A è il 30% del numero B, B è il 20% di C e D è il 50% di C. Che numero è $\frac{A}{D}$? [0,12]
16. In un giorno piovoso sono stati venduti 50 ombrelli. Erano tutti in tinta unita ma di diversi colori. Sapendo che quelli rossi erano cinque volte quelli blu, quelli verdi tre volte quelli blu, quelli neri 9 in più dei blu, quelli rosa 7 in meno di quelli neri, 5 erano rosa e 6 bianchi. Quanti ombrelli di ciascun colore sono stati venduti? [15 rossi, 3 blu, 12 neri, 9 verdi]
17. Venti uomini fanno un quarto di un lavoro in otto giorni, poiché risulta necessario completare il lavoro in cinque giorni, si assumono altre persone. Qual è il minimo numero di persone che devono assumersi? [12]
18. Un problema adattato da Eulero. Tre ragazzi Aldo, Giovanni e Giacomo giocano a biglie tre partite; poiché la posta è in palline, chi vince raddoppia il numero di quelle che già possiede. In ogni partita, uno dei tre giocatori a turno, secondo l'ordine alfabetico dei nomi, perde e gli altri due vincono, così alla fine, tutti e tre hanno x palline. Si vuol sapere quante ne aveva ciascuno prima di iniziare a giocare. Per quali x il problema ha soluzione? $\left[\frac{x}{2}, \frac{7x}{8}, \frac{13x}{8}; \text{multiplo di } 8\right]$
19. Con riferimento al problema 10, se l'ingenuo aveva inizialmente y euro, e ogni volta dava all'avaro x euro e rimaneva senza denaro sempre dopo 4 volte, qual è il rapporto fra y e x? [16/15]
20. La signora Giovanna, una cartolaia, per l'inizio dell'anno scolastico ha comprato delle penne a 2,50 euro l'una, vuole rivenderle in modo da ricavare un guadagno netto di 1,50 euro su ogni penna. Determinare il prezzo di vendita sapendo che su tale somma Giovanna deve versare il 20% di I.V.A. all'erario. [€ 5,00]
21. Un eccentrico miliardario lasciò il seguente testamento: *Lascio i* $\frac{4}{17}$ *delle mie ricchezze a mio figlio, i* $\frac{7}{13}$ *del rimanente a mia moglie,* $\frac{2}{3}$ *del resto a mia figlia e i restanti due milioni al mio cane*. Quanto

valevano le sue ricchezze? Suggerimento: ogni lascito deve essere intero. [17 milioni]

22. Un problema di Eulero. *Un padre di tre figli lasciò in eredità* 1600 *monete, dicendo che il primogenito avrebbe avuto* 200 *monete in più del secondo e il secondogenito* 100 *monete più del terzogenito. Si vuol sapere quanto ereditò ciascun figlio.* [700; 500; 400]
23. Un problema di Henry Dudeney. In una classe mista, le femmine sono il doppio dei maschi. Per Natale ogni studente fa un regalo a tutti i suoi compagni e all'insegnante. Sapendo che in tutto vengono fatti 900 regali, determinare quanti maschi e quante femmine vi sono nella classe. [10; 20]
24. Un anno fa Alex aveva un età il cui valore numerico era reversale (per esempio 27 e 72) di quella di sua madre Xela. Quest'anno invece la sua età è reversale di quella di suo padre Eric. Se la somma delle età dei suoi genitori, oggi, è di 93, determinare l'età attuale di Alex. [15 anni]

Livello 3

25. Con riferimento al problema 8, se i fratelli fossero stati 10, e l'ultimo ne ha trovata solo una, quante erano le caramelle all'inizio? [511]
26. Con riferimento al problema 10, se l'ingenuo aveva inizialmente y euro, e ogni volta dava all'avaro x euro e rimaneva senza denaro dopo n volte, qual è il rapporto fra y e x? $\left[\frac{2^n}{2^n-1}\right]$
27. Il papà di Dora da solo impiega quattro ore a tagliare l'erba del suo giardino, mentre Dora da sola impiega sei ore. Quanto tempo sarà necessario a tosare l'intero giardino se il papà aiuta Dora a tagliare l'erba finché non ne hanno tagliata esattamente la metà e poi Dora continua da sola? [4^h12^m]

Lavoriamo insieme

Trovare un numero naturale di 4 *cifre sapendo che è palindromo (cioè si legge allo stesso modo da sinistra a destra e da destra a sinistra, p.e.* 123321); *la sua cifra delle decine è tripla di quella delle unità; il prodotto delle cifre è un numero pari.*

Il numero che cerchiamo è del tipo *abba*, con a e b cifre, cioè numeri interi da 0 a 9, per b e da 1 a 9 per a, dato che la prima cifra non può essere 0. Il problema è quindi indeterminato, con questa sola informazione. Però noi conosciamo altre cose. Sappiamo che la cifra delle decine (cioè b) è tripla di quella delle unità (cioè a). Ciò significa che b deve appartenere all'insieme $\{3, 6, 9\}$ e $a \in \{1, 2, 3\}$. Quindi sono rimasti i seguenti candidati: {1331, 2662, 3993}. L'ultima informazione risolve il problema. Dato che l'unico fra i tre numeri che la soddisfa è 2662.

Livello 1

28. Determinare un numero quadrato perfetto di 4 cifre, che è ottenuto scrivendo uno accanto all'altro due numeri consecutivi di 2 cifre uno dei quali è un quadrato perfetto. [Non esiste]
29. La somma di due numeri è 12, il loro prodotto 27. Determinare la somma dei loro reciproci. Suggerimento**:** sviluppare l'espressione $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$. $\left[\frac{4}{9}\right]$
30. Generalizzare il problema precedente al caso in cui la somma è s e il prodotto p. $\left[\frac{s}{p}\right]$
31. Trovare un numero naturale di 3 cifre fra loro consecutive, sapendo che la somma delle cifre è 18. Le informazioni fornite sono sufficienti a determinare un solo numero? [567 o 765]
32. Un problema tratto da *Problemes plaisants et delectables qui se font par le nombres*, di G. Bachet. *Tre persone, A, B e C, hanno rispettivamente* 1, 2 *e* 3 *monete. Si prendono* 18 *monete, si effettua un sorteggio fra i tre e al primo estratto si danno tante monete quante ne aveva, al secondo il doppio e al terzo il quadruplo. Determinare l'ordine di estrazione dei tre nominativi se delle* 18 *monete iniziali ne sono rimaste* a) 5; b) 2; c) 4. [a) *CAB*; b) *BAC*; c) Impossibile]

Lavoriamo insieme

Se in un numero di due cifre scambiamo fra loro le cifre cosa accade? Supponiamo che il numero sia 47, scambiando le cifre diventa 74. La differenza fra i numeri è 74 – 47 = 27. Cambiamo il numero: 83 – 38 = 45. Non sembra vi sia nessuna particolarità. In effetti però le differenze sono multiple di 9. è un caso? Ragioniamo in generale il numero xy, scritto nella posizione decimale equivale a $10x + y$ (74 = 70 + 4), quindi

yx equivale a $10y + x$. Adesso $xy - yx = 10x + y - (10y + x) = 9x - 9y = 9 \cdot (x - y)$. Effettivamente la differenza è sempre multipla di 9, anzi il secondo fattore è la differenza fra le cifre, che potrebbe essere anche negativa. Così $83 - 38 = 9 \cdot (8 - 3) = 45$ e $74 - 47 = 9 \cdot (7 - 4) = 27$.

Livello 2

33. Un numero di tre cifre aumenta di 9, se scambiamo fra loro le cifre delle decine e delle unità, e cresce di 90, se scambiamo le cifre delle centinaia e delle decine. Di quanto aumenterà se scambiamo le cifre delle centinaia e delle unità? [Aumenta di 198]
34. Con riferimento al precedente quesito in che relazione sono le cifre tra di loro? Quali possono essere i numeri? [Ciascuna cifra è consecutiva di quella che le sta a sinistra; 123; 234; ...; 789]
35. Determinare un numero di 5 cifre sapendo che se si legge da sinistra a destra si ottiene un numero maggiore di 42966 del numero che si ottiene leggendolo da destra a sinistra. Inoltre la sua cifra delle unità e quella delle migliaia sono uguali e ciascuna vale il triplo della cifra delle centinaia. [73103]
36. Un numero primo di 3 cifre ha la particolarità che tutte le sue cifre sono numeri primi, così come i numeri che si ottengono prendendo due cifre consecutive qualsiasi. Si ricordi che 1 non è numero primo. Qual è il numero? [373]
37. Un problema di Eulero. Un padre lascia diversi figli che dividono le sue sostanze nel modo seguente: il primogenito prende 100 denari e $\frac{1}{10}$ di quel che rimane, il secondo 200 denari e $\frac{1}{10}$ del rimanente, il terzo 300 denari e $\frac{1}{10}$ del rimanente e così via fino all'ultimo che prendendo la sua parte di denari crescente di 100 euro rispetto al precedente, non lascia altro. Sapendo che tutti hanno preso lo stesso ammontare di denari, si vuol sapere: quanti denari costituivano il patrimonio, quanti figli vi erano e quanto prese ciascuno dei figli. [8100; 9; 900]

Livello 3

38. Beatrice ha 14 anni e suo padre 41. Numeri, come 14 e 41, che sono ottenuti uno dall'altro cambiando l'ordine di lettura si dicono fra loro *reversali*. Fra quanti anni le età di padre e figlia saranno ancora una coppia di numeri reversali? [11]
39. Con riferimento al problema precedente, se il padre vive fino a 99 anni, quante altre volte succederà? Qual è la regola generale? [5; La differenza fra le cifre deve essere 3]
40. Determinare un numero quadrato perfetto di 6 cifre, che è ottenuto scrivendo uno accanto all'altro due numeri consecutivi di 3 cifre. Si sa inoltre che la somma delle sue cifre è 27 e che il numero minore di 3 cifre ha la cifra delle unità divisibile per il numero formato con le altre due cifre. [328329]

Giustificare, senza risolverli, perché i seguenti problemi sono privi di soluzione

Livello 2

41. Determinare un numero di 5 cifre in modo che ciascuna di esse sia doppia di quella che la precede. [Al massimo possono aversi 4 cifre: 1248]
42. Determinare un numero di 4 cifre che sono numeri primi, in modo che tutti i numeri che si ottengono scegliendo comunque 2 di queste cifre siano essi numeri primi. [Una coppia deve essere 25 o 52]
43. Determinare una soluzione intera dell'equazione $2x + 7513 = 4y$. [La somma di un pari e un dispari, non può essere pari]
44. La somma delle età di un padre e un figlio è uguale al prodotto delle stesse età. [L'unica soluzione possibile è la coppia (2; 2)]
45. Determinare le misure intere dei lati di un triangolo scaleno di perimetro che misura 6 *cm*. [L'unica soluzione possibile è (1, 2, 3) che non verifica la disuguaglianza triangolare]
46. Determinare un quadrato perfetto in cui la cifra delle unità è pari ma non quadrato perfetto ed è doppia della cifra delle decine, che a sua volta è doppia di quella delle centinaia. [Non ci sono quadrati perfetti che finiscono per 8]

Problemi risolubili con equazioni di primo grado o a esse riconducibili

Adesso consideriamo dei procedimenti che risolvono i problemi con l'ausilio delle equazioni.
Prendiamo in considerazione il seguente problema proposto e risolto da Nicolò Tartaglia nel suo libro *Quesiti et inventioni diverse* del 1546.

Esempio 5

Un padre lascia in eredità ai suoi figli dei ducati che dovranno ripartirsi nel seguente modo: il primo dovrà avere un ducato e un ottavo della parte rimanente, il secondo due ducati e un ottavo della parte rimanente, il terzo tre ducati e un ottavo della parte rimanente, così continuando fino al penultimo. L'ultimo riceverà invece ciò che sarà rimasto. In tal modo tutti i figli riceveranno la stessa quantità di ducati. Si vuol sapere quanti sono i figli e quanti erano i ducati da dividere.

Sia d la quantità incognita dei ducati, sappiamo allora che il primo riceverà $1+\frac{1}{8}\cdot(d-1)=\frac{1}{8}d+\frac{7}{8}$, lasciando in tal modo: $d-\left(\frac{7}{8}+\frac{1}{8}d\right)=\frac{7}{8}\cdot(d-1)$ ducati ancora da dividere. Perciò il secondo riceverà

$$2+\frac{1}{8}\cdot\left[\frac{7}{8}\cdot(d-1)-2\right]=2+\frac{7}{64}d-\frac{7}{64}-\frac{1}{4}=\frac{105+7d}{64}$$

Potremmo così continuare il procedimento per determinare quanti ducati otterrà il terzo e via dicendo.
Il problema però è che intanto non sappiamo quando fermarci e poi non abbiamo bisogno di andare oltre, dato che sappiamo che tutti i figli, quindi anche i primi due, hanno ottenuto la stessa somma. Quindi l'equazione risolvente il problema è: $\frac{7+d}{8}=\frac{105+7d}{64}$, che semplificata ci fornisce la soluzione: $d = 49$.

Per determinare il numero di figli basta vedere quanti ducati toccarono a ognuno, cioè: $\frac{1}{8}\cdot(d+7) = 7$ e poiché $49 = 7^2$, anche i figli erano 7.
È curioso notare che Tartaglia risolve la questione dicendo semplicemente che il numero dei ducati sono uguali a $(8 – 1)^2$; ma non vi fornisce spiegazioni del perché debba applicarsi questa formula "magica".

Ancora un esempio.

Esempio 6

La somma di due numeri consecutivi è 203, *determinare i numeri*.
Saremmo tentati di scrivere la seguente equazione: $x + y = 203$, ma otterremmo in tal modo una equazione in due variabili che non sappiamo risolvere. Se pensiamo però che i due numeri sono consecutivi, è inutile dare loro dei nomi simbolici diversi: se il minore lo chiamiamo x, il maggiore sarà $x + 1$ e, se il maggiore lo chiamiamo x, il minore sarà $x – 1$. Così, a seconda di quale delle due scelte applichiamo, otteniamo le due equazioni: $x + (x + 1) = 203$ o $x + (x – 1) = 203$, che hanno rispettivamente le soluzioni $x = 101$ e $x =102$.
Le due soluzioni forniscono proprio i due numeri cercati: evidentemente non è necessario risolvere entrambe le equazioni.

Nelle verifiche vedremo molti altri esempi.

L'angolo storico

Si può dire che l'attività risolutrice di problemi è presente nella storia delle matematiche sin dai suoi albori, probabilmente è stata una delle cause "scatenanti" dello sviluppo della disciplina. Abbiamo parlato diverse volte del cosiddetto papiro di Rhind o Ahmes, che era appunto una raccolta di problemi di diversa natura, qualcuno pratico, altri invece di puro diletto. Questa ambivalenza, manifestatasi da subito, è stata e continua a essere presente nelle matematiche. Da un lato il problema che nasce dalla vita di ogni giorno, che è necessario, importante, indispensabile risolvere, dall'altra il problema che viene posto per puro piacere o per il gusto della sfida.
Brevemente ricordiamo alcune delle raccolte di "problemi" che maggiore eco hanno avuto nella lunga storia delle matematiche.

Cominciamo con il *Libro dei lemmi*, dovuto ad Archimede (circa 287 a.C – 21 a.C.), nel quale il grande siracusano enunciava diverse questioni geometriche di scarsa applicazione pratica, e un problema rimasto famoso come il problema dei buoi di Trinacria, nel quale poneva una complicatissima questione che sarà risolta con molte difficoltà solo migliaia di anni più tardi. Passiamo a parlare di Diofanto di Alessandria (vissuto in un periodo compreso tra il 250 e il 300 d.C.), che scrisse l'*Arithmetica*, in 13 libri, dei quali ce ne sono pervenuti solo 7, una raccolta di circa 150 problemi che trattavano spesso problemi indeterminati, dei quali si ricercavano però solo soluzioni intere o razionali. Spostandoci in India troviamo un vero e proprio fiorire di collezioni di problemi, molti dei quali privi di applicazioni esterne alle matematiche. Intanto il *Sulvasutra*, un'opera che è stata probabilmente composta in diversi secoli da più autori, a partire dal 500 a.C.; è interessante segnalare che quasi tutte le raccolte indiane erano espresse in versi. Troviamo ancora esempi di tali composizioni nel X secolo, in particolare ricordiamo il *Lilavati* di Bhaskara (circa 1114 – 1185). Curiosa la motivazione, forse leggendaria, della motivazione sulla composizione di quest'opera, dedicata alla figlia, chiamata appunto Lilavati. Bhaskara, che si occupava anche di astrologia, aveva calcolato che la figlia doveva sposarsi esattamente in un certo momento, diversamente il suo matrimonio sarebbe stato infelice. Per essere certo di questo fatto aveva costruito un preciso orologio ad acqua. Purtroppo qualche ora prima del momento fatale, Lilavati inavvertitamente fece cadere una perla della propria collana all'interno dell'orologio, bloccando così il meccanismo di fuoriuscita dell'acqua; quando ci si accorse di ciò il tempo era trascorso e il matrimonio fu annullato. Bhaskara quindi compose il *Lilavati* per confortare la figlia. Nel Rinascimento, in Italia, Tartaglia, Cardano e gli altri grandi matematici dell'epoca composero, fra l'altro, molte raccolte di problemi, qualcuno dei quali presentiamo anche noi come esempi o esercizi.
Ci fermiamo qui, ma ti accorgerai, leggendo gli esercizi, i diversi contributi provenienti da tutte le parti del globo e da tutte le epoche, a questa attività formativa delle matematiche.

L'Antologia

Riportiamo alcuni passi tratti da qualcuno dei trattati relativi alla risoluzione di problemi più importanti della storia delle matematiche.

Papiro di Rhind, problema numero 24

La numerazione naturalmente è stata aggiunta dai commentatori

> «*Una quantità e il suo settimo sono aggiunti, sommando 19. Quanto vale la quantità?*»

Intanto diciamo che quello che noi abbiamo tradotto *quantità* è denotato con *aha*, e significa mucchio. Il problema è molto semplice e porta all'impostazione dell'equazione: $x+\frac{1}{7}x=19$, la cui soluzione, facilmente si trova essere $x=19\cdot\frac{7}{8}=\frac{133}{8}$. La risoluzione proposta da Ahmes, si avvale del cosiddetto metodo della falsa posizione, ossia a partire da un valore presupposto corretto, si fanno degli opportuni aggiustamenti fino ad arrivare alla giusta soluzione.

Passiamo a enunciare solamente il cosiddetto problema dei buoi di Archimede. Come spesso accade in Archimede, i problemi sono proposti in lettere indirizzate ad altri scienziati dell'epoca, in questo caso si tratta di Eratostene di Cirene. Tratto dall'edizione delle Opera di Archimede, a cura di Attilio Frajese, per la UTET, 1974.

Archimede, problema dei buoi

> «*Amico, se partecipi della sapienza, calcola, usando diligenza, qual era il numero dei buoi del Sole che pascolavano nelle pianure della sicula Trinacria, divisi in quattro gruppi di colori diversi: l'uno bianco come il latte, il secondo di color nero lucente, il terzo fulvo e il quarto screziato.*
> *In ciascun gruppo c'erano tori in quantità, divisi secondo la seguente proporzione: immagina, o amico, che i bianchi fossero in numero uguale ad una metà più un terzo dei neri, più tutti i*

fulvi; e che i neri fossero in numero uguale alla quarta parte più un quinto degli screziati, più tutti i fulvi. Considera inoltre che i restanti screziati fossero in numero uguale alla sesta parte più un settimo dei tori bianchi più tutti i fulvi.
Per le vacche valga questo: le bianche erano in numero uguale alla terza parte più la quarta di tutti i bovini neri, le nere erano in numero uguale alla quarta parte più la quinta di tutti i bovini screziati, le screziate erano in numero uguale alla quinta parte più la sesta di tutti i bovini fulvi, e le fulve erano in numero uguale alla metà della terza parte più un settimo di tutti i bovini bianchi.
Amico, se tu dirai veramente quanti erano i buoi del Sole, quale era il numero dei ben pasciuti tori e quante erano le vacche di ciascun colore, nessuno dirà che sei ignorante o inesperto sui numeri: tuttavia non sarai ancora annoverato tra i sapienti.
Ma ora osserva come tutti i buoi del Sole erano situati. I tori bianchi, se mescolavano le loro quantità con i neri, formavano un gruppo avente lunghezza delle stessa misura della larghezza, e tale da occupare tutte le pianure della Trinacria. Inoltre i fulvi, insieme con gli screziati, formavano una figura triangolare, a prescindere dalla presenza di tori di altro colore.
Se tu troverai queste cose e se in modo comprensibile indicherai tutte le misure, va orgoglioso come colui che ha riportato la vittoria, e sarai giudicato del tutto provetto nella scienza.»

Tralasciando di osservare l'estrema complicazione delle condizioni da verificare, risulta interessante segnalare che Archimede ritiene *non ignorante* ma anche *non ancora sapiente*, chi risolverà solo la prima parte del quesito. Diciamo che abbiamo a che fare con un problema in cui vi sono 7 equazioni e 8 incognite, e soprattutto che la soluzione minima del problema porta a numeri incredibili, che hanno 206545 cifre. Certo dovevamo immaginarlo dato che Archimede ci avvisa che questi tori ricoprivano l'antica Sicilia.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Consideriamo un vecchio problema. *Viene chiesto a Pitagora il numero dei suoi allievi; egli risponde che metà studiano le scienze matematiche, un quarto si occupa di studiare la natura, un settimo si trova in meditazione e rimangono ancora tre donne. Si chiede quanti sono i discepoli di Pitagora.*
Indicato con d il numero incognito dei discepoli, in base alla risposta del maestro, possiamo scrivere la seguente equazione: $d = \frac{d}{2} + \frac{d}{4} + \frac{d}{7} + 3 \Rightarrow 28d = 14d + 7d + 4d + 84 \Rightarrow 3d = 84 \Rightarrow d = 28$.

Risolvere i seguenti problemi impostando le dovute equazioni

***Livello* 1**

1. In una scuola vi sono 3 volte più ragazzi che ragazze e nove volte più ragazze che insegnanti. Indicando i ragazzi con m, le ragazze con f e gli insegnanti con i. Esprimere il numero totale di individui come funzione di m. $\left[\frac{37}{27}m\right]$
2. Con riferimento al precedente problema qual è il minimo numero di ragazzi per cui il problema ha soluzione? In questo caso quante sono le ragazze quanti gli insegnanti? [27; 9; 1]
3. Un problema del papiro di Rhind o Ahmes (circa 1650 a. C). Una quantità e la sua metà valgono 16. Quanto vale la quantità? $\left[\frac{32}{3}\right]$
4. Un problema del papiro di Rhind. Una quantità e i suoi 2/3 sono sommati, da questa somma ne togliamo 1/3, ottenendo 10. Quanto vale la quantità? [7,5]
5. Determinare tre numeri interi consecutivi la cui somma valga –3. [–2; –1; 0]
6. Sommando cinque numeri interi consecutivi si ottiene 155. Determinare i cinque numeri. [29, 30, 31, 32, 33]
7. Da un manoscritto indiano del 1150. *Da un mazzo di fiori di loto un terzo, un quinto, un sesto e un quarto furono offerti a Siva, Visnu, al Sole e a Bhavani rispettivamente. I rimanenti sei loti furono dati al venerabile precettore. Di' rapidamente quanti fiori conteneva il mazzo.* [120]
8. Un uomo acquista una casa per 100000 euro e l'affitta. Il 15% dell'affitto mensile lo spende per la manutenzione della casa. Dopo aver pagato 1180 euro l'anno di tasse, calcola di aver ottenuto un guadagno annuo del 2,9% sul prezzo di acquisto. Si vuol sapere l'ammontare dell'affitto mensile. [€ 4800]
9. Un allevatore divide la sua mandria fra i suoi cinque figli, in modo che ciascuno ne prenda rispettivamente 1/3, 1/4, 1/6, 1/8 e 30 capi. Quanti erano i capi prima della divisione? [240]
10. Un quesito di Sridhara, un matematico indiano nato nel 991. *Metà, un sesto e un dodicesimo di un'asta sono immerse rispettivamente nell'acqua, nell'argilla e nella sabbia. Emergono due hastas (un'antica misura indiana). Quanto è lunga l'asta*? [8 hasta]
11. Un quesito di Sridhara. *La collana di perle di una dama si ruppe e la sua terza parte cadde a terra. La quinta parte cadde nella scollatura, la sesta parte fu presa dalla dama e la decima parte dal suo amato. Sei perle rimasero sul filo. Dimmi, di quante perle era fatta la collana*? [30]
12. Un quesito di Mahavira, un matematico indiano del IX secolo. *Un potente, invincibile, eccellente serpente nero, lungo* 32 *hasta entrò in un buco al ritmo di* 7,5 *angulas ogni* 5/14 *di giorno, ma la sua coda cresce al ritmo di* 11/4 *di angulas ogni quarto di giorno. O ornamento degli aritmetici, dimmi dopo quanti giorni il serpente sarà interamente nella sua tana*? 24 angulas fanno 1 hasta. [384/5]
13. Dal Lilavati, un'opera indiana del XII secolo. *Da uno sciame di api un quinto si posò su fiori di kadamba, un terzo su fiori di silindhri, tre volte la differenza di questi numeri volò su un germoglio di kutaja. Un'ape, l'unica rimasta, vagò per l'aria, attirata ugualmente dal gelsomino e dal pandano. Dimmi, bella donna, quante erano le api*? [15]
14. Il seguente problema è stato scoperto nel 1881 in India e probabilmente risale almeno al tredicesimo secolo. *Un mercante porta la sua merce da uno stato a un altro e per far ciò passa tre confini pagando le rispettive dogane. Sapendo che la dogana viene pagata in merce e che il mercante lascia al primo confine* $\frac{1}{3}$ *dei suoi sacchi, al secondo* $\frac{1}{4}$ *di quel che gli è rimasto e al terzo* $\frac{1}{5}$ *di quel che ancora ha e*

che consegna 24 *sacchi, determinare quanti sacchi aveva con sé alla partenza.* [60]

15. Dalle *Propositiones ad acuendos juvenes*, un'opera di Alcuino di York, del VIII secolo d.C. *Un uomo camminando per strada vide altri viandanti che gli andavano incontro e disse loro: «Volevo che foste altrettanti quanti siete più metà della metà, più di nuovo metà della metà, allora con me sareste* 100». *Dica, chi vuole, quanti erano quelli che da lui furono visti all'inizio.* [36]
16. Dalle *Propositiones ad acuendos juvenes*. *Due uomini che camminavano per la strada, vedendo delle cicogne dissero fra sé: «Quante sono?» Confabulando fra loro sul numero dissero: «Se fossero altrettante e tre volte tante e poi la metà del terzo, e aggiunte due sarebbero* 100». *Dica, chi è in grado, quante erano quelle che da essi furono viste all'inizio.* [28]
17. Da un manoscritto di fra Luca Pacioli, matematico del '400. *Due hanno colto delle mele in un giardino, uno ne ha prese tante che se ne desse una all'altro, questo ne avrebbe il doppio di quante ne avrebbe lui; mentre se l'altro gliene desse una, ne avrebbero la stessa quantità. Quante ne ha colte ciascuno*? [5 e 7]
18. Per le vacanze di Natale l'insegnante di matematica ha lasciato da svolgere degli esercizi dicendo ai ragazzi che essi, a partire dal secondo giorno, dovranno farne tre in più di quanti ne hanno fatti il giorno precedente. Se dopo 5 giorni hanno fatto 120 esercizi, quanti ne hanno fatti il primo giorno? [18]

Lavoriamo insieme

Tre numeri sommati equivalgono a 48, inoltre il secondo numero supera di due unità il primo, mentre il terzo è i $\frac{5}{7}$ della somma dei primi due; determinare i numeri.

Sebbene a prima vista appaia necessario introdurre più variabili, possiamo utilizzarne una sola: infatti se indichiamo con n il primo numero, il secondo sarà $n + 2$ e il terzo $5 \cdot \frac{n+n+2}{7} = \frac{10(n+1)}{7}$. Quindi l'equazione risolvente è: $n + (n + 2) + \frac{10 \cdot (n+1)}{7} = 48$, la cui soluzione è $n = 13$. I numeri cercati sono 13, 15 e 20.

Livello 2

19. Aggiungendo uno stesso numero al numeratore e al denominatore della frazione $\frac{7}{3}$, otteniamo la frazione reciproca. Quanto vale il numero incognito? [– 10]
20. Determinare 9 numeri, multipli di 4 e consecutivi (tali cioè che siano fra loro consecutivi i rispettivi fattori di molteplicità, per esempio 4, 8, 12, …), la cui somma valga 540. [44, 48, ... 76]
21. Risolvere il problema di Tartaglia visto nell'esempio 5, nel caso in cui il primo figlio riceve 1 denaro e $\frac{1}{18}$ del rimanente, il secondo 2 denari e 1/18 del rimanente e così via. Quanti sono i figli? [17]
22. Dalle *Propositiones ad acuendos juvenes*. *Un padre di famiglia morendo lasciò dei figli piccoli,* 960 *soldi in eredità e una moglie incinta. Ordinò che se fosse nato un maschio avrebbe ricevuto i* 3/4 *del totale e la madre avrebbe ricevuto* 1/4. *Se fosse nata una figlia avrebbe ricevuto* 7/12 *e la madre* 5/12. *Accadde poi che essa partorì due gemelli, un maschio e una femmina. Spieghi, chi è in grado, quanto ricevette la madre e quanto i figli.* [177,77 alla madre, 533,31 al figlio e 248,85 alla figlia]
23. Con riferimento al precedente quesito, Alcuino fornisce la seguente soluzione: divide metà dell'eredità fra madre e figlio e l'altra metà fra madre e figlia, da cui la madre eredita 320 soldi, il figlio maschio 360 e la femmina 280. Spiegare perché questa soluzione non è corretta.

Lavoriamo insieme

Nel 1912 *la popolazione della città di Abra aumentò del* 20%, *mentre la popolazione di Cadabra diminuì del* 10%. *In tal modo le due città avevano lo stesso numero di abitanti. In origine, quale percentuale della popolazione di Cadabra era la popolazione della città di Abra*? Sia x la popolazione della città di Abra prima dell'aumento, y quella di Cadabra. Nel 1912 le due popolazioni sono $x + 0{,}2x = 1{,}2x$ e $y - 0{,}1y = 0{,}9y$. E queste espressioni sono uguali, cioè $1{,}2x = 0{,}9y$. Pertanto $\frac{12}{10}x = \frac{9}{10}y \Rightarrow 12x = 9y \Rightarrow 4x = 3y \Rightarrow x = \frac{3}{4}y$, cioè la popolazione di Abra era il 75% di quella di Cadabra.

24. Una banca propone i seguenti servizi di investimento interesse del 3,5% e spese fisse di € 25,00 oppure interesse del 4,0 % e spese fisse di € 32,00. Per quale somma i due servizi sono equivalenti? Quanto vale in questo caso l'interesse netto maturato e che percentuale del capitale investito rappresenta? [€ 1400,00; € 24,00; ≈ 1,71%]
25. Gianni ha comprato cinque copie di un libro, una per sé e le altre per regalarle. I libri erano venduti con lo sconto del 10%, ma ha dovuto pagare un extra del 3,5% sul prezzo scontato, perché ha scelto la versione lusso e ha pagato € 0,35 per ogni confezione regalo. Se complessivamente ha speso € 92,03, quanto costava il libro senza sconto, nella versione più economica? [€ 20,00]
26. Trovare sei numeri consecutivi multipli di 5 la cui somma è il minimo comune multiplo di 13 e 15. [20; 25; 30; 35; 40; 45]
27. La somma di tre numeri è 98, il rapporto del primo con il secondo è $\frac{2}{3}$ e il rapporto del secondo al terzo è $\frac{5}{8}$. Quanto vale il secondo numero? [30]
28. In un test con 28 domande si assegnano 5 punti per ogni risposta esatta, si tolgono 2 punti per ogni risposte errata e si assegna un punto per ogni risposta non data. Se Marco risponde a tutte le domande e consegue 0 punti, quante risposte ha sbagliato? [20]
29. Risolvere il problema precedente nel caso in cui le domande fossero state 30. [Impossibile]
30. In una corsa automobilistica su una pista circolare la macchina di Joe è messa in una posizione tale che un terzo delle macchine che la precedono aggiunte a tre quarti delle macchine che la seguono uguagliano il numero totale delle macchine in gara. Quante macchine partecipano alla corsa? [13]
31. Aldo chiamò Berto perché gli facesse un certo lavoro. Sapendo che Berto era pigro, per stimolarlo a finire il prima possibile, Aldo promise di dargli 50 euro per ogni giorno di lavoro ma di togliergliene 70 per ogni giorno che non fosse venuto a lavorare. Berto finì il lavoro dopo 48 giorni e non ricevette neanche un soldo. Quanti giorni lavorò? [28]
32. Un libraio ha sistemato 21 libri in uno stesso scaffale in modo che siano ordinati a seconda del loro prezzo. Ariel compra il libro più costoso, Teodora compra il libro che occupa la posizione centrale e Giancarlo quello che occupa la posizione che divide la fila di libri in due parti di cui una è il triplo dell'altra. Sapendo che la differenza di prezzo fra due libri adiacenti è 1 euro e che Teodora e Giancarlo insieme hanno speso quanto Ariel, determinare quanto costa il libro più economico. [€ 5,00]
33. Nel 2007 nei pressi di una cittadina è stata aperta una grossa fabbrica, così la popolazione è aumentata di 1200 persone ed è rimasta stabile fino al 2017 quando, per la crisi economica, si sono dovuti chiudere alcuni reparti licenziando diverse persone. Così la popolazione è diminuita dell'11%, che corrisponde a 32 persone in meno rispetto al 2007. Quanti abitanti vi erano nella cittadina prima dell'apertura della fabbrica? [10000]
34. Il seguente problema è tratto da un antico papiro greco, scritto nel secondo secolo e noto come papiro del Michigan: *Quattro numeri sommati danno* 9900*, il secondo supera il primo di un settimo del primo, il terzo supera la somma dei primi due di* 300 *e il quarto supera la somma dei primi tre di* 300*. Quali sono i numeri*? [1050; 1200; 2550; 5100]
35. Alcuni ladri discutevano su come dividere il bottino delle loro rapine, consistente in un certo numero di forme di parmigiano. Prima pensavano di prendersi ciascuno 6 forme, ma rimanevano cinque forme da distribuire, allora decisero di prenderne sette a testa, ma in tal modo ne mancavano otto perché tutti ne avessero lo stesso numero. Quanti erano i ladri e quante le forme rubate? [13; 83]
36. Un problema adattato da uno di Henry Dudeney. *Un gioielliere ha usato* 33 *perle, tutte di diversa grandezza e valore, per formare una collana. Fra due perle qualsiasi vale di più quella più grande. La perla più preziosa è posta al centro. La perla alla sua immediata sinistra vale* 100 *euro in meno di essa, e mano a mano che ci si sposta verso la chiusura della collana ogni perla vale* 100 *euro in meno della precedente. Stesso discorso per le perle alla destra della centrale, solo che il deprezzamento è di* 150 *euro alla volta. Se il valore complessivo della collana è* € 65000*, quanto vale la perla centrale*? [€ 3000]
37. Un avaro ha acquistato 200 litri di vino per rivenderlo. Per aumentare il suo guadagno ha aggiunto acqua in modo da costituire il 20% del totale. Dopo avere venduto 80 litri di questa miscela, dato che i clienti non si sono lamentati, ha deciso di ridurre al 64% la percentuale di vino. Quanti litri di acqua deve aggiungere per ottenere ciò? [40]

38. Uno sport molto praticato di recente consiste nello scalare i grattacieli. Uno scalatore alto 180 *cm* riesce a salire di un'altezza pari a 10 volte la sua nel primo minuto, di un'altezza pari a 9 volte la sua nel secondo minuto e così via, finché al decimo minuto si ferma a riposare. Un giorno, mentre si riposava scivolò, ma fortunatamente riuscì ad aggrapparsi alla corda a un'altezza pari a un quarto di quella totale e riprese a salire. Dopo dieci minuti si fermò a riposare e vide che era arrivato a $\frac{2}{3}$ dell'altezza del grattacielo. Quanto è alto il grattacielo? [*m* 237,6]
39. Da un'indagine svolta negli U.S.A. nel 1995, si è appurato che solo il 52% degli studenti che si dedicano agli sport si laurea e, in particolare, si laurea il 55% delle atlete donne e il 48% degli atleti maschi. Qual è il rapporto fra il numero degli atleti studenti maschi e femmine? [3/4]

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente problema enunciato dal famoso enigmista inglese di Henry Dudeney. *Una contadina aveva delle oche che vendette nel seguente modo. Al primo cliente ne vendette metà di quante ne aveva più mezza oca. Al secondo un quarto di quante ne erano rimaste e tre quarti di oca. Infine vendette un quinto delle oche rimaste e un quinto di oca. Alla fine le rimasero* 19 *oche. Tenuto conto che non uccise nessuna oca, determinare con quante oche era andata al mercato la contadina.*

Il fatto appare paradossale, dato che sapere che vengono vendute mezza oca, tre quarti e un quinto di oca, sembra in contraddizione con il fatto che nessuna oca venga uccisa. In effetti è solo una sensazione. Difatti se all'inizio le oche fossero state in numero pari, allora la mezza oca doveva essere effettivamente tagliata, quindi uccisa. Ma se invece le oche fossero state in numero dispari ciò servirebbe proprio a non uccidere alcuna oca. Se per esempio le oche inizialmente fossero state 23, la loro meta è 11 e mezza oca, così l'aggiunta di mezza oca fa sì che la contadina venda 12 oche vive.

Traduciamo in linguaggio matematico quanto ci viene detto. Indichiamo con x il numero iniziale di oche.

$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2}$ sono le oche vendute al primo cliente, quindi ne sono rimaste in numero di $x-\frac{x+1}{2}=\frac{2x-x-1}{2}=\frac{x-1}{2}$. Al secondo cliente vengono vendute $\frac{1}{4}\cdot\frac{x-1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{x-1+6}{8}=\frac{x+5}{8}$ oche e ne rimangono perciò $\frac{x-1}{2}-\frac{x+5}{8}=\frac{4x-4-x-5}{8}=\frac{3x-9}{8}$. Infine il terzo cliente ne compra $\frac{1}{5}\cdot\frac{3x-9}{8}+\frac{1}{5}=\frac{3x-9+8}{40}=\frac{3x-1}{40}$ e ne rimangono $\frac{3x-9}{8}-\frac{3x-1}{40}=\frac{15x-45-3x+1}{40}=\frac{12x-44}{40}=\frac{3x-11}{10}$, che equivalgono a 19. Quindi la semplice equazione risolvente è:

$$\frac{3x-11}{10}=19\Rightarrow 3x-11=190\Rightarrow 3x=201\Rightarrow x=\frac{201}{3}\Rightarrow x=67\,.$$

Verifichiamo la correttezza del risultato. All'inizio 67, ne vende 67/2+ 1/2 = 34, ne restano 33; ne vende 33/4 + 3/4 = 9, ne restano 24; ne vende 24/5 + 1/5 = 5, ne restano 19.

Livello 3

40. In un test con p domande si assegnano 5 punti per ogni risposta esatta e si tolgono 3 punti per ogni risposta sbagliata. Affinché uno studente che risponde a tutte le domande ottenga zero punti, che proprietà deve verificare p? [Deve essere pari]
41. Per quali valori assegnati al numero n di domande il problema 28 ha soluzione? [n multiplo di 7]
42. La somma di 5 numeri interi consecutivi è s, per quali valori di s il problema ha soluzione? [Deve essere multiplo di 5]
43. La somma di un numero dispari n di interi consecutivi è s, per quali valori di s il problema ha soluzione? [Deve essere multiplo di n]
44. Con relazione al precedente quesito, se n fosse pari, cosa potremmo dire di s? [$s-1$ deve essere multiplo di n]
45. Generalizzare il problema di Tartaglia dell'esempio 5, quando ciascuno dei figli riceve 1 ducato e $1/n$ del totale, 2 ducati e $1/n$ del totale e così via. Quanti sono i ducati e quanti i figli? [$(n-1)^2$, $n-1$]
46. Il poeta Samuel Taylor Coleridge, quello della famosa *Rima dell'antico marinaio*, si dilettava di matematica. Nei suoi appunti è stato trovato il seguente problema. *Una contadina andò al mercato a ven-*

dere le sue uova. Ebbe 3 *clienti a ognuno dei quali vendette metà delle uova che aveva in quel momento più mezzo uovo, ma senza mai romperne neanche uno. Alla fine le rimasero* 3 *uova*. Il fatto appare paradossale ma è invece possibile. Vogliamo sapere con quante uova la contadina uscì di casa. [31]

47. Se la contadina del problema precedente avesse avuto 7 clienti a ognuno dei quali vendere sempre la metà delle uova che aveva in quel momento più mezzo uovo, quante uova minimo doveva avere per venderle tutte? [127]
48. Se il prezzo di 50 uova viene diminuito di € x, un uovo verrebbe a costare € 0,06 in meno che se lo stesso prezzo fosse aumentato di € x. Quanto vale x? Con queste informazioni siamo in grado di determinare il prezzo di un uovo? [€ 1,50; No]
49. Prima di uscire Luana dà un'occhiata all'orologio, al suo ritorno, meno di un'ora dopo, guarda ancora le lancette dell'orologio e nota che quella dei minuti e quella delle ore hanno scambiato esattamente le rispettive precedenti posizioni. Quanto tempo è stata fuori? [$\approx 50^m46^s$]
50. Con riferimento al precedente quesito, possiamo stabilire l'ora in cui Luana è uscita o rientrata? Cosa possiamo stabilire con certezza? [No; Che all'uscita la lancetta dei minuti precede quella delle ore]

Problemi tratti dai Mathematical puzzles di Sam Loyd

51. Un problema di Sam Loyd. Ad una recente elezione, senza contare le schede bianche e nulle, ci furono 5219 voti se il vincitore superò i suoi tre antagonisti rispettivamente di 22, 30 e 73 voti, determinare quanti voti ricevette ognuno. [1336, 1314, 1306, 1263]
52. Cinque strilloni si misero in società e vendettero i giornali nel modo seguente. Tommy Smith vendette 1/4 del totale più un giornale; Billy Jones 1/4 di ciò che era rimasto più 1 giornale. Lo stesso fecero in seguito Ned Smith e Charley Jones. A questo punto gli Smith avevano venduto 100 giornali più dei due Jones. Jimmy Jones vendette il resto dei giornali. Quanti giornali, gli Jones vendettero più degli Smith? [220]
53. Lo zio Reuben e la zia Cinzia andarono a fare acquisti, comprando un cappello e un vestito per ciascuno. Sappiamo che lo zio spese 15 dollari; la zia spese per il cappello quanto lo zio per il suo vestito e spese tutto ciò che le era rimasto per il vestito. Cinzia osservò che il cappello di Reuben era costato un dollaro in più del vestito di lei e che se se avessero comprato due cappelli in modo che quello suo costasse una volta e mezzo quello del marito, avrebbero speso entrambi lo stesso denaro. Quanto spesero in tutto i due? [$ 29]

Quesiti relativi alla geometria

Lavoriamo insieme

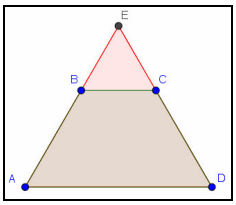
Su un segmento AE si scelgono tre punti nell'ordine: B, C e D in modo da dividere AE in parti proporzionali ai numeri 3, 2, 5, e 4. Sapendo che AE misura 70 *cm*, determinare la misura di BD.

Dire che AE è diviso in parti proporzionali significa che ciascun segmento è multiplo, secondo un certo fattore, di uno stesso segmento. Chiamiamo x la misura di questo segmento comune; ciò significa che i segmenti AB, BC, CD, DE, misureranno rispettivamente $3x$, $2x$, $5x$ e $4x$. Pertanto la misura di AE, espressa mediante la misura x del segmento unità di misura, sarà: $3x + 2x + 5x + 4x = 14x$. D'altro canto noi conosciamo la misura effettiva di AE, possiamo quindi scrivere l'equazione: $14x = 70$ *cm*, la cui soluzione è: $x = 5$ *cm*.

Infine la misura di BD sarà: $\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD} = (2 \cdot 5 + 5 \cdot 5)\ cm = (10 + 25)\ cm = 35\ cm$.

Livello 1

54. Un quadrato è diviso in quattro rettangoli con tre segmenti paralleli a uno dei lati. Se i quattro rettangoli hanno uguale perimetro lungo 40 *cm*, determinare il lato del quadrato.  [16 *cm*]
55. Diminuendo di 5 *cm* ogni lato di un quadrato, la sua area diminuisce di 100 cm^2. Quanto misurava il lato inizialmente? [12,5 *cm*]
56. Con riferimento al quesito precedente, cosa accade se l'area diminuisce di 20 cm^2? [Impossibile]
57. Aumentando di 7 *cm* ogni lato di un quadrato, il suo perimetro aumenta di 26 *cm*. Quanto misurava il lato inizialmente? [Impossibile]

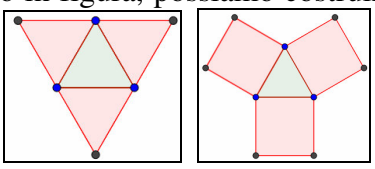
58. Discutere l'impossibilità del quesito precedente. [Il perimetro aumenta sempre di 28 *cm*]
59. Su un segmento *AB* si sceglie un punto *C* in modo che la misura del segmento *AC* sia quadrupla di quella del segmento *BC*. Se *AC* misura 4 *cm*, quanto misura *AB*? [5 *cm*]
60. Gli angoli di un triangolo scaleno sono tali che il maggiore è doppio del minore, che differisce di 20° dal terzo. Quanto misura l'angolo minore? [40°]
61. Il perimetro di un trapezio isoscele *ABCD* misura 48 *cm*; determinare le misure dei lati sapendo che i due lati obliqui misurano quanto le due basi, la cui differenza è 8 *cm*. [12 *cm*; 8 *cm*; 12 *cm*; 16 *cm*]
62. Il rettangolo *ABCD* ha lati $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=11$. Si scelga un punto *E* su *AB* in modo che sia $\overline{EB}=k\cdot\overline{AB}$, $k\in\mathbb{R}^+$. Determinare il valore di *k* in modo che il triangolo *AED* abbia area 12. [5/11]
63. In figura 

ABCD è un trapezio isoscele, *EDC* è un triangolo equilatero. Sappiamo che il perimetro del triangolo *ADE* misura 30 *cm* e che il punto *C* divide il segmento *DE*, a partire da *D*, in parti proporzionali ai numeri 3 e 2. Determinare le misure dei lati del trapezio sapendo che la base maggiore misura 2 *cm* in meno dei due lati obliqui insieme. [6 *cm*; 4 *cm*; 6 *cm*; 10 *cm*]

Livello 2

64. Nel problema precedente l'informazione sulla base maggiore è utile? [No, perché *ADE* è equilatero]
65. Con riferimento al quesito 53, di quanto deve diminuire minimo l'area del quadrato affinché, diminuendo il lato sempre di 5 *cm*, il problema abbia soluzione? [Più di 25 cm^2]
66. In un trapezio rettangolo la base minore è i $\frac{2}{3}$ della maggiore, l'altezza è i $\frac{4}{5}$ del lato obliquo, il quale è i $\frac{5}{6}$ della base minore. Se il perimetro, in *cm*, misura 48, determinare le misure di tutti i lati.
[12 *cm;* 18 *cm*; 10 *cm*; 8 *cm*]
67. Le misure degli angoli interni, espressi in gradi sessagesimali, di un ennagono (9 lati) convesso formano una successione crescente, in cui due numeri consecutivi differiscono di 10°. Determinare la misura dell'angolo posto nella posizione centrale di tale successione. [140°]
68. Calcolare le misure dei lati di un trapezio isoscele il cui perimetro è 60 *cm*, il rapporto fra le basi è 3/7 e l'altezza è metà della base minore. [10 *cm*; 12 *cm*; 10 *cm*; 28 *cm*]

Livello 3

69. Con riferimento al quesito 58, quanto può differire al massimo l'angolo minore da quello medio affinché il problema abbia soluzione? [minore di 36°]
70. Risolvere il problema dell'ennagono nell'ipotesi in cui la differenza fra due qualsiasi degli angoli è *k*°. [140°]
71. *ABCD* è un quadrato di lato unitario, *E* è il punto medio di *AD*, *F* è un punto interno al quadrato in modo che i segmenti *FE*, *FC* e *FB* siano uguali, inoltre $FE\perp AD$. Trovare la misura del perimetro del trapezio *EDCF*. Suggerimento: usare il teorema di Pitagora. [5,5]
72. Su ciascuno dei lati di un triangolo equilatero, esternamente a essi possiamo costruire triangoli equilateri, quadrati, ... in modo che essi non si sovrappongano, come mostrato in figura, possiamo costruire poligoni regolari di qualsivoglia numero di lati? Giustificare la risposta. 
[Massimo poligono regolare di 12 lati]
73. Risolvere il problema precedente per un quadrato. [Massimo ottagono regolare]

Quesiti relativi all'insiemistica

Lavoriamo insieme

A e B sono insiemi finiti. Si sa che $|A| = 3 \cdot |B|$, $|A \cap B| = 12$, $|A \cup B| = 40$. Determinare $|A|$ e $|B|$. Ricordiamo che $|A|$ indica la cardinalità di A, inoltre ricordiamo che $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Quindi con i dati che abbiamo, possiamo impostare l'equazione, nell'incognita $|B| = x$: $40 = 3x + x - 12 \Rightarrow 4x = 52 \Rightarrow x = 13$. Pertanto $|A| = 3 \cdot 13 = 39$ e $|B| = 13$.
Osserviamo che se fosse stato $|A \cap B| = 11$, il problema non avrebbe avuto soluzione, poiché l'equazione risolvente: $40 = 3x + x - 11$, avrebbe avuto la soluzione $4x = 51 \Rightarrow x = 51/4$, non accettabile perché la cardinalità di un insieme deve essere un numero intero.

Negli esercizi seguenti gli insiemi sono finiti e non vuoti

Livello 1

74. $|A| = 2 \cdot |B|$, $|A \cap B| = 5$, $|A \cup B| = 7$. Determinare $|A|$ e $|B|$. [8; 4]
75. $|A| = 5 \cdot |B|$, $|A \cap B| = 11$, $|A \cup B| = 32$. Determinare $|A|$ e $|B|$. [$\varnothing$]
76. $|A| = 17$, $|A \cap B| = 24$, $|A \cup B| = 31$. Determinare $|B|$. [38]
77. $|A| = |B|$, $|A \cap B| = |B|/3$, $|A \cup B| = 40$. Determinare $|A|$ e $|B|$. [24]
78. $A \subset B \subset C$, $|B \setminus A| = |C \setminus B|$, $|C| = 12$, $|A \cap B \cap C| = 2$, determinare $|B|$. [7]

Livello 2

79. $|A| = 3 \cdot |B|$, $|A \cap B| = 12$, $|A \Delta B| = 6$. Determinare $|A|$ e $|B|$. [12; 4]
80. $|A| = 4 \cdot |B|$, $|A \cup B| = 24$, $|A \Delta B| = 8$. Determinare $|A|$ e $|B|$. [32; 8]
81. $|A| = 2 \cdot |B| = |C|$, $|A \cap B| = 5$, $|A \cap C| = 3$, $|B \cap C| = 2$, $|A \cap B \cap C| = 1$, $|A \cup B \cup C| = 15$. Determinare $|A|$, $|B|$ e $|C|$. [12; 6; 6]

Livello 3

82. $B \subset A$, $A \cap C = \varnothing$, $|A| = 3 \cdot |C|$, $|A \setminus B| = |C|$, $|B| = 4$. Determinare $|A \cup B \cup C|$. [8]

Quesiti sul cambiamento di base

Lavoriamo insieme

In quale base b si ha $[52]_b = 2 \cdot [25]_b$? Ovviamente deve essere $b > 5$, dato che diversamente non esisterebbe il simbolo 5 nella base.
Per definizione $[52]_b = 5b + 3$ e $[25]_b = 2b + 5$, quindi deve essere $5b + 2 = 2 \cdot (2b + 5) \Rightarrow 5b - 4b = 10 - 2 \Rightarrow b = 8$. E in effetti $[52]_8 = 5 \cdot 8 + 2 = 42$, mentre $2 \cdot [25]_8 = 2 \cdot (2 \cdot 8 + 5) = 2 \cdot 21 = 42$.
Se la richiesta fosse stata $[52]_b = 3 \cdot [25]_b$, l'equazione risolvente sarebbe stata $5b + 2 = 3 \cdot (2b + 5)$, cioè $5b - 6b = 15 - 6 \Rightarrow b = -9$, che ovviamente non è accettabile.

Livello 2

83. In quale base b si ha $[73]_b = 2 \cdot [37]_b$? [11]
84. In quale base b si ha $[72]_b = 2 \cdot [27]_b$? [$\varnothing$]
85. In quale base b si ha $[20]_b + [11]_{b+1} = [19]_{2b+3}$ [10]
86. In *Alice nel paese delle meraviglie*, la protagonista ripete le tabelline nel modo seguente: $4 \cdot 5 = 12$ e $4 \cdot 6 = 13$. Quali debbono essere le basi in cui sono espresse le rispettive moltiplicazioni, per poter dare ragione ad Alice? [18 e 21]
87. Consideriamo un numero N di cinque cifre e, mediante esso, costruiamo i due numeri 1N e N1 (esempio N = 23456, otteniamo 123456 e 234561). Così facendo troviamo che il secondo numero è il triplo del primo. Quanto vale N? [42587]
88. Se N ha 6 cifre, come cambia il risultato precedente? [Il problema non ha soluzione]

Livello 3

89. Se N ha 6 cifre e $N1 = k \cdot 1N$, con $1 < k < 10$, per quali k ha soluzione e quanto valgono i relativi N? [$k = 7$, N = 233333; $k = 9$, N = 899999]

Quesiti di fisica

Lavoriamo insieme

Un treno un'ora dopo la partenza si ferma per mezz'ora a causa di un guasto. La riparazione non è perfetta e quindi alla ripartenza la velocità diminuisce del 20% *e il treno arriva con* 2 *ore di ritardo, rispetto all'orario previsto. Quante ore durerebbe il percorso in assenza di guasti*?

Sappiamo che $s = v \cdot t$, dove s è lo spazio percorso, v la velocità e t il tempo.

Il treno ha percorso per un'ora con velocità v e dopo il guasto è ripartito con velocità 0,8 v (80% di v). Non consideriamo la prima ora di tragitto percorsa a velocità regolare. Detto s il tragitto da percorrere dopo il guasto e t il tempo di percorrenza in condizioni normali, fornisce l'uguaglianza $s = v \cdot t$. Dopo il guasto il treno impiega 1,5 ore in più (0,5 ore è stato fermo), cioè $s = 0{,}8v \cdot (t + 1{,}5)$. Essendo lo spazio sempre lo stesso possiamo dire che si ha: $v \cdot t = 0{,}8v \cdot (t + 1{,}5)$, possiamo eliminare la velocità v, certamente diversa da zero, ottenendo: $t = 0{,}8t + 1{,}2$, cioè $0{,}2t = 1{,}2$, quindi $t = \frac{1{,}2}{0{,}2} \Rightarrow t = 6$, quindi per tutto il percorso il treno impiegherebbe 6 + 1 = 7 ore.

Verifichiamo. Supponiamo, per semplificare che la strada da percorrere fosse 700 *km*, quindi la velocità media 100 *km/h*. La prima ora il treno cammina regolarmente, percorrendo 100 *km*, quindi si guasta, sta fermo 1/2 ore e riparte con velocità di 80 *km/h*, con cui deve percorrere i rimanenti 600 *km*, che perciò percorre in 600/80 *h* = 7,5 *h* a cui dobbiamo sommare la mezz'ora in cui è stato fermo, ottenendo 8 ore, cioè proprio 2 ore in più che non in condizioni normali.

Livello 2

90. Carla e Ludovica abitano nello stesso palazzo e ogni mattina escono di casa insieme e per allenamento fanno del footing. Il loro tragitto consiste nell'andare fino a una piazza che dista 6 *km* da casa e poi tornare indietro. Carla ha una velocità oraria di 4 *km* in meno di quella di Ludovica, così quest'ultima nel suo viaggio di ritorno incontra Carla mentre ancora non ha concluso l'andata, a 1,2 *km* dalla piazza. Qual è la velocità oraria di Carla? [8 *km/h*]
91. Un treno entra in un tunnel lungo 1150 metri, mantenendo una velocità costante, dal momento in cui entra al momento in cui esce completamente dal tunnel passano 35 secondi. Sapendo che alla stessa velocità, percorre una distanza pari alla propria lunghezza in 12 secondi, determinare tale lunghezza. [600*m*]
92. Un problema di Newton. *Due postini si trovano a* 59 *miglia di distanza. Il primo percorre* 7 *miglia in* 2 *ore, il secondo* 8 *miglia in* 3 *ore. Se i due si vengono incontro procedendo in linea retta e il secondo parte un'ora dopo il primo, dopo quante ore si incontreranno*? [9]
93. Stando ferma su una scala mobile Carla impiega 28 secondi a raggiungere la cima, se invece cammina mentre la scala si muove, raggiunge la cima in 20 secondi. Se la scala mobile fosse stata guasta e camminato con la stessa velocità di quando era in movimento, in quanti secondi avrebbe raggiunto la cima? Con queste informazioni possiamo sapere quanto è lunga la scala? [70; no]
94. In una gara gli atleti partono a distanza di 5 minuti l'uno dall'altro. Un atleta mantiene una velocità costante di 15 *km/h*, l'atleta che parte dopo di lui lo raggiunge 40 minuti dopo essere partito, qual è la velocità di quest'ultimo? [16,875 *km/h*]
95. Un corpo di massa 13 *g* a una certa altezza ha un'energia potenziale di 344 *mJ*, lasciandolo cadere, dopo aver percorso x *m*, la sua energia cinetica è aumentata di 112 *mJ*. Quanto vale x? Si ricordi che l'energia potenziale gravitazionale è mgh, con g accelerazione di gravità. [≈ 1,8]
96. Una macchina ha i seguenti consumi medi in *km/l*: 13,2 in città (velocità media 40 *km/h*), 19,8 su strada a 90 *km/h* e 14,7 a 120 *km/h*. Attilio ha calcolato di avere consumato mediamente 16,9 *km/l* in un percorso fatto da 20 *km* in città, 75 *km* su strada a 90 *km/h* e x *km* a 120 *km/h*. Quanto vale x? [≈ 65]

Livello 3

97. Una molla di massa trascurabile è appesa verticalmente. Con un peso di 3,0 *Kg* la molla è lunga 30 *cm*, aggiungendo un ulteriore peso di 1,0 *Kg* la molla è lunga 35 *cm*, determinare la lunghezza della molla scarica. Ricordiamo la legge di Hooke; $F = -kx$ [15 *cm*]
98. Un problema di Polya. *Un aeroplano di pattuglia percorre* 220 *miglia all'ora in atmosfera tranquilla. Esso trasporta benzina per* 4 *ore di volo sicuro. Se decolla in pattuglia contro un vento di* 20 *miglia orarie, di quanto può allontanarsi per ritornare sano e salvo*? [≈ 436]
99. Un problema di Polya. *Un uomo ha percorso prima una strada piana e poi una salita; giunto alla fine*

della salita è ritornato a casa rifacendo il percorso al contrario. Sapendo che ha impiegato 5 *ore per tutta la sua camminata, che la sua velocità sul tratto piano era di* 4 *km/h*, *in salita di* 3 *km/h e in discesa di* 6 *km/h*, *determinare il numero di chilometri percorsi*. [20]

100. Con riferimento al problema precedente, cosa accade se le velocità divengono rispettivamente 4, 3 e 5 *km/h*? [Problema indeterminato]

Giochiamo alla matematica

Consideriamo il seguente gioco di "magia".
Vi viene detto di pensare un numero, moltiplicarlo per 5, aggiungere 6 a tale prodotto, moltiplicare la somma ottenuta per 4, aggiungere ancora 9, moltiplicare per 5 quest'ultima somma. Comunicate il risultato.
Il "mago" sarà in grado di dirvi il numero da voi pensato. Come fa il "mago", che non ha niente di magico in verità, a scoprire il numero? Vediamo di seguire il suo procedimento.
Chiamiamo x il numero che avete pensato, voi lo tramutate nei seguenti numeri, applicando quanto a voi ordinato: $x \to 5x \to 5x + 6 \to 4 \cdot (5x + 6) = 20x + 24 \to 20x + 33 \to 5 \cdot (20x + 33) = 100x + 165$.
Quindi qualsiasi numero pensato, alla fine diviene il numero di partenza moltiplicato per 100 e aumentato di 165. Perciò per trovare il numero x basta che il "mago" tolga dal numero che voi comunicate 165 e divida il risultato per 100, ossia che risolva l'equazione $100x + 165 = y$, dove y è un numero noto, quello che voi avete comunicato.
Verifichiamolo. Supponiamo che abbiate pensato 37 esso diverrà $37 \to 185 \to 191 \to 764 \to 773 \to 3865$; adesso impostiamo l'equazione: $100x + 165 = 3865 \Rightarrow 100x = 3700 \Rightarrow x = 37$.

Attività

Determinare le equazioni risolutrici dei seguenti giochi di magia.

1. Pensa un numero, aggiungigli 3, moltiplica il risultato per 5, aumenta il numero pensato di 1, moltiplica il risultato precedente per 2, sottrai il risultato precedente a quello del passo 3. Comunica il numero. [$y = 3x + 6$]
2. Pensa un numero, moltiplicalo per il suo successivo, togli il quadrato del numero pensato al risultato precedente, aggiungi 5 volte il numero pensato diminuito di 3, sottrai 3 al risultato precedente, dividi tutto per 6. Comunica il numero. [$y = x – 3$]
3. Pensa un numero, aggiungigli 2, aggiungi il doppio del numero pensato, aumenta il risultato di 4, dividi il risultato per 3. Comunica il numero. [$y = x + 2$]
4. Pensa un numero, moltiplicalo per 3, aggiungi 7 al risultato, moltiplica per 4 il risultato precedente, togli il doppio del numero che avevi pensato dal numero che hai finora ottenuto. Comunica il numero. [$y = 10x + 28$]
5. Pensa un numero, moltiplicalo per 5, aggiungi 3 al risultato, moltiplica per 4 il risultato precedente, togli 17 e moltiplica il risultato per 5. Comunica il numero. [$y = 100x – 25$]
6. Questo “trucco” è dovuto a Gaspard Bachet. Pensa un numero, triplicalo, se il risultato precedente è pari dimezzalo, se no aggiungi uno e poi lo dimezzi, triplica il risultato precedente, chiedi il quoziente della divisione del valore precedente per 5, moltiplica il precedente risultato per 2 e aggiungi 1 se così avevi fatto al punto 3. Questo è il numero pensato.

