Matematicamente.it

Carmelo Di Stefano

Dal problema al modello matematico

Volume primo

Per il triennio

Carmelo Di Stefano

Dal Problema al Modello matematico
Volume Primo
Per il triennio

http://mathinterattiva.altervista.org/E-Book.htm

Edizione riveduta e corretta e arricchita di collegamenti multimediali.

Luglio 2019

Se vuoi contribuire a migliorare questo testo, invia segnalazioni di errori, mancanze, integrazioni all'autore carmelodst@alice.it o all'editore info@matematicamente.it. I proprietari di immagini, o di altri contenuti, che sono stati utilizzati impropriamente e inavvertitamente in questo libro, se ritengono di non essere stati citati correttamente sono pregati di mettersi in contatto con l'autore o con l'editore per gli interventi che si riterranno necessari; si fa presente che questo libro non ha scopo di lucro.

PRESENTAZIONE

Nel corso della lettura dei volumi troverai diverse cose, che di seguito ti spiego brevemente.

- All'inizio di alcune unità trovi un breve ripasso di argomenti svolti negli anni precedenti che ti risultano utili per affrontare serenamente la stessa unità. Vanno sotto il nome di **Richiamiamo le Conoscenze**. In alcune unità vi sono anche argomenti di approfondimento, denominati con il titolo ***Quelli che … vogliono sapere di più***
- Le definizioni, i teoremi, i corollari e simili enti matematici, sono contenuti all'interno di appositi box di un uguale colore (verde per le definizioni, celeste per i teoremi e così via)
- Ogni tanto troverai anche un box che ti spiega il significato di alcuni vocaboli, si intitola **Che cosa significa?**
- Poi ci sono tre diversi tipi di box con diverse informazioni storiche, precisamente ci sono quelli intitolati **I Protagonisti**, che contengono informazioni relativamente a famosi matematici citati nelle stesse pagine; invece ne **L'angolo storico** ci sono informazioni di varia natura, su quando per la prima volta si sono incontrate le nozioni di cui si sta parlando e simili informazioni; infine in quelli dal titolo **L'antologia** sono riportati e commentati passi di famose opere matematiche.
- Vi sono anche dei box chiamati **Intervallo matematico** o **Giochiamo alla matematica**, che si riferiscono, i primi ad applicazioni della matematica e gli altri alla cosiddetta matematica ricreativa.
- Tenuto conto delle ultime riforme scolastiche, in particolare della prova multidisciplinare dell'Esame di Stato, che riguarda la matematica e la fisica, ogni tanto troverai anche **L'angolo della MateFisica**, in cui sono trattati argomenti di fisica attinenti quelli di matematica sviluppati nell'unità. In particolare vengono presentati e, a volte svolti, quesiti assegnati agli Esami o nelle Simulazioni che il Ministero prepara durante l'anno.
- Alla fine di ogni argomento vi sono le relative verifiche. In esse sono presenti esercizi di tre livelli di difficoltà, opportunamente indicati. Il Livello 1 è relativo a esercizi che sono spesso semplice applicazione di quanto detto nella teoria; quelli di Livello 2 o contengono calcoli più complicati, o hanno bisogno di un impegno maggiore; infine quelli di Livello 3 riguardano quesiti che devono essere impostati usando la fantasia e non in modo ripetitivo. Questi ultimi sono riferiti ai più volenterosi. Per quelli a cui piace veramente ragionare e impegnarsi, alla fine di ogni unità sono presenti alcuni esercizi molto complessi, che vanno sotto il nome di **La sfida**. Invece per aiutarti all'inizio di ogni gruppo di esercizi di livello 1 o 2 vi sono alcuni esercizi simili svolti.
- Sono talvolta presenti box legati a importanti software matematici, quasi tutti di libero uso. In essi sono presenti dei link a delle applicazioni che descrivono come usare il software per comprendere meglio gli argomenti trattati o dei files che puoi usare solo se hai il software installato.
- Alla fine dell'unità sono presentati, quando possibile, esercizi tratti dagli esami di stato, soprattutto del Liceo Scientifico, riferiti ad anni passati.
- Sono anche presenti dei quesiti tratti da gare matematiche italiane ed internazionali, alcuni quesiti sono anche enunciati in lingua inglese.
- Alla fine di ogni unità vi sono le attività di recupero, formate essenzialmente da una serie di esercizi svolti, da completare e da svolgere interamente.
- Infine sono proposti dei test in formato multimediale, almeno 10 di numero, relativi ai più importanti argomenti dell'unità didattica, essi sono utilizzabili solo on line dal sito http://mathinterattiva.altervista.org.
- Un altro sito da cui puoi scaricare molto materiale didattico gratuito è http://matdidattica.altervista.org.
- Vi sono anche diversi collegamenti multimediali che ti portano a pagine web o a files di qualcuno dei software liberi che sono descritti nel libro, o ancora delle applicazioni che mostrano meglio come si fa una certa procedura o come si dimostra un teorema o altro ancora.

Buon lavoro da Carmelo Di Stefano

Indice

1. Le basi del ragionamento

1.1 Concetti logici applicati alle matematiche

1.2 Verso il concetto di dimostrazione

1.3 Insiemi dotati di struttura

2. Geometria delle coordinate

2.1 Risoluzione dei sistemi lineari

2.2 Il riferimento cartesiano ortogonale

3. Rette e trasformazioni geometriche

3.1. Curve di primo grado

3.2 Trasformazioni geometriche

4.3 Le ellissi

4.4 Le iperboli

4.5 Le parabole

1. Le basi del ragionamento

1.1 Concetti logici applicati alle matematiche

Prerequisiti
- Conoscenze grammaticali elementari
- Nozione di enunciato logico.
- Nozione di raggruppamento di oggetti in base a una loro caratteristica o prerogativa.

Obiettivi
- Riconoscere la necessità di introdurre, alla base della matematica, delle affermazioni indimostrabili.
- Riconoscere l'opportunità di dimostrare fatti anche apparentemente ovvi e intuitivi.
- Distinguere in un teorema ipotesi e tesi.
- Distinguere il Teorema come risultato *sicuro*, ossia sostenuto da una dimostrazione, dalla congettura, ossia risultato *presunto*, sostenuto da un certo numero di prove, anche infinito.
- Riconoscere e assimilare il significato della *dimostrazione matematica* di un fatto.
- Essere consapevoli che infinite verifiche non dimostrano alcunché, mentre un solo controesempio serve ad abbattere la presunta verità di un fatto.
- Imparare a distinguere ciò che è necessario da ciò che è superfluo.
- Acquisire l'abilità di suddividere i problemi in altri più semplici.
- Riconoscere l'opportunità di raggruppare sotto un unico nome oggetti che hanno qualcosa che li accomuna.
- Familiarizzare con le opportune simbologie.

Contenuti
- Che cosa sono le matematiche?
- Nozione di problema
- Concetto di verità
- Nozione di definizione
- Assiomi e teoremi
- I principi della logica classica

Parole chiave
Enunciato – Congettura – Dimostrazione –Assioma o postulato – Teorema – Corollario – Ipotesi – Tesi

Richiamiamo le conoscenze

Enunciati logici
Un enunciato logico è una frase del linguaggio comune, dotata di senso, alla quale possiamo associare in modo univoco un valore di verità, della quale possiamo cioè dire in modo definitivo se è vera o falsa.
Così sono veri i seguenti enunciati logici indipendentemente dal fatto che ciascuno di noi conosca o meno i fatti citati:
- L'Italia è una repubblica.
- Giove è il pianeta più grande del sistema solare.
- Pitagora è nato a Samo.

Sono invece falsi gli enunciati logici che seguono:
- Il Brasile confina con Cuba.
- Giulio Cesare è vissuto 100 anni dopo la nascita di Cristo.
- I Pink Floyd hanno scritto la famosa canzone Let it be.

Non sono enunciati logici le seguenti frasi, perché si riferiscono a opinioni personali, indipendentemente dal fatto che possano essere condivisibili da un numero enorme di persone:
- I Genesis sono stati il miglior gruppo rock degli anni ottanta del XX secolo.
- Il calcio è lo sport più appassionante.
- Il tedesco è una lingua difficile.

Nemmeno le seguenti scritte sono enunciati logici:
- Quanto tempo manca alla mezzanotte?
- Stai dopo come allora.
- Ammaammsas dlklkd.

Esse sono rispettivamente una domanda, una successione disordinata di parole della lingua italiana senza un significato logico, una serie di simboli privi di senso nella lingua italiana (e non solo in quella).

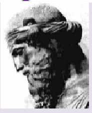
Che cosa sono le matematiche?

La matematica può definirsi come quella disciplina nella quale non sappiamo di cosa stiamo parlando, né se ciò che stiamo dicendo è vero. *Bertrand Russell*

Nel corso dei secoli le matematiche non sono state quasi mai considerate solo ed esclusivamente come uno strumento di calcolo, ma piuttosto sono state assunte come discipline simbolo del ragionamento e della precisione. Si narra che il famoso filosofo Platone avesse fatto scrivere sulla porta della propria scuola: *Non entri chi non sappia di geometria*. Egli, pur non essendo un matematico, discusse con passione di questa disciplina, come si legge in alcuni dei suoi famosi *Dialoghi*. Come mai questo interesse, manifestato in seguito anche da molti altri filosofi e da uomini divenuti famosi per aver coltivato interessi che apparentemente nulla avevano a che fare con le matematiche? È possibile che le matematiche riguardino, almeno in parte, discipline a loro apparentemente estranee?

Che cosa significa?
Matematica deriva dalla parola greca *màthema*, cioè insegnamento, a sua volta derivante da *manthàno* che vuol dire imparo. La matematica è quindi la disciplina nella quale si insegna e si impara. Ma ciò avviene in tutte le materie, non è caratteristico della matematica: il significato etimologico della parola non ci aiuta pertanto a capire perché la matematica sia nata, né perché si sia chiamata in tal modo.

I protagonisti



Platone fu un famoso uomo di cultura dell'antichità nacque nel 429 a.C. ad Atene e qui morì nel 347 a.C. Secondo Diogene Laerzio era discendente del dio del mare Poseidone. Allievo di un altro grande filosofo, Socrate, verso il 370 a.C. insegnò nella sua città natale in una scuola da lui stesso fondata e chiamata Accademia perché dedicata all'eroe Accademo. L'Accademia fu luogo di discussione e di studio fino al 529 d.C., anno in cui venne chiusa dall'imperatore Giustiniano, perché considerata tempio di una cultura pagana. Fra le opere più importanti di Platone ricordiamo i *Dialoghi* che riguardano gran parte dei problemi filosofici di cui si occupò; tra essi quelli più vicini alle questioni matematiche sono il *Menone*, nel quale Socrate mostra che alcune idee geometriche sono insite in ciascuno di noi, e il *Timeo*, nel quale viene fornita un'idea della composizione del mondo utilizzando i cinque poliedri regolari, noti per questo con il nome di solidi platonici. Le idee portanti della filosofia platonica riguardano la conoscenza. Secondo Platone ciascuno di noi ha vissuto, prima della nascita, nel *mondo delle idee* dove ha appreso ogni cosa, ma divenuto uomo ha dimenticato quanto aveva imparato. Per Platone, quindi, tutto viene scoperto, riportato alla mente e non inventato. In particolare il mondo delle idee dal punto di vista matematico può costituire l'essenza stessa della disciplina, giacché quando parliamo di numeri o di enti geometrici ci riferiamo a enti astratti, non esistenti nella realtà. Sebbene i contributi di Platone alle matematiche siano stati ritenuti da alcuni importantissimi, da altri invece del tutto trascurabili, non si può negare che alcune sue idee siano state usate in maniera proficua un po' in tutte le scienze. Ancora oggi l'aggettivo *platonico*, in campo scientifico, è attribuito a chi crede che nulla venga inventato, ma che tutto invece venga scoperto.

Nozione di problema

Riteniamo che uno dei compiti più importanti e difficili che intendono trattare le matematiche consista nel porsi e nel risolvere problemi.
Spesso i problemi vengono posti per puro diletto o per una semplice sfida intellettuale. C'è chi si distrae dai problemi di ogni giorno costruendo la Torre Eiffel con i fiammiferi; chi si diverte a scalare le montagne; chi cerca di trovare un numero primo più grande di quelli finora conosciuti; chi si trova, per scelta o per caso, all'interno di un labirinto e deve uscirne.
Talvolta però il problema nasce da una esigenza pratica, perché si ha bisogno di eseguire un certo calcolo, troppo difficile e lungo da fare con i metodi noti, o perché si deve misurare un qualcosa che è troppo grande, o troppo piccolo, o troppo lontano per essere misurato con gli strumenti ordinari. Qual è il diametro della terra? Quanti globuli rossi si trovano in media nel sangue umano? Quante volte si devono lanciare due dadi per avere una data probabilità di ottenere un certo punteggio?
Per ciascuna delle questioni che abbiamo indicato ci sono tecniche e conoscenze matematiche che possono rendere più semplice o veloce l'individuazione della risoluzione.
Ciò significa che le matematiche possono essere gioco, applicazione utile alla tecnica o alle scienze e, più in generale, al miglioramento della qualità di vita. Ciò che comunque accomuna le matematiche (cioè l'aritmetica, la geometria, la statistica, la logica, il calcolo delle probabilità, ecc.), è la ricerca della soluzione dei problemi e l'accertamento della verità o falsità di certe affermazioni.

Che cosa significa?

Problema. Sia in latino sia in greco la trascrizione è identica e, a parte l'accento, coincide con quella dell'italiano moderno. Il suo significato è legato al verbo *probàllein* che significa proporre. Un problema è quindi qualcosa che si propone di fare, di risolvere.

Concetto di verità

La parola «vero» indica alla logica la direzione, così come «bello» la indica all'estetica e «buono» all'etica. […] Scoprire verità è il compito di tutte le scienze: alla logica spetta di individuare le leggi dell'«esser vero».
G. Frege, Ricerche logiche

Uno dei concetti più importanti e complicati con i quali hanno a che fare le matematiche è quello di **verità**. Che cosa significa affermare che un certo fatto è vero? Consideriamo l'affermazione

Schumacher è stato il migliore pilota automobilistico degli ultimi anni.

Possiamo considerarla vera?
Certamente non nel senso matematico, dato che questa è un'opinione e nella matematica non esistono punti di vista personali; non si può dire *Secondo me questo fatto è vero*, ma ogni affermazione ritenuta vera o falsa deve essere tale per tutti.
Come si fa allora a dire che un certo fatto è vero? Convincendo gli altri che abbiamo ragione con il ragionamento, ossia con la **dimostrazione**.

Esempio 1

Un insegnante non può dire che la somma di due numeri pari è sempre un numero pari solo perché lui è il professore e quindi ha sempre ragione (la forza); né può convincerti dicendo che se non ci credi ti mette due sul registro (la violenza). Potrebbe dirti che nella sua vita ha sommato milioni di numeri pari ottenendo sempre un numero pari. Questo è un buon inizio, ma ancora non ci siamo: non è un ragionamento, è solo un'osservazione, uno strumento utile nella dimostrazione.

Il fatto che una certa operazione o una certa costruzione, se ripetuta tantissime volte, si sia *comportata* sempre in un certo modo consente che si formuli una **congettura**. Se in milioni di somme fra due numeri pari il risultato è sempre stato un numero pari, possiamo ritenere che è possibile che questo accada sempre, che è altamente probabile che sia vero, ma non ci dice *che è vero*. Ci suggerisce comunque di provare a dimostrarlo.

Che cosa significa?

Dimostrare. Significa stabilire delle regole, come si fa in un gioco, e sulla base di esse, mediante un ragionamento, far capire che le cose andranno sempre nel modo stabilito, indipendentemente dal fatto che si prendano in considerazione certi numeri invece di altri, certe figure geometriche invece di altre e così via.

Esempio 2

Spesso le partite di scacchi fra grandi campioni si concludono decine e anche centinaia di mosse prima che vi sia lo scacco matto o che vi sia l'impossibilità di muovere. Come mai? Accade perché i giocatori si sono accorti che, comunque si effettuino le mosse successive, dieci, venti o trecento, la conclusione sarà quella, a condizione naturalmente che nessuno dei due contendenti voglia perdere intenzionalmente o si distragga. In tale situazione risulta quindi inutile continuare. Nelle matematiche la questione è abbastanza simile ma ancora più complessa, poiché spesso si ha a che fare non con un numero molto grande di casi da considerare, ma addirittura con un numero di casi che non ha fine.

Una peculiarità delle matematiche è quindi che ogni affermazione, anche quella apparentemente più semplice o intuitiva deve essere dimostrata. Non si può dire: è evidente, si vede. Ci sono matematici particolarmente bravi che hanno queste intuizioni, che riescono a *vedere* certi fatti che sfuggono ad altri, proprio come i maestri di scacchi che vedono la conclusione delle partite centinaia di mosse prima. Questi grandi matematici però riescono solo a fare congetture, utili e importanti poiché una congettura è la posizione di un problema, ma ben più importante nelle matematiche è risolvere il problema, cioè *provare che la congettura è vera o falsa*.
Procediamo con ordine. Noi penseremo alle matematiche come alla costruzione di un edificio. Dobbiamo

perciò creare un progetto, procurarci dei materiali da costruzione e soprattutto abbiamo la necessità di controllare, ogni qualvolta mettiamo un mattone, se esso ha una base sulla quale poggiare, cioè se esso può esistere. Dobbiamo anche controllare se il nostro mattone è in grado di sostenerne altri e verificare se quello che costruiamo ha un senso, e quindi se nel nostro edificio si può raggiungere qualunque ambiente. Baseremo la nostra costruzione anche su un principio di economia, privilegeremo cioè gli strumenti che ci permettono di raggiungere gli stessi risultati con il minore dispendio di energie e di mezzi. Quanto abbiamo detto può essere così riassunto: *le matematiche sono rigorose*. Ciò significa che non ci accontenteremo di vedere che l'edificio regge adesso, ma dobbiamo essere certi che esso reggerà anche in seguito. Ecco la ragione per cui si rende necessario provare risultati anche apparentemente evidenti, che in nessuna altra disciplina si penserebbe di mettere in discussione.

Nozione di definizione

I matematici sono come i francesi, qualsiasi cosa gli dici la traducono nel loro linguaggio e quel che così ottengono ha un significato del tutto diverso dall'originale. *W.Goethe*

Cominciamo a stilare il nostro progetto determinando quello di cui abbiamo bisogno:
- i materiali (devono essere creati e quindi ci occuperemo anche della loro creazione);
- le tecniche di costruzione (potranno essere simili fra loro o del tutto diverse, immediate da pensare e da capire o più complesse).

Prendiamo in considerazione i materiali. Risulta innanzitutto importante definirli. Ciò però non basta: la definizione, a monte, deve avere delle proprietà che garantiscano che quanto definito *esista effettivamente* perché il solo fatto di dire, per esempio, che chiamiamo *cubo* l'unico poliedro regolare le cui facce sono tutti quadrati, non garantisce che tale figura esista davvero.

Esempio 3
- Gottfried Wilhelm Leibniz , filosofo e matematico vissuto nel '600, proprio per mostrare che non basta definire un oggetto per stabilirne l'esistenza, fece l'esempio del poliedro regolare di 10 facce. Infatti un poliedro regolare, le cui 10 facce sono poligoni regolari con lo stesso numero di lati e i cui angoli diedri hanno uguale misura, non esiste. Eppure la definizione di Leibniz non costituisce una violazione di alcuna regola e non presenta alcuna scorrettezza grammaticale o logica. Spiegare in modo logico e coerente un concetto, dunque, non fa sì che esso matematicamente esista.
- Chiamiamo *triangolo rettangolo regolare* un triangolo rettangolo con tutti i lati uguali. Siamo sicuri che effettivamente esista un tale oggetto? No! Anzi, dovremmo già sapere dagli studi condotti negli anni precedenti che un tale ente matematico non esiste.

Abbiamo detto che definire significa prevalentemente spiegare, ma qualunque frase è in grado di *definire* un oggetto? Crediamo di no.

Esempio 4
Se dico che il Sole è una palla infuocata, non sto fornendo una buona spiegazione. Forse potrebbe soddisfare un bambino di due anni, ma un ragazzo più grande no.

Perché una definizione *funzioni* bisogna che essa verifichi almeno le proprietà qui di seguito elencate.

Regola 1
Una definizione deve essere:
- ***coerente***, cioè deve avere un significato non equivoco;
- ***completa***, cioè deve dire tutto quello che è necessario perché l'oggetto sia individuato senza possibilità di errore;
- ***economica***, cioè non deve dire più cose di quelle che sono indispensabili per individuare l'oggetto.

Non è importante invece la scelta del *nome* usato nelle definizioni, che possono essere anche sequenze di lettere prive di senso come x3erty4 o simili. Un'altra accortezza consiste nel non usare nomi già *assegnati* a certi oggetti per definirne altri. È un po' come il voler usare una url come www.microsoft.com per un proprio sito, ovviamente non possiamo farlo. Vediamo alcuni esempi.

Esempio 5

- La definizione, dovuta al famoso logico austriaco del '900, Rudolf Carnap, *I Pirotti sono quegli oggetti che carulizzano elaticamente*, non è coerente, perché le parole *carulizzano* ed *elaticamente* non hanno alcun significato nella lingua italiana. Se però noi diamo un significato coerente e univoco a tali parole riusciamo a definire gli oggetti chiamati *Pirotti*.
- La definizione *Chiamiamo cifre belle le più diffuse*, non è coerente, perché non è precisato il significato di *diffuso*. Continua a non essere coerente anche se specifichiamo che *diffuso* significa *che si presenta più frequentemente di altri*. Se invece diciamo *Le cifre belle sono le cifre più diffuse nell'elenco telefonico del* 1999 *della città di Modena*, allora abbiamo stabilito un modo univoco e chiaro per individuare, fra le dieci cifre, quali sono le più frequenti, cioè quelle che ricorrono di più e quindi possiamo definire *belle* queste cifre.
- *La sedia è un oggetto che serve per sedersi*, non è un definizione completa, perché vi sono altri oggetti che hanno la stessa funzione (poltrone, sgabelli, divani, ...), quindi non individua con certezza l'oggetto sedia.
- *Diciamo numero pari un numero la cui cifra delle unità è una delle seguenti:* 0*,* 2*,* 4*,* 6*,* 8; non è una definizione completa, anche se supponiamo di aver dato un significato ai termini numero, cifre e unità. Infatti, non avendo stabilito se il numero in questione debba essere o no intero, potremmo considerare pari il numero 12,3 che ha come cifra delle unità 2. Pertanto nella definizione, perché sia completa, dovremo aggiungere che il numero deve essere *intero.*
- La definizione *Il quadrato è il quadrilatero che ha tutti i lati uguali, tutti gli angoli interni uguali e tutte le diagonali uguali* è coerente e completa, ma non economica. Difatti tutti i quadrilateri con tutti i lati uguali e tutti gli angoli interni uguali, hanno le diagonali uguali.
- Chiamiamo *triello*345 un triangolo i cui lati misurano, in *cm*, 3, 4 e 5. La definizione è coerente, completa ed economica, anche se poco importante, Il nome scelto va bene,
- Chiamiamo *triangolo isoscele* un triangolo che ha lati uguali misurati, in *cm*, da numeri interi. La definizione è coerente, completa ed economica; gli oggetti esistono, per esempio il triangolo di lati, in *cm*, (3, 3, 4). Quello che non va è che il nome *triangolo isoscele* è per così dire riservato ai triangoli che hanno due latidi uguale misura, e quindi non va bene.

Nella definizione di un oggetto sorgono altri problemi ancora. Abbiamo infatti detto che dobbiamo spiegare tutto quello che ci permette di individuare con assoluta certezza un oggetto, ma per spiegare si devono usare altre parole di cui deve essere conosciuto il significato, parole che quindi sono state a loro volta definite usando altre parole e così via. C'è il rischio di un *regresso all'infinito*, cioè un andare sempre all'indietro riferendoci a cose già note. È evidente che a questo processo occorre prima o poi porre una fine.

Esempio 6

Nella costruzione di un edificio usiamo mattoni, calce, cemento, ferro e altri materiali, i quali sono stati ottenuti combinando in qualche modo "materiali" più semplici (sabbia, gesso, acqua, ...); anche questi, a loro volta, saranno stati ottenuti unendo altri "materiali" ancora più semplici (per esempio l'acqua è un composto di idrogeno e di ossigeno). È però chiaro che prima o poi dobbiamo arrivare a degli *elementi*, cioè oggetti primitivi, non ottenibili dalla composizione di altri oggetti.

Anche nelle definizioni che usiamo nelle matematiche abbiamo bisogno di questi oggetti ultimi: li chiameremo **enti primitivi**. Essi debbono essere oggetti ai quali non associamo una definizione: ci limiteremo a dare loro dei nomi e descriveremo a parole qual è la loro funzione, senza precisare ulteriormente.

Esempio 7

In geometria, quando vogliamo far capire che cosa intendiamo con il termine *punto*, poggiamo la punta della penna sul foglio. In questo modo non stiamo definendo che cos'è il punto, stiamo solo cercando di fare intendere ad altri cosa pensiamo che sia l'oggetto che abbiamo chiamato punto.

L'Antologia

Proponiamo due estratti da opere di due grandi matematici del passato, distanti fra loro nel tempo trecento anni.
Ecco alcune regole che Blaise Pascal propone nei suoi *Pensieri*.

Blaise Pascal, *Pensieri,* 1670

> *"Regole per le definizioni*
> *1. Non definire alcuna cosa che sia già nota di per sé, per la quale non vi siano termini più semplici di essa per spiegarla;*
> *2. non usare alcun termine un po' oscuro od equivoco senza definizione;*
> *3. non impiegare nella definizione che dei termini e delle parole che non siano perfettamente conosciute o già spiegate."*

Osserviamo che la Regola 1 contrasta con quel che avevamo stabilito, le altre due invece concordano. Ai tempi di Pascal si era molto fiduciosi nella cosiddetta intuizione, che è un concetto vago e soggettivo.
La citazione che segue è più recente: è di Alfred Tarski ed è tratta dal suo importante lavoro del 1940, *Introduzione alla logica*, nella sua edizione italiana del 1978, a cura dell'editore Bompiani.

Alfred Tarski, *Introduzione alla logica*, 1940

> *«[Le definizioni sono] convenzioni che stabiliscono quale significato vada attribuito ad un'espressione che fino a quel momento non si era mai presentata in una data disciplina e che non sia immediatamente comprensibile.»*

Notiamo subito che il linguaggio è più moderno rispetto a quello delle regole di Pascal.
Tarski chiarisce cosa debba intendersi per definizione e soprattutto quando essa risulta necessaria; passa poi a stabilire le regole di una buona definizione.

> *«Perché una definizione soddisfi pienamente al suo compito, nella sua formulazione si devono osservare certe misure precauzionali. A questo scopo vengono date speciali regole, le cosiddette REGOLE DI DEFINIZIONE, che specificano come debbano correttamente essere costruite le definizioni. Poiché noi qui non esamineremo un'esatta formulazione di queste regole, può essere sufficiente notare che, in base ad esse, ogni definizione può assumere la forma di un'equivalenza; il lato sinistro di questa, il DEFINIENDUM, può essere una breve funzione enunciativa, grammaticalmente semplice, contenente la costante che deve essere definita; il lato destro, il DEFINIENS, può essere una funzione enunciativa di una struttura arbitraria, contenente comunque, solo costanti il cui significato sia immediatamente ovvio, o sia stato spiegato precedentemente. In particolare, la costante da definirsi o qualsiasi espressione precedentemente definita col suo aiuto, non deve occorrere nel definiens; altrimenti la definizione non è corretta, contiene un errore noto come un CIRCOLO VIZIOSO NELLA DEFINIZIONE.»*

Come si vede Tarski riduce la definizione a una forma per così dire algebrica, ossia a un'equazione del tipo $D = f(x, y, \ldots, z)$, in cui D è l'oggetto da definire, il *definiens*, mentre $x, y, \ldots, z$ sono oggetti noti, ossia già definiti in precedenza e f è un legge di qualche tipo che lega fra loro tali oggetti, è cioè il *definiendum*. Inoltre Tarski nega la possibilità di definizioni che si riducano a equazioni del tipo $D = f(x, y, \ldots, z)$, nella quale cioè D si definisce mediante se stesso: ciò rappresenta un *circolo vizioso*.

I protagonisti

 **Blaise Pascal** nacque il 19 giugno 1623 a Clermont Ferrand, rivelò ben presto le sue straordinarie capacità scientifiche, pubblicando a soli sedici anni un interessante saggio sulle coniche. A diciannove anni inventò, per aiutare il padre nel suo lavoro di esattore, la prima macchina calcolatrice, naturalmente meccanica, chiamata in suo onore *pascalina*. Diversi problemi di salute e alcuni incidenti gli causarono una crisi mistica in seguito alla quale abbandonò praticamente del tutto i suoi studi scientifici. Le sue ultime opere furono le raccolte di aforismi con forte sfondo religioso; famosi sono *I pensieri* e le *Lettere provinciali*. Morì a Parigi il 19 agosto 1662.

 **Alfred Tarski** nacque a Varsavia il 14 gennaio del 1902. Fu uno degli studiosi di logica più importanti del XX secolo e fece parte della cosiddetta scuola polacca. Trasferitosi negli Stati Uniti insegnò in alcune fra le più prestigiose università, come Harvard e Berkeley. In quest'ultima città morì il 26 ottobre del 1983.

Verifiche

Lavoriamo insieme

- *Definiamo libro tascabile ogni libro che è formato da un numero massimo di* 100 *pagine*. La precedente definizione è certamente coerente, ma è anche completa? La risposta è positiva, anche se si potrebbe obiettare che non abbiamo posto alcuna condizione sulle dimensioni delle pagine, così potremmo considerare tascabile anche un libro di 1 pagina le cui dimensioni sono 1 metro per 2. Questo però non è un problema, anche se contrasta con l'idea che di solito abbiamo dei libri tascabili, ossia *di quelli che stanno in tasca*. L'importante non è che la definizione sia rispondente a ciò che ci *aspettiamo*, ma che essa non sia *opinabile*, ossia che non possa essere intesa in senso diverso da diverse persone.
- *Diciamo supercomputer un computer che è in grado di scaricare velocemente immagini da Internet*. Questa definizione, giacché il termine *velocemente* ha un valore indefinito e soggettivo, non è coerente; per renderla tale possiamo modificarla nel seguente modo: *Diciamo supercomputer un computer che è in grado di scaricare immagini da Internet in meno di un minuto*. Adesso la definizione è coerente ma non è completa, poiché non abbiamo precisato il tipo di immagini, non abbiamo precisato il modo di collegarsi a Internet, né abbiamo stabilito le dimensioni dell'immagine da scaricare.

Fra le seguenti definizioni, stabilire quali sono quelle complete e quelle coerenti, giustificando la risposta. Si suppone che tutti i vocaboli usati, tranne quelli privi di senso, siano già stati coerentemente definiti. Attenzione però! Non si richiede che le definizioni siano rispondenti a quello che noi sappiamo sui vari oggetti definiti

***Livello* 1**

1. Diciamo *chilo* un'unità di misura. [coerente ma non completa]
2. Diciamo *gettone telefonico* un oggetto che serve per telefonare. [coerente ma non completa]
3. Diciamo *gallo* un cantante mattiniero. [non coerente]
4. Diciamo *mano* uno strumento che serve per grattarsi. [coerente ma non completa]
5. Diciamo *giallo* un bel colore. [non coerente]
6. Diciamo *numero dispari* un numero che non è pari (si presuppone di conoscere la definizione di numero pari). [coerente ma non completa]
7. Diciamo *numero alla moda*, il numero intero più elegante. [non coerente]
8. Diciamo *numero primo* un numero naturale maggiore di 1, divisibile per se stesso. [coer. e completa]
9. Diciamo *triangolo* una figura formata da tre segmenti. [coerente ma non completa]
10. Diciamo *parallelogramma* un quadrilatero con i lati opposti paralleli. [coerente e completa]
11. Diciamo *arcatures* un ombrello il cui tessuto contiene solo i colori bianco e rosso. [coer. e completa]
12. Diciamo *acqua* una bevanda. [coerente ma non completa]
13. Diciamo *cerchio* la figura geometrica più regolare. [non coerente]
14. Diciamo *figure eleganti*, le figure geometriche più gradevoli all'occhio. [non coerente]
15. Diciamo *numeri tripentagonali* i numeri interi multipli di 3 e di 5 ma non di 7. [coerente e completa]
16. Diciamo *numeri attuali* i numeri precedenti dei numeri posteriori. [coerente e completa]
17. Diciamo *cerchio massimo* il cerchio più grande di tutti. [non coerente]
18. Diciamo *cubo vivace* un cubo colorato di rosso. [coerente e completa]
19. Diciamo *segmenti graditi*, i segmenti che possono essere disegnati su un foglio di quaderno. [coerente ma non completa]
20. Diciamo *numeri ripetenti* quei numeri le cui cifre decimali si ripetono. [coerente ma non completa]

Lavoriamo insieme

- *Diciamo perenni quegli uomini che vivono più di mille anni*. La frase ha un senso, definisce in modo certo degli elementi come appartenenti a un dato insieme; il problema è che tale insieme è *vuoto*.
- *Diciamo giraffoidi gli esseri umani alti più di tre e quaranta*. La definizione precedente non è completa, poiché non abbiamo stabilito l'unità di misura. Se precisiamo che essa deve essere il metro, allora concludiamo che la definizione è coerente, completa e si riferisce a elementi di un insieme non vuoto.

Tenuto conto delle proprie conoscenze matematiche, fra le seguenti definizioni stabilire quali si riferiscono a oggetti matematici realmente esistenti

Livello 2

21. Diciamo *triangolo ottusabile*, un triangolo con due angoli ottusi. [No]
22. Diciamo *multiagono* un poligono con più di 1000 lati. [Sì]
23. Diciamo *numero quantificabile* un numero divisibile per 101 ma non per 11. [Sì]
24. Diciamo *numero elitario* un numero divisibile per 12 ma non per 3. [No]
25. Diciamo *quadritriedro* un poliedro le cui facce sono solo triangoli o quadrati. [Sì]
26. Diciamo *rette allacciate* due rette che hanno esattamente 2 punti in comune. [No]
27. Diciamo *numero ammirevole* un numero intero il cui quadrato è uguale a 123123123. [No]
28. Diciamo *numero sorprendente* un numero intero il cui quadrato ha più di 1000 cifre. [Sì]
29. Diciamo *angolo ristretto*, un angolo minore della metà di un angolo retto. [Sì]
30. Diciamo *quadrilatero eccezionale* un quadrilatero con 3 lati uguali. [Sì]

Delle seguenti definizioni stabilire quali non possono essere accettate perché usano nomi "riservati" ad altri oggetti

Livello 3

31. Diciamo *multiplo blu di un numero n*, un multiplo di n che ha il doppio delle cifre di n. [Sì]
32. Diciamo *ettagono* un poligono con 37 lati. [No]
33. Diciamo *segmento* una parte di retta compresa tra due suoi punti. [Sì]
34. Diciamo *retta ortogonale a un'altra* una retta che forma con la data due angoli di 75°. [No]
35. Diciamo *poligono irregolare* un poligono i cui lati hanno tutti diverse misure. [Sì]

Assiomi e teoremi

Fra i vari enunciati, nelle matematiche possiamo distinguere le proposizioni elementari, quelle cioè che stabiliamo senza dimostrazione e che chiamiamo **assiomi** o anche **postulati**, e le altre proposizioni che dobbiamo dimostrare usando gli assiomi o altre proposizioni già provate e che chiameremo **teoremi**. Chiamiamo invece **corollario** una proposizione immediatamente deducibile da un precedente teorema. Diciamo che nelle matematiche un concetto, un risultato, una proprietà vengono considerati veri se vi è un teorema dimostrato o un assioma che lo stabilisce.

Definizione 1

Un teorema scritto nella forma *Se accadono certi fatti allora ne accadono altri*, si dice **espresso in forma normale**.

Esempio 8

Il ben noto teorema di Pitagora si può enunciare nel modo seguente: *In ogni triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equiesteso alla somma dei quadrati costruiti sui cateti*. Se volessimo esprimerlo nella forma normale scriveremmo: *Se ABC è un triangolo rettangolo di cateti AB e AC e ipotenusa BC, allora* $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$.

In un teorema ciò che supponiamo vero si chiama **ipotesi** del teorema, ciò di cui vogliamo provare la verità si chiama **tesi**. Un teorema quindi, in aritmetica come in geometria o nel calcolo delle probabilità e così via, è uno schema di deduzione, cioè è un qualcosa che ci permette di affermare che solo dal sapere che uno o più fatti sono veri possiamo dedurre, e quindi affermare, la verità di uno o più altri fatti.

Esempio 9

- Nel teorema di Pitagora le ipotesi sono: *ABC è un triangolo rettangolo*; *i cateti si chiamano AB e AC e l'ipotenusa BC*. La tesi è: $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$.
- Nell'esempio del maestro di scacchi, le ipotesi sono le mosse già fatte, gli assiomi sono le regole del gioco, predefinite e non messe in discussione. La tesi è che in un certo numero di mosse si arriverà allo scacco matto. Il teorema viene dimostrato mediante un ragionamento coerente che convince quanti hanno le corrette conoscenze del gioco circa il fatto che, quali che siano le mosse scelte dal maestro e dal suo avversario, la conclusione del gioco, la tesi, sarà sempre la stessa.
- Qual è l'ipotesi e quale la tesi nel teorema: *Il prodotto di due numeri dispari è sempre un numero dispari*? Supponiamo di aver già definito correttamente i numeri dispari. L'ipotesi è quella di avere due numeri dispari qualsiasi, non due numeri particolari, che moltiplichiamo fra loro. Nel corso della dimostrazione del teorema, dovremo indicare i due numeri con simboli generici, per esempio con *a* e *b*, oppure con *x* e *y*, o con altri simboli a nostro piacere, purché siano diversi tra loro, visto che in generale i numeri considerati sono diversi tra loro. La tesi, cioè la conseguenza, è che il risultato della moltiplicazione sia un numero dispari. Il teorema è vero, anche se non lo dimostriamo; grazie a ciò possiamo quindi dire che, per esempio, il risultato della moltiplicazione 123456789 · 2345678901 è un numero dispari, pur non avendo svolto l'operazione. Il teorema poteva anche essere espresso nella forma normale nel seguente modo: *Se a e b sono due numeri dispari allora a · b è un numero dispari*.

Nella forma normale abbiamo usato dei nomi simbolici, e sia l'ipotesi sia la tesi sono esplicite, non sono *nascoste*. Nelle matematiche per evitare di avere a che fare con frasi troppo lunghe o rischiare di non essere capiti, si ricorre spesso alla simbologia per indicare particolari oggetti matematici.

Esempio 10

- Per indicare un triangolo usiamo i nomi dei suoi vertici; così invece di ripetere sempre *il triangolo ABC*, basta solo dire *ABC*.
- Per indicare un generico numero usiamo una lettera dell'alfabeto; così invece di dire *Consideriamo un qualsiasi numero naturale*, la prima volta diciamo *Consideriamo un qualsiasi numero naturale, che indichiamo con n* e successivamente, tutte le volte in cui vogliamo riferirci a questo numero diciamo semplicemente *n*.

Le *abbreviazioni* sono importanti e molto usate non solo nelle matematiche ma anche nella vita di ogni giorno utilizziamo delle sigle proprio per evitare noiose ripetizioni. Si parla di CAP invece che di Codice di Avviamento Postale, di c.c.p. invece che di Conto Corrente Postale, di U.S.A. invece che di Stati Uniti d'America, e via dicendo. L'insegnante che vuol chiamare il ragazzo, di cui non conosce il nome, seduto nel terzo banco della prima fila nella colonna di sinistra, deve proprio indicarlo in questo modo: il nome viene sostituito dai parametri che indicano la posizione del ragazzo nell'ambito della classe.
Si usano anche simboli grafici. I simboli seguenti indicano rispettivamente la presenza di una scala mobile; il divieto di usare il clacson; il divieto di fumo; una semplice, seppur cruda, immagine, anche un analfabeta capisce che il liquido contenuto nella boccetta può essere causa di grossi guai se ingerito, toccato o perfino inalato.

Che cosa significa?

Assioma. Deriva dal latino *axioma*, a sua volta derivato dal greco *aksioma* che significa dignità.
Postulato. Dal latino *postulatum* che significa richiesta.
Letteralmente un assioma è qualcosa che ha una dignità, cioè che è degno di fiducia. Un postulato è qualcosa al quale non si richiede nulla, la cui verità non viene messa in discussione.
Teorema. Dal greco *theòrema* che significa guardare o anche esaminare.
Ipotesi. Dal greco *hypothesis* che significa pongo sotto, cioè sottopongo a discussione in questo caso.
Tesi. Dal greco *thésis* che significa l'atto del porre.
Un teorema consiste quindi nell'*esaminare* un certo fatto, l'*ipotesi*, e vedere se mediante essa riesco a *porre*, a mostrare, la verità di un altro fatto, la *tesi*.
Corollario. Dal latino *corollarium* che era il denaro che nell'antica Roma veniva regalato agli attori rivelatisi particolarmente bravi: era una conseguenza della loro bravura.

L'Antologia

Ancora dai *Pensieri* di Pascal riportiamo le regole per gli assiomi.

> *Regole per gli assiomi*
> *1. Non omettere alcuni dei principi necessari senza essersi chiesti se siano in accordo, non importa quanto chiari ed evidenti possano essere;*
> *2. Non riportare negli assiomi che delle cose perfettamente evidenti di per sé.*

Seguono le regole per la dimostrazione.

> *Regole per le dimostrazioni.*
> *1. Non dimostrare quelle cose che siano talmente evidenti di per sé da rendere inutile provarli;*
> *2. Provare tutte quelle proposizioni un po' oscure e non impiegare nella loro prova che degli assiomi molto evidenti, o delle proposizioni già dimostrate.*
> *3. Sostituire sempre mentalmente le definizioni al posto dei definiti, per non cadere negli equivoci dei termini che le definizioni possano procurare.*

Come si vede le regole di Pascal sono molto generiche e criticabili sotto molto punti di vista, soprattutto per l'eccessivo ricorso all'intuizione, quindi, se vogliamo alla soggettività: ciò che può sembrare intuitivo per me può non esserlo per altri. In ogni caso risultano interessanti per testimoniare l'evoluzione storica delle idee.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Ogni teorema è composto da una o più ipotesi, cioè fatti noti, e da una o più tesi, fatti cioè che risultano essere veri se le ipotesi lo sono. In genere quindi un teorema si può enunciare nel seguente modo: *Se accadono i seguenti fatti, allora accadono anche questi altri*. Non tutti i teoremi però sono posti in questa forma, ma se riusciamo a effettuare questa operazione di *traduzione*, ci risulta molto semplice individuare ipotesi e tesi. Vediamo un esempio tratto dalla geometria. *Ogni triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo*

Che cosa supponiamo di sapere? Che un dato triangolo, *ABC* per esempio, è inscritto in una semicirconferenza: queste sono perciò le ipotesi. Che cosa vogliamo dedurre da queste conoscenze? Che *ABC* è un triangolo rettangolo. Allora come possiamo enunciare il teorema nella sua forma normale?

Se un triangolo è inscritto in una semicirconferenza allora è un triangolo rettangolo.

Dopo aver distinto ipotesi e tesi, esprimere in forma normale i seguenti teoremi.

Livello 1

1. *La somma di due numeri dispari è un numero pari*
2. *La somma di due numeri razionali è un numero razionale*
3. *Il cubo è un poliedro regolare*
4. *In ogni poliedro convesso vale la formula* $F + V = S + 2$*, dove F è il numero delle facce, V il numero dei vertici e S il numero degli spigoli*
5. *Il poligono regolare di* 17 *lati è costruibile con riga e compasso*

Livello 2

6. *Dati due numeri interi consecutivi, uno almeno di essi non è un numero primo*
7. *Un triangolo con due angoli di uguale misura ha tutti i lati di uguale misura*
8. *Un triangolo con due angoli di diversa misura ha due lati di diversa misura*
9. *Il quadrato di un numero pari è un numero divisibile per* 4
10. *Il successivo di un numero primo è il numero* 3 *o un numero pari*
11. *Il minimo comune multiplo fra un numero intero e il proprio quadrato è uguale a quest'ultimo numero*
12. *In un triangolo equilatero le tre altezze coincidono con le tre mediane*

Livello 3

13. *Ogni frazione che ridotta ai minimi termini ha un denominatore divisibile solo per* 2 *o per* 5*, rappresenta un numero decimale limitato*
14. *In una circonferenza fra tutti i segmenti che uniscono due suoi punti distinti i maggiori sono quelli passanti per il centro*
15. *Esistono infiniti numeri primi*

Fornire degli esempi di linguaggio simbolico che possono trovarsi nei seguenti ambienti o documenti.

Livello 1

16. Biglietterie ferroviarie.
17. Ospedali.
18. Scuole.
19. Certificati anagrafici.
20. Segnaletica stradale.

I principi della logica classica

Ritorniamo al discorso della dimostrazione e cerchiamo di rispondere con maggiore chiarezza alla domanda più volte posta: *che cosa significa dimostrare*?

Che cosa significa?

Dimostrare Significa mostrare, far vedere. È implicito il fatto che il far vedere deve anche *convincere*.

Nelle matematiche dimostrare significa far vedere che, sotto certe ipotesi, una data proposizione è matematicamente vera e cioè che:

- se essa è vera, allora non viene messa in dubbio la verità di altri teoremi o assiomi stabiliti in precedenza;
- essa non potrà mai essere messa in dubbio da risultati che possano essere provati in futuro.

Il concetto di enunciato logico nelle matematiche si basa quindi sui due seguenti principi, stabiliti migliaia di anni fa dai logici dell'antica Grecia.