Per la prova Invalsi

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato nei quesiti Invalsi del 2003. *La somma fra i* 5/6 *di un numero e* 5 *è uguale al numero aumentato di* 1/2. *Di quale numero si tratta*? A) 21 B) 27 C) 30 D) 33 E) 39
Indichiamo con x il numero da trovare. La traduzione della consegna è: $5/6x + 5 = x + 1/2$, la cui soluzione è $(5/6 – 1) \cdot x = 1/2 – 5 \Rightarrow – 1/6 \cdot x = – 9/2 \Rightarrow x = 9/2 \cdot 6 \Rightarrow x = 27$. Quindi la risposta corretta è la B)

1. (Invalsi 2003) Il serbatoio di un motoscafo contiene al massimo 700 litri di carburante. Quando viaggia alla velocità di crociera, il motoscafo consuma 70 litri di carburante ogni ora. Il motoscafo parte col serbatoio pieno e viaggia per 6 ore e mezza alla velocità di crociera. Quanti litri di carburante sono rimasti nel serbatoio all’arrivo? A) 175 B) 185 C) 210 D) 245 E) 315 [D]

2. (Invalsi 2011) La relazione seguente esprime la spesa annuale per l'automobile, composta da una parte fissa e da una parte proporzionale al numero di *km* percorsi: $S = F + c \cdot k$, dove F sono le spese fisse, c è il costo al *km* e k è il numero di *km* percorsi. Nella tabella sono riportate le spese fisse e il costo al *km* per alcuni tipi di automobile.

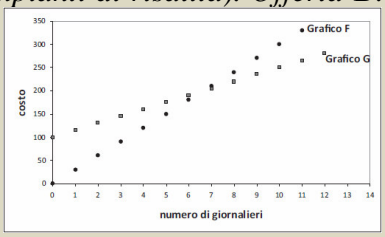
	Auto A	Auto B	Auto C	Auto D
Spese fisse F	900 euro	580 euro	650 euro	1200 euro
Costo al *km* c	0,25 euro/*km*	0,33 euro/*km*	0,27 euro/*km*	0,31 euro/*km*

a) Se percorro 10000 *km* all'anno, quale auto è più conveniente? [C]
b) Il proprietario di un'auto di tipo A ha speso 3000 euro in un anno. Quanti *km* ha percorso? [8400]
c) Se confrontiamo un'auto di tipo B con una di tipo D, possiamo dire che
A) è sempre più economico utilizzare l'auto di tipo B; B) è sempre più economico utilizzare l'auto di tipo D; C) l'auto di tipo B conviene fino a un certo numero di km annuali, oltre questo numero conviene l'auto di tipo D; D) l'auto di tipo D conviene fino a un certo numero di km annuali, oltre questo numero conviene l'auto di tipo B [C, fino a 31000 *km*]

3. (Invalsi 2011) L'insegnante di inglese dà ai suoi studenti un test formato da 25 domande e spiega che il punteggio totale p è calcolato assegnando 4 punti per ogni risposta esatta e togliendo 2 punti per ogni risposta sbagliata o mancante. a) Quanto vale il punteggio massimo possibile? b) Scrivi la formula che fornisce il punteggio p complessivo, indicando con n il numero di risposte esatte. c) Se la sufficienza si ottiene con più di 60 punti, qual è il numero minimo di domande al quale occorre rispondere correttamente per avere la sufficienza? [a) 100; b) $p = 4n - 2 \cdot (25 - n)$; c) 19]

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato nei quesiti Invalsi del 2012. *Mario va in vacanza in una località sciistica. Per usufruire degli impianti di risalita (seggiovie, funivie, ...), può scegliere tra due offerte, A e B, entrambe valide per tutta la stagione invernale. Offerta A: costo iniziale fisso di* 100 *euro più* 15 *euro per ogni giornaliero (ossia per ogni giorno in cui si usano gli impianti di risalita). Offerta* B: 30 *euro per ogni giornaliero, senza costo iniziale. Osserva la seguente figura*



a) *Quale, fra i grafici F e G, rappresenta l'offerta A*?
Si osserva subito che la risposta è il grafico F, dato che, dei due, è l'unico che parte da 100, che è il costo iniziale fisso. Del resto si osserva che, anche se il grafico non è facilmente leggibile, per 10 giorni, per esempio, il quadratino corrispondente ha ordinata che è 250 (cioè $100 + 15 \cdot 10$).
b) *Completa la seguente tabella, relativa all'offerta B*

Numero di giorni in cui Mario usufruisce degli impianti di risalita	Costo in euro
1	30
2	
3	

Non essendoci costo iniziale basta moltiplicare i giorni per il costo giornaliero di € 30, ottenendo perciò € 60 e 90, che sono i valori da inserire.
c) *Se Mario usa gli impianti di risalita solo per cinque giorni durante la stagione invernale, quale offerta gli conviene scegliere*?
Con l'offerta A pagherebbe € $(30 + 5 \cdot 15)$ = e 105, mentre con quella B, € $30 \cdot 5$ = € 150. Pertanto gli conviene la A.
d) *Scrivi due formule, una per l'offerta A e una per l'offerta B, che esprimano il costo c al variare del numero di giornalieri g*.
La traduzione in linguaggio matematico è molto semplice, si ha: A: $c = 100 + 15g$, e B: $c = 30g$,
e) *Qual è il numero di giornalieri per cui il costo dell'offerta B è una volta e mezza il costo dell'offerta A*?
Dobbiamo risolvere l'equazione $30g = (100 + 15g) \cdot 3/2 \Rightarrow 30g = 150 + 22{,}5g \Rightarrow 7{,}5g = 150 \Rightarrow g = 150/7{,}5 \Rightarrow g = 20$.

4. (Invalsi 2012) Una compagnia telefonica propone quattro tariffe K, X, Y e Z, tra le quali i clienti possono scegliere. Le tariffe sono descritte nella seguente tabella, con i costi in centesimi di euro:

Tariffa	Costo alla risposta	Costo per minuto di conversazione	Costo per ogni SMS
K	0	18	5
X	4	12	5
Y	8	6	10
Z	8	12	0

a) Giulia ha scelto la tariffa Y. Quanti centesimi di euro deve pagare per una telefonata della durata di 3 minuti? A) 14 B) 18 C) 24 D) 26 ; b) Marta vuole scegliere la tariffa per lei più conveniente. Di solito ogni giorno invia 25 SMS e fa 20 telefonate, ciascuna delle quali dura in media 1 minuto. Sulla base delle precedenti informazioni, quale fra le quattro tariffe è la più vantaggiosa per Marta? A) La tariffa K B) La tariffa X C) La tariffa Y D) La tariffa Z [a) D; b) D]

5. (Invalsi 2015) Il piano tariffario di un cellulare prevede un costo di 0,15 euro per lo "scatto alla risposta" più 0,12 euro per minuto o frazione di minuto di conversazione. Per esempio, se parlo 1 minuto e 1 secondo pago (0,15 + 0,24) euro, come se parlassi esattamente 2 minuti. a) Quanti euro si spendono per una telefonata che dura 7 minuti e 10 secondi? b) Se nel cellulare mi e rimasto un credito di 4 euro e voglio fare una telefonata, quanti minuti al massimo posso farla durare? [a) 1,11; b) 32]

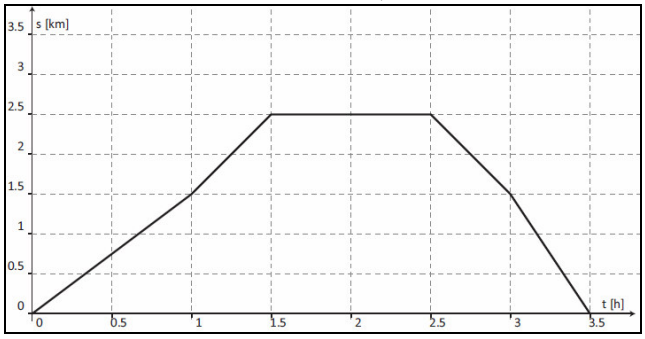
6. (Invalsi 2015) Una sorgente di montagna alimenta continuativamente un serbatoio con 5 m^3 di acqua ogni settimana. Oggi il serbatoio contiene 100 m^3 di acqua e un villaggio inizia a prelevare 7 m^3 di acqua alla settimana. a) Completa la seguente tabella relativa al numero n di m^3 di acqua contenuti nel serbatoio in funzione del numero t di settimane a partire da oggi.

t (settimane)	n (m^3)
0	100
1	
2	
3	
4	

b) Scrivi un'espressione che rappresenti il numero n di m^3 di acqua contenuti nel serbatoio in funzione del numero t di settimane. c) Dopo quante settimane il serbatoio sarà vuoto? A) 20 settimane B) 50 settimane C) 98 settimane D 102 settimane. [a) 98; 96; 94; 92; b) $n = 100 - 2t$; c) B]

7. (Invalsi 2015) Un palo verticale è piantato in uno stagno. Un quinto del palo è interrato nel fondale, un sesto è immerso in acqua e la parte del palo che esce dall'acqua è lunga 8,9 metri. a) Quale delle seguenti equazioni consente di determinare la lunghezza totale x del palo? A) $1/5 + 1/6 + 8{,}9 = x$ B) $1/5x + 1/6x = x + 8{,}9$ C) $1/5x + 1/6x + x = 8{,}9$ D) $1/5x + 1/6x + 8{,}9 = x$. b) Qual è la lunghezza totale x del palo? Scrivi i calcoli che fai per trovare la risposta e poi riporta il risultato. [a) D; b) ≈ 14,05 *m*]

8. (Invalsi 2015) Il seguente grafico rappresenta la posizione s (in *km*) in funzione del tempo t (in *h*) di un oggetto che si muove su una traiettoria rettilinea. Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F). A) L'oggetto ha impiegato 3,5 *h* per compiere l'intero percorso. B) L'oggetto ha percorso in totale 2,5 *km*. C) L'oggetto è rimasto nella stessa posizione per 1 *h*. D) Nella prima ora e mezza, l'oggetto si è mosso alla velocità media di circa 2,5 *km/h* [A) V ; B) F; C) V; D) F]



9. (Invalsi 2017) A una conferenza sono presenti 90 persone. Le donne sono 14 più degli uomini. Quanti sono gli uomini? A) 76 B) 31 C) 59 D) 38 [D]

10. (Invalsi 2017) Una casa editrice propone all'autore di un libro di scegliere uno tra due diversi tipi di contratto relativi al suo compenso. Contratto forfettario: compenso di 50000 €, indipendentemente dal

numero di copie vendute. Contratto a partecipazione: compenso di 5000 € a cui si aggiunge il 10% del prezzo di copertina per ogni copia venduta. Il prezzo di copertina del libro è di 30 €. a. L'autore sceglie il contratto a partecipazione. Completa la tabella.

Numero di copie vendute	Contratto a partecipazione Compenso per l'autore (in euro)
0	
1000	
2000	

b. Scrivi la formula che esprime il compenso C (in euro) dell'autore in funzione del numero *n* di copie vendute nel caso del contratto a partecipazione. c. Qual è il numero di copie che devono essere vendute perché il compenso ottenuto con il contratto a partecipazione sia uguale a quello ottenuto con il contratto forfettario? [a. 5000; 8000; 11000; b. $5000 + 3n$; c. 15000]

11. Nella tabella seguente sono indicati i cosiddetti scaglioni IRPEF, relativi all'anno 2016. Essi indicano quanto si deve pagare di tasse in ragione del reddito lordo. Tenuto conto di ciò si risponda alle seguenti domande.

Reddito imponibile	Aliquota	Imposta dovuta sui redditi intermedi (per scaglioni) compresi negli scaglioni
fino a 15.000 euro	23%	23% del reddito
da 15.001 fino a 28.000 euro	27%	3.450,00 + 27% sulla parte oltre i 15.000,00 euro
da 28.001 fino a 55.000 euro	38%	6.960,00 + 38% sulla parte oltre i 28.000,00 euro
da 55.001 fino a 75.000 euro	41%	17.220,00 + 41% sulla parte oltre i 55.000,00 euro
oltre 75.000 euro	43%	25.420,00 + 43% sulla parte oltre i 75.000,00 euro

a) Quanto paga di tasse uno che ha un reddito di € 30000? b) Se un tale ha un reddito lordo di € 54000 e ha la possibilità di guadagnare un extra di € 4000, quanto pagherebbe di tasse in più? c) Quale delle seguenti leggi permette di calcolare le tasse pagate da chi ha un reddito lordo x compreso tra € 28001 e € 55000? A) $0{,}38\,x$ B) $6960 + 0{,}38x$ C) $6960 + 0{,}38 \cdot (x - 28000)$ D) $6960 + 0{,}38 \cdot (28000 - x)$ [a) e 8560; b) e 1610; c) C]

12. Una banca offre due diversi servizi di conto corrente. Il primo prevede un canone annuo di € 30 e un costo di € 0,01 per ogni operazione; il secondo non prevede canone ma ogni operazione costa € 0,05. a) Se Filippo mediamente effettua 500 operazioni annue, quale dei due servizi gli conviene scegliere? b) Per quante operazioni i due servizi offrono lo stesso costo? c) Se viene offerto un terzo servizio in cui vi è un canone di € 25, quanto deve costare ogni operazione per essere sempre più conveniente del secondo servizio? [a) il secondo; b) 750; c) Impossibile]

13. Mattia vende un libro su Ebay a un certo prezzo, sul quale paga una commissione del 10%. Si fa pagare € 2,50 per la spedizione, su cui Ebay non ha commissioni. Lui spende € 0,50 per la busta imbottita e € 1,28 per la spedizione con piego libri. a) Se ha un ricavo netto di € 13,72, qual è stato il ricavo lordo? b) Mattia vende un altro prodotto al prezzo complessivo di € 35,00, su cui Ebay prende una diversa percentuale di commissione. Tenuto conto che il suo ricavo netto è di € 23,05 e di corriere spende € 7,75, quanto vale la percentuale di Ebay? [a) € 16,95, b) 12%]

14. Un numero intero è tale che il suo doppio aumentato di 13 rappresenta anche il suo triplo diminuito di 5, qual è il numero? [18]

15. Gianfilippo ha una macchina che funziona a metano, nelle vicinanze di casa sua, vi è un unico distributore che dista x *km* in cui il prezzo al litro è € 0,995. Sappiamo che la sua macchina ha un consumo medio di 1 litro di metano per 14,7 *km*, e che ogni volta che va al distributore compra 30 litri. Abbiamo calcolato che il costo reale del metano è di € 1,038 al litro, dato che nel calcolo dei consumi dobbiamo considerare il percorso di andata e ritorno fino al distributore. Quanto vale x? [D]
A) 7 B) 8,47 C) 9,02 D) 9,13 E) non si può determinare con i dati a disposizione

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi

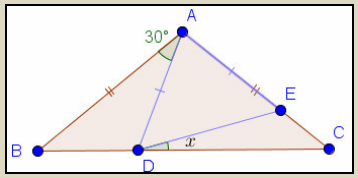
1. Ci sono *n* oggetti, *m* persone in sequenza, prendono uno degli oggetti, dividono i rimanenti in due gruppi uguali, uno dei quali lo eliminano e l'altro lo lasciano per la successiva persona, che ripete la procedura. Che valore può avere *n*? $\left[2^h-1, h\in\mathbb{N}\right]$
2. Generalizziamo il problema di Coleridge. Una contadina andò al mercato a vendere le sue uova. Ebbe *n* clienti a ognuno dei quali vendette metà delle uova che aveva in quel momento più mezzo uovo, ma senza mai romperne neanche uno. Alla fine le rimasero 3 uova, quante erano le uova, all'inizio? E se invece non le rimangono uova, quanti erano i clienti? $[2^{n+2}-1,\ 2^k-1]$
3. Su ciascuno dei lati di un poligono regolare, esternamente a essi possiamo costruire sempre altri poligoni regolari uguali in modo che essi non si sovrappongano? Giustificare la risposta. [Sì]
4. Con riferimento al precedente quesito, che tipi di poligoni regolari possiamo costruire esternamente ai lati di un qualsiasi poligono regolare? [Triangoli equilateri e quadrati]

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
B = Giochi della Bocconi
MT = Mathematics Teacher, rivista della NCTM

Lavoriamo insieme

Il seguente quesito è stato pubblicato sul numero di Dicembre 1995 del Mathematics Teacher.



In figura, AB = AC, $\angle B\hat{A}D = 30°$ *ed AE = AD. Quanto vale x?*

Gli angoli interni di un triangolo misurano complessivamente 180°. Indichiamo $D\hat{A}E = z$. Dato che il triangolo *ABC* è isoscele sulla base *BC*, abbiamo $A\hat{B}C = B\hat{C}A$, quindi $B\hat{C}A = \frac{1}{2}\cdot(180°-30°-z) = 75°-\frac{z}{2}$. Dato che il triangolo *ADE* è isoscele sulla base *DE*, abbiamo $A\hat{D}E = D\hat{E}A$, quindi $D\hat{E}A = \frac{1}{2}\cdot(180°-z) = 90°-\frac{z}{2}$.

Infine $D\hat{A}E + A\hat{C}D + C\hat{D}E + E\hat{D}A = 180° \Rightarrow z + \left(75°-\frac{z}{2}\right) + x + \left(90°-\frac{z}{2}\right) = 180° \Rightarrow x = 15°$.

1. (AHSME1950) John ordinò delle paia di calzini, 4 di colore nero e le altre di colore blu. Il prezzo dei calzini neri, di seta, era doppio di quelli blu, di cotone. Quando gli furono consegnati i calzini scoprì di aver pagato il 50% in più perché per errore aveva scambiato i quantitativi da ordinare. Quante paia di calzini blu ha ordinato? [16]
2. (AHSME1956) Due candele di uguale lunghezza vengono accese contemporaneamente. La prima si esaurisce in 4 ore e la seconda in 3 ore. Supponendo che le due candele si consumano secondo un tasso costante, determinare dopo quanto tempo la prima candela avrà altezza doppia della seconda. [2 ore e 24 minuti]
3. (AHSME1958) A una festa da ballo vi sono più ragazze che ragazzi. Sappiamo che ogni ragazzo ha ballato con un numero diverso di ragazze e che tali numeri sono tutti quelli dell'insieme di numeri interi consecutivi {5, 6, 7, …, *g*}, dove *g* è il numero complessivo di ragazze. Vogliamo sapere quante erano le ragazze in più dei maschi. [4]
4. (AHSME1959) Nelle prime 20 domande di un test, uno studente risponde correttamente a 15 di esse. Delle successive domande solo un terzo sono corrette. Il suo punteggio finale è lo stesso che se avesse risposto a metà delle domande complessive. Quante sono tutte le domande? [50]
5. (AHSME1959) Jonathan è stato in vacanza per alcuni giorni. Sappiamo che ha piovuto esattamente 7

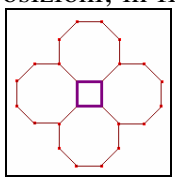
volte, che quando ha piovuto al pomeriggio il mattino era sereno, che vi sono stati 5 pomeriggi sereni e 6 mattine serene. Quanti giorni è stato in vacanza Jonathan? [9]

6. (AHSME1962) Un uomo esce di casa dopo le 6:00 e osserva che le lancette del suo orologio formano un angolo di 110°. Ritorna a casa prima di un'ora e nota che ancora una volta le lancette del suo orologio (che non è fermo) formano un angolo di 110°. Quanti minuti è stato fuori? Suggerimento: effettuare una simmetria delle lancette iniziali, per determinare la posizione delle finali. [40]
7. (AHSME1973) L'età media di un gruppo di avvocati e dottori è 40 anni. Se i dottori in media hanno 35 anni e gli avvocati 50, determinare il rapporto del numero di dottori rispetto al numero di avvocati. [2]
8. (AHSME1973) Se la somma di tutti gli angoli interni eccetto uno, di un poligono convesso è 2190°, quanti lati deve avere il poligono? [15]
9. (AHSME1978) Quattro ragazzi comprano una barca per $ 60. Il primo paga metà della somma pagata dagli altri ragazzi, il secondo paga un terzo della somma pagata dagli altri e il terzo paga un quarto della somma pagata dagli altri. Quanto paga il quarto ragazzo? [$ 13]
10. (AHSME1983) Alice vende un articolo scontandolo di $ 10 e riceve il 10 % del prezzo di vendita come commissione. Bob vende lo stesso articolo scontandolo di $ 20 e ricevendo il 20% del prezzo di vendita come commissione. Se entrambi ricevono la stessa commissione determinare il prezzo di vendita senza sconti. [$ 30]
11. (AHSME1991) Jack e Jill ogni giorno fanno 10 *km* di corsa. Partono dallo stesso posto correndo per 5 *km* in salita e poi tornando indietro per la stessa strada. Jack parte 10 minuti prima di Jill. Sapendo che le velocità medie dei due sono rispettivamente di 15 *km/h* e di 16 *km/h* in salita e di 20 *km/h* e 22 *km/h* in discesa, determinare a che distanza dalla cima della salita si incontrano i due percorrendo versi opposti. [≈ *km* 1,3]

Lavoriamo insieme

Questo quesito è stato pubblicato sul numero di Dicembre 1994 del Mathematics Teacher.
Se le uova costassero x cents in meno alla dozzina, si pagherebbe 1 *cent in meno per* $x + 1$ *uova rispetto al fatto che fossero vendute x cents in più alla dozzina. Trovare x.*
Chiamiamo y il prezzo attuale di una dozzina di uova, quindi un uovo costa $y/12$, e $x + 1$ uova costerebbero $(x + 1) \cdot y/12$. Se il prezzo alla dozzina diventa $(y – x)$, $x + 1$ uova costerebbero $(x + 1) \cdot (y – x)/12$. Se invece costassero $(y + x)$, il prezzo totale diventerebbe $(x + 1) \cdot (y + x)/12$. Quindi l'equazione risolutiva è
$(x + 1)\cdot(y + x)/12 – (x + 1)\cdot(y – x)/12 = 1 \Rightarrow xy + x^2 + y + x – xy + x^2 – y + x = 12 \Rightarrow 2x^2 + 2x = 12 \Rightarrow x^2 + x = 6$
che è un'equazione di secondo grado, che però può scriversi: $x\ (x + 1) = 6$, che equivale a cercare due numeri consecutivi il cui prodotto è 6, che facilmente sono 2 e 3. quindi $x = 2$ cent è il valore cercato.

12. (AHSME1994) Su ciascuno dei lati di un poligono regolare di 10 lati sono costruiti poligoni regolari di n lati in modo che non vi siano sovrapposizioni; in figura mostriamo l'esempio di un quadrato racchiuso da ottagoni. Quanto vale n? [5]



13. (AHSME1994) Pat doveva effettuare le seguenti operazioni: moltiplicare un numero per 6 e aggiungervi 14. Per errore invece divise per 6 e sottrasse 14 al risultato, in questo modo ottenne 16. Svolgendo correttamente le operazioni che risultato avrebbe ottenuto? [1094]
14. (MT1994) Trovare sei multipli consecutivi di 5 la cui somma sia il mimino comune multiplo fra 13 e 15. [20, 25, 30, 35, 40, 45]
15. (MT1997) Un numero di 3 cifre aumenta di 9 se scambiamo fra loro seconda e terza cifra e aumenta di 90 se scambiamo prima e seconda cifra. Di quanto aumenterà se scambiamo prima e terza cifra? [198]
16. (B2000) Il primo gennaio 1980 Annabella aveva il doppio dell'età di Pasquale, il primo gennaio 1990 Annabella aveva vent'anni più di Pasquale. Quanti anni aveva Annabella il primo gennaio 2000? [60]

Questions in English

Working together

This question was printed in Mathematics Teacher, a magazine edited by National Council of Teachers of Mathematics (NCTM briefly) in February 1992.

A man is digging a hole and standing in it. He is 5 *feet* 10 *inches*[1] *tall. When we come upon him he tells us that he is one fourth done and that when he is finished, the top of his head will be three times as far below ground as it is now above ground. How deep will the hole be when finished?*

We call x the depth now, so the finished depth will be $4x$. We know that 12 inches = 1 feet, so the man is $(5 \cdot 12 + 10)$ *in* = 70 *in*. We translate in mathematics what he tells: $4x = 70 + 3 \cdot (70 - x)$. Simplifying: $7x = 280$, $x = 40$ *in*. Hence the hole will be 160 *in* or 13 *ft* 4 *in*.

17. (MT1991) Foster drove to work on Monday at 40 MPH[2] and arrived one minute late. He left at the same time on Tuesday, drove at 45 MPH, and arrived one minute early. How far does Foster drive to work? [12 miles]
18. (MT1992) A wagon train had 96 wagons each carrying the same number of people. When 12 wagons broke down[3], each of the other wagons had to carry one more persons. How many people were in each wagon originally? [7]
19. (MT1994) Twenty men did one fourth of a job in eight days. Then, because of a building dedication, it become necessary to complete the job in the next five days. How many additional men were added to the crew of twenty to accomplish this task? [76]
20. (MT1994) The will of an eccentric millionaire reads as follows: *I leave* 4/17 *of my estate*[4] *to my son*, 7/13 *of the remainder to my wife*, 2/3 *of the remainder to my daughter, and the remaining* $2,000,000 to my dog. What was the total amount of the estate? [$ 17,000,000]
21. (MT1995) Find 19 consecutive integers whose sum is 95. [– 4, –3, –2, ..., 14]
22. (MT1995) Dick bought five copies of a favourite book, one for himself and four as gifts. The books were on sale at 10 percent of the usual price. After paying a sales tax of 3.8% plus a gift wrapping charge of 0.50 per book, he spent $ 95.19. What was the usual price of the book? [$ 19.95]
23. (MT1995) A bamboo 18 cubits[5] high was broken by the wind. Its top touched the ground 6 cubits from the root. Tell the lengths of the segments of bamboo. [8 and 10 cubits]

Working together

This question was printed in December 1994, in Mathematics Teacher, a magazine edited by National Council of Teachers.

Joe gives Nick and Tom as many peanuts as each already has. Then Nick gives Joe and Tom as many peanuts as each of them then has. Finally, Tom gives Nick and Joe as many peanuts as each has. If at the end each has sixteen peanuts, how many peanuts did each have at the beginning?

One way to approach the problem is by working backward, building the following table

Joe	Nick	Tom
16	16	16
8	8	32
4	28	16
26	14	8

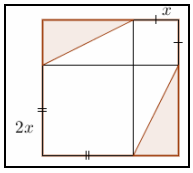
Hence at the beginning Joe had 26 peanuts, Nick 14 and Tom 8.

24. (MT1995) A merchant pay duty on certain goods at three different places. At the first he gives 1/3 of the goods; at the second, 1/4 of the remainder; and at the third 1/5 of the remainder. The total duty is 24, what was the original amount of goods? [40]
25. (MT1995) A six-foot tall climber climbs 10 body lengths in the first minute, 9 body lengths in the second minute, and so on, and stops after 10 minutes. One day the climber slipped when halfway up the

[1] 5 piedi e 10 pollici, cioè circa *m* 1, 78, dato che 1 piede (foot) è circa *cm* 30,48 e 1 pollice (inch) circa *cm* 2,58
[2] Miles per Hour, cioè miglia all'ora
[3] Si guastano
[4] Averi
[5] Antica misura egiziana

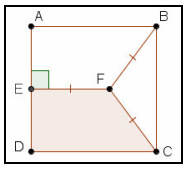
cliff. Luckily he caught himself 1/4 of the way up the cliff and continued climbing. Unfortunately, after climbing 10 minutes, he was only 2/2 of the way up the cliff. How tall is the cliff? [360 feet]

26. (MT1995) A teacher assigned homework and told the students that on each day after the first, they must complete twice the number of problems that they had done so far. If at the end of 5 days the students had completed one-third of the problems, how long will it take them to finish all the problems? [6]



27. (MT1996) If *ABCD* is a unit square, find the area of the unshaded region. [7/9]

28. (MT1996) A homeowner needs 4 hours to mow his lawn[6], his daughter mows the same amount of lawn in 6 hours. How long will mowing take if the father helps to mow half the land while the daughter works the entire time? [4,2 hours]



29. (MT1997) *ABCD* is a unit square. Find the area of the shaded region. [0,40625]

[6] Tosare il suo prato

Attività di recupero

Problemi risolubili per tentativi

Fase 1: Osserva

- Vogliamo risolvere il seguente problema. Un'eredità è stata divisa fra quattro persone, che ne hanno ricevuto rispettivamente $\frac{1}{8}, \frac{4}{25}, \frac{3}{10}$ e € 83000; si vuol sapere a quanto ammontava l'intera eredità e quanto ha ricevuto ciascuno. È evidente che la somma delle parti ricevute da ognuno dei quattro deve valere l'intera eredità, dato che i primi tre, in parti, ossia in frazioni di eredità, ne hanno ricevuto complessivamente i $\frac{1}{8}+\frac{4}{25}+\frac{3}{10}=\frac{1\cdot 25+4\cdot 8+3\cdot 20}{200}=\frac{25+32+60}{200}=\frac{117}{200}$, vuol dire che il quarto erede ne ha ricevuto $1-\frac{117}{200}=\frac{200-117}{200}=\frac{83}{200}$. Quindi gli $\frac{83}{200}$ dell'eredità equivalgono a € 83000. Ma allora, poiché $1=\frac{200}{200}=\frac{200}{83}\cdot\frac{83}{200}$, l'intera eredità equivale a $\frac{200}{83}\cdot\frac{83}{200}\cdot €83000=\frac{200}{83}\cdot €83000=€200000$, mentre le singole quote valgono $\frac{1}{8}\cdot €200000=€25000, \frac{4}{25}\cdot €200000=€32000, \frac{3}{10}\cdot €200000=€60000$.
- Giancarlo e Wanda hanno insieme 32 anni; sapendo che il primo ha 3 anni in più dell'altra, quanti anni ha ciascuno di essi? Se avessero la stessa età dovrebbero avere entrambi 16 (ossia $\frac{32}{2}$) anni, ma poiché vi è una differenza di tre anni fra i due, dobbiamo aumentare l'età di uno e della stessa quantità diminuire l'età dell'altra. Quanto vale questo aumento-diminuzione? Ragioniamo un attimo: se aumentiamo di 1 anno l'età di Giacomo e diminuiamo di 1 l'età di Wanda, la differenza fra le due età è non di un anno, come potrebbe pensarsi, bensì di 2 anni, infatti Giacomo avrebbe 17 anni e Wanda 15. Pertanto il valore cercato è la metà di 3, cioè 1,5. In conclusione Giacomo ha 17,5 (ossia 16 + 1,5) anni e Wanda 13,5 (ossia 15 – 1,5) anni.
- Giorgio ha comprato un paio di pantaloni in saldo a € 28,80, dopo che su di esso è stato praticato uno sconto del 28%. Qual era il prezzo originario dei pantaloni? Se i pantaloni sono stati scontati del 28% vuol dire che Giorgio ha pagato il (100 – 28) % = 72 % del totale, quindi per calcolare il prezzo originario, cioè il 100%, dobbiamo semplicemente dividere il prezzo scontato per 72% = 0,72. Otteniamo così $\frac{€28,80}{0,72}=\frac{€2880}{72}=€40,00$, che è il prezzo non scontato.

Fase 2: Completa …

- In un rettangolo una sua dimensione è maggiore dell'altra di 4 *cm*; sapendo che il perimetro è di 42 *cm*, determinare l'area del rettangolo. La somma di due dimensioni non opposte è evidentemente la metà del perimetro, cioè 21 *cm*. Se queste dimensioni avessero la stessa lunghezza questa dovrebbe essere pari a …… *cm*, ma poiché differiscono di 4 *cm*, dobbiamo aggiungere alla maggiore e togliere alla minore, rispetto alla precedente lunghezza, …… *cm*, cioè ……. di …..*cm*. Quindi le due dimensioni misurano, in centimetri, ..…+ ….. = ..… e ..…- ….. , pertanto l'area misura, in centimetri quadrati, ……
- Dobbiamo trovare un numero naturale sapendo che abbiamo effettuato i seguenti passi: Lo abbiamo raddoppiato; gli abbiamo aggiunto 5; abbiamo diviso il risultato per 7; gli abbiamo sottratto 4; abbiamo moltiplicato per 8. Alla fine di queste operazioni abbiamo ottenuto 8. Qual era il numero di partenza? Partiamo per così dire dalla fine, ossia dal numero 8 che abbiamo ottenuto al termine delle nostre operazioni. Adesso compiamo a ritroso il percorso indicato. Se abbiamo ottenuto 8 moltiplicando per 8 vuol dire che prima il nostro numero era 1, dato che 1 · 8 = 8. Ma avevamo ottenuto 1 sottraendogli 4, quindi il numero in precedenza era ……, dato che …… = … quest'ultimo numero si era ottenuto dividendo per 7, quindi prima del passo 3 il numero era ……, dato che …… = …. Dato che quest'ultimo

numero era stato ottenuto aggiungendogli 5 vuol dire che in precedenza il numero era ……, dato che ……. = ...… Infine, come prima operazione abbiamo raddoppiato il numero, quindi il numero di partenza è la metà di quello ottenuto al passo 2, cioè ……

- Vogliamo trovare un numero primo di due cifre in cui la cifra delle unità supera di 4 quella delle decine. Apparentemente il problema sembra molto complicato se non impossibile da risolvere. Tralasciamo la prima informazione, per il momento, e concentriamoci sulla seconda. Dato che la cifra delle unità supera di 4 quella delle decine, il numero cercato è uno dell'insieme {15, 26, ……}. A questo punto è molto semplice considerare quali e quanti fra gli elementi dell'insieme sono primi. In questo caso essi sono in numero di …… e sono ……. Quindi il nostro problema non è impossibile, ma, dato che ha più di una soluzione, non è univocamente determinato.

Fase 3: Prova!

Utilizzando strategie a piacere, ma organizzate e coerenti, risolvere i seguenti problemi.

1. Le età di due fratelli sommano 42, se l'età del maggiore supera di 7 quella del minore, quanti anni ha ciascuno dei due? [17,5; 24,5]
2. Gina è andata a fare la spesa. Sapendo che ha speso i $\frac{2}{7}$ di quel che aveva con sé per la frutta, $\frac{1}{6}$ per la verdura e $\frac{1}{5}$ per i dolci ed è tornata a casa con €18,25 euro, quanti soldi aveva con sé e quanto ha speso per ciascuno dei suoi acquisti? [€ 52,50; € 15,00; € 8,75; € 10,50]]
3. Due segmenti hanno una lunghezza complessiva di *m* 10,40; se il minore è i $\frac{3}{5}$ del maggiore, quanto sono lunghi i due segmenti? [*m* 3,90; *m* 6,50]
4. La somma di due numeri naturali consecutivi è 321, determinare i numeri. [160, 161]
5. La somma di tre numeri naturali consecutivi è 144. Determinare ciascuno dei numeri. [47, 48, 49]
6. Un maglione scontato del 25% costa € 12,60, quanto costava prima dello sconto? [€ 16,80]
7. Gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sono l'uno i $\frac{7}{18}$ dell'altro. Quanto misura ciascuno dei due angoli? [35°, 55°]
8. Si sceglie un numero naturale e su di esso si eseguono le seguenti operazioni successive: si triplica, si aggiunge 4, si divide per 5, si toglie 12 e si ottiene 14. Qual è il numero scelto? [42]
9. Si sceglie un numero naturale e su di esso si eseguono le seguenti operazioni successive: si dimezza, si aggiunge 7, si moltiplica per 4, si toglie 9 e si ottiene 267. Qual è il numero scelto? [124]
10. Un'eredità di € 10000 viene divisa fra quattro persone, in modo che ciascuno prenda metà di quanto ha preso il precedente. Così facendo resta una somma di € 625 che serve per pagare le tasse. Quanto ha preso ciascuno dei quattro? [€ 2343,75]
11. Di solito le scacchiere vengono divise in 8 righe e 8 colonne. Le righe sono indicate con le lettere da A fino a H, le colonne con numeri da 1 a 8. In questo modo una casella viene indicata da una lettera e un numero, che corrispondono alla riga e alla colonna in cui essa si trova. Effettuiamo le seguenti operazioni: mettiamo 1 chicco di riso su una cella di riga una vocale e colonna un numero dispari, 2 chicchi su una cella di riga una vocale e colonna un numero pari, 3 chicchi su una cella di riga una consonante e colonna un numero dispari, 4 chicchi sulle rimanenti celle. Quanti chicchi abbiamo usato in tutto? [206]
12. Nel campionato di calcio di serie A chi vince ottiene 3 punti, chi pareggia 1, chi perde 0. Se una squadra ha accumulato 25 punti, qual è il massimo numero di partite che ha vinto? Qual è il minimo numero di partite che ha giocato? [8; 9]
13. Con riferimento al problema precedente, se ha giocato in tutto 15 partite, qual è il massimo numero di partite che ha pareggiato? In questo caso quante partite ha perso? [10; 0]
14. Trovare uno o più numeri di 2 cifre divisibili per 3, la somma delle cui cifre è 6. [15; 24; 33; 39; 42; 48; 51; 57; 60; 66; 75; 84; 93; 99]
15. Trovare uno o più numeri di 3 cifre, la somma delle cui cifre è 10 e il prodotto delle stesse cifre è 8. [118; 181; 811]

16. Dividere il numero 275 in due parti in modo tale che la minore sia i due terzi della maggiore. [110; 165]
17. Dividere un segmento lungo 12 *cm* in due parti in modo che la maggiore sia i cinque terzi della minore. [4,5 *cm*; 7,5 *cm*]
18. Luca e Matteo hanno due somme di denaro. Se Luca dà a Matteo un euro questi ha il doppio del denaro che ora ha Luca, se invece è Matteo a dare a Luca un euro, quest'ultimo ha un ventiseiesimo in meno di quanto ha ora Matteo. Quanto denaro ha ciascuno dei ragazzi? [€ 5,25; € 7,50]
19. Gli angoli interni di un triangolo stanno fra loro come i numeri 3, 4, 5. Quanto misura ciascuno degli angoli? [45°; 60°; 75°]
20. Gli angoli interni di un quadrilatero convesso stanno fra loro come i numeri 2, 5, 8, 10. Quanto misura ciascuno degli angoli? [28°48′; 72°; 115°12′; 144°]

Problemi risolubili con equazioni di primo grado o a esse riconducibili

Fase 1: Osserva

- Determinare una frazione equivalente a $\frac{3}{2}$. Il quesito, così com'è formulato, ci suggerisce di cercare una frazione nella quale il numeratore e il denominatore siano diversi tra loro, che indichiamo per esempio con x e y, in modo che sia verificata l'uguaglianza $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$. È evidente che questo problema è indeterminato: infatti di soluzioni della relazione precedente, che è un'equazione in due incognite, ve ne sono infinite. Per esempio sono soluzioni $\frac{3}{2}, \frac{6}{4}, \frac{9}{6}, \frac{12}{9}$, ... e tutte quelle che si ottengono moltiplicando numeratore e denominatore della frazione di partenza per una stessa quantità intera che prendiamo positiva (ricordiamo che moltiplicare per uno stesso numero anche se negativo equivale a moltiplicare per un numero positivo). Abbiamo perciò bisogno di un'ulteriore informazione per risolvere la questione, informazione che deve riguardare un legame di qualche natura fra le due incognite; ciò servirà a ridurre il numero delle incognite e quindi a rendere univoca la soluzione. Supponiamo allora di sapere che il numeratore supera di 5 unità dal denominatore, cioè che la frazione può indicarsi nel seguente modo: $\frac{x+5}{x}$; pertanto l'equazione diviene: $\frac{x+5}{x}=\frac{3}{2}$. Risolviamola: $\frac{2\cdot(x+5)}{2x}=\frac{3x}{2x}$. Possiamo eliminare il denominatore comune perché certamente $x = 0$ non può essere una soluzione del problema. Otteniamo quindi: $2x + 10 = 3x \Rightarrow 2x - 3x = -10 \Rightarrow -x = -10 \Rightarrow x = 10$. Quindi la frazione cercata sarà $\frac{10+5}{10}=\frac{15}{10}$, che è effettivamente equivalente a $\frac{3}{2}$ e in cui la differenza fra il numeratore e il denominatore è 5.
- Trovare tre numeri dispari consecutivi la cui somma è 173. Tre numeri dispari consecutivi sono, per esempio, 3, 5 e 7; quindi, in generale, indicato il minore di essi con un simbolo, per esempio x, gli altri due possono indicarsi con $x + 2$ e $x + 4$. Pertanto la richiesta del problema si può esprimere mediante la seguente equazione: $x + x + 2 + x + 4 = 173$, che, risolta, fornisce il valore del numero minore che abbiamo indicato con x: $3x + 6 = 173 \Rightarrow 3x = 173 - 6 \Rightarrow 3x = 167 \Rightarrow x=\frac{167}{3}$. La precedente soluzione risolve l'equazione ma non il problema, dato che il valore ottenuto non è intero. Anzi, potevamo osservare subito che il problema non ammetteva soluzione: infatti la somma di tre numeri dispari consecutivi è sempre divisibile per 3, come possiamo notare dal primo membro dell'equazione $3x + 6 \Rightarrow 3 \cdot (x + 2)$, mentre 173 non lo è. In effetti indicando i numeri con $x - 2$, x e $x + 2$, la somma fa $3x$ e si capisce ancora meglio.
  Se invece la somma fosse stata per esempio 171, che è divisibile per 3, il problema avrebbe avuto soluzione. Vediamo come: $3x = 171 \Rightarrow x=\frac{171}{3} \Rightarrow x = 57$, e i numeri cercati sarebbero stati 55, 57 e 59.

Il problema non avrebbe avuto soluzione se la somma fosse stata divisibile per 3 e pari, come per esempio 174, in questo caso infatti i 3 numeri soluzione sarebbero stati tutti e tre pari: $3x = 174 \Rightarrow x = \frac{174}{3} \Rightarrow x = 58$.

- Un triangolo di perimetro 15 *cm* è tale che i suoi lati siano proporzionali ai numeri 3, 7 e 11. Determinare le misure dei lati. Dire che i lati sono proporzionali a certi numeri significa che esiste un'unità di misura, che indichiamo per esempio con *u*, secondo la quale i lati sono rispettivamente $3u$, $7u$ e $11u$. Adesso sfruttiamo la seconda informazione in nostro possesso, il fatto cioè che il perimetro sia 15 *cm*. Lo stesso perimetro espresso nell'unità *u* è $3u + 7u + 11u = 21u$. Ciò vuol dire, dato che il perimetro è sempre lo stesso, che i due valori sono uguali cioè $21u = 15\ cm$, che può considerarsi un'equazione di primo grado nell'incognita *u*. Si ha perciò: $u = \frac{15}{21}\ cm \Rightarrow u = \frac{5}{7}\ cm$. Possiamo perciò dire che i lati del triangolo sono lunghi rispettivamente: $3 \cdot \frac{5}{7}\ cm = \frac{15}{7}\ cm$, $7 \cdot \frac{5}{7}\ cm = 5\ cm$, $11 \cdot \frac{5}{7}\ cm = \frac{55}{7}\ cm.$. Concludiamo osservando che, per risolvere il problema, abbiamo sfruttato il fatto che una stessa grandezza può essere espressa con due diverse unità di misura.

Fase 2: Completa ...

- Un padre e un figlio hanno complessivamente 47 anni; sapendo che fra cinque anni il padre avrà il doppio dell'età del figlio, determinare l'età che ciascuno dei due ha attualmente. Indichiamo inizialmente con x e $47 - x$ le età di padre e figlio rispettivamente. Ciò perché in questo modo utilizziamo la prima informazione e contemporaneamente lavoriamo con una sola incognita. Adesso dobbiamo sfruttare la seconda informazione. Fra cinque anni il padre avrà un'età che sarà data da quella attuale, x, aumentata di 5, quindi avrà …… anni. Allo stesso modo anche l'età del figlio sarà aumentata di …… anni, quindi si esprimerà come $47 - x +$ …… = …… Noi sappiamo che queste due ultime espressioni sono legate fra loro dal fatto che la prima è doppia rispetto alla seconda, cioè che si ha l'equazione $x + 5 = 2 \cdot$ (……..). Risolviamola: …….. poiché la soluzione è intera positiva può costituire un'età accettabile, quindi abbiamo trovato i valori cercati. Pertanto il padre ha, oggi, …… anni e il figlio …… anni.
- Un numero naturale di due cifre verifica le seguenti proprietà: la somma delle cifre è 12 e la differenza fra i tre quarti della cifra delle decine e i due terzi di quella delle unità è pari a $\frac{23}{12}$. Determinare il numero. Cominciamo a sfruttare la prima informazione. Indichiamo con x la cifra delle decine, quindi la cifra delle unità si indicherà con $12 - x$. Ora utilizziamo la seconda informazione, mediante la quale impostiamo l'equazione risolutrice: $\frac{3}{4}x - \frac{2}{3} \cdot (.....) = ...$ Risolviamo l'equazione: …… ……., poiché il valore ottenuto è un numero naturale di una cifra, può rappresentare la cifra delle decine, si ha quindi che il numero cercato è …….
- In un triangolo rettangolo gli angoli acuti verificano la seguente proprietà: la differenza fra i 7/8 del minore e 1/4 del maggiore è 13°30'. Determinare la misura di tali angoli. Cominciamo a trasformare in gradi il valore della differenza, per cui si ha: 13°30' = 13° + 0,5° = 13,5°. Adesso sfruttiamo il fatto che gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sono fra loro complementari, ossia che la loro somma è …… possiamo allora indicare le relative misure con x e …… Facilmente impostiamo l'equazione risolutrice del problema, sfruttando la seconda informazione: $\frac{7}{8}x - \frac{1}{4} \cdot (.....) = ...$, risolviamo: …… dato che la soluzione dell'equazione è un numero inferiore a 90° è accettabile. Pertanto le misure richieste sono: ……. e …….

Fase 3: Prova!

Risolvere i seguenti problemi dopo avere impostato delle opportune equazioni di primo grado

1. Impostare delle opportune equazioni di primo grado per tutti i problemi assegnati nell'attività 1 per i quali è possibile farlo.
2. Determinare una frazione equivalente a $\frac{7}{8}$, sapendo che la somma di numeratore e denominatore è 225. $\left[\frac{105}{120}\right]$
3. Determinare una frazione equivalente a $\frac{15}{7}$, sapendo che la differenza fra numeratore e denominatore è 124. [Impossibile]
4. Determinare una frazione equivalente a $\frac{34}{11}$, sapendo che la differenza fra i $\frac{3}{8}$ del numeratore e i $\frac{4}{7}$ del denominatore è $\frac{1991}{28}$. $\left[\frac{374}{121}\right]$
5. Dividere un segmento di 42 *cm* in tre segmenti le cui misure siano proporzionali ai numeri 4, 6 e 10. [8,4 *cm*; 12,6 *cm*; 21 *cm*]
6. Un numero naturale di due cifre verifica le seguenti proprietà: la differenza fra la cifra delle decine e quella delle unità è 8; la somma fra i cinque quarti della cifra delle decine e un terzo di quella delle unità è $\frac{139}{12}$. Determinare il numero. [91]
7. Un numero di quattro cifre verifica le seguenti proprietà: le sue cifre sono quattro numeri interi consecutivi; le cifre sono scritte in ordine crescente. Determinare il numero nei diversi casi in cui la somma delle cifre è: a) 14; b) 15; c) 16; d) 30. Nei casi in cui il problema dovesse essere impossibile spiegarne il perché. [2345; ∅; ∅; 6789]
8. L'età di un padre è attualmente pari al doppio di quella del figlio. Se fra 7 anni la somma delle due età sarà 68, quanti anni hanno attualmente i due? [18; 36]
9. Le tavolette da 100 grammi di cioccolato al latte di una certa marca costano € 0,75, quelle fondenti €0,82. Se sono state acquistate complessivamente 12 tavolette di cioccolato spendendo € 9,28 euro, vogliamo sapere quante tavolette di ciascun tipo sono state acquistate. [8; 4]
10. Un panino da 100 gr. di farina di frumento costa 0,25 euro, uno di farina di segale costa 0,28 euro. Se in totale sono stati acquistati 38 panini spendendo 10,25 euro, quanti panini di ciascun tipo sono stati acquistati? [13; 25]
11. Il costo al chilogrammo dell'uva bianca è € 0,80, di quella nera € 0,85. Avendo acquistato complessivamente un numero intero di chilogrammi di uva di ciascun tipo, per un totale di 8 chilogrammi e per una spesa complessiva di € 6,30, determinare quanti chilogrammi di uva di ciascun tipo sono stati acquistati. [Impossibile]
12. La divisione di due numeri naturali ha per quoziente 12 e per resto 7, determinare i due numeri sapendo che la loro somma è 943. [871; 72]
13. Un rettangolo ha le dimensioni che stanno nel rapporto $\frac{5}{6}$, se il perimetro è 12,76 *cm*, quanto vale l'area? [10,092 cm^2]
14. In un trapezio rettangolo il perimetro è 18 *cm*, il lato obliquo è metà della somma delle basi e i $\frac{5}{3}$ dell'altezza. Determinare l'area del trapezio. [15 cm^2]
15. Charlize ha acquistato un capo in saldo con lo sconto del 25%, poco prima di pagare viene riconosciuta dal proprietario che è un amico di suo padre, che perciò le concede un ulteriore sconto del 10% sul prezzo già scontato. Così ha pagato € 32.40. Qual era il prezzo senza alcun tipo di sconto? [€ 48,00]
16. Con riferimento al problema precedente, se lo sconto del 10% fosse stato concesso sul prezzo senza sconto, cambierebbe il risultato? Giustificare la risposta. [Sì, il prezzo iniziale sarebbe circa € 49,85]

17. Nei tempi antichi era tenuto in molta considerazione l'ordine di nascita in una famiglia. Così accadde che un genitore alla propria morte dispose che il primogenito avrebbe avuto la metà dell'eredità, consistente in monete d'oro, il secondogenito la metà di ciò che era rimasto e così via fino all'ultimogenito, il settimo. Così facendo rimanevano ancora 128 monete d'oro che sarebbero state divise in parti uguali fra i servitori. Quanto denaro prese ciascuno dei figli?
[8192; 4096; 2048; 1024; 512; 256; 128; 128]

I seguenti quesiti sono tratti Dalle Propositiones ad acuendos juvenes di Alcuino di York

18. *Un uomo vedendo dei cavalli che pascolavano in un campo espresse un desiderio dicendo: «Se foste miei e foste altrettanti più metà della metà, certamente menerei vanto di* 100 *cavalli». Riconosca, chi vuole, quanti cavalli che pascolavano vide all'inizio quell'uomo.* [40]
19. *Un vecchio salutò un ragazzo e gli disse: «Vivi, figlio, vivi quanto hai vissuto e altrettanto tre volte tanto e Dio ti aggiunga uno dei miei anni e raggiungerai* 100 *anni» Dica, chi è in grado, quanto anni aveva allora il ragazzo.* [8 anni e 3 mesi]
20. *Un uomo, volendo costruire una casa assunse* 6 *muratori,* 5 *dei quali erano maestri e uno apprendista. E convennero tra loro, quello che voleva costruire e i muratori, che per ogni giorno si sarebbero pagati* 25 *denari di salario, in modo che l'apprendista ricevesse la metà di quello che riceveva un maestro. Dica, chi può, quanto ricevette ciascuno di essi per ogni giorno.*
[50/11 al maestro e 25/11 all'apprendista]

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito

http://mathinterattiva.altervista.org/volume_1_4.htm

4. Problemi lineari

4.3 Uguaglianze lineari in più variabili

Prerequisiti

- Calcolo polinomiale
- Equazioni lineari
- Concetto di vettore e matrice
- Concetto di congiunzione logica

Obiettivi

- Riconoscere che alcuni problemi dipendono da più di una variabile
- Risolvere semplici sistemi di equazioni lineari
- Calcolare determinanti del secondo e del terzo ordine
- Risolvere un sistema con il metodo di sostituzione e con il metodo di Cramer
- Modellizzare un problema da risolvere con un sistema lineare
- Risolvere, sotto certe condizioni, problemi altrimenti indeterminati

Contenuti

- Sistemi di equazioni. Risoluzione dei sistemi lineari: metodo di sostituzione
- Risoluzione dei sistemi lineari: metodo e teorema di Cramer
- Rette nel piano cartesiano
- Problemi lineari in più incognite

Parole Chiave

Coefficiente angolare – Determinante

Simbologia

| | Con questo simbolo indichiamo il determinante di una matrice

I sistemi di equazioni. Risoluzione dei sistemi lineari: metodo di sostituzione

Nella precedente unità di questo modulo abbiamo affrontato la risoluzione di equazioni e problemi coinvolgenti una sola incognita. Dato che risulta evidente che nei problemi teorici e pratici, capita molto più spesso di incontrare problemi dipendenti da più di una incognita, in questa unità vogliamo cominciare a studiare le uguaglianze coinvolgenti più di una variabile, limitandoci sempre al caso lineare, ossia al primo grado. In seguito studieremo anche quelle di grado superiore al primo.

Esempio 1

Elencare gli elementi dell'insieme dei numeri pari di 3 cifre, che siano divisibili per 11 e la somma delle cui cifre sia uguale a 6. Quel che dobbiamo fare è determinare gli elementi di un'intersezione fra i tre insiemi seguenti: $A = \{100; 102; 104; ...; 998\}$ dei numeri pari di 3 cifre; $B = \{110; 121; 132; ...; 990\}$ dei numeri interi di 3 cifre divisibili per 11; $C = \{105; 114; 123; 132; ...; 600\}$ dei numeri interi di 3 cifre la somma delle cui cifre vale 6. È facile capire che gli elementi di ciascuno dei tre insiemi possono essere individuati dalle soluzioni di un' equazione. Per esempio, se con c indichiamo la cifra delle centinaia, con d quella delle decine e con u quella delle unità l'insieme C può essere individuato dalle soluzioni dell'equazione $c + d + u = 6$. Quindi il problema sarà risolto dalla risoluzione contemporanea di 3 equazioni.

Per cercare di impostare poi risolvere il problema precedente, stabiliamo alcune definizioni.

Definizione 1

Diciamo **sistema di due o più equazioni**, l'insieme di due o più equazioni che devono essere risolte contemporaneamente. Quindi risolvere un sistema di due o più equazioni significa determinare le eventuali soluzioni comuni a tutte le equazioni del sistema.

Esempio 2

Il problema enunciato precedentemente, in cui abbiamo già proposto di indicare con c, d e u le cifre da determinare), equivale alla risoluzione di un sistema. Abbiamo detto che risolvere un sistema significa determinare, se esistono, le soluzioni comuni alle equazioni o disequazioni che costituiscono lo stesso sistema. Lasciando inalterata la notazione, ossia inserendo le equazioni da risolvere all'interno di parentesi graffe, risolvere il nostro problema è equivalente alla risoluzione del seguente sistema: $\begin{cases} u = 2n \\ c - d + u = 11m \\ c + d + u = 6 \end{cases}$, Osserviamo che la variabile n può assumere solo i valori 0, 1, 2, 3, 4, mentre la variabile m può assumere solo i valori 0 e 1. Infatti la cifra u deve appartenere all'insieme $\{0; 2; 4; 6; 8\}$, mentre, dato che il numero cdu è divisibile per 11 solo se $c + u – d$ è zero o un multiplo di 11 e dato che il massimo valore di $c + d$ è 11, $c – d + u$ indicherà che il dato numero è divisibile per 11 solo se sarà uguale a 0 o a 11.

Prima di passare alla determinazione dei metodi di risoluzione, consideriamo ancora qualche altro esempio.

Esempio 3

Si voglia risolvere l'equazione $x + y = 2$. Ovviamente essa ha infinite soluzioni, per esempio le coppie (1; 1), (3; –1), (–1, 3). Osserviamo anche che le ultime due soluzioni sono fra loro diverse, pur contenendo "apparentemente" gli stessi elementi, solo che sono disposti in ordine diverso.

Stiamo così considerando un altro motivo che può condurci alla risoluzione di un sistema. In generale un'equazione con più di una incognita ha più di una soluzione (spesso ne ha infinite), cercare quindi le soluzioni comuni a due o più di tali equazioni nelle stesse incognite è perciò un problema di opportunità, poiché in generale le soluzioni di un sistema di equazioni sono invece finite. Passiamo alla effettiva determinazione delle soluzioni.

Esempio 4

Risolvere il sistema di due equazioni in due incognite: $\begin{cases} x+y=3 \\ 3x+4y=11 \end{cases}$. In questo caso particolarmente fortunato ci accorgiamo che una soluzione comune è certamente la seguente ($x = 1$, $y = 2$), ma resta da stabilire se questa è l'unica soluzione comune alle due equazioni o se ve ne sono altre e soprattutto non abbiamo risolto la questione della determinazione delle eventuali soluzioni comuni a due o più equazioni qualsiasi in un numero generico di incognite.

Premettiamo alcune definizioni, prima di fornire una risposta alle questioni precedenti.

Definizione 2

Diciamo **grado di un sistema** di due o più equazioni in n incognite il prodotto dei gradi delle singole equazioni che costituiscono il sistema.

Definizione 3

Un sistema di equazioni di primo grado si dirà **sistema lineare**.

Prima di andare avanti, notiamo che la soluzione ($x = 1$, $y = 2$) è soluzione del sistema precedente ma non lo è la soluzione ($x = 2$, $y = 1$), cioè in generale la soluzione di un sistema di primo grado di due o più equazioni in n incognite è una n–upla **ordinata** di numeri reali. Adesso presentiamo qualche metodo risolutivo.
Come al solito cominciamo a considerare il più semplice tipo di sistema, quello cioè con il minimo numero di incognite e il minimo numero di equazioni. Risulta abbastanza chiaro che il numero minimo di equazioni deve essere due, per quel che riguarda il numero minimo di incognite, in linea teorica, esso è certamente uno. Però in un sistema di primo grado del tipo seguente: $\begin{cases} ax+b=0 \\ cx+d=0 \end{cases}$, le due equazioni possono essere o equivalenti, e quindi avere l'unica soluzione comune, o non equivalenti, e non avere quindi alcuna soluzione comune.
Pertanto stabiliamo di considerare come sistema iniziale da trattare quello lineare di due equazioni in due incognite, cioè il seguente: $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$, nel quale le lettere x e y rappresentano le incognite e le altre rappresentano generici numeri (coefficienti delle incognite o termini noti delle singole equazioni).
È evidente che, se il sistema fosse formato da due equazioni contenenti ciascuna una sola delle incognite, non vi sarebbe alcun problema, come nell'esempio seguente.

Esempio 5

Si voglia risolvere il sistema $\begin{cases} 3x=1 \\ 4y-3=2 \end{cases}$. Basta risolvere separatamente ciascuna delle equazioni: la soluzione delle singole equazioni che è anche quella del sistema: $\begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{5}{4} \end{cases}$.

L'esempio precedente ci suggerisce di fare in modo che in ciascuna delle equazioni componenti il sistema sia presente una sola incognita. Ma ciò è possibile? E come può farsi? Vediamo un altro esempio.

Esempio 6

Risolvere il sistema $\begin{cases} x+y=3 \\ 3x+4y=11 \end{cases}$. Possiamo operare su ciascuna singola equazione come se fosse una equazione parametrica e risolvere una delle due equazioni *come se* l'altra incognita fosse un parametro, scri-

vendo in uno qualsiasi dei seguenti quattro modi: $\begin{cases} x=3-y \\ 3x+4y=11 \end{cases}$; $\begin{cases} y=3-x \\ 3x+4y=11 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=3 \\ x=\dfrac{11-4y}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=3 \\ y=\dfrac{11-3x}{4} \end{cases}$. Nella prima scrittura (scegliere una qualunque delle quattro forme precedenti del sistema è del tutto equivalente) abbiamo esplicitato la legge di dipendenza di x da y, ossia assegnando alla variabile y un numero reale qualsiasi, la variabile x si ottiene da questo valore di y calcolando l'espressione $3 – y$ e quindi possiamo dire che le due scritte simboliche x e $3 – y$ sono equivalenti. Ma allora, e ecco giustificata la tecnica del metodo che stiamo presentando, ogniqualvolta troviamo scritto x, **al suo posto** possiamo scrivere $3 – y$. Quindi, sostituendo questo valore nella seconda equazione, otteniamo il sistema: $\begin{cases} x=3-y \\ 3\cdot(3-y)+4y=11 \end{cases}$ in cui un'equazione, la seconda in questo caso, ha una sola incognita.

Tale sistema, semplificato diviene $\begin{cases} x=3-y \\ 9-3y+4y=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3-y \\ y=2 \end{cases}$. A questo punto abbiamo determinato il valore di y, che è 2; perciò, per ottenere anche il valore di x, basta sostituirlo nella prima equazione. Si ha così $x = 3 – 2 = 1$.

Se adesso vogliamo verificare i risultati ottenuti, basta sostituirli alle incognite: $\begin{cases} 1+2=3 \\ 3+4\cdot 2=11 \end{cases}$. Dato che entrambe le uguaglianze sono verificate, possiamo dire che la soluzione ottenuta è corretta.

Vediamo qualche altro esempio.

Esempio 7

- Risolvere il sistema $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ 4x-y=3 \end{cases}$. È arbitraria la scelta dell'equazione su cui lavorare e dell'incognita da ricavare per prima, ma qui è conveniente determinare il valore di y nella seconda equazione poiché in tal caso l'espressione corrispondente è intera. Si ha: $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ -y=3-4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3(-3+4x)=1 \\ y=-3+4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+9-12x=1 \\ y=-3+4x \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -10x=1-9 \\ y=-3+4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\cancel{-8}^{4}}{\cancel{-10}^{5}} \\ y=-3+4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{5} \\ y=-3+4\cdot\dfrac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{5} \\ y=\dfrac{-15+16}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{5} \\ y=\dfrac{1}{5} \end{cases}$. Verifichiamo il risultato.

$\begin{cases} 2\cdot\dfrac{4}{5}-3\cdot\dfrac{1}{5}=1 \\ 4\cdot\dfrac{4}{5}-\dfrac{1}{5}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{8}{5}-\dfrac{3}{5}=1 \\ \dfrac{16}{5}-\dfrac{1}{5}=3 \end{cases}$. Ancora una volta le uguaglianze sono corrette.