Principio di non contraddizione
Se è stato provato che un enunciato logico è vero non si potrà mai provare che esso è anche falso.

Principio del terzo escluso
Un enunciato logico qualunque o è vero o è falso, non vi sono altre possibilità.

A volte il Principio del Terzo escluso viene anche chiamato del *Tertium non datur*, che in latino significa *non vi è una terza possibilità.* Attenzione al reale significato dei due principi precedenti, essi non dicono che qualunque enunciato logico deve sapersi dimostrare; finché una proposizione non è stata né verificata (provata che è vera), né falsificata (provata che è falsa) essa è una congettura. La logica che usiamo è bimodale, cioè con due soli valori: Vero o Falso. Esistono anche esempi di logica plurimodale. Per esempio se consideriamo i numeri reali e il loro segno, dire che un numero non è negativo, non equivale a dire che è positivo, poiché potrebbe essere nullo. In questo caso quindi abbiamo una logica a tre valori.

L'angolo storico

In una lettera datata 7 giugno 1742, il tedesco Christian Goldbach scrive a Leonhard Euler, uno dei più importanti matematici di tutti i tempi più noto con il nome di Eulero, che gli è capitato di notare che un numero pari può scriversi come somma di due numeri primi; da ciò egli congettura che questo sia sempre vero. Goldbach e, dopo di lui, molti altri, hanno verificato che questo è vero per tutti i numeri pari fino a 1000, a un milione, a un miliardo e con l'avvento dei moderni e velocissimi computer anche fino a valori molto più grandi. Fino al 2002 però nessuno è riuscito a dimostrare la verità o falsità di questa affermazione, che rimane pertanto solo una congettura. Sottolineiamo il fatto che l'aver verificato per un numero sempre maggiore di casi la congettura di Goldbach, ha solo aumentato la probabilità che essa sia vera.

Consideriamo ancora una volta il teorema di Pitagora, che dice che se x e y sono le misure dei cateti di un triangolo rettangolo e z rappresenta la misura dell'ipotenusa dello stesso triangolo, allora è sempre vero che $x^2 + y^2 = z^2$. Sono passati più di duemila anni dal tempo di Pitagora e i matematici hanno cercato di trovare formule che in qualche modo assomigliassero a questa. In particolare hanno considerato formule del tipo $x^n + y^n = z^n$, in cui n è un qualsiasi numero intero maggiore di 2 e x, y e z sono numeri interi. Dopo secoli di vani tentativi, nel XVII secolo, il francese Pierre de Fermat scrisse a margine di un libro di un antico matematico greco, Diofanto, che era riuscito a provare che l'uguaglianza $x^n + y^n = z^n$ è sempre falsa se n rappresenta un numero intero maggiore di 2, e i simboli x, y e z rappresentano numeri interi maggiori di 1. Nessuno ha mai trovato traccia della dimostrazione e l'affermazione di Fermat è rimasta una congettura fino al 1994; in quell'anno un matematico inglese, Andrew Wyles, ha provato che essa è vera e quindi, a partire da quell'istante, la *congettura* di Fermat è diventata il *teorema* di Fermat.

I protagonisti

Christian Goldbach nacque a Königsberg in Prussia (l’attuale Kaliningrad in Russia) il 16 Marzo 1690 e si occupò per tutta la sua vita di matematica, anche se non raggiunse mai risultati degni di nota. Ebbe però il merito di scambiare lettere con famosi matematici della sua epoca, in particolare con lo svizzero Leonhard Euler. Un’altra interessante congettura da egli enunciata è che “Ogni numero dispari non primo può esprimersi come somma di 3 numeri primi.” Goldbach morì a Mosca il 20 novembre 1764.

Pierre de Fermat nacque il 17 agosto 1601 a Beaumont-de-Lamagne, figlio di un mercante di pelli il cui cognome era semplicemente Fermat, senza il *de* che Pierre aggiunse quando cominciò a praticare la professione di avvocato. Frequentò prima l’università di Tolosa e poi quella di Bordeaux dove cominciò a fare ricerca in matematica senza però conseguire alcuna laurea. Successivamente si trasferì a Orleàns dove si laureò in legge e cominciò a esercitare la professione di avvocato, che svolse per tutta la vita. Si occupò però sempre con passione di matematica, tanto da ricevere l’appellativo di *principe dei dilettanti*. Anche se non pubblicò mai nulla, propose e risolse importantissimi problemi, che si diffusero mediante le sue corrispondenze. Molto importanti per le sue ricerche furono, infatti, gli scambi epistolari con l’abate Mersenne e con altri importanti matematici della sua epoca, quali Pascal e Descartes. Sul margine di una copia di un libro di un antico matematico *L’Aritmetica di Diofanto*, scrisse l’enunciato del suo famoso teorema, del quale raccontava di aver trovato una “bella dimostrazione” che non riportava perché troppo lunga. In realtà per più di tre secoli le migliori menti non riuscirono a provare il teorema che solo per particolari valori dell’esponente. Infine nel 1994 Andrew Wiles riuscì a dimostrarlo, ma in modo molto più complicato e lungo di quel che aveva *promesso* Fermat (la sua dimostrazione è contenuta in due volumi di una famosa rivista matematica). Fermat morì a Castres il 12 Gennaio 1665.

È necessario ribadire che: per dimostrare che una certa proprietà è vera non è sufficiente mostrare che essa vale in alcuni casi, non importa quanti se ne prendano in considerazione.

Esempio 11

Se mostriamo che il teorema di Pitagora è vero per i triangoli rettangoli i cui lati misurano 3, 4, 5, o 5, 12, 13, o 7, 24, 25, o un milione di altri esempi di misure, questo non ci permette di dire che è un teorema, cioè che vale per tutti i triangoli rettangoli. Se vogliamo fare ciò dobbiamo dimostrare la proprietà con il metodo deduttivo, passando cioè da fatti che sappiamo essere veri ad altri che conseguono da questi. Questo vuol anche dire che gli elementi coinvolti nel teorema (numeri, triangoli, ...) devono essere generici, devono avere cioè nomi simbolici.

L’uso dei nomi simbolici non è solo della matematica, al contrario trova un frequente riscontro anche nella vita di ogni giorno.

Esempio 12

Spesso nei cantieri compare la scritta *Divieto di accesso ai non addetti ai lavori*. Qual è il suo scopo? Si vuole impedire a chi non lavora nel cantiere di entrare. Supponiamo che il cantiere sia posto in una città di 100 000 abitanti e impieghi 20 persone. Chiaramente non si può scrivere *Divieto di accesso per i signori Adamo Aldo, Adamo Giuseppa, Bianchi Attilio*, ... e così via con tutti i 99 980 nomi, i quali dovrebbero essere aggiornati ogni giorno cancellando i nomi dei morti e aggiungendo quelli dei neonati, dei turisti e di tutte le persone che giungono in città. Anche lo scrivere *Accesso consentito solo ai signori* ... seguito da tutti coloro che sono ammessi nel cantiere, non è una scelta economica. Inoltre tale elenco dovrebbe essere aggiornato ogni qualvolta vi è un licenziamento o una nuova assunzione. Invece con la scritta *Divieto di accesso ai non addetti ai lavori* (o *Accesso consentito solo agli addetti ai lavori*) abbiamo appunto indicato tutte le persone che non possono (o possono) entrare in quel luogo.

Se per dimostrare che una certa proprietà è vera occorre far vedere che essa è valida sempre, per dimostrare che è falsa basta far vedere anche un solo esempio in cui essa non è vera.

Esempio 13

- Vogliamo provare che è falsa la proposizione *Tutti i numeri pari sono divisibili per* 4. In questo caso basta considerare il numero 2 che è un numero pari che non verifica la proprietà, e quindi, nonostante esistano infiniti numeri pari divisibili per 4 (4, 8, 12, 16, 20, ...), la proprietà enunciata è falsa.
- Vogliamo provare il teorema che afferma *Ogni multiplo di* 10 *è un numero pari*. Come si ottiene un qualsiasi multiplo di 10? Moltiplicando 10 per un generico numero intero. Che cifra delle unità avrà il numero risultato di questa moltiplicazione? Chiaramente zero. Abbiamo finito, dato che un numero la cui cifra delle unità è zero è un numero pari.

Adesso invece consideriamo un procedimento che potrebbe sembrare, ma non è, una dimostrazione.

Esempio 14

Consideriamo l'espressione $x^2 + x + 41$. Sostituiamo a x i numeri da 0 a 8, ottenendo la seguente tabella:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^2+x+41	41	43	47	53	61	71	83	97	113

Notiamo che tutti i numeri ottenuti sono primi. Questo ci suggerisce di enunciare la proprietà: *Se x è un numero intero non negativo allora l'espressione $x^2 + x + 41$ rappresenta sempre un numero primo*.
Per far vedere che essa è effettivamente un teorema la dobbiamo dimostrare. Il fatto di avere provato che esso è vero per 9 valori assegnati a x ci permette di dire che esso è vero? Certamente no. Però far vedere che per $x = 40$ si ha $x^2 + x + 41 = 1681 = 41^2$, ci permette di affermare che quanto detto non è vero, quindi non è un teorema. Possiamo provare mediante verifica solo un fatto che si riferisce a un numero finito di casi. Così, dopo avere effettuato tutte le verifiche richieste, possiamo dire ad esempio che è vero il seguente teorema: *Se x è un numero intero non negativo minore di* 40*, allora l'espressione $x^2 + x + 41$ rappresenta sempre un numero primo.*

Vi sono degli esempi ancora più clamorosi.

Esempio 15

- Consideriamo l'affermazione: *L'espressione* $(2^{p-1} - 1)$ *non è divisibile per p^2, per ogni p numero primo.* Essa è vera per ogni numero primo p compreso tra 2 e 1091. Il più piccolo numero primo p per cui la proprietà risulta falsa è 1093. Infatti $2^{1092} - 1$ è un multiplo di 1093^2.
- Consideriamo ora quest'altra affermazione:

  L'espressione $(991 \cdot n^2 + 1)$ *non è un quadrato perfetto per nessun numero intero n.*

  Il primo n per cui la proprietà è falsa è n = 12055735790331359447442538767, che è un numero con ben 29 cifre.

Verifiche

Lavoriamo insieme

La seguente affermazione è un teorema?

L'insieme $A = \{2^n + 3^n: n \in \mathbb{N}\}$ *è formato solo da numeri primi o da numeri multipli di* 5

Dimostrare che la proprietà è vera risulterebbe abbastanza complesso, perché dovremmo operare su elementi generici. In questioni relative a numeri naturali, o comunque a espressioni dipendenti da numeri naturali, è utile calcolare alcuni di questi elementi e ciò per diverse ragioni. Intanto per vedere se tali questioni sono effettivamente vere, giacché potrebbe accadere che qualcuno degli elementi calcolati non verifichi la proprietà. In questo caso avremmo trovato un controesempio, la proprietà risulterebbe falsa e sarebbe perciò inutile, oltre che impossibile, dimostrarne la verità. Inoltre in questo modo si potrebbero ottenere interessanti informazioni per la dimostrazione. Calcoliamo quindi, eventualmente con l'aiuto di un programma di calcolo simbolico, i primi dieci elementi dell'insieme, che sono i seguenti:

$$\{5, 13, 35, 97, 275, 793, 2315, 6817, 20195, 60073\}.$$

Notiamo che gli elementi che occupano i posti dispari sono divisibili per 5, gli altri no. Non è detto che la proprietà sia falsa, perché questi ultimi elementi potrebbero essere primi: i primi due, 13 e 97, li riconosciamo infatti come tali. Procediamo alla loro scomposizione $\{5, 13, 5\cdot 7, 97, 5^2\cdot 11, 13\cdot 61, 5\cdot 463, 17\cdot 401, 5\cdot 7\cdot 577, 13\cdot 4621\}$. Possiamo quindi concludere che la proprietà è falsa perché, per esempio, $3^6 + 2^6 = 793 = 13 \cdot 61$ che non è né primo né divisibile per 5. A questo punto potremmo pensare di enunciare un altro teorema. $\mathbb{N}_d$ indica i numeri naturali dispari. *L'insieme* $A = \{2^n + 3^n: n \in \mathbb{N}_d\}$ *è formato solo da numeri multipli di* 5. Questo è un vero teorema e, per provarlo costruiamo la seguente tabella e facciamo alcune considerazioni.

n	2^n	3^n
1	2	3
3	8	27
5	32	243
7	128	2187

In essa notiamo che le potenze di 2 finiscono alternativamente per 2 o per 8, quelle di 3 invece finiscono alternativamente per 3 o 7 e nello stesso ordine delle precedenti. Poiché 2 + 3 = 5 e 8 + 7 = 15, in ogni caso la cifra delle unità di $2^n + 3^n$ è 5, quindi il numero è divisibile per 5.

Trovare dei controesempi alle seguenti affermazioni, determinando le proprietà sempre false da quelle talvolta vere.

Livello 2

1. *Se un numero è pari allora è divisibile per* 4 [6 pari ma non divisibile per 4, 8 pari e divisibile per 4]
2. *Se un numero è primo allora è un numero dispari* [2 primo non dispari, ogni altro primo è dispari]
3. *Se un numero primo è dispari allora il successivo numero dispari non è un numero primo* [3 e 5 primi, 7 è primo 9 è composto]
4. *Il quoziente di due numeri divisibili per* 5 *è sempre un numero divisibile per* 5 [15 : 5 = 3; 25 : 5 = 5]
5. *In un triangolo rettangolo gli altri due angoli misurano sempre* 45° [Il triangolo rettangolo ottenuto tracciando un'altezza di un triangolo equilatero ha angoli acuti che misurano 30° e 60°. Il triangolo rettangolo isoscele ha gli angoli acuti di 45°]
6. *Se un poligono ha tutti i lati uguali ha anche tutti gli angoli interni uguali* [Un rombo non quadrato non ha tutti gli angoli interni della stessa misura]
7. *In un triangolo ottusangolo tutti gli angoli sono ottusi* [Sempre falsa: in un triangolo ottusangolo un solo angolo è ottuso]
8. *Un quadrato ha sempre l'area maggiore di un triangolo* [Un quadrato di lato 1 ha area 1, un triangolo rettangolo di cateti 1 e 4 ha area 2. Un quadrato di lato 1 ha area 1, un triangolo rettangolo di cateti 0.2 e 1 ha area 0.1 < 1]

9. *Se un quadrilatero ha tutti i lati uguali è un quadrato*
[Un rombo non quadrato ha tutti e quattro i lati uguali]
10. *Se la somma delle cifre di un numero intero è divisibile per* 5 *allora il numero è divisibile per* 5
[Il numero 41 è primo e non divisibile per 5, ma 4 + 1 = 5. Il numero 50 è divisibile per 5 e 5 + 0 = 5]

L'angolo di Derive

Clicca su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%201/1-1/1-1-1.exe per vedere come con Derive si costruisce una tabella che verifica che $x^2 + x + 41$ fornisce numeri primi quando a x si sostituiscono tutti i numeri interi da 0 a 40.
Clicca su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%201/1-1/1-1-1.dfw per scaricare il relativo file in Derive.

Attività

1. Verificare con Derive che l'espressione $n^2 + n + 17$ fornisce numeri primi per ogni intero n da 0 a 15.
2. Verificare con Derive che l'espressione $x^2 - 79x + 1601$ genera numeri primi per ogni intero x da 0 a 79.

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

1. Sappiamo che esattamente una delle affermazioni X, Y, Z è vera e le altre due false. Inoltre solo una delle seguenti affermazioni è vera, quale?
A) Y è vera B) X è falsa e Y vera C) Z è falsa e X vera D) Z è vera E) Y è falsa e X vera [D]
2. Di 3 persone, indicate con A, B e C, sappiamo che due di esse sono donne, due di nazionalità italiana, due medici e due giocano a tennis. Sappiamo inoltre
   - Ciascuno verifica al massimo 3 delle 4 caratteristiche;
   - Se A è una donna allora gioca a tennis;
   - Sia B che C se sono italiani allora sono medici (non per forza entrambi);
   - Sia A che C se giocano a tennis allora sono medici (non per forza entrambi).

   Chi dei tre verifica solo due delle 4 caratteristiche e quali sono? [B è donna e gioca a tennis]
3. A, B, C e D hanno ciascuno monete da 10, 20, 50 centesimi o 1 euro, per un totale di 2 euro. Si sa che
   - Tutti hanno lo stesso numero di monete;
   - Di monete da 50 centesimi, A ne ha 3, B 2, C 1 e D nessuna;
   - Tutti comprano lo stesso dolce, che costa meno di 2 euro;
   - Uno solo dei 4 non riesce a pagare esattamente il dolce e riceve qualche moneta di resto;

   Chi riceve il resto? Quanto costa il dolce? Quante monete ha ciascuno? [B; Non possiamo saperlo; 7]

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
AHSME = Annual High School Mathematics Examination HSMC = A&M University High School Mathematics Contest
OMI = Olimpiadi della Matematica.

Lavoriamo insieme

Consideriamo il quesito assegnato sulla rivista Abacus nel 1999. *Completare in modo che l'affermazione sia corretta. In questo box il numero di cifre* 0 *è* __, *il numero di cifre* 1 *è* __, *il numero di cifre* 2 *è* __, *il numero di cifre* 3 *è* __, *il numero di cifre* 4 *è* __, *il numero di cifre* 5 *è* __, *il numero di cifre* 6 *è* __, *il numero di cifre* 7 *è.*
Ovviamente la cifra 0 compare una sola volta, quindi dobbiamo scrivere un 1. Così facendo ci saranno scritte già due cifre 1. Se mettiamo 1 in tutti gli spazi, tranne che in quello riferito al numero 1, avremo scritto, compreso quella già scritto, 8 volte 1. Quindi il corretto modo di compilare il box è
In questo box il numero di cifre 0 *è* **1**, *il numero di cifre* 1 *è* **8**, *il numero di cifre* 2 *è* **1**, *il numero di cifre* 3 *è* **1**, *il numero di cifre* 4 *è* **1**, *il numero di cifre* 5 *è* **1**, *il numero di cifre* 6 *è* **1**, *il numero di cifre* 7 *è* **1**.

1. (A1997) Ci sono 5 armadietti messi uno accanto all'altro su un muro, nell'ordine: A, B, C, D, E. Sappiamo che la chiave di A apre anche E, la chiave di C apre anche B e ogni chiave apre almeno uno degli armadietti adiacenti. Di quante chiavi abbiamo bisogno, minimo, per aprire tutti gli armadietti? [1]
2. (A1998) Mr e Mrs Brown danno un party invitando altre tre coppie di amici. Durante il party furono scambiate delle strette di mano, ma nessun marito strinse la mano della propria moglie. Alla fine Mr. Brown chiese a tutti gli altri quante mani avessero stretto, ricevendo sette diverse risposte. Quante mani ha stretto Mrs. Brown? [3]
3. (A1998) Pete sceglie due numeri naturali consecutivi e li scrive su due distinti fogli, che da uno ad Andrew e l'altro a Tom. Per cercare di indovinare l'uno il numero dell'altro fanno le seguenti dichiarazioni, per 10 volte di fila. Andrew: "Non so che numero hai." Tom: "Neanch'io so che numero hai." L'undicesima volta Andrew dice: "Adesso so che numero hai". Quale numero ha Tom? [12]
4. (A1999) Completare in modo che l'affermazione sia corretta.
   In questo box il numero di cifre 0 è __, il numero di cifre 1 è __, il numero di cifre 2 è __, il numero di cifre 3 è __, il numero di cifre 4 è __, il numero di cifre 5 è __, il numero di cifre 6 è __, il numero di cifre 7 è __, il numero di cifre 8 è __ e il numero di cifre 9 è __. [1, 7, 3, 2, 1, 1, 1, 2, 1 1]
5. (A2004) Mr. Smith, Mr. Taylor e Mr. Elder insegnano 6 diverse materie (Biologia, Geografia, Matematica, Storia, Inglese e Fisica), ciascuno di essi due materie. Abbiamo le seguenti informazioni:
   Gli insegnanti di Fisica ed Inglese sono vicini di casa; Mr. Smith è il più giovane dei tre. Mr. Elder gioca a poker con l'insegnante d'Inglese e con quello di Biologia ogni domenica. L'insegnante di Biologia è più vecchio di quello di Matematica. L'insegnante di Geografia, quello di Matematica e Mr. Smith andranno a fare un giro in bici il prossimo weekend. Associare ogni insegnante alle materie che insegna. [Sm: S e I; T: B e G; E: F e M]

Questions in English

6. (A2000) We have the following information about a one-story apartment:
   A) There is maximum one door between any two rooms.
   B) There is maximum one door from any room to the outside.
   C) There are 12 doors in the apartment.
   At least how many rooms are there in the apartment? [5]
7. (A2000) Microland has a population of 100 people. Some of them are liars (who always lie), and the others are true (who always tell the truth). There are three groups on the island: Sun-admirers, Moon-admirers, and Earth-admirers. Everybody on the island belongs to exactly one group. In a survey everybody had to answer all three of the following questions: 1) Are you a Sun-admirer? 2) Are you a Moon-admirer? 3) Are you an Earth-admirer? The number of "Yes" answers for the first question was 60, for the second question it was 40, and for the third question it was 30. How many liars live on this island? [30]
8. (A2000) There are history, math and physics books in a library. The covers of the books are red, green, or blue. We know that the covers of the history books are not blue, the covers of the math books are either green or blue, and that the covers of the physics books are neither red nor green. What is the colour of the covers of the history books? [red]
9. (A2002) Four athletes, Anna, Bill, Cecilia, and David, are sitting around a small, circular table. There is a swimmer, an ice skater, a skier, and a runner among them. The swimmer is sitting on the left of Anna, the skier is sitting across from Bill, Cecilia and David are sitting next to each other, and there is a girl sitting on the left of the ice skater. What is the name of the runner? [Anna]
10. (A2005) Four kids are building sand castles. Everybody's castle is a different height. They made the following true statements about the castles: Fanny: *My castle is not higher than Suzanne's*. Eva: *Suzanne's castle is not smaller than Katie's*. Katie: *Eva build a smaller castle than Fanny*. Suzanne: *Eva's castle is not the smallest*. Put the castles in an increasing order of their heights. [K, E, F, S]

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Medicina 1997) Un alano, un boxer, un collie e un doberman vincono i primi 4 premi ad una mostra canina. I loro padroni sono il Sig. Estro, il Sig. Forti, il Sig. Grassi ed il Sig. Rossi, non necessariamente in quest'ordine. I nomi dei cani sono Jack, Kelly, Lad, Max, non necessariamente in quest'ordine. Disponiamo inoltre delle seguenti informazioni: il cane del Sig. Grassi non ha vinto né il primo, né il secondo premio; il collie ha vinto il primo premio; Max ha vinto il secondo premio; l'alano si chiama Jack; il cane del Sig. Forti, il doberman, ha vinto il quarto premio; il cane del Sig. Rossi si chiama Kelly. Da quale cane e' stato vinto il primo premio?
A) Il cane del Sig. Estro B) Il cane del Sig. Rossi C) Max D) Jack E) Lad
2. (Medicina 1998) Individuate la coppia in cui il rapporto tra i due personaggi e' anomalo rispetto agli altri quattro
A) Ettore/ Achille B) Enea/Turno C) Eteocle/Polinice D) Castore/Polluce E) Oreste/Egisto
3. (Ingegneria 1999) C'è chi ha ipotizzato che dato un numero pari qualunque di persone almeno la metà di loro sia idiota. Prendendo per vera questa libera opinione si dica quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera: A) Non ci possono essere idioti B) A parte eventualmente una persona tutta la popolazione mondiale è idiota C) Esattamente la metà della popolazione mondiale è idiota D) L'estensore di questo quesito non è idiota E) Ogni insieme di idioti è costituito da un numero pari di persone
4. (Ingegneria 1999) L'azienda ospedaliera *Curatutti* ha scritto nel suo regolamento: *In ogni momento c'è almeno un medico di guardia al Pronto Soccorso*. Ciò equivale a dire che:
A) *Non ci sono mai due medici di guardia al Pronto Soccorso* B) *Non c'è nessun momento in cui non ci sia almeno un medico di guardia al Pronto Soccorso* C) *La sera di Capodanno non è necessariamente garantita la presenza di un medico al Pronto Soccorso* D) *C'è un certo medico che è sempre di guardia al Pronto Soccorso* E) *Non c'è nessun medico che sia sempre di guardia al Pronto Soccorso*
5. (Ingegneria 1999) In una squadra di calcio giocano Amilcare, Bertoldo e Carletto nei ruoli di portiere, centravanti, libero (non necessariamente in quest'ordine). Si sa che: 1) Il centravanti è il più basso di statura ed è scapolo 2) Amilcare è il suocero di Carletto ed è più alto del portiere. Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera? A) Bertoldo è il genero di Carletto B) Bertoldo ha sposato la sorella di Carletto C) Carletto è il portiere D) Carletto è scapolo E) Amilcare è il centravanti
6. (Ingegneria 2002) Ad un pranzo di sei persone ogni partecipante conosce almeno altri due convitati e, prima di iniziare, presenta fra di loro ogni coppia di suoi conoscenti, se già non si conoscono. Quando si siedono, si conoscono tutti fra di loro. Perciò
A) Tutti i convitati ne conoscevano almeno tre B) L'avvenimento descritto non è possibile C) Ogni convitato ne conosceva esattamente due D) Uno dei convitati conosceva tutti E) Almeno uno dei convitati ne conosceva almeno altri tre
7. (La Sapienza, Facoltà scientifiche 2008) In una classe ci sono 8 tifosi di calcio, che si dividono fra solo due squadre, l'Inter e la Roma, ciascuna con almeno un tifoso. Due studenti affermano che: *L'Inter ha* 3 *tifosi; La Roma ha* 3 *tifosi più dell'Inter*. Sapendo che una delle precedenti affermazioni è vera e l'altra è falsa, si può concludere che il numero dei tifosi della Roma è A) 3 B) 4 C) 5 D) 6
8. (Architettura 2008) Marco ha quattro carte e le dispone sul tavolo una di fianco all'altra in questo modo: il re è di fianco all'asso; la carta di cuori è di fianco a quella di quadri ma non a quella di picche; la dama di picche è la prima carta, la seconda è una carta rossa; la carta di fiori è di fianco all'asso, ma non al fante. Qual è la terza carta?
A) L'asso di cuori B) Il fante di fiori C) Il re di quadri D) L'asso di quadri E) Il fante di cuori
9. (Ingegneria 2009) Un'indagine mostra che in Italia ci sono più persone coniugate che single e più maschi che femmine. Da questi dati possiamo dedurre che una sola fra le seguenti affermazioni è sicuramente FALSA; quale? A) in Italia le coppie sono più delle donne nubili B) in Italia le coppie sono più dei maschi celibi C) in Italia ci sono più mariti che donne nubili D) in Italia i single sono più del doppio delle coppie E) in Italia ci sono più maschi celibi che mariti
10. (Architettura 2010) La maestra d'asilo mette in fila indiana sei bimbe, i cui nomi sono: Anna, Bianca, Claudia, Diana, Eva, Federica. Sapendo che Eva viene subito dopo Federica, che Bianca è la seconda della fila e che fra lei ed Anna vi è una sola bambina, si dica chi è l'ultima della fila.
A) Eva B) Federica C) Diana D) Claudia E) Anna
11. (Bocconi 2010) Leggete attentamente i seguenti dati: Franco ha quattro euro; Mario ha cinque euro;

per acquistare un biglietto del cinema occorrono cinque euro. In base ai dati presentati quale delle seguenti affermazioni è vera? A) Franco può acquistare il biglietto del cinema B) Mario può acquistare il biglietto del cinema per sé e per Franco C) Franco va al teatro D) Mario può acquistare il biglietto del cinema per Franco E) Nessuna delle precedenti alternative è vera

12. (Ingegneria 2009) Due giocatori prendono a turno dei sassolini con l'unica regole che non se ne possono prendere né 4 né 8. Vince quel giocatore che riesce a prendere l'ultimo sassolino. Se inizialmente i sassolini sono 8, quanti ne deve prendere il primo giocatore per potersi garantire la vittoria, supponendo che nelle mosse successive ogni giocatore non commetta errori? A) Qualunque numero prenda, vincerà sempre B) Qualunque numero prenda, perderà sempre C) 1 D) 2 E) 3
13. (Ingegneria 2009) Ci sono 5 persone con diverse situazioni patrimoniali. Oronzo è più ricco di Rocco, le cui ricchezze sono più modeste di quelle di Silvio, e quest'ultimo a sua volta è più danaroso di Piero. Quirino è meno benestante di Piero, ma più agiato di Oronzo. Chi è il terzo in ordine di ricchezza?
A) Piero B) Rocco C) Oronzo D) Silvio E) Quirino
14. (Ingegneria 2009) Indicare quale tra le coppie di numeri indicati va inserita al posto dei puntini nella seguente sequenza: 3, 43; 5, 27; 9, 19; …, …; 33, 13
A) 24, 74 B) 19, 11 C) 15, 15 D) 17, 15 E) 23, 13
15. (Medicina 2013) Negli Stati Uniti d'America i test di logica non sarebbero necessari se gli esami nelle materie di base consistessero in temi scritti piuttosto che in domande a risposte brevi oppure a scelta multipla. Domande di questo tipo non danno la possibilità agli studenti né di pensare in maniera logica in modo indipendente né di presentare coerentemente le loro argomentazioni in forma scritta. Quindi, negli Stati Uniti i temi scritti dovrebbero essere più ampiamente utilizzati come mezzo di valutazione degli studenti. Quale delle seguenti affermazioni mette in luce il passaggio logico errato nel brano precedente? A) Molti studenti usualmente non studiano materie di base B) Scrivere temi non offre necessariamente l'opportunità di mettere alla prova le abilità logiche degli studenti C) Domande a risposte brevi oppure a scelta multipla possono essere valutate in maniera più obiettiva rispetto ai temi scritti D) Molti studenti, specialmente nelle materie scientifiche, non sono abituati a produrre temi scritti E) I test di logica mettono alla prova in modo efficiente le potenzialità di ciascuno studente ad affrontare ragionamenti complessi
16. (Medicina 2016) Un gioco ha le seguenti regole: se un numero è divisibile per 5 vale 5 punti; se è divisibile per 3 vale 4 punti. In base a tali regole, quale dei seguenti numeri vale di più?
A) 40 B) 42 C) 9 D) 18 E) 276
17. (Medicina 2016) Alla finale di una gara di automobilismo la classifica dal 1° al 7° posto è la seguente: Alessandro, Federico, Iris, Bruna, Cesare, Eligio, Gianna. Cinque di questi sette piloti indossano il casco integrale e si sa che a indossarlo sono tre tra i primi quattro classificati e tre tra gli ultimi quattro classificati. Si può essere certi che a indossare il casco integrale è:
A) Federico B) Eligio C) Bruna D) Cesare E) Iris
18. (Medicina 2016) Gabriele si allena in piscina ogni lunedì, mercoledì e sabato. In uno dei rimanenti giorni della settimana Gabriele gioca a calcio. Sapendo che il giorno dopo gli allenamenti di nuoto Gabriele non svolge alcuna attività fisica, qual è il giorno in cui gioca a calcio?
A) Mercoledì B) Martedì C) Domenica D) Venerdì E) Giovedì

Intervallo Matematico

Alice nel paese delle meraviglie è uno dei libri di fantasia più famosi al mondo. Esso fu scritto nel 1862 da un reverendo inglese che era anche insegnante di matematica: Lewis Carroll (1832 – 1898). Sin dal suo primo apparire, questo libro attirò l'attenzione non solo dei bambini, ma anche, e forse soprattutto, degli adulti, in particolare di coloro che si intendevano di matematica. Frequenti sono infatti i riferimenti a questioni che hanno a che fare con le matematiche. In questa scheda vogliamo prendere in considerazione una poesia riportata nel libro che costituisce la continuazione di *Alice nel paese delle meraviglie*, cioè *Attraverso lo specchio*, scritto dallo stesso autore nel 1871. Questa poesia, letta da Alice in un libro che ella trovò appunto passando attraverso lo specchio del proprio salotto descrive un fantastico essere che vive in un ancor più straordinario mondo: lo *Jabberwocky*. Essa riguarda proprio le questioni che stiamo considerando, infatti in essa sono presenti molte parole inventate di sana pianta.
Di seguito riportiamo la prima strofa, non nell'originale inglese, ma nella traduzione italiana che Alfonso Galasso e Tommaso Kemeny hanno curato per l'editrice Garzanti nel 1975. Quanto riportato di seguito è

tratto appunto da questa edizione.
Era rombo e i fangagili chiotti Girascavano e succhiellavano i pratiali: Tutti erano infoli i cenciopi, E lo spirdito primaticcio murpissi.
Vogliamo adesso riportare l'interpretazione di questi versi data da *Humpty Dumpty* il personaggio a forma di uovo che Alice incontra nel suo viaggio.
«*Rombo* significa le quattro del pomeriggio, quando cominci a *rosolare* la cena.
(…) *fangagili* vuol dire fangosi e agili. Agili qui ha lo stesso significato di attivi. Vedi, è come un attaccapanni… ci sono due significati appesi alla stessa parola.
(…) I *chiotti* sono un po' come i tassi… ma assomigliano anche alle lucertole… e hanno qualcosa in comune con i cavatappi.
(…) *Girascare* significa girare continuamente, come un giroscopio.
Succhiellare significa fare dei buchi come un succhiello.
Il *pratiale* è il prato artificiale intorno a una meridiana.
(…) *infoli* significa frivoli e infelici (ecco un altro attacapanni per te).
Un *cenciope* è un uccellino male in arnese, con le piume arruffate… qualcosa come un piumino vivente.
(…) un *primaticcio* è una specie di maiale verde.
(…) *spirdito* (…) penso che sia una abbreviazione di sperduti spiriti.
(…) *murpissare* è qualcosa che sta tra il mugghiare e il fischiare, con una specie di starnuto nel mezzo.»
Come si vede le spiegazioni di Humpty Dumpty, per quanto possano sembrare forzate e inventate hanno avuto lo scopo di far divenire accettabile, ciò che non lo era prima perché privo di un significato. Forniamo adesso l'immagine che l'illustratore John Tenniel ricavò dalle descrizioni di Humpty Dumpty. Vi sembra che  sia abbastanza fedele?

Attività

Con gli insegnanti di lettere e di matematica, considera delle frasi tratte da testi letterari e cerca di interpretarle in senso *matematico*, determinando per esempio se possono considerarsi enunciati logici, cioè se a essi si possono associare valori di verità.

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_3_1.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	**2**	**3**	**4**
B	D	B	B
5	**6**	**7**	**8**
C	D	C	A
9	**10**	**11**	**12**
D	A	D	B
13	**14**	**15**	**16**
E	D	B	A
17	**18**		
C	D		

1. Le basi del ragionamento

1.2 Verso il concetto di dimostrazione

Prerequisiti

- Nozione di enunciato logico.
- Connettivi logici.
- Insiemi e operazioni con essi.

Obiettivi

- Abituarsi alla precisione di linguaggio.
- Saper negare proposizioni contenenti quantificatori
- Riconoscere l'opportunità di dimostrare fatti anche apparentemente ovvi e intuitivi.
- Comprendere il significato di dimostrazione.
- Saper utilizzare semplici schemi deduttivi.
- Comprendere il significato di condizione necessaria, condizione sufficiente, condizione necessaria e sufficiente.

Contenuti

- I Quantificatori
- Il calcolo proposizionale
- Il concetto di dimostrazione

  Quelli che … vogliono sapere di più
  - I sillogismi aristotelici

Parole Chiave

Condizione necessaria – Condizione sufficiente – Condizione necessaria e sufficiente – Esiste almeno – Giudizio universale – Giudizio particolare – Modus ponens – Modus tollens – Proposizione inversa – Proposizione conversa – Proposizione contraria – Sillogismo – Tutti

Simbologia

$\forall$ Indica il quantificatore universale, si legge *per ogni o tutti* o *comunque*.
$\exists$ Indica il quantificatore esistenziale, si legge *esiste almeno uno* o *qualche* o *alcuni*.

Richiamiamo le conoscenze

I connettivi logici

Dati due o più enunciati logici con essi possiamo formare enunciati composti mediante l'utilizzo di operatori logici binari. Conosciamo già i cinque seguenti, a cui affianchiamo il relativo simbolo:

- il connettivo **ET** o **AND**, che si indica con $\wedge$;
- il connettivo **VEL** o **OR**, che si indica con $\vee$;
- il connettivo **AUT** o **XOR**, che si indica con $\dot{\vee}$;
- il connettivo **IMPLICA**, che si indica con $\Rightarrow$;
- il connettivo **COIMPLICA**, che si indica con $\Leftrightarrow$.

Vi è poi un connettivo *unario*, ossia che agisce su una singola proposizione:

- il connettivo **NON** o **NOT**, che si indica con $\neg$.

Per stabilire il valore di verità della composizione di due enunciati logici mediante uno dei cinque connettivi precedenti si utilizzano le cosiddette tabelle di verità. Vediamole.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	p **aut** q	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	F
F	F	F	F	F	V	V

La tabella relativa all'operatore **NOT**, essendo esso unario, conterrà solo due righe:

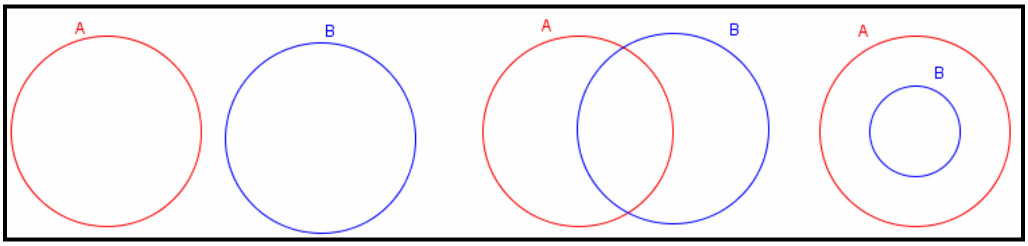
p	$\neg p$
V	F
F	V

I connettivi logici hanno una certa affinità con gli operatori insiemistici.
Due proposizioni logiche, p e q, si dicono **equiveridiche** se hanno uguali tabelle di verità. In tal caso scriviamo $p \equiv q$. Per esempio $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$, come si vede dalla tabella seguente.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Gli operatori insiemistici

Con il simbolo $A \cup B$, detto operatore **unione**, indichiamo l'insieme formato da tutti gli elementi contenuti in almeno uno dei due insiemi; con il simbolo $A \cap B$, detto operatore **intersezione**, indichiamo l'insieme formato dagli eventuali elementi contenuti in entrambi gli insiemi; se non vi sono elementi comuni diciamo che A e B sono fra loro **disgiunti** e la loro intersezione è l'**insieme vuoto**, che indichiamo con il simbolo $\varnothing$; con il simbolo $A \setminus B$, detto operatore **differenza**, indichiamo l'insieme formato dagli eventuali elementi di A che non sono elementi di B; con il simbolo $A \Delta B$, detto operatore **differenza simmetrica**, indichiamo l'insieme formato dagli eventuali elementi che stanno in uno solo dei due insiemi. Da un punto di vista grafico gli insiemi si indicano mediante i cosiddetti diagrammi o cerchi di Eulero–Venn.
Se i due insiemi, A e B, sono distinti si possono verificare solo i tre casi seguenti:



Nel primo caso gli insiemi hanno una parte comune, nel secondo caso sono disgiunti, nel terzo caso invece diciamo che sono uno **contenuto** nell'altro e quindi tutti gli elementi di un insieme sono elementi dell'altro: diciamo allora che il primo insieme, in figura B, è un **sottoinsieme** del secondo, nel nostro caso A, e scriviamo $B \subset A$ oppure $A \supset B$. Ciò vale se siamo sicuri che A e B sono come in figura, cioè se sono distinti, diversamente scriveremo più semplicemente $B \subseteq A$ oppure $A \supseteq B$.
Tornando alle relazioni esistenti fra connettivi logici e operatori insiemistici abbiamo che:

- l'unione equivale alla disgiunzione inclusiva,
- l'intersezione equivale alla congiunzione,
- la differenza simmetrica equivale alla disgiunzione esclusiva.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Consideriamo le seguenti proposizioni logiche: *p: Il fiume Po è più lungo di* 1000 *km*; *q: Il fiume Po sfocia nel mar Adriatico*. Le due proposizioni sono una falsa e l'altra vera. Consideriamo ora le seguenti proposizioni composte:

- $p \wedge q$: *Il fiume Po è più lungo di* 1000 *km* **e** *sfocia nel mar Adriatico*.
- $p \vee q$: *Il fiume Po è più lungo di* 1000 *km* **o** *sfocia nel mar Adriatico*.
- $p \dot{\vee} q$: **O** *il fiume Po è più lungo di* 1000 *km* **o** *sfocia nel mar Adriatico*.
- $p \Rightarrow q$: **Se** *il fiume Po è più lungo di* 1000 *km* **allora** *sfocia nel mar Adriatico*.
- $p \Leftrightarrow q$: **Solo se** *il fiume Po è più lungo di* 1000 *km sfocia nel mar Adriatico*.

Possiamo dire che di esse rappresentano proposizioni vere $p \vee q$, $p \dot{\vee} q$, $p \Rightarrow q$, perché nelle loro tabelle di verità relativamente ad antecedente falso e conseguente vero il risultato è vero; sono invece false le proposizioni $p \wedge q$, $p \Leftrightarrow q$.
Naturalmente dire che è vera la proposizione logica ***Se*** *il fiume Po è più lungo di* 1000 *km* ***allora*** *sfocia nel mar Adriatico*, non significa che essa sia una deduzione, cioè una relazione di causa-effetto, ossia il fatto che il fiume Po sfoci nel mar Adriatico non dipende dal fatto che abbia una lunghezza minor di 1000 km.

Negli esercizi seguenti, enunciare le proposizioni $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \dot{\vee} q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$ ***e stabilirne il valore di verità, giustificando le risposte.***

Livello 1

1. (p: 3 > 4; q: 12 > 1) ; (p: 3 < 4; q: 12 > 1) ; (p: 3 > 4; q: 12 < 1) ; (p: 3 < 4; q: 12 < 1)
[(F, V, V, V, F) ; (V, V, F, V, V) ; (F, F, F, V, V) ; (F, V, V, F, F)]
2. *p:* 128 *è un quadrato perfetto*; *q:* 127 *è un numero primo* [F, V, V, V, F]
3. *p:* 113 *è divisibile per* 3; *q:* 115 *non è divisibile per* 3 [F, V, V, V, F]
4. *p:* 16 *ha cinque divisori*; *q:* 17 *ha due divisori* [V, V, F, V, V]
5. *p:* 2^{10} > 1000; *q:* 729 *non è un quadrato perfetto* [F, V, V, F, F]
6. *p:* 1221 *è multiplo di* 11; *q:* 12321 *non è multiplo di* 11 [V, V, F, V, V]
7. *p:* 2^{12} *ha quattro cifre*; *q:* 2^{13} *ha cinque cifre* [F, V, V, F, F]
8. *p: L'Etna è il vulcano attivo più alto d'Europa*; *q: L'Etna si trova in Sicilia* [V, V, F, V, V]
9. *p: Cesare è vissuto prima della nascita di Gesù Cristo*; *q: Cesare ha combattuto contro Attila*
[F, V, V, F, F]
10. *p: Il canguro è un mammifero*; *q: Il canguro si trova abitualmente in Africa* [F, V, V, F, F]
11. *p: Alessandro Manzoni è nato nel XVIII secolo*; *q: Alessandro Manzoni è nato a Milano* [V, V, F, V, V]
12. *p: Pablo Picasso ha dipinto il quadro Guernica*; *q: Pablo Picasso ha affrescato il Duomo di Milano*
[F, V, V, F, F]

Lavoriamo insieme

- *Consideriamo la seguente frase "Ogni numero naturale maggiore di* 1 *è primo o composto". In che senso viene usato il connettivo* **o**? Ossia ogni numero naturale maggiore di 1 se è primo non è composto e viceversa, oppure esistono numeri che contemporaneamente sono sia primi sia composti? È vera la prima affermazione, quindi il nostro **o** ha un significato esclusivo.
- *Cosa accade invece nella frase: "Riceveranno una riduzione i titolari di una tessera dell'associazione Amici del cinema* ***o*** *i pensionati"*? Stavolta il nostro **o** ha un significato inclusivo, poiché possono esistere pensionati che hanno la detta tessera.

Nelle seguenti frasi stabilire se il connettivo o è usato nel modo esclusivo (aut) o inclusivo (vel).

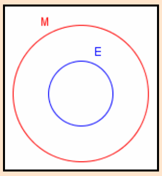
Livello 1

13. *Al totocalcio si vince con* 13 *o con* 14 ; x *è multiplo di* 10 *o di* 15 [vel ; vel]
14. *Al concorso sono ammessi i laureati in matematica o in fisica* [vel]
15. *I numeri naturali sono pari o dispari* ; x^2 *è un numero positivo o nullo* [aut ; aut]
16. *I triangoli non rettangoli sono acutangoli o ottusangoli* [aut]
17. *Il nome di battesimo di mio fratello è Piero o Luigi* [vel]
18. *La frazione* $1/n$, *per n numero naturale rappresenta un numero intero o decimale*
19. [vel]
20. *Quest'estate in vacanza andremo a Parigi o a Londra* [vel]
21. *La prossima volta che andrò a New York userò l'aereo o la nave* [vel]
22. *Nei musei statali italiani hanno ingresso gratuito i minorenni o i maggiori di* 65 *anni* [aut]
23. *I triangoli in considerazione sono rettangoli o isosceli* [vel]
24. *Sonia ha i capelli biondi o castani ; Mattia indossa la maglia rossa o gialla* [aut ; vel]
25. *Margherita ogni sera alle* 20:00 *legge un libro di Calvino o uno di Dante Alighieri* [aut]
26. *Domani è lunedì o martedì; Vado al cinema lunedì o martedì* [aut; vel]

I quantificatori

Se un pazzo scrive una selva di simboli matematici, ciò non vuol dire che essi abbiano un qualche significato solo perché un occhio inesperto non riesce a distinguerli da un risultato di matematica superiore.
Eric Temple Bell

Il problema

Consideriamo la seguente affermazione: *Tutti i cittadini italiani che possono votare per le elezioni dei deputati alla camera sono maggiorenni*. Qual è il reale significato di tale frase? Essa stabilisce la validità di una proprietà (in questo caso un diritto–dovere) verificata da tutti gli elementi di un dato insieme (in questo caso quello degli aventi diritto al voto). Da un punto di vista matematico l'insieme degli elettori italiani è un sottoinsieme dell'insieme dei maggiorenni italiani. La figura a lato 

è la relativa rappresentazione grafica, in cui M è l'insieme dei maggiorenni ed E quello degli elettori. L'affermazione, ossia *Tutti i maggiorenni possono votare per le elezioni dei deputati alla camera della Repubblica Italiana*, non è vera. Non possiamo quindi dire che i due insiemi (quello dei maggiorenni e quello dei votanti) sono uguali, pertanto le due proprietà non sono equivalenti.