- Risolvere il sistema $\begin{cases} 5x+4y=-1 \\ 10x-3y=2 \end{cases}$. Apparentemente stavolta non è possibile evitare l'introduzione di frazioni. Però se, come deve sempre farsi, guardiamo bene l'esercizio prima di procedere, riusciamo ugualmente a risolvere in maniera più semplice il sistema.

$\begin{cases} 5x=-1-4y \\ 2\cdot 5x-3y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x=-1-4y \\ 2\cdot(-1-4y)-3y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x=-1-4y \\ -2-8y-3y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x=-1-4y \\ -11y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x=-1-4\cdot\left(-\dfrac{4}{11}\right) \\ y=-\dfrac{4}{11} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}5x=-1+\frac{16}{11}\\ y=-\frac{4}{11}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5x=\frac{5}{11}\\ y=-\frac{4}{11}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\cancel{5}}{11}\cdot\frac{1}{\cancel{5}}\\ y=-\frac{4}{11}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{11}\\ y=-\frac{4}{11}\end{cases}$$

Abbiamo utilizzato l'artificio di determinare non il valore di x ma di un suo multiplo.

- Risolvere il sistema $\begin{cases}7x-2y=1\\ 14x-4y=2\end{cases}$. Notiamo che se nella seconda equazione mettiamo in evidenza il fattore 2: $\begin{cases}7x-2y=1\\ 2\cdot(7x-2y)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7x-2y=1\\ 7x-2y=1\end{cases}$, otteniamo due equazioni identiche e quindi dato che il sistema equivale alla risoluzione di una sola equazione in due incognite, esso ha le stesse soluzioni di tale equazione, cioè infinite.
- Risolvere il sistema $\begin{cases}4x+9y=-2\\ 12x+27y=6\end{cases}$. Procedendo come nell'esempio precedente stavolta otteniamo due equazioni che si contraddicono: $\begin{cases}4x+9y=-2\\ 3\cdot(4x+9y)=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x+9y=-2\\ 4x+9y=2\end{cases}$. Quindi il sistema non ha soluzioni.

Tenuto conto degli esempi precedenti stabiliamo le seguenti definizioni.

Definizione 4

Si dice **sistema impossibile** un sistema privo di soluzioni; **sistema indeterminato** un sistema con infinite soluzioni.

Passiamo alla risoluzione di un sistema di tre equazioni in tre incognite.

Esempio 8

Risolvere il sistema $\begin{cases}3x-2y+z=3\\ x-2y+4z=2\\ 2x-y+5z=1\end{cases}$. Le equazioni sono tre, quante le incognite, ma il metodo di **sostituzione** continua a rimanere un ottimo metodo di risoluzione, anche se la procedura di sostituzione deve essere impiegata due volte. La si usa una prima volta per ricavare il valore di una incognita da una delle tre equazioni e poi, sostituendolo nelle altre due, si ottiene un sistema di due equazioni in due incognite:

$$\begin{cases}3x-2y+z=3\\ x-2y+4z=2\\ 2x-y+5z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3\cdot(2y-4z+2)-2y+z=3\\ x=2y-4z+2\\ 2(2y-4z+2)-y+5z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6y-12z+6-2y+z=3\\ x=2y-4z+2\\ 4y-8z+4-y+5z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4y-11z=-3\\ x=2y-4z+2\\ 3y-3z=-3\end{cases}.$$

A questo punto si lavorerà sulla prima e terza equazione come se rappresentassero un singolo sistema di due equazioni in due incognite. Ricaviamo quindi, per esempio, la variabile y dalla terza equazione.

$$\begin{cases}4\cdot(z-1)-11z=-3\\ x=2y-4z+2\\ y=z-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4z-4-11z=-3\\ x=2y-4z+2\\ y=z-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-7z=1\\ x=2y-4z+2\\ y=z-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=-\frac{1}{7}\\ x=2y-4\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)+2\\ y=-\frac{1}{7}-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=-\frac{1}{7}\\ x=2\cdot\left(-\frac{8}{7}\right)+\frac{4}{7}+2\\ y=-\frac{8}{7}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=-\frac{1}{7}\\ x=\frac{2}{7}\\ y=-\frac{8}{7}\end{cases}.$$

Adesso risulta semplice generalizzare e adattare il precedente procedimento alla risoluzione di sistemi di n equazioni in n incognite, anche se all'aumentare del valore di n aumentano le difficoltà di calcolo.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo determinare un numero di 4 cifre, sapendo che la somma delle prime due cifre è uguale alla somma delle altre due; la somma di tutte le cifre è 18; il prodotto fra la cifra delle unità e delle centinaia è 42; infine il prodotto di tutte le cifre è 252.

Indichiamo il numero con *mcdu*, impostiamo il seguente sistema risolvente: $\begin{cases} m+c=d+u \\ m+c+d+u=18 \\ u\cdot c=42 \\ m\cdot c\cdot d\cdot u=252 \end{cases}$.

Scrivere i sistemi risolventi i seguenti problemi (nel seguito indicheremo con m, c, d, u le cifre corrispondenti alle migliaia, alle centinaia, alle decine, alle unità). Ricordiamo che il numero mcdu si può esprimere come* 1000*m* + 100*c* + 10*d* + *u

Livello 1

1. Determinare due numeri x e y, sapendo che la somma è 23 e il loro prodotto è 90. $\left[\begin{cases} x+y=23 \\ xy=90 \end{cases}\right]$
2. Determinare due numeri x e y, sapendo che la loro differenza è 34 e il loro rapporto è $\frac{7}{3}$. $\left[\begin{cases} x-y=34 \\ \frac{x}{y}=\frac{7}{3} \end{cases}\right]$
3. Determinare i numeri di due cifre entrambe multiple di 3. $\left[\begin{cases} d=3h \\ u=3k \end{cases}\right]$
4. Determinare quei numeri x e y, per cui il quadrato di uno è uguale al cubo dell'altro e la loro somma è un numero pari. $\left[\begin{cases} x^2=y^3 \\ x+y=2n \end{cases}\right]$

Livello 2

5. Determinare 3 numeri sapendo che la loro somma è uguale al doppio della differenza fra i primi 2 numeri, il loro prodotto è 1760 e il triplo del primo numero è uguale a 4 volte il terzo numero. $\left[\begin{cases} x+y+z=2\cdot(x-y) \\ xyz=1760 \\ 3x=4z \end{cases}\right]$
6. Determinare i numeri di due cifre multipli di 4 in cui la cifra delle unità è doppia di quella delle decine. $\left[\begin{cases} 10d+u=4n \\ u=2d \end{cases}\right]$
7. Determinare i numeri di tre cifre multipli di 5 in cui la cifra delle unità è uguale a quella delle decine e in cui la cifra delle decine è multipla di 3. $\left[\begin{cases} 100c+10d+u=5n \\ u=d \\ d=3h \end{cases}\right]$
8. Determinare i numeri di tre cifre, per i quali scambiando la cifra delle unità con quella delle decine si ottiene il doppio del numero di partenza e la somma delle cifre è un numero divisibile per 3. $\left[\begin{cases} 100c+10d+u=2\cdot(100u+10d+c) \\ c+d+u=3n \end{cases}\right]$

9. Determinare i numeri di tre cifre consecutive crescenti, in cui la cifra delle centinaia è metà della somma delle altre due e la cifra delle unità è dispari.

$$\left[\begin{cases} c = d+1 \\ d = u+1 \\ c = \dfrac{d+u}{2} \\ u = 2h+1 \end{cases}\right]$$

10. Determinare i numeri di quattro cifre multipli di 11, in cui la cifra delle unità è uguale alla somma delle cifre delle decine e delle migliaia e la cifra delle centinaia è uguale al prodotto delle cifre delle decine e delle migliaia.

$$\left[\begin{cases} 1000m+100c+10d+u = 11n \\ u = d+m \\ c = d \cdot m \end{cases}\right]$$

Lavoriamo insieme

Consideriamo l'equazione $2x - 5y = 2$. Essendo un'equazione in due variabili, è indeterminata. Per trovare alcune delle sue soluzioni, risolviamola come se fosse parametrica nell'incognita x: $x = \dfrac{2+5y}{2}$. Adesso costruiamo la seguente tabella, in cui sostituiamo al posto di y valori a piacere e calcoliamo i corrispondenti valori di x.

y	$x = \dfrac{2+5y}{2}$
0	$x = \dfrac{2+5\cdot 0}{2} = \dfrac{2+0}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$
1	$x = \dfrac{2+5\cdot 1}{2} = \dfrac{2+5}{2} = \dfrac{7}{2}$
-2	$x = \dfrac{2+5\cdot(-2)}{2} = \dfrac{2-10}{2} = -\dfrac{8}{2} = -4$
$\dfrac{3}{2}$	$x = \dfrac{2+5\cdot\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{2+\frac{15}{2}}{2} = \dfrac{\frac{4+15}{2}}{2} = \dfrac{19}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{19}{4}$

Trovare almeno 3 soluzioni per ciascuna delle seguenti equazioni in più incognite

Livello 1

11. $x + 2y = 3$; $4x - 3y = 0$; $3x - 2t - 1 = 0$; $x + 2y - 3z = 0$; $x - y + z = 0$; $2x - y + z = 1$

Livello 2

12. $x - y + z - t = 0$; $a + b - 1 = c + 2$; $4x - 3y + 2z - t = -5$; $3m + 2n - 3p = 4w - 1$

Lavoriamo insieme

Sabrina ha risolto il sistema $\begin{cases} x+2y-z=11 \\ 2x-y=3 \\ x-y+z=0 \end{cases}$, ottenendo la seguente soluzione: $\left(x=\dfrac{7}{2}; y=4; z=\dfrac{1}{2}\right)$, come fa a essere sicura di non avere sbagliato? Un modo è quello di verificare il risultato, cioè di sostituire in tutte le tre equazioni, a ciascuna incognita la relativa soluzione trovata. Se così facendo ottiene tre identità, ci sono buone probabilità che non ha sbagliato. Ricordiamo che non otterrà mai la certezza, dato che potrebbe sbagliare non solo la soluzione ma anche la verifica! In ogni caso se la verifica funziona è molto probabile che non abbia sbagliato la soluzione. Vediamo cosa succede in questo caso.

$$\begin{cases} \dfrac{7}{2}+2\cdot 4-\dfrac{1}{2}=11 \\ 2\cdot\dfrac{7}{2}-4=3 \\ \dfrac{7}{2}-4+\dfrac{1}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{7}{2}+8-\dfrac{1}{2}=11 \\ 7-4=3 \\ \dfrac{7-8+1}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{7+16-1}{2}=11 \\ 3=3 \\ \dfrac{0}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{22}{2}=11 \\ 3=3 \\ 0=0 \end{cases}$$

Quindi possiamo dire che la verifica è andata a buon fine: Sabrina ha risolto correttamente l'esercizio.

Verificare che i valori scritti accanto a ogni sistema sono le rispettive soluzioni

Livello 1

13. $\begin{cases} x-y=1 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$ $(x=2,\ y=1)$; $\begin{cases} x+y=-2 \\ 2x-3y=-4 \end{cases}$ $(x=-2,\ y=0)$; $\begin{cases} 3x-2y=0 \\ 6x+8y=6 \end{cases}$ $\left(x=\frac{1}{3},\ y=\frac{1}{2}\right)$

14. $\begin{cases} 3a+b-1=0 \\ 13a+4b=0 \end{cases}$ $(a=-4,\ b=13)$; $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=\frac{1}{3} \\ 2x-3y+6z=1 \end{cases}$ $\left(x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{3},\ z=\frac{1}{6}\right)$

15. $\begin{cases} a+m=3 \\ m-p=-1 \\ a+p=4 \end{cases}$ $(a=1,\ m=2,\ p=3)$; $\begin{cases} 2x-y+z=\frac{11}{6} \\ 3x+z=\frac{7}{4} \\ 4y-2z=-\frac{10}{3} \end{cases}$ $\left(x=\frac{1}{4},\ y=-\frac{1}{3},\ z=1\right)$

16. $\begin{cases} 4x-3y+2z=0 \\ 2x-3y+4z=5 \\ 3x-2y+4z=-5 \end{cases}$ $\left(x=-\frac{35}{9}, y=-\frac{55}{9}, z=-\frac{25}{18}\right)$

Livello 2

17. $\begin{cases} 2x-y+2z-t=0 \\ x-2y+z-t=0 \\ x+y-z+t=-1 \\ x-y+z-t=1 \end{cases}$ $(x=0,\ y=1,\ z=-1,\ t=-3)$; $\begin{cases} x+y=\frac{3}{4} \\ y-z=\frac{3}{4} \\ x+t=\frac{1}{4} \\ z+t=-\frac{3}{4} \end{cases}$ $\left(x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{4},\ z=-\frac{1}{2},\ t=-\frac{1}{4}\right)$

Lavoriamo insieme

Riprendiamo il sistema $\begin{cases} m+c=d+u \\ m+c+d+u=18 \\ u\cdot c=42 \\ m\cdot c\cdot d\cdot u=252 \end{cases}$. Esso è di 4 equazioni in 4 incognite; le prime due equazioni sono di primo grado, la terza di secondo grado e l'ultima di quarto grado. Quindi il sistema è di grado pari al prodotto dei gradi delle singole equazioni, cioè $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$.

Determinare il grado di ciascuno dei seguenti sistemi

Livello 1

18. $\begin{cases} x+y=3 \\ 3x+4y=11 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2=1 \\ xy=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2=y^2 \\ x^2+y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} xy=1 \\ 3x+4y=12 \end{cases}$; $\begin{cases} xz=-1 \\ xyz=0 \end{cases}$ [1; 4; 4; 2; 6]

19. $\begin{cases} xy-x=y+1 \\ x^2-y^2=3x \\ x=y+2 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2=y^2 \\ z=3 \end{cases}$; $\begin{cases} xy^2=y+1 \\ x^2+xy^2=3x \\ x=y^2+2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=1 \\ y=z \\ xy=yz^2 \end{cases}$; $\begin{cases} y-x=y+1 \\ x-y=3x \\ x=y+2 \end{cases}$ [4; 2; 18; 3; 1]

Lavoriamo insieme

Risolvere il sistema $\begin{cases} 7x-2y=3 \\ 4x-5y=1 \end{cases}$. Scegliamo un'incognita in modo arbitrario, dato che nessuna di quelle presenti ha coefficiente unitario, in ogni caso dobbiamo introdurre frazioni.

$$\begin{cases} x=\frac{3+2y}{7} \\ 4x-5y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3+2y}{7} \\ 4\cdot\frac{3+2y}{7}-5y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3+2y}{7} \\ \frac{12+8y-35y}{7}=\frac{7}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3+2y}{7} \\ -27y=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3+2y}{7} \\ y=\frac{5}{27} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3+2\cdot\frac{5}{27}}{7} \\ y=\frac{5}{27} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\frac{81+10}{27}}{7} \\ y=\frac{5}{27} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\cancel{91}^{13}}{27}\cdot\frac{1}{\cancel{7}^{1}} \\ y=\frac{5}{27} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{13}{27} \\ y=\frac{5}{27} \end{cases}. \quad |$$

Risolvere i seguenti sistemi e verificare i risultati ottenuti

Livello 1

1. $\begin{cases} 2a-3b=5 \\ 4a-b=3 \end{cases}$; $\begin{cases} 3m+t=1 \\ 2m-t=0 \end{cases}$; $\begin{cases} 4z-1=x \\ 2=5x-z \end{cases}$ $\left[\left(a=\frac{2}{5},b=-\frac{7}{5}\right);\left(m=\frac{1}{5},t=\frac{2}{5}\right);\left(x=\frac{9}{19},z=\frac{7}{19}\right)\right]$

2. $\begin{cases} b-2=a+3 \\ a+1-b=3-a+b \end{cases}$; $\begin{cases} 4a-x=2x+1 \\ 3=-2x+a \end{cases}$; $\begin{cases} 7y+4q=1-y \\ -2y+3=3q+1 \end{cases}$

$\left[(\varnothing);\left(a=-\frac{7}{5},x=-\frac{11}{5}\right);\left(q=\frac{7}{8},y=-\frac{5}{16}\right)\right]$

3. $\begin{cases} -3c+d=-1 \\ -3d+c=1 \end{cases}$; $\begin{cases} m+n=1-n \\ 2m-2=-4n \end{cases}$; $\begin{cases} z+4=1-x \\ 3z-2=5-3x \end{cases}$ $\left[\left(c=\frac{1}{4},d=-\frac{1}{4}\right);(\text{Indeterminato});(\varnothing)\right]$

4. $\begin{cases} x+2y=1 \\ 3x-4y+1=0 \end{cases}$; $\begin{cases} 7p+3q=-1 \\ p+2-q=3p+q-2 \end{cases}$; $\begin{cases} 5-z+x=2x+1 \\ 4x-1=3z+x-2 \end{cases}$

$\left[\left(x=\frac{1}{5},y=\frac{2}{5}\right);\left(p=-\frac{7}{4},q=\frac{15}{4}\right);\left(x=\frac{11}{6},z=\frac{13}{6}\right)\right]$

5. $\begin{cases} m-n=n-m+1 \\ 2m-3n=3n-2m+4 \end{cases}$; $\begin{cases} 3a-2b=4a-1 \\ -b+3a-4=1 \end{cases}$; $\begin{cases} w-t+2=3w+4 \\ 2t-3=1-5w+t \end{cases}$

$\left[\left(m=-\frac{1}{2},n=-1\right);\left(a=\frac{11}{7},b=-\frac{2}{7}\right);(t=-2,w=0)\right]$

6. $\begin{cases} 4x-p=x-p \\ -2x-4=-p+2 \end{cases}$; $\begin{cases} 5r-s+1=2s+r \\ -2+s=2r+5 \end{cases}$; $\begin{cases} 6x+2y=1-3x \\ y-2x+5=x \end{cases}$

$\left[(p=6,x=0);(r=-10,s=-13);\left(x=\frac{11}{15},y=-\frac{14}{5}\right)\right]$

7. $\begin{cases} 3x-1=4a+1 \\ x-6-a=3+5x+10a-7\cdot(x+a+1) \end{cases}$; $\begin{cases} 2\cdot(-x+5y)-1=x+2\cdot(y-7) \\ -(x-3y)-2\cdot(x+y-1)=0 \end{cases}$

$\left[(\text{Indeterminato});\left(x=\frac{1}{7},y=-\frac{11}{7}\right)\right]$

8. $\begin{cases} a-x+1=x-a+2 \\ x+a-1=a-x+3 \end{cases}$; $\begin{cases} m+1=3\cdot(m-n)+4 \\ 2\cdot(m+2n-1)-m=n+4\cdot(m+1) \end{cases}$ $\left[\left(a=\frac{5}{2},x=2\right);(m=-3,n=-1)\right]$

9. $\begin{cases} 2b+y-1=b-2y+1 \\ 3b+4y=3y+2b+3 \end{cases}$; $\begin{cases} 3\cdot(z-x+2)-2\cdot(x+z-5)=-1 \\ 2z=1-5\cdot(x-z)+x \end{cases}$ $\left[\left(b=\frac{7}{2}, y=\frac{1}{2}\right);\left(x=\frac{50}{11}, z=\frac{63}{11}\right)\right]$

10. $\begin{cases} 5c+3z-2=3c+2z-4 \\ 8c-7z+1=3-11z \end{cases}$; $\begin{cases} 3c+x=2\cdot(-x+5c)-1 \\ -4\cdot(x-2)-3c=2 \end{cases}$ $\left[(\varnothing);\left(c=\frac{22}{37}, x=\frac{39}{37}\right)\right]$

Livello 2

11. $\begin{cases} 2\cdot(e-1)+6\cdot(d+3)=e-d+1 \\ 3\cdot(d-e+4)+e=4\cdot(e-d) \end{cases}$; $\begin{cases} -2\cdot(p+q-1)-3\cdot(p-q+1)=0 \\ 3\cdot(p-q+1)+2\cdot(p+q-1)=1 \end{cases}$ $\left[\left(d=-\frac{102}{49}, e=-\frac{3}{7}\right);(\varnothing)\right]$

12. $\begin{cases} 3x-2y-2\cdot(x-y+1)=x-2\cdot(y-x+3)-1 \\ 2\cdot(1-x)-2\cdot(3y-1+x)=3\cdot(x-y)+x-2 \end{cases}$; $\begin{cases} (c-d)^2-2d\cdot(c-1)=c^2+d\cdot(d-3) \\ (c+2)\cdot(d-1)=c\cdot(d-1)-d+2 \end{cases}$

$\left[\left(x=\frac{27}{22}, y=-\frac{14}{11}\right);\left(c=\frac{5}{4}, d=\frac{4}{3}\right)\right]$

13. $\begin{cases} (x-y)^3+15x\cdot(y-1)+y^3=3xy\cdot(y-x+5)+1+x^3 \\ x-y+1=0 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{f+g-1}{2}-\frac{2f-3g}{3}=3f+2g \\ 4f-\frac{f+g}{4}=\frac{f-5g}{5} \end{cases}$

$\left[\left(x=-\frac{1}{15}, y=\frac{4}{15}\right);\left(f=-\frac{5}{8}, g=\frac{71}{24}\right)\right]$

14. $\begin{cases} 2x^2-x\cdot(x-y+1)=x\cdot(x+y-3) \\ x+3y-xy-1=x\cdot(2-y)-3y \end{cases}$ $\begin{cases} (2x-y)\cdot(2x+y)-(2x+1)^2=y\cdot(2-y)+x-2y-3 \\ (x+3)^2-(y-x)^2+1=2x\cdot(y+3)-3y+x-2-y^2 \end{cases}$

$\left[\left(x=0, y=-\frac{1}{6}\right);\left(x=\frac{2}{5}, y=-\frac{58}{15}\right)\right]$

Lavoriamo insieme

Talvolta si utilizza un metodo molto simile a quello di sostituzione, che viene chiamato di **confronto**. Esso consiste nel ricavare da entrambe le equazioni la stessa incognita uguagliando quindi i valori così ottenuti.

Supponiamo di voler risolvere il sistema $\begin{cases} 3x-2y=5 \\ 4x=1-7y \end{cases}$. Ricaviamo da entrambe le equazioni l'incognita x

$\begin{cases} 3x=2y+5 \\ x=\frac{1-7y}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2y+5}{3} \\ x=\frac{1-7y}{4} \end{cases}$, uguagliamo le due espressioni contenenti la y: $\frac{2y+5}{3}=\frac{1-7y}{4}$ e risolviamo l'equazione: $\frac{4\cdot(2y+5)}{12}=\frac{3\cdot(1-7y)}{12} \Rightarrow 8y+20=3-21y \Rightarrow 8y+21y=3-20 \Rightarrow 29y=-17 \Rightarrow y=-\frac{17}{29}$. Adesso sostituiamo questo valore in una qualsiasi delle due espressioni della x, per esempio nella prima:

$$x=\frac{2\cdot\left(-\frac{17}{29}\right)+5}{3} \Rightarrow x=\frac{-\frac{34}{29}+5}{3} \Rightarrow x=\frac{\frac{-34+145}{29}}{3} \Rightarrow x=\frac{\frac{111}{29}}{3} \Rightarrow x=\frac{111}{29}\cdot\frac{1}{3} \Rightarrow x=\frac{37}{29}.$$

Risolvere con il metodo del confronto

Livello 1

15. $\begin{cases} x=-x-2y+3 \\ 4-5x-2y=x-y+1 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y-1=2x-3 \\ -2+y=x-5 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x-3y+5=x-1 \\ -x-y+6=2 \end{cases}$ $\left[\left(x=\frac{3}{10}, y=\frac{6}{5}\right);(\varnothing);\left(x=\frac{3}{2}, y=\frac{5}{2}\right)\right]$

16. $\begin{cases} 3p-q=3q+2p-1 \\ 2p-3q+1=3p-2q-2 \end{cases}$; $\begin{cases} m-4x=2-3x \\ -2+m=x-5 \end{cases}$; $\begin{cases} n+2p=1-n \\ 4p-5n+2=0 \end{cases}$ $\left[\left(p=\frac{11}{5}, q=\frac{4}{5}\right);(\varnothing);\left(n=\frac{4}{9}, p=\frac{1}{18}\right)\right]$

17. $\begin{cases} a+2b=0 \\ 3a-b=1 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x-3y+1=2\cdot(x-y+1) \\ 3\cdot(x-y+2)=-(x+y)+3 \end{cases}$ $\left[\left(a=\frac{2}{7}, b=-\frac{1}{7}\right); \left(x=-\frac{5}{4}, y=-1\right)\right]$

18. $\begin{cases} \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=\frac{2}{3} \\ \frac{3}{4}x-\frac{1}{4}y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{2}{5}x+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}y=0 \\ -\frac{1}{3}x+\frac{2}{7}=\frac{3}{4}y \end{cases}$; $\begin{cases} -\frac{5}{6}=x-\frac{1}{4} \\ \frac{2}{5}x-\frac{1}{3}=y \end{cases}$

$\left[\left(x=\frac{4}{3}, y=0\right); \left(x=-\frac{705}{784}, y=\frac{153}{196}\right); \left(x=-\frac{7}{12}, y=-\frac{17}{30}\right)\right]$ 1

19. $\begin{cases} 2t-3t+1=t-\frac{1}{2}u-\frac{1}{3} \\ 2u-\frac{3}{2}u+\frac{1}{4}=u-t \end{cases}$; $\begin{cases} t+\frac{1}{2}x-1=\frac{1}{3}-\frac{2}{7}t+x \\ \frac{1}{3}x-\frac{2}{3}+t=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4} \end{cases}$ $\left[\left(t=\frac{10}{21}, u=-\frac{16}{21}\right); \left(t=\frac{107}{90}, x=\frac{41}{105}\right)\right]$

Lavoriamo insieme

- Un altro modo di risolvere un sistema di due equazioni in due incognite è il metodo di **addizione e sottrazione** che si utilizza quando il sistema è posto, o può porsi, in una forma particolare. Per esempio supponiamo di voler risolvere il sistema $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 3x+7y=-2 \end{cases}$. Dato che la x compare allo stesso modo in entrambe le equazioni, possiamo applicare una proprietà che dice che la somma algebrica termine a termine di due equazioni produce ancora un'equazione. Così, sottraendo le due equazioni termine a termine, otteniamo: $3x - 2y - (3x + 7y) = 1 - (-2) \Rightarrow 3x - 2y - 3x - 7y = 1 + 2 \Rightarrow -9y = 3 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$. Il precedente valore, che è la soluzione per l'incognita y, si sostituisce in una qualsiasi delle due equazioni per determinare x: $3x - 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 \Rightarrow 3x + \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow 3x = 1 - \frac{2}{3} \Rightarrow 3x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{9}$.
- Consideriamo il seguente sistema $\begin{cases} 3536x+10894y=29146 \\ 10894x+3536y=-286 \end{cases}$. Come si vede il sistema ha equazioni con coefficienti numeri *grandi*, che potrebbe perciò causare qualche problema nella risoluzione. Proviamo a sommare membro a membro le equazioni. $(3536 + 10894) \cdot x + (10894 + 3536) \cdot y = 29146 - 286 \Rightarrow 14430x + 14430y = 28860$. In tal modo abbiamo ottenuto un'equazione i cui coefficienti hanno 14430 come fattore comune, pertanto dividendo per tale fattore, essa diviene semplicemente $x + y = 2$. Adesso sottraiamo membro a membro: $(3536 - 10894) \cdot x + (10894 - 3536) \cdot y = 29146 + 286 \Rightarrow -7358x + 7358y = 29432$. Ancora una volta vi è un fattore comune, 7358, quindi l'equazione diviene: $-x + y = 4$. Il sistema di partenza è perciò equivalente a: $\begin{cases} x+y=2 \\ -x+y=4 \end{cases}$, che possiamo risolvere con un metodo a piacere, per esempio sempre con quello di addizione: $\begin{cases} x+y=2 \\ -x+y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y=6 \\ 2x=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=-1 \end{cases}$

Risolvere i seguenti sistemi utilizzando il metodo di addizione e sottrazione

Livello 1

20. $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=3 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x+7y=4 \\ 2x+y=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} x-3y=0 \\ 3x+3y=2 \end{cases}$ $\left[\left(x=\frac{5}{2}, y=-\frac{1}{2}\right); \left(x=-\frac{11}{12}, y=\frac{5}{6}\right); \left(x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{6}\right)\right]$

21. $\begin{cases} 4x+5y=-1 \\ 2x+y=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} -x+5y=-4 \\ x+3y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ 6x+y=-3 \end{cases}$ $\left[\left(x=-\frac{3}{2}, y=1\right); \left(x=\frac{11}{4}, y=-\frac{1}{4}\right); \left(x=-\frac{1}{3}, y=-1\right)\right]$

22. $\begin{cases}10x+15y=-1\\5x-3y=-4\end{cases}$; $\begin{cases}113x+71y=-2\\113x-42y=0\end{cases}$; $\begin{cases}15x-31y=-41\\5x+23y=-12\end{cases}$

$$\left[\left(x=-\frac{3}{5},y=\frac{1}{3}\right);\left(x=-\frac{84}{12769},y=-\frac{2}{113}\right);\left(x=-\frac{263}{100},y=\frac{1}{20}\right)\right]$$

Livello 2

23. $\begin{cases}101x+99y=11\\100x-198y=17\end{cases}$; $\begin{cases}145x+37y=14\\25x-31y=27\end{cases}$; $\begin{cases}13x-33y=11\\26x+99y=-12\end{cases}$

$$\left[\left(x=\frac{39}{302},y=-\frac{617}{29898}\right);\left(x=\frac{1433}{5420},y=-\frac{713}{1084}\right);\left(x=\frac{21}{65},y=-\frac{34}{165}\right)\right]$$

24. $\begin{cases}1234x+2345y=8146\\2468x-3579y=-16874\end{cases}$; $\begin{cases}3519x+7404y=4875\\1359x+2468y=1687\end{cases}$ $\left[\left(x=-1,y=4\right);\left(x=\frac{1}{3},y=\frac{1}{2}\right)\right]$

25. $\begin{cases}6751x+3249y=26751\\3249x+6751y=23249\end{cases}$; $\begin{cases}8461x+1967y=4527\\1967x+8461y=-14955\end{cases}$ $[(x=3,\ y=2);\ (x=1,\ y=-2)]$

Lavoriamo insieme

Risolvere $\begin{cases}2x-y+z=0\\x-2y-3z=-1\\4x-3y-z=-1\end{cases}$. Ricaviamo l'incognita z dalla prima equazione e la sostituiamo nelle altre due:

$$\begin{cases}z=-2x+y\\x-2y-3\cdot(-2x+y)=-1\\4x-3y-(-2x+y)=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=-2x+y\\x-2y+6x-3y=-1\\4x-3y+2x-y=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=-2x+y\\7x-5y=-1\\6x-4y=-1\end{cases}.$$

adesso ricaviamo un'incognita a piacere dalle altre due equazioni, per esempio la x dalla terza, e ancora la sostituiamo:

$$\begin{cases}z=-2x+y\\7\cdot\frac{4y-1}{6}-5y=-1\\x=\frac{4y-1}{6}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=-2x+y\\\frac{28y-7}{6}-5y=-1\\x=\frac{4y-1}{6}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=-2x+y\\\frac{28y-7-30y}{6}=-\frac{6}{6}\\x=\frac{4y-1}{6}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=-2x+y\\-2y-7=-6\\x=\frac{4y-1}{6}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=-2x+y\\-2y=1\\x=\frac{4y-1}{6}\end{cases}$$

dalla seconda equazione ricaviamo il valore numerico di y e lo sostituiamo nelle altre due:

$$\begin{cases}z=-2x-\frac{1}{2}\\y=-\frac{1}{2}\\x=\frac{4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-1}{6}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=-2x-\frac{1}{2}\\y=-\frac{1}{2}\\x=\frac{-2-1}{6}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\\y=-\frac{1}{2}\\x=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=1-\frac{1}{2}\\y=-\frac{1}{2}\\x=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=\frac{1}{2}\\y=-\frac{1}{2}\\x=-\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Risolvere i seguenti sistemi con un metodo a piacere

Livello 1

26. $\begin{cases}n-p=1\\m+p=1\\m-n=1\end{cases}$; $\begin{cases}x-y+z=0\\x+y=1\\y-z=-1\end{cases}$; $\begin{cases}z=t-1\\t=w+2\\w=t-z\end{cases}$ $\left[\left(m=\frac{3}{2},n=\frac{1}{2},p=-\frac{1}{2}\right);\left(x=-1,y=2,z=3\right);\left(t=3,w=1,z=2\right)\right]$

27. $\begin{cases} a+b-c=1 \\ a-b+c=1 \\ a+b+c=1 \end{cases}; \begin{cases} 2a+b=c \\ a+2b=c \\ a+b=2c \end{cases}; \begin{cases} a-b=c-1 \\ a+c=b-1 \\ b-c=a+2 \end{cases}$ $\left[(a=1,b=0,c=0);(a=0,b=0,c=0);(\varnothing)\right]$

28. $\begin{cases} 2n+q-3p=1 \\ n-q+p=-1 \\ n+2q-4p=2 \end{cases}; \begin{cases} n-q=p-1 \\ q-n=p+1 \\ p+n-q=0 \end{cases}; \begin{cases} n+2p=3q \\ 2n-p=q+2 \\ n=2q-1 \end{cases}$ $\left[(\text{Indeterminato});(\varnothing);\left(n=\frac{13}{5},p=\frac{7}{5},q=\frac{9}{5}\right)\right]$

29. $\begin{cases} 2z-1=3x+1 \\ 3x+y=z-2 \\ x-y=z+2 \end{cases}; \begin{cases} x+y-z=1 \\ x=y-z \\ y=z+x-2 \end{cases}; \begin{cases} z=x+y-2 \\ x=y-z+1 \\ y=2x-z-3 \end{cases}$ $\left[(x=2,y=-4,z=4);(\varnothing);\left(x=\frac{3}{2},y=\frac{1}{4},z=-\frac{1}{4}\right)\right]$

30. $\begin{cases} x+2q-3y=0 \\ 3x-2q=2 \\ 5x+2q-6y=13 \end{cases}; \begin{cases} 2x-q=y+1 \\ x=y-q+3 \\ q=x+2y+1 \end{cases}; \begin{cases} x+q-y=0 \\ q=2x-3y+1 \\ x-q+1=0 \end{cases}$

$\left[(\varnothing);\left(q=\frac{11}{7},x=\frac{8}{7},y=-\frac{2}{7}\right);\left(q=\frac{2}{5},x=-\frac{3}{5},y=-\frac{1}{5}\right)\right]$

31. $\begin{cases} 3x-y+4z=-1 \\ 2x-4y-3z=0 \\ -3x-y+z=3 \end{cases}; \begin{cases} 2x+y=z-1 \\ x-2y=z-1 \\ z=x-y+1 \end{cases}; \begin{cases} x-2y-+3z=4 \\ x+2y+3z=0 \\ x+2y-3z=1 \end{cases}$

$\left[\left(x=-\frac{16}{21},y=-\frac{11}{21},z=\frac{4}{21}\right);(x=0,y=0,z=1);\left(x=\frac{5}{2},y=-1,z=-\frac{1}{6}\right)\right]$

32. $\begin{cases} 2x-3y+z=-3 \\ x-4y-3z=1 \\ -2x+y-5z=2 \end{cases}; \begin{cases} 5x-6y=1 \\ 6x-5z=0 \\ 5z+6x=-1 \end{cases}; \begin{cases} x-1=y+z \\ y+2=x-z \\ z+3=x+y \end{cases}$

$\left[\left(x=-\frac{19}{2},y=-\frac{9}{2},z=\frac{5}{2}\right);\left(x=-\frac{1}{12},y=-\frac{17}{72},z=-\frac{1}{10}\right);(\varnothing)\right]$

33. $\begin{cases} -x+3y-2z=0 \\ 2x-3y-z=2 \\ 4x+y+3z=-1 \end{cases}; \begin{cases} \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=0 \\ \frac{1}{3}x-\frac{1}{2}z=1 \\ \frac{1}{2}z+\frac{1}{3}y=-1 \end{cases}; \begin{cases} x-\frac{1}{2}y=1 \\ \frac{1}{2}x-z=y \\ \frac{1}{2}z+y=-2 \end{cases}$

$\left[\left(x=\frac{13}{50},y=-\frac{3}{10},z=-\frac{29}{50}\right);(x=0,y=0,z=-2);\left(x=-\frac{4}{5},y=-\frac{18}{5},z=\frac{16}{5}\right)\right]$

34. $\begin{cases} 2x-3y-4z=0 \\ 4x-6y-z=1+7z \\ \frac{5}{3}x+\frac{2}{7}y-z=\frac{13}{2} \end{cases}; \begin{cases} \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{3}z=0 \\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}z=-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}z=-1 \end{cases}; \begin{cases} \frac{2}{3}x-y=\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}y+\frac{5}{6}z=0 \\ \frac{1}{2}z-\frac{1}{3}=y \end{cases}$

$\left[(\varnothing);\left(x=-\frac{7}{4},y=\frac{1}{8},z=-\frac{9}{8}\right);\left(x=\frac{1}{28},y=-\frac{10}{21},z=-\frac{2}{7}\right)\right]$

35. $\begin{cases} 2h-3k+4j=5 \\ h+2k-5j=-2 \\ 2h-k+3j=1 \end{cases}$; $\begin{cases} h=\frac{1}{2}k+1 \\ k=-\frac{1}{2}j+2 \\ j=\frac{1}{2}-h+k \end{cases}$; $\begin{cases} h+k=1+j \\ h-j=k+3 \\ k+2j=3h \end{cases}$

$\left[\left(h=\frac{2}{21},k=-\frac{47}{21},j=-\frac{10}{21}\right);\left(h=\frac{19}{10},k=\frac{9}{5},j=\frac{2}{5}\right);(h=-5,k=-1,j=-7)\right]$

Livello 2

36. $\begin{cases} x-y+1=z+3 \\ x-y+z=2x-3y+1 \\ 2x^2-x\cdot(y-z+2x)=y\cdot(x-1)+z\cdot(7+x)-3 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{3l-m+n}{5}-\frac{2m-n}{7}=\frac{4}{3}l \\ \frac{m+l-n}{8}-\frac{m-l+n}{6}=1 \\ \frac{m-2n+3l}{2}=\frac{m+2n-3l}{4} \end{cases}$

$\left[\left(x=\frac{41}{13},y=3,z=-\frac{24}{13}\right);\left(l=-\frac{3240}{323},m=\frac{1656}{323},n=-\frac{3240}{323}\right)\right]$

37. $\begin{cases} (x-y+1)^2+x\cdot(2y-1)=z+x\cdot(x+1)+y\cdot(y-2) \\ (x-y)\cdot(x+y)-z\cdot(x+1)=(x+2y)\cdot(x-3y)+5y^2-x\cdot(z+3) \\ x^2+y^2-z^2=(x+y+z)\cdot(x+y-z) \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{m+l-1}{2}=\frac{n-l+2}{3} \\ \frac{m-3}{4}=n+\frac{l-1}{5} \\ \frac{m+l-n}{2}-1=m+n-\frac{1}{2} \end{cases}$

$\left[\left(x=\frac{1}{3},y=0,z=1\right);\left(l=\frac{274}{269},m=\frac{43}{269},n=-\frac{192}{269}\right)\right]$

38. $\begin{cases} a+b-c+d=1 \\ a+b-c-d=1 \\ a-b+c-d=-1 \\ 3a+b-c-d=1 \end{cases}$; $\begin{cases} a=b+c-1 \\ b=a-c+d \\ c=a+b-1 \\ d=b-a+2 \end{cases}$; $\begin{cases} a+b=c+d \\ a-d=d-1 \\ a+c=b+2 \\ b-c=a+5-d \end{cases}$ [Indeterminato; ($a = 2$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 1$); $\varnothing$]

39. $\begin{cases} q+u=s-1 \\ r-u=u+s \\ q-r-1=s+r-u \\ q+r-1=s-r+u \end{cases}$; $\begin{cases} q-u+s=0 \\ r+u-s=-q+1 \\ u+s=-1 \\ r+q=0 \end{cases}$; $\begin{cases} q+u=s-r-1 \\ q-r=s+u \\ q+s=r-2u \\ q=r+s-u+1 \end{cases}$

$\left[(q=4,r=-1,s=3,u=-2);(q=1,r=-1,s=-1,u=0),\left(q=-\frac{5}{4},r=-1,s=-\frac{3}{4},u=\frac{1}{2}\right)\right]$

40. $\begin{cases} \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}t=-1 \\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}z+\frac{1}{4}t=0 \\ \frac{1}{2}y-\frac{1}{3}z+\frac{1}{4}t=1 \\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y-\frac{1}{4}z=0 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{x+y}{2}=\frac{t+1}{3} \\ \frac{x-z}{3}=\frac{t-2}{4} \\ \frac{y+z}{2}=t-x \\ x+y-z+t=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x+\frac{1}{2}y=\frac{1}{3}z-1 \\ x-y+z-t=0 \\ x-1=y-t+\frac{1}{2} \\ y+\frac{1}{2}z=x+\frac{1}{3}t-1 \end{cases}$

$\left[(t=2,x=-5,y=-3,z=-6);\left(t=\frac{6}{11},x=-\frac{17}{33},y=\frac{17}{11},z=\frac{19}{33}\right),\left(t=\frac{3}{4},x=-\frac{5}{12},y=-\frac{7}{6},z=0\right)\right]$

41. $\begin{cases} 2a-x+3y-b=2 \\ a+x-y-2b=0 \\ -a-x+y-b=-1 \\ 2a-x+3y-4b=5 \end{cases}$; $\begin{cases} a-x+2y=3 \\ 2a+y=z-1 \\ a+x-y=2z+4 \\ a-y=z+1 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{1}{2}a+x=-\frac{1}{2}+y \\ z=x-y+a \\ a=\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y+1 \\ y=z+\frac{1}{2}-a \end{cases}$

$$\left[\left(\text{Indeterminato}\right);\left(a=\frac{16}{3},x=-5,y=\frac{5}{3},z=-8\right),\left(a=\frac{9}{16},x=-\frac{17}{16},y=-\frac{9}{32},z=-\frac{7}{32}\right)\right]$$

42. $\begin{cases} -b+m-2g=-a \\ a+b+g-m=0 \\ 2a-b+3g=-1 \\ a+b-g+m=1 \end{cases}$; $\begin{cases} a+b=m-1 \\ a-b=g+2 \\ b+m=g-a \\ m=a-m+1 \end{cases}$; $\begin{cases} a+m-b=2 \\ m-b+a=g-1 \\ b+g=a+m-2 \\ m=a+b \end{cases}$

$$\left[\left(a=-\frac{1}{18},b=\frac{5}{9},g=-\frac{1}{9},m=\frac{7}{18}\right);\left(a=3,b=-2,g=3,m=2\right),\left(\varnothing\right)\right]$$

L'angolo delle correzioni

Correggere i seguenti procedimenti errati

1. $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x=y-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1-2x \\ 3x=y-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1-2x \\ 3\cdot(1-2x)=y-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1-2x \\ 3-6x=y-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1-2x \\ 3-6x+2=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1-2x \\ y=-6x+5 \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} y=1-2x \\ 1-2x=-6x+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1-2x \\ -2x+6x=5-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1-2x \\ 4x=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1-2x \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1-2 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2+y \\ 2\cdot(2+y)-y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2+y \\ 4+2y-y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2+y \\ y=3-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-1 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=1 \\ x-3y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3x+2y}{6}=1 \\ x-3y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x=1-2y \\ x-3y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1-2y}{3} \\ \frac{1-2y}{3}-3y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1-2y}{3} \\ \frac{1-2y-9y}{3}=-1 \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1-2y}{3} \\ 1-11y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1-2y}{3} \\ -11y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1-2\cdot\frac{2}{11}}{3} \\ y=\frac{2}{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\frac{11-4}{11}}{3} \\ y=\frac{2}{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{11} \\ y=\frac{2}{11} \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+y=1 \\ x+z=2 \\ y+z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-y \\ 1-y+z=2 \\ y+1-y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-y \\ 1-y+z=2 \\ 1=3 \end{cases} \Rightarrow$ Sistema impossibile

5. $\begin{cases} x+y=z-1 \\ x-y=1-z \\ x=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+y=z-1 \\ x-x=1-z \\ x=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y=z-1 \\ 0=1-z \\ x=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=2y-1 \\ 0=1-2y-1 \\ x=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=2y-1 \\ 0=2y \\ x=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=2\cdot(-2)-1 \\ y=-2 \\ x=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-5 \\ y=-2 \\ x=-2 \end{cases}$

Risoluzione dei sistemi lineari: metodo e teorema di Cramer

Vogliamo risolvere un sistema di due equazioni in due incognite con l'ausilio del computer, perciò dobbiamo determinare l'algoritmo necessario per scrivere il relativo programma. Consideriamo un generico sistema di due equazioni in due incognite scritto in forma semplificata $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$ e, nel seguito, per riferirci a esso lo indicheremo con il simbolo (*). Risolviamo tale sistema con il metodo di sostituzione.

$$\begin{cases} x=\dfrac{c-by}{a} \\ d\cdot\dfrac{c-by}{a}+ey=f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{c-by}{a} \\ \dfrac{cd-bdy+aey}{a}=\dfrac{af}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{c-by}{a} \\ y\cdot(ae-bd)=af-cd \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{c-by}{a} \\ y=\dfrac{af-cd}{ae-bd} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{c-b\cdot\dfrac{af-cd}{ae-bd}}{a} \\ y=\dfrac{af-cd}{ae-bd} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{ace-\cancel{bcd}-abf+\cancel{bcd}}{a\cdot(ae-bd)} \\ y=\dfrac{af-cd}{ae-bd} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{ce-bf}{ae-bd} \\ y=\dfrac{af-cd}{ae-bd} \end{cases}$$

Abbiamo ottenuto la soluzione generale di un sistema scritto nella forma (*), adesso cerchiamo di scrivere un programma che lo risolva. Consideriamo più attentamente la soluzione del sistema (*): $\begin{cases} x=\dfrac{ce-bf}{ae-bd} \\ y=\dfrac{af-cd}{ae-bd} \end{cases}$.

Notiamo che i denominatori di entrambe le frazioni che rappresentano la soluzione sono uguali e, soprattutto, che tutti i fattori presenti sono diversi. Osserviamo anche che sia al numeratore che al denominatore abbiamo la differenza fra due prodotti di due fattori.
Adesso poniamo qualche definizione per semplificare il linguaggio.

Definizione 5

Diciamo determinante di ordine 2 una tabella del tipo: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, a cui associamo il numero $a \cdot d - b \cdot c$.

Notazione 1

Il determinante di una matrice quadrata si indica ponendo fra due barre verticali singole gli elementi della matrice.

Esempio 9

- Il determinante $A=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ rappresenta il numero $1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$.
- Il valore del seguente determinante: $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ è $2 \cdot 4 - (-3) \cdot (1) = 8 + 3 = 11$.
- Per quali valori del parametro m, il determinante $\begin{vmatrix} 1 & m \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ è nullo? Si ha $\begin{vmatrix} 1 & m \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - m \cdot 2 = 2m - 1$.

  Dobbiamo quindi risolvere l'equazione $2m - 1 = 0$, la cui soluzione è $m = \dfrac{1}{2}$.

Torniamo adesso alla questione iniziale, la soluzione $\begin{cases} x=\dfrac{ce-bf}{ae-bd} \\ y=\dfrac{af-cd}{ae-bd} \end{cases}$ possiamo scriverla, usando le notazioni

precedenti, nel seguente modo: $\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}; y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} \end{cases}$. Quindi possiamo enunciare il nuovo metodo, automatico e quindi adatto a un computer, per risolvere i sistemi lineari di due equazioni in due incognite.

Definizione 6

Un sistema lineare di n equazioni in n incognite si dice nella **forma semplificata di Cramer** se è scritto in modo che tutte le sue equazioni siano in forma semplificata, tutti i termini noti siano posti al secondo membro e l'ordine di successione delle incognite sia lo stesso in ogni equazione.

Possiamo quindi enunciare il metodo.

Regola 1 (per la risoluzione di un sistema lineare di due equazioni in due incognite)

Dato il sistema lineare $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$, la sua soluzione esiste solo se è $D = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = a \cdot e - b \cdot d \neq 0$, che si ottiene, indicati con $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix} = c \cdot e - b \cdot f, D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = a \cdot f - c \cdot d$, scrivendo: $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} \\ y = \dfrac{D_y}{D} \end{cases}$.

Esempio 10

Il seguente sistema non è nella forma semplificata di Cramer: $\begin{cases} 2u - 3v = 2 \\ 4v - u - 3 = 0 \end{cases}$, quindi non possiamo applicare la regola 1 per risolverlo. Scriviamolo in forma semplificata di Cramer: $\begin{cases} 2u - 3v = 2 \\ 4v - u = 3 \end{cases}$, adesso possiamo risolverlo: $\begin{cases} u = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}} = \dfrac{-2+9}{-2+12} = \dfrac{7}{10} \\ v = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}} = \dfrac{6-8}{-2+12} = \dfrac{-2}{10} = -\dfrac{1}{5} \end{cases}$.

Verifichiamo la soluzione. $\begin{cases} 2 \cdot \dfrac{7}{10} - 3 \cdot \left(-\dfrac{1}{5}\right) = 2 \\ 4 \cdot \dfrac{7}{10} - \left(-\dfrac{1}{5}\right) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{7}{5} + \dfrac{3}{5} = 2 \\ \dfrac{14}{5} + \dfrac{1}{5} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{10}{5} = 2 \\ \dfrac{15}{5} = 3 \end{cases}$

Abbiamo già detto che la regola di Cramer si può applicare solo se $D \neq 0$, perché altrimenti avremmo una scritta assurda in cui dividiamo per zero. Cosa accade allora in questi casi?
Vediamo un esempio.

Esempio 11

- Il sistema: $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x - 2y = 5 \end{cases}$ non può risolversi con la regola 1, poiché $D = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$, d'altro canto

si osserva che può anche scriversi $\begin{cases} 3x-y=1 \\ 3x-y=\frac{5}{2} \end{cases}$, in cui vediamo che esso è ovviamente privo di soluzioni.

Osserviamo che in questo caso si ha: $D_x=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}=-2+5=3\neq 0; D_y=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}=15-6=12\neq 0$.

- Anche il sistema: $\begin{cases} 3x-y=1 \\ 6x-2y=2 \end{cases}$ non può risolversi con la regola 1, ma stavolta si osserva che può anche scriversi $\begin{cases} 3x-y=1 \\ 3x-y=1 \end{cases}$, e quindi è indeterminato. Osserviamo che in questo caso si ha: $D_x=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=-2+2=0; D_y=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}=6-6=0$.

Tenuto conto del precedente esempio possiamo enunciare il seguente risultato.

Teorema 1

Il sistema $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$, nelle incognite x e y, ha soluzioni solo se è $D=\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}=a\cdot e-b\cdot d\neq 0$, e si ha: $\begin{cases} x=\frac{D_x}{D} \\ y=\frac{D_y}{D} \end{cases}$. Se invece si ha $D=0$, allora se $D_x=\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}=c\cdot e-b\cdot f=D_y=\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}=a\cdot f-c\cdot d=0$, il sistema è indeterminato, diversamente è impossibile.

Consideriamo adesso i sistemi con 3 equazioni e 3 incognite, che vogliamo trattare ancora con il metodo di Cramer. Dal punto di vista formale non cambia nulla, solo che dobbiamo dare significato al determinante di terzo ordine.

Regola 2 (di Sarrus per il calcolo di un determinante del terzo ordine).

Sia così indicato genericamente il determinante del terzo ordine : $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$. Il suo calcolo si effettua con il seguente procedimento.

- si ricopino alla sua destra le prime due colonne nel seguente modo: $\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix}$.
- Chiamiamo *elementi delle diagonali principali* gli elementi delle terne (a, e, i), (b, f, g) e (c, d, h), mentre chiamiamo *elementi delle diagonali secondarie* gli elementi delle terne (c, e, g), (a, f, h) e (b, d, i).
- Diciamo allora determinante della matrice data la differenza fra la somma dei prodotti degli elementi delle diagonali principali e la somma dei prodotti delle diagonali secondarie. In formula:

$$\boxed{D=a\cdot e\cdot i+b\cdot f\cdot g+c\cdot d\cdot h-g\cdot e\cdot c-h\cdot f\cdot a-i\cdot d\cdot b}.$$

Esempio 12

- Calcolare il seguente determinante $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Applicando la precedente Regola 2 abbiamo il seguente

schema: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{matrix} = 0 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 0 - (2 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1) = -8 - 1 = -9.$

- Per quali valori del parametro m il determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & m \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ è diverso da zero? Deve essere $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & m \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot m \cdot (-1) = 1 - 2m \neq 0$. Quindi $m \neq \frac{1}{2}$.

Adesso possiamo enunciare la generalizzazione del Teorema 1.

Teorema 2

Il sistema $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ hx + ky + mz = n \\ px + qy + rz = t \end{cases}$, nelle incognite x, y e z, ha soluzioni solo se è $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ h & k & m \\ p & q & r \end{vmatrix} \neq 0$, e, indicati con $D_x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ n & k & m \\ t & q & r \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ h & n & m \\ p & t & r \end{vmatrix}, D_z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ h & k & n \\ p & q & t \end{vmatrix}$, si ha: $\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} \\ y = \frac{D_y}{D} \\ z = \frac{D_z}{D} \end{cases}$. Se invece si ha $D = 0$, allora se $D_x = D_y = D_z = 0$, il sistema è indeterminato, diversamente è impossibile.

Vediamo un'applicazione del precedente risultato.

Esempio 13

- Risolvere il sistema $\begin{cases} m - n + p = 1 \\ 2m - 3n + 4p = -1 \\ 3m - n = 2 \end{cases}$ con il metodo di Cramer. Abbiamo già la forma semplificata di Cramer, quindi: $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{matrix} = 0 - 12 - 2 + 9 + 4 + 0 = -1$. Adesso per il teorema 2, dato che abbiamo $D \neq 0$, mentre $D_m = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \\ 2 & -1 \end{matrix} = 0 - 8 + 1 + 6 + 4 - 0 = 3$, $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{matrix} = = 0 + 12 + 4 + 3 - 8 - 0 = 11$ e $D_p = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{matrix} = = -6 + 3 - 2 + 9 - 1 + 4 = 7$, le soluzioni sono $\left(m = \frac{3}{-1} = -3, n = \frac{11}{-1} = -11, p = \frac{7}{-1} = -7 \right)$.

- Risolvere il seguente sistema: $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+4y-z=0 \\ 3x+3y=1 \end{cases}$. Abbiamo: $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0+3+6-12+3-0 = 0$. Perciò il sistema o è indeterminato o impossibile. Dato che $D_x=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1-4+3=0$ e che, calcolando D_y e D_z, troviamo che sono anch'essi nulli, per il teorema 2 possiamo dire che il sistema è indeterminato, ossia ha infinite soluzioni.
- Risolvere il seguente sistema: $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+4y-z=1 \\ 3x+3y=1 \end{cases}$, il quale differisce da quello precedente solo per il termine noto della seconda equazione, quindi è ancora $D = 0$. Stavolta però $D_x=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1+3-4+3=3 \neq 0$. Perciò per il teorema 2 il sistema è privo di soluzioni.

L'angolo storico

Il metodo di Cramer era già noto al matematico inglese Colin Mac Laurin, che l'aveva trascritta nel suo *Treatise of algebra*, pubblicato solo due anni dopo la sua morte, nel 1748.
Il termine *determinante* è dovuto al matematico tedesco Carl Friedrich Gauss, che lo coniò nel 1801.
Arthur Cayley (1821–1895), invece, il simbolo per indicare il determinante nel 1841.

I protagonisti

Gabriel Cramer nacque a Ginevra il 31 luglio 1704. I suoi studi riguardano soprattutto lo studio delle curve piane; ricordiamo il suo *lavoro Introduction a l'analyse des lignes courbes algébriques*. Morì a Bagnols–sur–Cèze il 4 gennaio 1752.
Colin Mac Laurin (1698 – 1746) nacque in Scozia e fu un bambino precoce. All'età di 11 anni entrò all'Università di Glasgow e a 19 anni diventò professore all'Università di Aberdeen e molto presto (già prima dei ventuno anni) cominciò a pubblicare articoli interessanti. Nel 1720 pubblicò i trattati *Geometria organica* e *De linearum geometricarum proprietatibus*. Diede notevoli contributi anche al nascente calcolo differenziale, studiando la serie che ancora oggi porta il suo nome, nonostante non sia stato il primo a scoprirla. In qualche modo questo lo compensa di non essere ricordato per i risultati ottenuti sui sistemi lineari, che vennero associati invece al nome di Cramer.

Verifiche

Calcolare i seguenti determinanti

Livello 1

1. $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 9\end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & 1\\ \frac{1}{3} & -1\end{vmatrix}$ $\qquad \left[-3;6;0;\frac{1}{60};\frac{1}{6}\right]$

2. $\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & -3\end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix}-4 & -2\\ 1 & \frac{1}{2}\end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix}2 & -3\\ -3 & 2\end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix}0 & 0\\ 5784 & 1\end{vmatrix}$ $\qquad \left[-9;0;-5;\frac{1}{4};0\right]$

Livello 2

3. $\begin{vmatrix}a & a^2\\ a^3 & a^4\end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix}a & \frac{1}{a}\\ \frac{1}{a} & a\end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix}a & b\\ b & a\end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix}a+b & a-b\\ b+a & b-a\end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix}a & a+1\\ a-1 & a+2\end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix}\frac{a}{b} & -\frac{b}{a}\\ \frac{a+b}{b} & \frac{a-b}{a}\end{vmatrix}$

$$\left[0;\frac{a^4-1}{a^2};a^2-b^2;2b^2-2a^2;2a+1;\frac{a^2+b^2}{ab}\right]$$

Lavoriamo insieme

Dato il determinante $\begin{vmatrix}-2 & m+1\\ 3 & 4m-1\end{vmatrix}$, calcolare gli eventuali valori da assegnare al parametro m, affinché esso valga 3. Abbiamo: $\begin{vmatrix}-2 & m+1\\ 3 & 4m-1\end{vmatrix} = -2\cdot(4m-1)-3\cdot(m+1) = -8m+2-3m-3 = -11m-1$. Poiché vogliamo che il precedente valore sia 3, dobbiamo impostare e risolvere la seguente equazione: $-11m-1=3 \Rightarrow -11m=4 \Rightarrow m=-\frac{4}{11}$.

Risolvere le seguenti equazioni

Livello 2

4. $\begin{vmatrix}m & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0$; $\begin{vmatrix}-1 & m\\ 0 & 2\end{vmatrix}=1$; $\begin{vmatrix}1 & m\\ m & 1\end{vmatrix}=0$; $\begin{vmatrix}3 & m\\ 6 & 2m\end{vmatrix}=m$; $\begin{vmatrix}m & 2\\ m & 1\end{vmatrix}=-1$ $\qquad [0;\ \varnothing;\ \pm 1;\ 0;\ 1]$

5. $\begin{vmatrix}(m+1) & 1\\ 3 & (m-1)\end{vmatrix}=m^2$; $\begin{vmatrix}m & 1\\ m & 1\end{vmatrix}=0$; $\begin{vmatrix}m-1 & m\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3m+1$; $\begin{vmatrix}2m & 0\\ m^3+5m^2 & 1\end{vmatrix}=-1$; $\begin{vmatrix}1 & 3\\ -2 & -5\end{vmatrix}=m+1$

$[\varnothing;$ Indeterminata; $-3/2;\ -1/2;\ 0]$

Lavoriamo insieme

Risolvere con il metodo di Cramer il seguente sistema $\begin{cases}3x+1=2y\\ -4y+x=3\end{cases}$. Dobbiamo scriverlo nella cosiddetta forma normale di Cramer; $\begin{cases}3x-2y=-1\\ x-4y=3\end{cases}$, che potrebbe anche essere la seguente: $\begin{cases}-2y+3x=-1\\ -4y+x=3\end{cases}$.
Adesso calcoliamo il determinante della matrice dei coefficienti, relativo per esempio alla forma di Cramer

da noi scritta per prima $D=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & -4\end{vmatrix}=-12+2=-10$. Poiché il valore ottenuto è diverso da zero il sistema ammette un'unica soluzione, che determiniamo trovando i determinanti relativi alle due incognite:

$$D_x=\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 3 & -4\end{vmatrix}=4+6=10 \text{ e } D_y=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=9+1=10.$$

Le soluzioni sono quindi: $x=\frac{D_x}{D}=\frac{10}{-10}=-1; y=\frac{D_y}{D}=\frac{10}{-10}=-1$.

Verifichiamo i risultati così ottenuti: $\begin{cases}3\cdot(-1)-2\cdot(-1)=-1\\ -1-4\cdot(-1)=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3+2=-1\\ -1+4=3\end{cases}$.

Risolvere i seguenti sistemi con il metodo di Cramer

Livello 1

6. $\begin{cases}3q-5t-3=0\\ 2t-3+4q=0\end{cases}; \begin{cases}q+7t=1\\ 3t=2-q\end{cases}; \begin{cases}5q+t=0\\ 3=2t-q\end{cases}$ $\left[\left(q=\frac{21}{26},t=-\frac{3}{26}\right);\left(q=\frac{11}{4},t=-\frac{1}{4}\right);\left(q=-\frac{3}{11},t=\frac{15}{11}\right)\right]$

7. $\begin{cases}15y+3v+3=0\\ v+5y=-1\end{cases}; \begin{cases}y-2v=1\\ 2-v=-3y\end{cases}; \begin{cases}v=2-y\\ y=1+v\end{cases}$ $\left[(\text{Indeterminato});(v=-1,y=-1);\left(v=\frac{1}{2},y=\frac{3}{2}\right)\right]$

8. $\begin{cases}\frac{4}{5}g-2=\frac{3}{10}k\\ 2g-\frac{3}{4}k=\frac{5}{2}\end{cases}; \begin{cases}\frac{1}{2}g=\frac{1}{3}-\frac{k}{4}\\ g=k+\frac{1}{2}\end{cases}; \begin{cases}\frac{g+k}{2}=-1\\ \frac{g-k}{2}=2\end{cases}$ $\left[(\varnothing);\left(g=\frac{11}{8},k=\frac{1}{9}\right);(g=1,k=-3)\right]$

9. $\begin{cases}2x-3y+1=0\\ \frac{1}{2}x+5y-3=0\end{cases}; \begin{cases}\frac{1}{4}x+2=-\frac{1}{3}y\\ x-\frac{1}{5}y+\frac{1}{3}=0\end{cases}; \begin{cases}\frac{2}{3}x+\frac{3}{4}y-1=0\\ \frac{3}{4}x-\frac{2}{3}y+2=0\end{cases}$ $\left[\left(x=-\frac{4}{21},y=\frac{13}{21}\right);\left(x=-\frac{4}{3},y=-5\right);\left(x=-\frac{24}{29},y=\frac{60}{29}\right)\right]$

10. $\begin{cases}4x-5y+1=0\\ 3x+2y-5=0\end{cases}; \begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{7}{2}-\frac{1}{4}y=0\\ \frac{3}{5}y-\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}y\end{cases}; \begin{cases}-\frac{7}{4}x+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}y=0\\ \frac{3}{5}x-\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}y\end{cases}$ $\left[(x=1,y=1);\left(x=-\frac{92}{9},y=\frac{10}{27}\right);\left(x=-\frac{20}{219},y=\frac{54}{73}\right)\right]$

11. $\begin{cases}-\frac{1}{4}n+\frac{7}{2}m=\frac{1}{4}\\ \frac{1}{3}m+\frac{4}{5}n=\frac{2}{3}\end{cases}; \begin{cases}\frac{5}{3}n-\frac{7}{3}m=-1\\ -\frac{4}{5}m+\frac{5}{4}=-2n\end{cases}; \begin{cases}n+m=1-m\\ \frac{2}{3}n-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}m-n\end{cases}$ $\left[\left(m=\frac{22}{173},n=\frac{135}{173}\right);\left(m=\frac{85}{16},n=\frac{3}{2}\right);\left(m=\frac{17}{46},n=\frac{6}{23}\right)\right]$

Livello 2

12. $\begin{cases}\frac{13}{4}p-\frac{5}{28}q=\frac{1}{4}\\ \frac{13}{4}p-\frac{5}{8}q=3\end{cases}; \begin{cases}\frac{p-q}{2}+1=\frac{p+q}{3}\\ \frac{2p-q+1}{3}-2=\frac{q-2p+3}{2}\end{cases}; \begin{cases}\frac{1}{12}h-\frac{3}{4}w-1=0\\ \frac{1}{10}h-\frac{6}{5}=\frac{9}{10}w\end{cases}$ $\left[\left(p=-\frac{17}{65},q=-\frac{154}{25}\right);\left(p=\frac{25}{9},q=\frac{79}{45}\right);(\text{Indeterminato})\right]$

13. $\begin{cases} \dfrac{h+k-1}{3}-h=\dfrac{k-h+2}{3}+k \\ \dfrac{2k-h+5}{4}+1=\dfrac{h-1}{2}-k+3 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{153}{70}b+\dfrac{52}{35}c=-\dfrac{11}{2} \\ -\dfrac{5}{48}b+\dfrac{5}{24}c=\dfrac{1}{6} \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{b-3c}{4}+c-1=\dfrac{c}{2} \\ \dfrac{2b-c+4}{3}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{b-c}{2}+1 \end{cases}$

$\left[\left(h=-\frac{7}{5},k=-\frac{8}{15}\right);\left(b=-\frac{2341}{1025},c=-\frac{701}{2050}\right);\left(b=\frac{5}{2},c=-\frac{3}{2}\right)\right]$

14. $\begin{cases} -\dfrac{157}{30}c+\dfrac{1}{4}d-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}c-\dfrac{2}{3}d \\ \dfrac{2}{3}c-d+1=\dfrac{3}{4}d+\dfrac{1}{2}c-\dfrac{1}{4} \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{c+d}{3}-\dfrac{c-d}{2}+\dfrac{2c-d}{4}=\dfrac{c-2d}{6} \\ c-d+1=0 \end{cases}$ $\left[\left(c=\frac{15}{523},d=\frac{375}{523}\right);\left(c=-\frac{11}{3},d=\frac{2}{13}\right)\right]$

Livello 3

15. Determinare per quali valori di a e b il sistema $\begin{cases} 3x+ay=-1 \\ bx+4y=1 \end{cases}$ ammette una sola soluzione. $[ab \neq 12]$

Lavoriamo insieme

Calcolare il seguente determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. Applichiamo la cosiddetta regola di Sarrus, ottenuta ricopiando le prime due colonne: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$. In tal modo abbiamo "creato" sei diagonali di tre elementi ciascuna, tre da sinistra a destra e tre da destra a sinistra. Moltiplichiamo fra loro gli elementi di queste diagonali, cambiando il segno agli ultimi tre prodotti: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 1 - (3 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2) = 6 + 6 + 6 - (27 + 1 + 8) = 18 - 36 = -18$.

Livello 1

16. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -3 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & 1 \end{vmatrix}$ $\left[-7;0;0;\frac{13}{120}\right]$

17. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & -4 & 12 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ $[12; -1; 19; 0]$

18. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ $[0; 24; 24; 8]$

Livello 2

19. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ m & 1 & 2 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix}$ $[1; 1-3m; -3m-1]$

20. $\begin{vmatrix} m & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 2 & m & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & m & m \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} m-1 & 0 & 0 \\ m-5 & m+2 & 0 \\ 245 & 1247 & m-3 \end{vmatrix}$ $[-8m;\ m^2;\ (m-1)\cdot(m+2)\cdot(m-3)]$

21. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m^2 & m & 1 \\ m^4 & m^2 & 1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} m^2+3 & m & 31 \\ 0 & 1 & 1145 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ m+1 & 2 & 2m+3 \\ m & 0 & 2m \end{vmatrix}$ $[-m\cdot(m-1)\cdot(m^3-m^2-m+1);\ -(m^2+3);\ 0]$

Livello 3

22. Data una matrice A, diciamo sua *trasposta*, la matrice ottenuta da A scambiando fra di loro le righe e le colonne. Così la matrice trasposta di $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ è $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$. Verificare, limitatamente ai casi di matrici di ordine 2 e 3, che una matrice e la sua trasposta hanno lo stesso determinante.

23. Diciamo che una matrice A è *triangolare* se tutti gli elementi al disopra o al disotto della diagonale principale sono nulli. Verificare, limitatamente ai casi di matrici di ordine 2 e 3, che il determinante di una matrice triangolare è dato dal prodotto degli elementi della diagonale principale.

24. Verificare, limitatamente ai casi di matrici di ordine 2 e 3, che una matrice in cui due sue righe o due sue colonne sono fra loro proporzionali, ha determinante nullo.

25. Un determinante come il seguente: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$, in cui gli elementi posti simmetricamente alla diagonale principale sono opposti e gli elementi della diagonale principale sono nulli, si dice *emisimmetrico*. Provare che un determinante emisimmetrico di ordine 3 è nullo.

26. Un determinante come il seguente $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ si dice determinante di Cauchy–Vandermonde. Determinare una formula per il suo calcolo. Applicare la regola trovata al calcolo del determinante di Cauchy –Vandermonde di parametri $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$. $[(a-b)\cdot(b-c)\cdot(c-a);\ 2]$

27. Un determinante come il seguente: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$, si chiama determinante *circolante*. Determinare una formula per il suo calcolo. Applicare la predetta formula al calcolo del determinante circolante in cui si ha: $a = 2$, $b = -3$, $c = 1$. $[-(a^3+b^3+c^3-3abc);\ 0]$

Lavoriamo insieme

Risolviamo il sistema $\begin{cases} 2x-3y+z=1 \\ x-4y+2=z \\ 4x-y=1-2z \end{cases}$ usando il metodo di Cramer. Prima però dobbiamo scriverlo nella forma semplificata: $\begin{cases} 2x-3y+z=1 \\ x-4y-z=-2 \\ 4x-y+2z=1 \end{cases}$, adesso calcoliamo $D=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \\ 4 & -1 \end{matrix} = -16+12-1+6-2+16 = 15 \neq 0$. Pertanto il sistema è determinato, calcoliamone le soluzioni: $D_x=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & -3 \\ -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{matrix} = -8+$

$3+2-12-1+4=-12;\ D_y=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&-2&-1\\4&1&2\end{vmatrix}\begin{matrix}2&1\\1&-2\\4&1\end{matrix}=-8-4+1-2+2+8=-3;\ D_z=\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&-4&-2\\4&-1&1\end{vmatrix}\begin{matrix}2&-3\\1&-4\\4&-1\end{matrix}=$

$-8+24-1+3-4+16=30.$ Infine: $x=\dfrac{-\cancel{12}^{4}}{\cancel{15}^{5}};\ y=\dfrac{-\cancel{3}^{1}}{\cancel{15}^{5}};\ z=\dfrac{\cancel{30}^{2}}{\cancel{15}^{1}}\Rightarrow x=-\dfrac{4}{5};\ y=-\dfrac{1}{5};\ z=2$

Risolvere con il metodo di Cramer i seguenti sistemi, verificando poi i risultati ottenuti

Livello 1

28. $\begin{cases}3x-2y+z=0\\x-5y-3z=-1\\3x-2y+4z=2\end{cases};\quad \begin{cases}x-2y+z=1\\2y+3z=-1\\x-5z=-y\end{cases};\quad \begin{cases}2h-b+4a=0\\\dfrac{17}{3}a-\dfrac{1}{3}b-5h=0\\7a-b-4=12h-6b\end{cases}$

$$\left[\left(x=-\frac{16}{39},y=-\frac{11}{39},z=\frac{2}{3}\right);\left(x=\frac{4}{21},y=-\frac{3}{7},z=-\frac{1}{21}\right);\left(a=\frac{68}{433},b=\frac{376}{433},h=\frac{52}{433}\right)\right]$$

29. $\begin{cases}3x-4y-z=-2\\2x+3y-z=4\\3x-2y+z=-3\end{cases};\quad \begin{cases}4x+4y=1\\x-y=-2\\y+z=1\end{cases};\quad \begin{cases}3x-y+z=-1\\2x+4y-z=2\\x+2y-3z=1\end{cases};\quad \begin{cases}v-3a=-1\\2v-6h+a=0\\4a-3h+7v=1\end{cases}$

$$\left[\left(x=\frac{1}{36},y=\frac{31}{36},z=-\frac{49}{36}\right);\left(x=-\frac{7}{8},y=\frac{9}{8},z=-\frac{1}{8}\right);\left(x=-\frac{1}{7},y=\frac{4}{7},z=0\right);\left(a=\frac{14}{43},h=\frac{2}{43},v=-\frac{1}{43}\right)\right]$$

Livello 2

30. $\begin{cases}\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{3}y=\dfrac{1}{4}\\\dfrac{1}{3}y+\dfrac{1}{3}z=-\dfrac{1}{2}\\\dfrac{1}{4}z-\dfrac{1}{2}x=\dfrac{1}{3}\end{cases};\quad \begin{cases}\dfrac{x+y-z}{4}=1-\dfrac{x}{2}\\\dfrac{2x-3y+4z}{2}=\dfrac{x+y}{3}-1\\\dfrac{x+3y}{6}=2-x+\dfrac{z}{3}\end{cases};\quad \begin{cases}\dfrac{2x-y}{3}=\dfrac{z-4}{2}\\x=y-z+\dfrac{1}{3}\\\dfrac{2}{3}y-1=\dfrac{1}{4}y+\dfrac{1}{2}z\end{cases}$

$$\left[\left(x=-\frac{25}{42},y=-\frac{23}{14},z=\frac{1}{7}\right);\left(x=\frac{50}{33},y=-\frac{614}{33},z=-\frac{596}{33}\right);\left(x=\frac{81}{23},y=\frac{164}{23},z=\frac{272}{69}\right)\right]$$

31. $\begin{cases}\dfrac{a+v}{3}-\dfrac{1}{2}=0\\\dfrac{v-2a}{4}=h+\dfrac{1}{2}\\\dfrac{a+2h-3v}{2}=1-\dfrac{h}{3}\end{cases};\quad \begin{cases}\dfrac{2}{3}b-\dfrac{5}{2}e+d-3=0\\2b-d+\dfrac{3}{4}e=0\\\dfrac{1}{2}b+\dfrac{3}{4}d-\dfrac{15}{8}e=\dfrac{9}{4}\end{cases};\quad \begin{cases}\dfrac{b-d+2}{10}=\dfrac{e-d}{5}+1\\\dfrac{d+2b-e}{4}=\dfrac{1}{2}\\\dfrac{b}{2}-\dfrac{d}{3}=\dfrac{e}{4}+1\end{cases}$

$$\left[\left(a=\frac{41}{12},h=-\frac{43}{16},v=-\frac{23}{12}\right);(\text{Indeterminato});\left(b=-\frac{22}{21},d=-\frac{6}{7},e=-\frac{104}{21}\right)\right]$$

32. $\begin{cases}\dfrac{15}{28}h-\dfrac{5}{2}=\dfrac{1}{2}s-\dfrac{15}{32}n\\-\dfrac{2}{7}h-\dfrac{1}{4}n=-\dfrac{4}{15}s-\dfrac{4}{3}\\\dfrac{3}{7}h-\dfrac{2}{5}s+\dfrac{3}{8}n-2=0\end{cases};\quad \begin{cases}h+\dfrac{s}{2}-\dfrac{n}{3}=1\\\dfrac{h-s}{3}=\dfrac{n-2}{4}\\\dfrac{n}{6}=\dfrac{s+h}{3}-1\end{cases};\quad \begin{cases}\dfrac{x+y-z}{2}=\dfrac{x-y+z}{3}-1\\\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{6}+2\\x-y+1=z\end{cases}$

$$\left[(\text{Indeterminato});\left(h=-\frac{18}{11},n=-\frac{42}{11},s=-\frac{42}{11}\right);\left(x=\frac{129}{16},y=\frac{25}{8},z=\frac{95}{16}\right)\right]$$

33. $\begin{cases} b-\frac{h}{3}=-\frac{a}{2}+1 \\ \frac{a-h}{2}=-\frac{a}{2}+1 \\ a+b=h-1 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{1}{2}m-\frac{2}{3}k=\frac{5}{4}h+\frac{3}{7} \\ \frac{2}{3}m+\frac{5}{3}k-\frac{3}{8}=2h \\ \frac{7}{6}m+k-\frac{13}{4}h=\frac{1}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} m+2\cdot(h-1)=3\cdot(k+m)-1 \\ m-h=k+2 \\ \frac{h+m}{3}=1+\frac{k}{3} \end{cases}$

$$\left[(a=4,b=1,h=6);(\varnothing);\left(h=\frac{1}{2},k=-1,m=\frac{3}{2}\right)\right]$$

34. $\begin{cases} \frac{1}{4}x+\frac{3}{11}z-\frac{1}{2}=0 \\ \frac{2}{7}y-\frac{5}{8}z=\frac{1}{3} \\ \frac{1}{8}x-\frac{3}{4}y=\frac{1}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{x-z+y}{2}=-\frac{1}{3} \\ \frac{x+y}{3}=-\frac{z}{4} \\ \frac{x-z}{2}=\frac{y+z}{2}-1 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{2}{3}x-\frac{8}{3}+\frac{1}{4}y-\frac{1}{6}z=0 \\ -\frac{1}{6}x-\frac{1}{12}y-\frac{3}{4}z+\frac{1}{4}=\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6}x+\frac{4}{3}y-\frac{5}{6}z=\frac{5}{6} \end{cases}$

$$\left[\left(x=\frac{374}{139},y=-\frac{91}{417},z=-\frac{88}{139}\right);\left(x=-\frac{16}{21},y=\frac{10}{21},z=\frac{8}{21}\right);\left(x=\frac{2320}{589},y=-\frac{10}{31},z=-\frac{429}{589}\right)\right]$$

L'angolo delle correzioni

Correggere i seguenti procedimenti errati

1. $\begin{cases} 3x-1=y \\ x-y=2 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-1+2}{-3+1}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{6-1}{-3+1}=\frac{5}{-2}=-\frac{5}{2}$

2. $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -2y+x=-1 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{1+6}{2+6}=\frac{7}{8}; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{2+2}{2+6}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

3. $\begin{cases} 5x-2y-3=0 \\ 4x+y-2=0 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-3-4}{5+8}=-\frac{7}{13}; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-10+12}{5+8}=\frac{2}{13}$

4. $\begin{cases} 3x+6y=-1 \\ 2x+4y=3 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}=\frac{12-12}{-4-18}=\frac{0}{-22}=0; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{12-11}{9+2}=\frac{0}{11}=0$

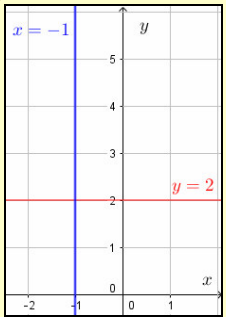
5. $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y-z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases} \Rightarrow D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix}=-1-1-1+1+1+1=0.$ Il sistema non ha soluzione.

Rette nel piano cartesiano

Dalla fisica sappiamo che l'equazione del moto rettilineo uniforme è $s = v \cdot t + s_0$, in cui t è il tempo ed è la cosiddetta variabile indipendente, mentre s rappresenta lo spazio percorso ed è la variabile dipendente. potremmo anche esprimerla nella forma $y = ax + b$, o in modi analoghi. In ogni caso abbiamo a che fare con un'equazione di I grado in due variabili, che in alcuni casi può diventare anche un'equazione in una sola variabile.

Esempio 14

Se consideriamo una retta parallela all'asse delle ordinate, è facile capire che essa passa per tutti i punti che hanno la stessa ascissa, quindi possiamo dire che essa è *rappresentata* dalla equazione $x = a$, con a valore comune delle ascisse. Allo stesso modo una retta parallela all'asse delle ascisse possiamo rappresentarla con l'equazione $y = a$. In figura vediamo le rette $y = 2$ e $x = -1$.



L'esempio precedente ci permette di enunciare il seguente intuitivo risultato.

Teorema 3

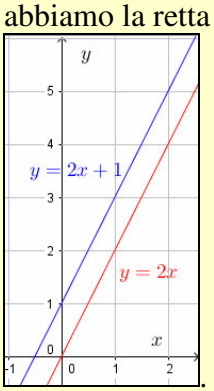
- L'equazione di una retta parallela all'asse delle ascisse è $y = h$, in cui h è il numero reale ordinata comune di tutti i punti della retta.
- L'equazione di una retta parallela all'asse delle ordinate è $x = h$, in cui h è il numero reale ascissa comune di tutti i punti della retta.

I risultati precedenti ci dicono che l'asse delle ascisse ha equazione $y = 0$, mentre $x = 0$ è l'equazione dell'asse delle ordinate.
Sempre tenuto conto dei risultati noti dalla fisica possiamo anche enunciare quest'altro risultato.

Teorema 4

- L'equazione di una retta passante per l'origine degli assi cartesiani, diversa dall'asse y, è $y = mx$, in cui m è un numero reale che dipende dall'angolo che la retta forma con il semiasse positivo delle ascisse.
- L'equazione di una retta non parallela all'asse delle y è $y = mx + p$, in cui m è un numero reale legato all'angolo che la retta forma con il semiasse positivo delle ascisse, p è invece l'ordinata del punto intersezione fra la retta e l'asse y.

Esempio 15

In figura abbiamo la retta di equazione $y = 2x$ e quella di equazione $y = 2x + 1$, che ovviamente sono fra loro parallele 

. Dal punto di vista fisico $y = 2x$ rappresenta un moto a velocità costante, 2 m/s, senza spazio iniziale, mentre $y = 2x + 1$, ha uno spazio iniziale di 1 m.

Poniamo la seguente definizione.

Definizione 7

1. L'equazione $y = mx + p$ si chiama **equazione in forma esplicita di una retta non parallela all'asse delle ordinate** o più brevemente *equazione esplicita di una retta*;
2. il parametro m si chiama **coefficiente angolare** della retta;
3. il parametro p si chiama **ordinata all'origine**.

L'osservazione del precedente esempio, relativamente al coefficiente angolare ci permette di dire che due rette sono parallele se e solo se hanno lo stesso coefficiente angolare.

Esempio 16

- Vogliamo stabilire le reciproche posizioni delle rette di equazioni: $y = 3x + 2$ e $y = 2 – 4x$. Dato che dobbiamo trovare l'eventuale punto che hanno in comune, non dobbiamo fare altro che risolvere il sistema formato da tali equazioni: $\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = 2 - 4x \end{cases}$, che conviene risolvere con il metodo del confronto: $3x + 2 = 2 – 4x \Rightarrow 7x = 0, \Rightarrow x = 0$, quindi $y = 2$. Pertanto le rette sono incidenti nel punto $(0; 2)$.
- Invece le rette di equazioni $y = 3x + 1$ e $y = 3x – 2$, non hanno punti comuni poiché sono parallele, avendo lo stesso coefficiente angolare. In ogni caso, se non ce ne accorgessimo, il sistema $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x - 2 \end{cases}$, ovviamente non avrebbe soluzioni.

Una retta passa per due punti, quindi conoscendo due suoi punti possiamo determinare la sua equazione.

Esempio 17

Che equazione ha la retta che passa per i punti $(1; 2)$ $(3; –2)$? Dato che $y = mx + p$ è l' equazione di una retta generica, basta sostituire le coordinate dei due punti in tale equazione e risolvere il sistema: $\begin{cases} 2 = m + p \\ -2 = 3m + p \end{cases}$, che si risolve per esempio con il metodo di sottrazione: $2 – (–2) = m + p – (3m + p) \Rightarrow 4 = –2m \Rightarrow m = –2$. Da cui $p = 2 – (–2) = 4$, quindi l'equazione cercata è $y = –2x + 4$. Osserviamo che effettivamente si ha:

$$2 = –2 \cdot 1 + 4; –2 = –2 \cdot 3 + 4$$

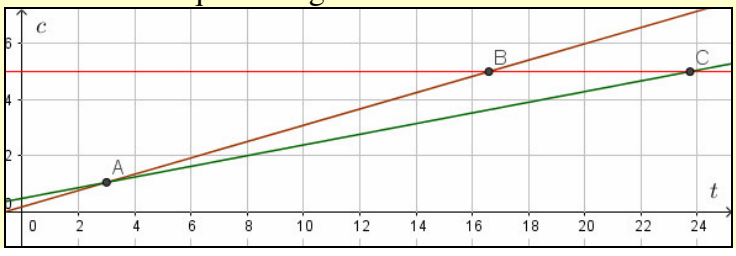
Le equazioni delle rette hanno particolare importanza nei cosiddetti problemi di programmazione lineare. Vediamo un esempio.

Esempio 18

Filippo vuole cambiare il suo operatore di telefonia mobile perché gli sembra caro. Ha selezionato tre diversi operatori che gli propongono le seguenti opzioni settimanali: A) € 0,29 al minuto e € 0,19 di costo fisso; B) € 0,19 al minuto e costo fisso di € 0,49; C) € 5,00 per 400 minuti. Quale fra le tre offerte risulta la più conveniente? La risposta dipende ovviamente da quante chiamate pensa di fare mediamente Filippo in una settimana. Per aiutarlo tutto scriviamo le tre leggi del costo, c, in funzione del tempo e, visto che l'unità di misura comune è un minuto, con t indicheremo appunto tale durata. Abbiamo allora:

$$\text{A) } c = 0{,}29 \cdot t + 0{,}19; \text{ B) } c = 0{,}19t + 0{,}49; \text{ C) } c = 5{,}00 \text{ per } 0 < t < 501.$$

Adesso rappresentiamo le tre espressioni in un riferimento cartesiano in cui sulle ascisse ci sono i minuti e sulle ordinate i relativi costi. Otteniamo quanto segue.

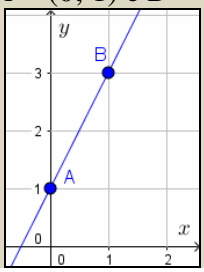


Nel grafico abbiamo indicato con il marrone la tariffa A, con il verde la B e con il rosso la C. I punti indicati sono i cosiddetti punti di indifferenza, ossia quando le tariffe hanno lo stesso valore. Determiniamone le coordinate risolvendo i relativi sistemi: $\begin{cases} c = 0,29t + 0,19 \\ c = 0,19t + 0,49 \end{cases} \Rightarrow 0,29t + 0,19 = 0,19t + 0,49 \Rightarrow 0,10t = 0,30 \Rightarrow t = 3$ cioè le prime due tariffe si equivalgono se si fanno telefonate per 3 minuti. Passiamo al punto di indifferenza B: $\begin{cases} c = 0,29t + 0,19 \\ c = 5,00 \end{cases} \Rightarrow 0,29t + 0,19 = 5,00 \Rightarrow 0,29t = 4,81 \Rightarrow t \approx 16,6$, in questo caso possiamo dire che le due tariffe non si equivalgono mai poiché il numero di minuti deve essere intero, ma fra 16 e 17 minuti hanno valori quasi uguali. In effetti per 16 minuti le tariffe A sono di € 4,83 e € 5,12 mentre la C è sempre di € 5,00. Infine il punto C: $\begin{cases} c = 5,00 \\ c = 0,19t + 0,49 \end{cases} \Rightarrow 5,00 = 0,19t + 0,49 \Rightarrow 0,19t = 4,51 \Rightarrow t \approx 23,8$, anche in questo caso non c'è mai equivalenza. La tariffa B a 23 e 24 minuti costerà rispettivamente € 4,86 e € 5,05.
Il grafico ci suggerisce che fino a 3 minuti di conversazione conviene la tariffa A, da 3 a 23 la tariffa B e da 24 minuti in poi la tariffa C.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo rappresentare sul piano cartesiano la retta di equazione $y = 2x + 1$. Dato che una retta passa per 2 punti, dobbiamo trovare appunto 2 di questi punti. Basta assegnare due valori a piacere alla variabile x, ricavando i corrispondenti valori della y. In questo modo abbiamo le coordinate di due punti che andiamo perciò a rappresentare e poi uniamo con un tratto rettilineo. Per esempio nel nostro caso se $x = 0$, $y = 1$ e se $x = 1$, $y = 3$, quindi la retta cercata passa per i punti $A \equiv (0; 1)$ e $B \equiv (1; 3)$ ed è quella rappresentata in figura.



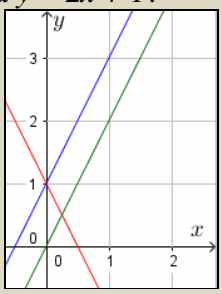
Rappresentare le rette aventi le seguenti equazioni

***Livello* 1**

1. $x = 2$; $y = -3$; $y = x$; $y = x + 1$; $y = 4x - 1$; $y = 0$
2. $y = x - 3$; $y = x - 4$; $y = -4 + x$; $y = 2 - 3y$; $y = -x + 2$; $y = 3x + 1$

Lavoriamo insieme

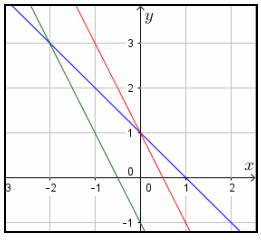
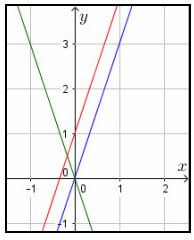
Quale fra i grafici seguenti rappresenta la retta $y = 2x + 1$?

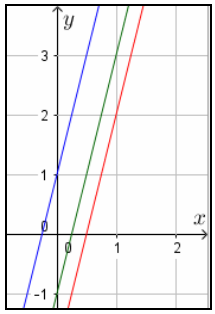
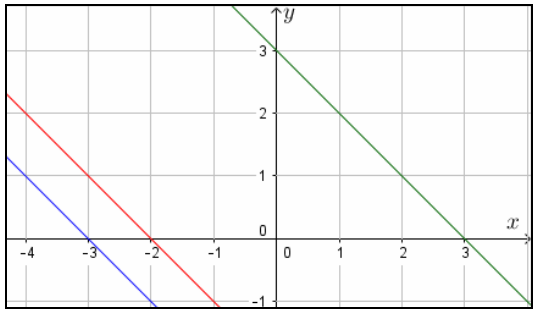


Possiamo escludere la retta verde perché passa per l'origine e quindi la sua equazione non dovrebbe contenere il termine noto; escludiamo la retta rossa perché la sua pendenza, cioè il suo coefficiente angolare, è negativa. Pertanto la retta blu è quella corretta, del resto osserviamo che passa per i punti (0; 1) e (1; 3) che verificano l'equazione $y = 2x + 1$.

Determinare le rette che hanno l'equazione data

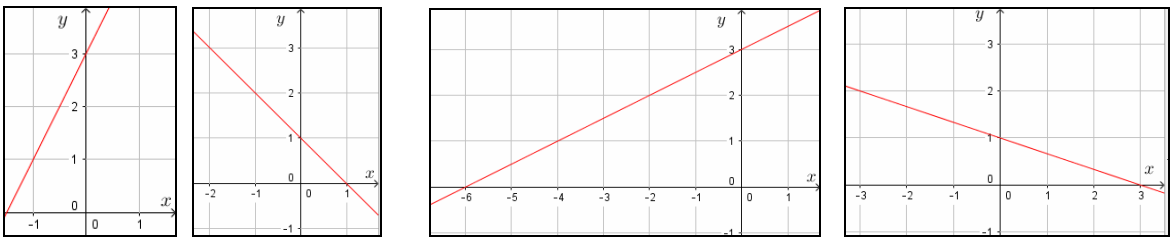
***Livello* 1**

3. $y = -2x + 1$  ; $y = 3x$  [Rossa ; Blu]

4. $y = 4x - 1$;  $y = -x - 3$  [Verde ; Verde]

Determinare l'equazione della retta in figura

Livello 2

5. 

[$y = 2x + 3$; $y = -x + 1$; $y = x/2 + 3$; $y = -x/3 + 1$]

Lavoriamo insieme

Vogliamo stabilire la reciproca posizione delle rette di equazione $y = 3x$ e $y = 5 - x$. Le rette non sono parallele, quindi risolviamo il sistema: $\begin{cases} y = 3x \\ y = 5 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ 3x = 5 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ 4x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{15}{4} \\ x = \frac{5}{4} \end{cases}$, che sono le coordinate del punto intersezione.

Determinare le reciproche posizioni delle seguenti coppie di rette, calcolando anche le coordinate del loro eventuale punto comune I

Livello 1

6. $y = -2x + 1$, $y = x - 1$; $y = -2x$, $y = 3x - 2$; $y - 5 = 0$, $y = 2x - 4$ $\left[\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right);\left(\frac{2}{5};-\frac{4}{5}\right);\left(\frac{9}{2};5\right)\right]$

7. $y = 4x + 1$, $y = 3 + 4x$; $y = -2x + 1$, $y = 2x + 1$; $x = -2$, $y = -3x - 2$ [Rette parallele; (0; 1) ; (–2; 4)]

8. $y = -x$, $y = 5x$; $y = -3x + 2$, $y = -2x + 3$; $y - 2 = 0$, $x = -1$ [(0; 0) ; (–1; 5) ; (–1; 2)]

Determinare il valore del parametro m in modo che le seguenti rette abbiano in comune il punto indicato

Livello 2

9. $y = mx - 1$, $y = x + 1$, $I \equiv (2; 3)$; $y = 2x$, $y = 1 - mx$, $I \equiv (0; 0)$ [$m = 2$; $\varnothing$]

10. $y = 3mx$, $y = 4x - 3$, $I \equiv (1; 1)$; $y = (1 - m) \cdot x - 1$, $y = (1 + m) \cdot x - 1$, $I \equiv (0; -1)$ $\left[m = \frac{1}{3}; \forall m \in \mathbb{R}\right]$

11. $y = mx + 1 - m$, $y = x - m$, $I \equiv (2; -3)$; $y = mx + m - 2$, $y = 2x - 3m$, $I \equiv (-1; -2)$ [$\varnothing$; $m = 0$]

Scrivere le equazioni delle rette passanti per i punti accanto indicati

12. (1; 2), (1; 3) ; (0; 2), (2; –2) ; (–1; –1), (4; 0) $\left[x = 1; y = -2x + 2; y = \frac{1}{5}x - \frac{4}{5}\right]$

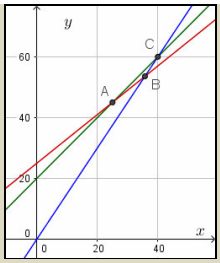
13. (3; 1), (0; 3) ; (1; 1), (4; –1) ; (–3; 1), (–2; 2) $\left[y = -\frac{2}{3}x + 3; y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}; y = x + 4\right]$

Livello 3

(a; a), (b; b) ; (a; b), (b; a) ; (a; $a + 1$), (b; $b + 1$), a, b numeri reali [$y = x$; $y = -x + a + b$; $y = x + 1$]

Lavoriamo insieme

Una banca offre le seguenti alternative per la tenuta di un conto corrente: € 20,00 di spese fisse ed € 1,00 per operazione; oppure spese fisse € 25,00 e € 0,80 per ogni operazione; o ancora € 1,50 per operazione senza spese fisse. Vogliamo studiare l'andamento dei costi al variare del numero delle operazioni.
Cominciamo a determinare le leggi che descrivono le tre offerte, indicando con x il numero di operazione e con y il costo. A) $y = 20 + x$; B) $y = 25 + 0{,}80x$; C) $y = 1{,}50x$. Rappresentiamole graficamente in un sistema di riferimento cartesiano, ottenendo quanto segue, dove la tariffa A è in verde, la B in rosso e la C in blu.



I punti segnati sono i cosiddetti punti di indifferenza, dove due delle tre tariffe si equivalgono. Troviamo le coordinate di tali punti: $\begin{cases} y = 20 + x \\ y = 25 + 0,80x \end{cases} \Rightarrow 20 + x = 25 + 0,80x \Rightarrow 0,20x = 5 \Rightarrow \begin{cases} x = 25 \\ y = 45 \end{cases}$ cioè le tariffe A e B si equivalgono se effettuiamo 25 operazioni e in entrambi i casi pagheremo € 45,00. Passiamo agli altri punti: $\begin{cases} y = 20 + x \\ y = 1,50x \end{cases} \Rightarrow 20 + x = 1,50x \Rightarrow 0,50x = 20 \Rightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 60 \end{cases}$. A e C si equivalgono per 40 operazioni, pagando € 60,00. Infine: $\begin{cases} y = 1,50x \\ y = 25 + 0,80x \end{cases} \Rightarrow 1,50x = 25 + 0,80x \Rightarrow 0,70x = 25 \Rightarrow \begin{cases} x \approx 36 \\ y \approx 54 \end{cases}$, stavolta i due non si equivalgono mai esattamente, dato che le coordinate di *B* non sono intere, per 36 operazioni la tariffa B sarebbe di € 53,80, mentre la C di € 54,00.
Per quel che riguarda la situazione generale, dobbiamo seguire la spezzata formata dalle linee di ordinata minore, quindi dal grafico possiamo dire che fino a 40 operazioni sarà più conveniente la tariffa C, mentre per un numero di operazioni maggiori converrà la tariffa B. Non converrà mai la tariffa A.

Risolvere i seguenti problemi

Livello 1

14. Affittando una macchina possiamo scegliere di pagare un fisso di € 28,00 al giorno senza limite di chilometri, oppure un fisso di € 15,00 più € 0,25 al chilometro. Studiare la soluzione più conveniente al variare del numero di chilometri percorsi in un giorno. [Fino a *km* 52 è più conveniente la seconda]
15. Una palestra propone due tipi di abbonamento: € 20,00 al mese più € 2,00 ogni volta; oppure € 25,00 più € 1,50 ogni volta. Quante volte al massimo si deve andare perché sia conveniente la seconda opzione? [10]
16. Una compagnia telefonica propone due abbonamenti, il primo prevede il costo fisso di € 0,15 per chiamata, aumentato di € 0,10 al minuto; oppure € 0,20 per minuto senza scatto alla risposta. Quando risulta più conveniente la prima alternativa? [Per chiamate che durano al massimo 1 minuto]
17. Carmen deve scegliere fra due tipi di abbonamento alla metropolitana. € 50,00 al mese senza limite di viaggi, oppure € 25,00 al mese e € 0,50 al viaggio. Per quanti viaggi mensili al massimo, conviene la seconda opzione? [Massimo 50]

Livello 2

18. Dora deve scegliere tra le seguenti tre opzioni di abbonamento alla piscina. A) € 75 al mese senza limite; B) € 40 al mese e € 3,00 alla volta; C) € 50 al mese e € 2,50 per volta. Studiare l'andamento dei costi al variare del numero di volte che Dora va in piscina in un mese.
[Fino a 11 volte conviene B) poi A, non conviene mai C)
19. Una banca offre le seguenti alternative per la tenuta di un conto corrente: A) € 30,00 di spese fisse e € 1,25 ogni operazione; B) spese fisse di € 25,00 e € 1,40 per ogni operazione; C) € 1,75 per operazione senza spese fisse. Studiare i costi al variare del numero delle operazioni.
[Fino a 60 operazioni conviene C; poi A; non conviene mai B]
20. Per affittare un'auto si richiedono tre preventivi. A) € 16,00 al giorno più € 0,30 al *km*; B) € 20,00 di fisso e € 0,25 al *km*. C) € 0,60 al *km*. Quale delle tre agenzie è più conveniente, al variare dei *km* percorsi? [C fino a *km* 53; A da *km* 54 a *km* 80; B oltre *km* 80]
21. Una azienda deve scegliere una ditta cui affidare il servizio mensa ed ha ricevuto i seguenti preventivi A: € 200,00 al giorno più € 3,00 a pasto; B: € 150,00 al giorno più € 3,50 a pasto; C: € 4,50 a pasto senza fisso. Studiare quali fra le tre ditte propone un servizio più conveniente, al variare del numero di pasti giornalieri. [C fino a 115 pasti; B fino a 250; A oltre 250]

Problemi lineari in più incognite

Cominciamo subito con un esempio di un problema che abbiamo già risolto in altro modo nell'unità sulle equazioni di primo grado in un'incognita, con i cosiddetti procedimenti per tentativi intelligenti.

Esempio 19

Determinare un numero intero di due cifre, sapendo che la cifra delle decine è doppia di quella delle unità e che la somma delle due cifre è uguale a 6.

Poiché noi non conosciamo le cifre del numero siamo tentati di chiamarle con nomi generici (incognite), per esempio d per la cifra delle decine e u per quella delle unità. In tal modo il problema diviene quello della ricerca di due termini incogniti, quindi se noi riuscissimo a *tradurlo* in una o più equazioni, risolvendo tali equazioni si risolverebbe anche il problema. La traduzione letterale di quanto affermato nel problema è la seguente: $\begin{cases} d = 2u \\ d + u = 6 \end{cases}$ e l'unica soluzione di questo sistema è proprio $d = 4$ e $u = 2$ come avevamo già trovato con il metodo per tentativi.

Vediamo adesso un esempio di problema geometrico.

Esempio 20

È dato un rettangolo di base e altezza incognite. Si sa che se aumentiamo la sua base di 2 *m e la sua altezza di* 3 *m, la sua area aumenta di* 64 m^2*, mentre se aumentiamo la base di* 3 *m e l'altezza di* 2 *m, l'area aumenta di* 68 m^2*. Quanto misurano base e altezza*?

Indichiamo le misure incognite con simboli, per esempio con b la misura della base e con h la misura dell'altezza. Poiché sappiamo che l'area di un rettangolo in formula è Area = $b \cdot h$, si tratta di confrontare le aree dei due rettangoli "deformati". Nel primo caso facciamo diventare: $b \to b + 2$; $h \to h + 3$; quindi $b \cdot h$ diventa $(b + 2) \cdot (h + 3)$; nel secondo caso: $b \to b + 3$; $h \to h + 2$; quindi $b \cdot h \to (b + 3) \cdot (h + 2)$.

Ora noi sappiamo che le differenze fra queste due aree e quella del rettangolo non deformato sono rispettivamente di 64 m^2 e 68 m^2. Otteniamo perciò il sistema seguente: $\begin{cases} (b+2)\cdot(h+3) = b\cdot h + 64 \\ (b+3)\cdot(h+2) = b\cdot h + 68 \end{cases}$. Sebbene questo sistema appaia non lineare, svolgendo i calcoli e semplificando si ottiene: $\begin{cases} bh + 3b + 2h + 6 = bh + 64 \\ bh + 2b + 3h + 6 = bh + 68 \end{cases} \Rightarrow$ $\begin{cases} 3b + 2h = 58 \\ 2b + 3h = 62 \end{cases}$, che è invece un sistema lineare, il quale ha come soluzioni, in metri, determinate con un metodo a piacere: $b = 10$ e $h = 14$.

Possiamo verificare se questi valori corrispondono ai dati. Infatti: l'area del rettangolo non modificato misura 140 m^2; dopo la prima modifica il rettangolo ha base di 12 m, altezza di 17 m, area di 204 m^2 che effettivamente è (140 + 64) m^2; con la seconda modifica invece le dimensioni divengono 13 m e 16 m e l'area quindi diventa 208 m^2 = (140 + 68) m^2. L'uguaglianza è ancora verificata.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Consideriamo la frazione $\frac{3x-2}{x^2-5x+6}$. Vogliamo vedere se riusciamo a scomporla in frazioni più "semplici", cioè il cui denominatore è un binomio di primo grado e il numeratore è un numero.
Dato che $x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot (x - 3)$, cerchiamo due numeri, che indichiamo simbolicamente con A e B, per cui si ha $\frac{3x-2}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$. Il problema sembra molto difficile. Effettuiamo il minimo comune denominatore fra le due frazioni al secondo membro e otteniamo $\frac{A\cdot(x-3)+B\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(x-3)}$. Adesso sviluppiamo le moltiplicazioni e raccogliamo il fattore comune x: $\frac{Ax-3A+Bx-2B}{x^2-5x+6} = \frac{(A+B)x-3A-2B}{x^2-5x+6}$.
L'uguaglianza iniziale è perciò diventata: $\frac{3x-2}{x^2-5x+6} = \frac{(A+B)x-3A-2B}{x^2-5x+6}$. Dato che le due frazioni sono equivalenti, avendo lo stesso denominatore, dovranno avere uguali anche i rispettivi numeratori. Per il principio di identità dei polinomi i coefficienti della x e i termini noti devono essere uguali fra di loro, quindi $\begin{cases} A+B=3 \\ -3A-2B=-2 \end{cases}$. Abbiamo così ricondotto il problema alla risoluzione di un sistema lineare di due equazioni in due incognite, A e B. Risolvendolo otteniamo $A = -4$, $B = 7$. Perciò possiamo concludere che si può scrivere: $\frac{3x-2}{x^2-5x+6} = \frac{7}{x-3} - \frac{4}{x-2}$.

Determinare i valori di A e B in modo che si abbia la validità delle seguenti uguaglianze

Livello 2

1. $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{5x+1}{x^2-1}$; $\frac{A}{3x-1}+\frac{B}{12x+1}=\frac{126x+13}{36x^2-9x-1}$; $\frac{A}{7x-2}+\frac{B}{8x-3}=\frac{53x-18}{56x^2-37x+6}$
[$A = 3, B = 2$; $A = 11, B = -2$; $A = 4, B = 3$]

2. $\frac{A}{x-4}+\frac{B}{2x-7}=\frac{9x-34}{2x^2-15x+28}$; $\frac{A}{2x-9}+\frac{B}{3x+11}=\frac{x+20}{6x^2-5x-99}$ [$A = 2, B = 5$; $A = 1, B = -1$]

3. $\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x+2}=-\frac{1}{x^2+5x+6}$; $\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{2x+1}=\frac{24x-2}{4x^2-1}$; $\frac{A}{x+3}+\frac{B}{2-x}=\frac{26x+13}{x^2+x-6}$
[$A = -1, B = 1$; $A = 5, B = 7$; $A = 13$; $B = 13$]

4. $\frac{A}{3x+1}+\frac{B}{2x+5}=\frac{13x+13}{6x^2+17x+5}$; $\frac{A}{12x-1}+\frac{B}{11x+1}=\frac{265x-1}{132x^2+x-1}$ [$A = 2, B = 3$; $A = 11, B = 12$]

Determinare i valori di A, B e C in modo che si abbia la validità delle seguenti uguaglianze

Livello 3

5. $\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+4}=\frac{2x^2-18x+22}{x^3-x^2-14x+24}$; $\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{2x-3}+\frac{C}{x+5}=\frac{4x^2-54x+59}{-4x^3-12x^2+37x-15}$
[$A = 1, B = -2, C = 3$; $A = 3, B = 1, C = -3$]

6. $\frac{A}{3x-2}+\frac{B}{2x-3}+\frac{C}{-x+1}=\frac{32x^2-65x+28}{6x^3-19x^2+19x-6}$; $\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}=\frac{x^2-x+1}{(x-1)^3}$
[$A = -2, B = 2, C = 5$; $A = 1, B = 1, C = 1$]

7. $\frac{A}{3x+5}+\frac{B}{5x-3}+\frac{C}{5x+3}=\frac{50x^2+18x+12}{75x^3+125x^2-27x-45}$; $\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}=\frac{x^2+4}{x^3-1}$
[$A = 2, B = 1, C = -1$; $A = 5/3; B = -2/3, C = -7/3$]

8. $\frac{A}{11x+1}+\frac{B}{3x-11}+\frac{C}{x-1}=\frac{25x^2-122x+1}{33x^3-151x^2+107x+11}$; $\frac{A}{(x+2)^2}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-2}=\frac{2x^2-x-18}{(x-2)\cdot(x+2)^2}$

[$A = 1$, $B = -1$, $C = 1$; $A = 2$, $B = 11/4$, $C = -3/4$]

9. $\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}=\frac{3x^2+x+2}{(x+1)\cdot(x-1)^2}$; $\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x-2}=\frac{2x+11}{x^3-8}$

[$A = 3$, $B = 1$, $C = 2$; $A = -5/4$, $B = -3$, $C = 5/4$]

Lavoriamo insieme

- Sappiamo che la divisione fra il polinomio $3x^3 + 5x - 1$ e un altro polinomio incognito, sempre nella sola variabile x, ha per quoziente $2x - 1$ e per resto 5. Riusciamo a determinare il polinomio divisore? Grazie a quanto già sappiamo sui polinomi e la loro divisione, possiamo dire che il polinomio incognito ha grado g che verifica l'equazione $3 - g = 1$, ossia ha grado 2. Ma poiché un generico polinomio di secondo grado nella variabile x è del tipo: $ax^2 + bx + c$, per risolvere il nostro problema dobbiamo determinare i valori dei tre coefficienti. Sfruttando il teorema che ci permette di "verificare" il risultato della divisione fra due polinomi, possiamo scrivere: $3x^3 + 5x - 1 = (ax^2 + bx + c)\cdot(2x - 1) + 5 \Rightarrow 3x^3 + 5x - 1 = 2ax^3 + (-a + 2b)\cdot x^2 + (-b + 2c)\cdot x - c + 5$. Adesso applichiamo il principio di identità dei polinomi e scriviamo: $\begin{cases} 2a = 3 \\ -a + 2b = 0 \\ -b + 2c = 5 \\ -c + 5 = -1 \end{cases}$, che è un sistema di 4 equazioni in 3 incognite, e quindi potrebbe non avere soluzioni. E in effetti, otteniamo $\begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{3}{4} \\ c = \frac{23}{8} \\ c = 6 \end{cases}$. Notiamo subito che il sistema presenta una contraddizione, pertanto il problema proposto non ha alcuna soluzione.
- Consideriamo un problema analogo a quello esposto nell'esempio precedente, ma con polinomio quoziente $3x - 3$ e polinomio resto $5x + 2$, lasciando inalterato il dividendo. Stavolta il sistema da risolvere è: $\begin{cases} 3a = 3 \\ -3a + 3b = 0 \\ -3b + 3c + 5 = 5 \\ -3c + 2 = -1 \end{cases}$, il quale stavolta ammette l'unica soluzione $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ 5 = 5 \\ c = 1 \end{cases}$. Quindi il polinomio cercato esiste è unico ed è $x^2 + x + 1$.

Determinare il polinomio divisore nelle seguenti divisioni fra polinomi di cui sono noti il dividendo D(x), il quoziente Q(x) e il resto R(x)

Livello 2

10. $D(x) = 5x^3 - 2x^2 + x - 1$; $Q(x) = \frac{5}{2}x + \frac{1}{4}$; $R(x) = \frac{15}{4}x - \frac{3}{4}$ [$2x^2 - x - 1$]
11. $D(x) = 2x^4 - x^3 - x^2 + x - 1$; $Q(x) = 2x + 1$; $R(x) = 3x$ [$x^3 - x^2 - 1$]
12. $D(x) = x^4 - x^2 + 1$; $Q(x) = x^2 - 2x + 1$; $R(x) = -2x + 2$ [$\varnothing$]
13. $D(x) = x^3 - x^2 + x - 1$; $Q(x) = x + 1$; $R(x) = 4$ [$\varnothing$]

Livello 3

14. Dato il polinomio di secondo grado $ax^2 + bx + c$, sapendo che $a \cdot (x + 3)^2 + b \cdot (x + 3) + c = x^2 + 2$, trovare i suoi coefficienti. [$a = 1$, $b = -6$, $c = 20$]

Lavoriamo insieme

Margherita ha dodici monete da 20 *e* 50 *centesimi, sapendo che in tutto le monete valgono* € 2,40, *determinare quante monete di ciascun tipo possiede*.

Indichiamo con v il numero di monete da € 0,20 e con c quelle da € 0,50. Abbiamo allora il seguente sistema risolvente: $\begin{cases} v+c=12 \\ 0,2v+0,5c=2,40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v+c=12 \\ 2v+5c=24 \end{cases}$. Risolviamolo per esempio con il metodo di Cramer:

$$v=\frac{\begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 24 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}=\frac{60-24}{5-2}=\frac{36}{3}=12; \quad c=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 2 & 24 \end{vmatrix}}{3}=\frac{24-24}{3}=0.$$

Quindi o Margherita aveva solo monete da € 0,20 oppure il problema non ha soluzione.

Risolvere i seguenti problemi impostando gli opportuni sistemi di equazioni lineari

***Livello* 1**

15. Determinare due numeri sapendo che la loro somma è 100 e la loro differenza 28. [36; 64]
16. Determinare una frazione, sapendo che aggiungendo 1 al numeratore si ottiene una frazione equivalente a $\frac{11}{5}$, mentre sottraendo 1 al denominatore si ottiene una frazione equivalente a $\frac{7}{3}$. $\left[\frac{21}{10}\right]$
17. In una frazione la differenza fra il numeratore e il denominatore è di 5 unità, aggiungendo 3 unità al denominatore e sottraendo due unità al numeratore si ottiene una frazione equivalente a $\frac{7}{8}$. Determinare la frazione. [Dati incoerenti]
18. Quanto pesa un pesce se la sua coda pesa 4 *kg*, la sua testa pesa quanto la sua coda e metà del suo corpo e il suo corpo pesa quanto la testa e la coda insieme? [32 *kg*]
19. Ariel deve comprare 5 *kg* fra mandorle e noci. Sapendo che spende 36 euro, che il costo al chilo è di 9 euro per le mandorle e di 6 euro per le noci, si vuole sapere quanti chili di ciascuna frutta secca acquisterà Ariel. [Mandorle 2 *kg*, noci 3 *kg*]
20. Un problema di Newton riadattato. *Un tale comperò* 40 *kg di grano,* 24 *di orzo e* 20 *di avena, spendendo* € 15,60. *Poi spese altri* € 16,00, *comprando gli stessi cereali ma nelle seguenti quantità di kg*: 26, 30 *e* 50. *Infine comprando* 24, 120 *e* 100 *kg dei detti cereali spese* € 34,00. *Vuol sapersi il prezzo di un kg di ciascun tipo di cereale, espresso in centesimi*. [25, 15, 10]
21. Goffredo è stato trasferito in un'altra città e deve perciò disfarsi dei suoi giornalini. Decide di regalarne 25 a ciascuno dei suoi amici, ma si accorge che per far ciò dovrebbe averne altri 10. Pensa allora di darne 20 a ciascuno, ma in tal modo gli rimarrebbero 25 giornalini. Quanti giornalini e quanti amici ha Goffredo? [7 amici e 165 giornalini]
22. Un antico problema babilonese del 1500 a. C. *Un certo campo produce* 4 *sacchi di grano per unità quadrata, un altro campo* 3 *sacchi. Sapendo che il primo campo ha prodotto* 50 *sacchi più del secondo e che la superficie totale dei due campi è* 30 *unità quadrate, determinare l'ampiezza di ciascun campo in unità quadrate*. [20, 10]
23. Un antico problema cinese del 300 a. C. *Vi sono* 3 *campi, in ognuno dei quali si coltivano* 3 *diverse qualità di grano, indicate con A, B e C. Nel primo campo* 3 *covoni di grano di tipo A*, 2 *di tipo B e* 1 *di tipo C riempiono* 39 *canestri; nel secondo* 2 *covoni di grano A*, 3 *di tipo B e* 1 *di tipo C riempiono* 34 *canestri; infine nel terzo campo* 1 *covone di tipo A*, 2 *di tipo B e* 3 *di tipo C riempiono* 26 *canestri. Qual è il raccolto, in canestri, di ciascun tipo di grano complessivamente nei tre campi*? [55,5; 29,75; 13,75]
24. Massimo ha complessivamente 20 monete da € 0,10, 0,20 e 0,50, che complessivamente hanno un valore di € 4,10. Sapendo che le monete da € 0,50 sono il doppio di quelle da € 0,20, determinare quante monete di ogni tipo ha Massimo. [Dati incoerenti]
25. Un commerciante vende due qualità di mandorle, una da € 3,50 il chilo, l'altra da € 4,20 il chilo. Se vuole creare una confezione da un chilo di mandorle di entrambe le qualità che costi € 3,92 il chilo, quante mandorle di tipo più economico deve mettere? [400 *g*]

26. Con riferimento al precedente esercizio, sia incognito il prezzo delle mandorle meno economiche. Se un miscuglio formato nelle proporzioni 3 e 5 di mandorle costa € 4,30, quanto costano al chilo le mandorle meno economiche? [€ 4,78]
27. N numeri formano una progressione aritmetica se, scritti in ordine crescente, la differenza fra due elementi consecutivi è costante. Per esempio 1, 3, 5, 7. Sapendo che una progressione aritmetica ha 5 termini la cui somma è 100 e che la somma dei tre termini maggiori è 7 volte la somma degli altri due termini, determinare la progressione. $\left[\frac{5}{3}, \frac{65}{6}, 20, \frac{175}{6}, \frac{115}{3}\right]$

Lavoriamo insieme

Determinare il numero intero di tre cifre che verifica le seguenti condizioni: la somma delle sue cifre è 15, la differenza fra la cifra delle centinaia e quella delle decine è uguale al numero precedente la cifra delle unità, infine la differenza fra il numero cercato e quello ottenuto da esso scambiando fra loro le cifre delle unità e delle centinaia uguaglia 396.

Le prime due condizioni sono di facile traduzione. Indicato con *cdu* il numero da cercare, impostiamo il sistema seguente $\begin{cases} c+d+u=15 \\ c-d=u-1 \end{cases}$. Potrebbe invece ingannare la terza condizione che si sarebbe tentati di scrivere nel modo seguente: $udc - cdu = 396$, che equivale alla contraddizione $0 = 396$. Si rifletta un attimo, con la scritta *cdu* noi non intendiamo il monomio $c \cdot d \cdot u$, cioè il risultato del prodotto delle tre cifre (infatti con la scritta 123 non intendiamo $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$), ma in base 10 intendiamo il polinomio $100c + 10d + u$ (con la scritta 123 intendiamo $100 + 20 + 3$). Quindi il sistema da risolvere con la corretta terza equazione è

$$\begin{cases} c+d+u=15 \\ c-d=u-1 \\ (100u+10d+c)-(100c+10d+u)=396 \end{cases}.$$

Risolvendolo troviamo facilmente il numero cercato: 753. Verifichiamo che è effettivamente corretto. Infatti la somma delle cifre è $7 + 5 + 3 = 15$; la differenza fra le cifre di centinaia e decine è $7 – 5 = 2$, che è il numero precedente la cifra delle unità; la differenza: 753 –357 è proprio uguale a 396.

Livello 2

28. Generalizzare il problema 15, a due numeri di cui conosciamo la somma s e la differenza d. Suggerimento**:** Risolvere il sistema applicando il metodo di addizione e sottrazione. $\left[\frac{s-d}{2}; \frac{s+d}{2}\right]$
29. Sappiamo che esiste un numero naturale n che aggiunto a numeratore e denominatore di una certa frazione la rende equivalente a $\frac{5}{3}$, mentre sottratto a numeratore e denominatore la rende equivalente a 4. Sapendo che la differenza fra numeratore e denominatore supera di 5 unità il numero dato, determinare la frazione e il numero. $\left[\frac{23}{11}, n=7\right]$
30. Durante il medioevo era consuetudine pagare il dazio quando venivano introdotte merci nelle città. Due negozianti di vino entrano nell'antica Todi, uno con 64 barili di vino e l'altro con 20; ciascun barile contiene la stessa quantità e qualità di vino. Non hanno però denaro a sufficienza per pagare, così il primo paga con 40 ducati e 5 barili, mentre il secondo lascia 2 barili e riceve anche un resto di 40 ducati. Quanto vale ogni barile e quanto paga di dazio, in ducati? [120; 10]
31. Determinare un numero di 2 cifre, *xy* sapendo che sommato al numero *yx* fornisce 99 e sottratto da *yx* fornisce 63. [81]
32. Determinare un numero di 3 cifre, *xyz*, sapendo che la somma delle sue cifre è 10, la cifra delle unità è doppia di quella delle decine e il numero di due cifre, ottenuto eliminando la cifra delle centinaia supera di 5 unità la stessa cifra delle centinaia. [712]

33. Determinare un numero di 3 cifre, *xyz*, sapendo che la cifra delle decine è uguale alla differenza fra la cifra delle centinaia e quella delle unità; la somma delle sue cifre è 8; la somma del numero con *zyx* è 808. [404]
34. Determinare un numero di 4 cifre, *txyz*, sapendo che la somma delle sue cifre è 16, la differenza fra il numero formato con le prime due cifre e quello formato con le rimanenti due è 29, la differenza fra la cifra delle decine e quella delle centinaia è doppia di quella delle unità, la differenza fra il numero e *zyxt* è 5634. [8152]
35. Come ogni sera, un gruppo di ragazzi e di ragazze si incontrano in un club di sportivi. Dopo un'ora le 15 ragazze che praticano basket vanno a disputare una partita; in tal modo il numero dei ragazzi è divenuto doppio rispetto a quello delle ragazze. Dopo un'altra ora i 45 ragazzi che praticano calcio vanno a disputare il loro torneo. Adesso il numero di ragazze è 5 volte quello dei maschi rimasti. Quante ragazze sono iscritte al club? [40]

Livello 3

36. Con riferimento al problema 24, senza variare gli altri dati, determinare il primo valore complessivo delle monete, per cui il problema ha soluzione. Quante sono? [€ 2,90; 17, 1, 2]
37. Klaus fa colazione sempre allo stesso bar, così ogni sabato mattina paga quel che ha consumato nella settimana. La prima settimana ha pagato € 7,80 per 3 toasts, 7 tazze di caffè e un pezzo di torta. La seconda settimana paga € 10,40 per 4 toasts, 10 tazze di caffè e un pezzo di torta. Se i prezzi sono rimasti invariati, prendendo solo 1 toast, 1 tazza di caffè e un pezzo di torta quanto pagherà? [€ 2,60]
38. Una compagnia aerea consente a ogni viaggiatore di portare bagaglio per un certo ammontare di chili, superato il valore massimo si paga una quota per ogni chilo in più. I coniugi Rossi hanno delle valigie che messe insieme pesano 63 chili così pagano € 9,00 e € 13,50 di extra rispettivamente. Dopo di loro un passeggero, anch'egli con valigie che complessivamente pesano 63 chili, paga € 65,00 di extra. Qual è l'ammontare massimo in chili di bagaglio gratuito per persona? Quanto costa un chilo extra? [24; € 1,50]

Problemi di Henry Dudeney, tratti da Amusements in Mathematics

39. Un panettiere pesa 5 sacchi di farina a due a due in tutti i modi possibili e ottiene i seguenti valori espressi in *kg*: 110, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 120 e 121. Quanto pesa ciascun sacco? [54, 56, 58, 29, 62]
40. Quando una guardia comincia a inseguire un ladro, questi ha già fatto 27 passi. Ogni volta che la guardia fa 5 passi il ladro ne fa 8, ma la distanza percorsa da 5 passi del ladro è uguale a quella percorsa da 2 passi della guardia. Dopo quanti passi suoi la guardia cattura il ladro? Quanti passi ha fatto il ladro? [30; 48]
41. Un ricco signore morì prima che sua moglie partorisse. Nel testamento aveva scritto che i suoi beni dovevano essere divisi nel seguente modo: $\frac{1}{3}$ alla moglie e $\frac{2}{3}$ al figlio se fosse stato maschio, $\frac{2}{3}$ alla moglie e $\frac{1}{3}$ al nascituro se fosse stato femmina. La moglie partorì una coppia formata da un maschio e da una femmina. Come il notaio dovette dividere il capitale lasciato, senza contravvenire al volere del padre? [2/7 alla moglie, 4/7 al figlio, 1/7 alla figlia]

Problemi tratti dai Mathematical puzzles di Sam Loyd

42. Mrs. O' Toole sta cercando di pesare se stessa, il suo bambino e il suo cane usando un solo cent. Sapendo che lei pesa 100 libbre più degli altri due insieme e che il cane pesa il 60% meno del bambino, quanto pesa quest'ultimo? [25 libbre]
43. Una signora diede ad un impiegato delle poste una banconota da 1 dollaro e gli disse: *Datemi alcuni francobolli da* 2 *cents,* 10 *volte tanti francobolli da* 1 *cent e il resto in francobolli da* 5 *cents*. Quanti francobolli di ciascun tipo ha ricevuto? [5 da 2 c, 50 da 1 c e 8 da 5 c]
44. Un giorno a casa di Tommy si festeggia il compleanno di uno dei 3 componenti la famiglia, di cui fanno parte la mamma e il papà. Il papà dice che quel giorno le loro tre età insieme facevano esattamente 70 anni; egli ha 6 volte l'età di Tommy; e quando tu avrai l'età della mamma le nostre tre età insieme saranno il doppio di oggi. Quanti anni ha la mamma oggi? [29 anni e 2 mesi]

45. Ho comprato delle uova dal droghiere e le ho pagate 12 cents, ma poiché erano molto piccole gli ho chiesto di aggiungerne due in regalo. In questo modo le uova mi sono venute a costare 1 cent di meno, per dozzina, rispetto al prezzo iniziale. Quante uova ho comprato? [16]
46. Un appaltatore che sta progettando la costruzione di un quartiere ha calcolato che deva pagare: 1100 per tappezziere ed imbianchino; 1700 per imbianchino ed idraulico; 1100 per idraulico ed elettricista; 3300 per elettricista e falegname; $ 5300 per falegname e muratore; 3200 per muratore e imbianchino. Quanto deve dare a ciascun artigiano? [T: $ 200; Im: $ 900; Id: $ 800; E: $ 300; F; $ 3000; M: $ 2300]
47. Tre mandriani si incontrarono e si scambiarono le seguenti frasi. Hank a Jim: *Ti darò* 6 *maiali in cambio di un cavallo e così tu avrai il doppio di animali rispetto a quanti ne avrò io*. Duke ad Hank: *Ti darò* 14 *pecore per un cavallo e tu avrai il triplo di animali rispetto a me*. Jim a Duke: *Ti darò* 4 *mucche in cambio di un cavallo e così avrai* 6 *volte il numero di quanti animali avrò io*. Quanti animali avevano in 3 prima di eventuali scambi? [H: 11; J: 7; D: 21]
48. *Quanti anni ha il ragazzo*? Chiese il controllore a un signore. Quello rispose: *Mio figlio ha* 5 *volte l'età di mia figlia e mia moglie* 5 *volte l'età di mio figlio, mentre io ho il doppio rispetto a mia moglie. La nonna, che oggi compie* 81 *anni, ha un età uguale alla somma delle nostre età*. Quanti anni ha il ragazzo? [5]
49. Charlie e Freddy portarono i loro colletti e polsini sporchi, 30 pezzi in tutto, a una lavanderia. Quando Freddy ritirò il suo pacco, che conteneva metà dei polsini e 1/3 dei colletti totali, pagò in tutto 27 cents. Sappiamo che il costo per il lavaggio di 4 polsini è uguale a quello di 5 colletti. Quanto pagherà Charlie per il resto della biancheria? [39 cents]

Quesiti di geometria

Lavoriamo insieme

- *Aumentando di* 3 *cm la base e diminuendo di* 2 *cm l'altezza di un rettangolo, l'area aumenta di* 7 cm^2. *Diminuendo di* 3 *cm la base e aumentando di* 2 *cm l'altezza di un rettangolo, l'area diminuisce di* 19 cm^2. *Quanto misura il perimetro*?
  Indichiamo con x e y rispettivamente le misure della base e dell'altezza del rettangolo e l'area misura xy. Applicando la prima "deformazione", esse divengono $(x + 3)$ e $(y – 2)$, e l'area diventa $(x + 3) \cdot (y – 2)$. Nel secondo caso invece le dimensioni sono $(x – 3)$ e $(y + 2)$ e l'area è $(x – 3) \cdot (y + 2)$. Il sistema risolutivo è perciò $\begin{cases}(x+3)\cdot(y-2)=xy+7\\(x-3)\cdot(y+2)=xy-19\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}xy-2x+3y-6=xy+7\\xy+2x-3y-6=xy-19\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x+3y=13\\2x-3y=-13\end{cases}$. Come si vede il sistema, quindi il problema, è indeterminato. Vi sono infiniti rettangoli che verificano quanto detto.
- Modifichiamo il problema mantenendo invariati gli altri dati e cambiando la seconda informazione: *diminuendo di* 2 *cm la base e aumentando di* 3 *cm l'altezza*,. Il sistema diviene così:
  $$\begin{cases}(x+3)\cdot(y-2)=xy+7\\(x-2)\cdot(y+3)=xy-19\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}xy-2x+3y-6=xy+7\\xy+3x-2y-6=xy-19\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x+3y=13\\3x-2y=-13\end{cases}.$$
  Risolvendo il sistema con un metodo a piacere troviamo: $x=-\frac{13}{5}, y=\frac{13}{5}$. Stavolta il sistema è privo di soluzioni perché una delle due misure è negativa.
- Modifichiamo ancora il testo del problema, variando il dato *diminuisce di* 19 in *aumenta di* 2. Il sistema è: $\begin{cases}(x+3)\cdot(y-2)=xy+7\\(x-2)\cdot(y+3)=xy+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}xy-2x+3y-6=xy+7\\xy+3x-2y-6=xy+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2x+3y=13\\3x-2y=8\end{cases}$, le cui soluzioni sono $x = 10$ e $y = 11$. Il perimetro è perciò $2 \cdot (10 + 11)$ *cm* = 42 *cm*.