Spesso nel linguaggio di ogni giorno, come anche in quello matematico, si usano frasi riferite a una totalità di elementi e per far ciò si usano aggettivi o pronomi indefiniti come *tutti*, *ogni*, *qualunque*, … Vediamo degli esempi.

Esempio 1

Spesso i teoremi nelle matematiche sono proprietà verificate da tutti gli elementi di un dato insieme. Per esempio diciamo che:

- *In ogni triangolo le mediane si incontrano in un punto che si chiama baricentro.*
- *Tutti i numeri naturali che siano quadrati perfetti hanno un numero dispari di divisori.*
- *In qualunque insieme finito di numeri positivi la media aritmetica di tali numeri è maggiore della loro media geometrica.*

Come si vede, abbiamo usato diversi aggettivi indefiniti, fra loro sinonimi, per esprimere la validità di proprietà verificate da tutti gli elementi di un certo insieme (i triangoli, i numeri naturali quadrati perfetti, gli insiemi finiti di numeri positivi).

Vista l'importanza dell'argomento, proponiamo una definizione.

Definizione 1

Un aggettivo o pronome indefinito che si riferisce alla totalità degli elementi di un insieme si dirà **quantificatore universale**.

Notazione 1

Per indicare un quantificatore universale useremo il simbolo $\forall$.

Esempio 2

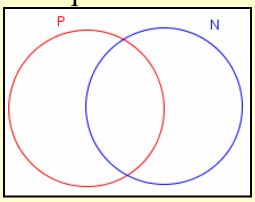
- L'affermazione *Il quadrato di ogni numero reale è non negativo*, si può esprimere $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Se invece volessimo tradurre in simboli il famoso detto *Tutte le strade portano a Roma*, dovremmo intanto trasformarlo in un modo più consono alla nostra terminologia, cioè: *Qualunque insieme di strade è contenuto*

nell'insieme delle strade che portano a Roma. Se allora indicassimo con S un qualunque insieme di strade e con R quelle che portano a Roma, scriveremo $S \subseteq R$, o meglio, considerando gli elementi di S: $s \in R, \forall s \in S$. L'affermazione non ci permette di dire né che $R = S$, né che $S \subset R$. Se volessimo stabilire che cosa effettivamente accade dobbiamo effettuare altre indagini.

In effetti vi sono parecchi teoremi matematici che sono detti *esistenziali*, che cioè stabiliscono l'esistenza di uno o più elementi che verificano una data proprietà.

Esempio 3

Consideriamo la seguente affermazione vera: *Esistono numeri primi maggiori di un miliardo*. Che cosa stiamo dicendo stavolta? Che tutti i numeri primi sono maggiori di un miliardo, ossia che l'insieme dei numeri primi è un sottoinsieme dell'insieme dei numeri maggiori di un miliardo? Niente affatto! Stiamo dicendo che alcuni numeri primi appartengono all'insieme dei numeri maggiori di un miliardo. Quindi da un punto di vista insiemistico non stiamo dicendo che c'è un insieme contenuto in un altro, ma piuttosto che vi sono due insiemi che hanno alcuni elementi in comune; graficamente, l'insieme P dei numeri primi e quello N dei numeri naturali maggiori di un miliardo si rappresentano nel modo mostrato in figura.



Così, come nell'esempio precedente non abbiamo potuto dire né che $S = R$, né che $S \subset R$, ma solo che $S \subseteq R$, anche in questo caso non possiamo dire, solo dall'affermazione fatta, né che $P \subseteq$ N (cioè tutti i numeri primi sono maggiori di un miliardo), né che $P \not\subset$ N (alcuni numeri primi non sono maggiori di un miliardo).

Definizione 2

Un aggettivo o pronome indefinito che si riferisce all'esistenza di almeno un elemento di un insieme verificante una data proprietà si dirà **quantificatore esistenziale**.

Notazione 2

Per indicare un quantificatore esistenziale useremo il simbolo $\exists$.

Esempio 4

Per rappresentare in modo simbolico l'affermazione dell'esempio precedente (*Esistono numeri primi maggiori di un miliardo*), scriveremo: $\exists\ p \in P$: $p > 10^9$ oppure $\exists\ p \in P$: $p \in$ N. Da un punto di vista insiemistico abbiamo la rappresentazione grafica vista in precedenza. In effetti potremmo anche avere la rappresentazione grafica in cui $P \subset$ N, dato che anche in questo caso *alcuni* elementi di P sono elementi di N, così sarebbero però *tutti* gli elementi di P a essere elementi di N. In genere quando abbiamo a che fare con quantificatori esistenziali consideriamo sempre la precedente rappresentazione grafica.

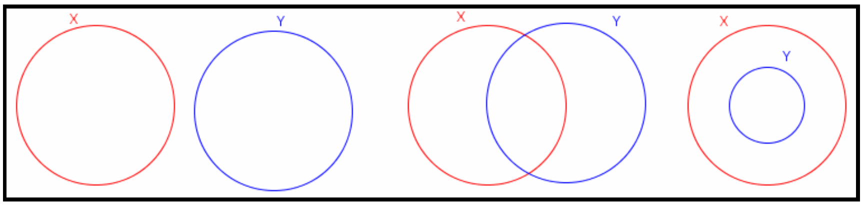
Abbiamo a che fare con quantificatori esistenziali tutte le volte in cui usiamo gli aggettivi o pronomi indefiniti *alcuni*, *qualche*, *almeno* ma anche quando più semplicemente usiamo le locuzioni *c'è* o *ci sono*. Così per esempio la famosa frase di Amleto: *C'è del marcio nel regno di Danimarca!*, può essere posta in forma *esistenziale*, scrivendo: *Esiste del marcio nel regno di Danimarca*.

L'angolo storico

La *logica* intesa come scienza che studia i processi del pensare e la correttezza dei ragionamenti, e quindi le sue applicazioni alle matematiche nelle dimostrazioni, può considerarsi come una delle più antiche discipline culturali. Essa nasce ufficialmente come scienza a sé stante con Aristotele (384 a.C.– 322 a.C.), il quale che riunisce sotto il titolo di *Organum* diversi trattati relativi appunto a quella che viene tradizionalmente chiamata *logica classica*. In effetti Aristotele, un po' come Euclide nei suoi *Elementi*, raccoglie, pur apportando molto di

suo, idee già precedentemente discusse da altri pensatori. Le idee aristoteliche hanno fortemente condizionato per più di duemila anni l'idea di logica, ma, come poi spesso accade, in un periodo relativamente breve tutto è stato rivoluzionato. Intorno alla metà dell'Ottocento il matematico inglese George Boole (1815 – 1864) riesce ad *algebrizzare* la logica, creando così la *logica matematica*. Ciò fornisce nuovo impeto alle ricerche, con un rifiorire di indagini relative ai fondamenti delle discipline matematiche, dall'aritmetica all'analisi, dalla geometria al calcolo delle probabilità. Vengono discussi vecchi paradossi e ne nascono di nuovi.
A partire dai primi decenni del Novecento comincia ad affermarsi una logica che non sia più solo *bivalente* (un enunciato non deve avere solo i due classici valori di verità, ma può averne tre o anche più); successivamente anche la nascente informatica si avvale della logica, un apporto risultato indispensabile per la formulazione e la risoluzione di problemi fondamentali. Con questi ultimi mutamenti la logica si *astrae* in modo eccessivo; le pubblicazioni dei matematici si riempiono di simboli sempre più complessi e incomprensibili, alcuni dei quali cominciano a diffondersi un po' in tutte le scienze, anche a livelli di scolarità medio-bassi. Nascono così anche i simboli dei quantificatori. Ma andiamo per ordine.
Uno dei primi a utilizzare simboli nella nascente logica matematica è stato Augustus De Morgan che nel 1831 scrive il trattato *Formal Logic* e usa: $X)Y$ per dire *ogni X è Y* ; $X.Y$ per dire *nessun X è Y* ; $X{:}Y$ per dire *alcuni X non sono Y* ; XY per dire *alcuni X sono Y*;
Boole, il padre della logica matematica, usa invece simboli aritmetici per i connettivi: + è la disgiunzione; × è la congiunzione; – è la negazione.
Altri matematici propongono notazioni diverse; in particolare Gotlob Frege è uno di quelli che, nei suoi *Fondamenti di aritmetica* del 1893, usa una simbologia più difficile di quella usata dagli altri.
Simboli più vicini a quelli attuali vengono utilizzati dal matematico piemontese Giuseppe Peano nel *Formulaire de mathematiqués* del 1897. Tra i simboli introdotti ricordiamo **V,** per indicare *tutti*; ∃, di cui scrive che rappresenta una E rovesciata, per indicare la parola *esiste*. Il simbolo ∀ viene invece usato per la prima volta dal matematico tedesco Gerhard Gentzen in un articolo del 1934: anche in questo caso abbiamo una lettera rovesciata, una A, perché in tedesco *All–Zeichen* vuol dire *indicatore di tutto*.

Come abbiamo già visto, considerando due insiemi distinti qualunque, X e Y, la loro rappresentazione grafica è una delle seguenti tre:



Da un punto di vista dei quantificatori, possiamo *leggere* tali rappresentazioni nel modo seguente:
- *alcuni x sono y* (ma anche *alcuni y sono x*), oppure *qualche x non è y* (e anche *qualche y non è x*);
- *nessun x è y* (ma anche *nessun y è x*);
- *tutti gli y sono x*.

Stabiliamo allora delle definizioni.

Definizione 3

- Un enunciato della forma Ogni x è y ($x \in Y, \forall x \in X$) si dice **giudizio universale affermativo**.
- Un enunciato della forma Nessun x è y ($x \notin Y, \forall x \in X$) si dice **giudizio universale negativo**.
- Un enunciato della forma Alcuni x sono y ($\exists x \in X: x \in Y$) si dice **giudizio particolare affermativo**.
- Un enunciato della forma Alcuni x non sono y ($\exists x \in X : x \notin Y$) si dice **giudizio particolare negativo**.

Tutti i precedenti quattro enunciati si chiamano **giudizi aristotelici**.

Notazione 3

Un giudizio universale affermativo si indica con A; un giudizio universale negativo si indica con E; un giudizio particolare affermativo si indica con I; un giudizio particolare negativo si indica con O.

Esempio 5

Vediamo alcuni esempi di giudizi aristotelici in ambito matematico.

- *Alcuni numeri primi sono pari* è un giudizio particolare affermativo.
- *Alcuni numeri primi non sono pari* è invece un giudizio particolare negativo.
- *Tutti i triangoli equilateri sono triangoli isosceli* è un giudizio universale affermativo.
- *Nessun triangolo equilatero è ottusangolo* è invece un giudizio universale negativo.

Ci chiediamo adesso se vi è o no una relazione fra i quattro giudizi aristotelici.
Chiaramente sono diversi l'uno dall'altro; non è difficile però accorgersi che premettendo in modo opportuno la particella *non* in uno dei quattro giudizi ne otteniamo uno degli altri.

Esempio 6

Consideriamo il giudizio universale affermativo: Tutti i numeri naturali multipli di 4 sono pari. Qual è la sua negazione? Non è vero che **tutti** i numeri naturali multipli di 4 sono pari. Tale negazione vuol dire: Almeno un numero naturale multiplo di 4 non è pari. Quindi la negazione di un giudizio universale affermativo è un giudizio particolare negativo; in simboli: $\neg (x \in Y, \forall x \in X) \equiv \exists x \in X: x \notin Y$.

Tenendo conto dell'esempio precedente, possiamo scrivere le seguenti equivalenze simboliche.

Regola 1

- $\neg (x \in Y, \forall x \in X) \equiv \exists x \in X: x \notin Y$;
- $\neg (x \notin Y, \forall x \in X) \equiv \exists x \in X: x \in Y$;
- $\neg (\exists x \in X: x \in Y) \equiv x \notin Y, \forall x \in X$;
- $\neg (\exists x \in X: x \notin Y) \equiv x \in Y, \forall x \in X$

Verifiche

Lavoriamo insieme

Stabilire il valore di verità dei seguenti giudizi aristotelici: *p: Tutti i quadri di van Gogh si trovano in Olanda; q: Alcuni quadri di Raffaello si trovano a Milano*. Possiamo dire che il primo è falso, perché vi sono diversi quadri di van Gogh esposti nelle più famose gallerie del mondo, per esempio vi sono suoi quadri al museo d'Orsay a Parigi. Il secondo enunciato è vero, perché almeno un quadro di Raffaello, *Lo sposalizio della vergine*, si trova alla Pinacoteca Brera di Milano. Se perciò volessimo costruire con questi due enunciati le proposizioni composte dai cinque connettivi elementari, potremmo dire che sono veri $p \vee q$, $p \dot{\vee} q$ e $p \Rightarrow q$.

Negli esercizi seguenti, enunciare le proposizioni $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \dot{\vee} q$, $p \Rightarrow q$, $p \Leftrightarrow q$ e stabilirne il valore di verità, giustificando le risposte.

Livello 1

1. *p: Tutti i numeri primi sono dispari*; *q: Alcuni numeri primi finiscono per* 7. [F, V, V, V, F]
2. *p: Tutti i triangoli isosceli sono equilateri*; *q: Alcuni numeri pari sono divisibili per* 3. [F, V, V, V, F]
3. *p: Ogni numero quadrato perfetto non finisce per* 2; *q: Alcuni rettangoli sono quadrati*. [V, V, F, V, V]
4. *p: Alcuni trapezi hanno un angolo retto*; *q: Tutti i numeri multipli di* 7 *sono dispari*. [F, V, V, F, F]
5. *p: Tutti i rombi sono parallelogrammi*; *q: Alcune frazioni generano numeri periodici semplici*. [V, V, F, V, V]
6. *p: Tutti i numeri che finiscono per* 4 *sono quadrati perfetti*; *q: Alcuni triangoli rettangoli sono equilateri*. [F, F, F, V, V]
7. *p: Alcuni quadrati perfetti hanno un numero dispari di divisori*; *q: Tutti i quadrati perfetti hanno un numero dispari di divisori*. [V, V, F, V, V]
8. *p: Tutti i ruminanti sono vegetariani*; *q: Alcuni vegetariani sono ruminanti*. [V, V, F, V, V]
9. *p: Alcuni ruminanti sono vegetariani*; *q: Tutti i vegetariani sono ruminanti*. [F, V, V, F, F]
10. *p: Qualche cittadino italiano abita negli U.S.A.*; *q: Qualche cittadino statunitense non abita in Italia*. [V, V, F, V, V]
11. *p: Alcune città italiane hanno più di dieci milioni di abitanti; q: Tutte le città del mondo non hanno più di dieci milioni di abitanti*. [F, V, V, V, F]
12. *p: Alcuni cantanti italiani cantano in inglese*; *q: Nessun cantante inglese canta in italiano*. [F, V, V, F, F]
13. *p: Nessun siciliano ha i capelli biondi*; *q: Qualche svedese non ha i capelli neri*. [F, V, V, V, F]
14. *p: Alcuni serpenti sono più lunghi di* 5 *metri*; *q: Alcuni mammiferi vivono nelle acque salate*. [V,V,F, V, V]

Lavoriamo insieme

Stabilire il valore di verità del seguente enunciato logico: *Non tutti i numeri primi sono dispari*. Esso è vero perché, per esempio, il numero 2 è sia primo che pari. Per esprimerlo simbolicamente indichiamo con P l'insieme dei numeri primi e con D quello dei numeri dispari e rienunciamo la proposizione nella forma: *Esistono dei numeri primi non dispari*. Adesso usiamo i simboli: $\exists\ x \in P : x \notin D$. Quale sarà la negazione di tale enunciato? Dal punto di vista simbolico si ha: $\neg(\exists\ x \in P : x \notin D) \equiv x \in D,\ \forall\ x \in P$, che, espresso in linguaggio naturale, diviene: *Ogni numero primo è dispari*. Naturalmente quest'ultimo enunciato è falso.

Tradurre in simboli matematici i seguenti enunciati logici, quindi costruirne la negazione. Per gli enunciati riferiti a questioni matematiche stabilire il valore di verità.

Livello 2

15. *Chi si ferma è perduto*. F è l'insieme di quelli che si fermano, P quello di chi si perde. [$x \in P, \forall x \in F; \exists x \in F: x \notin P$]
16. *Chi dorme non piglia pesci*. D è l'insieme di chi dorme, P quello di chi piglia pesci. [$x \notin P, \forall x \in D; \exists x \in D: x \in P$]

17. *Chi trova un amico trova un tesoro*. A è l'insieme di chi trova un amico, T quello di chi trova un tesoro. [$x \in T, \forall x \in A$; $\exists x \in A$: $x \notin T$]
18. *Ognuno sta solo sul cuor della terra* (Quasimodo). P è l'insieme delle persone, S quello di chi sta solo sul cuor della terra. [$x \in S, \forall x \in P$; $\exists x \in P$: $x \notin S$]
19. *Tutte le donne sono cattive guidatrici*. D è l'insieme delle donne, G quello di chi sa guidare bene l'automobile. [$x \notin G, \forall x \in D$; $\exists x \in D$: $x \in G$]
20. *Chi la fa l'aspetti!* F è l'insieme di coloro che *fanno*, A quello di coloro che *aspettano*. [$x \in A, \forall x \in F$; $\exists x \in F$: $x \notin A$]
21. *Chi sbaglia paga*. S è l'insieme di quelli che sbagliano, P quello di quelli che pagano. [$x \in P, \forall x \in S$; $\exists x \in S$: $x \notin P$]
22. *Non dorme nessuno nel mondo* (Federico Garcia Lorca). D è l'insieme di quelli che dormono, E quello degli esseri del mondo. [$x \in D, \forall x \in E$; $\exists x \in E$: $x \notin D$]
23. *Ogni triangolo equilatero non è acutangolo*. E è l'insieme dei triangoli equilateri, A quello dei triangoli acutangoli. [$x \notin A, \forall x \in E$; $\exists x \in E$: $x \in A$; Falso]
24. *Alcuni insetti non sono ovipari*. I è l'insieme degli insetti, O quello degli ovipari. [$\exists x \in I$: $x \notin O$; $x \in O, \forall x \in I$]
25. *Nessun equino ha due zampe*. E è l'insieme degli equini, Z quello degli animali a due zampe. [$x \notin Z, \forall x \in E$; $\exists x \in E$: $x \in Z$]

Livello 3

26. *Tutti i quadrati perfetti sono pari*. Q è l'insieme dei quadrati perfetti, P quello dei numeri pari. [$x \in P, \forall x \in Q$; Falso; $\exists x \in Q$: $x \notin P$]
27. *Non tutti gli europei sono cristiani*. E è l'insieme degli europei, C quello dei cristiani. [$\exists x \in E$: $x \notin C$; $x \in C, \forall x \in E$]
28. *Alcune monete di corso legale in Italia non hanno una forma rotonda*. M è l'insieme delle monete di corso legale in Italia, R quello degli oggetti di forma rotonda. [$\exists x \in M$: $x \notin R$; Vero; $x \in R, \forall x \in M$]
29. *Qualche numero è multiplo di* 42 *ma non di* 43. X è l'insieme dei multipli di 42, Y dei multipli di 43. [$\exists x \in X$: $x \notin Y$; Vero; $x \in Y, \forall x \in X$]
30. *Ogni poliedro regolare ha facce triangolari*. P è l'insieme dei poliedri regolari, T quello dei poliedri le cui facce sono triangolari. [$x \in T, \forall x \in P$; Falso; $\exists x \in P$: $x \notin T$]
31. *Comunque si considerino due numeri la loro media aritmetica è un numero non intero*. A è l'insieme delle medie aritmetiche di due numeri qualsiasi. [$x \notin \mathbb{Z}, \forall x \in A$; Falso; $\exists x \in A$: $x \in \mathbb{Z}$]

Lavoriamo insieme

Tradurre in linguaggio naturale la seguente espressione simbolica: $\exists\, x \in X : x + 3 \notin X$.
Si ha: "Almeno un numero dell'insieme X è tale che aggiungendovi 3 il risultato non è più un elemento di X".
Quale sarà la sua negazione? Intanto consideriamo quella simbolica: $x + 3 \in X, \forall x \in X$. Traduciamo anche questa: "Tutti i numeri di X se aumentati di 3 appartengono ancora a X".

Tradurre in linguaggio naturale i seguenti enunciati logici simbolici, quindi costruirne la negazione. Laddove possibile dire se l'enunciato è vero o falso

Livello 1

32. $a^2 > 0\ \forall\, a \in A$ [Tutti i numeri dell'insieme A hanno il quadrato positivo; $\exists a \in A$: $a^2 \le 0$]
33. $\exists b \in B$: $b^3 > b^4$ [Almeno un numero di B ha il cubo maggiore della sua quarta potenza; $b^3 \le b^4, \forall b \in B$]
34. $\exists c \notin C$: $c^2 \in C$ [Qualche numero non appartenente a C ha il quadrato appartenente a C; $c^2 \notin C, \forall c \in C$]
35. $d^3 < 1, \forall d \notin D$ [Tutti i numeri non appartenenti a D hanno il cubo minore di 1; $\exists d \in D$: $d^3 \ge 1$]
36. $f \in F, \forall f \notin G$ [Tutti gli elementi che non appartengono a G appartengono a F; $\exists\, f \in G$: $f \notin F$]

37. $e^4 \le 3, \forall e \notin E$

[Tutti i numeri non appartenenti ad E hanno la quarta potenza minore o uguale a 3; $\exists e \notin E: e^4 > 3$]

38. $\exists g \in G: g \notin H$ [Almeno un elemento di G non appartiene ad H; $g \in H, \forall g \in G$]

39. $\exists h \notin H: h \notin K$ [Qualche numero non appartenente ad H non appartiene a K; $h \in K, \forall h \notin H$]

Livello 2

40. $a = 0 \Rightarrow a \cdot b = 0, \forall b \in \mathbb{R}$ [Il prodotto di 0 per ogni numero reale è 0: Vero; $\nexists\, b \in \mathbb{R}: a = 0 \Rightarrow a \cdot b \neq 0$]

41. $\exists n \in \mathbb{N}: n > 5 \Rightarrow n^2 > 100$

[Almeno un naturale maggiore di 5 ha il quadrato maggiore di 100: Vero; $n > 5 \Rightarrow n^2 \le 100, \forall n \in \mathbb{N}$]

42. $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b, \forall\, a, b \notin \mathbb{R}^-$

[Se due numeri reali non negativi hanno i quadrati uguali allora sono uguali: Vero; $\exists\, a, b \notin \mathbb{R}^-: a^2 = b^2 \Rightarrow a \neq b$]

43. $\exists\, z \notin \mathbb{Z}: z > 1 \Rightarrow 1/z > 1$

[Almeno un numero non intero maggiore di 1 ha il reciproco maggiore di 1 : Falso; $z > 1 \Rightarrow 1/z \le 1, \forall z \notin \mathbb{Z}$]

Lavoriamo insieme

Indichiamo con il simbolo $A(x, y)$ la seguente affermazione: "x ha telefonato a y". Vogliamo costruire con essa le seguenti espressioni, traducendole in linguaggio naturale:

- $\forall x\, \exists y: A(x,y) \equiv$ *Per ogni x esiste almeno un y a cui ha telefonato.*
- $\forall y\, \exists x: A(x,y) \equiv$ *Per ogni y esiste almeno un x che gli ha telefonato.*
- $\exists x\, \forall y: A(x,y) \equiv$ *Esiste almeno un x che ha telefonato a tutti gli y.*
- $\exists y\, \forall x: A(x,y) \equiv$ *Esiste almeno un y a cui hanno telefonato tutti gli x.*

Potremmo anche esprimere in forma più elegante le quattro precedenti affermazioni, sostituendo a x e y il nome generico *persona*:

- $\forall x\, \exists y: A\,(x,y) \equiv$ *Ogni persona ha fatto almeno una telefonata.*
- $\forall y\, \exists x: A\,(x,y) \equiv$ *Ogni persona ha ricevuto almeno una telefonata.*
- $\exists x\, \forall y: A\,(x,y) \equiv$ *Almeno una persona ha telefonato a tutti.*
- $\exists y\, \forall x: A\,(x,y) \equiv$ *Almeno una persona ha ricevuto telefonate da tutti.*

Nei seguenti esercizi tradurre in linguaggio naturale le seguenti espressioni simboliche:

a) $\forall x\, \exists y: A(x, y)$; **b)** $\forall y\, \exists x: A(x, y)$; **c)** $\exists x\, \forall y: A(x, y)$; **d)** $\exists y\, \forall x: A(x, y)$

Livello 2

44. $A(x, y)$: *la squadra x ha incontrato la squadra y*

[*Ogni squadra ha fatto almeno una partita*; *Ogni squadra ha fatto almeno una partita*; *Almeno una squadra ha incontrato tutte le altre*; *Almeno una squadra è stata incontrata da tutte le altre*]

45. $A(x, y)$: *la squadra x ha battuto la squadra y*

[*Ogni squadra ha vinto almeno una partita*; *Ogni squadra ha perso almeno una partita*; *Almeno una squadra ha vinto tutte le partite*; *Almeno una squadra ha perso tutte le partite*]

46. $A(x, y)$: *l'attrice x ha recitato con l'attore y.*

[*Ogni attrice ha recitato con almeno un attore*; *Ogni attore ha recitato con almeno un'attrice*; *Almeno un'attrice ha recitato con tutti gli attori*; *Almeno un attore ha recitato con tutte le attrici*]

47. $A(x, y)$: *la nazione x confina con la nazione y.*

[*Ogni nazione confina con almeno un'altra*; *Ogni nazione confina con almeno un'altra*; *Almeno una nazione confina con tutte le altre*; *Almeno una nazione confina con tutte le altre*]

48. $A(x, y)$: *lo studente x raggiunge la sufficienza nella materia y.*

[*Ogni studente raggiunge la sufficienza in almeno una materia*; *In ogni materia almeno uno studente raggiunge la sufficienza*; *Almeno uno studente raggiunge la sufficienza in tutte le materie*; *In almeno una materia tutti raggiungono la sufficienza*]

49. $A(x, y)$: *il signor x ha letto il libro y*.
[*Ogni persona ha letto almeno un libro*; *Ogni libro è stato letto da almeno una persona*; *Almeno una persona ha letto tutti i libri*; *Almeno un libro è stato letto da tutti*]

50. $A(x, y)$: *il ragazzo x ha baciato la ragazza y*.
[*Ogni ragazzo ha baciato almeno una ragazza*; *Ogni ragazza è stata baciata almeno da un ragazzo*; *Almeno un ragazzo ha baciato tutte le ragazze; Almeno una ragazza è stata baciata da tutti i ragazzi*]

51. $A(x, y)$: *il signor x ha fatto gli auguri a y*.
[*Ogni persona ha fatto gli auguri ad almeno un'altra persona*; *Ogni persona ha ricevuto gli auguri da almeno una persona*; *Almeno una persona ha fatto gli auguri a tutti*; *Almeno una persona ha ricevuto gli auguri da tutti gli altri*]

52. $A(x, y)$: *la ragazza x ha ballato con il ragazzo y*.
[*Ogni ragazza ha ballato con almeno un ragazzo*; *Ogni ragazzo ha ballato con almeno una ragazza*; *Almeno una ragazzo ha ballato con tutti i ragazzi*; *Almeno un ragazzo ha ballato con tutte le ragazze*]

53. Con riferimento agli esercizi precedenti in alcuni casi scambiare x con y non ha prodotto variazione del risultato, perché? [La relazione è simmetrica, nel senso che $A(x, y) = A(y, x)$]

L'Antologia

Riportiamo alcuni passi tratti dalle opere logiche di Aristotele, nella versione italiana del 1982 a cura della casa editrice Laterza.

Aristotele *Analitici primi* (IV secolo a. C.)

> *La premessa è un discorso che afferma o che nega qualcosa rispetto a qualcosa. Tale discorso, poi, è universale, o particolare, o indefinito. Con discorso universale, intendo quello che esprime l'appartenenza ad ogni oggetto o a nessun oggetto; con discorso particolare, intendo quello che esprime l'appartenenza a qualche oggetto, o la non appartenenza a qualche oggetto, o la non appartenenza ad ogni oggetto.*

Con queste brevi frasi Aristotele introduce i quattro giudizi di cui abbiamo parlato; di seguito precisa cosa intende per **sillogismo**.

> *Il sillogismo è un discorso in cui, posti taluni oggetti, alcunché di diverso dagli oggetti stabiliti risulta necessariamente, per il fatto che questi oggetti sussistono. […] chiamo sillogismo perfetto quello che oltre a quanto è stato assunto non ha bisogno di null'altro, affinché si riveli la necessità della deduzione, e chiamo invece imperfetto il sillogismo che esige l'aggiunta di uno o di parecchi oggetti, i quali sono bensì richiesti necessariamente dai termini posti alla base ma non sono stati assunti attraverso le premesse.*

Per Aristotele quindi il sillogismo è la *soluzione definitiva* alle questioni dimostrative, dato che rappresenta uno schema di deduzione in cui l'implicazione finale risulta *necessaria* conseguenza delle premesse. Nel resto dell'opera Aristotele considera quattordici forme di sillogismo; parecchi secoli dopo, Galeno ne enunciò altri cinque.

Vediamo anche come George Boole rappresenta le stesse idee aristoteliche. Riportiamo un passo da una edizione del 1993 della casa editrice Boringhieri.

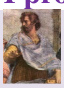
George Boole, *L'analisi matematica della logica*, 1847

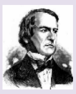
Usiamo il simbolo 1, o unità, per rappresentare l'universo inteso come comprendente ogni classe concepibile di oggetti, sia che esistano realmente o no;[…] impieghiamo le lettere X, Y, Z per rappresentare gli individui membri delle classi; […] inoltre, concepiamo una classe di simboli x, y, z che […] operando su un qualunque soggetto comprendente individui o classi, selezioni da tale soggetto tutte le X che contiene.

Notiamo immediatamente, soprattutto per quanto riguarda la simbologia, che i due passi sono separati da migliaia di anni. In seguito, Boole stabilisce che scrivendo xy intende la congiunzione logica, con $x + y$ la disgiunzione e con $–x$ la negazione.
Vediamo allora l'espressione dei giudizi aristotelici.

1. *Esprimere la classe non X, cioè la classe che include tutti gli individui che non sono X. La classe X e la classe non X insieme compongono l'universo. Ma l'universo è 1, e la classe X è determinata dal simbolo x, dunque la classe non X sarà determinata da simbolo* $1 - x$. *[…] analogamente, come il prodotto xy esprime l'intera classe i cui membri sono sia X sia Y, il simbolo* $y(1 - x)$ *rappresenterà la classe i cui membri sono Y, ma non X; e il simbolo* $(1 - x)(1 - y)$ *rappresenterà l'intera classe i cui membri non sono né X né Y.*
2. *Esprimere la proposizione: Tutti gli X sono Y. Poiché tutti gli X che esistono si trovano nella classe Y, è ovvio che selezionare dall'universo tutti gli Y, e da questi selezionare tutti gli X, è lo stesso che selezionare subito dall'universo tutti gli X. Dunque* $xy = x$, *oppure* $x(1 - y) = 0$.
3. *Esprimere la proposizione: Nessun X è Y. Asserire che nessun X è Y è lo stesso che asserire che non ci sono termini comuni alle classi X e Y. Ora, tutti gli individui comuni a queste classi sono rappresentati da xy. Dunque la proposizione che nessun X è Y è rappresentata dall'equazione* $xy = 0$.
4. *Esprimere la proposizione: Alcuni X sono Y. Se alcuni X sono Y, ci sono alcuni termini comuni alle classi X e Y. Poniamo che questi termini costituiscano una classe separata V, alla quale corrisponda un simbolo elettivo separato v, allora* $v = xy$. *E poiché v include tutti i termini comuni alle classi X e Y, possiamo interpretarlo indifferentemente come Alcuni X, oppure come Alcuni Y.*

I protagonisti


Aristotele nacque a Stagira in Macedonia, nel 384 a.C. Trascorse parte della sua giovinezza alla corte del re di Macedonia di cui suo padre era amico e medico personale. A 17 anni andò a studiare alla famosa Accademia di Platone ad Atene. Verso la fine della sua vita modificò con i suoi punti di vista originali le idee platoniche di cui all'inizio era convinto assertore. Nel 342 a.C., Filippo II di Macedonia lo invitò a fare da tutore a suo figlio tredicenne, che divenne poi il famoso Alessandro Magno. Ricordiamo tra le sue opere più importanti, giunte fino a noi, l'Organon, la Retorica, la Poetica, la Metafisica. Aristotele morì a Calcide nell'Eubea nel 322 a.C.

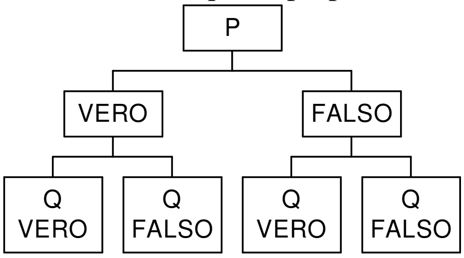

George Boole nacque a Lincoln, in Inghilterra, il 2 novembre del 1815. Ben presto mostrò le sue capacità occupandosi di logica e nel 1847 pubblicò L'analisi matematica della logica. In quest'opera pose le basi per l'algebrizzazione della logica, di fondamentale importanza per lo sviluppo non solo della matematica ma anche di altre scienze come, per esempio, l'informatica. È però il saggio Investigazioni sulle leggi del pensiero, del 1854, a designarlo come padre della logica matematica. Morì l'8 dicembre 1864 a Ballintemple, nella contea di Cork in Irlanda.

Il calcolo proposizionale

Il problema

Date due proposizioni logiche *p* e *q*, quante sono le possibili diverse tabelle di verità che possono formarsi con esse?

Date due proposizioni logiche, ciascuna di esse può avere uno dei due valori di verità (vero – falso), quindi le diverse possibilità di trattare la connessione di due di queste proposizioni sono le seguenti quattro:



In totale abbiamo 4 casi, questo almeno per quanto riguarda gli *input*; quanti sono i possibili *output*, ossia le diverse tabelle di verità?

Esempio 7

Una tabella di verità riferita a un generico connettivo binario ha la forma seguente:

p	*q*	*p* * *q*
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Dobbiamo *sistemare* in ciascuna casella dell'ultima colonna di tale tabella uno dei due simboli V (vero) o F (falso). Se questi simboli sono tutti uguali fra loro abbiamo solo due casi

p	*q*	*p* * *q*	*p* ✰ *q*
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	V	F

Se abbiamo un simbolo che si ripete tre volte e l'altro una volta, i casi sono 4 (a seconda che il simbolo che si ripete una volta occupi una delle quattro caselle), moltiplicati poi per due perché dobbiamo considerare sia il caso in cui tale simbolo è V sia il caso in cui è F. Abbiamo quindi in totale 4 · 2 casi. Rappresentiamoli, utilizzando simboli qualsiasi per indicare i connettivi:

p	*q*	*p* * *q*	*p* ✰ *q*	*p* ♦ *q*	*p* ✿ *q*	*p* ❆ *q*	*p* ✠ *q*	*p* ☒ *q*	*p* ☯ *q*
V	V	V	F	F	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	F	F	V	V	V	V	F

Se i simboli V e F sono in uguale numero, cioè 2 per tipo, abbiamo altri 6 casi in cui basta semplicemente fare occupare a uno dei due simboli, per esempio V, le coppie di caselle 1 – 2, 1 – 3, 1 – 4, 2 – 3, 2 – 4, 3 – 4:

p	*q*	*p* ♉ *q*	*p* ⌂ *q*	*p* ❀ *q*	*p* ✪ *q*	*p* ⅄ *q*	*p* ⋏ *q*
V	V	V	V	V	F	F	F
V	F	V	F	F	V	V	F
F	V	F	V	F	V	F	V
F	F	F	F	V	F	V	V

Abbiamo perciò un totale di 16 diversi casi.

Considerando i risultati dell'esempio precedente possiamo dire quindi che esistono esattamente 16 diversi connettivi logici binari. Alcuni di essi li conosciamo già e li abbiamo già visti. Per quanto riguarda i rimanenti undici invece vediamo di effettuare una piccola indagine.

Definizione 4

Diciamo **tautologia** il connettivo la cui tabella di verità contiene solo il simbolo V.
Diciamo **contraddizione** il connettivo la cui tabella di verità contiene solo il simbolo F.

Abbiamo così nominato altri due connettivi. Notiamo anche che il *connettivo tautologico* è la negazione del *connettivo contraddittorio*; inoltre, come è evidente, possiamo suddividere i sedici connettivi in due classi, in modo che ciascuna ne contenga 8 e gli elementi di una classe risultino la negazione di quelli dell'altra. In particolare valgono le seguenti proprietà.

Teorema 1

I connettivi $\dot{\vee}$ e $\Leftrightarrow$ sono l'uno la negazione dell'altro.
Dimostrazione
Basta considerare le relative tabelle di verità.

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \dot{\vee} q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	V	V	V	F
F	F	V	V	F	V	V

Teorema 2 (Leggi di De Morgan)

Valgono le seguenti identità: I legge di De Morgan $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$; II legge di De Morgan $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
Dimostrazione
Consideriamo le seguenti tabelle di verità, in cui per semplicità con $p \boxtimes q$ abbiamo indicato $\neg p \vee \neg q$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \boxtimes q$
V	V	F	F	V	F
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	F	V

È facile notare che le ultime due colonne sono l'una la negazione dell'altra; inoltre l'ultima colonna si ottiene come risultato della disgiunzione inclusiva degli enunciati delle colonne 3 e 4. Abbiamo così provato la I legge. La dimostrazione della II legge è lasciata per esercizio.

Teorema 3

Ogni connettivo binario può essere espresso con il solo uso dei connettivi $\neg$ e $\vee$.
Dimostrazione
Consideriamo le tabelle di verità dei cinque connettivi *fondamentali*

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \dot{\vee} q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	F
F	F	F	F	F	V	V

- Grazie alla I legge di De Morgan abbiamo $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$, quindi possiamo esprimere la congiunzione mediante disgiunzione e negazione nel seguente modo: $p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$
- Interpretando la disgiunzione esclusiva da un punto di vista insiemistico, possiamo dire che un elemento appartiene a uno solo dei due insiemi e scriviamo quindi: $p \dot{\vee} q \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
- Visto che possiamo trasformare $\wedge$ in $\vee$ e $\neg$, otteniamo l'equivalenza cercata: $p \dot{\vee} q \equiv \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(p \vee \neg q)$

- Per quel che riguarda l'implicazione materiale è facile vedere che si ha: $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

- Infine per $p \Leftrightarrow q$, dato che sappiamo (teorema 1) che $p \Leftrightarrow q \equiv \neg (p \dot{\vee} q)$, sfruttando l'espressione della disgiunzione esclusiva mediante $\vee$ e $\neg$, si ha: $p \Leftrightarrow q \equiv \neg (\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(p \vee \neg q)) \equiv (\neg p \vee q) \vee \neg(p \vee \neg q)$.

Esempio 8

Da un punto di vista per così dire *pratico* cosa significa che, per esempio, $p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$? Supponiamo di avere enunciato la seguente frase: *Domani comprerò un libro e una scheda telefonica*. Se indichiamo con *p: Domani comprerò un libro* e con *q: Domani comprerò una scheda telefonica*, la nostra affermazione simbolicamente si indica con $p \wedge q$. Vista l'equivalenza delle proposizioni composte, possiamo allora enunciare la precedente frase nel modo seguente: *Non è vero che domani non comprerò un libro o non comprerò una scheda*. Naturalmente nella lingua italiana preferiamo usare la prima forma.

Abbiamo in qualche modo *etichettato* solo alcune delle sedici tabelle di verità; di seguito proponiamo le altre. (Lasciamo le verifiche per esercizio). T = Tautologia e C = Contraddizione

p	q	T	C	$p \wedge q$	$\neg(p \Rightarrow q)$	$\neg p \wedge q$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$p \Rightarrow q$	$p \vee \neg q$	$p \vee q$
V	V	V	F	V	F	F	F	F	V	V	V
V	F	V	F	F	V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	F	V	F	V	V	F	V
F	F	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F

$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$	$p \Leftrightarrow q$	$p \dot{\vee} q$	$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$	$(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	F
F	V	F	V	F	V
F	F	V	F	V	V

Esempio 9

Se invece di due proposizioni ne avessimo tre, quante diverse possibilità potrebbero presentarsi? Non è difficile capire che basta considerare i quattro casi che descrivono i connettivi binari e associare a ognuno di essi prima la possibilità che il terzo enunciato sia vero, poi che sia falso, per un totale quindi di $4 \cdot 2 = 8$ casi. Vediamo quindi una generica tabella di verità.

p	q	r
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	V
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Vediamo un esempio più complesso.

Esempio 10

Vogliamo costruire la tabella di verità della proposizione composta $p \Rightarrow \neg q \vee r$. La prima cosa che dobbiamo stabilire è come *leggere* la formula: ciò perché potremmo ottenere risultati diversi, a seconda dell'ordine in cui effettuiamo le operazioni e quindi le espressioni $(p \Rightarrow \neg q) \vee r$ e $p \Rightarrow (\neg q \vee r)$ potrebbero avere diverse tabelle di verità. Ricordiamo però che quando non usiamo le parentesi eseguiamo le operazioni così come le *incontriamo*. Vediamo pertanto la tabella riferita alla prima modalità:

p	q	r	$\neg q$	$p \Rightarrow \neg q$	$(p \Rightarrow \neg q) \vee r$
V	V	V	F	F	V
V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	F	V	V	V

Vediamo adesso la tabella riferita all'altra espressione:

p	q	r	$\neg q$	$\neg q \vee r$	$p \Rightarrow (\neg q \vee r)$
V	V	V	F	V	V
V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	V

Dato che abbiamo ottenuto gli stessi risultati, concludiamo che in questo caso le parentesi non sono necessarie. Un caso nel quale le parentesi sono necessarie è invece $(p \Rightarrow q)\ \dot{\vee}\ r \neq p \Rightarrow (\ q\ \dot{\vee}\ r)$. Come si nota facilmente considerando che per p = F e $q = r$ = V, la prima espressione è falsa, la seconda è vera.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Costruire la tabella di verità di $p \wedge q \Rightarrow \neg r$.

p	q	r	$p \wedge q$	$\neg r$	$p \wedge q \Rightarrow \neg r$
V	V	V	V	F	F
V	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	F	F	V
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	F	F	V	V

Quindi tenuto conto della precedente tabella, possiamo dire che la proposizione "*Se* 2 *e* 4 *sono numeri primi allora* 7 *non è un numero primo*" è vera, perché formata dalle proposizioni p: "*2 è un numero primo*"; q: "*4 è un numero primo*"; r: "*7 è un numero primo*". Esse sono rispettivamente vera, falsa, vera; pertanto dobbiamo considerare la seconda riga della tabella il cui valore finale è appunto vero.

Costruire le tabelle di verità delle seguenti proposizioni

Livello 1

1. $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ $\quad$ $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$ $\quad$ $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
2. $(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ $\quad$ $\neg(p \Rightarrow q)$ $\quad$ $\neg p \wedge q$
3. $\neg p \wedge \neg q$ $\quad$ $\neg p \vee \neg q$ $\quad$ $p \vee \neg q$

Tenuto conto delle precedenti tabelle di verità determinare il valore di verità dei seguenti enunciati composti

4. *3 e 17 sono numeri primi o 3 è primo e 17 no*; *Un quadrato e un rettangolo sono entrambi rombi o un quadrato è rombo e un rettangolo no* [V; F]
5. *Non è vero che se Roma è capitale d'Italia allora Parigi è capitale del Belgio*; 1/3 *non è un numero periodico e* 1/4 *lo è* [F; F]
6. *Né* 128 *né* 256 *sono quadrati perfetti; Un triangolo isoscele ha due angoli uguali o un angolo retto* [F; V]

Costruire le tabelle di verità dei seguenti enunciati composti

7. $(p \wedge q) \wedge r$ $\quad$ $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ $\quad$ $p \vee (q \vee r)$
8. $p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$ $\quad$ $(p \dot{\vee} q) \dot{\vee} r$ $\quad$ $(p \wedge q) \vee r$
9. $p \Rightarrow (\neg q \Leftrightarrow r)$ $\quad$ $(\neg p \Leftrightarrow \neg q) \vee \neg r$ $\quad$ $\neg p \wedge (q \dot{\vee} r)$

Livello 2

Tenuto conto delle precedenti tabelle di verità determinare il valore di verità dei seguenti enunciati composti

10. 12, 13 *e* 14 *sono tutti numeri primi*; 23, 41 *o* 72 *sono dispari* [F; V]
11. *Uno solo fra* 1/7, 1/8 *e* 1/9 *sono numeri periodici semplici*; 8 *e* 27 *sono cubi perfetti o* 1024 *non è un quadrato perfetto* [F; V]
12. *Se un esagono ha* 9 *diagonali allora solo se* 2 *non è primo* 3 *lo è*; *Solo se* $2^{10} > 10^3$ *allora* $3^{10} > 10^4$ *o* $4^{10} < 10^5$ [V; V]
13. Quante diverse righe ha la tabella di verità di un enunciato composto da 4 proposizioni? [16]
14. Consideriamo tutte le tabelle di verità degli enunciati composti da 3 proposizioni logiche; quante sono quelle diverse tra loro? [2^8]
15. Sapendo che l'enunciato $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ è vero, quali fra i seguenti enunciati sono veri? [Tutti]
    A) $(p \wedge \neg q) \wedge r$ $\quad$ B) $(\neg p \wedge \neg q) \wedge r$ $\quad$ C) $(p \wedge \neg q) \wedge \neg r$ $\quad$ D) $(\neg p \wedge q) \wedge \neg r$

Livello 3

16. Quante diverse righe ha la tabella di verità di un enunciato composto da n proposizioni? [2^n]

Intervallo matematico

Nella storia delle matematiche la logica spesso è servita ad abituare a un uso *meditato* delle parole nell'enunciazione di proprietà; tuttavia questa precisione di linguaggio ha causato sovente anche seri problemi per il fatto di aver messo in difficoltà gli studiosi, e non solo loro. Infatti l'uso di alcune parole o frasi talvolta può provocare equivoci: si pensi alle cosiddette **antinomie logiche o contraddizioni**, più comunemente si parla di **paradossi**, che però hanno il seguente significato etimologico di *contrario alle opinioni comuni* e quindi non sono impossibili, ma semplicemente "strani". È paradossale pensare che una bella ragazza faccia il camionista di mestiere, ma non è un fatto impossibile.
Vediamo alcuni esempi storici.

Antinomia del mentitore

È stata enunciata in vari modi nei secoli, quella originale è la seguente

Io affermo: Io mento! Quel che dico è vero o falso?

Nella logica classica bimodale vale il principio del terzo escluso: ogni enunciato logico è vero o falso, non vi sono *terze vie*. Quindi se questa affermazione fosse vera, sarebbe vero che mento, quindi l'affermazione sarebbe falsa; d'altro canto se l'affermazione fosse falsa, io starei mentendo, quindi in realtà quel che dico dovrebbe essere vero. Come si vede, qualunque scelta è *sbagliata*. Non approfondiamo questo genere di ragionamenti, diciamo solo che una vera e propria *soluzione* non è stata trovata, salvo il fatto di considerare che la frase detta, pur essendo pronunciabile non è un enunciato logico, quindi non ha alcun valore di verità.
Altre enunciazioni dello stesso paradosso sono: *Tutti i cretesi mentono*, affermazione fatta da un cretese, tale Epimenide; *Questa frase è falsa*; o ancora, su un lato di un cartoncino è scritto: *la frase scritta dall'altro lato è falsa*; sull'altro lato è invece scritto: *la frase scritta dall'altro lato è vera*.
Vediamo altri paradossi, sempre di tipo linguistico, che non commentiamo.

Paradosso del barbiere

In un villaggio vi è un solo barbiere che ha appeso al suo negozio il seguente cartello:

Io rado solo tutti gli abitanti del villaggio che non si radono da soli.

Si chiede: chi fa la barba al barbiere? Ancora una volta, se supponiamo che il barbiere si rada da sé, incapperemo nella contraddizione di ciò che egli ha scritto nel cartello; d'altro canto se non si rade da solo dovrebbe essere uno di quelli che vengono rasi da lui stesso.

Paradosso del coccodrillo

Un bambino cadde nel Nilo e fu subito afferrato da un coccodrillo. La madre del bimbo implorò la bestia di non mangiare il bambino. Il coccodrillo rispose che avrebbe lasciato libero il bambino solo se la madre avesse indovinato cosa egli avrebbe fatto del bambino, diversamente lo avrebbe mangiato. La madre disse: *Tu mangerai il mio bambino*. Rispose il coccodrillo: *Visto quello che hai detto non posso restituirti tuo figlio, perché se lo facessi renderei falso ciò che hai detto. Quindi io dovrò mangiare tuo figlio*. Replicò la madre: *È esattamente vero il contrario, infatti se mangerai il mio bambino io avrò detto la verità, quindi devi restituirmi mio figlio*. Secondo voi chi ha ragione e perché?

Paradosso dell'avvocato

Il filosofo Protagora diede lezioni di diritto a Euatlo. Questi promise solennemente che lo avrebbe pagato solo quando avrebbe vinto la sua prima causa. Euatlo però non praticò la professione di avvocato, perciò non pagò Protagora. Il filosofo allora citò Euatlo in giudizio chiedendogli il pagamento delle lezioni. Davanti alla corte Protagora disse che se Euatlo avesse perso quella causa, ciò avrebbe significato che aveva torto, perciò doveva pagare. Del resto se il giudice avesse dato ragione a Euatlo, questi avrebbe vinto la sua prima causa, quindi Protagora doveva essere pagato in ogni caso. Replicò Euatlo, dicendo che invece non doveva pagare. Infatti, se la corte gli avesse dato ragione, egli non doveva pagare, ma se gli avesse dato torto non avrebbe vinto la sua prima causa e quindi analogamente non doveva pagare. Secondo voi chi ha ragione e perché?

Paradosso dell'esame imprevisto o dell'impiccagione imprevista

Un giorno il professore entra in classe annunciando: *Un giorno della settimana prossima faremo un compito imprevisto, nel senso che non vi dirò prima quando lo faremo*. Uno degli studenti rassicurò i compagni con questo ragionamento: se fino a venerdì non ci ha assegnato il compito non potrà più svolgerlo, perché sabato avremmo capito che quello è il giorno. Ma anche se non lo ha assegnato giovedì non potrà più assegnarlo, dato che abbiamo appena visto che sabato non può assegnarlo, quindi capiremmo che era venerdì il giorno prestabilito. Questo ragionamento possiamo farlo per ogni giorno della settimana, quindi l'esame non potrà svolgersi. Tutti i ragazzi, molto sollevati, concordarono con il ragionamento del compagno, ma il mercoledì seguente l'insegnante entrò in classe assegnando un compito che a questo punto veramente nessuno aveva previsto! Cosa ne pensate del ragionamento del ragazzo e del comportamento dell'insegnante?

Paradosso di Sancho Panza.

Nel libro *Don Chisciotte* di Miguel Cervantes de Saavedra, si racconta dello scudiero Sancho Panza divenuto governatore dell'isola di Barataria, in cui vige la legge secondo la quale ognuno che vuole entrare nell'isola deve spiegarne le ragioni: se dice la verità deve essere lasciato libero, diversamente sarà impiccato. Un visitatore alla domanda relativa alle ragioni della sua visita risponde: *Sono venuto per essere impiccato*. Come deve comportarsi il povero Sancho?

Paradosso Autologico – Eterologico. Ci sono parole che sono *autodescrittive*, per esempio la parola *italiana* è appunto una parola della lingua italiana, non così è la parola *inglese*. Ebbene, chiameremo *autologica* una parola come *italiana*, cioè che descrive sé stessa, chiameremo invece *eterologica* una parola come *inglese* che non descrive sé stessa. La parola *autologica* è evidentemente *autologica* perché descrive sé stessa. Ma di che tipo è la parola *eterologica*? A voi la risposta.

Il concetto di dimostrazione

Strettamente parlando, tutte le nostre conoscenze al di fuori delle matematiche […] *consistono di congetture.* […] *Confermiamo le nostre conoscenze matematiche mediante ragionamenti dimostrativi, ma supportiamo le nostre congetture mediante ragionamenti plausibili.* […] *La differenza fra i due tipi di ragionamento è fondamentale. Il ragionamento dimostrativo è sicuro, oltre ogni controversia e definitivo. Il ragionamento plausibile è azzardoso, controverso e provvisorio.* *George Polya*

Il problema

Se conosciamo la validità di uno o più fatti, come possiamo dedurre da essi la validità di altri?

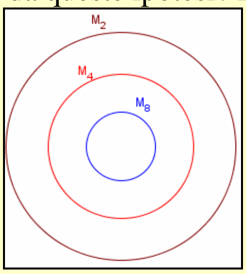
Adesso affrontiamo il problema più delicato delle matematiche ossia quello della *dimostrazione*. Sappiamo che proprio questa è la peculiarità che differenzia le matematiche dalle altre scienze, cioè che ogni fatto dimostrato in matematica diviene *assoluto*. Nelle matematiche i metodi dimostrativi sono molti, anche se erroneamente si crede che l'unico metodo dimostrativo sia quello *deduttivo*. In seguito considereremo altri strumenti dimostrativi ma, per il momento, consideriamo qualche metodo che utilizza quanto abbiamo visto finora.

Definizione 5

Diciamo **schema deduttivo** uno schema che a partire dalla verità di alcuni fatti noti, chiamati **premesse**, permette di stabilire la verità di uno o più altri fatti, detti **conclusione**.

Esempio 11

Supponiamo di sapere che sono veri i seguenti fatti: Tutti i multipli di 8 sono multipli di 4; Tutti i multipli di 4 sono multipli di 2. Che cosa possiamo dedurre da queste ipotesi? Rappresentiamo graficamente.



Interpretiamo dal punto di vista insiemistico le due affermazioni: L'insieme M_8 dei multipli di 8 è un sottoinsieme di M_4 (multipli di 4), il quale è a sua volta sottoinsieme dell'insieme dei multipli di 2 (M_2). Possiamo dedurre: *Tutti i multipli di* 8 *sono multipli di* 2.

Quanto mostrato nell'esempio precedente è vero in generale, possiamo cioè dire che è vera la seguente deduzione: $(x \in Y, \forall x \in X) \wedge (x \in Z, \forall x \in Y) \Rightarrow (x \in Z, \forall x \in X)$. Abbiamo già parlato dei giudizi aristotelici e quelli che stiamo considerando in questo caso sono tre giudizi universali affermativi, relativi a tre diverse proprietà, con un termine medio, che in questo caso è l'insieme Y. In effetti lo stesso Aristotele aveva considerato schemi deduttivi di questo genere, che aveva battezzato *sillogismi*, distinguendo quattro diverse figure (che presenteremo alla fine dell'unità, nell'approfondimento).

Che cosa significa?

Sillogismo Deriva da una parola greca che significa ragionare in modo ordinato. Si noti che il suffisso logismo deriva da *logos* che è la radice della parola logica e che fra i suoi vari significati ha anche quello di pensiero, ragionamento.

Definizione 6

Diciamo **sillogismo** uno schema verificante le seguenti proprietà:
- le premesse e la conclusione sono giudizi aristotelici che legano fra loro tre proposizioni;
- le premesse hanno una proposizione in comune;
- la conclusione è relativa alle due proposizioni non comuni.

Se il sillogismo è uno schema deduttivo allora esso si dice **perfetto**.

Dedurre significa che da certe premesse si ottiene sempre una stessa conclusione. Vediamo ora tre schemi che si possono ottenere considerando le tabelle di verità dei connettivi binari. Se consideriamo la tabella di verità della disgiunzione inclusiva, ci accorgiamo che la proposizione composta è vera purché almeno una delle due proposizioni componenti lo sia. Se supponiamo quindi che la proposizione composta sia vera e che una delle due componenti sia falsa, non possiamo fare altro che dedurre che l'altra proposizione è vera.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Esempio 12

Sappiamo che ogni elemento dell'insieme $A = \{2, 3, 5, 7, 10, 13, 15\}$ è primo o divisibile per 5; pertanto se scegliamo a caso un numero $n \in A$ e vediamo che non è un numero primo, siamo sicuri che è divisibile per 5.

Definizione 7

Diciamo **sillogismo disgiuntivo** uno schema deduttivo le cui premesse sono la disgiunzione inclusiva, di due proposizioni e la negazione di una delle due, la conclusione è l'altra proposizione.

Notazione 4

Un sillogismo disgiuntivo si indica in uno dei seguenti modi equivalenti: $\begin{array}{c} p \vee q \\ \underline{\neg p \quad} \\ q \end{array} \qquad \begin{array}{c} p \vee q \\ \underline{\neg q \quad} \\ p \end{array}$

Non possiamo dedurre niente se invece sappiamo che la disgiunzione inclusiva è vera e una delle due proposizioni è vera, né se sappiamo che la disgiunzione inclusiva è falsa e una delle due è falsa. Anzi, in quest'ultimo caso, la seconda informazione non è necessaria, perché se la disgiunzione inclusiva è falsa entrambe le proposizioni componenti devono essere false.

Esempio 13

Considerando sempre l'insieme $A = \{2, 3, 5, 7, 10, 13, 15\}$, se prendiamo un suo elemento a caso e vediamo che è un numero primo, non possiamo dedurre niente, né che è divisibile per 5 né che non lo è, dato che in A vi sono numeri primi sia divisibili per 5 (5), sia non divisibili per 5 (2, 3, 7, 13).

Vediamo quali deduzioni possiamo ottenere utilizzando la tabella di verità della congiunzione

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Esempio 14

Sappiamo che i quadrati sono quadrilateri equilateri ed equiangoli.

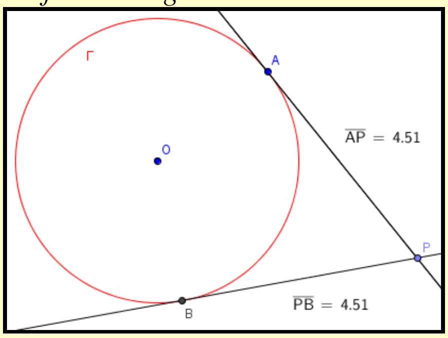
- Se sappiamo che Q è un quadrilatero non equilatero, possiamo dedurre che non è un quadrato.
- Se sappiamo che Q è equilatero, non possiamo dedurre che sia equiangolo, quindi che sia un quadrato.
- Sapendo che Q non è un quadrato, non possiamo dedurre che non è equilatero né che non è equiangolo, possiamo dedurre che non è *entrambe* le cose.

L'esempio precedente ci convince che, in generale, la congiunzione non *genera* schemi deduttivi. Due degli schemi più interessanti in logica derivano dalla tabella di verità dell'implicazione materiale

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Esempio 15

Sappiamo che è vero il seguente teorema: *Se da un punto P, esterno a una circonferenza Γ, tracciamo le tangenti a Γ, i segmenti di tangenza sono fra loro uguali*.



Con riferimento alla figura precedente, possiamo scrivere simbolicamente il teorema nella forma $p \Rightarrow q$, in cui p: PA e PB sono tangenti a Γ, e q: $\overline{PA} = \overline{PB}$.

Quali tipi di schemi deduttivi possiamo costruire? Enunciamo le possibili premesse: Il teorema è vero, quindi è vero che $p \Rightarrow q$. L'altra premessa può poi essere una delle seguenti quattro:

- la verità di p;
- la verità di q;
- la falsità di p;
- la falsità di q.

Quali possono essere le conseguenze? La verità o falsità di p o q, secondo le premesse. Vediamo quali di questi possibili schemi *funziona*, applicandoli al teorema dell'Esempio 15.

Esempio 16

Il primo schema possibile è il seguente: *Se da un punto P esterno a una circonferenza Γ, tracciamo le tangenti a Γ, i segmenti di tangenza sono fra loro uguali*. Dato che PA e PB sono tangenti a Γ allora $\overline{PA} = \overline{PB}$. Praticamente stiamo applicando il teorema.

Dato che il precedente schema funziona, non sarà valido quello la cui conclusione sarà $\overline{PA} \neq \overline{PB}$, che perciò non prendiamo in considerazione. Diamo invece un nome allo schema funzionante.

Definizione 8

Diciamo **modus ponens** uno schema deduttivo le cui premesse sono l'implicazione materiale di due proposizioni e l'antecedente, la conclusione è il conseguente.

Notazione 5

Il modus ponens si indica nel seguente modo: $\dfrac{\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \end{array}}{q}$

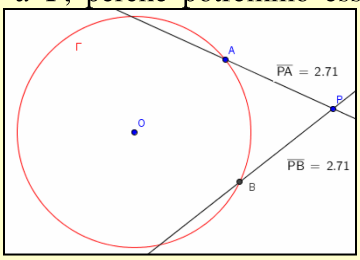
Non è invece valido lo schema $\dfrac{\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \end{array}}{p}$.

Esempio 17

Il secondo schema possibile è il seguente: *Se da un punto P, esterno a una circonferenza Γ, tracciamo le tangenti a Γ, i segmenti di tangenza sono fra loro uguali*; ***quindi*** *se* $\overline{PA} = \overline{PB}$ *allora PA e PB sono tangenti a Γ.*

Questa volta la deduzione non è corretta, come mostra la seguente figura, in cui *P* è un punto esterno a Γ, da cui abbiamo condotto due rette, non tangenti Γ, che però determinano segmenti *PA* e *PB* fra loro uguali.

Né sarebbe stata corretta la deduzione *PA e PB non sono tangenti a Γ*, perché potremmo essere nel caso illustrato dalla figura che accompagna l'Esempio 15.



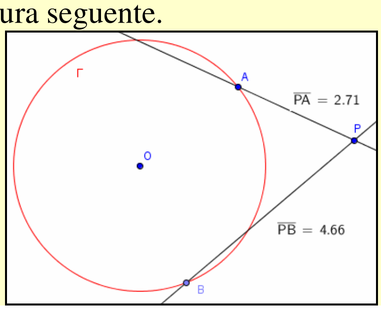
Viste le risultanze dell'esempio precedente, possiamo dire che **NON** sono schemi deduttivi i seguenti:

$$\dfrac{\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \end{array}}{p} \qquad \dfrac{\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \end{array}}{\neg p}$$

Passiamo a considerare il terzo schema.

Esempio 18

Possiamo dire che la deduzione: *Se da un punto P, esterno a una circonferenza Γ, tracciamo le tangenti a Γ, i segmenti di tangenza sono fra loro uguali;* ***quindi*** *se PA e PB non sono tangenti a Γ, allora* $\overline{PA} \neq \overline{PB}$, è corretta? Sempre considerando la figura dell'esempio precedente, possiamo dire che non lo è. Né sarebbe corretta la deduzione $\overline{PA} = \overline{PB}$, come mostra la figura seguente.



Non sono perciò schemi deduttivi i seguenti: $\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{\neg p \qquad} \\ \qquad q \end{array}$ né $\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{\neg p \qquad} \\ \quad \neg q \end{array}$.

Infine l'ultima possibilità.

Esempio 19

Possiamo dire che è vero che: *Se da un punto P, esterno a una circonferenza Γ, tracciamo le tangenti a Γ, i segmenti di tangenza sono fra loro uguali;* ***quindi*** *se* $\overline{PA} \neq \overline{PB}$ *allora PA e PB non sono tangenti a Γ*? Questa volta la deduzione è corretta, dato che se *PA* e *PB* fossero tangenti saremmo nelle ipotesi del modus ponens e quindi dovremmo concludere che $\overline{PA} = \overline{PB}$, contro la verità della seconda premessa di questo schema.

Definizione 9

Diciamo **modus tollens** uno schema deduttivo le cui premesse sono l'implicazione materiale di due proposizioni e la negazione del conseguente, la conclusione è la negazione dell'antecedente.

Notazione 6

Il modus tollens si indica nel seguente modo: $\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{\neg q \qquad} \\ \quad \neg p \end{array}$

Che cosa significa?

Modus ponens, abbreviazione di *Modus ponendo ponens*, significa semplicemente modo che afferma.
Modus tollens, significa semplicemente il modo che toglie la verità di una proposizione togliendo quella di un'altra. Entrambi gli schemi erano noti già dai tempi degli stoici (circa 300 a.C.), furono meglio studiati dai cosiddetti logici medioevali

Considerando i due nuovi schemi appena presentati, ci accorgiamo che essi stabiliscono delle condizioni che permettono di effettuare certe deduzioni. In particolare:

- il *modus ponens* è una condizione **sufficiente** ad assicurarci che se accade un certo fatto (***p***) ne deve conseguire un altro (***q***);
- il *modus tollens* invece stabilisce una condizione **necessaria**, senza la quale un certo fatto non può verificarsi.

Definizione 10

Diciamo che una data ipotesi è **condizione necessaria** per il verificarsi di una proprietà, se questa risulta falsa quando la detta ipotesi è falsa.

Definizione 11

Diciamo che una data ipotesi è **condizione sufficiente** a garantire che una certa proprietà sia vera, se questa risulta vera solo per il fatto che la detta ipotesi è vera.

Esempio 20

- Relativamente al teorema enunciato negli esempi precedenti, possiamo dire che esso può anche enunciarsi nel seguente modo, evidenziando la condizione *necessaria*: *Condizione necessaria affinché le rette r e s, condotte da un punto P esterno a una circonferenza Γ siano tangenti a Γ, è che i segmenti che hanno per estremi P e le intersezioni di r e s con Γ siano fra loro uguali*.

- La stessa condizione non è sufficiente, dato che abbiamo visto nell'Esempio 18 un caso in cui i segmenti di tangenza erano uguali, ma le rette che li determinavano non erano tangenti alla circonferenza.

Vediamo adesso un esempio di condizione *sufficiente*.

Esempio 21

Noi sappiamo che ogni quadrato è anche un rettangolo. Quindi possiamo dire: *Condizione sufficiente affinché un quadrilatero Q sia un rettangolo è che esso sia un quadrato.* La stessa condizione non è necessaria, poiché vi sono rettangoli che non sono quadrati.

Concludiamo con un esempio di condizione contemporaneamente *necessaria* e *sufficiente*.

Esempio 22

Il ben noto teorema di Pitagora è una condizione sia necessaria sia sufficiente, nel senso che è necessario che esso valga affinché il triangolo risulti rettangolo, perché un triangolo per cui il teorema non vale non è rettangolo. Ma è anche una condizione sufficiente, dato che ogni triangolo i cui lati verificano il teorema di Pitagora è un triangolo rettangolo. In questo caso quindi il teorema di Pitagora è una caratteristica dei triangoli rettangoli, perciò possiamo definire i triangoli rettangoli *come quelli che verificano il teorema di Pitagora*.

Se interpretiamo un teorema come un'implicazione materiale, possiamo costruire da esso altre tre proposizioni. Precisamente, da $p \Rightarrow q$, posso considerare $q \Rightarrow p$; $\neg p \Rightarrow \neg q$ oppure $\neg q \Rightarrow \neg p$.

Definizione 12

Data una certa proprietà P, quella che si ottiene scambiando fra loro ipotesi e tesi di P, si chiama **proprietà inversa** di P.

Definizione 13

Data una certa proprietà P, quella che si ottiene considerando come sua ipotesi la negazione dell'ipotesi di P e come sua tesi la negazione della tesi di P, si chiama **proprietà contraria** di P.

Definizione 14

Data una certa proprietà P, quella che si ottiene considerando come sua ipotesi la negazione della tesi di P e come sua tesi la negazione dell'ipotesi di P, si chiama **proprietà conversa** di P.

Vediamo qualche esempio.

Esempio 23

Consideriamo il teorema *Se* $x > 2$ *allora* $x^2 > 4$.

- L'inverso di questo teorema è *Se* $x^2 > 4$ *allora* $x > 2$, che in questo caso è una proprietà falsa, perché per esempio $(-3)^2 > 4$ ma $-3 < 2$. Se avessimo aggiunto l'ulteriore condizione che x sia positivo invece la proprietà inversa sarebbe vera, quindi un teorema. Ciò accade perché la proprietà iniziale in questo caso è condizione necessaria e sufficiente.
- La proprietà contraria è *Se* $x \le 2$ *allora* $x^2 \le 4$, che non è vera. Perché per esempio $-3 < 2$ ma $(-3)^2 > 4$.
- La proprietà conversa è *Se* $x^2 \le 4$ *allora* $x \le 2$, anche questa vera.

Consideriamo ora il teorema *Se un triangolo è equilatero allora è isoscele*.

- La sua proprietà inversa è *Se un triangolo è isoscele allora è equilatero*, che è falsa e non è perciò un teorema.
- La proprietà contraria è *Se un triangolo non è equilatero allora non è isoscele*, che non è vera.

- La proprietà conversa è *Se un triangolo non è isoscele allora non è equilatero*, vera.

Dagli esempi abbiamo visto che la proprietà conversa di un teorema è un teorema, mentre la proprietà contraria non lo è. E ciò accade sempre. Infatti nel caso della proprietà conversa, le proposizioni $p \Rightarrow q$ e $\neg q \Rightarrow \neg p$ sono fra loro *equiveridiche*, cioè hanno la stessa tabella di verità, come si vede di seguito, mentre le altre due proposizioni non lo sono.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\neg p \Rightarrow \neg q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	F	F

Del resto dire che $p \Rightarrow q$ equivale a dire che la condizione q è necessaria per la verità di p, quindi negando q viene a cadere la verità di p. Nel caso di quella contraria invece, ovviamente essa essendo appunto *contraria* deve comportarsi al *contrario*, quindi se la proprietà è vera essa sarà falsa e viceversa. Invece la proprietà inversa talvolta può essere vera, anzi ciò accade solo se la proprietà è una condizione necessaria e sufficiente. Grazie alla proprietà contraria di un teorema e alla validità del principio del terzo escluso, in alcuni teoremi si usa la tecnica dimostrativa consistente nel cosiddetto **procedimento per assurdo** (*reductio ad absurdum*). In questi casi si nega la verità di ciò che si vuole provare, cioè la tesi, e da ciò si deduce la falsità dell'ipotesi (cioè si prova il teorema contrario) oppure di un'altra proprietà già acquisita (teorema o postulato). Non potendo però contestare un fatto vero, si conclude dicendo che se abbiamo provato una cosa falsa vuol solo dire che siamo partiti da un fatto falso. Quindi non è vero che la tesi da provare è falsa, ma *una doppia negazione afferma*: pertanto la tesi da provare non è vero che non è vera, cioè è *vera*.

Esempio 24

Un famoso teorema in cui viene applicata la dimostrazione per assurdo è quello che dice *Se due rette tagliate da una trasversale formano almeno una coppia di angoli alterni interni uguali, le rette sono fra loro parallele.*
Si suppone per assurdo che la tesi sia falsa, cioè che non sia vero che le rette sono parallele e si costruisce poi un discorso corretto nel quale si conclude che i detti angoli non sono uguali. Dato che non è stato commesso nessun errore, vuol dire che il *vizio* è stato commesso in partenza, cioè quando si è supposto che le rette non fossero parallele.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Scegliamo un elemento a caso dall'insieme $A = \{2, 3, 6, 8, 12, 15, 18, 20\}$ *i cui elementi sono multipli di* 2 *o di* 3. *Se l'elemento estratto non è divisibile per* 2, *cosa possiamo dire su di esso*? Dato che gli elementi di A sono o solo multipli di 2 ({2, 8, 20}) o solo multipli di 3 ({3, 15}) o multipli di 2 e di 3 ({6, 12, 18}), possiamo dedurre che l'elemento estratto è uno dell'insieme ({3, 15}).

***Livello* 1**

1. Scegliamo a caso un elemento a dall'insieme $A = \{1, 64, 125, 729\}$; sapendo che l'elemento scelto è un cubo perfetto ma non un quadrato perfetto, cosa possiamo dire su a? [$a = 125$]
2. Scegliamo a caso un elemento b dall'insieme $B = \{3, 10, 15, 20\}$; sapendo che l'elemento scelto è somma di numeri interi consecutivi tutti dispari, che cosa possiamo dire di b?
[$b = 15$ ($b = 3 + 5 + 7$), oppure $b = 20$ ($b = 9 + 11$)]
3. Scegliamo a caso un elemento c dall'insieme $C = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\right\}$; sapendo che l'elemento scelto è una frazione che genera un numero periodico semplice, chi è c? [1/3]
4. Scegliamo un elemento d a caso dall'insieme $D = \{12, 18, 24, 48\}$, sapendo che l'elemento scelto è un multiplo di 6 ma non di 8, cosa possiamo dire su d? [$d \in \{12, 18\}$]
5. Scegliamo un elemento e a caso dall'insieme E = {triangolo rettangolo, triangolo isoscele, triangolo equilatero, triangolo scaleno}; sapendo che l'elemento scelto è un triangolo acutangolo, cosa possiamo dire su e? [e non è un triangolo rettangolo]
6. Scegliamo un elemento f a caso dall'insieme F = {(triangolo di cateti 3, 4), (triangolo di cateti 5, 12), (triangolo di cateti 8, 15), (triangolo di cateti 6, 8)}; sapendo che l'elemento scelto è un triangolo rettangolo la cui area e il cui perimetro sono rappresentati dallo stesso numero, cosa possiamo dire su f?
[$f \in$ {(triangolo di cateti 5, 12), (triangolo di cateti 6, 8)}]
7. Scegliamo un elemento g a caso dall'insieme G = {tetraedro, esaedro, ottaedro, dodecaedro, icosaedro}; sapendo che l'elemento scelto è un poliedro regolare le cui facce sono tutti esagoni regolari, cosa possiamo dire su g? [g non esiste]

Lavoriamo insieme

Date le proposizioni p: Matteo è nato in Brasile e *q: Matteo è nato a Rio de Janeiro*.

- *Costruire con esse lo schema deduttivo modus ponens*. Se Matteo è nato in Brasile è nato a Rio de Janeiro, **e** Matteo è nato in Brasile; **quindi** Matteo è nato a Rio de Janeiro.
- *Con le stesse proposizioni costruire il modus tollens*. Se Matteo è nato in Brasile è nato a Rio de Janeiro, **ma** Matteo non è nato a Rio de Janeiro; **quindi** Matteo non è nato in Brasile.
- *Sostituiamo la proposizione q con* q': *Matteo vive in Francia; insieme con p costruire il sillogismo disgiuntivo*. Matteo è nato in Brasile o vive in Francia, **ma** Matteo non è nato in Brasile; **quindi** Matteo vive in Francia. Oppure Matteo è nato in Brasile o vive in Francia, **ma** Matteo non vive in Francia; **quindi** Matteo è nato in Brasile.

Utilizzando le proposizioni p e q seguenti costruire gli schemi deduttivi Modus ponens, Modus tollens

***Livello* 2**

8. *p:* Elena resta in casa; *q:* Elena legge un libro giallo.
9. *p:* Caterina va in vacanza; *q:* Caterina va in montagna.
10. *p:* Amalia va in campagna; *q:* Amalia raccoglie margherite.
11. *p:* Tommaso gioca a calcio; *q:* Tommaso indossa la maglia numero 4.

12. *p:* Ilaria esce il sabato sera; *q:* Ilaria va in discoteca.
13. *p:* Marco ascolta della musica; *q:* Marco ascolta rock.
14. *p:* Giuseppe va al cinema; *q:* Giuseppe vede un film d'avventura.
15. *p:* Lucia pratica sport; *q:* Lucia gioca a tennis.
16. *p:* Carlotta suona il violino; *q:* Carlotta suona il contrabbasso.
17. *p:* Aurelia ha due figli maschi; *q:* Aurelia ha due gemelli.
18. *p:* Il numero n è multiplo di 4; *q:* Il numero n non è multiplo di 6.
19. *p:* Il numero x è maggiore di 15; *q:* Il numero x è minore di 70.
20. *p:* Il poligono P ha più di dieci lati; *q:* Il poligono P ha meno di venti angoli interni.
21. *p:* Il poliedro S ha almeno 6 facce; *q:* Il poliedro S ha al più dodici vertici.
22. *p:* La media aritmetica di x e y è pari; *q:* La media geometrica di x e y è dispari.

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito tratto da *Quiz, tranelli e rompicapi* di G. Summers, Edizioni Armenia.
Anna, Bianca e Claudia vanno spesso a cena fuori. Sappiamo che 1) *ognuna ordina caffè o tè dopo cena;*2) *se Anna ordina caffè, Bianca ordina quello che ordina Claudia;*3) *se Bianca ordina caffè, Anna ordina quello che non ordina Claudia;*4) *se Claudia ordina tè, Anna ordina quello che ordina Bianca. Chi ordina sempre la stessa bevanda dopo cena*?
Per risolvere questioni di questo genere risulta utile costruire una tabella a doppia entrata che cerchiamo di completare sulla base delle informazioni fornite. Dato che però ciascuna delle informazioni, esclusa la prima, è di tipo condizionale, dobbiamo considerare tutte le diverse possibilità.
Così supponendo che Anna ordini caffè, la tabella relativa, sulla base delle informazioni 2 e 3 sarà la seguente:

Nome\Bevanda	Caffè	Tè
Anna	Sì	No
Bianca	No	Sì
Claudia	No	Sì

Infatti Bianca non potrebbe ordinare caffè perché allora per la 2 anche Claudia dovrebbe ordinare caffè, ma per la 3 Claudia dovrebbe ordinare qualcosa di diverso da Anna. Questa tabella è però in contraddizione con la 4, perché, dato che Claudia ordina tè Anna e Bianca dovrebbe ordinare la stessa cosa, fatto che non è. Quindi non è possibile che Anna ordini caffè. Costruiamo allora la tabella relativa all'ipotesi: Anna ordina tè.

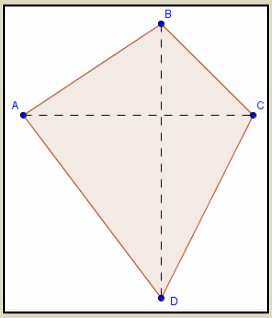
Nome\Bevanda	Caffè	Tè
Anna	No	Sì
Bianca	Sì\No	Sì\No
Claudia	No\Sì	Sì\No

In questo caso tutto *funziona*, anche se non si riesce a stabilire ciò che hanno ordinato Bianca e Claudia, ciò significa che esse non ordinano sempre la stessa bevanda, mentre Anna lo fa, cioè ordina sempre tè.

Livello 3

23. *A, B, C, D* ed *E* sono cinque ragazze che hanno un doppio nome di battesimo. Sappiamo che: uno dei nomi di quattro di loro è Maria, di tre è Rosa, di due Anna e di una Grazia; o *A* e *B* si chiamano entrambe Anna oppure *C* e *D* si chiamano entrambe Anna; *B* e *C* si chiamano entrambe Rosa o nessuna delle due si chiama Rosa; *D* ed *E* non si chiamano entrambe Maria. Chi delle cinque si chiama Grazia? *Tratto da Summers op.cit.* [B]
24. Con riferimento al precedente quesito cambia la risposta se aggiungiamo l'ulteriore opzione che non ci sono due con i due nomi uguali? [Sì, il caso diventa impossibile]
25. *A*, *B* e *C* ogni giorno fanno colazione in uno stesso bar ordinando ciascuno un cappuccino o (*aut*) un cornetto. Sappiamo che: se *A* ordina cappuccino allora *B* ordina un cornetto; uno solo fra *A* e *C* ordinano un cappuccino; *B* e *C* non ordinano entrambi un cornetto. Chi dei tre non ordina ogni giorno sempre la stessa cosa? [B]

Lavoriamo insieme

Consideriamo i seguenti fatti: p: Le diagonali di un quadrilatero sono perpendicolari; q: Il quadrilatero è un rombo. Ci chiediamo, la condizione p è necessaria, sufficiente o necessaria e sufficiente (cioè equivalente a q) per il verificarsi di q? Che cosa significa *condizione necessaria* per il verificarsi di un fatto? Che se essa non accade allora non accade neanche il fatto; per esempio, è necessario essere maggiorenni per poter conseguire la patente automobilistica in Italia. È necessario che le diagonali di un quadrilatero siano perpendicolari perché il quadrilatero sia un rombo? Cioè esistono rombi che non hanno le diagonali perpendicolari? Certamente no. Quindi possiamo dire che: *Condizione necessaria affinché un quadrilatero sia un rombo è che le sue diagonali siano perpendicolari*. Che cosa significa invece *condizione sufficiente* ad assicurarci che un dato fatto accade? Che dalla sola conoscenza della verità della condizione possiamo dedurre la verità del fatto; per esempio, se sappiamo che Jacqueline ha conseguito la patente automobilistica possiamo dedurre che è maggiorenne, non possiamo però dire se ha 18 anni o 32. Perciò se sappiamo che un dato quadrilatero ha le diagonali perpendicolari possiamo dire che è sicuramente un rombo? La risposta è negativa, come testimoniato dalla figura a lato. 

Se la condizione data fosse stata anche sufficiente avremmo potuto dire che era condizione necessaria e sufficiente, ossia che i due fatti erano equivalenti, quindi potevamo usare uno dei due fatti come *definizione* dell'oggetto rombo. Per esempio, nell'insieme dei triangoli, avere gli angoli della stessa misura è equivalente ad avere i lati della stessa misura; pertanto *Condizione necessaria e sufficiente affinché un triangolo sia equilatero è che sia equiangolo*.

***Stabilire se, nei seguenti esercizi, la proposizione p è necessaria, sufficiente o necessaria e sufficiente per il verificarsi della proprietà q.* [*Nelle risposte CN = Condizione Necessaria, CS = Condizione Sufficiente, CNS = Condizione necessaria e sufficiente*]**

Livello 2

26. *p:* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; *q:* $a = c \wedge b = d$. $(b, d \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$; *p:* $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=1$; *q:* $a = d \wedge b = c$. $(b, d \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$ [CN ; CN]
27. *p:* due rette tagliate da una trasversale sono parallele; *q:* due rette tagliate da una trasversale formano coppie di angoli alterni fra loro uguali. [CNS]
28. *p:* angoli opposti al vertice; *q:* angoli uguali. [CS]
29. *p:* rette formanti una coppia di angoli adiacenti uguali; *q:* rette perpendicolari. [CNS]
30. *p:* somma di tre angoli uguale a un angolo piatto; *q:* tre angoli costituiscono gli angoli interni di un triangolo. [CNS]
31. *p:* quadrilatero equiangolo; *q:* quadrilatero con le diagonali uguali. [CS]
32. *p:* punto appartenente alla bisettrice di un angolo; *q:* punto equidistante dai lati dell'angolo. [CNS]
33. *p:* numero multiplo di 18; *q:* multiplo di 9. [CS]
34. *p: quadrilatero con le diagonali che si dividono scambievolmente a metà; q: parallelogramma.* [CS]
35. *p:* numero multiplo di 12; *q:* numero multiplo di 60. [CN]
36. *p:* numero primo maggiore di 2; *q:* numero dispari. [CS]

Livello 3

37. *p:* simmetria assiale; *q:* isometria ; *p:* isometria; *q:* traslazione [CS ; CN]
38. *p:* affinità; *q:* equiestensione ; *p:* omotetia; *q:* similitudine [CS ; CS]
39. *p:* relazione che non verifica la proprietà simmetrica; *q:* relazione di ordinamento [CN]
40. *p:* non vale la proprietà riflessiva; *q:* vale la proprietà antiriflessiva [CN]
41. *p:* relazione di equivalenza; *q:* relazione che verifica la proprietà transitiva [CS]

42. *p*: $A \subset B$; *q*: $A \cup B = B$; *p*: $A \subseteq B$; *q*: $A \cup B = B$ [CS ; CNS]

43. *p*: $a < 0 \wedge b > 0$; *q*: $a \cdot b < 0$ $(a, b \in \mathbb{R})$; *p*: $a \cdot b > 0$; *q*: $a > 0 \wedge b > 0$. $(a, b \in \mathbb{R})$ [CS ; CN]

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato ai giochi matematici AHSME del 1957.
Dato il teorema "Se due angoli di un triangolo sono uguali, il triangolo è isoscele", quali fra le seguenti affermazioni sono logicamente equivalenti all'enunciato? A) *Se due angoli di un triangolo non sono uguali, il triangolo non è isoscele.* B) *Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali.* C) *Se un triangolo non è isoscele allora non ha due angoli uguali.* D) *Condizione necessaria affinché due angoli di un triangolo siano uguali è che il triangolo sia isoscele.*
Indichiamo con $p \Rightarrow q$, l'enunciato, in cui *p: Due angoli di un triangolo sono uguali* e *q: Il triangolo è isoscele*. Allora la proposizione di cui all'opzione A) può indicarsi con $\neg p \Rightarrow \neg q$, cioè rappresenta la proposizione contraria di quella data; l'affermazione B) può anche enunciarsi nel seguente modo: *Se un triangolo è isoscele allora ha due angoli uguali*, cioè simbolicamente, $q \Rightarrow p$, ossia è la proposizione inversa; la proposizione *c*) equivale a $\neg q \Rightarrow \neg p$, ossia la proposizione conversa; la proposizione *d*) infine è l'enunciazione della proposizione data nella forma *condizione necessaria*.
Noi sappiamo che la proprietà conversa di un teorema è sempre vera, quindi possiamo dire che le proposizioni equivalenti alla data sono C) e D).
Del resto la proposizione A) è falsa perché un triangolo isoscele non equilatero ha due coppie di angoli fra loro non uguali, eppure è un triangolo isoscele; la proposizione B) è vera ma non equivale alla proposizione data.

***Dei seguenti teoremi costruire le proprietà inverse, contrarie e converse, stabilendo anche quali di esse sono vere.* (*Nelle risposte I = Inversa, Ct = Contraria, Cv = Conversa, V = Vera, F = Falsa*)**

Livello 2

44. *Se un quadrilatero è un quadrato è anche un rettangolo*. [I: *Se un quadrilatero è un rettangolo allora è un quadrato*; Ct: *Se un quadrilatero non è un quadrato allora non è un rettangolo;* Cv: *Se un quadrilatero non è un rettangolo allora non è un quadrato*. F, F, V]
45. *Se un triangolo è scaleno allora non ha nemmeno una coppia di angoli uguali*. [I: *Se un triangolo non ha nemmeno una coppia di angoli uguali allora è scaleno*; Ct: *Se un triangolo non è scaleno allora ha almeno una coppia di angoli uguali;* Cv: *Se un triangolo ha almeno una coppia di angoli uguali allora non è scaleno*. V, V, V]
46. *Se due triangoli hanno due lati e l'angolo da loro compreso rispettivamente uguali sono fra loro uguali*. [I: *Se due triangoli sono uguali allora hanno due lati e l'angolo compreso rispettivamente uguali*; Ct: *Se due triangoli non hanno due lati e l'angolo compreso uguali allora non sono uguali;* Cv: *Se due triangoli non sono uguali allora non hanno due lati e l'angolo compreso rispettivamente uguali*. V, V, V]
47. *Se un triangolo ha un lato maggiore allora ha anche un angolo maggiore*. [I: *Se un triangolo ha un angolo maggiore allora ha anche un lato maggiore;* Ct: *Se un triangolo non ha un lato maggiore allora non ha un angolo maggiore;* Cv: *Se un quadrilatero non ha un angolo maggiore allora non ha un lato maggiore*. V, V, V]
48. *Se una trasformazione geometrica è una traslazione allora è un'isometria*. [I: *Se una trasformazione geometrica è un'isometria allora è una traslazione*; Ct: *Se una trasformazione geometrica non è una traslazione allora non è un'isometria;* Cv: *Se una trasformazione geometrica non è un'isometria allora non è una traslazione*. F, F, V]
49. *Se una relazione binaria non verifica la proprietà transitiva allora non è una relazione di equivalenza*. [I: *Se una relazione binaria non è di equivalenza allora non verifica la proprietà transitiva*; Ct: *Se una relazione binaria verifica la proprietà transitiva allora è una relazione di equivalenza;* Cv: *Se una relazione binaria è di equivalenza allora verifica la proprietà transitiva*. F, F, V]
50. $A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B$. [I: $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$; Ct: $A \cap B \neq A \Rightarrow A \not\subset B$; Cv: $A \not\subset B \Rightarrow A \cap B \neq A$. V, V, V]
51. *Se un quadrilatero è un quadrato è anche un rettangolo*. [I: *Se un quadrilatero è un rettangolo allora è un quadrato*; Ct: *Se un quadrilatero non è un quadrato allora non è un rettangolo;* Cv: *Se un quadrilatero non è un rettangolo allora non è un quadrato*. F, F, V]

52. $a < 0 \wedge b < 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$.
[I: $a \cdot b > 0 \Rightarrow a < 0 \wedge b < 0$; Ct: $a \geq 0 \vee b \geq 0 \Rightarrow a \cdot b \leq 0$; Cv: $a \cdot b \leq 0 \Rightarrow a \geq 0 \vee b \geq 0$. F, F, V]

53. $x > y > 0 \Rightarrow x^2 > y^2$. [I: $x^2 > y^2 \Rightarrow x > y > 0$; Ct: $x \leq y \leq 0 \Rightarrow x^2 \leq y^2$; Cv: $x^2 \leq y^2 \Rightarrow x \leq y \leq 0$. F, F, F]

Giochiamo alla Matematica

La logica ricreativa è una delle più fertili branche della cosiddette *matematica ricreativa*.
Sono molto diffusi nelle riviste, nei fumetti, nei libri, quesiti che riguardano problemi di deduzione, o quesiti relativi alla verità o falsità di certe affermazioni.