Livello 1

50. Un triangolo ha un angolo doppio di un altro e la differenza fra il suo angolo maggiore e la somma degli altri due è 20°. Determinare la misura dei tre angoli. [30°; 50°; 100°]
51. Il perimetro di un triangolo isoscele è di 36 *cm*. Determinare le misure dei suoi lati, sapendo che il lato obliquo supera di 3 *cm* la base. [10 *cm*; 13 *cm*; 13 *cm*]
52. La somma di due angoli di un triangolo è 124°, la loro differenza è 32°. Quanto misura il terzo angolo? [26°]

53. Il perimetro di un parallelogramma è 20 *cm*. La differenza fra due lati consecutivi è 3,50 *cm*. Determinare le misure dei lati. [3,25 *cm*; 6,75 *cm*]
54. Un antico problema babilonese. In un rettangolo la somma fra una dimensione e 1/4 dell'altra è 7, sapendo che la somma delle due dimensioni è 10, determinarne le misure. [4; 7]
55. Un esagono convesso ha gli angoli a due a due uguali. La differenza fra uno degli angoli maggiori e uno degli angoli di misura mediana uguaglia la misura di uno degli angoli minori. Sapendo che la somma di uno degli angoli maggiori e di uno degli angoli minori supera di 40° il doppio della misura di uno degli altri due angoli, determinare le misure degli angoli dell'esagono. [Dati incoerenti]
56. Se nel problema precedente sostituiamo 40° con un altro dato, il problema ha soluzione? Se la risposta è affermativa dire quale valore dobbiamo sostituire. [No]
57. Determinare le misure delle dimensioni di un rettangolo, sapendo che aumentando una di esse di 3 *cm*, l'area aumenta di 22 cm^2, mentre diminuendo di 3 *cm* la stessa dimensione, l'area diminuisce di 33 cm^2. [Dati incoerenti]
58. Risolvere il problema precedente nel quale si diminuisca di 3 *cm* l'altra dimensione. [22/3 *cm*; 11 *cm*]
59. Gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sono uno i $\frac{3}{7}$ dell'altro. Determinare le misure di tali angoli. [27°; 63°]

Livello 2

60. Generalizzare il problema precedente al caso in cui il rapporto delle misure è $\frac{m}{n}$. $\left[\frac{m}{m+n}\cdot 90°;\frac{n}{m+n}\cdot 90°\right]$
61. Una scatola è costruita utilizzando completamente tre fogli di cartone i cui perimetri sono rispettivamente 20, 24 e 30. Sapendo che per fare ciò ogni foglio di cartone deve essere diviso in due rettangoli uguali, ognuno dei quali serve a formare una delle pareti della scatola, determinare le dimensioni della scatola. [4/3; 13/3; 6/3]
62. Di un trapezio isoscele *ABCD* sappiamo che la somma delle due basi supera di 12 *cm* la somma dei due lati obliqui. Sapendo inoltre che il perimetro è di 80 *cm* e la proiezione di uno dei lati obliqui sulla base maggiore è 8 *cm*, determinare le misure, in *cm*, dei lati del trapezio. [31; 15; 17]
63. Il triangolo *ABC* ha lati lunghi 10 *cm*, 11 *cm* e 12 *cm*. Con centro in ciascuno dei suoi vertici tracciamo tre circonferenze che sono a due a due tangenti esternamente. Determinare le lunghezze dei raggi. [4,5 *cm*; 5,5 *cm*; 6,5 *cm*]

Livello 3

64. Generalizzare il problema precedente al caso in cui i lati sono lunghi *a*, *b* e *c*. $\left[\frac{a+b-c}{2};\frac{a-b+c}{2};\frac{b+c-a}{2}\right]$
65. In relazione al problema precedente supposto che le lunghezze siano tutte intere, quando anche i raggi sono interi? [Se tutte le misure sono pari]

Problemi tratti dai Mathematical puzzles di Sam Loyd

66. Dopo aver percorso un tracciato a forma di triangolo equilatero, i tre marinai di una barca, fecero le seguenti osservazioni. Smith: *la barca ha percorso i primi* 3/4 *della gara in* 3/4 *d'ora*. Jones: *la barca ha percorso i* 3/4 *finali del tragitto in* 4 *ore e mezza*. Brown: *per percorrere il lato medio della gara abbiamo impiegato* 10 *minuti in più rispetto al primo lato*. Se i tre lati sono stati percorsi ciascuno a velocità costante, in quante ore fu completato il tragitto? [5,5]

Quesiti relativi al cambiamento di base

67. Un numero scritto in una certa base *b* è $[68]_b$ e in un'altra base *c* è $[54]_c$. Sapendo che $c - b = 2$, determinare il numero scritto in base 10 e le 2 basi. [Dati incoerenti]
68. Nel problema precedente variamo $[55]_c$ e $c - b = 3$. [80; b =12, c = 15]
69. Un numero scritto in una certa base *b* è $[91]_b$ e nella base *c* consecutiva è $[89]_c$. Determinare il numero scritto in base 10 e le 2 basi. [145; b =16, c = 17]
70. Un numero scritto in una certa base *b* è $[32]_b$ e nella base *c* doppia è $[16]_c$. Determinare il numero scritto in base $\frac{b}{2}$ e il valore di *b*. [1110; 4]

71. Un numero si può scrivere anche $[47]_b$, $[53]_c$ e $[69]_d$. Determinare le 3 basi sapendo che la somma di due di esse uguaglia il doppio della terza. [b =11, c = 9; d = 7]

Quesiti di fisica

72. Un punto materiale ha già percorso 3 *m*, quando comincia a muoversi di moto rettilineo uniforme a velocità costante pari a 2 *m*/*s*. Un altro punto materiale segue il primo lungo la stessa traiettoria, con velocità 3*m*/*s*, ma parte quando il primo ha percorso 3 *m*. Dopo quanto tempo il secondo punto raggiunge il primo e quanta strada ha percorso? [3*s*; 9*m*]
73. In una gara gli atleti partono a distanza di 5 minuti l'uno dall'altro. Un atleta mantiene una velocità costante di 10 *km*/*h*, l'atleta che parte dopo di lui lo raggiunge 25 minuti dopo essere partito, qual è la velocità di quest'ultimo? Quanta strada hanno percorso i due? [12 *km*/*h*; 5 *km*]
74. Armando e Giada partono da uno stesso punto, uno a piedi e l'altra in bici, effettuando lo stesso percorso a velocità costante. Ad un certo punto ci si accorge che se Armando avesse corso tre volte più veloce gli rimarrebbe da percorrere solo la metà di quello che gli rimane; ugualmente se Giada avesse corso metà più veloce, la sua distanza dalla meta sarebbe tre volte più vicina che adesso. Quanto vale il rapporto fra la velocità di Giada e quella di Armando? [20/7]
75. Due podisti partono allo stesso momento effettuando lo stesso percorso entrambi in un tempo complessivo di 3 ore. Sappiamo che ciascuno si ferma a riposare una sola volta; il secondo corre per un tempo che è il triplo del tempo che il primo dedica al riposo; il primo corre per un tempo che è doppio di quello che il secondo dedica al riposo. Determinare per quanto tempo si riposano i due. [36^m; 72^m]
76. Un ciclista percorre un circuito prima a velocità costante per 15 *s*, poi accelera costantemente, a = 2,5 m/s^2, percorrendo un altro giro in 7 *s*. Vogliamo sapere la velocità costante e la lunghezza del circuito. [≈ 7,7 *m*/*s*; ≈ 115 *m*]

Problemi tratti dai Mathematical puzzles di Sam Loyd

77. Jack e Jill correvano su e giù per una collina alta 440 yarde dalla base alla vetta. Jack raggiunse per primo la vetta, ripartì immediatamente per scendere a valle e incontrò Jill, che stava salendo, a 20 yarde dalla vetta. Infine, precedette Jill di mezzo minuto alla base della collina. Sapendo che le velocità di entrambi i corridori erano una volta e mezzo maggiori in discesa rispetto alla salita, in quanto tempo Jack portò a termine il percorso di andata e ritorno? [6^m 18^s]
78. Il signor De Foie Gras racconta che nel corso di una certa gara con la sua auto percorse 135 miglia nelle prime due ore e 104 nelle due ore successive. Supponendo che la potenza della macchina diminuì costantemente durante le 4 ore della gara, così che le miglia percorse in ciascuna ora diminuirono della stessa quantità. Che distanza percorse la macchina in ogni ora? [71,375; 63,625; 55,875; 48,125]

Giochiamo alla matematica

- I quadrati magici sono fra gli esempi più antichi di applicazione ricreativa delle matematiche. Spesso erano usati come oggetti "mistici" e, addirittura, in alcune antiche civiltà erano considerati amuleti per difendersi dalla peste o da altre simili malattie. Il più antico esempio si trova in Cina e, secondo una leggenda, venne rivelato a un ignoto personaggio da una tartaruga. Eccolo:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

La particolarità di tali quadrati consiste nel fatto che la somma di tutti i termini che appartengono a una stessa riga, a una stessa colonna o a una stessa diagonale è costante. In questo caso il valore costante è 15. In seguito ci si è sbizzarriti a risolvere i più svariati problemi su questi quadrati: la determinazione di quanti quadrati di un certo ordine vi fossero; le variazioni sul tipo di numeri che dovevano costituire il quadrato da numeri consecutivi, come nell'esempio precedente, a numeri aventi una differenza costante maggiore di 1, a numeri tutti primi o tutti multipli di un numero dato e così via. Non trattiamo in dettaglio i quadrati magici, che vengono ampiamente trattati su qualsiasi trattato di matematica ricreativa, ma piuttosto cerchiamo di costruirne uno di ordine 3, in modo razionale e non per tentativi. In generale vogliamo sistemare 9 numeri diversi o no, in modo che le somme per riga, per colonna e per diagonale coincidano. Così, dati 9 numeri, li disponiamo su una tabella 3 × 3.

A	B	C
D	E	F
G	H	I

Scriviamo le relazioni derivate dal quadrato: sono 8 equazioni in 9 incognite.

$$\begin{cases} A+B+C=S \\ D+E+F=S \\ G+H+I=S \\ A+E+I=S \\ C+E+G=S \\ A+D+G=S \\ B+E+H=S \\ C+F+I=S \end{cases}$$

A ben considerarle, però, ci accorgiamo che in realtà l'ultima si può eliminare in quanto si può ottenere mediante le altre. Infatti: $(A + B + C) + (D + E + F) + (G + H + I) – (A + D + G) – (B + E + H) = C + F + I$. Sono quindi 7 equazioni in 9 incognite e perciò il sistema è indeterminato. Allora scegliamo due incognite a piacere, H e I, saranno i nostri parametri, e in funzione di esse ricaviamo tutte le altre. Ricaviamo G dalla terza equazione e sommiamo tra loro la quarta, la quinta e la settima, dopo avere isolato A, C, B:

$$\begin{cases} A+B+C=S \\ D+E+F=S \\ G=-H-I+S \\ A=-E-I+S \\ C=-E-G+S \\ A+D+G=S \\ B=-E-H+S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B+C=3S-3E-I-G-H \\ D+E+F=S \\ G=-H-I+S \\ A=-E-I+S \\ C=-E-G+S \\ A+D+G=S \\ B=-E-H+S \end{cases}$$

ma $A + B + C = S$ e $– I – G –H = –S$, quindi

$$\begin{cases} S=3S-3E-S \\ D+E+F=S \\ G=-H-I+S \\ A=-E-I+S \\ C=-E-G+S \\ A+D+G=S \\ B=-E-H+S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E=\frac{S}{3} \\ D+E+F=S \\ G=-H-I+S \\ A=-\frac{S}{3}-I+S \\ C=-\frac{S}{3}-G+S \\ -\frac{S}{3}-I+S+D-H-I+S=S \\ B=-E-H+S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E=\frac{S}{3} \\ -\frac{2}{3}S+H+2I+\frac{S}{3}+F=S \\ G=-H-I+S \\ A=-\frac{S}{3}-I+S \\ C=-\frac{S}{3}+H+I-S+S \\ D=-\frac{2}{3}S+H+2I \\ B=-\frac{S}{3}-H+S \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{2}{3}S-I \\ B=\frac{2}{3}S-H \\ C=H+I-\frac{S}{3} \\ D=-\frac{2}{3}S+H+2I \\ E=\frac{2}{3} \\ F=-H-2I+\frac{4}{3}S \\ G=-H-I+S \end{cases}$$

Possiamo quindi ottenere diversi quadrati magici, fissando ogni volta i valori di S, H, I con la condizione che i numeri che li compongono siano interi, e quindi S sia divisibile per 3, e, inoltre, H e I diano sempre luogo a numeri positivi.

- Nel già citato *Problemes plaisants et delectables qui se font par le nombres*, scritto nel 1612 da Gaspard Bachet, viene proposto il seguente gioco di "magia" per determinare cinque numeri pensati da qualcuno, che noi indichiamo con a, b, c, d, x. Il "mago" per determinare i cinque numeri deve essere informato del risultato delle seguenti somme: $a + b = s1$, $c + d = s2$, $x + a = s3$, $b + c = s4$ e $d + x = s5$.

Vediamo la tecnica "magica" che usa il nostro mago. Egli effettua le seguenti operazioni: $s1 + s2 + s3 – (s4 + s5)$, così ottiene il doppio del primo numero pensato, infatti le precedenti operazioni equivalgono al risultato dell'espressione: $(a + b) + (c + d) + (x + a) – [(b + c) + (d + x)] = 2a$. Poi con il metodo di sostituzione ritroverà facilmente gli altri 4 valori.

Verifichiamo questo procedimento con i seguenti valori: $a = 7$, $b = 11$, $c = 12$, $d = 15$ e $x = 21$, scelti in modo crescente per comodità, anche se non è necessario. Il mago viene a conoscere le seguenti somme: $s1 = 18$, $s2 = 27$, $s3 = 28$, $s4 = 23$ e $s5 = 36$. Con l'operazione precedentemente scritta egli ottiene

$a = \frac{18+27+28-(27+36)}{2} = \frac{14}{2} = 7$. Trova poi $b = s1 - a = 18 - 7 = 11$, $c = s4 - b = 23 - 11 = 12$, $d = s2 - c = 27 - 12 = 15$ e infine $x = s3 - a = 28 - 7 = 21$.

Attività

1. Determinare tutti i quadrati magici di ordine 3 formati con i primi 9 naturali.
2. Completare il seguente quadrato magico di ordine 4, formato con i primi 16 naturali.

16		2	13
5	10		
	6		12
4			

3. Completare il seguente quadrato magico di ordine 5, formato dai primi 25 naturali. Attenzione, l'elemento centrale è sempre un terzo della somma di tutti e 25 elementi.

	24	1		
23		7		16
	6		20	
10	12		21	
11		25	2	9

4. Generalizzare il trucco di Bachet a 7 numeri.

Per la prova Invalsi

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato nelle prove Invalsi 2003. *La tabella mostra una relazione fra le due quantità x e y. Quale fra le seguenti espressioni algebriche esprime tale relazione*?
A) $y = x + 3$ B) $y = 3x + 2$ C) $x = 2y + 3$ D) $y = 2x + 3$ E) $y = 3x + 1$

x	y
0	3
1	5
2	7
3	9

Basta provare sostituendo i valori nelle 5 espressioni. Così vediamo, che A) non va bene perché $1 + 3 = 4$ e perciò non va bene la seconda coppia; B) non va bene perché $3 \cdot 0 + 2 = 2$, e non va bene la prima coppia; anche in C) non va bene la prima coppia: $2 \cdot 3 + 3 = 9$. Si faccia attenzione nella sostituzione, dato che la relazione è scritta in modo diverso dalle altre; infine in E) non funziona la prima coppia: $3 \cdot 0 + 1 = 1$. Quindi la risposta corretta è D).

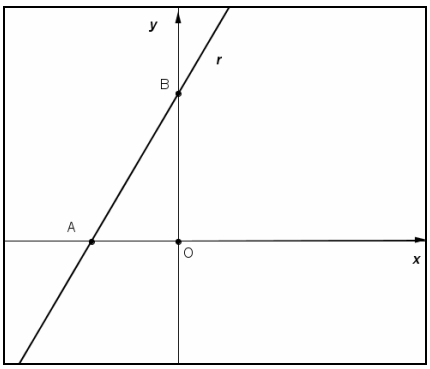
1. (Invalsi 2005) Osserva la seguente tabella di valori. Quale tra le seguenti funzioni di primo grado è rappresentata dalla tabella? A) $y = x - 4$ B) $y = x + 4$ C) $x = 2y + 7$ D) $y = 2x - 5$ [A]

x	y
1	– 3
5	1
6	2

2. (Invalsi 2005) Con uno stesso tipo di mattonelle quadrate si devono pavimentare tre stanze aventi tutte la stessa larghezza ma diversa lunghezza. Per la prima stanza servono 120 mattonelle; la seconda stanza ha una lunghezza pari ai 3/4 della lunghezza della prima stanza e per la terza stanza servono 150 mattonelle. Se la lunghezza della seconda stanza è 6 *m*, quale sarà la lunghezza della terza stanza?
A) 3,6 *m* B) 6,4 *m* C) 10 *m* D) 15 *m* [C]
3. (Invalsi 2007) La seguente tabella esprime una relazione tra due grandezze *x* e *y*:

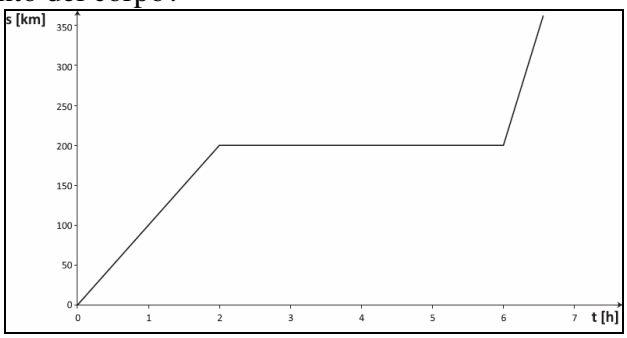
x	y
1	5
3	9
4	11
6	15

Quale delle seguenti equazioni esprime formalmente la relazione tra *x* e *y*? [A]
A) $y = 2x + 3$ B) $y = 2x - 3$ C) $y = 3x + 1$ D) $y = 4x$

4. (Invalsi 2013) Osserva la seguente figura. 

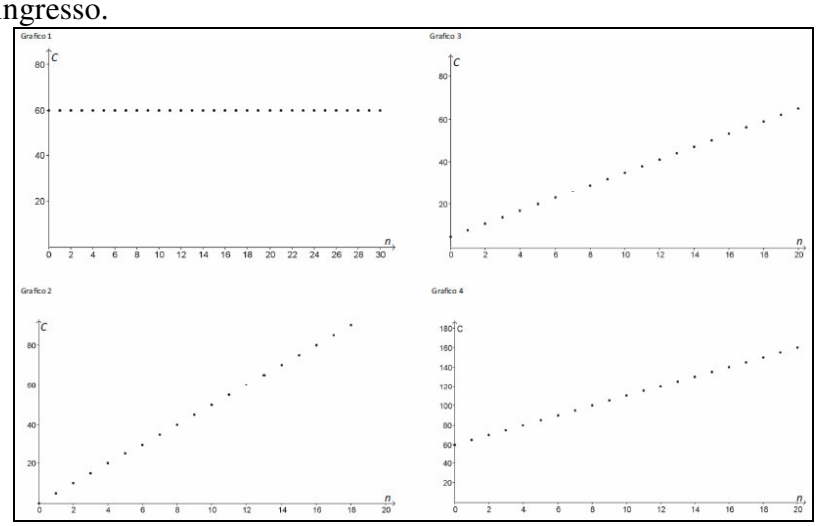
Le coordinate di A sono $(-3; 0)$ e l'area del triangolo AOB è 9. Quale fra le seguenti equazioni rappresenta la retta r?
A) $y = 2x + 6$ B) $y = -2x - 6$ C) $y = 3x + 9$ D($y = -3x - 9$ [A]

5. (Invalsi 2014) Il seguente grafico rappresenta le posizioni assunte da un corpo in funzione del tempo. La posizione s è espressa in chilometri (km) e il tempo t in ore (h). Quale fra le seguenti è una corretta descrizione del movimento del corpo? [D]



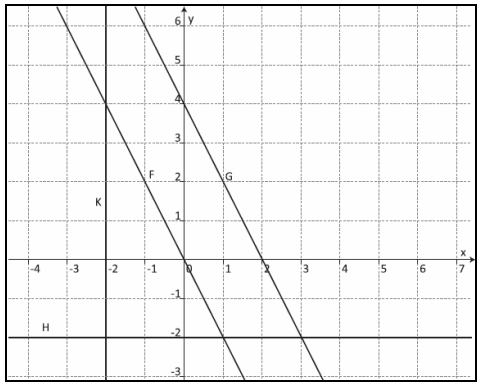
A) Si muove con velocità costante per 2 ore, poi si ferma per 6 ore e infine riparte con una velocità maggiore di quella con cui si è mosso nelle prime 2 ore;
B) Si muove con velocità costante per 2 ore, poi si ferma per 4 ore e infine riparte con una velocità minore di quella con cui si è mosso nelle prime 2 ore;
C) Si muove con velocità costante per 2 ore, poi si ferma per 6 ore e infine riparte con una velocità minore di quella con cui si è mosso nelle prime 2 ore;
D) Si muove con velocità costante per 2 ore, poi si ferma per 4 ore e infine riparte con una velocità maggiore di quella con cui si è mosso nelle prime 2 ore

6. (Invalsi 2014) Per frequentare una palestra Paolo deve pagare quest'anno una quota fissa di 60 euro e 5 euro per ogni ingresso.



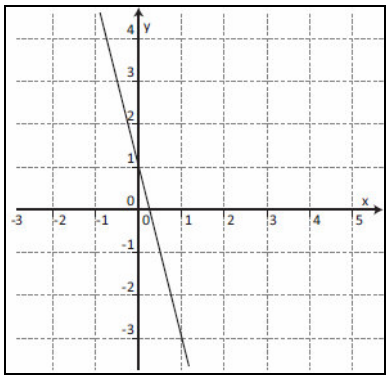
a) Quale fra i seguenti grafici descrive il costo C (in euro) della palestra in funzione del numero n di ingressi? b) Paolo ha a disposizione 200 euro. Se si iscrive alla palestra, qual è il numero massimo di ingressi a cui ha diritto quest'anno? c) Scrivi la formula che esprime il costo C della palestra in funzione del numero n di ingressi. [a) Grafico 4; b) 28; c) $C = 60 + 5n$]

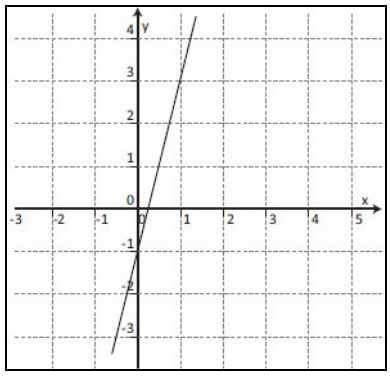
7. (Invalsi 2014) Sul seguente piano cartesiano sono rappresentate le rette F, G, H, K.

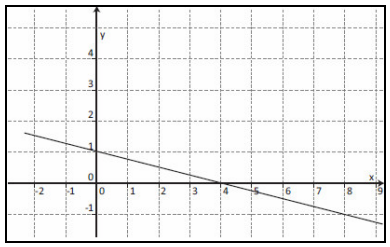


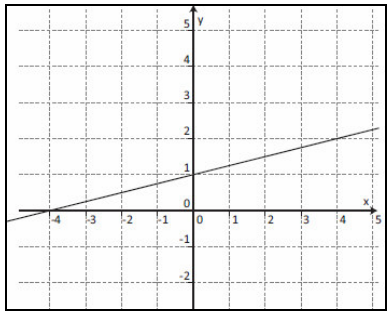
Associa a ciascuna delle equazioni seguenti la retta corrispondente
a) $y = -2x + 4$ b) $y = -2x$; c) $y = -2$ [a) G; b) F; c) H]

8. (Invalsi 2015) Uno dei seguenti grafici rappresenta la funzione definita da $y = 1 - 4x$ nell'insieme dei numeri reali. Quale? [A]

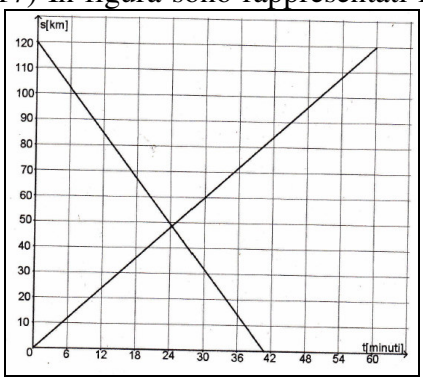
A) 

B) 

C) 

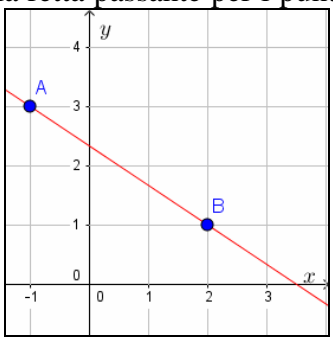
D) 

9. (Invalsi 2015) Nel piano cartesiano Oxy le rette di equazioni $y = 3x - 5$ e $y = k/2\ x - 1$ sono tra loro parallele; il valore di k è A) –3 B) –6 C) 3 D) 6 [D]

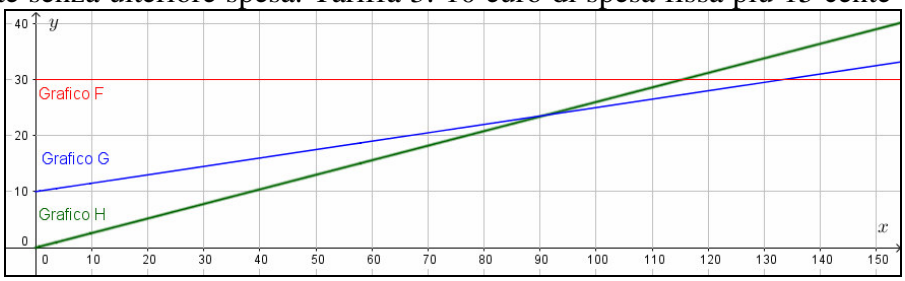
10. (Invalsi 2017) In figura sono rappresentati i grafici della posizione s (in km) in funzione del tempo t (in minuti) 

di due treni in moto rettilineo uniforme su due binari paralleli. a. Basandoti sulle informazioni fornite nei grafici, indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F). 1. Dopo 30 minuti dall'istante t = 0, uno dei due treni ha percorso circa 30 km 2. Dopo circa 25 minuti dall'istante t = O i due treni passano per la stessa posizione nel sistema di riferimento scelto 3. i due treni si muovono in versi opposti O. b. Anna afferma che, in uno stesso intervallo di tempo, i due treni percorrono la stessa distanza. Anna ha torto. Perché? [a. 1 F; 2 F; 3 V; b. Per esempio nei primi 12 minuti il treno che parte da 0 ha percorso circa 25 Km, l'altro circa 35 Km]

11. (Invalsi 2017) Considera l'equazione $y = 2x + k$. Per quale valore di k essa rappresenta una retta che passa per il punto di coordinate (l; 5)? [3]

12. (Invalsi 2017) Considera la retta passante per i punti A (–1; 3) e B (2; 1). La pendenza (o coefficiente angolare) della retta AB è 

A) –3/2 B) –2/3 C) 3/2 D) 2/3

13. (Invalsi 2017) Nel 2008 un gestore telefonico aveva proposto a Marcella tre possibili tariffe mensili per le telefonate nazionali da telefono fisso: Tariffa 1: telefonate a 26 centesimi di euro l'una. Tariffa 2: 30 euro con chiamate illimitate senza ulteriore spesa. Tariffa 3: 10 euro di spesa fissa più 15 centesimi di euro per ogni telefonata. 

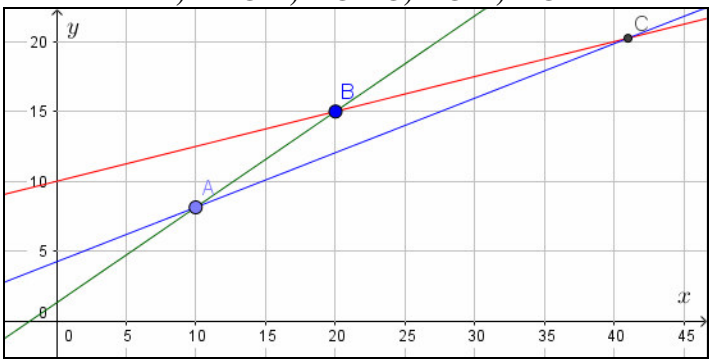
In figura sono disegnati i grafici che rappresentano le tre tariffe: in ascissa è riportato il numero n di telefonate e in ordinata il costo C in euro. a. Determina il nome del grafico (F, G o H) che corrisponde a ciascuna tariffa. b. Le seguenti formule esprimono, per le tariffe t e 2, il costo C (in euro) in funzione del numero n di telefonate effettuate: Tariffa 1: $C = 0{,}26n$; Tariffa2: $C = 30$; Scrivi la formula per la tariffa 3. c. Marcella dice che, qualunque sia il numero di telefonate, la tariffa 1 costa sempre meno delle altre due. Marcella ha torto. Perché?
[a. H, F, G; b. $10 + 0{,}15n$; c. si ha $0{,}26 \cdot 116 > 30$; $0{,}26 \cdot 91 > 10 + 0{,}15 \cdot 91$]

14. (Invalsi 2017) In una funzione del tipo $f(x) = ax + b$, il numero reale a si dice pendenza. Inoltre si dice zero di una funzione f ogni valore di x per cui $f(x) = 0$. Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F). a. Nelle funzioni del tipo $f(x) = b$, la pendenza è 0 b. Le funzioni del tipo $f(x) = b$, con $b \neq 0$, non hanno zeri c. Lo zero della funzione $f(x) = x - 5$ è 5 d. Lo zero della funzione $f(x) = 3x$ è –3. [V; V; V; F]

15. Un autotrasportatore propone le seguenti tariffe: un fisso di € 20,00 al viaggio e € 0,25 al *km*; oppure € 0,50 al chilometro. Per quanti *km* al minimo conviene la prima opzione? [80]

16. Fra le seguenti leggi, quale rappresenta l'abbonamento a una palestra che prevede € 20,00 al mese e € 3,50 per ogni volta? A) $20{,}00 + 3{,}50$ B) $20{,}00x + 3{,}50$ C) $20{,}00 + 3{,}50x$ D) $20{,}00 - 3{,}50\ x$ [C]

17. Gabriella ha un abbonamento telefonico per il quale paga € 0,10 come scatto alla risposta ed € 0,05 al minuto. Tenuto conto che le sue telefonate durano in media 4 minuti, se non vuole pagare più lo scatto alla risposta, scegliendo una tariffa in cui paga € x al minuto, quanto dovrebbe essere al massimo x perché gli risulti più conveniente? [0,30]

18. Nel grafico sono presentate 4 opzioni relative a un certo servizio, possiamo dire che la spezzata che misura la soluzione più economica al variare del numero di prestazioni è [D]
A) ABC B) ACB C) BC D) AC


19. Quale fra le seguenti leggi rappresenta il moto di una particella che si muove di moto rettilineo uniforme con velocità espressa in *m*/*s*, che in *km*/*h* risulta superiore a 50? A) $s = 10t + 20$ B) $s = 15t - 20$; C) $s = -14t + 3$; D) $s = 50 + 4t$ [B]
20. Le leggi $y = 0{,}3x + 1$ e $y = 0{,}2x + 5$, rappresentano il modello di due strade di montagna. Quale delle due è più ripida? [La prima]

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi

1. Considerate tutti i numeri interi per cui $m^2 - n^2 = 1995$ e trovate il massimo valore che può assumere n. [997]
2. Per quale valore di m il sistema $\begin{cases} 13x + 11y = 700 \\ mx - y = 1 \end{cases}$ ammette un'unica soluzione in cui entrambi x e y sono interi? Determinare tale soluzione. [$m = 6$; $x = 9$, $y = 53$]

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
K = Kangorou
MT = Mathematics Teacher, rivista della NCTM
OMI = Olimpiadi della matematica italiane

Lavoriamo insieme

Il seguente quesito è stato pubblicato nel numero di Febbraio 1995 sulla rivista Mathematics Teacher.
Il numero di cavalli e pecore, nella città di Farmland è tale che il rapporto della differenza e della somma è 1/7, *e il rapporto della somma e del prodotto è* 7/24. *Quanti cavalli e pecore ci sono a Farmland?*

Indichiamo i cavalli con c e le pecore con p. Traduciamo le condizioni nel seguente sistema $\begin{cases} \dfrac{c-p}{c+p} = \dfrac{1}{7} \\ \dfrac{c+p}{cp} = \dfrac{7}{24} \end{cases}$.

Risolviamolo: $\begin{cases} 7c - 7p = c + p \\ 24c + 24p = 7cp \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \dfrac{4}{3}p \\ \cancel{24}^{8} \cdot \dfrac{4}{\cancel{3}} p + 24p = 7 \cdot \dfrac{4}{3} p \cdot p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \dfrac{4}{3}p \\ \cancel{56}^{2} p = \dfrac{\cancel{28}}{3} p^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \dfrac{4}{3}p \\ 6 = p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 8 \\ p = 6 \end{cases}$.

1. (AHSME 1975) Per quali valori di m, numero reale, il sistema $\begin{cases} y = mx + 3 \\ y = (2m-1) \cdot x + 4 \end{cases}$ ha almeno una soluzione? [$m \neq 1$]
2. (AHSME 1988) Determinare i valori di b e c affinché valga la seguente identità: $(x + 2) \cdot (x + b) = x^2 + cx + 6$. [$b = 3$; $c = 5$]
3. (AHSME 1973) Per quali valori di n, numero reale, il sistema $\begin{cases} nx + y = 1 \\ ny + z = 1 \\ x + nz = 1 \end{cases}$ è privo di soluzioni? [–1]
4. (AHSME 1994) In un sacchetto sono messe delle biglie alcune di colore rosso e altre blu. Se si elimina una biglia rossa, un settimo delle rimanenti biglie saranno rosse, se invece se ne eliminano due blu un quinto delle rimanenti biglie saranno rosse. Quante biglie vi sono nel sacchetto? [22]
5. (AHSME 1986) John partecipa a una gara matematica formata da 30 domande a risposta multipla, nella quale si assegnano 5 punti per ogni risposta esatta, 0 punti per ogni risposta sbagliata e 2 punti per ogni risposta non data; ottenendo 93 punti. L'anno scorso invece si assegnavano 30 punti di partenza, 4 punti per ogni risposta esatta, 0 punti per ogni risposta non data e si perdeva 1 punto per ogni rispo-

sta sbagliata. Perciò se fosse stato giudicato con il punteggio valido l'anno scorso avrebbe ottenuto 84 punti. A quante domande non ha risposto Giovanni, quest'anno? [9]

6. (AHSME 1955) Dati 4 numeri naturali se ne scelgono a caso tre e si effettua la loro media aritmetica, a questo valore si aggiunge il quarto numero. Dopo aver effettuato le precedenti operazioni per tutte le possibili scelte dei 3 numeri otteniamo 29, 23, 21 e 17. Quali sono i 4 numeri iniziali? [3; 9; 12; 21]

Lavoriamo insieme

Il seguente quesito è stato pubblicato nel numero di Febbraio 1997 della rivista Mathematics teacher.
Le ultime quattro cifre di un numero telefonico sono tali che la somma delle prime due uguaglia quella delle altre due. Inoltre, la somma della prima e dell'ultima è il doppio della somma delle altre e le prime due formano un numero che è doppio di quello formato dalle altre due. Il numero non ha zeri. Quali sono le cifre?

Indichiamo le cifre con *abcd*, traduciamo in equazioni le condizioni date: $\begin{cases} a+b=c+d \\ a+d=2\cdot(b+c) \\ 10a+b=2\cdot(10c+d) \end{cases}$, spieghiamo la terza equazione, tenendo conto della scrittura decimale posizionale per cui, per esempio 73 = 7 · 10 + 3. Il sistema ha più incognite che equazioni, però teniamo conto che le soluzioni debbono essere numeri interi compresi tra 1 e 9. Risolviamo il sistema:

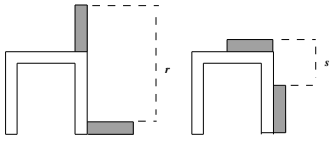
$$\begin{cases} a=c+d-b \\ c+d-b+d-2b-2c=0 \\ 10\cdot(c+d-b)+b-20c-2d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=c+d-b \\ c=2d-3b \\ 10\cdot(2d-3b)+10d-10b+b-20\cdot(2d-3b)-2d=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=c+d-b \\ c=2d-3b \\ 20d-30b+8d-9b-40d+60b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=c+d-b \\ c=2d-3b \\ 21b=12d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=c+d-b \\ c=2d-3b \\ 7b=4d \end{cases}$$

Consideriamo l'ultima equazione, che ovviamente negli interi cercati, ha l'unica soluzione $b = 4$ e $d = 7$. Da cui: $\begin{cases} a=5 \\ b=4 \\ c=2 \\ d=7 \end{cases}$ e il numero cercato è 5427.

7. (AHSME 1951) Tom, Dick e Harry intrapresero un viaggio di 100 miglia con una moto. Poiché la moto permetteva di portare solo due persone, all'inizio Tom e Harry andarono con la moto a una velocità di 25 miglia orarie, mentre Dick andò a piedi alla velocità di 5 miglia orarie. Dopo aver percorso una certa distanza, Harry scese dalla moto continuando a camminare a piedi verso la meta alla velocità di 5 miglia orarie, mentre Tom tornò indietro a prendere Dick, sempre alla stessa velocità media di 25 miglia orarie. In questo modo i ragazzi arrivarono contemporaneamente alla loro meta. Si vuol sapere quante ore impiegarono per il loro viaggio. [8]
8. (AHSME 1973) Tre rubinetti A, B e C aperti al massimo mandano acqua in uno stesso serbatoio sempre con la stessa portata. Quando tutti e tre sono aperti il serbatoio si riempie in un'ora. Se vengono aperti solo A e C si riempie in un'ora e mezza, mentre aprendo solo B e C sono necessarie 2 ore. In quante ore si riempie il serbatoio utilizzando solo i rubinetti A e B? [1,2]
9. (AHSME 1955) Henry esce da casa fra le 8 e le 9, quando le lancette dei minuti e delle ore sono sovrapposte. Ritorna fra le 14 e le 15 quando le lancette dei minuti e delle ore formano un angolo di 180°. Quanto tempo sta fuori Henry? [6]
10. (AHSME 1986) Due pezzi di legno identici vengono disposti come mostrato nella prima figura, su un tavolo di una certa altezza. In questo modo $r = 32$ pollici. Se invece si dispongono nel secondo modo

si ha: $s = 28$ pollici. Quanto è alto il tavolo? [30 pollici]



11. (OMI2013) Ad un convegno partecipano 30 scienziati ciascuno dei quali è un matematico, o un fisico, o un chimico o un biologo. I fisici e i biologi, insieme, sono la metà dei matematici; i fisici e i chimici, insieme, sono il doppio dei biologi. Inoltre, di fisici ce n'è almeno uno. Quanti sono i matematici? [18]
12. (K2015) Giovanna ha comprato 3 giocattoli. Per il primo ha pagato € 1 più della metà dei soldi che aveva. Aggiungendo € 2 a metà dei soldi che le erano rimasti ha comprato il secondo giocattolo e aggiungendo € 3 alla metà di quello che le era rimasto dopo aver acquistato i primi due giocattoli ha comprato il terzo. In questo modo ha speso tutti i soldi che aveva. Quanti euro ha speso in tutto? [A]
A) 34 B) 36 C) 45 D) 65 E) 100
13. (K2015) Un treno ha 12 carrozze, ciascuna divisa in uno stesso numero di scompartimenti. Michele viaggia sulla terza carrozza, e, contando a partire dal primo dopo il locomotore, si trova nel 18-simo scompartimento. Sofia siede nella settima carrozza e, sempre contando a partire dal locomotore, il suo scompartimento è il 50-simo. Quanti scompartimenti ci sono in ogni carrozza? [B]
A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 12

Questions in English

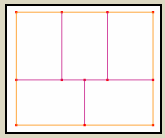
Working together

Published in the issue of December 1995 of Mathematics Teacher. *According to NCAA data,* 52 *percent of all student–athletes graduate:* 55 *percent of female student–athletes graduate and* 48 *percent of male student–athletes graduate. What is the ratio of the number of male student–athletes to the number of female student–athletes?*
We call f and m respectively, the number of female and male student–athletes, we wish to compute m/f. We know that the graduates are formed by 55% of female and 48% of male, and they are 52% of the total, which means: $\frac{0,55f + 0,48m}{m+f} = 0,52 \Rightarrow 0,55f + 0,48m = 0,52m + 0,52f \Rightarrow 0,04m = 0,03f \Rightarrow 4m = 3f \Rightarrow m/f = 3/4$.

14. (MT1993) One shepherd said to another: "Give me 8 sheep and we'll have an equal number". The other answered: "No, you give me 8 sheep and then I will have twice as many as you." How many sheep did each shepherd have? [40; 56]
15. (MT1993) For what real values of a and b does the system of equations $\begin{cases} 3x + ay = 6 \\ bx + 4y = 7 \end{cases}$ have a solution? [$ab \neq 12$]
16. (MT1993) An airline allows a passenger's luggage to weigh x pounds and charges an additional fee for each excess pound. Mr. and Mrs. Byrd had a combined luggage weight of 105 pounds and were charged \$ 1.00 and \$ 1,50, respectively. A third passenger also had 105 pounds of luggage and was charged \$ 6.50 for the excess weight. How many pounds are allowed free of charge for each passenger? [40 pounds]
17. (MT1995) The sum of three numbers is 98. the ratio of the first to the second is 2:3, and the ratio of the second to the third is 5:8. what is the second number? [30]

Working together

This question was assigned at AHSME in 1997.
A rectangle with perimeter 176 *is divided into five congruent rectangles as shown in the diagram. What is the perimeter of one of the five congruent rectangles*?



Let x and y denote the width and height of one of the five rectangles, with $x < y$. Then $5x + 4y = 176$ and $3x = 2y$. Solve simultaneously to get $x = 16$ and $y = 24$. The perimeter in question is $2 \cdot 16 + 2 \cdot 24 = 80$.

18. (K2002) Five boys weighed themselves in pairs in all possible combinations. The measured weights were 90 kg, 92 kg, 93 kg, 94 kg, 95 kg, 96 kg, 97 kg, 98 kg, 100 kg, and 101 kg. What was the total weight of the five boys? A) 225 kg B) 230 kg C) 239 kg D) 240 kg E) 250 kg [B]
19. (K2003) Jeffrey throws three darts at each of four targets. He scores 29 points on the first target, 43 on the second and 47 on the third. How many points does Jeffrey score on the last target? [C] A) 31 B) 33 C) 36 D) 38 E) 39
20. (K2007) A three – digit number has been divided by 9. The sum of the digits of the result was 9 less than the sum of the digits of the number. For how many three-digit numbers would this be true? [B] A) 11 B) 5 C) 4 D) 2 E) 1

L'Antologia

Vogliamo presentare uno dei primi documenti in cui compare l'idea di determinante per la risoluzione di un sistema lineare.

Da una lettera di Gottfried Wilhelm Leibniz al Marchese de l'Hopital del 28 Aprile 1693.

«Poiché dite di avere difficoltà a credere che è sia più generico sia più conveniente usare numeri invece di lettere, non devo essermi ben spiegato. Non vi è alcun dubbio per la generalità se si considera che è possibile usare 2, 3, ecc., allo stesso modo di a o b, stabilito che sia sottinteso che questi ultimi non sono realmente dei numeri. Così 2 . 3 [Leibniz indica in questo modo il prodotto] *non denota 6 quanto piuttosto ab. Relativamente alla convenienza, basta dire che io stesso ne faccio uso, specialmente in lunghi e difficili calcoli dove è facile commettere errori. A parte la convenienza di verificare poi con numeri e perfino con la regola del nove, ho trovato il loro uso di grande vantaggio persino nell'analisi. In particolare vi è questa straordinaria scoperta, della quale non ho ancora parlato a nessuno.*
Quando si ha bisogno di molte lettere, non è vero che non tutte queste lettere esprimono le relazioni fra le grandezze che rappresentano, mentre usando i numeri siamo capaci di esprimere tali relazioni. Per esempio consideriamo tre semplici equazioni in due incognite, con lo scopo di eliminare le due incognite e ottenere una legge generale. Supponiamo che

$$10 + 11x + 12y = 0 \text{ (1) e } 20 + 21x + 22y = 0 \text{ (2) e } 30 + 31x + 32y = 0 \text{ (3)}$$

dove i pseudo numeri di due cifre che uso, mi dicono, il primo l'equazione in cui ci troviamo, il secondo la lettera a cui appartiene. Così eseguendo i calcoli troviamo un'armonia che non solo serve nelle verifiche ma anche ci fa pensare a prima vista ad alcune regole o teoremi. Per esempio eliminando la y dalla prima e seconda equazione si ha: $\begin{matrix} 10.22+11.22x & =0 \\ -12.20-12.21x & =0 \end{matrix}$ *(4) e dalla prima e terza:* $\begin{matrix} 10.32+11.32x=0 \\ -12.30-12.31x=0 \end{matrix}$ *(5), dove è facile riconoscere che queste due equazioni differiscono solo nel fatto che il carattere anteriore 2 è cambiato nel carattere anteriore 3. Inoltre, allo stesso modo che nelle equazioni, i caratteri anteriori sono gli stessi e i caratteri posteriori hanno la stessa somma. Rimane adesso da eliminare la lettera x dalle quarte e quinte equazioni, ottenendo:* $\begin{matrix} 1_0.2_1.3_2 & 1_0.2_2.3_1 \\ 1_1.2_2.3_0 & 1_1.2_0.3_2 \\ 1_2.2_0.3_1 & 1_2.2_1.3_0 \end{matrix}$*, che è l'equazione finale liberata dalle due incognite che volevamo eliminare, che ci porta la sua stessa dimostrazione e che sarebbe stata molto difficile da scoprire usando le lettere a, b, c, specialmente quando i numeri delle lettere e delle equazioni sono grandi. […] continuando il calcolo in questo modo, si giungerà a un teorema generale per un qualsiasi numero di lettere ed equazioni.*
[Di seguito Leibniz enuncia in modo alquanto oscuro la regola generale che non riportiamo]

Attività di recupero

Sistemi di equazioni. Risoluzione dei sistemi lineari: metodo di sostituzione

Fase 1: Osserva

- Per risolvere il sistema di 2 equazioni di I grado in 2 incognite $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + 4y - 2 = 0 \end{cases}$, possiamo usare il cosiddetto metodo di sostituzione, che consiste nel considerare una delle due equazioni come equazione in una sola variabile, quindi sostituire il valore trovato nella seconda. La scelta dell'equazione e dell'incognita è arbitraria, ma, quando possibile, come in questo caso, conviene scegliere un'incognita che non dia luogo a una frazione. Così scegliamo di ricavare y dalla prima equazione: $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ 3x + 4y - 2 = 0 \end{cases}$, il valore trovato lo sostituiamo nella seconda equazione, che diventa in una sola incognita: $3x + 4 \cdot (2x - 1) - 2 = 0 \Rightarrow 3x + 8x - 4 - 2 = 0 \Rightarrow 11x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{11}$. Questo valore viene adesso sostituito nella prima equazione: $\begin{cases} y = 2 \cdot \frac{6}{11} - 1 \\ x = \frac{6}{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{12 - 11}{11} \\ x = \frac{6}{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{11} \\ x = \frac{6}{11} \end{cases}$. Questa è la soluzione cercata.
- Per il sistema $\begin{cases} 3x + 2y - 1 = 0 \\ 3x - 5y + 7 = 0 \end{cases}$, piuttosto che il metodo di sostituzione, possiamo usare il cosiddetto metodo di addizione e sottrazione, infatti, se sottraiamo termine a termine, otteniamo un'equazione priva del termine x: $(3x + 2y - 1) - (3x - 5y + 7) = 0 \Rightarrow 7y - 8 = 0 \Rightarrow y = \frac{8}{7}$. Questo valore lo sostituiamo in una delle due equazioni a piacere:

$$\begin{cases} 3x + 2 \cdot \frac{8}{7} - 1 = 0 \\ y = \frac{8}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = \frac{7 - 16}{7} \\ y = \frac{8}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\cancel{9}^{3}}{7 \cdot \cancel{3}} \\ y = \frac{8}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{7} \\ y = \frac{8}{7} \end{cases}$$

- Il sistema $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y = -1 \\ 2y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$, si risolve con il metodo di sostituzione applicato più volte, nel senso che ricaviamo una delle incognite da una delle tre equazioni e la sostituiamo nelle altre due, quindi in queste due equazioni, che adesso hanno solo due incognite, ricaviamo una delle due incognite e la sostituiamo nell'altra. In effetti in questo caso particolare, dato che la seconda e la terza equazione presentano solo due incognite, conviene ricavare da esse la x e la z rispettivamente, sostituendole entrambe nella prima equazione che così ha una sola incognita:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x = \frac{y - 1}{2} \\ z = \frac{2y - 2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y - 1}{2} + y - \frac{2y - 2}{3} = 1 \\ x = \frac{y - 1}{2} \\ z = \frac{2y - 2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3y - 3 + 6y - 4y + 4}{6} = \frac{6}{6} \\ x = \frac{y - 1}{2} \\ z = \frac{2y - 2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5y = 5 \\ x = \frac{y - 1}{2} \\ z = \frac{2y - 2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = \frac{y - 1}{2} \\ z = \frac{2y - 2}{3} \end{cases}$$

Adesso basta sostituire il valore di y nelle altre due equazioni: $\Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

Fase 2: Completa …

- Risolviamo il sistema di 2 equazioni di ___grado in __ incognite $\begin{cases} 3x+3y-2=0 \\ x-5y+1=0 \end{cases}$, usando il cosiddetto metodo di sostituzione. Conviene scegliere come equazione la _____ e come incognita ___ Così: $\begin{cases} 3x+3y-2=0 \\ \_\_\_\_\_ \end{cases}$, il valore trovato lo sostituiamo nella _____ equazione, che diventa in una sola incognita: 3 · (_____) + 3y – 2 = 0 ⇒ _____ Sostituiamo questo valore nella _____ equazione: $\begin{cases} y=\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\_\_\_\_\_ \\ x=\_\_\_\_\_ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\_\_\_\_ \\ x=\_\_\_\_ \end{cases}$. Che è la soluzione cercata.
- Risolviamo il sistema $\begin{cases} x-5y+2=0 \\ 4x+5y-1=0 \end{cases}$, con il metodo di addizione e sottrazione, in particolare _____ termine a termine, ottenendo un'equazione priva del termine ___: (*x* – 5*y* +2) + (_____) = 0 ⇒ _____. Questo valore lo sostituiamo in una delle due equazioni a piacere, ottenendo:

$$\begin{cases} \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ \_\_\_\_ \end{cases}$$

- Per risolvere il sistema $\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ x-2y+z=1 \\ y-z=-2 \end{cases}$, ricaviamo l'incognita *z* dalla terza equazione e la sostituiamo nelle altre due, ottenendo: $\begin{cases} x+2y-3\cdot(\_\_\_\_\_)=0 \\ x-2y+\_\_\_\_\_=1 \\ z=\_\_\_\_\_ \end{cases}$. Adesso le prime due equazioni hanno solo due incognite, o ricaviamo una delle due incognite e la sostituiamo nell'altra, oppure sottraiamo termine a termine, ottenendo così un'equazione nella sola *y*: (_____) – (_____) = 0, adesso ricaviamo *y* e la sostituiamo nelle altre due: $\begin{cases} y=\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\_\_\_ \\ x=\_\_\_\_ \\ z=\_\_\_\_ \end{cases}$

Fase 3: Prova!

Risolvi i seguenti sistemi con un metodo a piacere

1. $\begin{cases} x-2y+1=0 \\ 3x+y-4=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x-y=0 \\ 3x-7y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x-4y+2=0 \\ 3x+4y=0 \end{cases}$ $\left[(x=1,y=1);\left(x=-\frac{1}{2},y=-\frac{1}{2}\right);\left(x=-\frac{1}{3},y=\frac{1}{4}\right)\right]$
2. $\begin{cases} 7x-y-4=0 \\ 7x+3y=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} 4x+1=0 \\ 3x-2=3y \end{cases}$; $\begin{cases} 4x-3y=0 \\ 8x+5=6y \end{cases}$ $\left[\left(x=\frac{5}{14},y=-\frac{3}{2}\right);\left(x=-\frac{1}{4},y=-\frac{11}{12}\right);(\varnothing)\right]$
3. $\begin{cases} \frac{1}{2}x-y+\frac{1}{2}=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases}$; $\begin{cases} 4a-b+1=0 \\ 3b+2a-6=0 \end{cases}$; $\begin{cases} 5x-2z=3 \\ 5z-2x=3 \end{cases}$ $\left[(\text{Indeterminato});\left(a=\frac{3}{14},b=\frac{13}{7}\right);(x=1,z=1)\right]$
4. $\begin{cases} \frac{3}{2}t-\frac{2}{5}h=-2 \\ t+h-\frac{3}{4}=0 \end{cases}$; $\begin{cases} -\frac{2}{3}a-b=\frac{1}{3}b-\frac{2}{5}a+1 \\ a+\frac{1}{3}b+2=-a-1 \end{cases}$; $\begin{cases} 3k-\frac{1}{3}c+1=c+\frac{2}{3}k \\ 2c-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}k=-\frac{1}{4}k \end{cases}$

$$\left[\left(h=\frac{125}{76},t=-\frac{17}{19}\right);\left(a=-\frac{165}{116},b=-\frac{27}{58}\right);\left(c=\frac{585}{2012},k=-\frac{132}{503}\right)\right]$$

5. $\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+z=0 \\ -x+y+z=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ 3x-y+2z=1 \\ y-1=z \end{cases}$; $\begin{cases} a+b-c=1 \\ 2b-a=1-c \\ 2c-3b=0 \end{cases}$

$$\left[\left(x=\frac{1}{2}, y=0, z=-\frac{1}{2}\right);\left(x=\frac{7}{4}, y=-\frac{9}{4}, z=-\frac{13}{4}\right);\left(a=\frac{4}{3}, b=\frac{2}{3}, c=1\right)\right]$$

6. $\begin{cases} 2h+y=2-z \\ y-2h+z=0 \\ h-2z=1-y \end{cases}$; $\begin{cases} a+b=3z-a+b \\ 3b-a+z=2-a \\ a-b+c=b-z+1+c \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{1}{2}h=x-\frac{2}{3} \\ \frac{3}{4}a=\frac{2}{3}h+1 \\ x-2=\frac{3}{5}a-1 \end{cases}$

$$\left[\left(h=\frac{1}{2}, y=1, z=0\right);\left(a=\frac{21}{19}, b=\frac{8}{19}, z=\frac{14}{19}\right);\left(a=-\frac{260}{3}, h=-34, x=-\frac{49}{3}\right)\right]$$

7. $\begin{cases} a+2b-c=1 \\ 2a-b=2 \\ 3a+b-c=1 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x+3y-4=1 \\ 3z-2y+1=x \\ x+y=4-3z \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{4}{3}n+m-p=\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}-n+m=-p \\ 1-n=m+p \end{cases}$ $\left[(\varnothing);(\text{Indeterminato});\left(m=-\frac{11}{36}, n=\frac{5}{6}, p=\frac{17}{36}\right)\right]$

8. $\begin{cases} (x-y)^2=(x+y)^2-4xy+z \\ z=x-y+2 \\ z^2=(1-z)^2+x-y \end{cases}$; $\begin{cases} a-2x+1=z-3a+2 \\ 2a-\frac{1}{3}z=-\frac{5}{4}x+\frac{1}{3} \\ a-x+2z=0 \end{cases}$; $\begin{cases} b+c-q=2-b-c+q \\ 2b-1=q-3c \\ b^2-c=b\cdot(b-2)+q-1 \end{cases}$

$$\left[(\varnothing);\left(a=\frac{46}{247}, x=-\frac{16}{247}, z=-\frac{31}{247}\right);\left(b=-1, c=\frac{1}{2}, q=-\frac{3}{2}\right)\right]$$

Risoluzione dei sistemi lineari: metodo e teorema di Cramer

Fase 1: Osserva

- Il sistema $\begin{cases} 2x-y=1 \\ 3x+4y-2=0 \end{cases}$, che abbiamo già risolto con il metodo di sostituzione, possiamo risolverlo anche con un metodo più schematico, che si chiama metodo di Cramer. Per applicare tale metodo dobbiamo riscrivere il sistema nella forma seguente: $\begin{cases} 2x-y=1 \\ 3x+4y=2 \end{cases}$, adesso calcoliamo il determinante: $D=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot 4-(-1)\cdot 3=8+3=11$, che, come si vede si calcola facilmente usando la regola della differenza dei prodotti in croce. Poiché questo determinante è diverso da zero, il sistema ha soluzione e si ottiene calcolando altri 2 determinanti: $D_x=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=1\cdot 4-(-1)\cdot 2=4+2=6$, che si ottiene da D sostituendo la prima colonna con la colonna dei termini noti e $D_y=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot 2-1\cdot 3=4-3=1$, che si ottiene sempre da D sostituendo la seconda colonna con i termini noti. Adesso la soluzione è data da $x=\frac{D_x}{D}=\frac{6}{11}; y=\frac{D_y}{D}=\frac{1}{11}$, che ovviamente coincide con la soluzione trovata in precedenza.

- Per il sistema $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 6x+4y=-3 \end{cases}$, il metodo di Cramer afferma che esso non ha soluzioni, poiché abbiamo: $D=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}=12-12=0$ e $D_x=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}=4+6=10\neq 0$.
- Invece il sistema $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 6x+4y=2 \end{cases}$, è indeterminato perché non solo $D = 0$, ma anche $D_x=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ = 4 – 4 = 0 e $D_y=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$ = 6 – 6 = 0.
- Per risolvere il sistema $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y=-1 \\ 2y-3z-2=0 \end{cases}$, dopo averlo riscritto $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y=-1 \\ 2y-3z=2 \end{cases}$, possiamo applicare il metodo di Cramer con la regola vista per il precedente sistema in due incognite. Dobbiamo solo saper calcolare un determinante del III ordine, che si fa con la seguente regola di Sarrus.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{matrix}=1\cdot(-1)\cdot(-3)+1\cdot 0\cdot 0+(-1)\cdot 2\cdot 2-\left[1\cdot 2\cdot(-3)+1\cdot 0\cdot 2+(-1)\cdot(-1)\cdot 0\right] = 3 - 4 +$$

6 = 5. Quindi $D_x=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{matrix}$ = 3 + 2 – 3 – 2 = 0; $D_y=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{matrix}$ = 3 – 4 + 6 = 5;

$D_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{matrix}$ = –2 + 4 – 4 + 2 = 0. Infine: $x=\frac{D_x}{D}=\frac{0}{5}=0; y=\frac{D_y}{D}=\frac{5}{5}=1; z=\frac{D_z}{D}=\frac{0}{5}=0$.

Fase 2: Completa …

- Per risolvere il sistema $\begin{cases} 4x-5y+4=0 \\ 3x-y+2=0 \end{cases}$, usando il cosiddetto metodo di Cramer, dobbiamo modificare la forma del sistema: $\begin{cases} 4x-5y=-4 \\ \_\_\_\_\_ \end{cases}$. A questo punto calcoliamo il determinante $D=\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ .... & .... \end{vmatrix}$ = _____, dato che abbiamo ottenuto un numero diverso da _____, possiamo dire che il sistema è _____ e per trovarne le soluzioni calcoliamo $D_x=\begin{vmatrix} ... & ... \\ .... & .... \end{vmatrix}$ = _____ e $D_y=\begin{vmatrix} ... & ... \\ .... & .... \end{vmatrix}$ = _____ Concludiamo dicendo che la soluzione è $x=\frac{D_x}{D}=\frac{....}{.....}; y=$ _____ .
- Per risolvere il sistema $\begin{cases} x+y-z=3 \\ 2x-y+3z=0 \\ 4x+y-z=-1 \end{cases}$ con il metodo di Cramer, osserviamo che è già scritto nella forma voluta, quindi passiamo subito a calcolare $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & ... \\ 2 & ... \\ 4 & ... \end{matrix}=$ _____ dato che non è nullo, calcoliamo anche $D_x=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & ... \\ 0 & ... \\ -1 & ... \end{matrix}=$ _____,

$D_y = \begin{vmatrix} 1 & \dots & -1 & 1 & \dots \\ 2 & \dots & 3 & 2 & \dots \\ 4 & \dots & -1 & 4 & \dots \end{vmatrix} =$ _____ e $D_z = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} =$ _____

e concludiamo dicendo che la soluzione è $x = \frac{D_x}{D} = \frac{\dots}{\dots.}; y =$ _____; $z =$ _____ .

Fase 3: Prova!

Risolvi i seguenti sistemi con il metodo di Cramer

1. $\begin{cases} x-y=-2 \\ 3x-1=-2y \end{cases}; \begin{cases} 3x-2y=1 \\ 4y-x=-1 \end{cases}; \begin{cases} 5x-4=-2y+1 \\ 1-3x+2y=0 \end{cases}$ $\left[\left(x=-\frac{3}{5}, y=\frac{7}{5}\right); \left(x=\frac{1}{5}, y=-\frac{1}{5}\right); \left(x=\frac{3}{4}, y=\frac{5}{8}\right)\right]$

2. $\begin{cases} 3x-2y=-1 \\ 2x+3=-x+y \end{cases}; \begin{cases} 3x+y=-1 \\ x-2y=3 \end{cases}; \begin{cases} 5x-2y=-2 \\ -3x+y=2 \end{cases}$ $\left[\left(x=-\frac{5}{3}, y=-2\right); \left(x=\frac{1}{7}, y=-\frac{10}{7}\right); (x=-2, y=-4)\right]$

3. $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x-3y=-z+1 \\ -x+z=-1+2y \end{cases}; \begin{cases} 2x-3+y=0 \\ 3-x-y=2z+3 \\ y-1=z-2x \end{cases}; \begin{cases} 2a+3b-c=1 \\ b-2a=1-2c \\ a-2c-3b=0 \end{cases}$

$\left[(\text{Indeterminato}); (x=7, y=-11, z=2); \left(a=\frac{103}{267}, b=\frac{25}{267}, c=\frac{14}{267}\right)\right]$

4. $\begin{cases} h+k-t=2 \\ 2h-3k=-1 \\ k+2t=1 \end{cases}; \begin{cases} a+2b-c=-2 \\ 3a+b-c=2 \\ a-4c=1 \end{cases}; \begin{cases} \frac{1}{2}n+\frac{1}{3}m=0 \\ \frac{3}{2}m-n+p=1 \\ \frac{3}{4}m-\frac{1}{2}p=-1 \end{cases}$

$\left[\left(h=\frac{1}{2}, k=\frac{2}{3}, t=\frac{1}{6}\right); \left(a=\frac{23}{19}, b=-\frac{30}{19}, c=\frac{1}{19}\right); \left(m=-\frac{3}{11}, n=\frac{2}{11}, p=\frac{35}{22}\right)\right]$

5. $\begin{cases} a+x-y=0 \\ a-2x+3y=0 \\ a+x-y=1 \end{cases}; \begin{cases} 2b+3h-n=-1 \\ 3b-2h+n=1 \\ b+h-n=-3 \end{cases}; \begin{cases} \frac{4}{3}z+t-q=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}z-2t+q=-1 \\ z-t=0 \end{cases}$

$\left[(\varnothing); \left(b=-\frac{2}{9}, h=\frac{10}{9}, n=\frac{35}{9}\right); \left(q=-\frac{9}{4}, t=-\frac{3}{4}, z=-\frac{3}{4}\right)\right]$

Determinare per quali valori del parametro reale m i seguenti sistemi non hanno soluzioni

6. $\begin{cases} x-my=0 \\ x-y=1 \end{cases}; \begin{cases} mx-y=1 \\ x+2y=0 \end{cases}; \begin{cases} x-z=m \\ x+z=m-1 \end{cases}$ $\left[m=1; m=-\frac{1}{2}; \varnothing\right]$

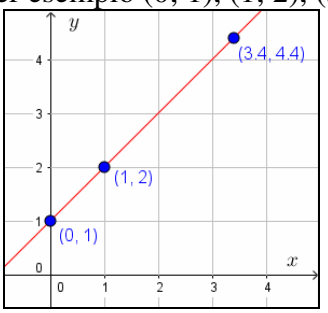
7. $\begin{cases} mt-a=-1 \\ t+ma=0 \end{cases}; \begin{cases} a-mx=m+1 \\ a+mx=-2 \end{cases}; \begin{cases} h-(m+1)\cdot n=1 \\ 2h-n=m^2-m+1 \end{cases}$ $\left[\varnothing; m=0; m=-\frac{1}{2}\right]$

8. $\begin{cases} a+b-c=1 \\ a-b+c=0 \\ ma+b-c=1 \end{cases}; \begin{cases} a-x+mc=2 \\ a+x+mc=-2 \\ ma-x=1 \end{cases}; \begin{cases} (m-1)\cdot x+y-z=2 \\ x-y+z=m-2 \\ 2x-y+(m-1)\cdot z=-1 \end{cases}$ $[\forall\, m \in \mathbb{R}\,;\, m=0;\, m=0 \vee m=2]$

Rette nel piano cartesiano

Fase 1: Osserva

- L'equazione $y = x + 1$, nel piano cartesiano rappresenta la retta che passa per tutti i punti la cui ordinata ha un'unità in più dell'ascissa, per esempio (0; 1), (1; 2), (3,4; 4,4) e così via. Rappresentiamola graficamente.



- Che equazione ha la retta che passa per i punti (1; 3) e (4; –1)? La retta generica ha equazione $y = mx + p$, quindi basta imporre il passaggio per i due punti e risolvere il sistema: $\begin{cases} 3 = m + p \\ -1 = 4m + p \end{cases}$, che si risolve per esempio con il metodo di sottrazione, ottenendo $3 - (-1) = m + p - (4m + p) \Rightarrow 4 = -3m \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{4}{3} \\ p = 3 + \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{4}{3} \\ p = \frac{13}{3} \end{cases}$, quindi l'equazione cercata è $y = -\frac{4}{3}x + \frac{13}{3}$.

Fase 2: Completa …

- L'equazione $y = 2x - 3$, nel piano cartesiano rappresenta la retta che passa per esempio per i punti (0; ...), (...; 1), (...; ...) e così via.
- Che equazione ha la retta che passa per i punti (2; 1) e (3; –2)? La retta generica ha equazione $y =$ _____, quindi sostituendo alle incognite x e ____ le coordinate dei punti otteniamo il sistema: $\begin{cases} 1 = \_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_ \end{cases}$, che risolviamo con il metodo di sottrazione, ottenendo _____ possiamo dire quindi che l'equazione cercata è $y =$ _____.

Fase 3: Prova!

Determinare la coordinata incognita dei punti seguenti in modo che essi appartengano alle rette

1. (1; y), (x; 4), (0; y), (x; –2) appartenenti alla retta $y = 2x - 3$ $\left[-1; \frac{7}{2}; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$
2. (1; y), (x; 0), (0; y), (x; –1) appartenenti alla retta $y = 4x + 1$ $\left[5; -\frac{1}{4}; 1; -\frac{1}{2}\right]$
3. (2; y), (x; –1), (–2; y), (x; 2) appartenenti alla retta $y = -x + 1$ [–1; 2; 3; –1]
4. $\left(\frac{1}{2}; y\right), \left(x; -\frac{1}{2}\right), \left(x, -\frac{2}{3}\right); \left(\frac{3}{4}; y\right)$ appartenenti alla retta $y = 3x - 1$ $\left[\frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{1}{9}; \frac{5}{4}\right]$
5. (1; y), (x; –3), (–1; y), (x; 0) appartenenti alla retta $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ $\left[-\frac{1}{4}; -\frac{9}{2}; -\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right]$

Determinare le equazioni delle rette passanti per le coppie di punti indicati

6. (2; 0) (0; –1) ; (1; 3) (–3; 3) ; (4; 1) (4; 75) $\left[y = \frac{1}{2}x - 1; y = 3; x = 4\right]$
7. (3; 1) (2; –3) ; (1; 4) (4; 1) ; (2; 3) (–3; –2) [$y = 4x - 11$; $y = -x + 5$; $y = x + 1$]

8. $\left(\frac{1}{2};1\right),(0;-1);\left(1,-\frac{2}{3}\right);\left(-\frac{3}{2};0\right);\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{3};3\right)$ $\left[y=4x-1;y=-\frac{4}{15}x-\frac{2}{5};y=-21x+10\right]$

Problemi lineari in più incognite

Fase 1: Osserva

- Di due numeri interi sappiamo che uno è doppio dell'altro e la loro somma è 134, quali sono i numeri? Per risolvere il problema basta chiamare i numeri incogniti con x e y per esempio, e tradurre in simboli le informazioni, ottenendo il sistema: $\begin{cases} x=2y \\ x+y=138 \end{cases}$, risolviamo per sostituzione: $2y + y = 138 \Rightarrow 3y = 138 \Rightarrow y = 46$ e $x = 92$. Ovviamente il problema non avrebbe avuto soluzione se la somma fosse stata un numero non multiplo di 3, come 137 o 761.
- Il perimetro di un trapezio isoscele misura 46 *cm*, il lato obliquo misura quanto le basi insieme e la base maggiore è 3 *cm* in più della minore. Vogliamo determinare le misure dei lati. Indichiamo con x, y e z le misure incognite e risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=46 \\ z=x+y \\ x=y+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+3+y+z=46 \\ z=y+3+y \\ x=y+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y+z=43 \\ z=2y+3 \\ x=y+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y+2y+3=43 \\ z=2y+3 \\ x=y+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y=40 \\ z=2y+3 \\ x=y+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=10 \\ z=23 \\ x=13 \end{cases}$$

Fase 2: Completa …

- In un triangolo un angolo è triplo di un altro, che a sua volta misura 30° in meno del terzo. Determinare le misure degli angoli. Indichiamo con α, β, γ le misure dei tre angoli ed impostiamo il seguente sistema: $\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=.... \\ \alpha=...\beta \\ \beta=..... \end{cases}$, risolviamo il sistema con il metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} .....+...+\gamma=.... \\ \alpha=...\beta \\ \beta=..... \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ..... \\ \alpha=... \\ \beta=.... \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma=... \\ \alpha=... \\ \beta=... \end{cases}$$

  Possiamo affermare che il triangolo dato è _____
- Un numero di 3 cifre è tale che la somma delle cifre è 13, il numero ottenuto eliminando la prima cifra è uguale a 6 volte alla stessa cifra, mentre quello ottenuto eliminando la cifra delle decine è 18 volte questa cifra. Trovare il numero. Indichiamo con *cdu* il numero, la prima equazione è facilmente: c + _____; per le altre due equazioni dobbiamo ricordare il significato di notazione posizionale, pertanto possiamo scrivere: $10d + u =$ __ c e $10c + u =$ _____ Otteniamo così il seguente sistema di tre equazioni in tre incognite: $\begin{cases} c+d+u=.... \\ 10d+u=.... \\ 10c+u=..... \end{cases}$, che risolviamo: $\begin{cases} .....=.... \\ d=..... \\ c=..... \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ..... \\ d=..... \\ c=..... \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=... \\ d=... \\ c=... \end{cases}$

  e il numero cercato è _____

Fase 3: Prova!

Risolvere i seguenti problemi, impostando dei sistemi lineari

1. Trovare un numero di 2 cifre, sapendo che le decine sono il triplo delle unità e la loro somma fa 8. [62]
2. Trovare un numero di 2 cifre, sapendo che le decine sono il doppio delle unità e la loro somma fa 7. [Impossibile]
3. Trovare un numero di 2 cifre sapendo che la differenza fra esso e il numero in cui scambiamo fra loro le cifre è 18 e la somma delle cifre è 14. [86]

4. Gianni e Attilio compiono gli anni lo stesso giorno, quest'anno Gianni avrà il doppio dell'età di Attilio, mentre 7 anni fa la sua età era i 3/2 di quella di Attilio. Quanti anni compiranno quest'anno i due? [Impossibile]
5. Risolvere il problema precedente sostituendo 3/2 con 3. [28; 14]
6. Trovare un numero di 3 cifre sapendo che la somma delle cifre è 18, il numero ottenuto eliminando la cifra delle centinaia è 5 volte tale cifra e la cifra delle centinaia è uguale alla somma delle altre 2. [945]
7. Megan ama la cucina vegetariana, la settimana scorsa ha acquistato 7 peperoni e 4 melanzane, spendendo € 2,75, questa settimana ha invece acquistato 5 peperoni e 3 melanzane, spendendo € 1,82. Se i prezzi non sono variati, quanto costa una melanzana e quanto un peperone? [Impossibile]
8. Risolvere il precedente problema con i nuovi costi: € 2,25 e € 1,65. [€ 0,30; € 0,15]
9. In una fattoria vi sono, fra oche, galline e maiali, 70 animali, le oche sono il doppio delle galline e il totale delle zampe è 210. Quanti animali di ogni tipo vi sono? [30 oche, 15 galline, 30 maiali]
10. Per comprare 15 libri e 30 diari servono € 292,50. Se comprassimo 3 libri in meno e lo stesso numero di diari ma ad un prezzo unitario inferiore di € 2,00, il costo totale sarebbe di € 210,00. Calcolare il costo unitario di ciascun libro e diario. [€ 7,50; € 6,00]
11. Piero mette uno stesso numero di francobolli in ciascuno dei suoi raccoglitori. Un giorno suo fratello gli chiede in prestito due dei raccoglitori per qualche giorno, così divide i francobolli nei raccoglitori rimasti, mettendone 100 in ciascuno. Qualche giorno dopo uno dei raccoglitori si rompe e divide i francobolli sempre in pari numero fra i raccoglitori rimasti, che adesso ne contengono 200 in più rispetto all'inizio. Vogliamo sapere quanti francobolli ha e quanti raccoglitori gli sono rimasti. [1200; 3]
12. Due poligoni convessi hanno un totale di 17 lati e la somma di tutti i loro angoli interni è 1980°. Quanti lati ha ciascuno dei poligoni? [Indeterminato]
13. Il perimetro di un rettangolo è 20 *cm*, raddoppiando una delle dimensioni diventa 30 *cm*. Determinare le misure delle due dimensioni. [5 *cm*; 5 *cm*]
14. Qualche tempo fa ho acquistato due tipi di obbligazioni a tasso variabile. Il primo anno ho ricevuto un totale lordo, cioè al netto delle tasse, di € 1550,00, l'anno successivo invece ho ricevuto € 1450,00. Tenuto conto che il primo anno le obbligazioni pagavano interessi rispettivi del 3,50% e del 4%, mentre il secondo anno del 3,20% e 3,80%, vogliamo sapere quali somme ho investito nelle due obbligazioni. [€ 18000,00, € 23000,00]
15. Il perimetro di un trapezio rettangolo misura 48 *cm*, la base maggiore è lunga quanto l'altezza e il lato obliquo insieme, mentre l'altezza, il lato obliquo e la base minore formano una progressione aritmetica di ragione 2 *cm* (cioè ogni misura è 2 *cm* in più della precedente). Determinare le misure dei lati. [8 *cm*; 10 *cm*; 12 *cm*; 18 *cm*]
16. In un test con 20 domande vengono assegnati 5 punti per ogni risposta esatta, 0 per ogni risposta non data e viene tolto un punto per ogni risposta sbagliata. Sappiamo che Gianni ha totalizzato 55 punti, mentre se per ogni risposta esatta fossero stati assegnati 6 punti avrebbe totalizzato 67 punti. Quante risposte ha sbagliato Gianni? [5]
17. Un piccolo cinema ha 71 posti. Un giorno vi è il tutto esaurito e l'incasso è di 167 euro facendo pagare 4 euro il prezzo intero, 2 euro il ridotto militari e 1 euro i ragazzi al di sotto dei 12 anni. Il proprietario osserva che se avesse aumentato di 1 euro il biglietto intero e di € 0,50 i ridotti l'incasso sarebbe aumentato di € 50,00. Quanti sono gli adulti, quanti i militari e quanti i ragazzi? [29; 9; 33]
18. Un panino costa € 1,00 una bibita, € 0,50 e un pacco di patatine € 0,25. Marzia deve comprare un totale di 15 pezzi in quantitativi assegnati, ma in questo modo servirebbero € 8,25 mentre lei ha solo € 6,75. Allora osserva che se scambia il quantitativo di bibite e patatine risparmia proprio € 1,50. Alla fine cosa compra? [3 panini, 3 bibite e 9 pacchi di patatine]
19. Determinare un numero di 3 cifre, sapendo che la cifra delle centinaia è consecutiva di quella delle unità, il numero formato con le prime due cifre è uguale a dodici volte il valore della terza cifra e la somma fra il numero ottenuto invertendo l'ordine di lettura ed il numero incognito vale 1111. [605]
20. In un'urna vi sono delle biglie verdi e delle biglie azzurre. Estraendone 3/4 delle verdi e 5/6 delle azzurre nell'urna rimangono biglie in uguale numero per ciascun colore, e ciò accade anche se si estraggono solo 12 biglie azzurre. Quante sono le biglie di ciascun colore? [24 verdi; 36 azzurre]

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito

http://mathinterattiva.altervista.org/volume_1_4.htm

4. Problemi lineari

4.4 Disequazioni di primo grado in un'incognita

Prerequisiti

- Conoscenze algebriche elementari
- Concetto di disuguaglianza
- Le relazioni di ordinamento
- I connettivi logici
- Equazioni di primo grado

Obiettivi

- Comprendere le proprietà delle disuguaglianze
- Comprendere che una disequazione ha in generale infinite soluzioni
- Risolvere disequazioni di primo grado o riconducibili a esse
- Risolvere disequazioni fratte con fattori di primo grado
- Risolvere sistemi di disequazioni

Contenuti

- Proprietà delle disuguaglianze
- Disequazioni di primo grado in un'incognita
- Disequazioni prodotto e disequazioni fratte
- Sistemi di disequazioni in un'incognita
- Equazioni e disequazioni in valore assoluto

Quelli che … vogliono sapere di più

- Problemi indeterminati

Simbologia

$\geq$ Con questo simbolo indichiamo che una data quantità, scritta alla sinistra del simbolo, è maggiore o uguale di un’altra, scritta alla destra del simbolo

$\leq$ Con questo simbolo indichiamo che una data quantità, scritta alla sinistra del simbolo, è minore o uguale di un’altra, scritta alla destra del simbolo.

Proprietà delle disuguaglianze

Il problema

Marylin deve acquistare un armadio di almeno due ante da mettere in una stanza, appoggiato a un muro largo 4 *m* e alto 3 *m*, deve avere almeno due sportelli, ovviamente deve lasciare almeno 10 *cm* da ambo i lati per consentire operazioni di pulizia ed ugualmente deve lasciare almeno 20 *cm* liberi dal tetto. Quali sono le dimensioni dell'armadio che deve comprare?

Quello che vogliamo risolvere non è un problema di uguaglianza bensì di disuguaglianza, infatti Marylin cerca un armadio la cui larghezza L deve essere compresa fra certe misure così come l'altezza H e la profondità P. Così L deve essere non superiore a $(4 - 0{,}2)$ *m*, ma nello stesso tempo deve avere un minimo valore, non può essere largo, per esempio 10 o 25 *cm*. Supponiamo che avere due ante significhi avere una larghezza di almeno 2 *m*. Analogamente H deve essere compresa per esempio fra 1,80 *m* e 2,80 *m*. Infine la profondità deve essere compresa, per esempio fra 30 e 70 *cm*. Quindi le quantità cercate devono soddisfare le condizioni che possiamo tradurre nelle seguenti scritte: $2 < L < 3{,}8 \wedge 1{,}8 < H < 2{,}8 \wedge 0{,}3 < P < 0{,}7$.
In effetti noi abbiamo detto che la larghezza non deve superare i 3,8 *m*, ma potrebbe anche essere precisamente 3,8 *m*. Definiamo perciò una nuova notazione.

Notazione 1

- Scriveremo $\boldsymbol{x \geq y}$ volendo significare che vale una sola delle seguenti relazioni: $x > y$ oppure $x = y$;
- scriveremo $\boldsymbol{x \leq y}$ con il significato di $x < y$ oppure $x = y$.

Quindi le precedenti scritte le scriviamo meglio: $2 \leq L \leq 3{,}8 \wedge 1{,}8 \leq H \leq 2{,}8 \wedge 0{,}3 \leq P \leq 0{,}7$.

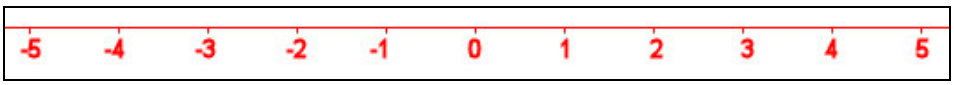
Abbiamo visto che il problema di Marylin conduce alla risoluzione di disuguaglianze. Vediamo quindi di stabilire quali sono le proprietà di una disuguaglianza.
Dire che due numeri sono disuguali, ossia che $a \neq b$, equivale a dire che o a è più grande di b o è più piccolo, in simbolo scriveremo $(a > b \wedge b < a)$ oppure $(a < b \wedge b > a)$.
Ricordiamo che il concetto di *essere maggiore o minore di*, è un importante esempio di relazione di ordinamento totale in senso stretto. Ciò vuol dire che una disuguaglianza verifica innanzitutto le seguenti tre proprietà.

1. $x < x \wedge x > x$ sono entrambe false qualunque sia $x \in \mathbb{R}$ (proprietà antiriflessiva);
2. $x < y \Rightarrow y > x$ oppure $x > y \Rightarrow y < x$, quali che siano i numeri reali distinti x e y (proprietà antisimmetrica);
3. $x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$ oppure $x > y \wedge y > z \Rightarrow x > z$ (proprietà transitiva);

Se pensiamo alla definizione dei numeri reali come elementi della retta reale ordinata, e al significato della moltiplicazione per (–1) o cambiamento di segno di un numero, ci appare evidente anche la validità della seguente proprietà, in cui se uno dei due simboli è zero, come opposto di zero intendiamo ancora zero.

4. $x > y \Rightarrow -x < -y$ oppure $x < y \Rightarrow -x > -y$, qualunque siano i numeri reali x e y.

Infatti, se il numero x è maggiore del numero y significa che sulla retta reale ordinata il simbolo y è associato a un punto che è posto a sinistra del punto associato al simbolo x. Sappiamo che l'opposto di un numero x a cui, sulla retta numerica reale, si è associato un punto X a destra o a sinistra dell'origine O (a seconda che sia $x > 0$ o $x < 0$), si costruisce mediante la simmetria centrale di centro O. Pertanto tale operazione scambia l'ordine del simbolo x rispetto a O nel senso che, se è $x > 0$ si ha $-x < 0$ e se $x < 0$ si ha $-x > 0$. Analogamente viene scambiato l'ordine di precedenza fra i due simboli $(-x)$ e $(-y)$ rispetto a quello dei simboli (x) e (y).



Oltre a quelle appena enunciate abbiamo anche la validità delle ulteriori seguenti proprietà di facile comprensione.

5. $x > y \Leftrightarrow x + z > y + z, \forall z \in \mathbb{R}$ oppure $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z, \forall z \in \mathbb{R}$;
6. $x > y \Leftrightarrow x \cdot z > y \cdot z, \forall z > 0$ oppure $x < y \Leftrightarrow x \cdot z < y \cdot z, \forall z > 0$
7. $x > y \Leftrightarrow x \cdot z < y \cdot z, \forall z < 0$ oppure $x < y \Leftrightarrow x \cdot z > y \cdot z, \forall z < 0$

Vediamo qualche esempio di applicazione delle proprietà precedenti.

Esempio 1

- La proprietà 5 ci permette di dire che, dalla disuguaglianza vera $13 > 1$, seguono le seguenti disuguaglianze tutte vere: $13 + 5 > 1 + 5$; $13 – 4 > 1 – 4$.
- La proprietà 6 è in qualche modo una generalizzazione della 5; infatti, mediante essa, dalla disuguaglianza vera $24 < 32$, seguono le disuguaglianze, anch'essa vere: $24 \cdot 3 < 32 \cdot 3$; $24 \cdot \frac{2}{5} < 32 \cdot \frac{2}{5}$.
- Infine la proprietà 7 è una generalizzazione della 5, tenuto conto però della 4. Quindi, mediante questa proprietà, dalla disuguaglianza vera $–3 > –7$, seguono le disuguaglianze, tutte vere, $–3 \cdot (–4) < –7 \cdot (–4) \Leftrightarrow 12 < 28$; $-3 \cdot \left(-\frac{7}{8}\right) < -7 \cdot \left(-\frac{7}{8}\right) \Leftrightarrow \frac{21}{8} < \frac{49}{8}$.

Notiamo che le precedenti proprietà 5, 6 e 7 sono condizioni necessarie e sufficienti.
Adesso vediamo invece delle condizioni solo sufficienti.

8. $x > y \wedge z > t \Rightarrow x + z > y + t$ oppure $x < y \wedge z < t \Rightarrow x + z < y + t$
9. $x \cdot y > 0 \wedge x > y \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ oppure $x \cdot y > 0 \wedge x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

Vediamo degli esempi.

Esempio 2

Mostriamo che, in generale, le proprietà 8 e 9 non sono condizioni necessarie.

- Nel caso della proprietà 8 consideriamo la disuguaglianza vera: $7 + 3 > 8 + 1$; da questa non possiamo dire che sono vere nessuna delle seguenti due disuguaglianze: $7 > 8$ oppure $3 > 8$.
- Relativamente alla proprietà 9, l'aver detto che il prodotto dei numeri deve essere positivo significa soltanto che i due numeri hanno lo stesso segno. Quindi è evidente che anche i reciproci avranno lo stesso segno, così dalla disuguaglianza vera: $3 > 2$, segue la disuguaglianza vera $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$. Allo stesso modo dalla disuguaglianza $–7 > –8$, segue $-\frac{1}{7} < -\frac{1}{8}$; invece dalla disuguaglianza $3 > –4$, poiché i due numeri sono discordi (cioè hanno diverso segno), **non** segue $\frac{1}{3} < -\frac{1}{4}$, ma $\frac{1}{3} > -\frac{1}{4}$.

Talvolta, soprattutto quando abbiamo disuguaglianze in cui sono presenti termini variabili, può essere utile usare un simbolo di disuguaglianza non stretta.

Esempio 3

- Possiamo scrivere $7 \geq 6 + 1$ ma non $7 > 6 + 1$.
- Possiamo scrivere $7 \geq 5 + 1$ e $7 > 5 + 1$, ma quest'ultima scritta è, per così dire, più precisa.
- Un esempio in cui risulta importante l'uso dei precedenti segni di disuguaglianza "debole" è il seguente: $x^2 \geq 0$. Tale disuguaglianza equivale a $x^2 > 0 \vee x^2 = 0$, ed è sempre vera, infatti qualsiasi numero reale innalzato al quadrato o è zero, se la base è zero, o è un numero positivo, se la base è positiva o negativa.

Verifiche

Lavoriamo insieme

- Se $x > 7$ e $y > -2$, possiamo dire che $x + y > 7 - 2 = 5$? Certamente sì, dato che x è un numero maggiore di 7, dal quale sottraiamo un numero che non supera 2, quindi la differenza non può essere minore né uguale a 5.
- Possiamo dire che $x \cdot y > 7 \cdot (-2) = -14$? Stavolta no, perché per esempio $x = 25 > 7$ e $y = -1 > -2$, eppure $25 \cdot (-1) = -25 < -14$.

Livello 1

1. Sappiamo che x è un numero naturale e che $7{,}54 < x < 8{,}99$, possiamo stabilire quanto vale x? [8]
2. Sapendo che $x > 4$, quali fra le seguenti disuguaglianze sono vere, y numero reale qualsiasi? Giustificare le risposte. A) $x > 2$; B) $x > 5$; C) $x + 2 > 6$; D) $x \cdot y > 4y$; E) $x \geq 4{,}1$ [A, C]
3. Sapendo che $x < 14$, quali fra le seguenti disuguaglianze sono vere? Giustificare le risposte.
   A) $x < 0$; B) $x > 1$; C) $x - 7 < 7$; D) $x \cdot 5 < 70$; E) $x^2 < 14^2$ [C, D]
4. Sapendo che $x \geq 5$, quali fra le seguenti disuguaglianze sono vere? Giustificare le risposte.
   A) $x \geq 4$; B) $x = 5$; C) $x^2 > 25$; D) $x \cdot 9 > 40$; E) $5/x \geq 1$ [A, D, E]
5. Sapendo che $x \geq 10$ e $x \in \mathbb{N}$, quali fra le seguenti disuguaglianze sono vere?
   A) $x > 10{,}4$; B) $x > 11$; C) $x - 12 > 0$; D) $x^x \geq 100$; E) $100 - x < 0$ [A, B, D]

Livello 2

6. Sapendo che $x > 3$ e $y > 4$, quali fra le seguenti disuguaglianze sono vere? Giustificare le risposte.
   A) $x + y > 3 + 4$; B) $x - y > 3 - 4$; C) $x \cdot y > 3 \cdot 4$; D) $x/y > 3/4$; E) $x + y < 111$ [A, B, C]
7. Sapendo che $x < 1$ e $y < 2$, quali fra le seguenti disuguaglianze sono vere? Giustificare le risposte.
   A) $x + y < 1 + 2$; B) $x - y < 1 - 2$; C) $x \cdot y < 1 \cdot 2$; D) $x/y < 1/2$; E) $x^y < 1^2$ [A]
8. Sapendo che $x > y > 0$ e $x < z$, quale delle seguenti scritte è falsa? [C]
   A) $y < x < z$ B) $xyz > 0$ C) $\frac{1}{z} > \frac{1}{y}$ D) $-y > -z$ E) $y < z$
9. Sapendo che $x > y > 3$, determinare quale delle seguenti scritte è certamente vera. Dare dei controesempi per le proposizioni non sempre vere. A) $\frac{1}{x} < \frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ C) $x > 4$ D) $x > 1$ E) $y < 5$ [D]

Livello 3

10. Sapendo che $n, m, p \in \mathbb{N}$, $n < m + 1$, $m + 2 < p$, quali delle seguenti scritte sono certamente vere? Dare dei controesempi per le proposizioni non sempre vere. [A, C, E]
    A) $m \geq n$ B) $m > n$ C) $p > n + 1$ D) $p > n + 3$ E) $p \geq n + 2$

Disequazioni di primo grado in una incognita

Per la risoluzione di una disequazione di primo grado in una incognita basta tener conto di quanto già visto sulla risoluzione delle equazioni di primo grado e delle proprietà 6 e 7 del paragrafo precedente. Infatti, una generica disequazione di primo grado in una incognita, ridotta in forma semplificata, si scrive in uno dei seguenti modi: $ax + b > 0$; $ax + b < 0$; $ax + b \geq 0$; $ax + b \leq 0$, dove a e b sono i coefficienti e x è l'incognita. Prima di chiederci qual è il significato di ciascuna delle precedenti scritte, risolviamo una disequazione di primo grado in un modo del tutto formale.

Esempio 4

Risolvere la disequazione $5x - 8 > 0$. Applicando la proprietà 5, scriviamo $5x - 8 > 0 \Rightarrow 5x - 8 + 8 > 0 + 8 \Rightarrow 5x > 8$. Per la proprietà numero 6. abbiamo: $5x > 8 \Rightarrow \frac{5}{5}x > \frac{8}{5} \Rightarrow x > \frac{8}{5}$. Naturalmente, come già accaduto per le equazioni, l'avere isolato al primo membro l'incognita fa sì che la scritta rappresenti proprio la soluzione.

Grazie all'esempio precedente, possiamo dire che la regola di trasporto di un addendo da un membro all'altro può enunciarsi anche per le disequazioni.

Regola 1 (di trasporto di un termine additivo da un membro all'altro di una disuguaglianza)

Per trasferire un addendo da una parte all'altra del segno di una disuguaglianza, basta semplicemente cambiare il suo segno.

Vediamo se vale anche la stessa regola per il trasporto di un fattore.

Esempio 5

Risolvere la disequazione $-2c + 1 < 0$. Applicando la proprietà 5, abbiamo: $-2c + 1 < 0 \Rightarrow -2c < -1$; adesso dobbiamo applicare la proprietà numero 7, poiché dividiamo entrambi i membri per una quantità negativa, ottenendo: $-2c < -1 \Rightarrow \frac{-2}{-2}c > \frac{-1}{-2} \Rightarrow c > \frac{1}{2}$.

L'esempio precedente ci suggerisce che la regola di trasporto di un fattore da un membro all'altro della disequazione non coincida con quella valida per le equazioni. Quindi ne enunciamo un'altra.

Regola 2 (di trasporto di un termine moltiplicativo da un membro all'altro di una disequazione).

- *Per trasferire un fattore positivo comune a tutti i termini del primo (o secondo) membro nell'altro membro di una disequazione basta moltiplicare tutti i termini del secondo (o primo) membro per l'inverso del termine da trasferire.*
- *Per trasferire un fattore* ***negativo*** *comune a tutti i termini di un membro di una disequazione nell'altro membro, dopo aver effettuato quanto detto nel caso precedente, si cambia il verso della disequazione.*

Dopo aver notato l'estrema semplicità di procedimento per la risoluzione di una disequazione di primo grado a un'incognita, chiediamoci cosa significhi tale soluzione. Nell'esempio 4 abbiamo detto che la soluzione della disequazione $5x - 8 > 0$ è $x > \frac{8}{5}$. La ricerca di tale soluzione equivale alla domanda:

Quali numeri reali x fanno divenire positiva (maggiore di zero) l'espressione $5x - 8$?

La risposta $x > \frac{8}{5}$ significa che i numeri che cerchiamo sono tutti quelli maggiori di $\frac{8}{5}$, cioè tutti i numeri associati ai punti che, sulla retta reale ordinata, si trovano alla destra di $\frac{8}{5}$. Quindi le soluzioni sono infinite.

Ecco una prima sostanziale differenza fra una disequazione di primo grado e un'equazione di primo grado, entrambe algebriche.

Un'equazione di primo grado a un'incognita ammette sempre solo una soluzione, una disequazione di primo grado ne ammette sempre infinite.
Chiediamoci adesso cosa intendiamo con la scritta $5x - 8 \geq 0$, e le sue differenze dalla scritta $5x - 8 > 0$. Nel primo caso vogliamo sapere quando l'espressione risulta positiva, nel secondo quando essa risulta positiva o nulla, ossia quando non risulta negativa; quindi la differenza fondamentale consiste nel fatto che $x = \frac{8}{5}$ fa parte dell'insieme delle soluzioni del secondo caso e non del primo

Esempio 6

In una quarta classe di una scuola media superiore vi sono alcuni ragazzi che sono maggiorenni (hanno almeno 18 anni) e altri minorenni (hanno meno di 18 anni). Un giorno l'insegnante vuol sapere quanti di loro potranno andare a votare il giorno successivo.
Per risolvere la questione l'insegnante deve verificare quanti studenti, con la propria età x aggiornata al giorno successivo, soddisferanno la disequazione $x \geq 18$, mentre, se vuole sapere quanti non avranno diritto al voto, deve risolvere la disequazione $x < 18$.
In questo esempio notiamo un fatto fondamentale: entrambe le disequazioni hanno infinite soluzioni reali, ma il problema dell'insegnante ne ha solo un numero finito, dato che gli alunni della classe sono finiti e che è fisiologicamente impossibile che vi siano ragazzi che abbiano età pari a –32 o a 7235 anni. Possono invece accettarsi età come 19,234567, intendendo con ciò una frazione dell'anno, sono 19 anni e circa 85 giorni.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Risolvere la disequazione $\frac{1}{4}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}x>\frac{2}{3}\cdot(5x+1)$.

Effettuiamo le moltiplicazioni: $\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}+\frac{1}{3}x>\frac{10}{3}x+\frac{2}{3}$. Adesso determiniamo il minimo comune denominatore: $\frac{6x-3+8x}{24}>\frac{80x+16}{24}$. Eliminiamo il denominatore comune e isoliamo i termini incogniti da una parte e i termini noti dall'altra: $6x + 8x – 80x > 16 + 3 \Rightarrow – 64x > 19$. Adesso dividiamo entrambi i membri per il numero negativo, – 64, che perciò cambiare il verso della disuguaglianza $\frac{-64}{-64}x<\frac{19}{-64}\Rightarrow x<-\frac{19}{64}$.

Risolvere le seguenti disequazioni

Livello 1

1. $3m – 1 > 0;\ 4t – 2 \le 0;\ 6 > 3r;\ –2x + 3 < 0;\ 5z + 4 \ge 0;\ –7 \le –2n$

$\left[m>\frac{1}{3};t\le\frac{1}{2};r<2;x>\frac{3}{2};z\ge-\frac{4}{5};n\le\frac{7}{2}\right]$

2. $4x \le –2;\ 6x + 1 > –3;\ –2x \ge 4 + 2x;\ \frac{2}{3}x-\frac{3}{4}\ge-\frac{1}{4}x;\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}\le1+\frac{1}{3}x;\ \frac{1}{2}x-x\ge3-\frac{1}{2}x$

$\left[x\le-\frac{1}{2};x>-\frac{2}{3};x\le-1;x\ge\frac{9}{11};\forall x\in\mathbb{R};\varnothing\right]$

3. $-\frac{3}{4}\le2y-\frac{1}{3};\ \frac{1}{8}m-\frac{1}{3}>2-\frac{1}{2}m;\ -\frac{2}{3}y+y-1\ge0;\ 3p – 1 \ge 1 – 2p;\ 4q + 2 – q \ge –1$

$\left[y\ge-\frac{5}{24};m>\frac{56}{15};y\ge3;p\ge\frac{2}{5};q\ge-1\right]$

4. $3 \le 2t – 1 + \frac{1}{2}t;\ 2f + 4 < 4f – 3;\ 5z-\frac{1}{3}\ge-\frac{1}{2}z;\ -\frac{3}{4}u+\frac{1}{2}\le-\frac{1}{3}u$ $\left[t\ge\frac{8}{5};f>\frac{7}{2};z\ge\frac{2}{33};u\ge\frac{6}{5}\right]$

5. $m – 3 \le 3m + 1;\ \frac{8}{3}w-1\le\frac{2}{5}w-\frac{1}{2};\ \frac{7}{8}a-1\ge a-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}a;\ \frac{x-1}{2}-\frac{x+1}{3}>\frac{2x-1}{6}-\frac{3x+1}{4}$

$\left[m\ge-2;w\le\frac{15}{68};a\ge24;x>\frac{5}{7}\right]$

6. $\frac{k-1}{3}-\frac{k+1}{2}\le\frac{3k-4}{4}$; $3\cdot(x – 1) – 2 \ge x + 2\cdot(x – 1)$; $\frac{p}{3}-\frac{p}{2}+\frac{p}{4}-\frac{1}{5}<\frac{p}{5}-\frac{p}{6}+\frac{1}{3}$ $\left[k\ge\frac{2}{11};\varnothing;p<\frac{32}{3}\right]$

7. $7 \cdot (y – 1) – 3 \cdot (2 – y) < 5 \cdot (y – 1) + 6 \cdot (y – 2) + 24;\ 4z –1 – 3 \cdot (2 – z) \le 2 \cdot (3z – 1) + z + 11$

$\left[y>-20;z\ge-\frac{16}{3}\right]$

8. $\frac{1}{2}v-\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}v-\frac{1}{3}\right)<\frac{5}{6}v-\frac{1}{4}\cdot\left(v-\frac{2}{3}\right);\ \frac{2h-3}{7}-\frac{5h+1}{5}\ge13h-\frac{2}{5}$ $\left[v>\frac{2}{11};h\le-\frac{1}{60}\right]$

Livello 2

9. $(4n – 1) \cdot (3n + 1) – 1 < 12n^2 – 3n + 3;\ (5p + 3)^2 – 4p \ge (5p + 1) \cdot (5p – 1) – p + 2$ $\left[n<\frac{5}{4};p\ge-\frac{8}{27}\right]$

10. $\left(\frac{1}{3}x-1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}\right)<\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x\right)^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$; $(x + 1)^2 – 2x + 3x \cdot (x – 2) < x – 2x \cdot (–2x – 1)$

$\left[x<0;x>\frac{1}{9}\right]$

11. $(w-1)^3-2w\cdot(w-1)\le w\cdot(w-2)^2+1-w^2\ ;(3g-1)\cdot(4g-2)\le(2g+3)\cdot(6g-4)$ $\left[w\le 2;g\ge\frac{7}{10}\right]$

12. $\left(a-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(a+\frac{1}{3}\right)-\left(a-\frac{1}{3}\right)^2\le\frac{4}{5}a-\frac{1}{30}\ ;\left(x-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)>\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-2\cdot\left(x+\frac{1}{8}\right)$ $\left[a\ge-\frac{29}{9};x>-\frac{1}{128}\right]$

13. $(b-1)^3-1+2b<(b-1)\cdot(b^2+b+1)-3b\cdot(b+1)-b+2$ $\left[b<\frac{1}{3}\right]$

14. $\frac{1}{4}c-\frac{9}{14}+\frac{1}{3}c\cdot\left(\frac{1}{4}-c\right)\le\left(\frac{1}{2}c-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}c\right)-\frac{1}{6}\cdot\left(c-\frac{3}{2}\right)^2$ $\left[c\ge-\frac{93}{203}\right]$

15. $\left(\frac{1}{2}d-1\right)\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}d\right)+\frac{1}{5}<\left(\frac{1}{2}d+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}d^2-\frac{1}{6}d+\frac{1}{9}\right)-\frac{1}{2}d\cdot\left(\frac{1}{2}d-\frac{1}{3}\right)^2$ $\left[d>-\frac{94}{165}\right]$

16. $(x-1)^3-(x+1)\cdot(x^2+2x-1)-x>(x+2)^2-(2x-1)\cdot(x+1)-5x^2+1-2x$ $[\varnothing]$

17. $\left(\frac{1}{2}x-1\right)^3+\left(\frac{1}{3}x+1\right)^3+\frac{17}{144}x^2-\left(\frac{1}{4}x-1\right)^2\ge\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(x-\frac{1}{4}\right)+\frac{11}{216}x^3$ $\left[x\ge\frac{45}{128}\right]$

18. $(m-3)\cdot(1-11m)-\frac{3}{4}<(m-1)^2-\left(3m-\frac{1}{2}\right)\cdot(4m+1)$ $\left[m<\frac{21}{148}\right]$

19. $\left(q+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(2q-\frac{1}{3}\right)-7q\cdot\left(q-\frac{1}{4}\right)\le(q-1)\cdot(-2q-3)-(q+4)\cdot(3q+1)$ $\left[q\le-\frac{14}{173}\right]$

20. $(t+1)^3-(t+1)\cdot(t^2-t+2)+(t+3)^2<(2t-3)^2+t-5$ $\left[t<-\frac{4}{19}\right]$

21. $(u-2)^2\cdot(u+2)^2+3u^3\cdot(u+1)\le 2-3\cdot(u+1)^3-2u^2\cdot(u-1)^2-u^2\cdot(4u-3)$ $[\varnothing]$

22. $\left(v+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(v-\frac{1}{3}\right)-(v^2-v+1)\cdot(v^2+v-1)-6v^3<(-v^2-3v+2)\cdot(v^2+3v-2)+7v^2$ $\left[v>\frac{29}{83}\right]$

23. $\frac{\frac{x+1}{2}\cdot(2x-1)}{4}-\left(\frac{x-1}{3}\right)^2+\frac{\frac{3x-1}{3}\cdot(1-x)}{2}+\frac{13}{36}x^2<0$ $\left[x<\frac{29}{73}\right]$

L'angolo delle correzioni

Correggere i seguenti procedimenti errati

1. $3b+1>-2b+5\Rightarrow 3b+2b<5-1\Rightarrow 5b<4\Rightarrow b<\frac{4}{5}$
2. $\frac{7}{2}c-1<c+4\Rightarrow 7c-2<c+4\Rightarrow 7c-c<4+2\Rightarrow 6c<6\Rightarrow c<1$
3. $\frac{2d+1}{-3}>\frac{4d+1}{2}\Rightarrow 4d+2>-12d-3\Rightarrow 16d>-5\Rightarrow d>-\frac{5}{16}$
4. $2e+3>2e+1\Rightarrow e>-2$
5. $\frac{3}{f}>\frac{4}{5}\Rightarrow\frac{f}{3}>\frac{5}{4}\Rightarrow 4f>15\Rightarrow f>\frac{15}{4}$
6. $\frac{-5}{n}>\frac{3}{5n}\Rightarrow\frac{-25n}{5n}-\frac{3}{5n}>0\Rightarrow -25n-3>0\Rightarrow n<\frac{3}{25}$

Giochiamo alla matematica

Anche con le disequazioni vogliamo far vedere che, applicando opportunamente proprietà non del tutto corrette possiamo ricavare risultati paradossali.

Passo	Espressione	Giustificazione
1	$x < 1$	È l'ipotesi.
2	$x + 1 < 2$	Aggiungiamo 1 ad entrambi i membri
3	$(x + 1)^2 < 4$	Innalziamo al quadrato entrambi i membri
4	$(x + 1)^2 < (-2)^2$	Scriviamo il secondo membro come potenza di – 2
5	$x + 1 < -2$	Estraiamo la radice quadrata di entrambi i membri
6	$x < -3$	Risolviamo la disequazione

Abbiamo così fatto vedere il fatto, non vero, che, se x è un numero reale minore di 1, allora è anche un numero minore di – 3e ciò è assurdo, perché per esempio $0 < 1$ ma $0 > -3$.

L'assurdità nasce dal passo 5, dato che la radice quadrata di un numero positivo, e $(-2)^2$ è un numero positivo, non può essere un numero negativo.

Attività.

I seguenti procedimenti sono errati: determinare in quale passo viene commesso l'errore.

1.

Passo	Espressione	Giustificazione
1	$x^2 > x$	È l'ipotesi
2	$x > 1$	Divido entrambi i membri per x

Quindi se il quadrato di un numero è maggiore della base vuol dire che il numero è maggiore di 1. Ciò non è vero, perché per esempio $(-7)^2 > -7$, ma $-7 < 1$; anzi questo è vero per tutti i numeri negativi.

2.

Passo	Espressione	Giustificazione
1	$x^2 + 1 > 2x$	È l'ipotesi
2	$x^2 + 2x + 1 > 4x$	Aggiungo a entrambi i membri $2x$
3	$(x + 1)^2 > 4x$	Il primo membro è lo sviluppo del quadrato di un binomio
4	$x + 1 > 2$	Estraggo la radice quadrata di entrambi i membri
5	$x > 1$	Risolvo la disequazione

La disequazione che rappresenta l'ipotesi è verificata per un numero negativo qualsiasi, per esempio da $x = -3$, infatti $(-3)^2 + 1 > 2 \cdot (-3)$, mentre non lo è la disequazione finale.

3.

Passo	Espressione	Giustificazione
1	$a > b$	È l'ipotesi
2	$a = b + c$, con $c > 0$	Segue dal passo 1
3	$a - b = c$	Trasportiamo b al primo membro
4	$(a - b) \cdot (a - b) = c \cdot (a - b)$	Moltiplichiamo entrambi i membri per $a - b$
5	$(a - b)^2 = c \cdot (a - b)$	Moltiplichiamo i fattori al primo membro
6	$a^2 - 2ab + b^2 = ac - bc$	Sviluppiamo i prodotti
7	$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$	Trasportiamo alcuni termini da un membro all'altro
8	$a \cdot (a - b - c) = b \cdot (a - b - c)$	Mettiamo in evidenza a fattor comune
9	$\frac{a \cdot (a-b-c)}{a-b-c} = \frac{b \cdot (a-b-c)}{a-b-c}$	Dividiamo entrambi i membri per il fattore comune $(a - b - c)$
10	$a = b$	Il risultato contrasta con l'ipotesi

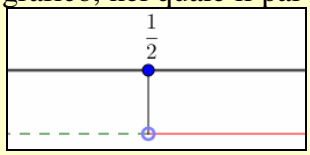
Disequazioni prodotto e disequazioni fratte

Abbiamo già visto che riusciamo a risolvere particolari equazioni di grado superiore al primo, se riusciamo a scomporle in fattori di primo grado. Lo stesso accade anche per le disequazioni.

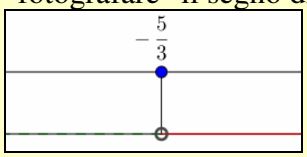
Esempio 7

Risolvere la disequazione $(2d-1)\cdot(3d+5)<0$. Vediamo di interpretare al solito l'equazione nella sua forma di quesito: *Per quali numeri reali d l'espressione* $(2d-1)\cdot(3d+5)$ *è negativa?* Dobbiamo stabilire il segno di un prodotto. Sappiamo che il prodotto di due numeri reali non nulli è negativo solo se i numeri hanno segno opposto, quindi in linea teorica dovremmo stabilire se e quando accade che **contemporaneamente** si abbia $(2d-1)>0$ e $(3d+5)<0$ oppure $(2d-1)<0$ e $(3d+5)>0$. Potremmo affrontare il problema stabilendo il segno di ciascuno dei fattori nell'insieme dei numeri reali, ossia risolvendo separatamente le disequazioni $(2d-1)<0$ e $(3d+5)<0$. Così otteniamo: $(2d-1)<0 \Rightarrow d<\frac{1}{2}$; $(3d+5)<0 \Rightarrow d<-\frac{5}{3}$.

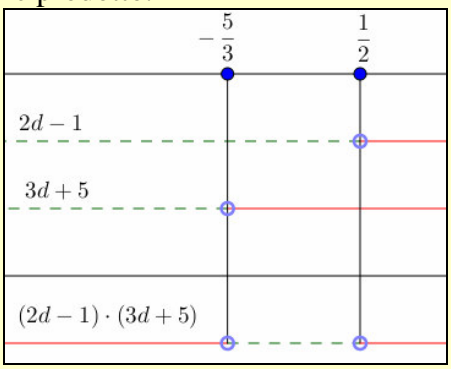
Crediamo che sia evidente che l'aver saputo dove ciascun fattore è negativo ci abbia anche informato, per esclusione, dove lo stesso è positivo e dove è nullo. Possiamo cioè usare il seguente grafico, nel quale il pallino vuoto indica esclusione del relativo valore, per "fotografare" il segno di $(2d-1)$:



e usare quest'altro grafico per il segno di $(3d+5)$:



Spieghiamo cosa abbiamo inteso rappresentare con i grafici. Abbiamo effettuato una partizione dei numeri reali nell'insieme dei valori (non tutti e soli positivi), che rendono positiva un'espressione (lo abbiamo indicato con una linea continua) e nell'insieme dei valori (non necessariamente tutti e soli negativi) che la rendono negativa (lo abbiamo indicato con una linea tratteggiata), mentre l'elemento separatore è il numero che l'annulla. Se adesso riportiamo (in una sorta di intersezione delle due rappresentazioni) il tutto nello stesso grafico, riusciamo ad avere un unico "colpo d'occhio" sull'intera espressione prodotto.



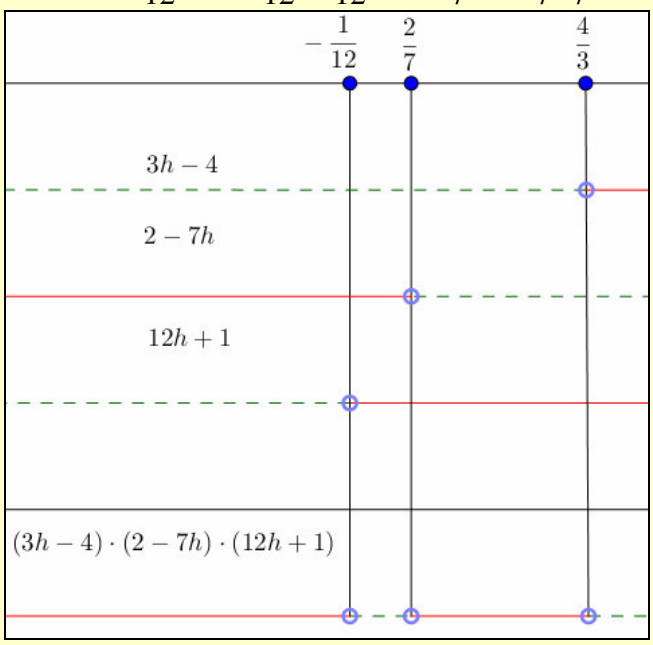
Nell'ultima riga del grafico abbiamo riportato il segno del prodotto, ottenuto dal prodotto dei segni dei fattori. Quindi alla domanda iniziale: *Esistono numeri reali che rendono negativo il prodotto* $(2d-1)\cdot(3d+5)$? Possiamo rispondere: *Sì, essi sono tutti i numeri maggiori di* $-\frac{5}{3}$ *e contemporaneamente minori di* $\frac{1}{2}$. In simboli $-\frac{5}{3}<d<\frac{1}{2}$.

Un altro esempio.

Esempio 8

Risolvere la disequazione $(3h-4)\cdot(2-7h)\cdot(12h+1)>0$. Determiniamo il segno di ciascuno dei tre fattori stabilendo, per esempio, quando sono positivi e per completezza determineremo anche quando sono negativi o nulli. $3h-4>0 \Rightarrow h>\frac{4}{3}$; $2-7h>0 \Rightarrow h<\frac{2}{7}$; $12h+1>0 \Rightarrow h>-\frac{1}{12}$. Per avere una visione generale

suddividiamo la retta reale ordinata in 7 sottoinsiemi, tenendo conto che i valori di suddivisione di tali intervalli sono, nell'ordine, $-\frac{1}{12}$, $\frac{2}{7}$, e $\frac{4}{3}$. Consideriamo così tutti i numeri reali h che verificano una delle seguenti 7 proprietà: $h<-\frac{1}{12}, h=-\frac{1}{12}, -\frac{1}{12}<h<\frac{2}{7}, h=\frac{2}{7}, \frac{2}{7}<h<\frac{4}{3}, h=\frac{4}{3}, h>\frac{4}{3}$ e la relativa rappresentazione grafica.



Dall'esame del grafico appare chiaro che l'insieme dei valori che rendono l'espressione positiva è data dai sottoinsiemi i cui elementi ubbidiscono alle seguenti condizioni: $\left\{h\in R: h<-\frac{1}{12}\right\}\cup\left\{h\in R: \frac{2}{7}<h<\frac{4}{3}\right\}$.

Pertanto alla richiesta: $h = 0$ è una soluzione della disequazione data? La risposta è no, poiché $0\notin \left\{h\in R: h<-\frac{1}{12}\right\}\cup\left\{h\in R: \frac{2}{7}<h<\frac{4}{3}\right\}$.

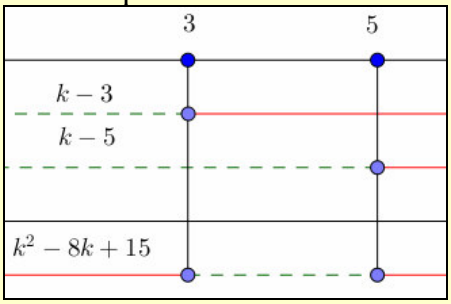
Alla domanda: $h = 1$ è una soluzione? La risposta è sì, poiché $1\in \left\{h\in R: h<-\frac{1}{12}\right\}\cup\left\{h\in R: \frac{2}{7}<h<\frac{4}{3}\right\}$.

Analogamente non sono soluzioni i valori $h=-\frac{1}{12}$, $h=\frac{2}{7}$ e $h>\frac{4}{3}$.

Un esempio apparentemente più complesso.

Esempio 9

Risolvere la disequazione: $k^2 - 8k + 15 \geq 0$. Abbiamo una disequazione di secondo grado, ma possiamo ugualmente risolverla se riusciamo a scomporla nel prodotto di due fattori di primo grado. Così, per le proprietà dei trinomi di secondo grado, possiamo scrivere: $(k - 3) \cdot (k - 5) \geq 0$. Risolviamo separatamente le disequazioni corrispondenti ai due fattori: $k - 3 \geq 0 \Rightarrow k \geq 3$ e $k - 5 \geq 0 \Rightarrow k \geq 5$. Con il seguente grafico associato

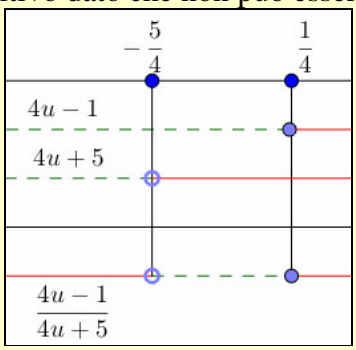


Determiniamo le soluzioni della disequazione che sono quelli dove abbiamo linee continue, cioè $k \leq 3 \vee k \geq 5$. Stavolta anche le soluzioni che annullano la disequazione, $k = 3$ e $k = 5$, sono accettate.

Adesso determiniamo il segno di un quoziente.

Esempio 10

Risolvere la disequazione $\frac{4u-1}{4u+5} \geq 0$. Sappiamo che una divisione è un caso particolare di moltiplicazione, quindi anche stavolta si tratta di determinare il segno di un prodotto (frazione) mediante il segno dei suoi fattori (numeratore e denominatore). Si ha: $4u - 1 > 0 \Rightarrow u > \frac{1}{4}$ e $4u + 5 > 0 \Rightarrow u > -\frac{5}{4}$, osserviamo che il denominatore lo abbiamo posto solo positivo dato che non può essere zero. Otteniamo il grafico seguente.

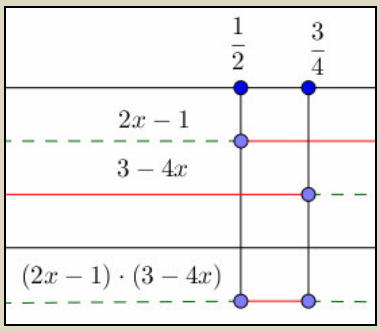


Le soluzioni cercate sono quelle dove il tratto è continuo e i pallini pieni, cioè $u < -\frac{5}{4} \vee u \geq \frac{1}{4}$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Risolvere la disequazione $(2x-1)\cdot(3-4x)\le 0$. Determiniamo i segni dei singoli fattori: $2x-1\le 0\Rightarrow x\le\frac{1}{2}$ e $3-4x\le 0\Rightarrow 4x-3\ge 0\Rightarrow x\ge\frac{3}{4}$. Rappresentiamo tali segni in un grafico.



Quindi le soluzioni cercate sono quelle dove il tratto non è continuo, cioè $x\le\frac{1}{2}\vee x\ge\frac{3}{4}$.