- Uno dei più prolifici autori di quesiti di logica ricreativa è Raymond Smullyan che riprendendo idee precedenti, ha creato diversi paesaggi fantastici come *l'isola dei cavalieri e dei furfanti* (Knights e Knaves nell'originale), nella quale i primi dicono sempre la verità mentre gli altri dicono sempre menzogne. In un'isola del genere non potrà mai capitare che uno dei suoi abitanti possa dire *Sono un furfante*, dato che i cavalieri devono dire sempre la verità cioè che sono cavalieri, mentre i furfanti dovranno dire sempre ciò che non sono, e quindi anch'essi diranno *Sono un cavaliere*. Si tratta di una variante del *paradosso del mentitore*.
- Un'altra invenzione di Smullyan è quella dei *bauletti di Porzia*. Porzia è un personaggio de *Il Mercante di Venezia* di Shakespeare. In questo dramma ella dovrà sposare, per volere del genitore defunto, solo chi riuscirà a trovare il suo ritratto celato all'interno di uno di tre cofanetti, uno d'oro, l'altro d'argento e il terzo di piombo. Smullyan ha modificato la storia shakespeariana introducendo il fatto che chi vuole trovare il ritratto dispone di alcune informazioni: su ciascuno dei tre bauletti è scritta una frase. Vediamole: il ritratto è in questo cofanetto (sul bauletto d'oro); il ritratto non è in questo cofanetto (sul bauletto d'argento); il ritratto non è nel cofanetto d'oro (sul bauletto di piombo). Si sa che delle tre frasi una sola è vera. Per risolvere la questione dobbiamo perciò lavorare, come abbiamo già visto in alcuni esercizi, supponendo che l'affermazione vera sia una delle tre e vedere se essa *regge* il confronto con le altre ritenute false. Così, se è vero ciò che è scritto nel cofanetto d'oro, risulterebbe vero anche ciò che è scritto nel cofanetto d'argento: quindi questo caso è impossibile. Se è vero ciò che è scritto nel cofanetto d'argento e falsa la scritta in quello d'oro, il ritratto dovrebbe essere nel cofanetto di piombo, ma ciò fa sì che anche la frase posta in quest'ultimo cofanetto risulti vera. Quindi anche questo caso è impossibile. Vediamo cosa accade allora se la frase vera è quella scritta nel cofanetto di piombo. In questo caso il ritratto non è nel cofanetto d'oro, rendendo così falsa la frase scritta su quest'ultimo, ma deve risultare falsa anche la frase scritta sul cofanetto d'argento, quindi il ritratto è custodito proprio in questo cofanetto. Come si vede, stavolta la premessa vera concorda con le altre due premesse false.
- Un'altra applicazione logica si ha in un gioco, nato nel 1970, la cui versione commerciale va sotto il nome di *Mastermind*. Il gioco consiste nell'indovinare una data combinazione di colori scelta a caso, assumendo informazioni ogni volta si propone una combinazione. Chi ha inventato la combinazione fornirà due tipi di risposte e indicherà cioè quanti dei colori proposti occupano la stessa posizione; quanti dei colori sono presenti nella combinazione ma non occupano la posizione corretta. Per chiarire le cose scegliamo la versione più *povera*, da cui è stato *copiato* il Mastermind, quella detta *Bulls and Cows* in cui vi è da indovinare non una successione di colori, ma una successione di cifre. Per semplicità supponiamo di voler indovinare una successione di 4 cifre tutte fra loro differenti: la risposta C (*Cow*) equivale a dire che vi è un colore giusto nella posizione errata; la risposta B (*Bull*) equivale a dire che vi è un colore giusto nella posizione giusta. Supponiamo per esempio che la combinazione scelta sia 2740 e che si proponga invece la combinazione 1243; in questo caso abbiamo un *Bull* (4) e un *Cow* (2). Vediamo un esempio di gioco. Supponiamo che la combinazione scelta dal primo giocatore sia 5679 e il secondo proponga invece 1234. Esaminiamo la tabella seguente, in cui vi è una possibile giocata completa, spiegando cosa è successo.

1	2	3	4					
5	8	0	9		B	B		
5	8	6	7		B	C	C	
5	7	6	9		B	B	C	C
5	6	7	9		B	B	B	B

Nella prima riga osserviamo che, non avendo ricevuto alcuna risposta alla prima *chiamata*, il secondo giocatore deduce che nessuna delle quattro cifre proposte fa parte della combinazione richiesta; introduce allora a caso altre quattro cifre. Nella seconda riga ottiene due Bull, quindi sa che due delle quattro cifre introdotte sono corrette e nella giusta posizione, ma poiché le altre due sono sbagliate, introduce nella combinazione le cifre rimanenti: 6 e 7. Sceglie a caso, dato che non ha altre informazioni, 5 e 8 come cifre corrette, ma la terza risposta gli dice che una delle due cifre è sbagliata. Allora propone ancora il 5 e tralascia l'8, inoltre propone il 9 come quarta cifra. La risposta gli dice che è stato fortunato, avendo determinato le 4 cifre, anche se non nel giusto ordine. Ma a questo punto le cifre nel giusto ordine devono essere per forza 5 e 9, perché sono gli unici *B* della seconda riga, basta perciò scambiare fra loro 7 e 6, che sono le *C*, per ottenere la risposta corretta.

Attività

1. Nell'isola dei cavalieri e dei furfanti uno dice *"Io sono un furfante ma mio fratello no"*. Cosa può dirsi dei due fratelli? [Sono entrambi furfanti]
2. Nell'isola dei cavalieri e dei furfanti uno dice *"Mio fratello è un furfante"*. Il fratello aggiunge: *"Il mio unico fratello e la mia unica sorella sono dello stesso tipo"*. Cosa può dirsi dei tre?
[La sorella è furfante, gli altri due non si sa, ma sono di tipo diverso]
3. Nell'isola dei cavalieri e dei furfanti uno dice *"I miei due fratelli sono dello stesso tipo"*. Si chiede a uno degli altri due: *"I tuoi due fratelli sono dello stesso tipo?"*. Cosa risponderà? [Sì]
4. Supponiamo che nei tre cofanetti di Porzia fosse scritto:
(in quello d'oro) il ritratto non è nel cofanetto d'argento;
(in quello d'argento) il ritratto non è in questo cofanetto;
(in quello di piombo) il ritratto è in questo cofanetto.
Stabilire, se possibile, dove si trova il ritratto nei vari casi in cui tutte le frasi sono vere, tutte sono false, solo una è vera, solo una è falsa. [Piombo; Argento; Incoerente; Oro]

L'Antologia

Sono molti gli investigatori che nei libri gialli dichiarano ufficialmente di utilizzare la logica per risolvere i loro complicatissimi casi, fra tutti emerge Sherlock Holmes, il personaggio creato da Arthur Conan Doyle nel 1886. Vogliamo riportare alcuni passi dal primo romanzo in cui appare l'eroe con berretto e mantellina scozzese famoso nel mondo. Il dottor Watson, sua inseparabile *spalla*, legge su un giornale un articolo, che si rivela scritto proprio da Holmes, relativo alla scienza della deduzione.

Arthur Conan Doyle, *Studio in rosso*, 1887

Da una goccia d'acqua, diceva lo scrittore, un logico potrebbe dedurre la possibilità di un Oceano Atlantico o delle cascate del Niagara senza aver mai visto né udito né l'uno né le altre. Così tutta la vita è una grande catena, la cui natura è nota, nel momento in cui ce ne viene mostrata un singolo anello. Come tutte le altre arti, la Scienza della Deduzione e l'Analisi, possono essere acquisite con uno studio lungo e paziente, né la vita è abbastanza lunga da consentire ad alcun mortale il raggiungimento della massima perfezione possibile. […] Basta saper guardare un individuo per conoscere immediatamente la sua storia, le sue attività e la sua professione– per quanto puerile possa sembrare un tale esercizio, esso raffina le facoltà di osservazione e insegna a ciascuno dove guardare e cosa cercare. Dalle unghie di un uomo, dal suo capotto, dai suoi stivali, dalle ginocchia dei pantaloni, dalle callosità delle sue mani, dalla sua espressione, dal colletto della sua camicia – da ognuna di queste cose tutto ciò che riguarda quell'uomo è facilmente rivelato.

Naturalmente le parole di Holmes sono legate al personaggio, sono quindi molto *letterarie*. Vediamo adesso proprio un esempio delle applicazioni delle sue capacità deduttive; la citazione è da *Il segno dei quattro*. Holmes fornisce a Watson un esempio di applicazione pratica delle proprie teorie

Per esempio, l'osservazione mi dice che stamattina sei stato all'ufficio postale di Wigmore Street, *mentre la deduzione mi permette di affermare che ci sei andato per spedire un telegramma.*

Naturalmente Holmes ha ragione! Ecco la soluzione a questa apparente magia:

> *«L'osservazione mi ha fatto notare un po' di fango rossiccio attaccato alle suole delle tue scarpe. Proprio di fronte all'ufficio postale di Wigmore Street hanno staccato il marciapiede e quindi scavato della terra che ha appunto un colore rossiccio tipico di quella zona. Ecco l'osservazione. Il resto è deduzione». «E come hai dedotto che avevo inviato un telegramma?» «Perché sapevo che non avevi scritto alcuna lettera, dato che ti sono stato seduto di fronte tutta la mattina. Ho anche visto che nella tua scrivania avevi sia abbastanza carta da lettere che francobolli. Per che altro motivo quindi saresti andato all'ufficio postale se non per un telegramma? Elimina tutti gli altri fattori, e ciò che rimane deve essere la verità.»*

Naturalmente potremmo sollevare decine di obiezioni alle conclusioni di Holmes, ma non dobbiamo dimenticare che gli scopi di Doyle sono diversi dal mostrare che le deduzioni logiche del suo eroe siano impeccabili.

L'angolo di Derive

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%201/1-2/1-2-1.exe puoi scaricare un'applicazione che ti mostra l'utilizzo degli operatori logici. Invece su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%201/1-2/1-2-1.dfw ti scarichi il file Derive.

Attività Usando Derive verificare la verità o meno delle affermazioni seguenti:

1. $x^2 + 1$ è dispari per ogni x dispari da 3 a 15. [False]
2. $2^{2n} - 1$ è un numero primo, per n naturale da 1 a 4. [False]
3. $2^n + 3^n$ è un numero dispari o multiplo di 5, per n naturale da 1 a 10. [True]

L'angolo di Excel

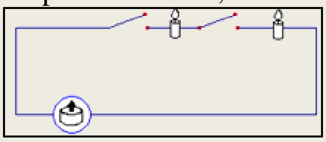
Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%201/1-2/1-2-2.exe puoi scaricare un'applicazione che ti mostra l'utilizzo degli operatori logici. Scarichi il file Excel su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%201/1-2/1-2-2.xlsx

Attività

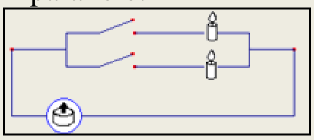
1. Costruire un foglio di lavoro che cataloghi i risultati di un sondaggio di opinione con 5 risposte, facendo scrivere *Sondaggio a maggioranza* se almeno una delle opzioni supera il 50%, diversamente *Sondaggio a minoranza*.
2. Costruire un foglio di lavoro che cataloghi l'età di 6 gruppi di 5 persone ciascuno, facendo scrivere *Gruppo di maggiorenni* se tutte le persone del gruppo hanno almeno 18 anni, *Gruppo di minorenni* se tutti hanno meno di 18 anni, diversamente *Gruppo misto*.
3. Costruire un foglio di lavoro che cataloghi la cittadinanza di 4 gruppi di 6 persone ciascuno, facendo scrivere *Gruppo omogeneo* se tutte le persone del gruppo hanno la stessa cittadinanza, diversamente *Gruppo misto*.

Intervallo matematico

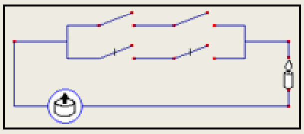
Diverse sono le applicazioni interdisciplinari degli argomenti svolti in questa unità. È immediato pensare ai motori di ricerca di Internet, che servono appunto a ricercare quei siti che contengono le informazioni desiderate. In questo caso la ricerca avviene per *parola chiave*, ossia si digita una parola o una frase e il motore cerca tutti i siti che contengono, in qualche modo, la parola cercata. Per raffinare la ricerca, restringendola e quindi rendendola più veloce, si possono fare ricerche per più di una parola chiave, utilizzando appunto i connettivi logici qui presentati. Chiudiamo questa scheda con un'ultima applicazione, quella ai circuiti elettrici con la creazione dei cosiddetti circuiti logici. Anche se non abbiamo conoscenze approfondite di elettricità, notiamo che i circuiti elettrici, almeno quelli più semplici, possono essere distinti in due tipi. Il primo tipo è quello che di solito si usa per illuminare l'albero di Natale o il presepe. In questo caso le lampadine sono, come si dice, collegate in serie, ciò significa che se per qualsiasi motivo il circuito è interrotto, perché un filamento è spezzato o anche solo perché una lampadina è fulminata, l'intera serie di lampadine non si accende. A lato un esempio grafico molto semplice di *circuito in serie*. Le due lampadine saranno accese contemporaneamente se entrambi gli interruttori saranno chiusi, o spente contemporaneamente, se uno almeno dei due interruttori sarà aperto.



Il circuito elettrico delle nostre case o quello dell'illuminazione stradale non è invece di questo tipo. Anche se la lampadina del soggiorno non si accende possiamo avere luce nel bagno o in cucina, o addirittura nello stesso lampadario lampadine accese e altre guaste. Quindi non avremo luce in casa solo se il guasto riguarderà il circuito principale: in questo caso diciamo che abbiamo a che fare con un *circuito in parallelo*. In figura un esempio grafico molto semplice di circuito in parallelo.



Stavolta l'accensione di ciascuna lampadina dipenderà soltanto dalla chiusura del corrispondente interruttore.
Ci siamo accorti che un circuito in serie funziona come il connettivo **et**, cioè la lampadina si accende solo se entrambi i circuiti sono chiusi; analogamente un circuito in parallelo si comporta come l'operatore **vel**, cioè almeno una delle due lampadine si accende se almeno uno dei due interruttori è chiuso. Ecco perché di solito i circuiti in serie sono anche chiamati circuiti **AND** e quelli in parallelo circuiti **OR**. Possiamo anche rappresentare la negazione, usando un interruttore che si comporta al contrario di un interruttore normale, che cioè fa passare la corrente quando è aperto e la inibisce quando è chiuso. Indicheremo un interruttore del genere, tagliandolo, cioè nel modo seguente  Ecco allora il circuito **Se e solo se**.



Attività

1. Costruire un circuito *implica*, tenuto conto che $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$.
2. Costruire un circuito AUT, tenuto conto che $P \text{ AUT } Q \equiv (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$.
3. Costruire un circuito in cui la lampadina si accende sempre. Che tipo di funzione proposizionale dobbiamo associargli?
4. Costruire un circuito in cui la lampadina non si accende mai. Che tipo di funzione proposizionale dobbiamo associargli?
5. Considerate due funzioni proposizionali equiveridiche, costruire due circuiti equivalenti.

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

I primi 3 problemi sono tratti da *Test your logic* di G. Summers, Dover

1. Cora è morta avvelenata. Anna e Beth sono interrogate sulla dinamica del fatto, ciascuna delle due fa la sua dichiarazione. Anna: *Se è stato un omicidio la colpevole è Beth*; Beth: *Se non è stato un suicidio è stato un omicidio*. La polizia ha stabilito i seguenti fatti: *se nessuna delle due donne ha mentito è stato un incidente*; *se una sola delle due ha mentito, non è stato un incidente*. Qual è stata la causa di morte di Cora? [Omicidio]
2. Albert, Barney e Curtis sono sospettati per l'omicidio di Dwight. Ognuno dei tre fa due affermazioni: Albert: *Non sono un avvocato – Non ho ucciso Dwight*; Barney: *Sono un avvocato – Non ho ucciso Dwight*; Curtis: *Non sono un avvocato – Un avvocato ha ucciso Dwight*. La polizia ha stabilito i seguenti fatti: Solo due delle sei precedenti informazioni sono vere. Uno solo dei tre sospettati non è un avvocato. Chi ha ucciso Dwight? [Albert]
3. Dana è morta annegata. Arlo, Bill e Carl sono interrogati sulla dinamica del fatto, ciascuno fa la sua dichiarazione. Arlo: *Se è stato un omicidio il colpevole è Bill*; Bill: *Se è stato un omicidio non sono stato io*; Carl: *Se non è stato un omicidio è stato un suicidio*. La polizia ha stabilito che se uno solo dei tre ha mentito, è stato un suicidio. Qual è stata la causa di morte di Dana, incidente, suicidio o omicidio? [Suicidio]
4. (AHSME1967) Consideriamo il seguente sistema ipotetico deduttivo. Vi sono due enti primitivi: *pib* e *maa* e quattro postulati: P_1: *Ogni pib è unione di maa.* P_2: *Due pib distinti hanno un solo maa in comune.* P_3: *Ogni maa appartiene a esattamente due pib.* P_4: *Esistono esattamente quattro pib.* Quali fra i seguenti enunciati possono considerarsi teoremi di questo sistema? T_1: *Esistono esattamente sei maa.* T_2: *Ogni pib è formato da esattamente tre maa.* T_3: *Per ogni maa esiste uno e un solo altro maa che non appartiene allo stesso pib di esso.* [E]
5. Nell'isola dei cavalieri e dei furfanti incontriamo tre persone: Aldo, Bice e Carla. Aldo dice *Siamo tutti e tre furfanti*. Bice: *No, solo due di noi sono furfanti*. Carla: *No, gli altri due mentono*. Qualcuno dei tre è un cavaliere? E se sì, chi? [Solo Bice è cavaliere]
6. Su un manuale di zoologia marziana leggete le seguenti affermazioni: i) *ogni animale marziano ha* 3 *zampe oppure* 7 *zampe*; ii) *gli animali con* 3 *zampe sono carnivori*; iii) *gli animali non carnivori hanno* 3 *zampe o* (*vel*) *vivono nella savana*. Quali delle seguenti affermazioni sono sicuramente vere? A) *Gli animali non carnivori vivono nella savana* B) *Gli animali carnivori hanno* 3 *zampe* C) *Gli animali con* 7 *zampe sono erbivori* D) *Gli animali non carnivori hanno* 7 *zampe* [A), D)]

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.

A = Abacus rivista on line AHSME = Annual High School Mathematics Examination B = Giochi della Bocconi
K = Kangarou della matematica OMI = Olimpiadi della Matematica

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato alle Olimpiadi della Matematica del 2008. *Un satellite munito di telecamera inviato sul pianeta Papilla ha permesso di stabilire che è falsa la convinzione di qualcuno che: "su Papilla sono tutti grassi e sporchi". Quindi adesso sappiamo che:* A) *su Papilla almeno un abitante è magro e pulito* B) *su Papilla tutti gli abitanti sono magri e puliti C) almeno un abitante di Papilla è magro D) almeno un abitante di Papilla è pulito* E) *se su Papilla tutti gli abitanti sono sporchi, almeno uno di loro è magro*.

Indichiamo con g la proprietà *tutti sono grassi* e con s quella *tutti sono sporchi*. Perciò è falsa la proprietà $g \wedge s$, quindi è vera la sua negazione, cioè $\neg(g \wedge s) \equiv \neg g \vee \neg s$. Quindi l'unica cosa che possiamo dire è che se tutti sono sporchi, cioè s, allora per forza è vera $\neg g$, cioè non tutti sono grassi. Quindi la risposta corretta è C). Potevamo anche dire che se tutti sono grassi allora almeno uno non è sporco, ma non fa parte delle opzioni proposte.

1. (AHSME 1959) Supponiamo che i tre seguenti enunciati siano veri: *tutte le matricole sono umane; tutti gli studenti sono umani; alcuni studenti pensano*. Quali fra i seguenti enunciati si deducono logicamente da questi enunciati? A) *Tutte le matricole sono studenti* B) *Alcuni esseri umani pensano* C) *Nessuna matricola pensa* D) *Alcuni esseri umani che pensano non sono studenti*. [Solo B)]
2. (AHSME 1965) Il seguente enunciato è vero: *Domenica non faremo il picnic solo se il tempo non sarà sereno*. Quale delle seguenti affermazioni è vera? A) *Se domenica faremo il picnic il tempo sarà certamente sereno* B) *Se domenica non faremo il picnic, il tempo sarà probabilmente non sereno* C) *Se domenica non sarà sereno allora non faremo il picnic* D) *Se domenica sarà sereno potremo fare il picnic* E) *Se domenica sarà sereno certamente faremo il picnic*. [E)]
3. (AHSME 1967) Quali dei seguenti enunciati sono equivalenti al seguente enunciato: *Se l'elefante rosa del pianeta alfa ha gli occhi viola, allora il maiale del pianeta beta non ha il naso lungo*? I) *Se il maiale del pianeta beta ha il naso lungo allora l'elefante rosa del pianeta alfa ha gli occhi viola*; II) *Se l'elefante rosa del pianeta alfa non ha gli occhi viola allora il maiale del pianeta beta non ha il naso lungo*; III) *Se il maiale del pianeta beta ha il naso lungo, allora l'elefante rosa del pianeta alfa non ha gli occhi viola*; IV) *L'elefante rosa del pianeta alfa non ha gli occhi viola o (vel) il maiale del pianeta beta non ha il naso lungo*. A) Solo I e III B) Solo III e IV C) Solo II e IV D) Solo II e III E) Solo III [B)]
4. (AHSME 1967) Sapendo che Alcuni *Mems* non sono *Ens* e Nessun *Ens* è un *Vees*, quali fra le seguenti affermazioni sono certamente vere? A) Alcuni *Mems* non sono *Vee* B) Alcuni *Vees* non sono *Mems* C) Nessun *Mems* è un *Vees* D) Alcuni *Mems* sono *Vees*. [Nessuna]
5. (AHSME 1968) Relativamente agli studenti di una certa scuola si sa che sono veri i seguenti enunciati: *alcuni studenti non sono onesti*; *tutti i membri dell'associazione della fratellanza sono onesti*. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera? A) *Alcuni studenti appartengono all'associazione della fratellanza* B) *Alcuni membri dell'associazione della fratellanza non sono studenti* C) *Alcuni studenti non sono membri della fratellanza* D) *Nessun membro della fratellanza è uno studente* E) *Nessuno studente è membro della fratellanza*. [C)]
6. (AHSME 1975) Se la proposizione *Tutte le camicie di questo negozio sono in saldo* è falsa, allora quali delle seguenti proposizioni sono vere? A) *Tutte le camicie di questo negozio non sono in saldo* B) *Ci sono alcune camicie di questo negozio non in saldo* C) *Nessuna camicia di questo negozio è in saldo* D) *Non tutte le camicie di questo negozio sono in saldo*. [B) e D)]

Lavoriamo insieme

Il seguente quesito è stato assegnato nel 1990 alle Olimpiadi della matematica italiane, gara per il triennio.
Tra i componenti di una certa famiglia si sa che "almeno un maschio non è tifoso dell'Inter" e che non è vero che "almeno un maschio non è maggiorenne". Si può dedurre che in quella famiglia: A) *Almeno un maggiorenne è tifoso dell'Inter* B) *Nessun maggiorenne è tifoso dell'Inter* C) *Almeno un maggiorenne non è tifoso dell'Inter* D) *Almeno un tifoso dell'Inter non è maggiorenne* E) *Tutti i tifosi dell'Inter sono maggiorenni.*
Da un punto di vista insiemistico possiamo interpretare le informazioni nel modo seguente. La prima informazione ci dice che gli insiemi *M*, dei maschi, e *I*, dei tifosi dell'Inter, sono tali che *M* non è sottoinsieme di *I*. La seconda informazione invece, essendo falsa, equivale a dire che *tutti i maschi sono maggiorenni*, cioè *M* è sottoinsieme dell'insieme *MG*, dei maggiorenni. Non possiamo dedurre che *almeno un maggiorenne è tifoso dell'Inter*, cioè che gli insiemi *M* e *I* hanno elementi in comune, dato che può accadere quel che mostriamo in figura 1. Per provare che sono false le affermazioni *nessun maggiorenne è tifoso dell'Inter*, e *almeno un tifoso dell'Inter non è maggiorenne*, consideriamo la figura 2. Invece la figura 3 ci convince che non possiamo dire che *tutti i tifosi dell'Inter sono maggiorenni*. Quindi per esclusione dovremmo dire che è vero che *almeno un maggiorenne non è tifoso dell'Inter*. Vediamo però di provare che ciò è effettivamente vero. Se l'affermazione fosse falsa, vorrebbe dire che *ogni maggiorenne è tifoso dell'Inter*, cioè che i tre insiemi sarebbero nella rappresentazione della figura 4, ma ciò è in contraddizione con il fatto vero che *almeno un maschio non è tifoso dell'Inter*.

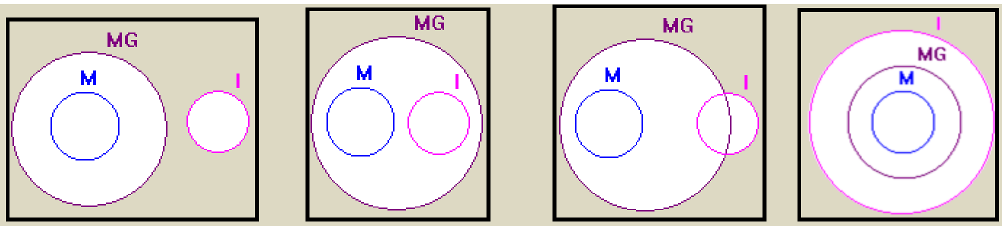


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

7. (OMI 1989) Sia A un insieme di numeri interi positivi. Utilizzando il fatto che tra le seguenti cinque affermazioni una e una sola è corretta, determinarla. A) Ogni elemento di A è multiplo di 3, di 4, di 5 e di 6 B) Ogni elemento di A è un quadrato perfetto pari C) Ogni elemento di A è multiplo di 4 D) Ogni elemento di A è multiplo di 6 e di 8 E) Ogni elemento di A è multiplo di 8 o di 12. [C)]
8. (OMI 1993) Alcuni matematici hanno studiato i numeri naturali speciali (di cui ignoriamo la definizione) e hanno dimostrato i teoremi sotto elencati. Uno di essi implica tutti gli altri. Quale? A) ci sono infiniti numeri dispari che non sono speciali; B) ci sono infiniti numeri dispari e infiniti numeri pari che non sono speciali; C) per ogni numero speciale s c'è un numero naturale n non speciale tale che $n > s$; D) c'è solo un numero finito di numeri speciali dispari; E) un numero speciale non può avere più di 1000 cifre. [E)]
9. (OMI 1994) Roberto scommette che se Bearzot tornasse alla guida della nazionale questa vincerebbe sempre. In quale dei seguenti casi Roberto perde certamente la scommessa? A) Bearzot non torna ad allenare la nazionale B) Bearzot torna ad allenare la nazionale e questa non perde mai C) Bearzot torna ad allenare la nazionale e questa non vince tutte le partite D) Bearzot non torna ad allenare la nazionale e questa non vince sempre E) Bearzot non torna ad allenare la nazionale e questa non vince mai. [C)]
10. (A1998) Tre chiromanti sono apparentemente indistinguibili, i loro nomi sono Truth (che dice sempre la verità), Lie (che mente sempre) e Wise (che talvolta mente e talvolta no). I tre sono seduti in fila l'uno accanto all'altro. Un filosofo vuol decidere l'identità di ciascuno dei tre, così chiede al primo: *Chi è seduto accanto a te?*, la risposta è *Truth*. Poi chiede alla persona seduta in mezzo: *tu chi sei?*, la risposta è *Wise*. Alla terza persona chiede: *Chi è seduto accanto a te*, la risposta è: *Lie*. Stabilire l'identità dei tre. [Wise, Lie, Truth]
11. (A2002) A una festa qualcuno ha mangiato un po' del dolce del re prima che fosse servito. Uno dei sospetti, Maky, dice a propria difesa: *quelli che negano che non ho mangiato il dolce stanno mentendo*. Se sta dicendo la verità, Maky ha mangiato o no il dolce? [No]
12. (A2002) Se Hilary è un maschio allora è più giovane di John. Se Hilary ha 13 anni è una ragazza. Se non ha 13 anni allora non è più giovane di John. Hilary è maschio o femmina? [Femmina]
13. (B2002) Davide, Enrico e Matteo si ritrovano, dopo parecchio tempo, al bar e si scambiano qualche confidenza. Davide: *Io non ho ancora trovato l´anima gemella*; Enrico: *Nemmeno io, l´ho trovata*; Matteo: *Enrico mente*; Davide: *Matteo dice la verità*. In realtà uno solo dei tre amici mente. Quale dei tre sicuramente non ha trovato l´anima gemella? [Davide]
14. (A 2004) Leslie festeggia il compleanno, ma durante la festa qualcuno prende la torta. Leslie chiede ai suoi amici chi, secondo loro, è stato. Ecco le risposte: Ben: *È stato Joe*; Joe: *Andrew mente*; Ivan: *È stato Elton*; George: *Non è stato Ivan*; Andrew: *Non sono stato io*; Elton: *Ben dice il vero*; Frank: *Sono stato io*; Leslie: *È stato Ben*. Se una sola delle 8 affermazioni è vera e uno solo ha preso la torta, chi è stato? [Ivan]
15. (K 2008) Un ragazzo dice sempre il vero al giovedì e al venerdì, mente sempre al martedì, mentre negli altri giorni della settimana mente o dice la verità senza una regola. Gli è stato chiesto il suo nome per sette giorni di fila e nei primi sei ha fornito nell'ordine le seguenti risposte: Luca, Mario, Luca, Mario, Piero, Mario. Che cosa ha risposto il settimo giorno? [Luca]
16. (OMI 2008) Ogni volta che Agilulfo torna a casa da scuola dopo aver preso un brutto voto, se la sua mamma è in casa lo mette in punizione. Sapendo che ieri pomeriggio Agilulfo non è stato messo in punizione, quale delle seguenti affermazioni è certamente vera? A) ieri Agilulfo ha preso un brutto voto, B) ieri Agilulfo non ha preso un brutto voto, C) ieri pomeriggio la sua mamma era in casa, D) ieri pomeriggio la sua mamma non era in casa, E) nessuna delle precedenti affermazioni è certamente vera. [E)]

Questions in English

Working together

This is a question assigned by Abacus, a math magazine, in 2000. *Four humble guys, Hubert, Hubby, Harold and Harry, made the following four humble statements: Hubert: Hubby is the most humble. Hubby: Harold is the most humble. Harold: I am not the most humble. Harry: I am not the most humble. As it turned out, only one of these four humble statements is true. Who is the most humble guy*?
We build the following table, where we suppose in each row named by the man that him tells Truth

	Hubert	Hubbly	Harold	Harry
Hubert		Yes	No/Yes	Yes
Hubbly		No	Yes	Yes
Harold		No	No	Yes
Harry		No	Yes/No	No

We see that only when Harold tell the truth there aren't any contradiction, and in this case the most humble guy is Harry.

17. (AHSME 1975) Which of the following is equivalent to *If P is true then Q is false*? A) *P is true or Q is false* B) *If Q is false then P is true* C) *If P is false then Q is true* D) *If Q is true then P is false* E) *If Q is true then P is true*. [D)]
18. (AHSME 1978) The following four statements, and only these, are found on a card: A) *On this card exactly one statement is false* B) *On this card exactly two statement are false* C) *On this card exactly three statement are false* D) On this card exactly four statement are false. Among them the number of false statements is exactly … [3]
19. (A1998) Sneeze, Goofy, Sleepy, and Happy said the following things to their father after a competition: Sneeze: *I did not win the competition*. Goofy: *Happy won*. Sleepy: *Sneeze won*. Happy: *Sneeze did not win*. Who won the competition if only one of the four kids said the truth? [Sneeze]
20. (A 1998) Two strange men live in Strange country: Peter, who lies every Monday, Tuesday and Wednesday, but tells the truth on all the other days; and Paul, who lies on every Thursday, Friday and Saturday, but tells the truth on all the other days. One day they said: Peter: *Yesterday I had one of my lying days*. Paul: *Me, too*. What day of the week was that? [Thursday]
21. (A 1998) Smarty decided that from now on he is going to tell the truth on Mondays, Wednesdays and Fridays, but will lie on all the other days. Once he said: *Tomorrow I am going to tell the truth*. On what day did this happen? [Saturday]
22. (A 1998) Three defendants stand in front of a judge. Every one of them answers 3 questions, partially with a lie (each person lies at least once and at most twice). The answers of the three are:
A: *It was B*; *I have never been on the scene*; *I am innocent*. B: *C is innocent*; *I did not do it*; *All what A says is a lie*. C: *It wasn't me*; *A is lying when he says that he has never been on the scene*; *B is lying when he says that all what A says is a lie*. Find out who is guilty. [C]

Working together

This is a question assigned by Abacus, a math magazine, in 2000. *Three fussy children, A, B, and C, will be taken to a bus trip. Their teacher wants to have them sit in the same row on seats number* 1, 2, *and* 3. *However, they have the following requests: If* A *sits on seat* 1 *then* B *wants to sit on seat* 2; *If* B *is not sitting on seat* 1 *then* C *would like to sit on seat* 2; *If* C *sits on seat* 3 *then* A *would like to sit on seat* 1. *Can you sit these children fulfilling all of their requests*?
If A sits on seat 1, then B sits on 2, but for the second sentence also C must sit on 2. This is impossible. If B sits on seat 1, then C sits on 2 and A can sit on 3. This is the correct situation.

23. (A 2000) There are 5 people sitting around a round table, and one after the other they all make the same following statement: *Both of my neighbours' at this table are liars*. You know that the liars always lie, and those who are not liars are always telling the truth. At this table everybody knows about everybody else whether they are liars or not. How many liars are sitting at this table? [3]

24. (A 2001) Mr. Smith lives in a house on Nowhere street, and his house number is between 13 and 1300. Mr. Taylor is curious to find out Mr. Smith's house number, so he starts asking Mr. Smith a few questions. Mr. Taylor: *Is your house number greater than* 500? Mr. Smith answers the question, but he is lying. (However, Mr. Taylor does not know this.) Mr. Taylor: *Is it a square number*? Mr. Smith answers the question, but he is lying again. (However, Mr. Taylor does not know this.) Mr. Taylor: *Is it a cube number*? Mr. Smith answers the question, and this time he is telling the truth. Mr. Taylor: *Now, if you tell me whether the one before last digit is* 2 *or not, then I can tell your house number*. Mr. Smith responds. Then Mr. Taylor tells him the house number he thinks is correct. However, Mr. Smith says that Mr. Taylor is incorrect. What is the house number of Mr. Smith? [64]
25. (A 2005) My grandpa is a tricky man. He locked up the cabinet door where my grandma stores all the candies, and then he put the key in one of three boxes he marked by A, B, and C. Then he wrote the following sentences on the boxes: A) The key is not in box B. B) The key is not in this box. C) The key is in this box. Grandpa told me that some of these statements are true, and others are false, but if, without looking into any of the boxes, I gave him the box with the key in it, I could have as much candy as I wanted to. Could you help me to find the right box? [The key is in box A]

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Medicina 1999) Marco: *Giorgio suona il sassofono meglio di tutti, è lui il campione del nostro gruppo*; Giorgio: *Alessandro suona il sassofono meglio di tutti, è lui il campione del nostro gruppo*; Alessandro: *Io non suono il sassofono meglio di tutti, non sono io il campione del gruppo*; Matteo: *Io non suono il sassofono meglio di tutti, non sono io il campione del gruppo*. Se solo UNA di queste affermazioni è VERA, chi è il campione nel suonare il sassofono? A) Marco B) Giorgio C) Alessandro D) Matteo E) Non è possibile stabilirlo
2. (Ingegneria 1999) L'affermazione *a nessuno studente sono antipatici tutti i professori* equivale a dire che: A) *Scelto un qualsiasi studente, c'è almeno un professore che gli è simpatico* B) *Tutti i professori sono simpatici agli studenti* C) *Esiste uno studente a cui sono antipatici tutti i professori* D) *C'è un professore che è simpatico a tutti gli studenti* E) *A qualche studente sono simpatici tutti i professori*
3. (Ingegneria 1999) Si consideri la seguente affermazione: *Non c'è nessun giocatore di calcio che non sia capace di colpire la palla con il piede destro*. Quale delle seguenti proposizioni è equivalente a quella enunciata sopra? A) *Tutti i giocatori di calcio sanno colpire di testa* B) *Alcuni giocatori di calcio sanno colpire la palla col piede destro* C) *Tutti i giocatori di calcio sanno colpire la palla col piede destro* D) *Non tutti i giocatori di calcio sanno colpire di testa* E) *Almeno un calciatore è capace di colpire la palla col piede sinistro*
4. (Ingegneria 1999) La frase: *Nessun imprenditore di bassa statura può possedere più di una rete televisiva* equivale a dire che: A) *Non esiste nessun imprenditore che possiede tre reti televisive* B) *Prese a caso due reti televisive diverse* T1 *e* T2 *esiste un imprenditore di bassa statura* B1 *che possiede la rete* T1 *e un imprenditore di bassa statura* B2 *che possiede la rete* T2 C) *Prese a caso due reti televisive diverse* T1 *e* T2*, se l'imprenditore di bassa statura* B1 *possiede* T1*, allora non possiede* T2 D) *Ogni imprenditore di bassa statura possiede una rete televisiva* E) *Prese a caso due reti televisive diverse* T1 *e* T2 *esiste un imprenditore di bassa statura* B1 *che possiede* T1 *ma non possiede* T2
5. (Ingegneria 1999) Al ristorante *L'oca giuliva* lavorano Aristide, Evasio e Rodolfo, come cuoco, cameriere e sommelier (non necessariamente in quest'ordine). Si sa che: 1) Se Aristide è il cuoco, allora Evasio è il cameriere; 2) Se Aristide è il cameriere, allora Evasio è il sommelier; 3) Se Evasio non è il cuoco, allora Rodolfo è il cameriere; 4) Se Rodolfo è il sommelier, allora Aristide è il cameriere. Dunque: A) Aristide è il cuoco ed Evasio è il cameriere B) Aristide è il cameriere ed Evasio è il sommelier C) Rodolfo è il sommelier ed Aristide il cameriere D) Aristide è il cuoco e Rodolfo è il sommelier E) Aristide è il sommelier e Rodolfo è il cameriere
6. (Ingegneria 1999) Gli astronomi dell'Università di Bengodi hanno provato che ogni galassia contiene un numero finito di stelle ma che il numero di stelle dell'universo è infinito. Tra tutte le stelle ne hanno individuate alcune di tipo α. Dire quale delle seguenti affermazioni implica tutte le altre. A) Le stelle α sono

in numero finito B) Solo 50 galassie contengono stelle α C) Vi sono infinite stelle che non sono stelle α D) C'è almeno una galassia senza stelle α E) Non tutte le stelle sono stelle α

7. (Ingegneria 2002) Nel paese di Burgundopoli tutti gli uomini di affari sono milionari; i più ricchi tra loro sono quasi calvi e bassi di statura. Ci sono inoltre alcuni mediatori che sono milionari. Alcuni di essi sono bassi di statura. Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente errata? A) Un milionario ha vinto al Burgunlotto. B) L'attuale presidente degli industriali è alto 160 centimetri e ha folti capelli rossicci. C) Una persona di scarse risorse economiche non è un uomo d'affari. D) Il signor De' Paperis è un uomo d'affari alto e bruno, ma non è ancora milionario. E) Non ci sono mediatori alti e poveri.
8. (Ingegneria 2002) Dobbiamo dimostrare che un certo numero x è inferiore ad un altro numero y diverso da x. Quante fra le seguenti affermazioni permettono di dedurre la nostra tesi? 1) esiste un numero compreso tra loro 2) ogni numero non superiore a x è minore di y 3) tutti i numeri sono inferiori a y o superiori a x 4) nessun numero supera y e non supera x A) 3 B) 1 C) 4 D) 2 E) 0
9. (Ingegneria 2002) Siamo nell'isola Checè, dove vivono solo cavalieri e furfanti. I cavalieri dicono sempre la verità; i furfanti mentono sempre. Incontro cinque abitanti dell'isola: Aristide, Basilio, Carlo, Donato ed Evasio. Aristide afferma: *Carlo è un cavaliere*. Basilio afferma: *Evasio è un furfante*. Carlo afferma: *Basilio è un furfante*. Donato afferma: *Aristide è un cavaliere*. Evasio afferma: *Carlo e Donato sono di diversa natura*. Allora necessariamente A) Carlo e Donato sono cavalieri B) Sono 3 cavalieri e 2 furfanti C) Evasio è un cavaliere D) Basilio è un cavaliere E) Sono 2 cavalieri e 3 furfanti
10. (Architettura 2007) C'è una casa con almeno due porte; si consideri l'affermazione: *Esiste una chiave che apre tutte le porte di casa, ma non la porta della cantina.* Indicare quale tra le seguenti frasi costituisce la negazione dell'affermazione riportata sopra. A) *Per ogni chiave, o esiste una porta che non è quella della cantina che non viene aperta da quella chiave, oppure quella chiave apre la porta della cantina* B) *Esiste una chiave che apre tutte le porte di casa, compresa quella della cantina* C) *Esiste una chiave che non apre nessuna porta, se non quella della cantina* D) *Nessuna chiave apre tutte le porte* E) *Per ogni chiave, esiste una porta che non è quella della cantina che viene aperta da quella chiave*
11. (Architettura 2008) Un grande teorico dei numeri ha scoperto i numeri *troppobelli*, e, avendo osservato che tutti quelli che ha scoperto sono pari, congettura che esistano solo numeri *troppobelli* pari. Un suo allievo, studiando con cura questi numeri, afferma che la congettura del maestro è falsa. Dunque l'allievo sostiene che: A) *esiste solo un numero finito di troppobelli pari* B) *nessun numero pari è troppobello* C) *c'è almeno un numero pari che non è troppobello* D) *c'è almeno un numero troppobello dispari* E) *tutti i numeri troppobelli sono dispari*
12. (La Sapienza, Facoltà scientifiche 2008) Si consideri la frase: *In un dato campione di pazienti, chi ha fatto uso di droghe pesanti ha utilizzato anche droghe leggere*. Quale delle seguenti affermazioni relative ai pazienti del campione si può dedurre da essa? A) *Chi ha fatto uso di droghe leggere ha utilizzato anche droghe pesanti* B) *Chi non ha fatto uso di droghe leggere non ha utilizzato droghe pesanti* C) *Chi non ha fatto uso di droghe pesanti non ha utilizzato droghe leggere* D) *Chi non ha fatto uso di droghe leggere ha utilizzato droghe pesanti*
13. (La Sapienza, Facoltà scientifiche 2008) Tre amici, Antonio, Bruno e Corrado, sono incerti se andare al cinema. Si sa che: se Corrado va al cinema, allora ci va anche Antonio; condizione necessaria perché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno. Il giorno successivo possiamo affermare con certezza che: A) se Corrado è andato al cinema, allora ci è andato anche Bruno B) nessuno dei tre amici è andato al cinema C) se Bruno è andato al cinema, allora ci è andato anche Corrado D) se Corrado non è andato al cinema, allora non ci è andato nemmeno Bruno
14. (La Sapienza, Facoltà scientifiche 2009) Qual è la negazione della frase *nessuno studente della mia classe ha studiato sia inglese sia spagnolo*? A) *almeno uno studente della mia classe non ha studiato né spagnolo né inglese* B) *tutti gli studenti della mia classe hanno studiato sia inglese sia spagnolo* C) *tutti gli studenti della mia classe hanno studiato una sola materia fra inglese e spagnolo* D) *almeno uno studente della mia classe ha studiato sia spagnolo sia inglese*
15. (Economia Trento) Negare che a tutti i lettori di gialli piacciono sia i noir italiani sia quelli statunitensi significa affermare che: A) ad almeno un lettore di gialli non piacciono o i noir italiani o quelli statunitensi B) ad almeno un lettore di gialli non piacciono né i noir italiani né quelli statunitensi C) a tutti i lettori di

gialli non piacciono i noir italiani D) ad almeno un lettore di gialli piacciono sia i noir italiani sia quelli statunitensi

16. (Ingegneria 2009) Indicare qual è la negazione dell'affermazione *Umberto ha almeno un figlio biondo* A) *Almeno un figlio di Umberto non è biondo* B) *Umberto non ha figli oppure ha soltanto figli non biondi* C) *Tutti i figli di Umberto sono bruni* D) *Non tutti i figli di Umberto sono biondi* E) *Umberto ha tutti i figli rossi di capelli*
17. (Ingegneria 2009) Dei 120 parlamentari di Allegrandia si sa che un terzo è stato inquisito dalla magistratura e condannato definitivamente e i tre quarti sono al secondo (o comunque, non al primo) mandato parlamentare. Se ne può concludere che: A) un quarto dei parlamentari è al primo mandato ed è stato condannato definitivamente B) nessuno dei parlamentari al primo mandato è stato condannato definitivamente C) scelti comunque tre parlamentari, uno almeno di essi è stato condannato definitivamente D) un terzo dei parlamentari al primo mandato è stato condannato definitivamente E) c'è almeno un parlamentare che è stato condannato definitivamente ed è a un mandato successivo al primo
18. (Ingegneria 2009) Un accogliente cartello all'ingresso del ristorante L'Oca giuliva recita: *Se si è pochi, si mangia bene, se si è in tanti, si spende poco*. Il signor Aquilotto, con la sua mente acuta, ne deduce logicamente che: A) *se si è in pochi, si spende tanto* B) *per mangiare bene è necessario andarci in pochi* C) *se si mangia male non si è pochi* D) *per spendere poco bisogna essere in tanti* E) *se si è in tanti, si mangia male*
19. (Ingegneria 2009) Un Marziolano, osserva che: metà di tutti i Tondolini sono remissivi; metà di tutti i Marziolani sono testardi; metà di tutti i Marziolani sono remissivi. E tenendo presente che non si può essere insieme remissivi e testardi, deduce che una e una sola delle seguenti affermazioni NON può essere vera. Quale? A) *Metà di tutti i Tondolini sono testardi* B) *Tutti i Tondolini sono Marziolani* C) *Tutti i Marziolani sono Tondolini e nessun Tondolino è testardo* D) *Non esistono Tondolini che siano anche Marziolani* E) *Tondolini e Marziolani sono lo stesso insieme di persone*
20. (Ingegneria 2009) Un chimico studiando una soluzione che si era tinta di arancione, constatò che in essa era presente del sodio o del potassio (o entrambi); inoltre osservò che, se NON c'era sodio, c'era ferro, e che, se c'era potassio, c'era anche iodio. Quale di queste situazioni si può verificare? A) La soluzione contiene solo potassio e ferro B) La soluzione contiene solo ferro e iodio C) La soluzione contiene sodio e potassio e ferro e non contiene iodio D) La soluzione non contiene né sodio né iodio E) La soluzione contiene solo sodio
21. (Architettura 2010) Credevo che tutti i medici avessero un rimedio per ogni male, ma l'esperienza mi ha costretto a ricredermi. Quale delle seguenti affermazioni consegue necessariamente dalla premessa? A) *I medici non hanno rimedio per nessun male* B) *Per ogni male, c'è un medico che non sa porvi rimedio* C) *C'è un male per cui nessun medico ha un rimedio* D) *Esiste un medico che non ha un rimedio per un certo male* E) *Ogni medico manca del rimedio per almeno un male*
22. (Architettura 2010) Alessandro afferma: *Se Rossi parte in pole position arriva primo*. Quale delle seguenti proposizioni è la NEGAZIONE di quella di Alessandro? A) *Rossi può non vincere anche se parte in pole position* B) *Se Rossi non parte in pole position non vince* C) *Rossi non vince mai ogni volta che parte in pole position* D) *Rossi può non partire in pole position e non vincere* E) *Rossi può arrivare primo anche se non parte in pole position*
23. (Architettura 2010) Nello stato di Burgundia, una norma di circolazione stabilisce che ogni automobile, se non è verniciata di rosso, deve avere gomme chiodate e vetri oscurati. Poiché questa norma viene rigorosamente rispettata, possiamo affermare con sicurezza che: A) non ci sono automobili rosse con gomme chiodate e vetri oscurati B) ogni automobile è rossa oppure ha vetri oscurati C) ogni automobile verniciata di rosso ha gomme chiodate e vetri oscurati D) c'è almeno un'automobile che ha vetri oscurati oppure non è verniciata di rosso E) ogni automobile che ha gomme chiodate e vetri oscurati è rossa
24. (Architettura 2010) La maestra dice a Pierino: *Se risolvi correttamente due esercizi su cinque, ti darò la sufficienza*. Pierino non prende la sufficienza. Dunque, necessariamente Pierino: A) ha risolto correttamente un esercizio e ne ha sbagliato un altro B) ha risolto correttamente un esercizio C) ha risolto correttamente al più un esercizio D) non ha risolto correttamente nessun esercizio E) ha risolto due esercizi, ma con errori