Determinare l'insieme delle soluzioni delle seguenti disequazioni

Livello 1

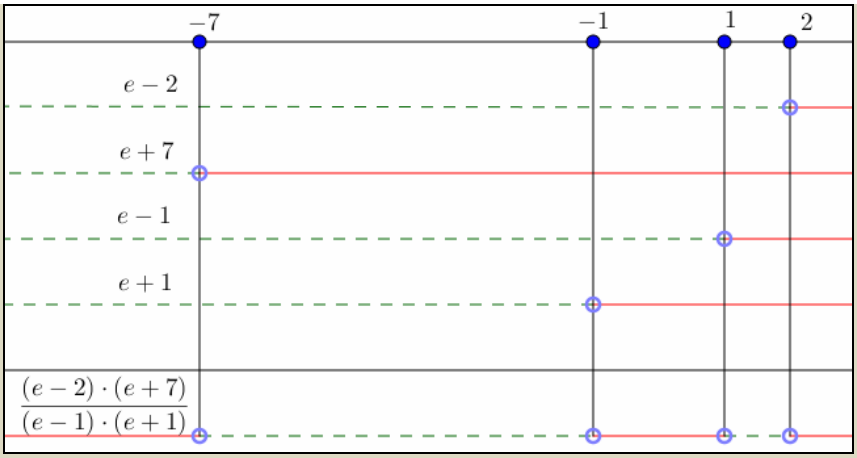
1. $(3w-1)\cdot(5-6w)\ge 0;\ (7y-3)\cdot(2-y)<0;\ (4a+1)\cdot(3a-2)\le 0$ $\left[\frac{1}{3}\le w\le\frac{5}{6};\ y<\frac{3}{7}\vee y>2;\ -\frac{1}{4}\le a\le\frac{2}{3}\right]$
2. $(x-2)\cdot(-x+3)<0;\ (y+2)\cdot(2-y)\ge 0;\ (3z-2)\cdot(2z+1)<0$ $\left[x<2\vee x>3;\ -2\le y\le 2;\ -\frac{1}{2}<z<\frac{2}{3}\right]$
3. $(x-1)\cdot(x+2)\ge 0;\ (4m-1)\cdot(1-2m)\le 0;\ (2x+1)\cdot(2x+1)<0$ $\left[x\le -2\vee x\ge 1;\ m\le\frac{1}{4}\vee m\ge\frac{1}{2};\ \varnothing\right]$
4. $(2y-4)\cdot(-7+3y)>0;\ (3z-4)\cdot(3z-4)>0;\ (5x+2)\cdot(10x+4)\ge 0$ $\left[y<2\vee y>\frac{7}{3};\ z\ne\frac{4}{3};\ \forall x\in\mathbb{R}\right]$
5. $(8f-7)\cdot(f+1)\cdot(3f-2)<0;\ (4c-1)\cdot(2c+1)\cdot(3c-1)<0$ $\left[f<-1\vee\frac{2}{3}<f<\frac{7}{8};\ c<-\frac{1}{2}\vee\frac{1}{4}<c<\frac{1}{3}\right]$
6. $\frac{1}{b+2}>0;\ \frac{5b-3}{2b+1}<0;\ \frac{4b-1}{3b-5}\le 0$ $\left[b>-2;\ -\frac{1}{2}<b<\frac{3}{5};\ \frac{1}{4}\le b<\frac{5}{3}\right]$
7. $\frac{3c-5}{c+2}\le 0;\ \frac{7c-1}{1-7c}\ge 0;\ \frac{6c+2}{2c-6}>0$ $\left[-2<c\le\frac{5}{3};\ \varnothing;\ c<-\frac{1}{3}\vee c>3\right]$
8. $\frac{5n-1}{3n+7}>0;\ \frac{4n-2}{2n-1}\le 0;\ \frac{6n-5}{13n+1}>0$ $\left[n<-\frac{7}{3}\vee n>\frac{1}{5};\ \varnothing;\ n<-\frac{1}{13}\vee n>\frac{5}{6}\right]$

Lavoriamo insieme

Risolvere la disequazione $\frac{9}{e+1}+1<\frac{4}{e-1}$. Procediamo come di consueto con le frazioni algebriche, determinando il loro minimo comune denominatore

$$\frac{9\cdot(e-1)+(e+1)\cdot(e-1)}{(e+1)\cdot(e-1)}<\frac{4\cdot(e+1)}{(e-1)\cdot(e+1)}\Rightarrow\frac{9e-9+e^2-1-4e-4}{(e-1)\cdot(e+1)}<0\Rightarrow\frac{e^2+5e-14}{(e-1)\cdot(e+1)}<0$$

Qui non possiamo eliminare il denominatore comune, come già facevamo nel caso delle equazioni fratte, dopo aver fatto una adeguata ricerca delle condizioni di realtà, infatti ci interessa sapere quando la frazione è positiva e, pertanto, l'apporto del segno del denominatore è indispensabile. Perciò scomponiamo il polinomio al numeratore come un trinomio di secondo grado: $\frac{e^2+5e-14}{(e-1)\cdot(e+1)}<0\Rightarrow\frac{(e-2)\cdot(e+7)}{(e-1)\cdot(e+1)}<0$ e studiamo il segno dei quattro fattori, ottenendo il grafico seguente



Quindi le soluzioni cercate sono quelle relative al tratto non continuo, quindi: $-7 < e < -1 \vee 1 < e < 2$.

Livello 2

9. $(3y+1)\cdot(5y-2)\cdot(7y+4)>0;\ (6m-2)\cdot(3m-1)\cdot(3m+1)^2\le 0$
$\left[-\frac{4}{7}<y<-\frac{1}{3}\vee y>\frac{2}{5};m=-\frac{1}{3}\vee m=\frac{1}{3}\right]$

10. $(w+1)\cdot(w+2)\cdot(w-1)\cdot(w-2)>0;\ (5t+2)^2\cdot(3t-4)^3>0$ $\left[-2<w<-1\vee w>1;t>\frac{4}{3}\right]$

11. $(-3a+2)\cdot(-2a+3)\cdot(3a-1)\cdot(a-3)\le 0;\ (6a+5)^3\cdot(5a-2)^5\le 0$ $\left[\frac{1}{3}\le a\le\frac{2}{3}\vee\frac{3}{2}\le a\le 3;-\frac{5}{6}\le a\le\frac{2}{5}\right]$

12. $(2x+1)\cdot(3x-1)\cdot(4x+1)\cdot(-x+1)\cdot(-3x+2)\ge 0$ $\left[-\frac{1}{2}\le x\le-\frac{1}{4}\vee\frac{1}{3}\le x\le\frac{2}{3}\vee x\ge 1\right]$

13. $\frac{(d+2)\cdot(d-1)}{d-3}<0;\ \frac{(d-4)\cdot(1-d)}{2d-3}\ge 0;\ \frac{3d-1}{(d+1)\cdot(3d+1)}\ge 0$
$\left[d<-2\vee 1<d<3;d\le 1\vee\frac{3}{2}<d\le 4;-1<d<-\frac{1}{3}\vee d\ge\frac{1}{3}\right]$

14. $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}>0;\ \frac{2}{x-2}-\frac{3}{x+5}<0;\ \frac{5}{x-4}-\frac{25}{5x+4}\le 0$ $\left[x<-1\vee x>1;-5<x<2\vee x>16;-\frac{4}{5}<x<4\right]$

15. $\frac{(2z-3)\cdot(5z-1)}{z+4}\ge 0;\ \frac{4z+7}{(7z-4)\cdot(7z+2)}>0;\ \frac{z-1}{z+2}-\frac{z+2}{z-1}<0$
$\left[-4<z\le\frac{1}{5}\vee z\ge\frac{3}{2};-\frac{7}{4}<z<-\frac{2}{7}\vee z>\frac{4}{7};-2<z<-\frac{1}{2}\vee z>1\right]$

16. $\frac{(2a-3)\cdot(3a+1)}{(5a+7)\cdot(3-8a)}>0;\ \frac{(3a-2)\cdot(2a-3)}{(3a+2)\cdot(2a+3)}\le 0;\ \frac{a\cdot(a-1)}{(a+1)\cdot(2a-3)}\ge 0$
$\left[-\frac{7}{5}<a<-\frac{1}{3}\vee\frac{3}{8}<a<-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}<a<-\frac{2}{3}\vee\frac{2}{3}\le a\le\frac{3}{2};a<-1\vee 0\le a\le 1\vee a>\frac{3}{2}\right]$

17. $\frac{1}{2b+1}>\frac{3}{5b-2};\ \frac{11}{3b-5}<\frac{12}{2b-7};\ \frac{4}{b-1}-\frac{3b}{b+1}\ge\frac{1-3b^2}{b^2-1}$
$\left[b<-5\vee-\frac{1}{2}<b<\frac{2}{5};-\frac{17}{14}<b<\frac{5}{3}\vee b>\frac{7}{2};-1<b\le-\frac{3}{7}\vee b>1\right]$

18. $g^2+g-12\ge 0;\ 4g^2-4g+1\le 0;\ g^2-13g+42<0$ $\left[g\le 4\vee g\ge 3;g=\frac{1}{2};6<g<7\right]$

19. $19m-6m^2-15\le 0;\ 24m^2-14m+2>0;\ 63m^2-32m+4\le 0$ $\left[m\le\frac{3}{2}\vee m\ge\frac{5}{3};m<\frac{1}{4}\vee m>\frac{1}{3};\frac{2}{9}\le m\le\frac{2}{7}\right]$

20. $x^2-4<0;\ 16x^4-81\le 0;\ 36x^4+1>0$ $\left[-2<x<2;-\frac{3}{2}\le x\le\frac{3}{2};\varnothing\right]$

21. $4x^2-12x+9\geq 0;\ 9x^2-6x+1<0;\ 9x^2+12x+4\geq 0$ $[\forall x\in\mathbb{R};\ \varnothing;\ \forall x\in\mathbb{R}]$

22. $9x^2-42x+49>0;\ 121x^2-22x+1\leq 0;\ 121x^2+22x+1>0$ $\left[x\neq\frac{7}{3};x=\frac{1}{11};x\neq-\frac{1}{11}\right]$

23. $x^2-10x+25<0;\ x^2+8x-65>0;\ x^2+3x-180\leq 0$ $[\varnothing;\ x<-13\vee x>5;\ -15\leq x\leq 12]$

24. $x^3+3x^2+3x+1>0;\ x^3-3x^2+3x-1\leq 0;\ (y^2-5y+6)\cdot(y^2-6y+5)\geq 0$
$[x>-1;\ x\leq 1;\ y\leq 1\vee 2\leq y\leq 3\vee y\geq 5]$

25. $(h^2-9)\cdot(h^2-7h+10)\leq 0;\ (h-1)\cdot(h^2-4h+4)\geq 0$ $[-3\leq h\leq 2\vee 3\leq h\leq 5;\ h\geq 1]$

26. $(x^2-x-2)\cdot(x^2+3x+2)<0;\ (x^2+7x-44)\cdot(x^2-15x+44)\leq 0$ $[x\neq -1,-2<x<2;\ -11\leq x\leq 11]$

27. $(x^2+2x-15)\cdot(x^2+x-6)>0;\ (x^2-7x-8)\cdot(-x^2+11x-24)\geq 0$
$[x<-5\vee -3<x<2\vee x>3;\ -1\leq x\leq 3,\ x=8]$

28. $(x^2-2x+1)\cdot(x^2-4x+4)\leq 0;\ (4x^2-20x+25)\cdot(4x^2-25)>0$ $\left[x=1\vee x=2;x<-\frac{5}{2}\vee x>\frac{5}{2}\right]$

29. $(4x^2+4x+1)\cdot(9x^2-6x+1)>0;\ (49x^2-28x+4)\cdot(9x^2+30x+25)<0$ $\left[x\neq-\frac{1}{2},x\neq\frac{1}{3};\varnothing\right]$

30. $\frac{m^2-3m+2}{m^2+m-2}\geq 0;\frac{m^2-9m+14}{m^2-10m+21}\leq 0;\frac{m^2-10m-11}{m^2+12m+11}>0$ $[m<-2\vee m\geq 2;2\leq m<3;\ m<-11\vee m>11]$

31. $\frac{n^2-49}{n^2-36}\leq 0;\ \frac{n^2-4}{n^2-16}>0;\ \frac{9n^2-1}{1-9n^2}\leq 0$ $[-7\leq n\leq -6\vee 6<n\leq 7;\ n<-4\vee -2<n<2\vee n>4;\ \forall n\in\mathbb{R}]$

32. $\frac{x^2+2x+1}{(x+3)^3}>0;\ \frac{4x-1}{(3x-1)^2}-\frac{5}{3x-1}\leq\frac{2x}{27x^3-9x^2-3x+1}$ $\left[x>-3,x\neq-1;-\frac{4}{11}\leq x<\frac{1}{3}\vee x>\frac{1}{3}\right]$

33. $\frac{(x^2-4x+3)\cdot(x^2+9x+14)}{(x^2+4x+3)\cdot(x^2-9x+14)}\geq 0;\ \frac{x+7}{x^3+1}\leq\frac{x+1}{x^2-x+1}$
$[x\leq -7\vee -3<x\leq -2\vee -1<x\leq 1\vee x>7;\ -3\leq x<-1\vee x\geq 2]$

34. $\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2+2x+1}\leq 0;\ \frac{15x^2-18x-1}{x^3-1}+\frac{5}{x^2+x+1}\geq 0$ $\left[x\leq 1,x\neq -1;-\frac{1}{3}\leq x<1\vee x\geq\frac{6}{5}\right]$

Livello 3

In alcuni degli esercizi seguenti è opportuno usare il teorema di Ruffini

35. $\frac{2}{c^2+1}-\frac{4}{2c^2+c+3}<0;\ \frac{7c}{c^2-2c+1}-\frac{4c+1}{c^2-1}>\frac{21c+5}{c^3-c^2-c+1}$ $\left[c<-1;-1<c<-\frac{1}{3}\vee c>4\right]$

36. $a^3-4a^2-11a+30>0;\ 27a^3-135a^2+225a-125\leq 0;\ 7y^3+22y^2-375y-54\leq 0$
$\left[-3<a<2\vee a>5;a\leq\frac{5}{3};y\leq -9\vee -\frac{1}{7}\leq y\leq 6\right]$

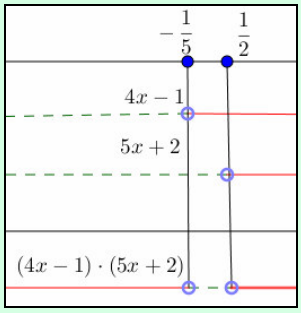
37. $2x^3-9x^2+x+12<0;\ x^3+4x^2-19x+14\geq 0$ $\left[x<-1\vee\frac{3}{2}<x<4;-7\leq x\leq 1\vee x\geq 2\right]$

38. $6a^3+5a^2-12a+4\geq 0;\ 2a^3+5a^2-83a+40<0$ $\left[-2\leq a\leq\frac{1}{2}\vee a\geq\frac{2}{3};a<-8\vee\frac{1}{2}<a<5\right]$

39. $\frac{(p^2-8p+15)\cdot(p^2-4)}{(p^2+8p+15)\cdot(p^2-1)}\geq 0;\ \frac{11p-1}{p^2+4p+4}<\frac{13p+1}{p^2-4p+4}-\frac{2p^3+98p^2}{p^4-8p^2+16}$
$[p<-5\vee -3<p\leq -2\vee -1<p<1\vee 2<p<3;\ p>-1,p\neq 2]$

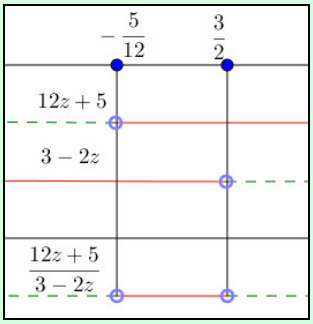
L'angolo delle correzioni

Correggere i seguenti procedimenti errati

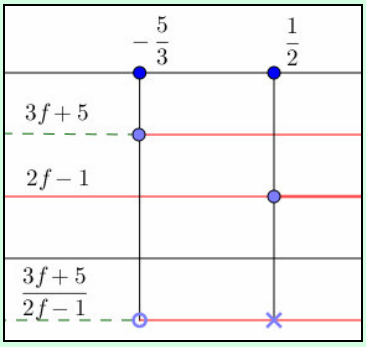
1. $(4x-1)\cdot(5x+2)>1 \Rightarrow 4x>1 \vee 5x+2>1$. Nel primo caso ho $4x>2$ da cui $x>\frac{1}{2}$, nel secondo $5x>-1$ e perciò $x>-\frac{1}{5}$. Unisco i due risultati nel seguente grafico: 

posso perciò concludere che la soluzione è $x<-\frac{1}{5}$ o $x>\frac{1}{2}$

2. $\frac{3y-1}{5y+3}<0 \Rightarrow 3y-1<0 \Rightarrow y<\frac{1}{3}$

3. $\frac{12z+5}{3-2z}\geq 0 \Rightarrow$ 

$\Rightarrow \left\{z\in R: -\frac{5}{12}\leq z\leq \frac{3}{2}\right\}$

4. $\frac{3f+5}{2f-1}\geq 0 \Rightarrow$ 

$\Rightarrow f\neq\frac{1}{2}$

5. $\frac{1}{z}-\frac{1}{z}>0 \Rightarrow \frac{1}{z}>\frac{1}{z} \Rightarrow z>0$

Sistemi di disequazioni in un'incognita

Il problema

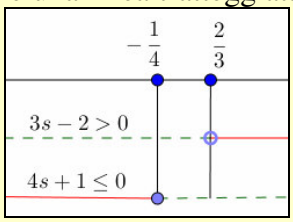
I requisiti fisici richiesti per potere accedere a un concorso nelle forze armate sono i seguenti:

- altezza compresa fra 152 *cm* e 200 *cm*;
- circonferenza toracica compresa fra 70 *cm* e 110 *cm*;
- peso compreso fra 60 *kg* e 100 *kg*.

Il precedente è un classico problema che si può impostare con quello che nelle matematiche viene chiamato un sistema, dato che le caratteristiche richieste devono essere possedute tutte e non solo alcune, quindi per la sua risoluzione dobbiamo cercare l'intersezione di più insiemi, corrispondenti alle soluzioni, se ci sono, comuni a tutte le equazioni o disequazioni che lo compongono.

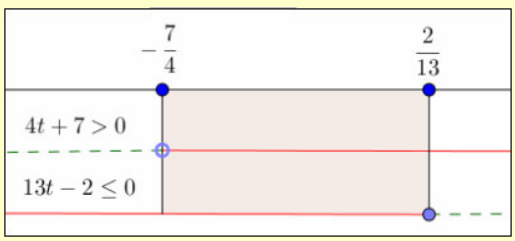
Esempio 11

- Ciascuna delle richieste del problema posto conduce alla risoluzione di un sistema del seguente tipo: $\begin{cases} 152 \le h \le 200 \\ 70 \le c \le 110 \\ 60 \le p \le 100 \end{cases}$, ossia di un sistema di tre disequazioni in altrettante incognite. Non vi è nulla da risolvere perché abbiamo tre incognite con tre distinte soluzioni.
- Risolvere il sistema $\begin{cases} 3s - 2 > 0 \\ 4s + 1 \le 0 \end{cases}$. In questo caso invece dobbiamo determinare le eventuali soluzioni comuni. Cominciamo a risolvere singolarmente ciascuna disequazione: $\begin{cases} s > \frac{2}{3} \\ s \le -\frac{1}{4} \end{cases}$. A noi non interessa stabilire i segni delle due espressioni, ma solo determinare se vi sono soluzioni comuni alle due disequazioni, quindi utilizziamo ancora un grafico simile a quello usato per le disequazioni prodotto, ma non vi scriviamo segni. Mettiamo una linea continua per indicare che tutti i punti di quel segmento o di quella semiretta verificano la disequazione, e una linea tratteggiata per indicare il contrario. In questo caso particolare abbiamo il seguente grafico.



Poiché vogliamo determinare le soluzioni comuni dobbiamo andare alla ricerca di sottoinsiemi per i quali, relativamente sia alla prima sia alla seconda disequazione vengono associate linee continue, cosa che in questo caso non accade: pertanto il sistema è privo di soluzioni.

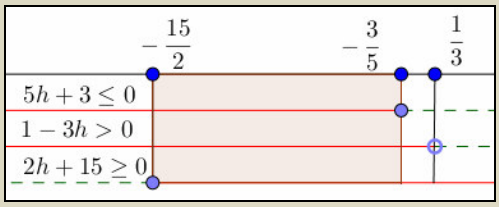
- Risolvere il sistema $\begin{cases} 4t + 7 > 0 \\ 13t - 2 \le 0 \end{cases}$. Si ha il sistema equivalente: $\begin{cases} t > -\frac{7}{4} \\ t \le \frac{2}{13} \end{cases}$, al quale associamo il grafico seguente:



nel quale abbiamo selezionato la soluzione comune che possiamo scrivere $-\frac{7}{4} < t \le \frac{2}{13}$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Risolvere il sistema di disequazioni: $\begin{cases} 5h+3\le 0 \\ 1-3h>0 \\ 2h+15\ge 0 \end{cases}$. Risolvendo singolarmente ciascuna disequazione, si ottiene: $\begin{cases} h\le -\frac{3}{5} \\ h<\frac{1}{3} \\ h\ge -\frac{15}{2} \end{cases}$, al quale associamo il grafico seguente. 

Considerando le soluzioni comuni, otteniamo la soluzione: $-\frac{15}{2}\le h\le -\frac{3}{5}$.

Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni

Livello 1

1. $\begin{cases} 11w-5>0 \\ 15w-7>0 \end{cases}$; $\begin{cases} 4x-1>0 \\ 4x+7\le 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 13x\ge 12 \\ 12x\le 13 \end{cases}$; $\begin{cases} x+1>0 \\ 2x-3<0 \end{cases}$ $\left[w>\frac{7}{15};\varnothing;\frac{12}{13}\le x\le\frac{13}{12};-1<x<\frac{3}{2}\right]$

2. $\begin{cases} 43a-1<0 \\ 12a\ge -3 \end{cases}$; $\begin{cases} 4\ge 11a \\ -12a+5<0 \end{cases}$; $\begin{cases} -2x+5>0 \\ 4x+1<0 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x-5\le 0 \\ 2-7x>0 \end{cases}$ $\left[-\frac{1}{4}\le a\le\frac{1}{43};\varnothing;x<-\frac{1}{4};x<\frac{2}{7}\right]$

3. $\begin{cases} 13-2x\ge 0 \\ 0<4x-9 \end{cases}$; $\begin{cases} 7y-18>0 \\ -y+2>0 \end{cases}$; $\begin{cases} 13y-4\ge 1 \\ y-3\le -2y \end{cases}$; $\begin{cases} 4y-5>7-2y \\ -3y+1\le 2-5y \end{cases}$ $\left[\frac{9}{4}<x\le\frac{13}{2};\varnothing;\frac{5}{13}\le y\le 1;\varnothing\right]$

4. $\begin{cases} -34j+17>11j+13 \\ 4j-14\le 43j+1 \end{cases}$; $\begin{cases} 12j-4>-7 \\ 4j-2+3j\ge 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 0\le 7-3j+1 \\ 4\ge -2j+5 \end{cases}$ $\left[-\frac{5}{13}\le j<\frac{4}{25};j\ge\frac{2}{7};\frac{1}{2}\le j\le\frac{8}{3}\right]$

5. $\begin{cases} 3k-1\le 0 \\ 6k-7>0 \\ k+1\ge 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2k\ge 1 \\ 1\le -2k \\ 3+5k>0 \end{cases}$; $\begin{cases} k\ge 0 \\ 0\le -2k+1 \\ 3>-5k \end{cases}$; $\begin{cases} x+1>0 \\ -x+5\le 0 \\ -2x+3<0 \end{cases}$ $\left[\varnothing;\varnothing;0\le k\le\frac{1}{2};x\ge 5\right]$

6. $\begin{cases} x-3>1 \\ 2x-5\le -1 \\ 4>7x-1 \end{cases}$; $\begin{cases} 2\ge -x+3 \\ 4-x\le 2x+1 \\ 7x>-3+4x \end{cases}$ $\begin{cases} -x+3<2x+1 \\ x-4\le 2x+5 \\ (x-1)\cdot(x-2)-1<(x+2)\cdot(x-1)+3 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x+5<5-2x \\ -x+1\ge 0 \\ 3x>3\cdot(x-1) \end{cases}$ $\left[\varnothing;x\ge 1;x>\frac{2}{3};x<0\right]$

Livello 2

7. $\begin{cases} (3x-2)\cdot(5x+1)>0 \\ (12x-1)\cdot(8-5x)\le 0 \end{cases}$; $\begin{cases} (x+1)\cdot(x-1)\ge 0 \\ (x-2)\cdot(x+2)\le 0 \end{cases}$; $\begin{cases} (x+1)\cdot(x-1)\le 0 \\ (x-2)\cdot(x+2)\ge 0 \end{cases}$ $\left[x<-\frac{1}{5}\vee x\ge\frac{8}{5};-2\le x\le -1\vee 1\le x\le 2;\varnothing\right]$

8. $\begin{cases} x^2+3>0 \\ -7x^2<0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+3\ge 0 \\ 3x^2\le 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+5<0 \\ 4x^2\ge 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+4x+4>0 \\ 3x+1\ge 2 \end{cases}$ $\left[x\ne 0;x=0;\varnothing;x\ge\frac{1}{3}\right]$

9. $\begin{cases} x^2+2x+1\le 0 \\ x-3<0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+6x+9\ge 0 \\ 2x\ge -7 \end{cases}$; $\begin{cases} 4x^2+4x+1>0 \\ x^4>0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x^2-x\ge 2\cdot(x-1)\cdot(x-2) \\ 3x-5>-1 \end{cases}$

$$\left[x=-1; x\geq -\frac{7}{2}; x\neq -\frac{1}{2}, x\neq 0; x>\frac{4}{3}\right]$$

10. $\begin{cases} x^2-1\geq 0 \\ x^8<-3 \end{cases}; \begin{cases} 3x-2<2x+1 \\ (x-1)^2-3x<(x-1)\cdot(x+3)-5 \end{cases}; \begin{cases} 7x-2\leq 3x-5 \\ (2x+1)^2+5x\geq 2\cdot(x-1)\cdot(2x-5)+1 \end{cases}$ $\left[\varnothing; \frac{9}{7}<x<3; \varnothing\right]$

11. $\begin{cases} y^2-3y+2>0 \\ 2y+1\leq 0 \end{cases}; \begin{cases} z^2-8z+15\geq 0 \\ 3z+7\leq -4 \end{cases}; \begin{cases} 4w-3\geq -2+w \\ w^2+2w-35<0 \end{cases}$ $\left[y\leq -\frac{1}{2}; z\leq -\frac{11}{3}; \frac{1}{3}\leq w<5\right]$

12. $\begin{cases} (2m-1)^2-3m\cdot(m-1)+4<(m-1)\cdot(m+5)-2m+3 \\ (m-1)\cdot(m+4)+m-1\leq (m+3)\cdot(m-5)-2m+1 \end{cases}; \begin{cases} (m-1)^2-4m\leq (m+1)\cdot(m-2)-4m+1 \\ m+3\leq (m-2)^2-m\cdot(m+1) \end{cases}$ $[\varnothing; \varnothing]$

13. $\begin{cases} (4x-1)\cdot(2x+3)\leq 0 \\ (2x+1)\cdot(3x-2)\cdot(5x+1)\geq 0 \end{cases}; \begin{cases} (3x-5)\cdot(5x-3)\geq 0 \\ (2-3x)\cdot(7x+1)<0 \end{cases}$ $\left[-\frac{1}{2}\leq x\leq -\frac{1}{5}; x<-\frac{1}{7}\vee x\geq \frac{5}{3}\right]$

14. $\begin{cases} (2x-1)\cdot(3x+2)\cdot(4x-3)\cdot(5x+4)<0 \\ (x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)\cdot(x-4)>0 \end{cases}; \begin{cases} (z+4)^2-z\cdot(z+1)\leq z-3 \\ z\cdot(z^2-3-z)-1\leq (z+1)^3-4z\cdot(z-1) \end{cases}$

$$\left[-\frac{4}{5}<x<-\frac{2}{3}\vee\frac{1}{2}<x<\frac{3}{4}; \varnothing\right]$$

15. $\begin{cases} \frac{x^2-5x+6}{x-2}\leq 0 \\ 3x-1>0 \end{cases}; \begin{cases} \frac{3x+1}{2x-3}>0 \\ 7x\geq -3 \end{cases}; \begin{cases} \frac{5x-4}{2x-1}\leq 0 \\ \frac{2x+7}{4-3x}>0 \end{cases}$ $\left[\frac{1}{3}<x\leq 3; -\frac{3}{7}\leq x<-\frac{1}{3}\vee x>\frac{3}{2}; \frac{1}{2}<x\leq\frac{4}{5}\right]$

16. $\begin{cases} \frac{x-1}{x+1}\geq 0 \\ \frac{x-2}{x+2}\leq 0 \end{cases}; \begin{cases} \frac{5x+3}{3-7x}\leq 1 \\ -2\leq \frac{x+7}{11-3x} \end{cases}; \begin{cases} \frac{12x-3}{4x+5}>-1 \\ \frac{11x-13}{4-9x}<-2 \end{cases}$

$$\left[-2<x<-1\vee 1\leq x\leq 2; x\leq 0\vee\frac{3}{7}<x<\frac{11}{3}\vee x\geq\frac{29}{5}; -\frac{1}{8}<x<\frac{4}{9}\right]$$

17. $\begin{cases} \frac{x-4}{x+4}<0 \\ 3x+5>0 \end{cases}; \begin{cases} \frac{11x-12}{x-4}\geq 0 \\ x^2-5x+6<0 \end{cases}; \begin{cases} x^2-3x-18\geq 0 \\ \frac{8x+2}{3x-4}\leq -1 \end{cases}$ $\left[-\frac{5}{3}<x<4; \varnothing; \varnothing\right]$

18. $\begin{cases} \frac{3x+7}{7x-3}>0 \\ x^2-7x+10>0 \end{cases}; \begin{cases} \frac{3-2x}{2x-3}\geq 0 \\ x^2+11x+30<0 \end{cases}; \begin{cases} x^2+x-30\leq 0 \\ \frac{4+9x}{2-x}\geq -2 \end{cases}$ $\left[-\frac{7}{3}<x\vee\frac{3}{7}<x<2\vee x>5; \varnothing; -\frac{8}{7}\leq x<2\right]$

19. $\begin{cases} \frac{3}{x+1}-\frac{2}{x-3}\leq 0 \\ \frac{1}{x^2-1}-\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-1}>0 \end{cases}; \begin{cases} \frac{4}{x-2}\geq\frac{3}{x+1} \\ \frac{6}{4x-1}\leq\frac{7}{2-3x} \end{cases}; \begin{cases} (y^2-5y+6)\cdot(y^2-7y+10)\geq 0 \\ \frac{y^2-3y+2}{y^2+9y+20}<0 \end{cases}$

$$[-6<x<-1\vee 3<x\leq 11; -10\leq x<-1; -5<y<-4\vee 1<y<2\,]$$

20. $\begin{cases} (7x-2)\cdot(3x+1)\cdot(4-3x)\leq 0 \\ \frac{(2x+1)\cdot(3-x)}{(-2+3x)\cdot(4x+7)}\geq 0 \end{cases}; \begin{cases} \frac{x^2-x-12}{x^2+x-6}\geq 0 \\ \frac{x^2+2x-15}{x^2+x-6}<0 \end{cases}; \begin{cases} \frac{x^2-10x+25}{x^2+10x+25}>0 \\ \frac{x^2+10x+21}{x^2+12x+27}\leq 0 \end{cases}$

$$\left[\frac{4}{13}\leq x\leq 3; -5<x<-3; -9<x\leq -7\right]$$

21. $\begin{cases} 2x-3>0 \\ \dfrac{1}{x+2}>0 \\ (5x+1)\cdot(3-x)<0 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{3}{2x+1}\le 0 \\ \dfrac{5x-7}{(4x+1)^2}>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2-14x+49>0 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}>0 \\ (x^2-9)\cdot(4-x^2)<0 \end{cases}$

$[x>3;\ \varnothing;\ x<-3 \vee -2<x<-1 \vee 0<x<2 \vee x>3,\ x\neq 7]$

Livello 3

22. $\begin{cases} \dfrac{(2x-1)\cdot(x^2-3x-10)}{3x-5}>0 \\ \dfrac{(4x+3)^2\cdot(2x+1)^3}{5x-7}<0 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{(4-11x)\cdot(2x-7)}{x^2+x-56}\le 0 \\ \dfrac{(3x+1)^5\cdot(2x-4)^8}{(7-3x)^3}>0 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{(2x+3)\cdot(x-4)}{-x+1}\ge 0 \\ \dfrac{x+2}{(3x-5)\cdot(-x+3)}\le 0 \end{cases}$

$\left[\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{7}{5};\dfrac{4}{11}\le x<\dfrac{7}{3},x\neq 2;-2\le x\le -\dfrac{3}{2}\vee 1<x<\dfrac{5}{3}\vee 3<x\le 4\right]$

23. $\begin{cases} \dfrac{(5x-4)^2\cdot(-x+7)}{13x}\ge 0 \\ \dfrac{x^3-4x^2+4x}{x^4+7}<0 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{(2x+1)\cdot(-x+7)}{(3x+5)\cdot(x-3)}\le 0 \\ \dfrac{(x-1)\cdot(2x+3)}{(3x+1)\cdot(4x-5)}\ge 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{4x^2-25}\ge 0 \\ \dfrac{121-169x^2}{289x^2-144}<0 \end{cases}$

$\left[\varnothing;x<-\dfrac{5}{3}\vee -\dfrac{1}{3}<x\le 1\vee\dfrac{5}{4}<x<3\vee x\ge 7;x\le -3\vee -\dfrac{5}{2}<x<-\dfrac{11}{13}\vee -\dfrac{12}{17}<x<\dfrac{12}{17}\vee\dfrac{11}{13}<x<\dfrac{5}{2}\vee x\ge 3\right]$

24. $\begin{cases} \dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2}{x-2}\ge\dfrac{x+3}{x^2-x-2} \\ \dfrac{2}{x-3}\le\dfrac{x-7}{x^2+2x-15}+\dfrac{4}{x+5} \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{n^2-n}{n+3}\ge 0 \\ \dfrac{n+1}{n^2-n-2}\ge 0 \\ (n-3)\cdot(-n+1)\le 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{n+1}{n^2-4n}<0 \\ \dfrac{n}{n+3}<0 \\ n^2-n-42\ge 0 \end{cases}$ $[-1<x<2;\ n\ge 3;\ \varnothing]$

25. $\begin{cases} \dfrac{p^2-4}{p+1}\ge 0 \\ \dfrac{-p+3}{4+p}\le 0 \\ p^2-5p+6\ge 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{p}{p-1}<0 \\ \dfrac{p-1}{p^2}\ge 0 \\ p^3+9p^2+20p\le 0 \end{cases}$; $\begin{cases} (2m-1)\cdot(5m+3)>0 \\ \dfrac{1-m}{1+m}>0 \\ 4m^2-9\ge 0 \end{cases}$ $[p\ge 3;\ \varnothing\ ;\ \varnothing]$

26. $\begin{cases} (3m+1)^2\cdot(5-2m)^3\ge 0 \\ \dfrac{m+7}{m-7}\ge\dfrac{m-7}{m+7} \\ m^2-4m+4\ge 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{z-1}{z+1}-\dfrac{z+1}{z-1}>0 \\ \dfrac{1}{z-3}-\dfrac{2}{z-5}+\dfrac{7z-1}{z^2-8z+15}\le 0 \\ \dfrac{2}{z-2}+\dfrac{4}{z+5}-\dfrac{3z+2}{z^2+3z-10}>0 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{1}{z-2}+\dfrac{2}{z+2}\ge\dfrac{z+3}{z^2-4} \\ \dfrac{z-1}{z+2}+\dfrac{z-2}{z+1}\ge\dfrac{2z^2-z+2}{z^2+3z+2} \\ \dfrac{3}{z}-\dfrac{z}{z-7}\le\dfrac{1-z^2+z}{z^2-7z} \end{cases}$

$\left[-7<m\le 0;-5<z<-1;-2<z<-1\vee -\dfrac{1}{5}\le z<0\vee 7<z\le 11\right]$

Lavoriamo insieme

Determinare una frazione in cui la differenza fra il numeratore e il denominatore è uguale a 5 e il cui valore numerico è compreso tra 1,4 *e* 1,5.

La prima richiesta del problema non permette di risolvere la questione, infatti stiamo cercando frazioni del

seguente tipo: $\frac{x+5}{x}$, che come ben sappiamo, sono infinite, una per ogni valore intero assegnato a x. Sfruttiamo perciò la seconda richiesta. Essa equivale alle seguenti disequazioni: $1{,}4 < \frac{x+5}{x} < 1{,}5$. Sappiamo che x è un numero naturale, quindi effettuiamo il minimo comune multiplo e eliminiamo il denominatore comune, ottenendo le seguenti disequazioni: $1{,}4x < x + 5 < 1{,}5x$.

Esse danno i seguenti risultati: $0.4x < 5 \Rightarrow \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{10}^{5}}x < 5 \Rightarrow x < 5 \cdot \frac{5}{2} \Rightarrow x < \frac{25}{2}$ e $x + 5 < 1.5x \Rightarrow -0.5x < -5$ $\Rightarrow \frac{1}{2}x > 5 \Rightarrow x > 10$. Ciò significa che deve essere $10 < x < \frac{25}{2}$.

Adesso, dato che x deve essere un numero intero, solo due numeri verificano quest'ultima disuguaglianza, cioè $x = 11$ e $x = 12$, pertanto otteniamo le due seguenti frazioni soluzioni: $\frac{11+5}{11} = \frac{16}{11}; \frac{12+5}{12} = \frac{17}{12}$.

Livello 1

27. Determinare una frazione sapendo che la differenza fra il denominatore e il numeratore è 16 e che il suo valore numerico fa parte dell'intervallo $\left[\frac{5}{9}; \frac{4}{7}\right]$. $\left[\frac{21}{37}\right]$

28. Determinare una frazione sapendo che la differenza fra il numeratore e il denominatore è 4 e che il suo valore numerico è compreso tra 1,21 e 1,22. $\left[\frac{23}{19}\right]$

29. Armando ha acquistato una scheda per il suo cellulare con il seguente contratto: lo scatto alla risposta costa € 0,16 e poi paga € 0,05 per ogni minuto o sua frazione, di conversazione. Dato che non è contento vuole cambiare con un altro gestore, il quale gli propone un costo di € 0,002 al secondo, senza ulteriori costi. Quanto deve essere la durata media di ogni telefonata di Armando, perché gli convenga accettare quest'ultima proposta? [Inferiore a $2^{m}17^{s}$]

30. Per quali valori di x esistono triangoli i cui lati misurano $(5, 3, 2x + 1)$? Si ricordi la validità della disuguaglianza triangolare. [$0{,}5 < x < 3{,}5$]

31. Il consumo medio di acqua di una famiglia è rappresentato nella seguente tabella, espresso in litri per persona al giorno.

	Bere	Igiene personale	Indumenti	Piatti	Casa
Mesi Estivi	4	25	10	12	12
Mesi invernali	2	12	15	12	10

Si vuol sapere quante persone al massimo può servire un serbatoio da 500 litri, nell'ipotesi di approvvigionamento idrico giornaliero da parte dell'acquedotto, nei due periodi, estivo ed invernale. Se l'approvvigionamento avviene a giorni alterni, quanto deve essere ampio il serbatoio per assicurare l'approvvigionamento per una famiglia di 5 persone? [7 in estate, 9 in inverno; 730]

Lavoriamo insieme

Un cinema ha una capienza massima di 600 *posti. Per un dato spettacolo si incassano* € 2200,00. *Sapendo che il biglietto intero costa* € 5,00, *quello ridotto* € 3,00 *e che il cinema non era esaurito, vogliamo sapere qual è stato il minimo numero di biglietti interi che sono stati venduti.*

Se il cinema fosse stato esaurito basterebbe risolvere il sistema $\begin{cases} i + r = 600 \\ 5i + 3r = 2200 \end{cases}$, che ha come soluzione $i = 200$ e $r = 400$. Dato che il cinema non è esaurito vuol dire che $i + r < 600$. partendo dalla soluzione ottenuta, senza variare la somma di 2200, dato che il rapporto fra i prezzi intero/ridotto è 5/3, vuol dire che 5 biglietti ridotti costano quanto 3 biglietti interi. Quindi se sostituiamo 5 biglietti ridotti con 3 interi l'incasso non cambia ma la somma dei biglietti diminuisce di 2. Così se $i + r = 588$, avremo $i = 203$, $r = 395$. Ovviamente continuando a scambiare 5 ridotti con 3 interi diminuiremo gli spettatori senza cambiare l'incasso, ma aumenteremo il numero di ingressi interi diminuendo quello dei ridotti. Pertanto la risposta cercata è 203.

Livello 2

32. Con riferimento al problema svolto in Lavoriamo insieme vogliamo sapere qual è invece il minimo numero positivo di biglietti ridotti che può essere venduto. In questo caso quanti biglietti saranno venduti in totale? [5; 442]
33. Un gestore di telefoni cellulari propone un contratto il cui costo è calcolato per ogni secondo di conversazione, ma il costo unitario per secondo è così strutturato: € 0,002 per il primo minuto di conversazione; € 0,0015 per il secondo minuto; € 0,001 per ogni secondo successivo. Un altro gestore invece propone un costo fisso di € 0,08 al minuto o sua frazione. Quanto deve essere la durata media di una conversazione, affinché risulti conveniente la prima alternativa? [Meno di 40 *s* o più di 2 *min*]
34. In quali basi b si ha $[80]_{10} < [143]_b < [288]_{10}$? $[8 \le b \le 14]$
35. Quali numeri naturali sono tali che aggiunti al loro quadrato sono minori di 240 e aggiungendo 7 al loro quintuplo si ottiene meno di 29? [1; 2; 3]
36. Si ha un pezzo di legno a forma di parallelepipedo rettangolo di dimensioni $1 \times 1{,}2 \times 2{,}5$. Da tale legno vogliono ottenersi dei parallelepipedi di dimensioni $1 \times 0{,}3 \times 0{,}4$. Tutte le misure sono espresse in *m*. Qual è il massimo numero di pezzi ottenibili? [4]
37. Esternamente ai lati di un quadrato costruiamo dei triangoli equilateri. Determinare i valori che può assumere la misura di ciascun lato se la somma delle misure di tutti i segmenti è compresa tra 74 e 191. $\left[\frac{37}{6} < x < \frac{191}{12}\right]$
38. Se il 55% degli agnelli nati in un gregge sono maschi e il 90% di tutti gli agnelli sopravvive il primo anno, qual è il minimo numero di agnelli maschi nati affinché alla fine del primo anno ve ne siano 100 vivi? [202]

Livello 3

39. Eraldo ha comprato una macchina ibrida, che funziona a benzina e gpl. Se vuole rifornire la macchina di gpl ha le seguenti due possibilità: un distributore a 8,5 *km* in cui il prezzo al litro è € 0,692 e un altro a 13 *km*, con prezzo a € 0,675. Tenendo conto che la sua macchina ha un consumo medio di 1 litro di gpl per 12 *km*, vogliamo sapere quanti litri minimo deve mettere affinché sia più conveniente scegliere il secondo distributore. Si tenga conto che nel calcolo dei consumi dobbiamo considerare un percorso di andata e ritorno. [Almeno 27,5]
40. Una cittadina ha meno di 5000 abitanti, dei quali 1/3 sono anziani (più di 65 anni), 2/7 sono maturi (hanno da 40 a 65 anni), 1/5 sono giovani (da 18 a 40 anni) e il resto sono minorenni. Gli iscritti all'unica palestra sono 1/40 degli anziani, 1/16 dei maturi, 1/9 dei giovani e 1/3 dei minorenni. Quanti sono gli iscritti alla palestra? *Suggerimento*: tenere conto che il numero cercato deve essere intero e multiplo di ... [137, 274 o 411]
41. Un problema di Sam Lloyd. *Durante la guerra russo – giapponese, si utilizzava il seguente metodo*: 20 *reggimenti si alternavano per andare al fronte. Ogni settimana si aggiungevano* 100 *uomini a ciascun reggimento, quello che risultava più numeroso andava al fronte. Una volta accadde che i reggimenti avevano* 1000, 950, 900, *e così via diminuendo di* 50 *uomini per ogni reggimento fino al* 12°. *Poiché il comandante del V reggimento* (*che aveva* 800 *uomini*) *era un bravo giocatore di scacchi, il generale, che giocava con lui, decise di ritardarne la partenza. Così ogni settimana aumentava il suo reggimento di soli* 30 *uomini. Tenuto conto che* 20 *reggimenti erano continuamente reclutati, dopo quante settimane il V reggimento andò al fronte*? [37]
42. La somma di n numeri interi consecutivi e tutti maggiori di 17, è compresa tra 147 e 253, quanti sono i numeri? Si ricordi che $1 + 2 + ... + (n - 1) = n \cdot (n - 1) / 2$ $[7 \le n \le 11]$

Equazioni e disequazioni di primo grado in valore assoluto

Vogliamo considerare adesso un altro tipo di equazioni.

Esempio 12

Consideriamo l'equazione $|3x + 2| = 2$. Prima di cercare di risolverla chiediamoci il significato. Come al solito risolvere un'equazione significa determinare gli eventuali valori da assegnare alle incognite affinché l'uguaglianza risulti vera. Allora certamente deve essere $3x + 2 = 2$, ma dato che anche $|–2| = 2$, dobbiamo risolvere anche l'equazione $3x + 2 = –2$. Quindi le soluzioni dell'equazione di partenza sono l'unione delle soluzioni delle due equazioni, cioè $3x = 0 \Rightarrow x = 0$ e $3x = –4 \Rightarrow x = –4/3$.

Tenuto conto dell'esempio precedente possiamo enunciare il seguente risultato.

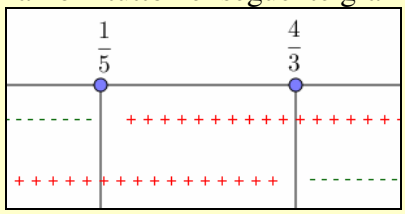
Teorema 1

L'equazione $|f(x)| = k$, con k numero reale positivo, ha le stesse soluzioni delle equazioni $f(x) = k$ e $f(x) = –k$.

Cosa accade se i valori assoluti sono più di uno?

Esempio 13

Sia l'equazione $|5x – 1| + |4 – 3x| = 5$. In questo caso dobbiamo studiare il segno di entrambi gli argomenti dei valori assoluti. Così $5x-1>0 \Rightarrow x>\frac{1}{5}; 4-3x>0 \Rightarrow x<\frac{4}{3}$. In questo modo abbiamo suddiviso tutti i numeri reali in tre intervalli, determinati dalle due soluzioni 1/5 e 4/3. Inseriamo il tutto nel seguente grafico,



in cui ci limitiamo a riportare il segno di ciascuna delle due espressioni. In questo grafico non dobbiamo effettuare alcuna operazione, né moltiplicare i segni, né considerare intervalli comuni. Quel che dobbiamo fare è *trasmettere* il segno nell'equazione di partenza, ossia, quando $5x – 1 > 0$ vuol dire che $|5x – 1| = 5x – 1$, mentre quando $5x – 1 < 0$ vuol dire che $|5x – 1| = 1 – 5x$. Stesso discorso per $|4 – 3x|$. Quindi l'equazione di partenza ha le stesse soluzioni dei seguenti 3 sistemi misti di equazione e disequazione: $\begin{cases} 1-5x+4-3x=5 \\ x\le\frac{1}{5} \end{cases}; \begin{cases} 5x-1+4-3x=5 \\ \frac{1}{5}<x<\frac{4}{3} \end{cases}; \begin{cases} 5x-1-4+3x=5 \\ x\ge\frac{4}{3} \end{cases}$. Il segno uguale può mettersi indifferentemente in qualunque delle 3 disequazioni, dato che è un valore per cui l'argomento cui si riferisce è nullo. Risolviamo i sistemi: $\begin{cases} -8x=0 \\ x\le\frac{1}{5} \end{cases}; \begin{cases} 2x=2 \\ \frac{1}{5}<x<\frac{4}{3} \end{cases}; \begin{cases} 8x=10 \\ x\ge\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x\le\frac{1}{5} \end{cases}; \begin{cases} x=1 \\ \frac{1}{5}<x<\frac{4}{3} \end{cases}; \begin{cases} x=\frac{5}{4} \\ x\ge\frac{4}{3} \end{cases}$. Il primo sistema ha per soluzione $x = 0$, perché effettivamente è $0<\frac{1}{5}$, il secondo sistema ha soluzione $x = 1$, perché $\frac{1}{5}<1<\frac{4}{3}$ mentre invece non ha soluzione il terzo sistema perché $\frac{5}{4}<\frac{4}{3}$. Pertanto l'equazione di partenza ha le soluzioni $x = 0$ e $x = 1$. Verifichiamo: $|5 \cdot 0 – 1| + |4 – 3 \cdot 0| = |–1| + |4| = 1 + 4 = 5$; $|5 \cdot 1 – 1| + |4 – 3 \cdot 1|$ $|4| + |1| = 5$. Mentre $\left|5\cdot\frac{5}{4}+1\right|+\left|4-3\cdot\frac{5}{4}\right|=\left|\frac{25}{4}+1\right|+\left|4-\frac{15}{4}\right|=\frac{29}{4}+\frac{1}{4}=\frac{30}{4}\neq 5$.

In modo analogo possiamo risolvere anche le disequazioni con il valore assoluto.

Esempio 14

- La disequazione $|5x - 7| > 5$, equivale alla risoluzione delle due disequazioni $5x - 7 > 5$ e $5x - 7 < -5$. Infatti dire che il valore assoluto è maggiore di 5 vuol dire che il suo argomento lo è, quindi se è positivo è maggiore di 5, se è negativo deve invece essere minore di –5, dato che per esempio, $|-4| = 4 < 5$ e $|-6| = 6 > 5$. Quindi avremo la seguente soluzione: $x > \frac{12}{5} \vee x < \frac{2}{5}$.
- Invece la disequazione $|5x - 7| < 5$, equivale alla risoluzione delle due disequazioni $-5 < 5x - 7 < 5$, per questioni opposte a quelle viste prima, pertanto la soluzione sarà: $\frac{2}{5} < x < \frac{12}{5}$.

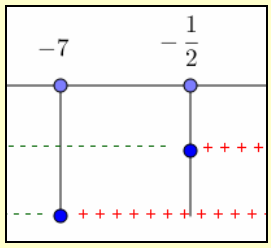
In vista dell'esempio precedente vale il seguente risultato.

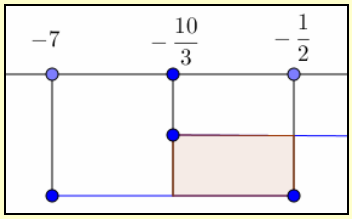
Teorema 2

- La disequazione $|f(x)| > k$, con k numero reale positivo, equivale alle disequazioni $f(x) > k$ e $f(x) < -k$.
- La disequazione $|f(x)| < k$, con k numero reale positivo, equivale alle disequazioni $-k < f(x) < k$.

Vediamo il caso di più valori assoluti.

Esempio 14

Risolvere $|2x + 1| - |7 + x| \le 2$. Studiamo il segno di entrambi gli argomenti dei valori assoluti, come nel caso delle equazioni: $2x+1>0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}; 7+x>0 \Rightarrow x > -7$, come in precedenza riportiamo il tutto in un grafico. 

Anche in questo caso abbiamo da considerare tre casi e quindi tre sistemi, stavolta di disequazioni. $\begin{cases} -2x-1-(-7-x) \le 2 \\ x \le -7 \end{cases}; \begin{cases} -2x-1-(7+x) \le 2 \\ -7 < x < -\frac{1}{2} \end{cases}; \begin{cases} 2x+1-(7+x) \le 2 \\ x \ge -\frac{1}{2} \end{cases}$, che risolviamo singolarmente $\begin{cases} -x+6 \le 2 \\ x \le -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 4 \\ x \le -7 \end{cases}; \begin{cases} -3x-8 \le 2 \\ -7 < x < -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{10}{3} \\ -7 < x < -\frac{1}{2} \end{cases}; \begin{cases} x-6 \le 2 \\ x \ge -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le 8 \\ x \ge -\frac{1}{2} \end{cases}$. IL primo sistema non ha ovviamente soluzioni, dato che $4 > -7$. Il secondo sistema si risolve con l'aiuto del seguente grafico 

in cui abbiamo indicato le soluzioni con una linea continua. Ovviamente cerchiamo gli eventuali intervalli in cui entrambe le disequazioni sono verificate, quindi otteniamo $-\frac{10}{3} \le x \le -\frac{1}{2}$. Per il terzo sistema non è necessario usare il grafico, la soluzione è ovviamente $-\frac{1}{2} \le x \le 8$. Mettendo insieme le due soluzioni ottenute abbiamo l'unica soluzione $-\frac{10}{3} \le x \le 8$

Verifiche

Lavoriamo insieme

Risolvere $|3x - 4| = |5x + 2|$. I valori assoluti sono uguali quando hanno gli stessi argomenti, oppure quando uno degli argomenti è l'opposto dell'altro. Quindi l'equazione è equivalente alle due equazioni seguenti: 1) $3x - 4 = 5x + 2$; 2) $3x - 4 = -5x - 2$. Da cui $-2x = 6 \Rightarrow x = -3 \vee 8x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$.

Risolvere le seguenti equazioni in valore assoluto

Livello 1

1. $|4x - 1| = 1$; $|2 - 3x| = 3$; $|5x + 2| = -3$; $|4 - 5x| = 6$

$$\left[\left(x = 0 \vee x = \frac{1}{2}\right); \left(x = -\frac{1}{3} \vee x = \frac{5}{3}\right); \varnothing; \left(x = -\frac{2}{5} \vee x = 2\right)\right]$$

2. $|x - 3| = 4$; $|1 + 5x| = 2$; $|5 - 7x| = -1$; $|13 - 9x| = 0$ $\left[(x = -1 \vee x = 7); \left(x = -\frac{3}{5} \vee x = \frac{1}{5}\right); \varnothing; \left(x = \frac{13}{9}\right)\right]$

3. $|7x + 2| = |1 - 2x|$; $|2x + 3| = |3x + 2|$; $|7 - 3x| = |1 - 3x|$ $\left[\left(x = -\frac{3}{5} \vee x = -\frac{1}{9}\right); (x = -1 \vee x = 1); \left(x = \frac{4}{3}\right)\right]$

4. $|11x + 12| = |12x - 11|$; $|x + 1| = |x - 1|$; $|2 - x| = |x - 2|$ $\left[\left(x = -\frac{1}{23} \vee = 23\right); (x = 0); \forall x \in \mathbb{R}\right]$

Livello 2

5. $|8x - 3| + |2x - 3| = 1$; $|4 - x| - |2 + 9x| = 3$; $|3 + 5x| - |x - 2| = -3$ $\left[\varnothing; \left(x = -\frac{3}{8} \vee x = -\frac{1}{10}\right); \varnothing\right]$

6. $|6x - 4| = 1 + |3 + x|$; $|5 - 7x| = |x - 3| - 2$; $|1 - x| = |x - 1| + 1$ $\left[\left(x = 0 \vee x = \frac{8}{5}\right); \left(x = \frac{2}{3} \vee x = \frac{3}{4}\right); \varnothing\right]$

Lavoriamo insieme

Risolvere $|9x + 1| < x + 1$. Abbiamo i seguenti due sistemi equivalenti:

$$\begin{cases} 9x+1 < x+1 \\ 9x+1 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -9x-1 < x+1 \\ 9x+1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x < 0 \\ x \geq -\frac{1}{9} \end{cases} \vee \begin{cases} -10x < 2 \\ x < -\frac{1}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x \geq -\frac{1}{9} \end{cases} \vee \begin{cases} x > -\frac{1}{5} \\ x < -\frac{1}{9} \end{cases}.$$

Il primo sistema ha l'immediata soluzione $-\frac{1}{9} \leq x < 0$, il secondo $-\frac{1}{5} < x < -\frac{1}{9}$. Le due soluzioni possono unirsi nell'unica soluzione: $-\frac{1}{5} < x < 0$.

Risolvere le seguenti disequazioni in valore assoluto

Livello 1

7. $|5x + 2| < 2$; $|1 + 7x| > 3$; $|4x - 1| \geq 2$; $|3 - 2x| \leq 4$ $\left[-\frac{4}{5} < x < 0; x < -\frac{4}{7} \vee x > \frac{2}{7}; x \leq -\frac{1}{4} \vee x \geq \frac{3}{4}; -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}\right]$

8. $|3x - 5| > 1$; $|2x + 3| < 0$; $|4 - 7x| \geq 3$; $|2 - x| \leq 1$ $\left[x < \frac{4}{3} \vee x > 2; \varnothing; x \leq -\frac{1}{7} \vee x \geq 1; 1 \leq x \leq 3\right]$

9. $|3x+5|<|2x+1|\ ;\ |6x-2|\geq|4-x|\ ;\ |x-1|\leq|1-x|$ $\left[-4<x<-\frac{6}{5};x\leq-\frac{2}{5}\vee x\geq\frac{6}{7};\forall x\in\mathbb{R}\right]$

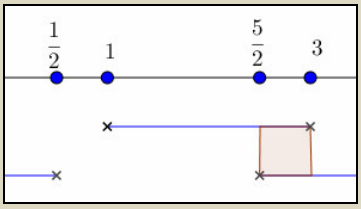
Livello 2

10. $|x+3|-|1+2x|>1\ ;\ |2x+5|\geq|2-x|+2\ ;\ |x-2|+|3x-2|+1<0$ $\left[-1<x<1;x\leq-9\vee x\geq-\frac{1}{3};\varnothing\right]$

11. $|3x+1|-|x|>2\ ;\ |4x+1|+|3+x|<3\ ;\ |4x-1|+|5x+3|\geq x$ $\left[x<-\frac{3}{2}\vee x>\frac{1}{2};-\frac{1}{3}<x<-\frac{1}{5};\forall x\in\mathbb{R}\right]$

12. $|2-x|\geq|2x+5|-x+1\ ;\ |x+3|<|1-x|+3x\ ;\ |4x-1|+|x-3|<|x+1|$ $\left[-3\leq x\leq-2;x>\frac{4}{3};\varnothing\right]$

Lavoriamo insieme

Risolvere $\begin{cases}|x-2|<1\\|2x-3|>2\end{cases}$. Conviene risolvere singolarmente le due disequazioni e poi vedere se hanno soluzioni comuni. Abbiamo $|x-2|<1\Rightarrow-1<x-2<1\Rightarrow1<x<3$; e $|2x-3|>2\Rightarrow2x-3<-2\vee2x-3>2\Rightarrow$ $2x<1\vee2x>5\Rightarrow x<\frac{1}{2}\vee x>\frac{5}{2}$. Quindi il sistema adesso è $\begin{cases}1<x<3\\x<\frac{1}{2}\vee x>\frac{5}{2}\end{cases}$, la cui soluzione cerchiamo mediante il grafico seguente: 

e quindi la soluzione cercata è $\frac{5}{2}<x<3$.

Risolvere i seguenti sistemi di equazioni e/o disequazioni in valore assoluto

Livello 1

13. $\begin{cases}|2x-1|>3\\|4x+1|<1\end{cases};\ \begin{cases}|3x+1|<x\\|x-2|\geq x-1\end{cases};\ \begin{cases}|2x+3|\leq|x-2|\\|2-5x|>1\end{cases}$ $\left[\varnothing;\varnothing;x\leq-5\leq x\leq-\frac{1}{3}\right]$

14. $\begin{cases}|x-1|<2\\|2x+3|\geq x\end{cases};\ \begin{cases}|3-2x|\leq x\\|5x+1|>2\end{cases};\ \begin{cases}|x-2|>|2+3x|\\|1+3x|>|2x-5|\end{cases}$ $[-1<x<3;\ 1\leq x\leq3;\varnothing]$

15. $\begin{cases}|x-1|\leq1+x\\|2x|>x-2\end{cases};\ \begin{cases}|x-3|\geq x\\|2x+7|\leq1\end{cases};\ \begin{cases}|4x-9|>|3x+1|\\|1-6x|<x-6\end{cases}$ $[x\geq0;-4\leq x\leq-3;\varnothing]$

Livello 2

16. $\begin{cases}|2x-3|\geq x+1\\|3-2x|\leq2-x\end{cases};\ \begin{cases}x-|2x+1|<1\\3-|4x+7|>2x\end{cases};\ \begin{cases}|x-5|\geq|3-7x|\\3-|3-x|<x-2\end{cases}$ $\left[\varnothing;x<-5<x<-\frac{2}{3};\varnothing\right]$

17. $\begin{cases}|3x-2|\geq1\\2<|3x-1|\end{cases};\ \begin{cases}|4x-9|\geq2x+1\\2x-|3x|\leq3-x\end{cases};\ \begin{cases}2-|x+1|\leq3+|2x-1|\\|3x-1|+|x-2|>1\end{cases}$ $\left[x<-\frac{1}{3}\vee x>1;\varnothing;\forall x\in\mathbb{R}\right]$

Livello 3

18. $\begin{cases} |5x-2|<|3-x|+1 \\ x\le|3x-2|+1 \\ |3-2x|>x-|x-2| \end{cases}$; $\begin{cases} |x-3|<x \\ 2x-1\ge|x+1| \\ 3-x\le|x-2| \end{cases}$; $\begin{cases} |2x+1|>2-3x \\ x\ge1-|3x| \\ 4x+2>1-|x-2| \end{cases}$ $\left[-\frac{1}{2}<x<1;x\ge\frac{5}{2};x\ge\frac{1}{4}\right]$

19. $\begin{cases} |4x+1|>|2-6x| \\ |x-7|+2\cdot|3x+1|>|x| \\ 1-|x+2|\le3\cdot|2x+8| \end{cases}$; $\begin{cases} |4x-1|-x+3>|x-2| \\ x-3<7\cdot|x+1| \\ 4-5x\ge|x|+2 \end{cases}$; $\begin{cases} |7x+2|>3-2x \\ 5x-2<x-|x+1| \\ |2-3x|>x+4\cdot|x+3| \end{cases}$ $\left[\frac{1}{10}<x<\frac{3}{2};x\le\frac{1}{3};x<-\frac{5}{4}\right]$

Quelli che … vogliono sapere di più

Problemi indeterminati

Spesso vengono proposti problemi particolarmente impegnativi, la cui peculiarità consiste nel fatto che vengono date informazioni non sufficienti, o almeno così sembra.

Esempio 20

Consideriamo il seguente problema tratto dalle *Propositiones ad acuendos juvenes*, dovuto ad Alcuino di York, un matematico vissuto ai tempi di Carlo Magno.

100 *sacchi di farina vengono distribuiti a* 100 *persone, in modo che ogni uomo riceve tre sacchi, ogni donna due sacchi e ogni bambino mezzo sacco. Quanti sono gli uomini, quante le donne e quanti i bambini*?

Proviamo a risolvere il problema impostando un sistema di equazioni lineari; per far ciò indichiamo con u il numero degli uomini, d il numero delle donne e b quello dei bambini. La traduzione algebrica delle informazioni è allora la seguente: $\begin{cases} u+d+b=100 \\ 3u+2d+\dfrac{b}{2}=100 \end{cases}$, che è però un sistema di due equazioni lineari in tre incognite e quindi il problema ha un numero di informazioni inferiore al numero degli elementi da determinare.

Proviamo ugualmente a risolvere il sistema con il metodo di sostituzione, considerandolo come se fosse un sistema parametrico: $\begin{cases} u=100-d-b \\ 300-3d-3b+2d+\dfrac{b}{2}=100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=100-d-b \\ 600-6d-6b+4d+b=200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=100-d-b \\ -2d-5b=-400 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} u=100-d-b \\ d=\dfrac{400-5b}{2} \end{cases}$. Sembra quindi che non riusciamo a dare una risposta. Pensiamo però un attimo a un fatto. Le incognite rappresentano quantità di persone, sono cioè numeri naturali. Quindi le soluzioni sono tutte quelle per cui d è un numero naturale, cioè per cui $(400 – 5b)$ è un numero pari; solo in tal modo infatti la frazione che esprime il valore di d diviene apparente e un numero naturale. Un'altra cosa che osserviamo è che le donne non possono superare il numero totale di persone e quindi deve anche essere $0 < d < 100$, cioè $0 < \dfrac{400-5b}{2} < 100 \Rightarrow 0 < 400 – 5b < 200 \Rightarrow –200 < 5b – 400 < 0 \Rightarrow –200 + 400 < 5b – 400 + 400 < 400 \Rightarrow 200 < 5b < 400 \Rightarrow 40 < b < 80$. Per lo stesso motivo anche $d + b < 100$, cioè $\dfrac{400-5b}{2} + b < 100 \Rightarrow 400 – 3b < 200 \Rightarrow b > \dfrac{200}{3} \Rightarrow b > 66$. Queste condizioni ci permettono di ridurre il problema a un procedimento per tentativi, sostituendo a b dei valori pari (perché diversamente $400 – 5b$ risulterà dispari) compresi fra 66 e 80 e vedere quali sono tutte le soluzioni accettabili. In questo caso è facile vedere che esse sono tutte quelle della seguente tabella:

u	2	5	8	11	14	17
d	30	25	20	15	10	5
b	68	70	72	74	76	78

Come si è visto, nel precedente esempio le informazioni non erano insufficienti, diciamo piuttosto che erano mascherate. Però in generale il problema è indeterminato, ossia ammette più di una soluzione, anche se vi possono essere dei casi in cui la soluzione è unica.

Esempio 21

Questo problema, esposto nella sua Algebra da Eulero, è stato da noi adattato.

Un negoziante compra bambole e videogiochi, spendendo 1770 *euro. Sapendo che una bambola costa* 31 *euro e un videogioco* 21 *euro, quante bambole e videogiochi ha comprato*?

L'equazione risolvente è $31b + 21v = 1770$. (*), in cui abbiamo indicato con b il numero di bambole e con v

quello dei videogiochi. Risolviamo rispetto alla variabile v ottenendo: $v = \frac{1770 - 31b}{21}$. Dato che v deve essere un numero naturale, quindi $1770 - 31b$ deve essere positivo e multiplo di 21. Consideriamo la condizione che deriva dall'essere v un numero positivo: $1770 - 31b > 0 \Rightarrow 0 < b < \frac{1770}{31} \approx 58 \Rightarrow 0 < b < 58$. Questa disuguaglianza ci dice quindi che dobbiamo tentare 57 sostituzioni del valore di b (da 1 a 57), per stabilire quali soluzioni sono accettabili.

Risolviamo ora la (*) rispetto alla variabile b: $b = \frac{1770 - 21v}{31} \Rightarrow 31b = 1770 - 21v \Rightarrow 31b = 3 \cdot (590 - 7v)$.

Possiamo osservare che, perché b sia un numero naturale, è necessario che, dato che 31 non è divisibile per 3, mentre lo sono sia 1770 sia 21, anche b sia divisibile per 3. Quindi le sostituzioni alla variabile b si riducono ai seguenti valori: 3, 6, 9, ..., 57 e, tra questi, sceglieremo quelli per i quali anche v è un numero naturale. Si verifica, perciò, che le uniche soluzioni accettabili sono le seguenti: ($b = 9$, $v = 71$), ($b = 30$, $v = 40$), ($b = 51$, $v = 9$).

Se avessimo voluto una sola soluzione avremmo dovuto imporre un ulteriore condizione, per esempio che dovevano comprarsi meno di 10 bambole, ottenendo così solo la prima soluzione, oppure che il numero di bambole doveva essere superiore a quello di videogiochi, ottenendo solo la terza soluzione, o altre condizioni mirate.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Il seguente problema è tratto dal libro *Problèmes plaisans et delectable qui se font par les nombres* di Gaspar Bachet, signore di Meziriac, del 1612. *Una donna portava al mercato delle uova, un passante distratto la urtò facendole cadere il paniere e rompendo tutte le uova. Il passante fu disposto a risarcire il danno ma la donna non ricordava quante fossero le uova. Sapeva però che esse potevano essere sistemate in confezioni da* 7 *ma non in confezioni da* 2, 3, 4, 5 *o* 6, *perché in ogni caso avanzava un uovo. Quante uova almeno portava al mercato la donna*?

Diciamo x il numero delle uova. Dai dati del problema vuol dire che il numero è multiplo di 7 e che la divisione di x per 2, 3, 4, 5, 6 dà sempre 1 come resto. Quest'ultima informazione vuol dire che il numero $(x-1)$ è multiplo di 2, 3, 4, 5, 6, cioè del loro minimo comune multiplo 60. Quindi si ha: $\begin{cases} x = 7n \\ x - 1 = 60m \end{cases}$, che è un sistema di due equazioni in 3 incognite quindi è indeterminato. Così possiamo scrivere: $7n = 60m + 1$, adesso ricaviamo rispetto a n: $n = \dfrac{60m+1}{7}$. Dato che n deve essere un numero naturale, dobbiamo cercare il minimo numero naturale m per cui $60m + 1$ è divisibile per 7. Con un procedimento per tentativi troviamo che $60 \cdot 5 + 1 = m = 301 = 7 \cdot 43$. Quindi le uova erano 301.

Nei seguenti problemi se vi è più di una soluzione deve essere quella con i valori più piccoli

Livello 2

1. Da un manoscritto arabo del 1200. *Un'oca costa* 5 *dracme, una gallina* 1 *dracma e* 20 *pulcini* 1 *dracma. Avendo* 100 *dracme e volendo comprare* 100 *animali, quanti dovrai prenderne di ciascun t*ipo? [19 oche, 1 gallina, 80 pulcini]
2. Da un manuale tedesco del 1526. *In una taverna*, 20 *persone pagano un conto di* 20 *dobloni. Vi sono uomini, donne e bambini. Sapendo che gli uomini pagano* 3 *dobloni, le donne* 2 *e i bambini mezzo doblone, determinare quanti erano gli uomini, quante le donne e quanti i bambini.* [1 ; 5 ; 14]
3. Da *Problèmes plaisants et délectable qui se font par les nombres* di Gaspar Bachet, signore di Meziriac, del 1612. 41 *persone fra uomini, donne e bambini mangiano a una locanda. Il conto è di* 40 *soldi. Gli uomini pagano* 4 *soldi, le donne* 3 *e i bambini mezzo soldo. Quanti sono gli uomini, quante le donne e quanti i bambini*? [2; 5; 34]
4. Dal *Lilavati* di Bhaskara. *O matematico, rispondi rapidamente. Qual è il minimo numero naturale che moltiplicato per* 221 *e aumentato di* 65 *diviene un multiplo di* 195? [5]
5. Dal *Ganita–Sara–Sangraha* di Mahaviracarya del 850. *Vi sono* 63 *cestini contenenti la stessa quantità di noci. Vi si aggiungono altre* 7 *noci e si divide il totale esattamente fra* 23 *persone. Qual è il minimo numero di noci che va a ogni persona*? [14]
6. Dall'Algebra di Eulero. *Dividi* 100 *in due addendi, uno divisibile per* 7 *e l'altro per* 11. [44; 56]
7. Un supermercato offre un buono acquisto da 100 euro a chi, nel tempo di 2 minuti, riuscirà a scegliere 20 articoli di cartoleria spendendo esattamente 20 euro. Gli articoli dovranno essere scelti fra i registri che costano 4 euro l'uno, le matite che costano 0,25 euro cadauna e le penne che costano 0,50 euro l'una. Qual è la combinazione vincente? [3 registri, 2 ,matite, 15 penne]
8. Un negoziante ha comprato un totale di 224 addobbi natalizi, che ha sistemato in 19 confezioni grandi e 3 confezioni più piccole, in modo che ciascun contenitore della stessa dimensione contenga lo stesso numero di addobbi. Quanti addobbi contiene ciascuna confezione? [5 le piccole e 11 le grandi]
9. Una biblioteca compra due intere collane di libri. Ciascun libro della prima collana costa 25 euro e ciascun dell'altra 26 euro. Se vengono spesi 1000 euro, quanti libri di ciascuna collana sono stati acquistati? [14 della prima e 25 della seconda]
10. Un problema di Eulero. *Un tale comprò un totale di* 100 *fra maiali, capre e pecore spendendo* 100 *corone. Sapendo che i maiali costano* 3,5 *corone ciascuno, le capre* 1,5 *corone e le pecore* 0,5 *corone, e che comprò più di* 10 *e meno di* 20 *capre, determinare quanti animali di ogni tipo comprò.* [13 maiali, 11 capre, 76 pecore]

11. Katerina esegue un test, nel quale si assegnano 5 punti per ogni risposta esatta, 0 punti per ogni risposta sbagliata e 1 punti per ogni risposta non data; ottenendo 85 punti. Se invece si fossero assegnati 25 punti fissi, 4 punti per ogni risposta esatta, 0 punti per ogni risposta non data e si perdeva 1 punto per ogni risposta sbagliata, avrebbe ottenuto 78 punti. A quante domande ha risposto esattamente Katerina, al minimo e al massimo? Quante sono tutte le domande? [Minimo 17, non c'è massimo; 32]
12. Dal cosiddetto manoscritto di Bahskali, datato tra il 200 a.C. e il 400 d. C. *Una persona possiede* 7 *cavalli di razza asava, un'altra* 9 *cavalli di razza haya ed un'altra ancora* 10 *cammelli. Ciascuno cede un animale a ognuno degli altri due, in tal modo hanno animali che in totale hanno lo stesso valore. Determinare il prezzo di ogni tipo di animale e il valore di animali posseduto da ogni persona.* [21; 14; 12]
13. Da un problema di Mahaviracarya. *Furono raccolte delle mele, che furono sistemate in* 37 *cassette, ciascuna contenente lo stesso numero di frutti. Ogni cassetta conteneva più di* 100 *e meno di* 200 *mele. Sapendo che i raccoglitori erano* 79 *e che quando si divisero le mele in parti uguali ne avanzarono* 17, *si vuol sapere quante mele ebbe ciascun raccoglitore e quante ne conteneva ciascuna cassetta*. [115; 246]
14. Un problema assegnato a Stanford nel 1957. *Robert ha* 3 *album di francobolli, nel primo vi sono* $\frac{1}{5}$ *dei francobolli, nel secondo alcuni settimi e nel terzo i rimanenti* 303 *francobolli. Quanti francobolli ha in tutto Robert*? [3535]

Livello 3

15. Un teatro ha 100 posti. Il proprietario vuole incassare 100 euro facendo pagare 5 euro il prezzo intero, 2 euro il ridotto militari e per ogni 10 ragazzi al di sotto dei 12 anni farà pagare 1 euro. Nell'ipotesi di tutto esaurito, quanti adulti, militari e ragazzi devono entrare? [11; 19; 70]
16. Tre ladri avevano rubato alcune mele. Decisero di dormire prima di passare alla divisione del bottino. La notte uno di essi si alzò, mangiò una mela e ne nascose un terzo; dopo di questi anche gli altri due fecero lo stesso, mangiando una mela e nascondendo un terzo di quelle che erano rimaste. Al mattino, come se niente fosse accaduto, divisero in tre parti uguali le mele rimaste Determinare il minimo numero di mele necessarie affinché il problema abbia soluzioni. [78]
17. Con riferimento al problema precedente. In quel modo però facilmente i ladri si sarebbero accorti di ciò che era successo, dato che le mele rimaste erano di numero troppo ridotto rispetto a quelle iniziali. Determinare perciò la minima soluzione maggiore di 10000 mele. Quante ne rimangono alla fine? [10041; 2973]
18. 10 operai si sono impegnati a fare un lavoro che richiede 40 ore di tempo lavorativo. Ma gli operai abitano a diverse distanze dall'officina, così arrivano tutti in orari diversi, ma tutti distanziati dello stesso periodo di tempo. Ogni operaio ha guadagnato però in proporzione a quanto ha lavorato. Se l'operaio primo arrivato ha guadagnato quindici volte quanto l'ultimo arrivato, determinare in quanto tempo fu finito il lavoro, e a qual è la distanza di tempo fra l'arrivo di due operai. [$7{,}5^{h}$; $46^{m}40^{s}$]
19. Un antico problema cinese. *Cinque famiglie A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *hanno un pozzo in comune*. *Ogni famiglia ha corde tutte della stessa misura. Per raggiungere il fondo del pozzo bisognano* 2 *corde di A e* 1 *di B*, *o* 3 *di B e* 1 *di C*, *o* 4 *di C e* 1 *di D*, *o* 5 *di D e* 1 *di E o* 6 *di E e* 1 *di A*. *Determinare la lunghezza delle corde e la distanza dell'acqua dal bordo, sapendo che tutte le lunghezze sono intere e minori di* 1000. [211; 155; 112; 129; 61, 577]
20. Per una gita scolastica sono stati affittati 9 pullman da 52 posti, poiché 8 pullman non sarebbero stati sufficienti a contenere tutti i partecipanti. I 7 insegnanti accompagnatori distribuiscono gli studenti in modo tale che ciascun pullman contenga lo stesso numero di studenti. Per l'ultima tappa della loro gita debbono cambiare pullman, poiché la strada da percorrere non consente il passaggio di quelli grandi. Tutti i passeggeri vengono perciò sistemati in 12 pullman più piccoli, ciascuno dei quali contiene lo stesso numero di passeggeri. Quanti sono gli studenti? E se i pullman più piccoli dovessero essere 13? [432; Dati incoerenti]
21. Massimo deve pagare una tassa il cui importo è di *a* euro e *b* centesimi, con *a* e *b* numeri interi di due cifre. All'atto di scrivere l'assegno scambia i due valori, pagando così *b* euro e *a* centesimi. In tal modo ha pagato 31,68 euro in più. Determinare fra quali valori è compreso l'importo che deve pagare. [€ 1,33 e € 67,99]

22. Dal *Bija–Ganita* di Bhaskara. *Un uomo possiede* 5 *rubini*, 8 *zaffiri*, 7 *perle e* 92 *monete*, *un altro ha* 7 *rubini*, 9 *zaffiri*, 6 *perle e* 62 *monete. Se i due sono ugualmente ricchi, sai dire qual è il minimo valore espresso in monete, di ciascun tipo di pietre preziosa*?
[1 rubino = 15 monete, 1 zaffiro = 1 perla = 1 moneta]

23. Dalle *Propositiones ad acuendos juvenes*. *Disse un compratore: Voglio acquistare* 100 *porci con cento denari, in modo però che un verro sia comprato per 10 denari, una scrofa per 5 denari, due porcelli per un denaro. Dica, chi se ne intende, quanti verri, quante scrofe e quanti porcelli devono essere affinché non si superi né si diminuisca l'importo*.
[9 scrofe e 1 verro per 55 denari e 90 porcelli per 45 denari]

24. Dalle *Propositiones ad acuendos juvenes*. *Un padre di famiglia aveva* 20 *familiari e ordinò di dare ad essi* 20 *moggi di grano: egli ordinò che gli uomini ricevessero tre moggi, le donne due e i bambini mezzo moggio. Dica, chi può, quanti uomini, quante donne e quanti bambini devono essere*.
[1 uomo, 5 donne e 14 bambini]

25. $A \cap B \neq \varnothing$, $|A \cup B| = 17$ e $|A| = 2 \cdot |B|$, determinare $|A|$, $|B|$ e $|A \cap B|$. [(12; 6; 1) ∨ (14; 7; 4)]

26. Un eccentrico signore decise di dividere € 10000 fra gli studenti di una classe estratta a sorte fra tutte quelle delle scuole della sua città. Poiché fu estratta una classe in cui vi erano maggiorenni e minorenni, decise che ciascun maggiorenne avrebbero avuto € 100 euro in più di ciascun minorenne. Se ogni maggiorenne ebbe € 350, di quanti studenti era composta la classe? [30 ∨ 32 ∨ 34 ∨ 36 ∨ 38]

Per la prova Invalsi

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato alle prove Invalsi del 2015. *Una lavanderia a gettoni lavora con orario continuato dalle* 9 *alle* 18. *Ogni lavatrice effettua cicli di lavaggio della durata di* 33 *minuti, ai quali si devono aggiungere* 10 *minuti per l'operazione di carico e* 5 *per lo svuotamento. Quanti lavaggi completi, comprensivi di carico e svuotamento, può effettuare al massimo una lavatrice nell'arco della giornata*?
Indichiamo con n il numero dei lavaggi completi. Il tempo per svolgerne uno è $(33 + 10 + 5) = 48$ minuti; abbiamo a disposizione 9 ore, cioè 540 minuti; pertanto la richiesta equivale alla risoluzione, nei naturali, della disequazione $48n \leq 540 \Rightarrow 4n \leq 45 \Rightarrow n \leq \frac{45}{4}$, dato che il numero naturale più grande e minore di 45/4 è 11, questa è la risposta.

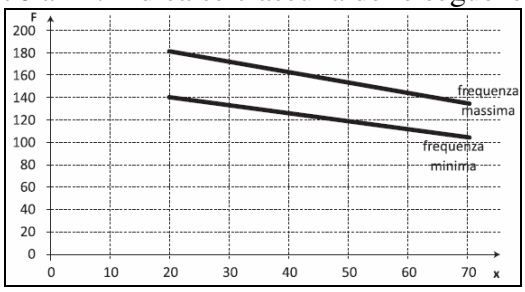
1. (Invalsi 2004) Nella tabella sono riassunte le età (E) degli spettatori di una partita di pallavolo:

Classe di età (anni)	Numero di spettatori
Meno di 12	2
$12 \leq E < 18$	7
$18 \leq E < 24$	6
$24 \leq E < 30$	3
$30 \leq E < 45$	2
$45 \leq E$	6

Quanti sono gli spettatori maggiorenni? A) 11 B) 17 C) 18 D) 24 [B]

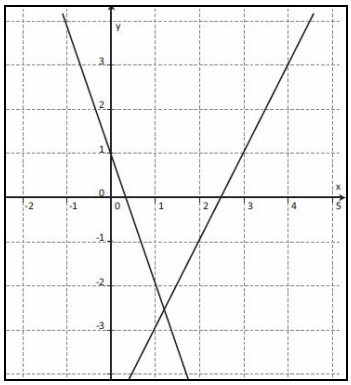
2. (Invalsi 2014) Le persone, durante le attività sportive, non dovrebbero superare una determinata frequenza del battito cardiaco, frequenza che varia in funzione dell'età. Il numero massimo di battiti al minuto che non dovrebbe essere superato (frequenza cardiaca massima consigliata) si può calcolare sottraendo a 220 l'età x del soggetto. Inoltre, affinché un allenamento in palestra sia efficace, il numero dei battiti y dovrebbe essere mantenuto in un intervallo compreso tra il 70% e il 90% della frequenza cardiaca massima consigliata.
a) Quale delle seguenti disuguaglianze esprime il numero di battiti da mantenere in un allenamento efficace? A) $70 \cdot (220 - x) \leq y \leq 90 \cdot (220 - x)$ B) $0{,}7 \cdot (220 - x) \leq y \leq 0{,}9 \cdot (220 - x)$
C) $220 - 0{,}9 \cdot x \leq y \leq 220 - 0{,}7 \cdot x$ D) $0{,}9 \cdot 220 - x \leq y \leq 0{,}7 \cdot 220 - x$ [B]

b) Sul seguente diagramma cartesiano sono rappresentate, in funzione dell'età (x), le frequenze cardiache (F) massima e minima entro le quali si ha un allenamento efficace per soggetti che hanno un'età compresa tra 20 e 70 anni. Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.

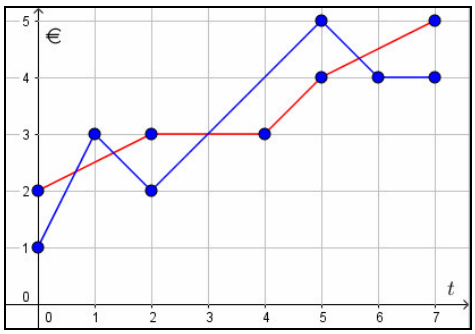


i) La differenza fra la frequenza massima e la frequenza minima a 70 anni è maggiore di quella a 20 anni ; ii) A vent'anni un allenamento è efficace quando la frequenza cardiaca si mantiene all'incirca tra 140 e 180 battiti al minuto; iii) Perché un allenamento sia efficace, chi ha 70 anni non deve superare la frequenza cardiaca di circa 120 battiti al minuto. [F ; V; F]

3. (Invalsi 2015) Lorenza afferma: "La disequazione $x/2 < x$ e soddisfatta per ogni numero reale x". Lorenza ha ragione? Giustifica la risposta. [No, falso per $x = 0$]
4. (Invalsi 2015) Su un piano cartesiano sono rappresentati i grafici delle funzioni f e g definite nell'insieme dei numeri reali e rappresentate dalle formule $f(x) = 2x - 5$ e $g(x) = -3x + 1$. Aiutandoti anche con i grafici di f e di g, indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.
a) $f(x) = g(x)$ se e solo se $x = 1{,}2$; b) $f(x) > 0$ se e solo se $x > 0$; c) $f(x) = 0$ se e solo se $x = 2{,}5$; d) $g(x) > f(x)$ se e solo se $x < 1{,}2$. [V; F; V; V]



5. (Invalsi 2017) Un sacchetto di caramelle contiene 15 caramelle alla menta e 25 caramelle al limone. Con 100 caramelle alla menta e 180 caramelle al limone, qual è il numero massimo di sacchetti con la stessa composizione del precedente che si possono riempire? [6]
6. Marta ha a disposizione 25 euro per comprare quaderni e penne da regalare ai suoi 7 nipotini, ma vuole regalarne lo stesso numero a tutti. Se un quaderno costa € 0,75 e una penna € 0,60 quanti quaderni e penne può comprare a ciascuno? [2]
7. L'espressione $\dfrac{7n-31}{-13n+217}$ rappresenta numeri positivi per quali n numeri interi? [$n \leq 16$]
8. Alcuni amici stanno raccogliendo del denaro per fare un regalo di nozze. Hanno visto che mettendo € 15,00 a testa raccolgono meno di € 100,00 mentre se mettono € 25,00 superano € 140,00. quanti sono gli amici? [6]
9. Sappiamo che aumentando di 17 il triplo di un numero intero otteniamo più che se aggiungessimo 41 al doppio, mentre se togliessimo 21 al quadruplo otterremmo meno che se aggiungessimo 19 al triplo. Di quale numero stiamo parlando? [Un numero compreso tra 25 e 39]

10. Nel seguente grafico abbiamo rappresentato 

l'andamento di due titoli in borsa durante 7 ore di contrattazione. I valori segnati con i punti sono i valori medi rilevati. Per quante rilevazioni complessivamente il titolo blu ha avuto un valore superiore a quello rosso? [3]

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi

1. Dimostrare che la media aritmetica di due numeri non negativi qualsiasi è sempre minore o uguale alla media geometrica degli stessi numeri, cioè che $\frac{a+b}{2} \le \sqrt{a \cdot b}$. Per fare ciò si deve partire da una disuguaglianza sicuramente vera, qual è? $\left[(a-b)^2 \ge 0\right]$

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
AHSME = Annual High School Mathematics Examination MT = Mathematics Teacher, rivista della NCTM

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato all'AHSME nel 1951.
Se $x > y > 0$, *e* $z \neq 0$, *quale fra le seguenti scritte non è sempre vera*?

a) $x + z > y + z$ b) $x - z > y - z$ c) $x \cdot z > y \cdot z$ d) $\frac{x}{z^2} > \frac{y}{z^2}$ e) $x \cdot z^2 > y \cdot z^2$

Consideriamo singolarmente ciascuna opzione.
a) È la proprietà che nella teoria, abbiamo etichettato con il numero 5, che vale anche se $z = 0$.
b) È sempre la stessa proprietà, dato che sottrarre z equivale ad aggiungere $(-z)$.
c) Questa proprietà apparentemente somiglia alla proprietà n. 6, però in quel caso, deve essere $z > 0$; pertanto la proprietà, come è enunciata nel quesito, non è sempre corretta. Per esempio se $3 > 2$ non è vero che $3 \cdot (-1) > 2 \cdot (-1)$.
d) Questa proprietà, invece, equivale proprio alla 6, dato che, essendo per ipotesi $z \neq 0$, è certamente $z^2 > 0$ e qui moltiplichiamo per $\frac{1}{z^2} > 0$.
e) Vale lo stesso discorso del caso precedente: moltiplichiamo per $z^2 > 0$.
Concludiamo dicendo che l'unica proprietà non sempre vera è la c).

1. (AHSME1950) Sapendo che vale la seguente formula: $C = \frac{en}{R+nr}$, con e, R e r numeri positivi e n numero naturale. All'aumentare solo di n cosa accade a C? A) diminuisce B) aumenta C) non varia D) Prima aumenta e poi diminuisce E) Prima diminuisce e poi aumenta [B]
2. (AHSME1958) Considerata la frazione $\frac{6x+1}{7-4x}$, con x numero reale compreso tra –2 e 2,determinare per quali x la frazione è maggiore di 1. $\left[\frac{3}{5} < x \le 2\right]$

3. (AHSME1958) Sapendo che se $a > b$ allora $c > d$ e se $c < d$ allora $e > f$. Quale delle seguenti è una corretta deduzione? A) se $a < b$ allora $e > f$ B) se $e > f$ allora $a < b$ C) se $e < f$ allora $a > b$ D) se $a > b$ allora $e < f$ E) nessuna delle precedenti [E]
4. (AHSME 1960) 5 volte il denaro a posseduto da A sommato al denaro b posseduto da B supera \$ 51. 3 volte a meno b è uguale a \$ 21. Quali delle seguenti scritte è vera?
A) $a > 9$, $b > 6$ B) $a > 9$, $b < 6$ C) $a > 9$, $b = 6$ D) $a > 9$, non sappiamo limitare b E) $2a = 3b$ [A]
5. (AHSME 1974) Quale delle seguenti proposizioni è corretta? A) se $x < 0$ allora $x^2 > x$; B) se $x^2 > 0$ allora $x > 0$; C) se $x^2 > x$ allora $x > 0$; D) se $x^2 > x$ allora $x < 0$; E) se $x < 1$ allora $x^2 < x$ [A]
6. (AHSME 1989) a, b, c e d sono numeri interi, con $a < 2b$, $b < 3c$ e $c < 4d$. Se $d < 100$, determinare il massimo valore che può assumere a. [2375]
7. (AHSME1996) Tenuto conto che $0 < a < b < c < d$, quale fra le seguenti frazioni è la più grande? [E]
A) $\frac{a+b}{c+d}$ B) $\frac{a+d}{b+c}$ C) $\frac{b+c}{a+d}$ D) $\frac{b+d}{a+c}$ E) $\frac{c+d}{a+b}$

Questions in English

Working together

This question was published in the issue of December 1996 in the magazine Mathematics teacher.
How many real numbers x satisfy $|||x - 2| - 4| - 5| = 1$?
We have: $||x - 2| - 4| - 5 = 1 \vee ||x - 2| - 4| - 5 = -1 \Rightarrow ||x - 2| - 4| = 6 \vee ||x - 2| - 4| = 4$ (1). The first case becomes the following two cases: $|x - 2| - 4 = 6 \vee |x - 2| - 4 = -6 \Rightarrow |x - 2| = 10 \vee |x - 2| = -2$. The second of the previous ones is obviously without solutions, because the first member is positive while the second isn't. Thus we solve the first one: $x - 2 = 10 \vee x - 2 = -10 \Rightarrow x = 12 \vee x = -8$. Now we return to the second of the equations (1). $|x - 2| - 4 = 4 \vee |x - 2| - 4 = -4 \Rightarrow |x - 2| = 8 \vee |x - 2| = 0$. The second has the unique solution $x = 2$. The first one: $x - 2 = 8 \vee x - 2 = -8 \Rightarrow x = 10 \vee x = -6$. Hence in total we have 5 solutions.

8. (MT1993) If 55% of the lambs born are male and 90% of them survive the first year, what is the fewest number of lambs that must be born to have 100 male lambs living at the end of the first year? [203]
9. (MT1993) Let c be a constant. The simultaneous equations $\begin{cases} x - y = 2 \\ cx + y = 3 \end{cases}$ have a solution $(x\ ;\ y)$ inside quadrant I if and only if A) $c = -1$ B) $c > -1$ C) $c < 3/2$ D) $0 < c < 3/2$ E) $-1 < c < 3/2$ [D]
10. (MT1995) Find the product of all real values of p that satisfy the equation $6 \cdot |p - 6| = |p + 6|$. [36]
11. (AHSME1995) Let f be a linear function with the properties that $f(1) \leq f(2)$, $f(3) \geq f(4)$, and $f(5) = 5$. Which of the following statements is true? [D]
A) $f(0) < 0$ B) $f(0) = 0$ C) $f(1) < f(0) < f(-1)$ (D) $f(0) = 5$ E) $f(0) > 5$
12. (AHSME1995) Anita attends a baseball game in Atlanta and estimates that there are 50000 fans in attendance. Bob attends a baseball game in Boston and estimates that there are 60000 in attendance. A league official who knows the actual numbers attending the two games notes that: i) The actual attendance in Atlanta is within 10% of Anita's estimate; ii) Bob's estimate is within 10% of the actual attendance in Boston. To the nearest 1, 000, the largest possible difference between the numbers attending the two games is A) 10000 B) 11000 C) 20000 D) 21000 E) 22, 000 [E]
13. (MT1996) A salesperson wants to rent a car for one day. Rental Agency A charges \$ 35 per day plus 20 cents per mile driven. Rental Agency B charges \$ 30 per day plus 25 cents per mile driven. Should she rent the car from Agency A or B to get the best rate? [A after 100 miles, B before]
14. (MT1996) Find the area of the region enclosed by the graph of $|y| + |2x| = 6$. [36]
15. (AHSME1997) How many two-digit positive integers N have the property that the sum of N and the number obtained by reversing the order of the digits of N is a perfect square? [E]
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Attività di recupero

Proprietà delle disuguaglianze e Disequazioni di primo grado in un'incognita

Fase 1: Osserva

- Risolvere la disequazione di primo grado $3x - 4 > 5 - 3x$. Il procedimento di risoluzione è, almeno inizialmente, simile a quello adottato per la risoluzione delle equazioni di primo grado e consiste nel posizionare i termini con x al primo membro e i termini noti al secondo, utilizzando la regola di trasporto di un addendo, valida per le equazioni. Abbiamo così: $3x + 3x > 5 + 4 \Rightarrow 6x > 9$. A questo punto possiamo applicare la regola di trasporto di un fattore, valida per le equazioni e, poiché il coefficiente dell'incognita è un numero positivo, la disequazione non cambia segno: $\frac{\cancel{6}^{1}x}{\cancel{6}^{1}} > \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{6}^{2}} \Rightarrow x > \frac{3}{2}$. Tuttavia, nonostante il metodo di risoluzione sia del tutto identico a quello utilizzato per le equazioni di primo grado, il significato della soluzione è però del tutto diverso: nelle equazioni di primo grado la soluzione è sempre *un solo numero reale*, nelle disequazioni di primo grado invece abbiamo *infinite soluzioni*. Infatti la nostra soluzione, $x > \frac{3}{2}$, si legge x maggiore di $\frac{3}{2}$, cioè risolvono la disequazione tutti gli infiniti numeri maggiori di $\frac{3}{2}$.
- Risolvere $7x - 1 \le 2 + 11x$. Applichiamo il metodo presentato nell'esempio precedente: $7x - 11x \le 2 + 1 \Rightarrow -4x \le 3$. Adesso dobbiamo applicare anche la regola di trasporto di un fattore, ma in questo caso poiché il fattore da trasportare è negativo (– 4), si cambia il verso della disequazione: $-4x \le 3 \Rightarrow \frac{-4x}{-4} \ge \frac{3}{-4} \Rightarrow x \ge -\frac{3}{4}$.

Fase 2: Completa …

- Risolvere $5x - 2 < 8 - 9x$. Trasportiamo i termini con ……. a sinistra del segno < e i …… a destra: $5x + 9x <$ ……. Sommiamo i termini simili: ……< ……. Adesso, poiché il coefficiente dell'incognita è ……. possiamo dividere entrambi i membri per …… senza nessuna modifica, ottenendo: ……, cioè la soluzione.
- Risolvere $1 - 3x \ge 2 - x$. Ancora una volta isoliamo da parti opposte i termini con …….. e i termini ……, ottenendo: …… Riduciamo i termini simili: …… Il coefficiente dell'incognita è ……., quindi prima di dividere …… per esso dobbiamo cambiare …….. della disequazione, ottenendo: ……, che è la soluzione cercata.

Fase 3: Prova!

Risolvere le seguenti disequazioni di primo grado in un'incognita

1. $2x + 1 > -3$; $3x + 4 \le 4 + x$; $2x - 3 \ge 3 - 2x$; $11x > 3 - 14x$ $\left[x > -2; x \le 0; x \ge \frac{3}{2}; x > \frac{3}{25}\right]$
2. $3 \cdot (x - 1) - 2x > 3x - (4x + 1) \cdot 5$; $2 \cdot (3x - 1) - 4x + 1 \ge 5x - 2 + 4 \cdot (2x + 1)$ $\left[x > -\frac{1}{9}; x \le -\frac{3}{11}\right]$
3. $(4x + 1) \cdot 2 - 3x + 1 \le 7 \cdot (x - 2) - 3x + 1$; $\frac{2x-1}{3} - \frac{3x+1}{2} > -2x + \frac{7x-1}{6} + 1$ $[x \le -16; \varnothing]$
4. $\frac{3x+1}{3} - \frac{4x+2}{4} - x < \frac{1-x}{6} + \frac{3x-5}{6}$; $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}x - 1\right) - \frac{1}{3} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) + 1 \ge \frac{1}{6} \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right) + 1$ $\left[x > \frac{3}{8}; x \le -\frac{8}{9}\right]$
5. $2 \cdot \left(\frac{3}{4}x - 1\right) - \frac{x-1}{4} < \frac{1}{8} - \frac{3}{2}x + \frac{1}{6}$; $(x - 1)^2 - 3x + 2 \ge (x - 2) \cdot (x + 3) - 4x + 1$ $\left[x < \frac{49}{6}; x \le 4\right]$

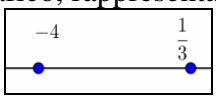
6. $\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2-\left(\frac{1}{3}x+1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x+3\right)-1\le\left(\frac{1}{3}x-2\right)\cdot\left(\frac{1}{4}x+1\right)-\frac{3}{8}$ $\left[x\ge-\frac{15}{8}\right]$

7. $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{4}x+1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}\right)-3x+\frac{2}{3}>\frac{11}{3}x\cdot\left(\frac{1}{4}x-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{4}-\frac{2}{3}$ $\left[x>-\frac{14}{195}\right]$

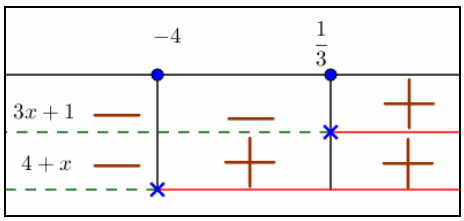
8. $\left(5x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}-x\right)+\left(x-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)-2>(2x-3)\cdot(3-2x)-\frac{1}{4}x+2$ $\left[x<\frac{113}{236}\right]$

Disequazioni prodotto e disequazioni fratte

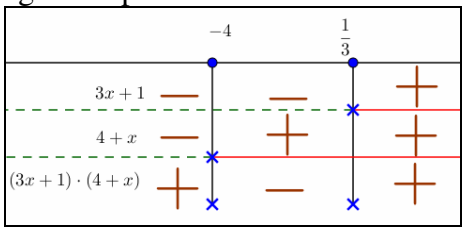
Fase 1: Osserva

- Risolvere $(3x - 1) \cdot (4 + x) > 0$. Vogliamo determinare quando il precedente prodotto è positivo. Per la regola dei segni, noi sappiamo che un prodotto di due fattori è positivo solo quando entrambi i fattori hanno lo stesso segno, sono cioè o entrambi positivi o entrambi negativi. Studiamo quindi singolarmente i segni dei due fattori, per esempio quando sono entrambi positivi: $3x - 1 > 0 \Rightarrow 3x > 1 \Rightarrow \frac{3x}{3} > \frac{1}{3} \Rightarrow x > \frac{1}{3}$ e anche $4 + x > 0 \Rightarrow x > -4$. Abbiamo così stabilito quando, singolarmente, ciascuno dei due fattori è positivo, ma, in effetti, abbiamo anche stabilito quando ciascuno dei due è negativo. Infatti, se il primo fattore è positivo solo per $x > \frac{1}{3}$, è evidente che sarà negativo per $x < \frac{1}{3}$, mentre per $x = \frac{1}{3}$ sarà nullo. Allo stesso modo il secondo fattore sarà positivo per $x > -4$, nullo per $x = -4$ e negativo per $x < -4$. Adesso inseriamo tutto quel che abbiamo appena determinato in un grafico, rappresentante la retta numerica, nel quale separiamo tutti i numeri reali mediante i valori –4 e $\frac{1}{3}$. 

In questo modo abbiamo suddiviso tutti i numeri reali in cinque sottoinsiemi costituiti da: i numeri minori di –4 ($x < -4$), cioè i numeri che sulla precedente retta reale sono a sinistra di –4; il numero –4; i numeri che sono contemporaneamente maggiori di –4 e minori di $\frac{1}{3}$ (scriviamo $-4 < x < \frac{1}{3}$); il numero $\frac{1}{3}$ e i numeri maggiori di $\frac{1}{3}$ ($x > \frac{1}{3}$). Adesso *appuntiamo* sotto la precedente retta i segni che ciascuno dei due fattori ha in ognuno dei cinque sottoinsiemi:



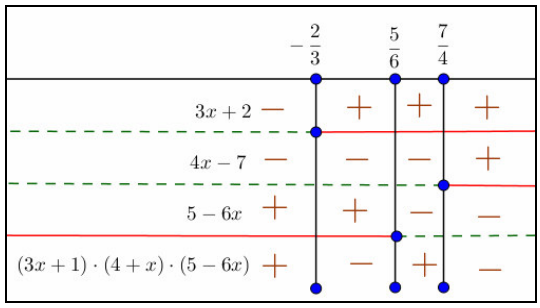
Abbiamo quasi finito. Infatti, poiché conosciamo singolarmente il segno di ciascun fattore, basta moltiplicare i detti segni per ottenere il segno del prodotto in ciascuno dei cinque sottoinsiemi:



Il grafico precedente ci fornisce quindi le soluzioni cercate, cioè i valori di x che rendono positivo il prodotto; in simboli scriviamo: $x < -4 \vee x > \frac{1}{3}$.

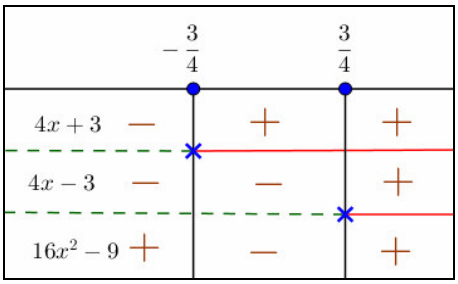
- Risolvere la disequazione $(3x + 2) \cdot (4x - 7) \cdot (5 - 6x) \le 0$. Abbiamo tre fattori, di ciascuno dei quali stabiliamo il segno: $3x + 2 \le 0 \Rightarrow 3x \le -2 \Rightarrow x \le -\frac{2}{3}$; $4x - 7 \le 0 \Rightarrow 4x \le 7 \Rightarrow x \le \frac{7}{4}$; $5 - 6x \le 0 \Rightarrow -6x \le -5$

$\Rightarrow x \geq \frac{5}{6}$. Riportiamo su un grafico comune i precedenti risultati, tenuto conto che le *risposte* ottenute sono relative alla domanda: *Quando l'espressione è negativa o nulla*? Essendo tre i numeri ottenuti avremo un totale di sette sottoinsiemi da considerare:



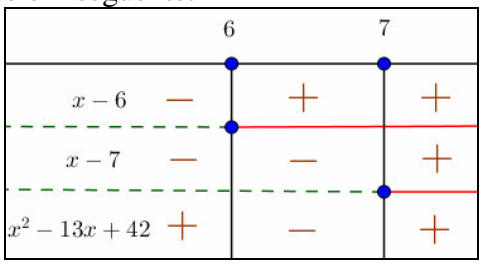
Dal grafico possiamo dedurre che il prodotto è negativo o nullo per: $-\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{5}{6} \vee x \geq \frac{7}{4}$.

- Risolvere $(16x^2 - 9) > 0$. Abbiamo una disequazione di secondo grado, che può però essere ricondotta a un prodotto di fattori di primo grado, utilizzando i prodotti notevoli. Possiamo scrivere: $16x^2 - 9 > 0 \Rightarrow (4x - 3) \cdot (4x + 3) > 0$, quindi ci riconduciamo ai casi visti nell'attività precedente. $4x - 3 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{4}$ e $4x + 3 > 0 \Rightarrow x > -\frac{3}{4}$. Costruiamo il grafico relativo



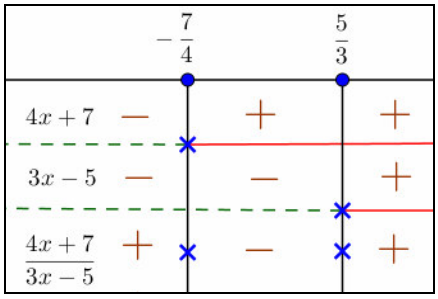
da cui deduciamo le soluzioni: $x < -\frac{3}{4} \vee x > \frac{3}{4}$.

- Risolvere $9x^2 - 6x + 1 < 0$. Possiamo scrivere il primo membro come un quadrato di binomio: $(3x - 2)^2 < 0$. Adesso, dato che un quadrato non è mai negativo, concludiamo che la disequazione è una contraddizione, quindi è priva di soluzioni.
- Risolvere $x^2 - 13x + 42 \geq 0$. Scomponiamo il primo membro come trinomio di secondo grado, ossia cerchiamo due numeri la cui somma sia –13 e il cui prodotto sia 42: ricaviamo immediatamente che i due numeri sono –6 e –7, quindi riscriviamo la disequazione nel seguente modo: $(x - 6) \cdot (x - 7) \geq 0$. Pertanto la risoluzione è legata a quella delle disequazioni $x - 6 \geq 0$ e $x - 7 \geq 0$, le cui soluzioni sono: $x \geq 6$ e $x \geq 7$ rispettivamente. Il grafico associato è il seguente:



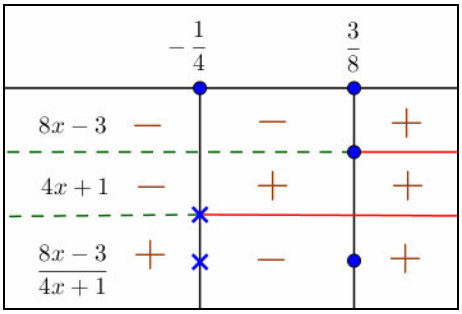
e le soluzioni sono: $x \leq 6 \vee x \geq 7$.

- Risolvere $\frac{4x+7}{3x-5} > 0$. La risoluzione di una disequazione fratta in genere non differisce da quella di una disequazione in cui figurano solo prodotti, almeno finché il segno della disequazione è > oppure <; qualche variazione vi è invece se il segno è ≥ oppure ≤. Consideriamo intanto i primi due casi. Determiniamo i valori che rendono positivo il numeratore, $x > -\frac{7}{4}$, e che rendono positivo il denominatore, $x > \frac{5}{3}$. Compiliamo il grafico:



dal quale si evince che le soluzioni sono: $x < -\frac{7}{4} \vee x > \frac{5}{3}$.

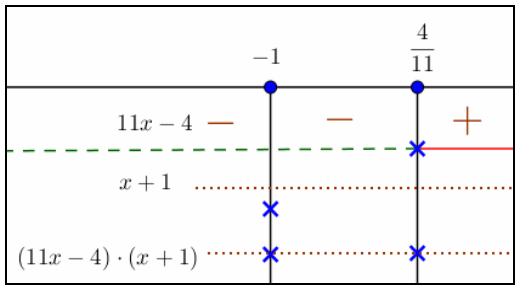
- Risolvere $\frac{8x-3}{4x+1} \leq 0$. In questo caso la risoluzione differisce leggermente da quella relativa alle disequazioni in cui figurano solo prodotti, e solo per i valori che annullano la disequazione. Infatti, mentre in tali disequazioni si accettano come soluzioni anche quelle che annullano **tutti** i fattori, nelle disequazioni fratte non è possibile accettare i valori che annullano il denominatore, poiché in tal caso la frazione non esiste. Pertanto dobbiamo considerare le seguenti disequazioni: $8x - 3 \geq 0$, con soluzioni $x \geq \frac{3}{8}$, e $4x + 1 > 0$, con soluzioni $x > -\frac{1}{4}$. Costruiamo il grafico:



nel quale notiamo che l'unica differenza è la presenza di una *croce* sul valore $-\frac{1}{4}$, che significa che il detto valore non è accettabile perché annulla il denominatore. È invece accettabile il valore $\frac{3}{8}$ che, annullando il numeratore, annulla anche la frazione. Pertanto la soluzione della disequazione è: $-\frac{1}{4} < x \leq \frac{3}{8}$.

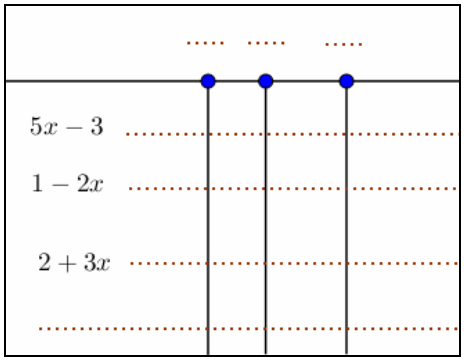
Fase 2: Completa …

- Risolvere la disequazione $(11x - 4) \cdot (x + 1) < 0$. Determiniamo singolarmente il segno di ciascun fattore: $11x - 4 < 0 \Rightarrow$ …… e $x + 1 < 0 \Rightarrow$ ……. Adesso rappresentiamo su un unico grafico i risultati ottenuti:



Nell'ultima riga abbiamo moltiplicato fra loro …… In questa tabella consideriamo gli intervalli in cui troviamo il segno ……. possiamo così concludere che la disequazione ammette le seguenti soluzioni: ……

- Risolvere la disequazione $(5x - 3) \cdot (1 - 2x) \cdot (2 + 3x) \geq 0$. Ancora una volta determiniamo il segno di ciascun fattore: $5x - 3 \geq 0 \Rightarrow$ …….. ; $1 - 2x \geq 0 \Rightarrow$ ……. …… Raccogliamo in un unico grafico questi risultati



Cerchiamo gli intervalli in cui vi è il segno ……, ma anche quei valori in cui si annulla uno almeno dei tre fattori, ottenendo così la seguente soluzione:……..

- Risolvere $x^2 + 11x + 28 < 0$. Scomponiamo il polinomio al primo membro cercando due numeri interi la cui somma è ……e il cui prodotto è ……. Questi due numeri sono 4 e ……, quindi possiamo riscrivere la disequazione in questa forma più *comoda*: $(x - 4) \cdot (\ldots\ldots) < 0$. Determiniamo quindi il segno di ciascuno dei due fattori e, utilizzando un opportuno grafico (che compilerai tu), determiniamo la soluzione finale: …….
- Risolvere $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 > 0$. Riconosciamo nel primo membro lo sviluppo del ……..., quindi scriviamo (……) > 0. È evidente che l'esponente non riveste alcuna importanza nella ricerca del segno dell'espressione, quindi la disequazione di partenza ha le stesse soluzione della più semplice disequazione: ……., cioè ……
- Risolvere $\frac{12x-7}{4+19x} < 0$. Determiniamo per quali valori di x il numeratore è positivo, ……., e per quali è positivo il denominatore, ……. Mettiamo il tutto nel grafico seguente (che tu costruirai), ottenendo la seguente soluzione: ……
- Risolvere $\frac{4x+7}{18x-1} \le 0$. Risolviamo le seguenti due disequazioni: …….. e …….., le cui soluzioni sono rispettivamente: …….. e …….. Mettiamo il tutto in un grafico, facendo attenzione al valore …….. che annulla il …… Concludiamo dicendo che la soluzione della disequazione è ……

Fase 3: Prova!

Risolvere le seguenti disequazioni

1. $(x + 1) \cdot (x - 2) > 0$; $(3 - x) \cdot (x + 3) \le 0$; $(5 + 7x) \cdot (1 + 9x) \le 0$

$$\left[\left(x < -1 \vee x > 2\right); \left(x \le -3 \vee x \ge 3\right); \left(-\frac{5}{7} \le x \le -\frac{1}{9}\right)\right]$$

2. $(6x + 2) \cdot (4x - 1) < 0$; $(8x - 3) \cdot (3 + 8x) \ge 0$; $(1 + 2x) \cdot (1 - 3x) \cdot (1 + 4x) > 0$

$$\left[\left(-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{4}\right); \left(x \le -\frac{3}{8} \vee x \ge \frac{3}{8}\right); \left(x < -\frac{1}{2} \vee -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{3}\right)\right]$$

3. $(x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3) \le 0$; $(3x - 2) \cdot (4x + 1) \cdot (5x - 4) > 0$

$$\left[\left(x \le -3 \vee -1 \le x \le 2\right); \left(-\frac{1}{2} < x < -\frac{1}{4} \vee x > \frac{4}{5}\right)\right]$$

4. $(2x - 7) \cdot (7 + 2x) \cdot (7x - 2) \le 0$; $(4x + 1) \cdot (4 - x) \cdot (3x - 13) > 0$

$$\left[\left(x \le -\frac{7}{2} \vee \frac{2}{7} \le x \le \frac{7}{2}\right); \left(x < -\frac{1}{4} \vee 4 < x < \frac{13}{3}\right)\right]$$

5. $(2x - 3) \cdot (3x - 2) \cdot (4x + 1) \cdot (4 - x) \ge 0$; $(7x - 1) \cdot (13x + 12) \cdot (12 - 13x) \cdot (2x + 5) > 0$

$$\left[\left(-\frac{1}{4} \le x \le \frac{2}{3} \vee x \ge \frac{3}{2}\right); \left(-\frac{5}{2} < x < -\frac{12}{13} \vee \frac{1}{7} < x < \frac{12}{13}\right)\right]$$

Dopo aver scomposto in fattori il polinomio al primo membro, risolvere le seguenti disequazioni di grado superiore al primo

1. $9x^2-30x+25>0\ ;\ x^2-3x-28\le 0\ ;\ x^3-9x^2+27x-27>0$ $\left[\left(x\neq\frac{5}{3}\right);(-4\le x\le 7);(x>3)\right]$

2. $16x^2-40x+25\ge 0\ ;\ 81x^2-4\ge 0\ ;\ x^2+8x-33\le 0$ $\left[(\forall x\in\mathbb{R});\left(x\le-\frac{2}{9}\vee x\ge\frac{2}{9}\right);(-11\le x\le 3)\right]$

3. $x^2+13x+40>0\ ;\ 9x^2-24x+16>0\ ;\ 169x^2-144<0$ $\left[(x<-8\vee x>-5);\left(x\neq\frac{4}{3}\right);\left(-\frac{12}{13}<x<\frac{12}{13}\right)\right]$

4. $49x^2+28x+4\le 0\ ;\ x^3-16x<0\ ;\ 16x^3+8x^2+x\ge 0$ $\left[\left(x=-\frac{2}{7}\right);(x<-4\vee 0<x<4);\left(x=-\frac{1}{4}\vee x\ge 0\right)\right]$

5. $27x^3-27x^2+9x-1\le 0\ ;\ 2x^3-98x\ge 0\ ;\ 4x^3-28x^2+49x>0$

$\left[\left(x\le\frac{1}{3}\right);(-7\le x\le 0\vee x\ge 7);\left(x>0,x\neq\frac{7}{2}\right)\right]$

Risolvere le seguenti disequazioni fratte

6. $\frac{2-x}{x+1}>0\ ;\ \frac{3x-5}{5x+1}>0\ ;\ \frac{8x-9}{6x+13}>0;\ \frac{4x+1}{5x-12}<0$

$\left[(-1<x<2);\left(x<-\frac{1}{5}\vee x>\frac{5}{3}\right);\left(x<-\frac{13}{6}\vee x>\frac{9}{8}\right);\left(-\frac{1}{4}<x<\frac{12}{5}\right)\right]$

7. $\frac{11x-3}{5x-14}\ge 0;\ \frac{7x+8}{14x-2}\le 0;\ \frac{3x-1}{17x+4}\ge 0;\ \frac{1-2x}{3x+4}\ge 0$

$\left[\left(x\le\frac{3}{11}\vee x>\frac{14}{5}\right);\left(-\frac{8}{7}\le x<\frac{1}{7}\right);\left(x<-\frac{4}{17}\vee x\ge\frac{1}{3}\right);\left(-\frac{4}{3}<x\le\frac{1}{2}\right)\right]$

8. $\frac{3-2x}{4-7x}<0;\ \frac{15x-3}{16x+8}<0;\ \frac{x^2-1}{3x-1}>0\ ;\ \frac{x^2-4x+4}{3x+2}>0$

$\left[\left(\frac{4}{7}<x<\frac{3}{2}\right);\left(-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{5}\right);\left(-1<x<\frac{1}{3}\vee>1\right);\left(x>-\frac{2}{3},x\neq 2\right)\right]$

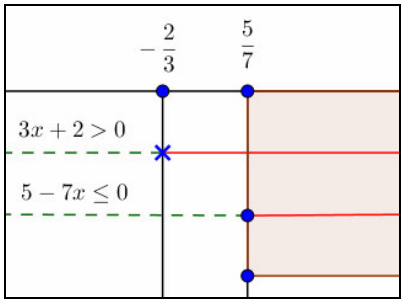
9. $\frac{x^2-10x+21}{4x-1}\le 0\ ;\ \frac{9x^2-30x+25}{4x^2-9}>0\ ;\ \frac{x^2-4x-12}{x^2+4x-12}\le 0$

$\left[\left(x<\frac{1}{4}\vee 3\le x\le 7\right);\left(x<-\frac{3}{2}\vee x>\frac{3}{2},x\neq\frac{5}{3}\right);(-6<x\le -2\vee 2<x\le 6)\right]$

Sistemi di disequazioni in un'incognita

Fase 1: Osserva

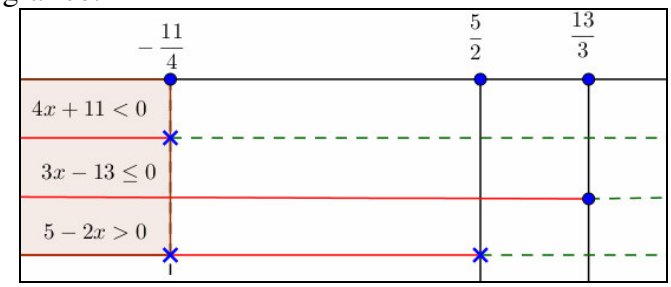
- Risolvere $\begin{cases}3x+2>0\\5-7x\le 0\end{cases}$. Risolviamo singolarmente ciascuna disequazione: $\begin{cases}3x>-2\\-7x\le -5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-\frac{2}{3}\\x\ge\frac{5}{7}\end{cases}$. Adesso rappresentiamo il tutto in un grafico, per stabilire se vi sono sottoinsiemi dei numeri reali in cui entrambe le disequazioni hanno soluzioni.



Abbiamo indicato con un tratto continuo l'insieme delle soluzioni di ciascuna delle due disequazioni. In questo modo si riconosce facilmente l'eventuale soluzione del sistema, ossia la zona in cui vi sono due linee continue, indicata con il fondo marrone, il che accade se $x \geq \frac{5}{7}$.

- Risolvere $\begin{cases} 4x+11<0 \\ 3x-13\leq 0 \\ 5-2x>0 \end{cases}$. Risolviamo singolarmente ciascuna disequazione: $\begin{cases} 4x<-11 \\ 3x\leq 13 \\ -2x>-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-\frac{11}{4} \\ x\leq \frac{13}{3} \\ x<\frac{5}{2} \end{cases}$.

Riportiamo il tutto in un grafico.

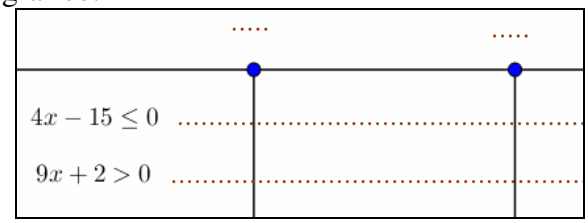


Ancora una volta cerchiamo le eventuali zone in cui vi sono solo linee continue, il che accade per $x<-\frac{11}{4}$, che è perciò la soluzione del sistema.

Fase 2: Completa …

- Risolvere $\begin{cases} 4x-15\leq 0 \\ 9x+2>0 \end{cases}$. Risolviamo singolarmente ciascuna disequazione: $\begin{cases} 4x\leq 15 \\ 9x>-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ..... \\ ..... \end{cases}$.

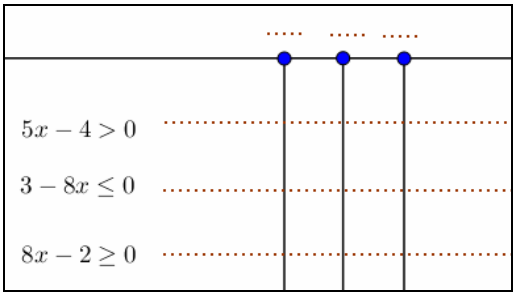
Rappresentiamo il tutto in un grafico.



Indichiamo con un tratto continuo l'insieme delle soluzioni di ciascuna delle due disequazioni. In questo modo si riconosce immediatamente l'eventuale soluzione del sistema, ossia la zona in cui vi sono due linee continue, il che accade se …….

- Risolvere $\begin{cases} 5x-4>0 \\ 3-8x\leq 0 \\ 8x-2\geq 0 \end{cases}$. Risolviamo singolarmente ciascuna disequazione: $\begin{cases} 5x>4 \\ -8x\leq -3 \\ 8x>2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ..... \\ ..... \\ ..... \end{cases}$.

Riportiamo il tutto in un grafico.



Ancora una volta cerchiamo le eventuali zone in cui vi sono solo linee continue, il che accade per …….. che è perciò la soluzione del sistema.

Fase 3: Prova!

Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni.

1. $\begin{cases} 4x+1<0 \\ 3x-5<0 \end{cases}$; $\begin{cases} 11x-12\geq 0 \\ 12x-11\leq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 5x\geq -7 \\ 4x+3\leq 0 \end{cases}$ $\left[\left(x<-\frac{1}{4}\right);\varnothing;\varnothing\right]$

2. $\begin{cases} 5<8x+1-3x \\ 4x-2\leq 5-2x \end{cases}$; $\begin{cases} 3\cdot(x-1)<2\cdot(4x-1)+2 \\ 7x-3\cdot(2x-1)\geq 3x+2\cdot(x+1) \end{cases}$; $\begin{cases} 4x+1>0 \\ 3x-2\leq 8\cdot(x-1) \\ 2\cdot(x-4)<-3x+1 \end{cases}$

$\left[\left(\frac{4}{81}<x\leq\frac{7}{6}\right);\left(-\frac{3}{5}<x\leq\frac{1}{4}\right);\left(\frac{6}{5}\leq x<\frac{9}{5}\right)\right]$

3. $\begin{cases} 5x-2\leq 7\cdot(2x-1)-3\cdot(x-2) \\ 3x-2\geq 4x+1 \\ 4\cdot(3x-1)<6\cdot(2x+3)-3x+1 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{x-1}{2}<\frac{2x-1}{3} \\ 4x+1>0 \\ 2\cdot(3x-1)>\frac{2x-1}{4} \end{cases}$ $\left[\varnothing;x>\frac{7}{22}\right]$

4. $\begin{cases} \frac{2x-1}{2}-\frac{3x+2}{2}-1\geq 3x-1 \\ 2x-1>9x \\ \frac{3x+2}{5}\geq\frac{7x+2}{10}-x \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{x+1}{7}-\frac{3}{2}\geq\frac{3x-1}{14}-2+x \\ \frac{x-1}{4}-\frac{3}{2}<-3x+7 \\ 11x-2\leq 31x+4 \end{cases}$ $\left[\varnothing;-\frac{3}{10}\leq x\leq\frac{2}{3}\right]$

5. $\begin{cases} 3x>1-4x \\ (2x-1)\cdot(3x+4)\leq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 5x+1>\frac{2x-1}{3} \\ \frac{3x+1}{4x-3}\geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} (3x+1)\cdot(1-6x)\geq 0 \\ (3x+2)\cdot(4x-3)\leq 0 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{1}{7}<x\leq\frac{1}{2}\right);\left(x>\frac{3}{4}\right);\left(-\frac{1}{3}\leq x\leq\frac{1}{6}\right)\right]$

6. $\begin{cases} \frac{3+2x}{4x-1}<0 \\ \frac{4x+1}{7x+8}\leq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} (x-1)\cdot(4x+1)\cdot(2-3x)>0 \\ 5x+2<9x+1 \end{cases}$; $\begin{cases} (6x+2)\cdot\left(4-x^2\right)>0 \\ x^2+2x+1>0 \end{cases}$

$\left[\left(-\frac{8}{7}<x\leq-\frac{1}{4}\right);\left(\frac{2}{3}<x<1\right);\left(x<-2\vee-\frac{1}{3}<x<2\right)\right]$

7. $\begin{cases} x^2-9x+14\leq 0 \\ x^2-12x+27\geq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2+7x-18>0 \\ x+3>3-4x \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{3}{x+2}>0 \\ \frac{2x-3}{1-7x}\leq 0 \\ 7x+25\leq 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{3x+5}{8x+3}<0 \\ \frac{1-3x}{2x+5}>0 \\ \frac{3x+4}{4x-3}\leq 0 \end{cases}$

$\left[(2\leq x\leq 3);(x>2);\varnothing;\left(-\frac{4}{3}\leq x<-\frac{3}{8}\right)\right]$

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito

http://mathinterattiva.altervista.org/volume_1_4.htm