25. (Economia Trento) *È da escludere l'ipotesi secondo cui la scarsa prestazione dell'orchestra non debba essere attribuita all'inesperienza del direttore*. Basandosi sulla precedente affermazione, individuare quale delle seguenti alternative è esatta. A) Se il direttore si fosse concentrato maggiormente, la prestazione dell'orchestra sarebbe stata meno scarsa B) La scarsa prestazione dell'orchestra non deve essere attribuita all'inesperienza del direttore C) Per ottenere buone prestazioni da un'orchestra è necessario avere un direttore esperto D) La scarsa prestazione dell'orchestra è da attribuire all'inesperienza del direttore
26. (Medicina 2013) Un ispettore di polizia sta conducendo un'indagine su un caso di omicidio. Sulla scena del delitto è stato ritrovato un biglietto di ingresso ad un museo. Ciascuno dei 5 sospettati ha ammesso di aver visitato il museo nell'ultimo mese. Il sospettato A sostiene di aver visitato il museo il 17 febbraio. Il sospettato B sostiene di aver visitato il museo il 6 febbraio. Il sospettato C sostiene di aver visitato il museo il 9 febbraio. Il sospettato D sostiene di aver visitato il museo il 30 gennaio. Il sospettato E sostiene di aver visitato il museo il 3 febbraio. L'ispettore ricorda chiaramente di aver visitato lui stesso il museo il mese scorso, il 16 gennaio, e sa per certo che da dicembre a marzo il museo è aperto soltanto il martedì e il venerdì. Pertanto, sa anche che SOLO uno dei sospettati non sta dicendo la verità. Chi è il sospettato che non sta dicendo la verità?
27. (Medicina 2013) Coltivare piante non autoctone per abbellire i propri giardini è diventata una pratica piuttosto comune. Molte di queste specie sono costose, richiedono trattamenti speciali e sono spesso soggette a parassiti e malattie. Esistono molte piante selvatiche autoctone che sono perfettamente adatte alla crescita in vaso o nei giardini delle case, non richiedono trattamenti speciali e sono spesso altrettanto belle rispetto alle piante provenienti dall'estero. Si dovrebbe dunque cercare di coltivare un numero maggiore di piante autoctone selvatiche nei propri giardini. Se considerata vera, quale delle seguenti affermazioni rende più forte l'argomentazione precedente? A) Le piante selvatiche autoctone non sono soggette a malattie B) I giardinieri traggono particolare piacere nel coltivare con successo piante non autoctone C) Le piante selvatiche autoctone hanno una fioritura più breve rispetto alle piante esotiche D) Alcune piante selvatiche autoctone sono molto costose e difficili da coltivare E) Parecchi centri di giardinaggio hanno notato un aumento nelle vendite di piante selvatiche autoctone
28. (Medicina 2013) Se ci si vuole recare al Festival della musica di Saldano si deve effettuare l'iscrizione online almeno 48 ore prima che la biglietteria virtuale venga aperta. Marta vuole certamente acquistare biglietti per il Festival, quindi si è iscritta online. Quale delle seguenti affermazioni segue la stessa struttura logica del ragionamento appena illustrato? A) Se Maria smette di recarsi al lavoro a piedi, deve per forza prendere o l'autobus o la macchina. Maria ha smesso di recarsi al lavoro a piedi, quindi deve per forza prendere o l'autobus o la macchina B) Se si vogliono ottenere buoni voti agli esami non si deve andare a letto tardi la notte prima dell'esame. Alessandra è andata a letto tardi la notte prima dell'esame, quindi non otterrà buoni risultati C) Franco è dimagrito molto. Potrebbe aver seguito una dieta oppure potrebbe aver fatto molto esercizio fisico. È impossibile che Franco abbia fatto molto esercizio fisico, quindi deve aver seguito una dieta D) Sonia sta imparando a guidare. La maggior parte delle persone passano l'esame di guida dopo aver fatto 30 lezioni di guida. Sonia ha prenotato 30 lezioni, quindi dovrebbe passare l'esame di guida dopo aver terminato le lezioni E) Per andare negli Stati Uniti bisogna ottenere il visto. Giacomo deve andare negli Stati Uniti, quindi ha fatto domanda per ottenere il visto
29. (Medicina 2016) "Se il mandorlo è in fiore, la rosa marcisce. Se la begonia marcisce il papavero sboccia. Inoltre o il mandorlo è in fiore o la begonia marcisce". In base alle precedenti affermazioni è sicuramente vero che: A) la rosa marcisce o il papavero sboccia B) il papavero sboccia C) il mandorlo è in fiore e il papavero sboccia D) la rosa marcisce e il papavero sboccia E) la rosa e la begonia marciscono
30. (Medicina 2016) "Chi legge un quotidiano al giorno o utilizza spesso internet è informato; i social specialist utilizzano spesso internet; Luisa è una social specialist". Se le precedenti affermazioni sono corrette, quale delle seguenti NON è necessariamente vera? A) Non esistono persone disinformate che leggano un quotidiano al giorno B) Luisa utilizza spesso internet C) Le social specialist sono informate D) Luisa è informata E) Chi è informato utilizza spesso internet

Quelli che … vogliono sapere di più

I sillogismi aristotelici

Vogliamo considerare dei particolari schemi deduttivi, storicamente molto importanti.

Notazione 7

Un sillogismo si indica con uno dei seguenti quattro simboli: $\dfrac{\begin{matrix} y & R & x \\ z & R & y \end{matrix}}{z \quad R \quad x} \quad \dfrac{\begin{matrix} x & R & y \\ z & R & y \end{matrix}}{z \quad R \quad x} \quad \dfrac{\begin{matrix} y & R & x \\ y & R & z \end{matrix}}{z \quad R \quad x} \quad \dfrac{\begin{matrix} x & R & y \\ y & R & z \end{matrix}}{z \quad R \quad x}$, in cui le lettere x, y, z indicano una proprietà, mentre R indica la relazione che li lega (per ogni, nessuno, esiste, non esiste). Ciascuno dei precedenti schemi prende il nome di **figura sillogistica**, rispettivamente *prima*, *seconda*, *terza* e *quarta*. Dato che ogni giudizio aristotelico si indica simbolicamente con una lettera (A,E,I,O), ogni schema sarà indicato con una terna di simboli (AAA, AEO, IOA,….)

Esempio 25

Con riferimento all'Esempio 11, sia x: *i multipli di* 2, y: *i multipli di* 4, z : *i multipli di* 8. Esprimiamo il tutto con il seguente schema: *Ogni y è x*; *ogni z è y*; ***quindi*** *ogni z è x*. Siamo quindi nella prima figura sillogistica. Usando i simboli introdotti per i diversi giudizi aristotelici, possiamo associare allo schema del nostro sillogismo, perfetto, la sigla AAA.

Ciascuna delle ipotesi del sillogismo può essere una fra i quattro giudizi aristotelici, quindi ciascuna delle quattro figure in teoria può dare luogo a $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ diversi sillogismi. Teoricamente vi sono perciò $4 \cdot 64 = 256$ diversi sillogismi.

Esempio 26

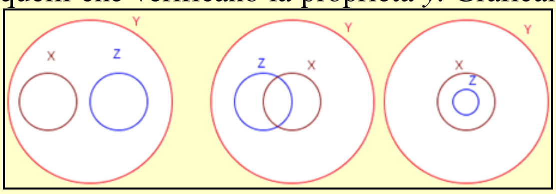
La prima figura sillogistica, come abbiamo detto, può essere interpretata in 64 modi diversi; vediamone alcuni.

- Per esempio lo schema EEE diviene: *Nessun y è x*; *nessun z è y*; ***quindi*** *nessun z è x*.
- Lo schema IOE: *Qualche y è x*; *qualche z non è y*; ***quindi*** *nessun z è x*.

Naturalmente il fatto che noi scriviamo uno schema sillogistico non significa automaticamente che esso sia perfetto, cioè che *funzioni*.

Esempio 27

Consideriamo la seconda figura sillogistica e proviamo che, nel caso AAA, essa non è sempre una corretta deduzione. Lo schema stavolta dovrebbe essere: *Ogni x è y*; *ogni z è y*; ***quindi*** *ogni z è x*. La prima ipotesi equivale a dire che l'insieme degli elementi che verificano la proprietà x è contenuto nell'insieme di quelli che verificano la proprietà y; allo stesso modo la seconda ipotesi dice che anche l'insieme degli elementi che verificano la proprietà z è un sottoinsieme di quelli che verificano la proprietà y. Graficamente possiamo avere diverse situazioni; in figura ve ne sono tre.



Come si può notare solo nella terza ipotesi la deduzione *ogni z è x* è corretta.

- y: *i multipli di* 2, x: *i multipli di* 4, z : *i multipli di* 8, lo schema corretto è: *Ogni multiplo di* 4 *è multiplo di* 2; *ogni multiplo di* 8 *è multiplo di* 2; ***quindi*** *ogni multiplo di* 8 *è multiplo di* 4.
- Se invece y: *i multipli di* 3; x: *i multipli di* 6; z: *i multipli di* 9,siamo nel secondo caso e il seguente schema sillogistico non è corretto: *Ogni multiplo di* 6 *è multiplo di* 3; *ogni multiplo di* 9 *è multiplo di* 3; ***ma*** *ogni multiplo di* 9 *non è multiplo di* 6. Per esempio 27 è multiplo di 9 ma non di 6.

In vista dei risultati dell'esempio precedente, risulta opportuno enunciare un teorema che ci permetta di dire quanti e quali dei 256 possibili sillogismi sono perfetti.

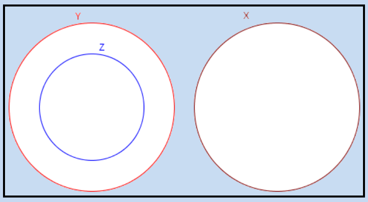
Teorema 4

Solo i seguenti 19 sillogismi sono perfetti: per la I figura: AAA, EAE, AII, EIO; per la II figura: EAE, AEE, EIO, AOO; per la III figura: AAI, IAI, AII, EAO, OAO, EIO; per la IV figura: AAI, AEE, IAI, EAO, EIO.

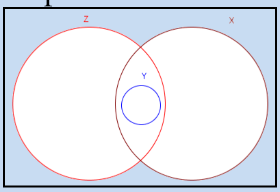
Dimostrazione.

Proviamo solo un caso per figura, lasciando i rimanenti per esercizio.

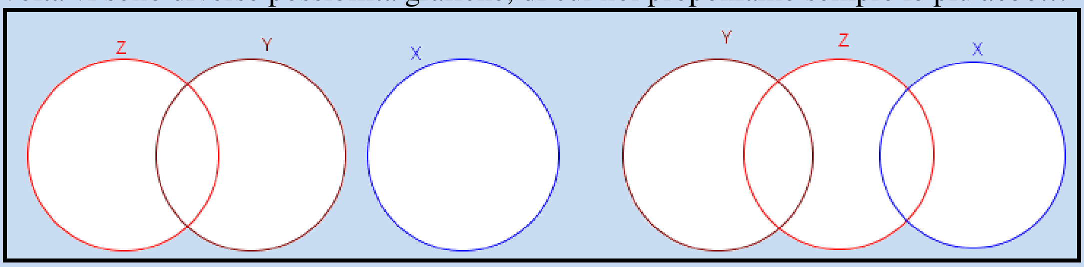
- Abbiamo già visto la validità di AAA per la I figura. Verifichiamo il caso EAE per la II figura: *Nessun y è x; Ogni z è y;* ***quindi*** *Nessun z è x*. Dal punto di vista insiemistico ecco la situazione in figura. Crediamo che questa rappresentazione sia sufficiente a confermare la validità dello schema.



- Passiamo allo schema AAI per la III figura: *Nessun y è x; Ogni y è z;* ***quindi*** *Qualche z è x*. Qui possono verificarsi diversi casi: noi consideriamo quello più *debole*, mostrato in figura, dato che potrebbe anche accadere che si abbia $Z \subseteq X$, nel qual caso potremmo concludere addirittura che *ogni z è x*.



- Concludiamo con EIO per la IV figura: *Nessun x è y; Qualche y è z;* ***quindi*** *Qualche z non è y*. Anche questa volta vi sono diverse possibilità grafiche, di cui noi proponiamo sempre le più *deboli*:

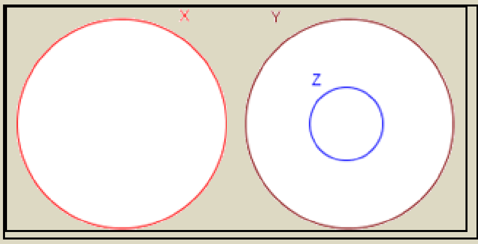


Ognuna di esse conferma la conclusione.

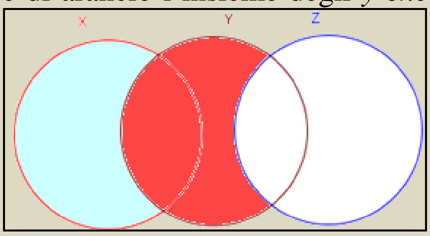
Verifiche

Lavoriamo insieme

- *Provare che lo schema EAE per la prima figura sillogistica è corretto, cioè che è corretto il seguente schema deduttivo*: *Nessun y è x*; *ogni z è y*; ***quindi*** *nessun z è x*.

  Consideriamo la rappresentazione grafica: 

Dato che *ogni z è y*, vuol dire che l'insieme degli *z* è contenuto in quello degli *y* ma, dato che *nessun y è x*, i due insiemi non hanno elementi comuni, ecco quindi giustificata la rappresentazione. Da essa si nota che la deduzione che *nessun z è x* è corretta.
- *Provare che lo schema OOA non è un sillogismo corretto per la quarta figura, cioè che non è corretto lo schema deduttivo*: *Qualche x non è y*; *qualche y non è z*; ***quindi*** *ogni z è x*.

  Consideriamo anche qui una rappresentazione grafica che verifica le premesse ma non la conclusione. Nella figura abbiamo colorato in azzurro l'insieme degli *x che non sono y* e di arancio l'insieme degli *y che non sono z*. così vediamo che è falso che *ogni z è x*. 

Livello 2

1. Completare la dimostrazione del Teorema 4 per i sillogismi della prima figura.
2. Completare la dimostrazione del Teorema 4 per i sillogismi della seconda figura.
3. Completare la dimostrazione del Teorema 4 per i sillogismi della terza figura.
4. Completare la dimostrazione del Teorema 4 per i sillogismi della quarta figura.
5. Dimostrare che gli schemi IOA e OOO non sono sillogismi corretti per la prima figura.
6. Dimostrare che gli schemi EEE e OAO non sono sillogismi corretti per la seconda figura.
7. Dimostrare che gli schemi III e AAA non sono sillogismi corretti per la terza figura.
8. Dimostrare che gli schemi AOA e OII non sono sillogismi corretti per la quarta figura.

Lavoriamo insieme

Date le seguenti proprietà definite nell'insieme degli Italiani: x: maggiorenne; y: avere la patente automobilistica; z: donna; costruire lo schema AII della terza figura.

In generale lo schema è *Ogni y è x*; *qualche y è z*; ***quindi*** *qualche z è x*, e nel nostro caso diviene: *Tutti gli italiani che hanno la patente automobilistica sono maggiorenni*; *qualche italiano che ha la patente è donna*; ***quindi*** *qualche donna è maggiorenne*.

Mediante le seguenti proprietà, costruire dei sillogismi perfetti seguendo la figura e lo schema suggerito

Livello 2

9. *x*: *triangoli equiangoli; y*: *triangoli isosceli; z*: *triangoli scaleni*. EAE, I figura.
[*Nessun triangolo scaleno è un triangolo equiangolo*]
10. *x*: *multiplo di* 6*; y*:*multiplo di* 30*; z*: *multiplo di* 5. AII, I figura. [*Qualche multiplo di* 5 *è multiplo di* 6]

11. *x*: *elettori per il senato della Repubblica italiana; y: minorenni; z: studenti*. EIO, I figura. [*Alcuni studenti non votano per il senato della Repubblica Italiana*]
12. *x*: *trapezi; y:parallelogrammi; z: rettangoli*. EAE, II figura. [*Nessun rettangolo è un trapezio*]
13. *x*: *leoni; y: carnivori; z: conigli*. AEE, II figura. [*Nessun coniglio è un leone*]
14. *x*: *svedesi; y: con la carnagione scura; z: con i capelli neri*. EIO, II figura. [*Qualcuno con i capelli neri non è svedese*]
15. *x*: *professore universitario; y: laureato; z: musicista*. AOO, II figura. [*Alcuni musicisti non sono professori universitari*]
16. *x*: *quadrupedi; y: cani; z: mammiferi*. AAI, III figura. [*Qualche mammifero è quadrupede*]
17. *x*: *ecologisti; y:pittori;z: artisti*. IAI, III figura. [*Qualche artista è un ecologista*]
18. *x*: *obesi; y:tennisti; z: atleti*. EAO, III figura. [*Qualche atleta non è obeso*]
19. *x*: *numeri interi; y: numeri razionali; z: numeri reali*. OAO, III figura. [*Alcuni numeri reali non sono interi*]
20. *x*: *europei; y: africani; z: nigeriani*. EIO, III figura. [*Qualche nigeriano non è europeo*]
21. *x*: *medici; y: diplomati; z: maggiorenni*. AAI, IV figura. [*Qualche maggiorenne è medico*]
22. *x*: *terzini; y: difensori; z: centravanti*.AEE, IV figura. [*Nessun centravanti è terzino*]
23. *x*: *libri a fumetti; y: libri tascabili; z: libri economici*. IAI, IV figura [*Qualche libro economico è a fumetti*]
24. *x*: *città con meno di* 10 000 *abitanti; y: capoluoghi di regione; z: capoluoghi di provincia*. EAO, IV figura. [*Qualche capoluogo di provincia ha almeno* 10 000 *abitanti*]
25. *x*: *marziani; y: venusiani; z: esseri a pallini rossi*. EIO, IV figura. [*Qualche essere a pallini rossi non è marziano*]

Livello 3

Trarre una deduzione dalle seguenti informazioni (Tratti da L. Carroll, Simbolic Logic, Penguin)

26. a. le uniche cose di stagno che posseggo sono le casseruole; b. ho trovato tutti i tuoi regali molto utili; c. nessuna delle mie casseruole ha la minima utilità. [Non mi hai regalato nulla che sia fatto di stagno]
27. a. tutti quelli che si abbonano a The Times sono persone ben educate; b. nessun porcospino sa leggere; c. chi non sa leggere non è ben educato. [Nessun porcospino è abbonato a The Times]
28. a. al mio giardiniere piace ascoltare storie di argomento militare; b. nessuno ricorda la battaglia di Waterloo a meno che sia molto vecchio; c. a nessuno piace ascoltare storie di argomento militare a meno che riesca a ricordare la battaglia di Waterloo. [Il mio giardiniere è molto vecchio]
29. a. nessuna papera sa ballare il valzer; b. tutti gli ufficiali sanno ballare il valzer; c. tutti i miei animali domestici sono composti da papere. [Fra i miei animali domestici non vi sono ufficiali]

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_3_1.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
D	A	C	C	E	B
7	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
D	A	D	A	D	B
13	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
A	D	A	B	E	C
19	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
B	E	D	A	B	C
25	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
D	C	A	E	A	E

1. Le basi del ragionamento

1.3 Insiemi dotati di struttura

Prerequisiti

- Concetto di relazione binaria
- Concetto di operazione binaria
- Operazioni aritmetiche elementari
- Proprietà delle operazioni
- Insiemi e operazioni con essi
- Calcolo proposizionale

Obiettivi

- Astrarre il concetto di operazione binaria.
- Comprendere il concetto di struttura algebrica.
- Comprendere l'importanza che un dato insieme sia una struttura algebrica.
- Conoscere le più importanti strutture algebriche.
- Comprendere il concetto di strutture isomorfe.

Contenuti

- Operazioni binarie e loro proprietà
- Strutture algebriche
- Gruppi
- Anelli, corpi e campi
- Isomorfismi

Quelli che … vogliono sapere di più

- Ordine dei sottogruppi

Parole Chiave

Anello – Corpo – Campo – Divisore dello zero – Dominio di integrità – Elemento neutro – Elemento simmetrico – Gruppo – Gruppo ciclico – Gruppoide – Isomorfismo – Semigruppo – Sottogruppo – Subanello

Richiamiamo le Conoscenze

Operazioni binarie e loro proprietà

Ricordiamo brevemente alcuni concetti indispensabili per lo svolgimento di questa unità didattica.

Definizione A

Diciamo **prodotto cartesiano** di due insiemi A e B, che indichiamo con $A \times B$, l'insieme delle coppie ordinate in cui il primo elemento appartiene ad A e il secondo a B.

Se per esempio $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 2, 4\}$, si ha: $A \times B = \{(1, 0), (1, 2), (1, 4), (2, 0), (2, 2), (2, 4), (3, 0), (3, 2), (3, 4)\}$.Per la stessa definizione di prodotto cartesiano è evidente la validità del seguente risultato.

Teorema A

Se A ha n elementi e B ha m elementi, allora $A \times B$ ha $n \cdot m$ elementi.

Spesso risulta più interessante considerare il prodotto cartesiano di un insieme per se stesso, che in questo caso indichiamo come nella moltiplicazione ordinaria fra numeri, usando le potenze:

$$A \times A = A^2, A \times A \times A = A \times A^2 = A^3.$$

Relazioni binarie

Definizione B

Diciamo **relazione binaria definita su un insieme A e a valori in un insieme B**, una legge di natura qualsiasi che a un elemento di A associa un elemento di B.

Ad alcune relazioni binarie diamo un nome speciale.

Definizione C

Diciamo **operazione binaria definita su insieme A**, una relazione binaria $\Re : A \times A \to A$.

Le più comuni operazioni binarie sono le operazioni aritmetiche, come la somma fra numeri reali, che appunto alla coppia (1, 2), per esempio, associa il numero 3.
Alcune operazioni binarie verificano delle proprietà che semplificano i calcoli. Vediamo le più comuni.
Quando calcoliamo per esempio 3 + 2 + 4, anche se ci *sembra* che il risultato 9 sia stato calcolato con un'unica operazione, ciò non è affatto vero, dato che la somma è definita solo fra due numeri e non fra tre: in effetti abbiamo calcolato prima 3 + 2, ottenendo 5 e poi abbiamo sommato a esso 4, arrivando a 9.
Avremmo potuto ottenere lo stesso risultato anche con la sequenza $3 + (2 + 4) \to 3 + 6 \to 9$.
Ciò accade per la somma di tutte le terne di numeri reali ed è perciò una proprietà valida per l'operazione di somma nell'insieme dei numeri reali. Più in generale

Definizione D

Diciamo che l'operazione *, definita sull'insieme A, gode della **proprietà associativa** se vale la seguente uguaglianza: $(a * b) * c = a * (b * c)$, $\forall\ a, b, c \in A$.

Un'altra proprietà valida per alcune operazioni binarie è quella per la quale, per esempio, si ha $5 \cdot 7 = 7 \cdot 5$, ossia quella che ci permette di scambiare fra loro l'ordine degli elementi coinvolti nell'operazione. Quindi

Definizione E

Diciamo che l'operazione *, definita sull'insieme A, gode della **proprietà commutativa** se vale la seguente uguaglianza: $a * b = b * a$, $\forall\ a, b \in A$.

Un'ulteriore proprietà, sfruttata soprattutto nel calcolo mentale, lega fra loro due operazioni binarie, definite sullo stesso insieme. Se dobbiamo calcolare, per esempio, $12 \cdot 34$, preferiamo pensare all'operazione come a $12 \cdot (30 + 4)$. Ma tale operazione può anche scriversi: $12 \cdot 30 + 12 \cdot 4$; in tal modo abbiamo a che fare con moltiplicazioni più semplici da calcolare a mente. Scriviamo perciò $360 + 48 = 408$. Tale proprietà consente quindi di *distribuire* la moltiplicazione rispetto alla somma.

Definizione F

Diciamo che l'operazione * è **distributiva** rispetto all'operazione &, entrambe definite sull'insieme A, se vale la seguente uguaglianza: $a * (b \,\&\, c) = (a * b) \,\&\, (a * c)$, $\forall\ a, b, c \in A$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

*Nell'insieme $\mathbb{N}$ definiamo l'operazione, che indichiamo con il simbolo *, con la legge $n * m = n + 2m$.*
Così per esempio si ha: $2*5 = 2 + 2 \cdot 5 = 2 + 10 = 12$.

Livello 1

Date le seguenti operazioni calcolare quanto proposto. Nel seguito max(a; b) calcola il massimo fra i numeri a e b; min(a; b) calcola il minimo fra i numeri a e b

1. * è l'operazione definita nell'angolo Lavoriamo insieme. a) $3 * 7$; b) $5 * 0$; c) $0 * 5$; d) $12 * 2$. [a) 17; b) 5; c) 10; d) 16]
2. $m \,\&\, n = 5m + 2n$: a) 5 & 3; b) 6 & 0; c) 0 & 6; d) 7 & 7; e) 3 & 5. [a) 31; b) 30; c) 12; d) 49; e) 25]
3. $m \propto n = m^2 - n^2$: a) $3 \propto 2$; b) $-2 \propto 1$; c) $-3 \propto -2$; d) $1 \propto 0$ [a) 5; b) 3; c) 5; d) 1]
4. $a \Theta b = \dfrac{a \cdot b}{a+b}$: a) $3\ \Theta\ 5$; b) $0\ \Theta\ 1$; c) $-2\ \Theta\ -1$; d) $\dfrac{1}{2} \Theta \dfrac{2}{3}$ $\left[\text{a) } \dfrac{15}{8}\text{; b) } 0\text{; c) } -\dfrac{2}{3}\text{; d) } \dfrac{2}{7}\right]$
5. a) $max(-2; 5)$; b) $max(4-; 0)$; c) $max(-7; -7)$; d) $max\left(\dfrac{3}{4}; -\dfrac{5}{2}\right)$ $\left[\text{a) } 5\text{; b) } 4\text{; c) } -7\text{; d) } \dfrac{3}{4}\right]$
6. a) $min(8; -2)$; b) $min(-3; -5)$; c) $min(0; -1)$; d) $min\left(-\dfrac{4}{3}; -\dfrac{5}{4}\right)$ $\left[\text{a) } -2\text{; b) } -5\text{; c) } -1\text{; d) } -\dfrac{4}{3}\right]$

Lavoriamo insieme

Data l'operazione $n * m = n + 2m$, calcolare il risultato dell'operazione $(1 * 2) * 3$.
Poiché non sappiamo se l'operazione è associativa dobbiamo seguire l'ordine stabilito dalle parentesi: $(1 * 2) * 3 = (1 + 2 \cdot 2) * 3 = (1 + 4) * 3 = 5 * 3 = 5 + 6 = 11$. In effetti l'operazione non è associativa, infatti: $1 * (2 * 3) = 1 * (2 + 2 \cdot 3) = 1 * 8 = 1 + 2 \cdot 8 = 17$.

Livello 2

Date le seguenti operazioni calcolare quanto proposto.

7. $a \Theta b = \dfrac{a-b}{a+b}$: a) $(-4\ \Theta\ 1)\ \Theta\ -2$; b) $(3\ \Theta\ 0)\ \Theta\ 0$; c) $-\dfrac{2}{3} \Theta \left(\dfrac{2}{3} \Theta \dfrac{3}{4}\right)$ $\left[\text{a) } -11\text{; b) } 1\text{; c) } \dfrac{31}{37}\right]$
8. $a \otimes b = \dfrac{a-2b}{2a+b}$: a) $(3 \otimes 5) \otimes 0$; b) $-3 \otimes (0 \otimes -4)$; c) $-\dfrac{1}{2} \otimes \left(\dfrac{3}{7} \otimes \dfrac{2}{9}\right)$ $\left[\text{a) } -\dfrac{1}{2}\text{; b) } -\dfrac{1}{8}\text{; c) } \dfrac{32}{69}\right]$
9. $max(max(1, min(2, 3)), min(4, min(1, 5)))$; $max(min(1, max(2, 3)), min(4, max(1, 5)))$ [2 ; 4]
10. $min(max(1, max(2, 3)), max(4, min(1, 5)))$; $max(max(1, max(2, 3)), max(4, max(1, 5)))$ [3 ; 5]
11. $min(min(1, min(2, 3)), min(4, min(1, 5)))$ [1]
12. $(a; b)\ \Phi\ (c; d) = (a - c; b + d)$, definita in $\mathbb{R}^2$: a) $(2; 1)\ \Phi\ (1; 2)$; b) $(1; 0)\ \Phi\ (0; -2)$;
    c) $(3; 2)\ \Phi\ (-4; 5)$; d) $\left(\dfrac{1}{2}; 1\right) \Phi \left(\dfrac{2}{3}; -\dfrac{1}{4}\right)$ $\left[\text{a) } (1;3)\text{; b) } (1;-2)\text{; c) } (7;7)\text{; d) } \left(-\dfrac{1}{6}; \dfrac{3}{4}\right)\right]$

13. Data l'operazione: $m \,£\, n = m - 2n$, trovare almeno due numeri naturali m ed n per cui $m \,£\, n = 0$. [(2, 1), (4, 2), (6, 3), ...]
14. Data l'operazione: $m\ \nabla\ n = 2m + 3n$, determinare, se esiste, almeno un numero n per cui $n \nabla n = n^2$. [0, 5]

Livello 3

15. Definiamo la seguente operazione ternaria $[a; b; c] = a^b - b^c + c^a$. calcolare:
a) [1; –1; 2]; b) [–1; 1; 2]; c) [2; –1; 1]; d) [2; 1; –1]; e) [1; 1; 0] $\left[\text{a) 2; b) } -\frac{3}{2}\text{; c) } \frac{5}{2}\text{; d) 2; e) 0}\right]$

16. Definita l'operazione $x \otimes y = 4x - 3y + xy$, risolvere le equazioni:
a) $3 \otimes y = 12$; b) $x \otimes 3 = 12$; c) $0 \otimes y = 1$; d) $x \otimes 0 = 1$; e) $1 \otimes y = 0$; f) $x \otimes 1 = 0$
$\left[\text{a) Identità; b) 3; c) } -\frac{1}{3}\text{; d) } \frac{1}{4}\text{; e) 2; f) } \frac{3}{5}\right]$

17. Data l'operazione: $m \clubsuit n = m - n + 1$, determinare, tutti i numeri n ed m per cui $n\clubsuit m = m\clubsuit n$. [$m = n$]

Lavoriamo insieme

*Riconsideriamo l'operazione * definita nei precedenti box Lavoriamo insieme, possiamo dire che è commutativa?*
Avevamo visto che 2 * 5 = 12. Quanto fa 5 * 2? 5 * 2 = 5 + 2 · 2 = 5 + 4 = 9. Il risultato è diverso dal precedente, quindi l'operazione non è commutativa.

Stabilire quali fra le seguenti operazioni verificano la proprietà commutativa.

Livello 1

18. Operazioni logiche ; Composizione di simmetrie assiali [Tutte, tranne l'implicazione materiale ; No]
19. Prodotto cartesiano tra insiemi ; Composizione di traslazioni [No; Sì]
20. Operazioni insiemistiche ; $a \succ b = \sqrt[b]{a}$; a^b [Tutte, tranne la differenza ; No ; No]

Livello 2

21. a) $a\Theta b = \dfrac{a \cdot b}{a+b}$; b) $a\Lambda b = \dfrac{a+b}{a \cdot b}$; c) $a\Xi b = \dfrac{a-b}{a+b}$ $\left[\text{a) Sì; b) Sì; c) No, p.e. } 2\Xi 1 = \frac{1}{3}, 1\Xi 2 = -\frac{1}{3}\right]$

22. a) $x\otimes y = \max(x, y)$; b) $x\oplus y = \min(x, y)$; c) $a \propto b = \dfrac{a+b}{2}$; b) $x\heartsuit y = (x+1)\cdot(y+1)-1$ [a) Sì;b)Sì;c)Sì;d)Sì]

Livello 3

23. Composizione di isometrie ; Composizione di omotetie [No ; Sì]

Lavoriamo insieme

*Riprendiamo in considerazione l'operazione n * m = n + 2m, è associativa?*
Consideriamo intanto un esempio. Vediamo i risultati di (1 * 2) * 3 e di 1 * (2 * 3).

- (1 * 2) * 3 = (1 + 2 · 2) * 3 = 5 * 3 = 5 + 2 · 3 = 5 + 6 = 11
- 1 * (2 * 3) = 1 * (2 + 2 · 3) = 1 * 8 = 1 + 2 · 8 = 1 + 16 = 17

Avendo ottenuto risultati diversi, possiamo concludere che l'operazione non è associativa.

Stabilire quali fra le seguenti operazioni verificano la proprietà associativa.

Livello 1

24. $a \succ b = \sqrt[b]{a}$; Elevamento a potenza ; Operazioni insiemistiche [No ; No ; Tutte, tranne la differenza]
25. Prodotto cartesiano tra insiemi ; Operazioni logiche [Sì ; Tutte, tranne l'implicazione materiale]

Livello 2

26. a) $a\Theta b = \dfrac{a \cdot b}{a+b}$; b) $a\Lambda b = \dfrac{a+b}{a \cdot b}$; c) $a\Xi b = \dfrac{a-b}{a+b}$; d) $x\otimes y = \max(x, y)$ [a) Sì; b) No; c) No; d) Sì]

27. a) $x\oplus y = \min(x, y)$; b) $a \propto b = \dfrac{a+b}{2}$; c) $x\heartsuit y = (x + 1) \cdot (y + 1) - 1$ [a) Sì; b) No; c) Sì]

28. Composizione di isometrie ; Composizione di omotetie [Sì ; Sì]

Lavoriamo insieme

Date le operazioni max(a, b) e min(a, b), che determinano rispettivamente il massimo e il minimo fra due numeri, stabilire se una delle due è distributiva rispetto alle altre.

In generale * è distributiva rispetto a & se vale la seguente uguaglianza: $a * (b \& c) = (a * b) \& (a * c)$, $\forall a,$, b, c. Nel nostro caso quindi deve aversi, per la distributività di *max* rispetto a *min*: $max(a, min(b, c)) = min(max(a, b), max(a, c))$. Prima di ragionare su elementi generici proviamo su dei numeri, per esempio 1, 2, 3. $max(1, min(2, 3)) = max(1, 2) = 2$; $min(max(1, 2), max(1, 3)) = min(2, 3) = 2$. Naturalmente il fatto che per questi valori la proprietà sia vera non ci permette di dire che essa sia vera sempre. Consideriamo allora tutte le possibilità, dipendenti dall'ordine con cui si presentano *a b* e *c*. Possiamo avere uno dei 6 seguenti ordini, $a \geq b \geq c$; $a \geq c \geq b$; $b \geq a \geq c$; $b \geq c \geq a$; $c \geq a \geq b$; $c \geq b \geq a$. Basta allora ripetere i calcoli effettuati per la terna (1, 2, 3) per le altre cinque terne: (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1).
Lasciamo il compito per esercizio, suggerendo di osservare che non è necessario effettuare tutte e cinque le verifiche, perché ...

Livello 3

29. Possiamo dire che *max* è distributiva rispetto a *min*? [Sì]
30. Possiamo dire che *min* è distributiva rispetto a *max*? [Sì]
31. Stabilire rispetto a quali delle rimanenti operazioni insiemistiche l'unione è distributiva. [Intersezione]
32. Stabilire rispetto a quali delle rimanenti operazioni insiemistiche l'intersezione è distributiva. [Unione]
33. Stabilire rispetto a quali delle rimanenti operazioni insiemistiche la differenza simmetrica è distributiva. [Nessuna]
34. Stabilire rispetto a quali delle rimanenti operazioni insiemistiche la differenza è distributiva. [Nessuna]
35. Stabilire rispetto a quali delle rimanenti operazioni logiche la congiunzione è distributiva. [Tutte tranne l'implicazione e la coimplicazione]
36. Stabilire rispetto a quali delle rimanenti operazioni logiche la disgiunzione inclusiva è distributiva. [Tutte, tranne la disgiunzione esclusiva]
37. Stabilire rispetto a quali delle rimanenti operazioni logiche la disgiunzione esclusiva è distributiva. [Nessuna]
38. Stabilire rispetto a quali delle rimanenti operazioni logiche l'implicazione materiale è distributiva. [Tutte tranne la disgiunzione esclusiva]
39. Stabilire rispetto a quali delle rimanenti operazioni logiche la coimplicazione è distributiva. [Nessuna]

Strutture algebriche

I matematici non studiano gli oggetti, ma le relazioni tra oggetti; è perciò loro indifferente sostituire degli oggetti con altri, purché le relazioni non varino. La materia non li interessa, è solo la forma che li attira. *Henri Poincaré*

Il problema

Diversi sono gli insiemi con i quali si tratta nelle matematiche, da quelli numerici (i naturali, gli interi relativi, i razionali, i reali) a quelli i cui elementi sono altre entità (i poligoni, gli insiemi astratti, le trasformazioni geometriche, le matrici, ...). Su ciascuno di questi insiemi definiamo delle relazioni che legano fra loro elementi (sommiamo numeri, uniamo insiemi, componiamo trasformazioni, moltiplichiamo matrici, ...), ossia definiamo delle operazioni. Ci chiediamo: queste operazioni sono del tutto diverse tra loro, dato che coinvolgono elementi diversi, oppure hanno qualcosa che le accomuna?

In questa unità vogliamo andare alla ricerca di affinità tra operazioni, con l'intento di inquadrare gli insiemi sui quali definiamo operazioni in ambiti più generali, in modo da poter studiare in modo più mirato gli stessi insiemi. Una delle prime cose che notiamo è che le operazioni con le quali abbiamo a che fare sono delle leggi che a una coppia di elementi, associano, ove possibile, un terzo elemento. Le operazioni più comuni sono di tipo binario.
Prima di procedere, stabiliamo delle notazioni per insiemi sui quali lavoreremo più frequentemente.

Notazione 1

Indichiamo con
- $\mathbb{Z}_n[x]$ l'insieme dei polinomi di grado n in una sola incognita, x, a coefficienti numeri interi.
- $\mathbb{Q}_n[x]$ l'insieme dei polinomi di grado n in una sola incognita, x, a coefficienti numeri razionali.
- $\mathbb{R}_n[x]$ l'insieme dei polinomi di grado n in una sola incognita, x, a coefficienti numeri reali.
- $\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], ..., [n-1]\}$, l'insieme delle classi resto modulo n, ossia di tutti i numeri interi raggruppati a seconda del resto della loro divisione per il numero intero n.
- $\mathcal{M}_n = \{n, 2n, 3n, \ldots, m \cdot n, \ldots\}$, l'insieme dei multipli del numero naturale n.
- $\mathcal{L}$ = l'insieme delle proposizioni logiche.

Esempio 1

- Sommare due numeri equivale ad associare a due elementi, non per forza distinti, di un insieme numerico un terzo elemento, detto somma dei due numeri. Per esempio scrivendo $3 + 7 = 10$, vogliamo indicare che alla coppia (3, 7) associamo il numero 10.
- Intersecare due insiemi, A e B, vuol dire associare alla coppia (A, B) un terzo insieme C, che potrebbe anche essere vuoto, i cui elementi sono gli eventuali elementi comuni ad A e B.
- L'operazione di disgiunzione esclusiva fra due proposizioni logiche, equivale ad associare alle proposizioni logiche p e q, la proposizione $r = p \dot{\vee} q$, che risulta vera se esattamente una delle due proposizioni è vera.

L'esempio precedente ci ha mostrato dei fatti comuni a tre distinte operazioni binarie definite su insiemi i cui elementi sono entità matematiche del tutto diverse tra loro (numeri, insiemi astratti, proposizioni logiche).
Notiamo innanzitutto che a una coppia di numeri naturali la somma ha associato un numero naturale; a due insiemi astratti l'intersezione ha associato un insieme astratto; a due proposizioni logiche la disgiunzione esclusiva ha associato una proposizione logica. Ossia le operazioni che abbiamo visto nell'Esempio 1 sono in qualche modo garanti dell'insieme su cui operano, nel senso che generano prodotti che sono dello stesso tipo dei componenti. È come se dicessimo che con delle assi di legno siamo in grado di produrre solo oggetti di legno. Occorre però tenere presente che non sempre è così. Lavorando opportunamente certi materiali possiamo infatti ottenere prodotti che, pur contenendo in sé i componenti iniziali, si configurano come diversi.

Tutti gli elementi chimici composti, come per esempio l'acqua, sono altro rispetto ai loro componenti (nel caso dell'acqua idrogeno e ossigeno). Ciò accade anche per certe operazioni e per certi insiemi.

Esempio 2

- L'operazione di differenza definita nell'insieme dei numeri naturali non sempre genera numeri naturali. Per esempio alla coppia (3, 7) associa il numero $3 - 7 = -4 \notin \mathbb{N}$.
- Moltiplicando due numeri primi non otteniamo mai un numero primo. Per esempio, indicando con $\mathbb{P}$ l'insieme dei numeri primi si ha: $(2, 3) \in \mathbb{P}^2$ e $2 \cdot 3 \notin \mathbb{P}$.

Visto quel che abbiamo appena mostrato, risulta importante distinguere le operazioni *conservative* da quelle che invece non lo sono.

Definizione 1

Diciamo che un'operazione binaria * è **interna** su un insieme A o anche che l'insieme A è chiuso rispetto all'operazione *, o ancora che l'insieme A è un **gruppoide**, se a ogni coppia di elementi di A, * associa sempre un elemento di A. In simboli: $a * b = c \in A, \forall (a, b) \in A^2$.

Notazione 2

Un insieme A che risulta gruppoide rispetto all'operazione binaria *, si indica con il simbolo $(A, *)$.

Esempio 3

- Gli insieme numerici *classici* (naturali, interi relativi, razionali, reali), sono gruppoidi sia rispetto all'operazione di somma che a quella di prodotto. Possiamo perciò scrivere:
$$((\mathbb{N},+),(\mathbb{N},\cdot),(\mathbb{Z},+),(\mathbb{Z},\cdot),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{Q},\cdot),(\mathbb{R},+),(\mathbb{R},\cdot)$$
- L'insieme $\mathcal{L}$ delle proposizioni logiche è chiuso rispetto a tutte le operazioni logiche binarie.

Per verificare più facilmente se un dato insieme è o no un gruppoide, specie se l'insieme ha cardinalità finita e relativamente bassa, conviene costruire una tabella delle operazioni.

Esempio 4

- Vogliamo vedere se l'insieme $A = \{1, 2, 3\}$, con l'ordinaria addizione è un gruppoide. Visto che nella tabella operatoria seguente, sono presenti elementi non appartenenti all'insieme (p.e. 4), possiamo dire che A non è un gruppoide.

+	1	2	3
1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6

- Sull'insieme $\mathbb{Z}$ consideriamo la seguente operazione $a \overset{3}{\equiv} b$, il cui risultato è dato dal resto della divisione $(a - b) : 3$. Così per esempio $12 \overset{3}{\equiv} 5 = 1$, perché il resto di $(12 - 5) : 3 = 7 : 3$ è 1; $-5 \overset{3}{\equiv} -2 = 0$, perché il resto di $(- 5-(-2)) : 3 = -3:3$ è 0; $-8 \overset{3}{\equiv} 2 = 2$, perché il resto non negativo di $(-8 - 2) : 3 = - 10 : 3$ è 2 e infatti $-10 = 3 \cdot (-4) + 2$. In questo modo, dato che i resti non negativi sono solo 0, 1 e 2, abbiamo definito una relazione di equivalenza su $\mathbb{Z}$. Così $\mathbb{Z}$ si può suddividere nei seguenti insiemi di elementi fra loro equivalenti: i multipli di 3 ({3, 6, 9, 12, ...}); gli interi che divisi per 3 hanno resto 1 : [1] = {…, –5, –2, 1, 4, 7, 10, ...}; gli interi che divisi per 3 hanno resto 2 : [2] = {…, –4, –1, 2, 5, 8, 11, ...}. Possiamo quindi rappresentare $\mathbb{Z}$ con il seguente insieme finito $\mathbb{Z}_3$ = {[0], [1], [2]}, su questo insieme consideriamo l'ordinaria addizione. Per costruire la tabella operatoria basta considerare i resti delle divisioni $(a - b) : 3$, con a e b che variano da 0 a 2. Abbiamo così la tabella seguente, che si ottiene prima sommando i valori nel modo consueto, così per esempio [2] + [3] = [5], e poi prendendo il resto della divisione di 5 pe2, quindi [5] = [2]. Concludiamo dicendo che l'insieme ($\mathbb{Z}_3$, +) è un gruppoide.

+	**[0]**	**[1]**	**[2]**
[0]	[0]	[1]	[2]
[1]	[1]	[2]	[0]
[2]	[2]	[0]	[1]

Un'altra cosa che notiamo è che per certe operazioni e su certi insiemi alcuni elementi, come il numero 1 per la moltiplicazione e lo 0 per l'addizione, hanno un comportamento che in qualche modo li distingue dagli altri. Infatti se sommiamo due numeri reali, nessuno dei quali è 0, la somma è un numero diverso da entrambi gli addendi, ciò non accade invece se uno degli addendi è 0. Cioè lo 0 ha un comportamento *neutrale*, il suo apporto alla somma è inesistente, nullo.
Vediamo di astrarre quindi questa proprietà dello 0 per l'addizione e dell'1 per la moltiplicazione.

Definizione 2

- Dato un gruppoide (A, *), diciamo che l'elemento $u \in A$ è un **elemento neutro sinistro** per l'operazione *, se si ha: $u * a = a, \forall a \in A$.
- Dato un gruppoide (A, *), diciamo che l'elemento $u \in A$ è un **elemento neutro destro** per l'operazione *, se si ha: $a * u = a, \forall a \in A$.
- Dato un gruppoide (A, *), diciamo che l'elemento $u \in A$ è un **elemento neutro** per l'operazione *, se si ha: $u * a = a * u = a, \forall a \in A$.

L'avere distinto il *verso* di applicazione dell'elemento neutro dipende dal fatto che in generale le operazioni non sono commutative, cioè non è detto che $a * b = b *$ a, per esempio la sottrazione o la divisione in $\mathbb{R}$ non lo sono.

Esempio 5

- L'elemento neutro per l'operazione di unione fra insiemi è ovviamente l'insieme vuoto, $\varnothing$, ed è sia destro che sinistro, dato che l'operazione in questione è commutativa. Si ha cioè $A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A, \forall A$.
- Non ha invece elemento neutro, né destro, né sinistro, l'operazione di intersezione; infatti entrambe le equazioni, nell'incognita l'insieme X, $A \cap X = A$ e $X \cap A = A$, sono indeterminate: $A \cap X = A \Rightarrow A \subseteq X$.
  Così per esempio: $\{1, 2, 3\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3\}$; ma anche $\{1, 2, 3\} \cap \{1, 2, 3, 74, 1111, 23\,334\} = \{1, 2, 3\}$. Stesso discorso per l'altra equazione.
- $(\mathbb{Z}, -)$ ha lo zero come elemento neutro destro ma non sinistro; infatti: $x - 0 = x, \forall x \in \mathbb{Z}$, mentre $0 - x = -x, \forall x \in \mathbb{Z}$.
- Dalla tabella operatoria di ($\mathbb{Z}_3$, +) dell'esempio precedente, possiamo dire che [0] è il suo elemento neutro.

Vale la seguente proprietà.

Teorema 1

Se un gruppoide (A, *) ha un elemento neutro u, questo è unico.
Dimostrazione
Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che esistano due elementi neutri distinti, che indichiamo con u e v, ciò significa che si ha: $u*x = x*u = x, \forall x \in A$ (1) e $v*x = x*v = x, \forall x \in A$ (2). Ma $v \in A$, quindi la (1) diventa $u*v = v*u = v$ e siccome $u \in A$, la (2) diventa $v*u = u*v = u$. In conclusione u e v sono uguali. Ciò è assurdo, quindi vi è un solo elemento neutro.

Abbiamo visto che determinare l'elemento neutro di un'operazione in un dato insieme equivale a risolvere un'equazione i cui elementi appartengono al dato insieme. Una volta che abbiamo determinato l'elemento neutro dell'operazione risulta importante determinare quegli elementi che verificano queste altre equazioni: $a * x = u$ o $x * a = u$, in cui u è appunto l'elemento neutro.

Esempio 6

- L'elemento neutro di $(\mathbb{Z},+)$ sappiamo che è 0. Quindi risolvere l'equazione, nell'incognita x, $z + x = 0$ oppure $x + z = 0$, equivale a trovare quello che chiamiamo *elemento opposto* di z. Così per esempio la soluzione dell'equazione $7 + x = 0$ è l'elemento -7, anch'esso appartenente a $\mathbb{Z}$.
- L'elemento neutro di $(\mathbb{Z},\cdot)$ è 1, ciononostante nessuna delle due equazioni seguenti ha soluzione in $\mathbb{Z}$: $z \cdot x = 1$, $x \cdot z = 1$, per $z = \pm 1$. Ciò significa che quello che per la moltiplicazione chiamiamo *elemento inverso* di un numero intero non è sempre un numero intero. Solo le equazioni $x \cdot 1 = 1$, $1 \cdot x = 1$, $-1 \cdot x = 1$ e $x \cdot (-1) = 1$ ammettono soluzioni in $\mathbb{Z}$.
- Anche il gruppoide $(\mathbb{Q},\cdot)$ non permette la risoluzione delle equazioni $a \cdot x = 1$ e $x \cdot a = 1$, per qualsiasi a. Infatti non hanno soluzioni le equazioni $0 \cdot x = 1$ e $x \cdot 0 = 1$; mentre nel gruppoide $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$ tutti gli elementi hanno inverso.
- Dalla tabella operatoria di $(\mathbb{Z}_3,+)$, possiamo dire che le equazioni $[x] + [1] = [0]$ e $[1] + [x] = [0]$ hanno come soluzione $x = [2]$; viceversa le equazioni $[x] + [2] = [0]$ e $[2] + [x] = [0]$ hanno soluzione $x = [1]$. Quindi [1] e [2] sono fra loro simmetrici, invece [0] è simmetrico di se stesso.

Visti i risultati dei precedenti esempi poniamo alcune definizioni.

Definizione 3

- Dato un gruppoide $(A, *)$, dotato di elemento neutro u, diciamo che $a \in A$ ammette **elemento simmetrico destro** se l'equazione $a * x = u$, ammette un'unica soluzione $x \in A$.
- Dato un gruppoide $(A, *)$, dotato di elemento neutro u, diciamo che $a \in A$ ammette **elemento simmetrico sinistro** se l'equazione $x * a = u$, ammette un'unica soluzione $x \in A$.
- Dato un gruppoide $(A, *)$, dotato di elemento neutro u, diciamo che $a \in A$ ammette **elemento simmetrico** se entrambe le equazioni $a * x = u$ e $x * a = u$, ammettono l'unica soluzione $x \in A$.

Notazione 3

Dato un elemento a, il suo simmetrico si indica con a^{-1}.

Verifiche

Lavoriamo insieme

- *Data l'operazione $a * b = a - b + 2$, stabilire se è interna nell'insieme $\mathbb{N}$.*
  Dobbiamo vedere se $a - b + 2 \in \mathbb{N}$, $\forall a, b \in \mathbb{N}$. Facilmente si vede che l'operazione non è interna, dato che, per esempio, $2 * 5 = 2 - 5 + 2 = -1 \notin \mathbb{N}$.
- *Lo stesso per l'operazione $a \& b = a^b + a$, sempre in $\mathbb{N}$.*
  È interna perché l'elevamento a potenza è interno in $\mathbb{N}$, quindi $a^b \in \mathbb{N}$, ma anche la somma è interna in $\mathbb{N}$, quindi $a^b + a \in \mathbb{N}$, $\forall\ a, b \in \mathbb{N}$.

Stabilire quali fra le seguenti operazioni sono interne nell'insieme su cui sono definite. Per quelle che non lo sono fornire un controesempio.

Livello 1

1. Moltiplicazione nell'insieme $\mathbb{N}_p$ dei numeri naturali pari [Sì]
2. Somma nell'insieme dei divisori di 3 [No, 1 + 3 = 4, non è un divisore di 3]
3. Somma nell'insieme dei numeri naturali minori di 123 [No, p. e. $2+122 \notin \{1, 2, ..., 121, 122\}$]
4. Somma nell'insieme dei multipli di 18 ; Sottrazione in $\mathbb{Z}$ [Sì ; Sì]
5. Moltiplicazione nell'insieme $\mathbb{R}^-$ dei numeri reali negativi [No, p. e. $(-2) \cdot (-3) \notin \mathbb{R}^-$]
6. Divisione nell'insieme $\mathbb{N}_p$ dei numeri pari [No, p. e. $8 : 6 \notin \mathbb{N}_p = \{2, 4, 6, ...\}$]
7. Divisione in $\mathbb{Q}$ [No, p. e. $7 : 0 \notin \mathbb{Q}$] Elevamento a potenza in $\mathbb{Z}$ [No, p. e. $2^{-1} = ½ \notin \mathbb{Z}$]
8. Elevamento a potenza nell'insieme $\mathbb{N}_d$ dei numeri naturali dispari [Sì]
9. Sottrazione nell'insieme $\mathbb{Z}_p$ dei numeri interi pari [Sì]
10. Sottrazione nell'insieme $\mathbb{Z}_d$ dei numeri interi dispari [No, p.e. $3 - 3 = 0 \notin \mathbb{Z}_d$]
11. Somma nell'insieme $\mathbb{P}$ dei numeri primi [No, p. e. $3 + 7 \notin \mathbb{P}$]
12. Moltiplicazione nell'insieme dei numeri composti (cioè non primi e maggiori di 1) [Sì]
13. Moltiplicazione nell'insieme $\{-1, 1\}$; Somma nell'insieme $\{-1, 0, 1\}$ [Sì ; Sì]
14. Somma nell'insieme $\mathbb{Z}_6 = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\}$ [Sì]

Livello 2

15. Unione nell'insieme delle parti di {1, 2, 3, ..., 1000} [Sì]
16. Intersezione nell'insieme delle parti di {1, 2, 3, ..., 1000} [Sì]
17. Intersezione nell'insieme { {1}, {1, 2}, {1, 3}} [Sì]
18. Differenza nell'insieme degli insiemi di cardinalità finita dispari [No, p.e. {1,2,3}\{1} = {2,3}]
19. Differenza simmetrica nell'insieme delle parti di $A = \{1, 2, 3\}$ [Sì]
20. Disgiunzione inclusiva nell'insieme delle proposizioni logiche contraddittorie [Sì]
21. Disgiunzione esclusiva nell'insieme delle proposizioni logiche tautologiche
    [No, la disgiunzione esclusiva di due proposizione entrambe vere è una proposizione falsa]
22. Prodotto nell'insieme $\mathbb{Z}_5 = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$, con $[a] \times [b] = [a \cdot b]$ [Sì]
23. Prodotto nell'insieme dei multipli di 5 [Sì]

Livello 3

24. Determinare quali delle quattro operazioni aritmetiche elementari sono chiuse nell'insieme dei quadrati perfetti: $\{1, 4, 9, 16, 25, \ldots n^2, \ldots\}$ [Solo la moltiplicazione]

Lavoriamo insieme

Data l'operazione $a * b = a + 2b + 7$, in $\mathbb{N}$, stabilire se ha elemento neutro, sinistro, destro o bilatere.

- Dobbiamo risolvere, in $\mathbb{N}$, le equazioni seguenti nell'incognita x: $a + 2x + 7 = a \Rightarrow 2x + 7 = 0$, che non ha soluzione in $\mathbb{N}$, dato che la somma di due numeri naturali non è mai zero. Quindi non c'è elemento neutro destro.

- L'equazione $x + 2b + 7 = b \Rightarrow x = -2b - 7$, invece non ha un'unica soluzione, quindi non vi è elemento neutro sinistro.
- La stessa operazione definita in $\mathbb{Q}$ avrebbe elemento neutro destro, –7/2, ma continuerebbe a non avere elemento neutro sinistro.

Determinare l'eventuale elemento neutro delle seguenti operazioni binarie

Livello 2

25. Unione nell'insieme delle parti di $\{1, 2, 3\}$ [$\varnothing$]
26. Intersezione nell'insieme delle parti di $\{1, 2, 3\}$ [$\{1, 2, 3\}$]
27. Unione in $\{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}\}$ [$\{1\}$]
28. Differenza simmetrica nell'insieme delle parti di $\{1, 2, 3, 4\}$ [$\varnothing$]
29. Congiunzione nell'insieme delle proposizioni logiche [Tautologia]
30. Disgiunzione inclusiva nell'insieme delle proposizioni logiche [Contraddizione]
31. Disgiunzione esclusiva nell'insieme delle proposizioni logiche [Contraddizione]
32. Elevamento a potenza in $\mathbb{R}$ [1 elemento neutro destro] $a * b = 2\, a \cdot b$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ [½]
33. $a \heartsuit b = (a + 1) \cdot (b + 1) - 1$ in $\mathbb{R}$ [0] $a \diamondsuit b = a + b - 4$ in $\mathbb{R}$ [4]
34. $a \spadesuit b = \dfrac{a+1}{b-1}$ in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ [$\varnothing$] $a \clubsuit b = \dfrac{a}{b} - 4$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ [$\varnothing$]
35. Massimo fra due numeri nell'insieme dei numeri naturali [1]
36. Minimo fra due numeri nell'insieme dei numeri naturali [$\varnothing$]
37. Minimo fra due numeri nell'insieme dei numeri interi negativi [–1]

I Gruppi

Laddove i gruppi si rivelano o possono essere introdotti, la semplicità viene estratta dal caos.
Eric Temple Bell (1883–1960)

Il problema

Consideriamo un generico gruppoide (A, *), quali altre proprietà devono essere verificate da esso affinché possa essere una struttura algebrica *interessante*? Ossia affinché possa essere una struttura algebrica *forte*, comparabile alle strutture numeriche di largo uso, quali i numeri interi, i razionali o i reali?

Per cercare di risolvere il problema posto crediamo che sia opportuno partire proprio da queste strutture numeriche, considerando quali sono le proprietà che esse verificano.

Esempio 7

L'insieme ($\mathbb{N}$, +) è un gruppoide senza elemento neutro, $0 \notin \mathbb{N}$, in cui ciascun elemento non ha elemento simmetrico. Però esso gode sia della proprietà commutativa, $a + b = b + a$, sia della proprietà associativa.

Dato che l'insieme dei numeri naturali è in qualche modo la base di tutti i numeri che abbiamo sinora considerato, riteniamo che la sua struttura algebrica sia abbastanza interessante da meritare una definizione.

Definizione 4

Un gruppoide (A, *) in cui l'operazione * è commutativa, $a * b = b * a$, si dice **gruppoide commutativo** o **abeliano**

Definizione 5

Un gruppoide (A, *) in cui l'operazione * è associativa, $a * (b * c) = (a * b) * c$, si dice **semigruppo**.

In effetti l'insieme dei numeri naturali è un semigruppo commutativo, ma la commutatività di un'operazione viene sempre considerata come un caso a parte, come vedremo anche introducendo le successive strutture algebriche.

Esempio 8

$(\mathbb{N}, \cdot)$ è anch'esso un semigruppo abeliano. Però a differenza di $(\mathbb{N}, +)$ esso contiene anche l'elemento neutro, 1. È perciò un semigruppo abeliano con elemento neutro.

Il successivo insieme da prendere in considerazione è certamente $\mathbb{Z}$. Esso, a differenza di $\mathbb{N}$, almeno relativamente all'operazione di somma, ammette elemento neutro, lo 0, e ogni elemento ammette simmetrico. Riserviamo quindi anche per questa struttura, più ricca della precedente, un'adeguata definizione.

Definizione 6

Un semigruppo (A, *), dotato di elemento neutro e in cui ogni elemento ha simmetrico, si dice **gruppo**. Se A è finito la sua cardinalità si chiama **ordine del gruppo**.

Esempio 9

- L'insieme $(\mathbb{Z}_3, +)$ delle classi resto modulo 3 è un gruppo abeliano. In generale l'insieme delle classi resto modulo qualsiasi numero naturale è un gruppo abeliano, rispetto alla somma fra classi.
- L'insieme $(\mathbb{Z}_3, \times)$ con l'operazione $[a] \times [b] = [a \cdot b]$, non è un gruppo ma un semigruppo abeliano con unità, la classe [1]. Come si nota dalla sua tabella operatoria la classe [0] non ha elemento simmetrico. Le equazioni $[0] \times [x] = [1]$ e $[x] \times [0] = [1]$, non hanno soluzione.

×	**[0]**	**[1]**	**[2]**
[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]
[2]	[0]	[2]	[1]

- L'insieme $\mathcal{M}_8$ dei multipli di 8 è un gruppo abeliano rispetto alla somma. L'elemento unità è 0, il simmetrico del generico elemento $8n$ è $-8n$.
- L'insieme $\mathbb{Z}_1[x]$ dei polinomi di primo grado in una incognita a coefficienti interi relativi è un gruppo abeliano rispetto alla somma di polinomi. L'elemento neutro è il polinomio nullo, 0, il simmetrico del generico polinomio $ax + b$ è il polinomio $-ax - b$.

L'angolo storico

- Il termine **abeliano** per indicare strutture algebriche commutative è dovuto al matematico Leopold Kronecker (1823 – 1891), che lo usò per primo nel 1853, riferendolo ai gruppi. Esso è in onore del matematico norvegese Abel.
- Il termine **gruppo** fu usato in questo senso per la prima volta da Evariste Galois nel 1830, che lo utilizzò per fondare la teoria dei gruppi di sostituzione, che poi utilizzò efficacemente nella teoria della risoluzione delle equazioni algebriche. In seguito il concetto venne sviluppato notevolmente dai più eminenti matematici del tempo, in particolare si ricordano Arthur Cayley (1821 – 1895), Camille Jordan (1838 – 1922), Ludwig Sylow (1832 – 1918) e Marius Sophus Lie (1842 – 1899).

I Protagonisti

**Niels Henrik Abel** nacque il 5 Agosto 1802 nell'isola di Finnoy, in Norvegia, dimostrò ben presto le sue spiccate attitudini per la matematica, tant'è che ad appena diciannove anni riuscì a dimostrare in modo completo il teorema secondo il quale non esistono formule risolutive contenenti solo le quattro operazioni algebriche e i radicali per le equazioni di grado superiore al quarto. Questo risultato era stato già enunciato nel 1799 da Ruffini, ma questi lo aveva ma dimostrato in modo errato. Purtroppo Abel era di una famiglia molto povera e questo condizionò la sua pur breve vita. Addirittura il destino sembrò accanirglisi contro in modo cinico, al punto tale che appena due giorni dopo la morte, avvenuta per tubercolosi il 6 Aprile 1829, fu recapitata la lettera in cui si notificava la sua nomina a professore dell'Università di Berlino. Il suo nome è legato alle strutture algebriche commutative, proprio perché fu uno dei primi a occuparsi di tali argomenti.

**Evariste Galois** è il classico esempio di genio e sregolatezza. Nato nel 1811 in un villaggio vicino Parigi, mostra molto presto le sue brillanti doti matematiche, senza alcun aiuto da parte di nessuno fra i 17 e i 20 anni fonda la teoria dei gruppi di sostituzione che risulterà indispensabile nella teoria delle equazioni algebriche. Purtroppo le sue idee, raccolte in diversi manoscritti, pur inviate più volte ai maggiori matematici dell'epoca non vengono prese in considerazione, probabilmente perché non vengono comprese appieno. Forse a causa di ciò Galois si butta nella lotta politica, finendo in carcere un paio di volte. Infine muore in un duello per futili motivi, probabilmente un tranello, all'alba del 30 maggio 1832. La notte precedente raccoglie tutto la sua produzione matematica e la affida nelle mani di un amico. Solo nel 1870 i suoi lavori furono pubblicati e studiati a cura soprattutto di Camille Jordan.

Il problema

Sia $(G, *)$ un gruppo e sia H un suo sottoinsieme proprio, possiamo concludere che anche $(H, *)$ è un gruppo?

Possiamo rispondere subito negativamente alla questione posta dal problema, dato che per esempio, $(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo mentre $(\mathbb{N}, +)$ non lo è. Ciononostante la questione merita attenzione, quindi poniamo una definizione.

Definizione 7

Dato un gruppo (G, *), diciamo che un suo sottoinsieme H è un suo **sottogruppo** se è un gruppo per la stessa operazione *. Un sottogruppo diverso dallo stesso G e dal sottogruppo formato dalla sola unità, si dice **sottogruppo proprio**.

Esempio 10

- Ogni gruppo ha come suo sottogruppo l'insieme formato dal suo elemento unità: $\{u\}$.
- $(\mathbb{Z},+)$ è un sottogruppo di $(\mathbb{Q},+)$, che è a sua volta un sottogruppo di $(\mathbb{R},+)$.
- $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$ è un sottogruppo di $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$.
- L'insieme $(\mathbb{Z}_1[x],+)$ è un sottogruppo sia del gruppo $(\mathbb{Q}_1[x],+)$, che di $(\mathbb{R}_1[x],+)$; ma anche dei gruppi $(\mathbb{Z}_2[x],+)$, $(\mathbb{Q}_2[x],+)$, $(\mathbb{R}_2[x],+)$, e così via.

L'Antologia

Riportiamo alcuni passi della lettera che Galois scrisse, la notte prima del suo fatale duello, all'amico Auguste Chevalier.

Evariste Galois, 29 maggio 1832

> *Caro amico,ho fatto alcune nuove scoperte in analisi. Alcune riguardano la teoria delle equazioni; altre le funzioni integrali. Nella teoria delle equazioni ho cercato di scoprire le condizioni sotto le quali le equazioni sono risolubili per radicali,* [cioè mediante formule che contengono solo le quattro operazioni aritmetiche elementari e l'estrazione di radice di qualsiasi indice naturale] *e questo mi ha dato l'opportunità di studiare la teoria e di descrivere tutte le possibili trasformazioni di un'equazione perfino quando essa non è risolubile per radicali.*
> *Vi sono tre memorie di tutto questo lavoro.* [...] *La seconda contiene alcune interessanti applicazioni delle teoria delle equazioni. Di seguito te ne riassumo le più importanti:*
> 1°. *Dalle proposizioni II e III della prima memoria, possiamo stabilire una grande differenza fra aggiungere a un'equazione le radici di un'equazione ausiliaria e aggiungerle tutte. In entrambi i casi il gruppo* [questo vocabolo viene usato proprio da Galois] *delle equazioni si può separare in insiemi in modo tale che si possa passare da uno all'altro mediante la stessa sostituzione.*

A questo punto la lettera diviene troppo tecnica perché possa essere comprensibile e interessante per i nostri scopi. Riportiamo quindi solo la conclusione della lettera, che ha anche un interesse che prevalica quello puramente matematico.

> *Sai, mio caro Auguste, che questi argomenti non sono gli unici che ho indagato. Le mie riflessioni, per qualche tempo, sono state dirette soprattutto all'applicazione della teoria dell'ambiguità nell'analisi trascendente.* [...] *Ma io non ho tempo e le mie idee non sono sviluppate in questo campo, che è immenso. Stampa questa lettera nella Revue encyclopédique. Spesso nella mia vita mi sono avventurato a proporre proposizioni sulle quali non avevo certezze; ma tutto ciò che ho scritto qui è stato nella mia testa per quasi un anno, ed è mio interesse non imbrogliare me stesso che sono stato sospettato di annunciare teoremi dei quali non avevo la dimostrazione completa.* [...] *In seguito ci sarà, spero, della gente che troverà profitto a decifrare tutto questo pasticcio. Ti abbraccio,Evariste*

Verifiche

Lavoriamo insieme

Dato l'insieme {{1}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 2, 3}} *e l'operazione di intersezione, che tipo di struttura algebrica otteniamo in questo modo*?

Costruiamo la tabella operatoria

∩	**{1}**	**{1, 2}**	**{1, 3}**	**{1, 2, 3}**
{1}	{1}	{1}	{1}	{1}
{1, 2}	{1}	{1, 2}	{1}	{1, 2}
{1, 3}	{1}	{1}	{1, 3}	{1, 3}
{1, 2, 3}	{1}	{1, 2}	{1, 3}	{1, 2, 3}

Notiamo che l'insieme è un gruppoide abeliano. Ammette elemento neutro? Sì, esso è {1, 2, 3}. Ogni elemento ammette simmetrico? No, solo {1, 2, 3} è simmetrico di se stesso. Vale la proprietà associativa? Sì perché essa vale in generale per l'intersezione. Possiamo perciò dire che la nostra struttura è un semigruppo abeliano con elemento neutro.

Stabilire che tipo di strutture algebriche sono le seguenti. Con i simboli + e ·, indichiamo le consuete operazioni di addizione a moltiplicazione nell'insieme dei numeri reali

Livello **1**

1. a) $(\mathbb{Z},\cdot)$; b) $(\mathbb{Q},+)$; c) $(\mathbb{Q},\cdot)$
[a) Semigruppo abeliano con unità; b) Gruppo abeliano; c) Semigruppo abeliano con unità]
2. a) $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$; b) $(\mathbb{R},+)$; c) $(\mathbb{R},\cdot)$
[a) Gruppo abeliano; b) Gruppo abeliano; c) Semigruppo abeliano con unità]
3. a) ({–1, 1}, ·); b) ({–1, 1}, +); c) ({–1, 0, 1}, ·) [a) Gruppo abeliano; b) Non è una struttura in quanto l'operazione "+" non è interna all'insieme {–1, 1}; c) Semigruppo abeliano con unità]
4. a) ({–1, 0, 1}, +); b) $(\mathbb{Q}^+,+)$; c) $(\mathbb{Z}_d,+)$
[a) Non è un gruppoide, – 1 + –1 = – 2; b) Semigruppo abeliano; c) Semigruppo abeliano]
5. a) $(\mathbb{Q}^+,\cdot)$; b) $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\cdot)$; c) $(\mathbb{R}^-,\cdot)$
[a) Gruppo abeliano; b) No gruppoide, p e $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=4\notin\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; c) Semigruppo abeliano]

Livello **2**

6. a) ($\mathcal{L}$, ∧); b) ($\mathcal{L}$, ∨); c) ($\mathcal{L}$, $\dot{\vee}$)
[a) Semigruppo abeliano con unità; b) Semigruppo abeliano con unità; c) Gruppo abeliano]
7. a) ($\mathcal{P}(X)$, ∪); b) ($\mathcal{P}(X)$, ∩); c) ($\mathcal{P}(X)$, Δ) $\mathcal{P}(X)$ è l'insieme delle parti di *X*
[a) Semigruppo abeliano con unità; b) Semigruppo abeliano con unità; c) Gruppo abeliano]
8. a) (ℕ , max); b) (ℕ , min); c) (ℕ , ∝) con $a \propto b = \dfrac{a+b}{2}$
[a) Semigruppo abeliano con unità; b) Semigruppo abeliano; c) Non è un gruppoide]
9. Insieme dei multipli di 7 rispetto alla moltiplicazione [Semigruppo abeliano]
10. a) $(\mathbb{Z}_2[x],+)$; b) $(\mathbb{R}_2[x],+)$ [a) Gruppo abeliano ; b) Gruppo abeliano]
11. (ℤ , *), con $a * b = a + b + 2$ [Gruppo abeliano] $(\mathbb{R}[x],\cdot)$ [Semigruppo abeliano con elemento neutro]
12. Insieme delle potenze intere di 2: {, 2^{-1}, 2^0, 2^1, } [Gruppo abeliano]

Livello **3**

13. Insieme dei polinomi non nulli di secondo grado in una incognita a coefficienti numeri reali, rispetto alla moltiplicazione di polinomi
[Non è un gruppoide, per esempio $x^2 \cdot x^2 = x^4$, non è un polinomio di secondo grado]

14. $(\mathbb{Q}\setminus\{0\}, \spadesuit)$, con $a \spadesuit b = \frac{a\cdot b}{k}$, al variare di $k \in \mathbb{R}$ [Gruppo abeliano per ogni $k \neq 0$]

15. $(\{1, 2, 100\}, \clubsuit)$, con $(a, b) \clubsuit (c, d) = (\max(a, c), \min(b, d))$ [Semigruppo abeliano con unità]

Lavoriamo insieme

Completare la seguente tabella operatoria in modo da ottenere la tabella di un gruppo.

⊕	a	b	c
a	b	c	
b	c		
c			

Intanto dobbiamo determinare l'elemento neutro, che, con i valori immessi non può essere altri che c. Quindi la tabella diviene come mostrato in figura.

⊕	a	b	c
a	b	c	
b	c		b
c	a	b	c

. A questo punto dobbiamo fare in modo che ogni elemento abbia simmetrico. Dalla tabella possiamo dedurre che a e b sono simmetrici l'un l'altro. Ci rimane da determinare il risultato di $b \oplus b$. Intanto verifichiamo se vale la proprietà associativa.

$(a \oplus b) \oplus c = c \oplus c = c$ e $a \oplus (b \oplus c) = a \oplus b = c$; $(a \oplus c) \oplus b = a \oplus b = c$ e $a \oplus (c \oplus b) = a \oplus b = c$;
$(b \oplus a) \oplus c = c \oplus c = c$ e $b \oplus (a \oplus c) = b \oplus a = c$; $(b \oplus c) \oplus a = b \oplus a = c$ e $b \oplus (c \oplus a) = b \oplus a = c$;
$(c \oplus a) \oplus b = a \oplus b = c$ e $c \oplus (a \oplus b) = c \oplus c = c$; $(c \oplus b) \oplus a = b \oplus a = c$ e $c \oplus (b \oplus a) = c \oplus c = c$

In effetti, dato che l'operazione è commutativa potevamo considerare solo tre verifiche. La proprietà associativa deve valere anche per elementi uguali, così, dato che $(a \oplus b) \oplus b = c \oplus b = b$, l'unico modo perché valga la proprietà associativa è che si abbia $b \oplus b = a$, in questo caso infatti si ha: $a \oplus (b \oplus b) = a \oplus a = b$. Infine la tabella è la seguente.

⊕	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

Completare le seguenti tabelle operatorie in modo che rappresentino tabelle di gruppi abeliani.

Livello 2

16.

⊕	a	b	c
a	a	b	c
b	b		
c	c		

[Impossibile]

⊕	a	b	c
a	b	c	a
b	a		b
c	a		c

[Impossibile]

⊕	a	b	c
a	a	a	a
b	b		
c	b		

17.

⊕	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c			
d	d			c

⊕	a	b	c	d
a	b	c		
b	c			
c				
d				d

Lavoriamo insieme

Un gruppo che ha avuto notevole importanza da un punto di vista storico è stato il cosiddetto gruppo delle sostituzioni su un insieme finito. Consideriamo l'insieme $A = \{1, 2, 3\}$; sappiamo che l'ordine degli elementi non ha alcuna importanza negli insiemi, se però volessimo costruire un numero le cui cifre sono prelevate da

A, il loro ordine sarebbe importante. Infatti i numeri 123 e 132 sono diversi. Consideriamo allora tutte le possibili sostituzioni degli elementi di *A*. Non è difficile vedere che esse sono le seguenti 6:

(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1).

Scrivendo per esempio $\begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix}$, intendiamo dire che stiamo *sostituendo* la cifra 1 con essa stessa, la cifra 2 con la cifra 3 e la cifra 3 con la cifra 2. Possiamo perciò considerare il seguente insieme di sostituzioni su *A*.

$$\left\{\begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix}\right\}$$

sul quale definiamo un'operazione $\circ$ per la cui definizione proponiamo il seguente esempio.

$$\begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}$$

In pratica abbiamo seguito la seguente catena di sostituzioni: $1 \to 1 \to 2$; $2 \to 3 \to 1$; $3 \to 2 \to 3$.

Non è difficile dimostrare che l'insieme delle sostituzioni su un insieme finito è un gruppo rispetto all'operazione di composizione $\circ$, il cui elemento neutro è la sostituzione identica $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$.

Il gruppo delle sostituzioni non è abeliano. Infatti, calcoliamo $\begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix}$. Visto che la sostituzione risultato è diversa da quella ottenuta nell'esempio precedente, possiamo dire che non vale la proprietà commutativa.

Livello 3

18. Costruire la tabella operatoria del gruppo di sostituzione su due elementi: {1, 2}.
19. Costruire la tabella operatoria del gruppo di sostituzione su tre elementi: {1, 2, 3}
20. Costruire la tabella operatoria del gruppo di sostituzione su quattro elementi: {1, 2, 3, 4}
21. Determinare tutti gli eventuali sottogruppi propri del Gruppo delle sostituzioni su: {1, 2, 3}.

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right)\right\}, \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right\}, \\ \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}, \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right\} \end{array}\right]$$

Anelli, Corpi e Campi

L'astrazione, talvolta considerata come un rimprovero nei confronti delle matematiche, è invece il suo capolavoro e il modo più sicuro per condurre all'utilità pratica
Eric Temple Bell

Il problema

Gli insiemi numerici fondamentali non sono mai gruppi rispetto alla moltiplicazione, mentre, a parte $\mathbb{N}$, sono gruppi per l'addizione. In ogni caso l'operazione di moltiplicazione è ugualmente importante in tali insiemi. Risulta perciò interessante studiare strutture algebriche con più di un'operazione. Quali sono le proprietà che rendono importanti tali strutture?

Consideriamo ancora una volta il gruppo $(\mathbb{Z},+)$, ma adesso vediamo quali sono le proprietà che sono verificate in esso per l'operazione di moltiplicazione. Intanto $(\mathbb{Z},\cdot)$ è un semigruppo, inoltre valgono due proprietà che legano fra loro le due operazioni, ossia le leggi distributive:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$
$$(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$$

In effetti dato che la moltiplicazione è commutativa appare inutile separare le due legge distributive, abbiamo però detto che la commutatività delle operazioni sarà sempre considerata come un caso speciale. Riteniamo che queste proprietà caratterizzino strutture come $(\mathbb{Z},+,\cdot)$, quindi poniamo la seguente definizione.

Definizione 8

Si chiama **anello** un insieme A sul quale siano definite due operazioni, che indichiamo con $\oplus$ e $\otimes$, verificanti le seguenti proprietà:
- $(A, \oplus)$ è un gruppo abeliano;
- $(A, \otimes)$ è un semigruppo;
- l'operazione $\otimes$ è distributiva a destra e a sinistra rispetto all'operazione $\oplus$ (cioè $x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$ e $(y \oplus z) \otimes x = (y \otimes x) \oplus (z \otimes x)$)

Se l'operazione $\otimes$ è commutativa, diciamo che anche l'anello è **commutativo**.
Se l'operazione $\otimes$ ha elemento neutro, diciamo che A è un **anello con unità**.

Definizione 9

Un sottoinsieme A di un anello R, che sia a sua volta anello per le stesse operazioni per cui lo è R, si dice **subanello** di R.

Esempio 11

- Gli insiemi $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$, sono anelli rispetto alle ordinarie operazioni di somma e prodotto. In particolare $\mathbb{Q}$ è subanello di $\mathbb{R}$, così come $\mathbb{Z}$ è subanello di entrambi.
- L'insieme dei multipli interi di un dato intero è un anello commutativo. Infatti dato che stiamo considerando un sottoinsieme di $\mathbb{Z}$, l'unica cosa di cui dovremmo accertarci è che la somma e il prodotto di multipli di un generico n siano ancora multipli di n. Ciò è vero dato che
$$h \cdot n + k \cdot n = (h + k) \cdot n \text{ e } (h \cdot n) \cdot (k \cdot n) = h \cdot k \cdot n.$$
- $(\mathbb{Z}[x],+,\cdot)$, $(\mathbb{Q}[x],+,\cdot)$ e $(\mathbb{R}[x],+,\cdot)$ sono anelli.
- Il gruppo $\mathbb{Z}_m$ delle classi resto modulo un numero intero, è un anello rispetto alle operazioni di somma e prodotto fra classi già viste negli esempi precedenti.

L'angolo storico

Il termine Anello (*Ring* nell'originale tedesco) fu inventato dal grande matematico David Hilbert (1862 – 1943), anche se il primo a introdurre il concetto di tale struttura fu Richard Dedekind(1831 – 1916). Parecchi sono i matematici che hanno fondato la teoria degli anelli, vogliamo ricordare in particolare Emmy Noether, anche perché le matematiche storicamente sono state sempre una scienza *maschilista*, per vari motivi soprattutto sociali. Emmy Noether è una delle prime, e per fortuna non l'unica né l'ultima, dei grandi matematici donna.

I Protagonisti

Emmy Amalie Noether fu figlia di un importante matematico, Max Noether. Nacque il 23 Marzo 1882 a Erlangen, che all'epoca era sede di una importante sede universitaria di matematica, in cui insegnava il padre. Dopo aver conseguito il titolo di insegnante di inglese e francese, nonostante l'ammissione agli studi scientifici per le donne fosse soggetta al permesso dei singoli docenti, si iscrisse a Matematica all'Università di Erlangen, dove si laureò nel 1904 e nel 1907 ottenne il dottorato. Per i maschi il passo successivo sarebbe stata l'abilitazione che schiudeva le porte all'insegnamento universitario, ma ciò non era permesso alle donne, così rimase a Erlangen ad aiutare il padre che aveva problemi di salute, continuando nei suoi studi. Nel 1908 fu nominata membro del Circolo Matematico di Palermo, e nel 1909 del Deutsche Mathematiker Vereinigung. Nel 1915 David Hilbert e Felix Klein, due fra i più importanti matematici del periodo e di tutta la storia delle matematiche, la invitarono a ritornare a Göttingen. Ciononostante dovettero passare altri quattro anni affinché potesse ottenere l'abilitazione. A Göttingen, dopo il 1919, cominciò a occuparsi della cosiddetta algebra moderna e nel 1921 scrisse un fondamentale saggio sulla teoria degli anelli: *Idealtheorie in Ringbereichen*. La sua rinomanza internazionale le valse molti premi, ma ciò non le giovò quando nel 1933 fu allontanata dall'Università di Göttingen dai nazisti, perché ebrea. Così si trasferì negli Stati Uniti, presso il Bryn Mawr College e successivamente all'Institute for Advanced Study di Princeton. Morì il 14 Aprile 1935 a Bryn Mawr, Pennsylvania.

Una proprietà dell'insieme dei numeri reali, che usiamo spesso, è il cosiddetto principio di annullamento del prodotto, secondo il quale da $a \cdot b = 0$, possiamo dedurre che uno almeno fra a e b deve essere zero. Ci sono degli anelli per cui tale proprietà non è valida.

Esempio 12

Costruiamo la tabella operatoria di $(\mathbb{Z}_4, \times)$. Abbiamo scritto [2] × [2] = [0], infatti abbiamo [2] × [2] = [4] ma in $\mathbb{Z}_4$ si ha: [4] = [0]. Abbiamo così verificato che in $\mathbb{Z}_4$ non vale la legge di annullamento del prodotto.

×	**[0]**	**[1]**	**[2]**	**[3]**
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]
[2]	[0]	[2]	[0]	[2]
[3]	[0]	[3]	[2]	[1]

Definizione 10

Dato un anello $(A, \oplus, \otimes)$ con unità, che indichiamo con 0, due elementi a e b per cui si ha: $a \otimes b = 0$, si dicono **divisori dello zero**. Un anello privo di divisori dello zero si dice **dominio di integrità**.

I reali, i razionali e gli interi sono quindi domini di integrità. Considerando meglio gli anelli dell'esempio precedente, in particolare i razionali e i reali, vediamo che esse sono delle strutture più ricche di $\mathbb{Z}$. Per esempio sia i reali che i razionali se privati di zero risultano gruppi abeliani anche rispetto all'operazione di moltiplicazione.

Definizione 11

Un anello $(A, \oplus, \otimes)$ con unità, che indichiamo con 0, tale che $(A \setminus \{0\}, \otimes)$ è un gruppo si dice **corpo**. Un corpo commutativo rispetto all'operazione $\otimes$, si dice **campo**.

Da adesso in poi quindi parleremo del campo dei numeri razionali e del campo dei numeri reali.

L'angolo storico

Il termine Campo, in tedesco Körper, fu usato dal matematico tedesco Richard Dedekind nella sua opera *Continuità e numeri irrazionali*, riferendolo al campo dei numeri razionali.

Risulta molto difficile trovare degli esempi elementari di corpi che non sono campi. Vale comunque il seguente teorema, che non dimostriamo.

Teorema 2

Un dominio di integrità non è un corpo.

Concludiamo il paragrafo con degli interessanti esempi di campi finiti.

Esempio 13

Abbiamo considerato più volte negli esempi gli anelli $\mathbb{Z}_m$, in particolare abbiamo già visto che $\mathbb{Z}_4$ è un anello con divisori dello zero, quindi non è un campo. In effetti non è difficile vedere che se m è un numero naturale composto allora $\mathbb{Z}_m$ ha sempre divisori dello zero. Se invece m è un numero primo ciò non accade, infatti se m è composto, quindi si scrive per esempio $m = a \cdot b$, con a e b entrambi diversi da 1, allora avremo $[m] = [0] = [a] \times [b]$. Questo non potrà accadere se invece m è primo. Questi particolari campi sono chiamati **campi di Galois**, il più piccolo di essi è $\mathbb{Z}_2$, che ha solo due elementi $\{[0], [1]\}$, costituisce cioè la partizione di $\mathbb{Z}$ nei numeri pari e in quelli dispari.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Dato l'insieme dei multipli interi di 10, *che indichiamo con* $\mathcal{M}_{10}$, *e le consuete operazioni di somma e prodotto, che tipo di struttura algebrica è*?
Rispetto alla somma abbiamo un gruppo abeliano di elemento neutro 0. Se adesso consideriamo $(\mathcal{M}_{10} \setminus \{0\}, \cdot)$, questo è un semigruppo abeliano senza unità, dato che l' equazione $10x \cdot 10y = 10x \Rightarrow 10y = 1$ non ha soluzioni in $\mathcal{M}_{10} \setminus \{0\}$. Possiamo perciò dire che $(\mathcal{M}_{10} \setminus \{0\}, +, \cdot)$ è un anello, anzi un dominio d'integrità. Infatti l'equazione $10x \cdot 10y = 0$ ammette soluzione solo se uno almeno fra $10x$ e $10y$ è zero.

Stabilire che tipo di strutture algebriche sono le seguenti. Con i simboli + e ·, indichiamo le consuete operazioni di addizione e prodotto nell'insieme dei numeri reali. $\mathcal{P}(X)$ è l'insieme delle parti di X.

Livello 2

1. $(\mathbb{Q}^+, +, \cdot)$; $(\mathbb{Z}_2[x], +, \cdot)$ [Non è un anello ; Dominio di integrità]
2. $(\mathcal{M}_6, +, \cdot)$ (Insieme dei multipli interi di 6) ; $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ [Anello abeliano ; Campo]
3. $(\mathbb{Q}[x], +, \cdot)$ [Non è un anello] $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$; $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ [Non è un anello ; Anello abeliano]

Livello 3

4. $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, max, min)$; $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ [Non è un anello ; Non è un anello]
5. $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$; $(\mathcal{L}, \dot{\vee}, \wedge)$ [Anello commutativo con unità ; Anello commutativo con unità]

Isomorfismi

Le strutture sono le armi dei matematici
Nicholas Bourbaki

Il problema

Considerando le tabelle operatorie dei gruppi: $\{(-1, 1\}, \cdot)$ e $(\mathbb{Z}_2, +)$, notiamo che, a parte i simboli esse sono uguali, come possiamo interpretare questo fatto?

Prima di rispondere al precedente quesito verifichiamo che esso è effettivamente corretto.

Esempio 14

Di seguito costruiamo le due tabelle richieste

·	**–1**	**1**
–1	1	–1
1	–1	1

+	**[0]**	**[1]**
[0]	[0]	[1]
[1]	[1]	[0]

In effetti notiamo che le due tabelle possono essere rappresentate dalla seguente

⊗	***a***	***b***
a	*a*	*b*
b	*b*	*a*

in cui i simboli ⊗, a e b rappresentano volta per volta la moltiplicazione, –1 e 1; la somma, [0] e [1].

Il precedente esempio ci suggerisce di dire che le strutture $\{(-1, 1\}, \cdot)$ e $(\mathbb{Z}_2[x], +)$ sono la stessa struttura, sono lo stesso oggetto matematico visto da diversi punti di vista.

Definizione 12

- Diciamo che due gruppi $(G, \oplus)$ e $(H, \otimes)$ sono fra loro **isomorfi** se le rispettive tabelle operatorie sono coincidenti a meno dei simboli usati.
- Diciamo che due anelli, due corpi o due campi $(R, \oplus, \otimes)$ e $(S, \bullet, \times)$ sono fra loro **isomorfi** se le tabelle operatorie delle operazioni ⊕ e • e quelle delle operazioni ⊗ e ×, sono coincidenti a meno dei simboli u-sati.

Il concetto di strutture isomorfe è fondamentale nelle matematiche proprio perché permette di riconoscere uguali strutture apparentemente diverse nelle varie discipline matematiche. Possiamo così dire che in effetti tutti i gruppi di un dato ordine finito sono praticamente lo stesso gruppo, anche se i rispettivi elementi sono del tutto diversi e appartenenti a diversi ambienti matematici. Così per esempio il gruppo delle isometrie che mutano un triangolo equilatero in sé, che ha 6 elementi, è la stessa struttura del gruppo $\mathbb{Z}_6$ e così via.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Dato il gruppo ({R_0, R_{120}, R_{240}}, °) *delle rotazioni attorno a un dato punto, e il gruppo* $(\mathbb{Z}_3,+)$, *costruire le loro rispettive tabelle operatorie.*

·	R_0	R_{120}	R_{240}
R_0	R_0	R_{120}	R_{240}
R_{120}	R_{120}	R_{240}	R_0
R_{240}	R_{240}	R_0	R_{120}

+	**[0]**	**[1]**	**[2]**
[0]	[0]	[1]	[2]
[1]	[1]	[2]	[0]
[3]	[2]	[0]	[1]

Prima dobbiamo capire cosa accade con le rotazioni. Che significa che componiamo due rotazioni? Che prima applichiamo una rotazione e poi l'altra. Quindi basta sommare gli angoli. Ma, come accade nell'orologio, quando raggiungiamo il giro completo (360°, ripartiamo da zero. Così per esempio componendo R_{120} e R_{240}, otteniamo R_{360}, cioè R_0. Quindi la tabella operatoria è quella a lato.
Per ($\mathbb{Z}_3$, +), invece è quella accanto.

Notiamo che le due strutture sono equivalenti alla struttura presentata nell'ultima figura, in cui sostituiamo al posto dei simboli {a, b, c}, una volta le rotazioni, una volta le classi modulo. Possiamo perciò dire che il gruppo delle rotazioni di 120° e il gruppo dei resti modulo 3 sono fra loro isomorfi. $\mathbb{Z}_3$ è anche un campo, invece l'insieme delle rotazioni non lo è, quindi da questo punto di vista non vi è isomorfismo.

*	***a***	***b***	***c***
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Livello 2

1. Verificare che $(\mathbb{Z}_2,+)$ è isomorfo al gruppo delle sostituzioni su due elementi.
2. Verificare che $(\mathbb{Z}_6,+)$ è isomorfo al gruppo delle sostituzioni su tre elementi.
3. Verificare che $(\mathbb{Z}_m,+)$ è isomorfo al gruppo dei multipli interi secondo un qualsiasi numero naturale.

Livello 3

4. Dati due gruppi di ordine 2, possiamo dire che sono sempre isomorfi? Giustificare la risposta. [Sì]
5. Abbiamo visto che $\mathbb{Z}_2$ = ({[0], [1], [2]} e ({R_0, R_{120}, R_{240}}, °) sono fra loro isomorfi. Consideriamo la relazione binaria {[0] → R_0, [1] → R_{120}, [2] → R_{240}}. Verificare che, comunque si considerino a, b ∈ $\mathbb{Z}_2$ la relazione precedente associa alla classe [a + b] la composizione delle rotazioni associate ai singoli elementi.

L'angolo di Derive

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%201/1-3/1-3-1.exe puoi scaricare un file che mostra come usare le operazioni con Derive. Cliccando invece su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%201/1-3/1-3-1.dfw scarichi il file in Derive.
Attività Svolgere gli esercizi precedenti.

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi

1. Sia (A, *) un gruppoide e $B \subset A$, possiamo sempre dire che anche (B, *) è un gruppoide? Giustificare la risposta. [No, p. e. (N, +) è un gruppoide, ({1, 2}, +) non lo è]
2. Sia (A, *) un gruppoide e $A \subset B$, possiamo sempre dire che anche (B, *) è un gruppoide? Giustificare la risposta. [No, p. e. ({0, 1}, +) è un gruppoide, ({– 2, 0, 1}, +) non lo è]

Stabilire che tipo di strutture algebriche sono le seguenti. Con i simboli + e ·, indichiamo le consuete operazioni di addizione a moltiplicazione nell'insieme dei numeri reali.

3. Insieme delle frazioni algebriche rapporto di polinomi di primo grado non nulli a coefficienti numeri reali, espressioni del tipo $\frac{ax+b}{cx+d}$ con $a \neq 0$ e $c \neq 0$, rispetto alla moltiplicazione. [Gruppo abeliano]
4. Per quali valori reali di k la struttura ($\mathbb{Z}$, *, •), con $a * b = a + b + 7$ e $a \bullet b = a \cdot b + k$ è un anello? [$k = 0$]
5. Consideriamo due gruppi (G, ⊕) e (H, ⊗) fra loro isomorfi. Costruiamo una funzione f: $G \to H$, che associa a ogni elemento di G quello che nella tabella operatoria di H si *comporta* allo stesso modo. Dimostrare che quali che siano gli elementi $a, b \in G$, vale l'uguaglianza: $f(a \oplus b) = f(a) \otimes f(b)$.
6. Risolvere l'equazione (3, 2) Φ (0, 0) = (x, y) Φ (3, 2), con (a, b) Φ (c, d) = (a – c, b + d), in $\mathbb{R}^2$.[(6, 0)]
7. Data l'operazione $a \blacklozenge b = a^b$, provare che $(a \blacklozenge b)^n = a \blacklozenge (b \cdot n)$. [$(a\blacklozenge b)^n = (a^b)^n = a^{b \cdot n} = a \blacklozenge (b \cdot n)$]
8. Sono dati due numeri naturali a e b. Quale delle seguenti affermazioni è sempre verificata? Fornire dei contro esempi per ciascuna delle affermazioni false. [C)]
   A) Se $a + b$ è pari allora $a \cdot b$ è pari
   B) Se $a + b$ è pari allora $a \cdot b$ è dispari
   C) Se $a + b$ è dispari allora $a \cdot b$ è pari
   D) Se $a + b$ è dispari allora $a \cdot b$ è dispari
   E) Nessuna delle precedenti

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
AL = Alabama University Mathematics Contest
HSMC = Texas University High School Mathematics Contest
NC = North Carolina University Math Contest
L = Louisiana University Math Contest
MT =Mathematics Teacher, rivista della NCTM
V = Vermont University

Lavoriamo insieme

Il seguente quesito è stato assegnato agli HSMC del 2006.
Se $a \otimes b = 2ab - 7b + a$ *e* $a \oplus b = a + 3b$, *determinare* 3 ⊗ (4 ⊕ 2).
Abbiamo: 3 ⊗ (4 ⊕ 2) = 3 ⊗ (4 + 3 ·2) = 3 ⊗ 10 = 2 · 3 · 10 – 7 · 10 + 3 = – 7.

1. (MT1995) Se $a \Delta b = b^a + a^b$, calcolare (2 Δ 3) Δ 2. [131361]
2. (HSMC 2005) Se $a \otimes b = ab - 3a + 1$, determinare 5 ⊗ (7 ⊗ 5). [61]
3. (HSMC 2007) Se $x \clubsuit y = x - y^2$ e $x \blacklozenge y = x^3 + xy + y^2$, determinare 2 ♣ (3 ♦ (–2)). [– 623]
4. (V 2007) Definiamo l'operazione ternaria: $[x, y, z] = \frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}$. Calcola [3, 2, –4]. $\left[-\frac{14}{29}\right]$
5. (L 2008) Se $a \blacklozenge b = a^{b-1}$ per $a, b > 0$, calcolare 3 ♦(2♦3). [27]
6. (AL 2009) Se $a \otimes b = ab + 1$ e $a \oplus b = a + b$, calcolare 4 ⊗ [(6⊕8) ⊕ (3⊗5)]. [121]
7. (NC 2009) L'operazione $a \otimes b = \sqrt{a+b}$ è definita sui numeri reali positivi. Quali delle seguenti affermazioni sono vere? I. Ha sempre risultato positivo II. È commutativa III. È associativa.
   a) solo I b) solo II c) solo I e II d) solo I e II e) I, II e III [d]

8. (HSMC 2011) Sia l'operazione ⋆ definita da $a \star b = a^2 + 3^b$. Calcolare (2 ⋆ 0) ⋆ (0 ⋆ 1). [52]

Questions in English

Working together

*Suppose that * is an associative operation on a set S . Define x^n to mean x * x * x * …* x, n times. (So, for example, $x^3 = x * x * x$) Suppose further that an element a of S is such that all of a , a^2 , . . . , a^9 are different but $a^{10} = a^3$. Then there is some element b belonging to S such that $b = b^2$. One such element b is:*

a) a^4 b) a^5 c) a^7 d) a^9 e) a^{13}

We have: $\left(a^4\right)^2 = a^8; \left(a^5\right)^2 = a^{10} = a^3; \left(a^7\right)^2 = a^{14} = a^{10} \cdot a^4 = a^3 \cdot a^4 = a^7$; $\left(a^9\right)^2 = a^{18} = a^{10} \cdot a^8 = a^3 \cdot a^8 = a^{11} =$ $= a^{10} \cdot a = a^3 \cdot a = a^4$; $\left(a^{13}\right)^2 = a^{26} = \left(a^{10}\right)^2 \cdot a^6 = \left(a^3\right)^2 \cdot a^6 = a^6 \cdot a^6 = a^{10} \cdot a^2 = a^2$. Hence the answer is c).

9. (HSMC 2001) Given that $a \otimes b = \dfrac{a^2 + b}{2}$. What is the value of $5 \otimes 3$? [14]

10. (NC 2002) Define the operation ⊗ as $x \otimes y = xy(x - y)$. Find x where $x \neq 0$ and $x \otimes 7 = x$.
a) 8/7 b) 50/7 c) 7 d) 1/7 e) equation has no solution [b]

11. (V 2005) Define the operation ⊕ by $a \oplus b = \dfrac{a - b}{a + b}$. Find all values of c such that (1⊕2)⊕ =1⊕(2⊕ c). $\left[-\dfrac{2}{3} \vee -1\right]$

12. (HSMC 2008) The operation * is defined by $a * b = \dfrac{3a - 2b}{2ab}$ for all a, $b \neq 0$. If $x * y$ = ¼ and $y*x = -1$, find $x * x$. $\left[-\dfrac{1}{2}\right]$

13. (AL 2009) Let ⊗ be defined by $a \otimes b = a^2 + b$. And let ⊕ be defined by $a \oplus b = a - b^2$. What is $(a \oplus b) \otimes b$? $[a^2 - 2ab^2 + b^4 + b]$

14. (NC 2009) Define the operation * by $x * y = 4x - 3y + xy$, for all real numbers x and y. For how many real numbers y does $3 * y = 12$? a) 0 b) 1 c) 3 d) 4 e) more than 4 [e]

15. (MT1994) The binary operation ⊗ on whole numbers is defined as $a \otimes b = 2a + 3b$. Compute (3 ⊗ 4) ⊗ 5. [51]

Quelli che ... vogliono saperne di più

Ordine dei sottogruppi

Riprendiamo il concetto si sottogruppo ed enunciamo senza dimostrazione tre importanti risultati sui sottogruppi.

Teorema 3

Condizione necessaria e sufficiente affinché $H \subset (G, *)$ sia sottogruppo di G è che

$$x, y \in H \Rightarrow x * y^{-1} \in H.$$

Teorema 4 (di Lagrange)

Dato un gruppo finito di ordine n i suoi eventuali sottogruppi hanno ordine che è un divisore di n.

Corollario 1

I sottogruppi finiti di ordine un numero primo non hanno sottogruppi propri.

I Protagonisti

**Joseph Louis Lagrange** nacque a Torino il 25 gennaio 1736 da una famiglia di origine francese. Nonostante i desideri paterni che lo volevano destinare alla professione di avvocato si interessò precocemente di fisica e geometria. I risultati ottenuti furono tali da fargli meritare la nomina, poco più che ventenne, a insegnante di matematica presso la scuola di artiglieria di Torino. In seguito si trasferì a Berlino a succedere al grande Eulero. I suoi interessi matematici furono vari, anche se i più importanti risultati furono raggiunti nella teoria dei numeri, nell'analisi matematica e nella meccanica razionale di cui può essere considerato uno dei fondatori. Nell'ultimo periodo della sua vita ebbe importanti incarichi nell'impero napoleonico, fu nominato senatore. Morì a Parigi il 10 Aprile 1813.

Esempio 15

Abbiamo già visto in precedenza che l'insieme delle classi resto $\mathbb{Z}_m$ è un gruppo abeliano per ogni numero naturale m, grazie al corollario 1, possiamo perciò dire che $\mathbb{Z}_3$ dato che ha 3 elementi, ha un solo sottogruppo proprio che è {[0]}. Se invece consideriamo $\mathbb{Z}_8$, questo può avere altri sottogruppi, oltre quello unità, precisamente sottogruppi che hanno 2, 4, 8 elementi. Escludendo quello con 8 elementi, che è lo stesso $\mathbb{Z}_8$, vediamo se effettivamente possono esistere questi sottogruppi. Costruiamo la tabella operatoria di $\mathbb{Z}_8$.

+	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[1]	[1]
[3]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[0]	[2]	[2]
[4]	[4]	[5]	[6]	[7]	[0]	[1]	[3]	[3]
[5]	[5]	[6]	[7]	[0]	[1]	[2]	[4]	[4]
[6]	[6]	[7]	[0]	[1]	[2]	[3]	[5]	[5]
[7]	[7]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[6]	[6]

Affinché un sottoinsieme sia gruppo deve certamente contenere fra i suoi elementi l'elemento unità, in questo caso [0]. Allora l'eventuale sottogruppo di ordine 2 sarà {[0], [x]}. D'altro canto ogni elemento deve avere simmetrico, quindi [x] deve essere simmetrico si se stesso, considerando la precedente tabella osserviamo che ciò accade solo per [4], quindi vi è un solo sottogruppo di ordine 2: {[0], [4]}. Passiamo adesso agli eventuali sottogruppi di ordine 4. Essi saranno del tipo {[0], [x], [y], [z]}, in cui i tre elementi o sono simmetrici di se stessi, ma ciò non è possibile dato che solo [4] lo è, oppure uno solo lo è e gli altri due sono simmetrici fra loro. Questa è però una condizione necessaria ma non sufficiente, dato che poi l'insieme deve risultare chiuso rispetto all'operazione. Vediamo allora quali sono i candidati a essere sottogruppi di ordine 4. A = {[0], [1], [4], [7]}, che non lo è perché [1] + [4] = [5] $\notin$ A; B = {[0], [2], [4], [6]}, che lo è perché [2] +

[4] = [6] e [4] + [6] = [10] = [2]; C = {[0], [3], [4], [5]}, che non lo è perché [3] + [4] = [7] $\notin C$. In conclusione il dato gruppo ammette tre sottogruppi propri: {[0]}, {[0],[4]} e {[0],[2],[4],[6]}.

Un'ultima cosa che vogliamo prendere in considerazione è il fatto che alcuni gruppi sembrano *creati*, mediante l'applicazione successiva dell'operazione a uno stesso elemento. Chiariamo con un esempio.

Esempio 16

Consideriamo il gruppo delle classi resto modulo 3 rispetto all'addizione, che sappiamo essere formato dalle classi {[0], [1], [2]}. Vogliamo considerare somme ottenute aggiungendo più volte lo stesso addendo. Se esso è [0] è evidentemente che il risultato sarà sempre [0]. Vediamo cosa succede invece con [1]. Abbiamo [1] + [1] = [2], [1] + [1] + [1] = [2] + [1] = [3] = [0]. A questo punto è chiaro che se continuiamo a sommare [1] otterremo sempre gli stessi tre elementi. Possiamo quindi dire che il solo elemento [1] è in grado di *generare* tutto il gruppo.

Notazione 4

Dato un gruppoide (G, *), indichiamo con a^n il risultato dell'operazione $a * a * \ldots * a$, in cui il numero di operandi è proprio n.

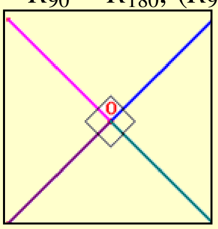
In vista dell'esempio precedente possiamo stabilire la seguente definizione.

Definizione 13

Dato un gruppo (G, *) di ordine n ed elemento neutro u, diciamo che esso è un **gruppo ciclico di ordine *n*** se esiste $g \in G$: $g^n = u$ e $g, g^2, \ldots, g^n$ sono tutti e soli gli elementi distinti di G. g si dice **generatore del gruppo**.

Esempio 17

- $(\mathbb{Z},+)$ è un gruppo ciclico generato da 1, infatti per il generico numero intero positivo n si ha: $n = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n}$. Il generico numero negativo è simmetrico di un positivo e l'unità, 0, si può considerare come ripetizione di zero volte 1.
- Il gruppo delle rotazioni attorno a uno stesso centro, di angoli multipli di 90° è ciclico di ordine 4. I suoi elementi sono le rotazioni di 0° (elemento neutro), di 90°, di 180° e di 270°. Il generatore è la rotazione di 90°, indicata con R_{90}, infatti $(R_{90})^2 = R_{90} \circ R_{90} = R_{180}$, $(R_{90})^3 = R_{180} \circ R_{90} = R_{270}$, $(R_{90})^4 = R_{270} \circ R_{90} = R_0$, come mostrato anche in figura.



Verifiche

Lavoriamo insieme

Data la tabella operatoria del gruppo di sostituzione su tre elementi, determinarne tutti i sottogruppi.
Per il teorema di Lagrange l'ordine dei sottogruppi può essere, 1, 2, 3, o 6. Escludendo i sottogruppi banali di 1 e 6 elementi. Vediamo quelli di ordine 2. Dato che uno degli elementi deve essere l'elemento neutro, $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$, l'altro elemento deve essere simmetrico di se stesso. Dalla tabella notiamo che di tali elementi ce ne sono tre: $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$. Quindi ci sono anche due sottogruppi di ordine 2.
Per l'ordine 3, dobbiamo avere al solito l'elemento neutro e poi due elementi simmetrici l'un l'altro. Ne abbiamo una sola coppia: $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}$, quindi vi è un solo sottogruppo di ordine 3.

Determinare tutti gli eventuali sottogruppi propri dei seguenti gruppi

Livello 3

1. $\mathbb{Z}_2$ [∅] $\mathbb{Z}_3$ [∅] $\mathbb{Z}_4$ [{[0], [2]}] $\mathbb{Z}_5$ [∅] $\mathbb{Z}_6$ [{[0], [3]}, {[0], [2], [4]}] $\mathbb{Z}_7$ [∅]
2. $(\mathcal{M}_{24}, +)$ Gruppo additivo dei multipli interi di 24. [$\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_3$, $\mathcal{M}_4$, $\mathcal{M}_6$, $\mathcal{M}_8$, $\mathcal{M}_{12}$]

Nei seguenti esercizi indichiamo con R_k una rotazione di dato centro, uguale per tutte, di angolo k°.

3. $\{R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}\}$ [$\{R_0\}$, $\{R_0, R_{180}\}$, $\{R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}\}$]
4. $\{R_0, R_{60}, R_{120}, ..., R_{300}\}$ [$\{R_0\}$,$\{R_0, R_{180}\}$, $\{R_0, R_{120}, R_{240}\}$]
5. $\{R_0, R_{45}, R_{90}, ..., R_{315}\}$ [$\{R_0\}$,$\{R_0, R_{180}\}$, $\{R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}\}$]
6. $\{R_0, R_{30}, R_{60}, ..., R_{330}\}$ [$\{R_0\}$,$\{R_0, R_{180}\}$,$\{R_0, R_{30}, R_{330}\}$, $\{R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}\}$, $\{R_0, R_{60}, R_{120}, ..., R_{300}\}$]

Lavoriamo insieme

- *Dato il gruppo* $(\mathbb{Z}[x],+)$ *possiamo dire che è ciclico*?

  Ossia, esiste un suo elemento che genera tutti gli altri? No, perché la somma di due polinomi di un certo grado è sempre un polinomio dello stesso grado.
- *È ciclico il gruppo* $(\mathcal{M}_5, +)$ *dei multipli interi di* 5?

  Questo gruppo può considerarsi generato da 5. Infatti 5 + 5 = 10 = 2 · 5, 5 + 5 + 5 = 3 · 5 e così via. Per quanto riguarda i multipli negativi basta considerare i simmetrici di quelli positivi. Infine per generare lo zero, consideriamo 5 e il suo simmetrico, –5, si ha infatti: 5 + (–5) = 0.

Stabilire quali fra i seguenti sono gruppi ciclici, determinando l'elemento generatore.

Livello 3

7. $(\mathbb{Z}_m,+)$; $(\mathbb{Z}_2[x],+)$ [Ciclico, generato da [1] ; Non è ciclico]
8. $(\mathcal{M}_n, +)$, gruppo dei multipli interi del numero naturale n [Ciclico, generato da n]
9. Gruppo delle potenze intere di 10, rispetto al prodotto [Ciclico, generato da 10]
10. Gruppo delle sostituzioni su tre elementi: {1, 2, 3 } [Non è ciclico]
11. $\{R_0, R_{30}, R_{60}, ..., R_{330}\}$; $\{R_0, R_{45}, R_{90}, ..., R_{315}\}$ [Ciclico, generato da R_{30} ; Ciclico, gen. da R_{45}]
12. Per quali valori di $k \in \mathbb{N}$, R_k genera gruppi ciclici? Per quale valore il gruppo ha maggiore cardinalità? [k deve essere divisore di 360; k = 1]

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_3_1.htm

2. Geometria delle coordinate

2.1 Risoluzione dei sistemi lineari

Prerequisiti
- Concetto di corrispondenza biunivoca.
- Concetto di equazione e sua risoluzione.
- Vettori e matrici da un punto di vista algebrico.
- Operazioni di somma e di prodotto fra vettori e matrici.

Obiettivi
- Calcolare il determinante di una matrice quadrata.
- Calcolare il rango di una matrice.
- Calcolare l'inversa di una matrice non singolare.
- Risolvere sistemi lineari
- Discutere sistemi lineari parametrici.

Contenuti
- Risoluzione di n equazioni in n incognite
- Inversione di matrici
- Risoluzione di n equazioni in m incognite

  Quelli che … vogliono saperne di più
  - Metodo di diagonalizzazione di Gauss.

Parole Chiave
Complemento algebrico – Determinante – Matrice aggiunta – Matrice estratta – Matrice identità – Matrice singolare – Matrice triangolare – Minore complementare – Rango o caratteristica – Trasposta

Simbologia
$|A|$ Indica il determinante di A

$\|a_{ij}\|$ Indica una matrice di elemento generico a_{ij}

A^{-1} Indica l'inversa della matrice non singolare A

A^{T} Indica la trasposta della matrice A

$r(A)$ Indica il rango della matrice A

Richiamiamo le conoscenze

L'Algebra delle matrici

Supponiamo di volere effettuare una lotteria, i cui premi sono una bicicletta, un lettore DVD e un lettore MP3. Se scriviamo i premi in forma insiemistica: {bicicletta, DVD, MP3}, non diamo un chiaro riferimento su quale di essi è il primo, quale il secondo e quale il terzo premio. Ciò significa che in alcuni casi non è importante solo stabilire la natura di alcuni oggetti, ma anche considerare un loro ordine interno. Indicando per esempio i precedenti premi con il seguente simbolo [bicicletta, DVD, MP3], vogliamo sottolineare la posizione di ciascuno di essi e quindi il fatto che il primo premio è la bicicletta, il secondo il DVD e il terzo l'MP3. In vista di quanto detto possiamo stabilire la seguente definizione.

Definizione A

Un raggruppamento di oggetti disposti in un elenco ordinato si chiama **vettore**, ciascuno degli elementi dell'elenco si chiama **componente del vettore**.

Notazione A

Indicheremo un vettore scrivendone gli elementi ordinati all'interno di parentesi quadrate. [1, a, £, 2] è un esempio di vettore con 4 componenti.

Esempio A

{1, –2, 5, 14}, {14, –2, 1, 5} rappresentano lo stesso insieme. Mentre i vettori [1, –2, 5, 14] e [14, 1, –2, 5] sono fra loro diversi.

I vettori oltre che in orizzontale (**vettore riga**), possono scriversi in verticale (**vettore colonna**): $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 14 \end{bmatrix}$

La differenza fra le due scritture è significativa solo per le operazioni che possono definirsi nell'insieme dei vettori.

Definizione B

Dati due vettori disposti allo stesso modo e aventi lo stesso numero di componenti, diciamo loro **somma algebrica** il vettore i cui componenti si ottengono sommando algebricamente i componenti dei due vettori che occupano la stessa posizione.

Esempio B

- Non hanno significato le seguenti scritture: [1, 2, 3] + [2, 3, 4, 5], perché il primo vettore ha tre componenti e il secondo ne ha quattro; $\begin{bmatrix} 1, & 2, & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ perché il primo vettore è in riga, il secondo in colonna.
- Possiamo invece effettuare le seguenti operazioni:

[1, 2, –3] – [2, –3, 4] = [1 – 2, 2 – (–3), –3 – 4] = [–1, 5, –7] e $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -1+2 \\ 2+0 \\ \frac{1}{2}+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 2 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}$.

Se abbiamo vettori riga o vettori colonna con ugual numero di componenti, possiamo organizzarli ordinatamente come mostrato di seguito: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -2 & \sqrt{2} \\ -4 & \frac{3}{7} & 1-\sqrt{3} \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

Definizione C

L'insieme di due o più vettori colonna con lo stesso numero di componenti, disposti in un elenco ordinato si chiama **matrice**; ciascuno dei vettori colonna si chiama **colonna** della matrice; i vettori riga formati da tutti gli elementi dei vettori colonna che occupano la stessa posizione, si chiamano **righe** della matrice.
Se la matrice è formata da n vettori ciascuno contenente m componenti, si dice che è una **matrice $m \times n$**. Ciascun elemento della matrice viene individuato da una coppia di numeri naturali che indicano, nell'ordine, la riga e la colonna cui esso appartiene.

Esempio C

Con riferimento alla precedente matrice, essa ha 4 righe e 3 colonne, cioè è una matrice 3 × 4. Il suo elemento di posto (4, 3) è 3, il suo elemento di posto (2, 3) è $\sqrt{2}$.

La somma algebrica fra matrici viene definita come già visto per i vettori.

Esempio D

Sommiamo le due matrici 3 × 2 seguenti: $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ \sqrt{5} & 0 \\ -3 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ \sqrt{5}-2 & 3 \\ -\frac{11}{4} & 1 \end{bmatrix}$.

Vi sono parecchi modi di definire l'operazione di moltiplicazione, ma il più diffuso è quello cosiddetto **righe per colonne**.

Definizione D

Date due matrici, la prima $m \times n$ e la seconda $n \times p$, diciamo loro prodotto righe per colonne la matrice $m \times p$, in cui il generico componente di riga h e colonna k si ottiene sommando i risultati delle moltiplicazioni termine a termine fra gli elementi della riga h della prima matrice per i corrispondenti elementi della colonna k della seconda matrice.

Esempio E

Non possiamo effettuare il prodotto righe per colonne di una matrice 3×5 per una 4×2; possiamo invece moltiplicare fra loro le seguenti matrici 3×2 e 2×5: $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) & 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 & 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 & 1 \cdot 0 - 1 \cdot 5 & 1 \cdot 1 - 1 \cdot 4 \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) & 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 5 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 4 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) & 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 5 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -1 & -5 & -3 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 2 \\ -5 & 5 & 18 & 20 & 19 \end{bmatrix}$$

Il risultato è una matrice 3×5.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Date le matrici quadrate di ordine 3: $A=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$, $B=\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$, *determinare la matrice* $2A+B-A\cdot B$.

Dobbiamo cioè calcolare: $2\cdot\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{Vmatrix}-\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$

Procediamo: $\begin{Vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 6 & 8 \\ -4 & 2 & 0 \end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{Vmatrix}-\begin{Vmatrix} 1\cdot 3+0\cdot 1-1\cdot 1 & 1\cdot 2+0\cdot(-2)-1\cdot 0 & 1\cdot 0+0\cdot 4-1\cdot 2 \\ 2\cdot 3+3\cdot 1+4\cdot 1 & 2\cdot 2+3\cdot(-2)+4\cdot 0 & 2\cdot 0+3\cdot 4+4\cdot 2 \\ -2\cdot 3+1\cdot 1+0\cdot 1 & -2\cdot 2+1\cdot(-2)+0\cdot 0 & -2\cdot 0+1\cdot 4+0\cdot 2 \end{Vmatrix}$

Abbiamo prima moltiplicato per 2 ogni elemento della matrice *A*, poi abbiamo moltiplicato fra loro le matrici *A* e *B* seguendo l'apposita regola del prodotto righe per colonne. Continuiamo:

$$\begin{Vmatrix} 2+3 & 0+2 & -2+0 \\ 4+1 & 6-2 & 8+4 \\ -4+1 & 2+0 & 0+2 \end{Vmatrix}-\begin{Vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 13 & -2 & 20 \\ -5 & -6 & 4 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -8 & 6 & -8 \\ 2 & 8 & -2 \end{Vmatrix}$$

Livello 1

1. Eseguiamo il prodotto righe per colonne fra una matrice 3×2 e una matrice 2×3: che tipo di matrice otteniamo? [Una matrice 3×3]
2. Eseguiamo il prodotto righe per colonne fra una matrice 4×3 e una matrice 4×3: che tipo di matrice otteniamo? [Non è possibile effettuare il prodotto righe per colonne]
3. Eseguiamo il prodotto righe per colonne fra una matrice 5×2 e una matrice $2\times n$. Quanto deve essere n affinché la matrice prodotto sia quadrata? [5]
4. Scrivere la generica matrice opposta della matrice $\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$. $\left[\begin{Vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{Vmatrix}\right]$

Semplificare le seguenti espressioni matriciali

5. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$; $3\cdot\begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{Vmatrix}+4\cdot\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{Vmatrix}$; $\begin{Vmatrix} 3 & \frac{1}{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{Vmatrix}-3\cdot\begin{Vmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{Vmatrix}$ $\left[\begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 7 \end{Vmatrix};\begin{Vmatrix} -3 & 10 \\ 0 & -3 \end{Vmatrix};\begin{Vmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ \sqrt{2} & -\frac{3}{4} \end{Vmatrix}\right]$
6. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{Vmatrix}^2$; $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$; $\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{Vmatrix}^3+\begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{Vmatrix}^3$ $\left[\begin{Vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{Vmatrix};\begin{Vmatrix} -2 & 1 & 3 & -5 \\ 1 & 4 & 3 & -2 \end{Vmatrix};\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}\right]$
7. $\begin{Vmatrix} -1 & 2 & \sqrt{3} \\ 1+\sqrt{2} & -1 & 0 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ \sqrt{2} & -1 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$; $2\cdot\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{Vmatrix}-\begin{Vmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ -1 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} -1 & \frac{2}{3} \end{Vmatrix}$ $\left[\begin{Vmatrix} 1+2\cdot\sqrt{2} & 2\cdot\sqrt{3}-2 \\ -1-2\cdot\sqrt{2} & 1 \end{Vmatrix};\begin{Vmatrix} 1 & -\frac{4}{3} \\ \frac{13}{3} & -\frac{2}{9} \\ 5 & \frac{2}{3} \end{Vmatrix}\right]$

8. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}^4 - \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}^4$; $\left(\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{Vmatrix} \right)^2$ $\left[\begin{Vmatrix} -1 & 8 & 22 \\ -2 & -1 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \end{Vmatrix} ; \begin{Vmatrix} 14 & 16 & -22 \\ -7 & 30 & -47 \\ -21 & -3 & 19 \end{Vmatrix} \right]$

9. $3 \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix} + 2 \cdot \begin{Vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & -1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}^2$; $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{Vmatrix}^{12}$ $\left[\begin{Vmatrix} 1 & -7 & -5 \\ 4 & 9 & 15 \\ 11 & 9 & 4 \end{Vmatrix} ; \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 3^{11} \\ 0 & 2^{12} & 0 \\ 3^{12} & 0 & 0 \end{Vmatrix} \right]$

10. $\left(\begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{Vmatrix} \right) \cdot \left(\begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 0 \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{Vmatrix} \right)$; $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix}^{15}$ $\left[\begin{Vmatrix} -51 & -6 \\ -8 & -1 \end{Vmatrix} ; \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{15} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{15} \end{Vmatrix} \right]$

11. $\left(\begin{Vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} -1 & 4 \\ \sqrt{2} & -1 \end{Vmatrix} \right)^2$; $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}^3$ $\left[\begin{Vmatrix} \frac{9 \cdot \sqrt{2} - 7}{2} & 0 \\ 0 & \frac{9 \cdot \sqrt{2} - 7}{2} \end{Vmatrix} ; \begin{Vmatrix} 3^6 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{12} & 0 \\ 0 & 0 & 3^6 \end{Vmatrix} \right]$

Lavoriamo insieme

Data una generica matrice diagonale: $\begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$, *calcolare la sua seconda potenza.*

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}^2 = \begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^2 \end{Vmatrix}$$

Non è difficile generalizzare il precedente risultato a una qualsiasi potenza k, scrivendo:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}^k = \begin{Vmatrix} a_{11}^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^k \end{Vmatrix}$$

Livello 1

Calcolare le potenze delle seguenti matrici quadrate

12. $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}^{20}$; $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}^{50}$; $\begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}^{10}$ $\left[\begin{Vmatrix} 2^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{Vmatrix} ; \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} ; \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \right]$

13. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}^{40}$; $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}^{30}$; $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}^{20}$ $\left[\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} ; \begin{Vmatrix} 2^{14} & 0 & 2^{14} \\ 0 & 2^{15} & 0 \\ 2^{14} & 0 & 2^{14} \end{Vmatrix} ; \begin{Vmatrix} 2^{19} & 0 & 2^{19} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{19} & 0 & 2^{19} \end{Vmatrix} \right]$

14. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{Vmatrix}^5$; $\begin{Vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{Vmatrix}^8$; $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{Vmatrix}^{100}$ $\left[\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 242 & 243 & 0 \\ 11000 & 12555 & 7776 \end{Vmatrix} ; \begin{Vmatrix} 1 & -255 & 2515 \\ 0 & 2^8 & -18915 \\ 0 & 0 & 3^8 \end{Vmatrix} ; \begin{Vmatrix} a^{100} & 0 & 0 \\ 0 & a^{100} & 0 \\ 0 & 0 & a^{100} \end{Vmatrix} \right]$

15. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}^{12}$; $\begin{Vmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{Vmatrix}^{100}$; $\begin{Vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{Vmatrix}^{100}$ $\left[\begin{Vmatrix} 2\cdot 3^5 & -3^5 & -3^5 \\ -3^5 & 2\cdot 3^5 & -3^5 \\ -3^5 & -3^5 & 2\cdot 3^5 \end{Vmatrix}; \begin{Vmatrix} 2^{49}\cdot a^{100} & 0 & 2^{49}\cdot a^{100} \\ 0 & 2^{50}\cdot a^{100} & 0 \\ 2^{49}\cdot a^{100} & 0 & 2^{49}\cdot a^{100} \end{Vmatrix}; \begin{Vmatrix} a^{100} & 0 & 0 \\ 0 & a^{100} & 0 \\ 0 & 0 & a^{100} \end{Vmatrix}\right]$

Livello 2

16. Dimostrare che l'insieme delle matrici quadrate è chiuso rispetto all'operazione di somma.
17. Dimostrare che l'insieme delle matrici quadrate è chiuso rispetto all'operazione di prodotto righe per colonne.
18. La somma è interna nell'insieme delle matrici quadrate a elementi non nulli? [No]
19. Il prodotto righe per colonne è interna nell'insieme delle matrici quadrate di ordine 2 a elementi non tutti nulli? [No]

Risoluzione di un sistema lineare di *n* equazioni in *n* incognite

Il problema

Vogliamo trovare una formula che permetta di risolvere un generico sistema di due equazioni in due incognite: $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ mx+ny+p=0 \end{cases}$.

Dall'algebra studiata nel biennio conosciamo diversi metodi per risolvere sistemi di due o più equazioni in altrettante incognite. Uno di questi, il più usato, e anche il più *usabile* nel senso che è sempre applicabile per ogni sistema lineare, è quello di sostituzione.

Esempio 1

Vogliamo risolvere il sistema $\begin{cases} 2x+3y-1=0 \\ 5x-2y+3=0 \end{cases}$. Scegliamo un'incognita da una delle due equazioni, che risolveremo rispetto a tale incognita, considerando l'altra alla stregua di un parametro. Per esempio, risolviamo rispetto alla x la prima equazione: $\begin{cases} x=\dfrac{1-3y}{2} \\ 5x-2y+3=0 \end{cases}$. Poiché la prima equazione è scritta in modo diverso pur non essendo cambiata, e poiché essa è un'uguaglianza, ciò significa che il secondo membro è un modo *diverso* di scrivere il primo, cioè di esprimere l'incognita x. Possiamo allora *sostituire* tale espressione alla x nella seconda equazione: $\begin{cases} x=\dfrac{1-3y}{2} \\ 5\cdot\dfrac{1-3y}{2}-2y+3=0 \end{cases}$. In tal modo questo sistema continua a essere equivalente (ha cioè le stesse soluzioni) di quello iniziale, ma nello stesso tempo è scritto in un modo da facilitarne la risoluzione. In particolare la seconda equazione contiene una sola incognita, quindi può risolversi in modo numerico e non più parametrico: $\begin{cases} x=\dfrac{1-3y}{2} \\ \dfrac{5-15y-4y+6}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1-3y}{2} \\ -19y+11=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1-3y}{2} \\ y=\dfrac{11}{19} \end{cases}$.

A questo punto abbiamo trovato la soluzione del sistema relativamente all'incognita y. Possiamo perciò sostituire tale valore alla y nella prima equazione, trovando così anche il valore di x: $\begin{cases} x=\dfrac{1-3\cdot\dfrac{11}{19}}{2} \\ y=\dfrac{11}{19} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{19-33}{38} \\ y=\dfrac{11}{19} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{7}{19} \\ y=\dfrac{11}{19} \end{cases}$. In questo modo abbiamo risolto il sistema.

La tecnica che abbiamo appena illustrato può essere utilizzata per un sistema generico, naturalmente con un po' più di *attenzione*, dato che in questo caso dovremo tenere conto del fatto che stiamo lavorando con *parametri*, cioè con termini che possono assumere qualsiasi valore reale.

Esempio 2

Risolviamo, con il metodo di sostituzione, il sistema $\begin{cases} a\cdot x+b\cdot y=c \\ m\cdot x+n\cdot y=p \end{cases}$. Ricavando x dalla prima equazione, abbiamo: $\begin{cases} x=\dfrac{c-b\cdot y}{a} \\ m\cdot x+n\cdot y+p=0 \end{cases}$. Formuliamo un'*obiezione*: la prima equazione ha questa nuova espressione solo se a non è zero, diversamente non possiamo dividere per tale valore. L'obiezione può sembrare inutile poiché, se a fosse zero, semplicemente non esisterebbe e quindi non potremmo dividere per esso. Noi stiamo cercando però una *formula*, quindi un'espressione utilizzabile sempre, anche se $a = 0$. Continuiamo a risolvere: $\begin{cases} x = \dfrac{c - b \cdot y}{a} \\ m \cdot \dfrac{c - b \cdot y}{a} + n \cdot y - p = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{c - b \cdot y}{a} \\ \dfrac{c \cdot m - b \cdot m \cdot y + a \cdot n \cdot y - a \cdot p}{a} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{c - b \cdot y}{a} \\ (a \cdot n - b \cdot m) \cdot y + c \cdot m - a \cdot p = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{c - b \cdot y}{a} \\ y = \dfrac{a \cdot p - c \cdot m}{a \cdot n - b \cdot m} \end{cases}$. Ancora una volta abbiamo ottenuto un denominatore parametrico. L'espressione di y è quella scritta solo se $an - bm \neq 0$. Questa è perciò una condizione necessaria perché il sistema abbia soluzione. Si ha: $\begin{cases} x = \dfrac{c - b \cdot \dfrac{a \cdot p - c \cdot m}{a \cdot n - b \cdot m}}{a} \\ y = \dfrac{a \cdot p - m \cdot c}{a \cdot n - b \cdot m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\dfrac{a \cdot c \cdot n - b \cdot c \cdot m - a \cdot b \cdot p + b \cdot c \cdot m}{a \cdot n - b \cdot m}}{a} \\ y = \dfrac{a \cdot p - m \cdot c}{a \cdot n - b \cdot m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a \cdot c \cdot n - a \cdot b \cdot p}{a \cdot (a \cdot n - b \cdot m)} \\ y = \dfrac{a \cdot p - m \cdot c}{a \cdot n - b \cdot m} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{c \cdot n - b \cdot p}{a \cdot n - b \cdot m} \\ y = \dfrac{a \cdot p - m \cdot c}{a \cdot n - b \cdot m} \end{cases}$

Abbiamo a questo punto provato il seguente teorema.

Teorema 1

Il sistema di equazioni lineari a coefficienti reali: $\begin{cases} a \cdot x + b \cdot y = c \\ m \cdot x + n \cdot y = p \end{cases}$, se e solo se $a \cdot n - b \cdot m \neq 0$, ammette l'unica soluzione: $\begin{cases} x = \dfrac{c \cdot n - b \cdot p}{a \cdot n - b \cdot m} \\ y = \dfrac{a \cdot p - m \cdot c}{a \cdot n - b \cdot m} \end{cases}$.

Quello che si nota è che abbiamo espresso, come era ovvio, la soluzione in termini soltanto dei coefficienti delle incognite e dei termini noti. Ciò ci conduce a riscrivere il sistema in modo da non visualizzare le incognite, cioè in una matrice a 2 righe e 3 colonne: $\begin{Vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \end{Vmatrix}$. In effetti, tuttavia, noi notiamo che nella nostra formula i valori compaiono a quattro a quattro; pertanto conviene considerare matrici di ordine due. Prima di stabilire quali, cerchiamo di capire come possa associarsi a ognuna di queste matrici una *regola di calcolo*, in modo da ottenere quanto espresso dalla formula.

Lavoriamo intanto sul denominatore della soluzione. In questo caso, considerando $\begin{Vmatrix} a & b \\ m & n \end{Vmatrix}$, ad essa associamo la regola di calcolo: $a \cdot n - b \cdot m$. Affinché tale regola sia valida anche negli altri casi, dobbiamo considerare queste altre matrici relative ai numeratori delle due frazioni: $\begin{Vmatrix} c & b \\ p & n \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} a & c \\ m & p \end{Vmatrix}$.

Possiamo ora enunciare la seguente definizione.

Definizione 1

Data una matrice quadrata di ordine 2: $\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$, il numero $a \cdot d - b \cdot c$ si chiama suo **determinante**.

Notazione 1

Il determinante della matrice $\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$, si indica con $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Questa notazione è dovuta a Leopold Kronecker (1823 – 1891).

Possiamo così scrivere in modo diverso la formula soluzione del sistema di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} a \cdot x + b \cdot y = c \\ m \cdot x + n \cdot y = p \end{cases} : x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ p & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix}}, = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ m & p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix}}.$$

Non dobbiamo dimenticare che il Teorema 1 è *incompleto*, dato che non dice nulla nel caso in cui sia $a \cdot n - b \cdot m = 0$. Chiaramente, in questo caso, il sistema non ha una sola soluzione, ma ciò non significa che non ne abbia alcuna.

Esempio 3

- Consideriamo il sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 0 \end{cases}$. Ad esso non possiamo applicare il Teorema 1, perché abbiamo $2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 0$. Non è difficile vedere però che possiamo scrivere il sistema nella seguente forma equivalente, ottenuta dividendo per 2 ciascun termine della seconda equazione: $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$. Le due equazioni del sistema sono in evidente contraddizione tra loro, quindi è ovvio che esso non ha soluzioni.
- Risolvendo il sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases}$, con la stessa tecnica precedente, avremo: $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$. Questa volta le due equazioni non sono in contraddizione, poiché sono la stessa equazione; il che significa che in realtà ci è chiesto di risolvere l'equazione in due variabili $2x + 3y = 1$. Tale equazione ha evidentemente infinite soluzioni.

L'esempio precedente ci permette di *completare* l'enunciato del Teorema 1.

Teorema 1'

Il sistema di equazioni lineari a coefficienti reali $\begin{cases} a \cdot x + b \cdot y = c \\ m \cdot x + n \cdot y = p \end{cases}$,

- se $\begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix} = a \cdot n - b \cdot m \neq 0$, ammette l'unica soluzione $x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ p & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix}}, = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ m & p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix}}$;
- se $\begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix} = a \cdot n - b \cdot m = 0 \wedge \begin{vmatrix} c & b \\ p & n \end{vmatrix} = c \cdot n - b \cdot p = 0 \wedge \begin{vmatrix} a & c \\ m & p \end{vmatrix} = a \cdot p - c \cdot m = 0$, ammette infinite soluzioni;
- se $\begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix} = a \cdot n - b \cdot m = 0 \wedge \begin{vmatrix} c & b \\ p & n \end{vmatrix} = c \cdot n - b \cdot p \neq 0 \wedge \begin{vmatrix} a & c \\ m & p \end{vmatrix} = a \cdot p - c \cdot m \neq 0$, non ammette soluzioni.

Dimostrazione

Dobbiamo provare le 2) e 3). Intanto osserviamo che se $a \cdot n - b \cdot m = 0$ e $m \cdot n \neq 0$, segue $\frac{a}{m} = \frac{b}{n}$,cioè possiamo moltiplicare una delle due equazioni del sistema in modo che i coefficienti delle incognite siano fra loro uguali in entrambe. Adesso se anche $c \cdot n = b \cdot p$ e $a \cdot p = c \cdot m$, avremo $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$, cioè le due equazioni sono equivalenti, e quindi avremo infinite soluzioni; diversamente sono contraddittorie, e non ne avremo alcuna.

Vorremmo generalizzare quanto ottenuto nel caso di un sistema di due equazioni a sistemi di un qualsivoglia numero di equazioni in altrettante incognite. Ciò non è difficile da un punto di vista formale, porta però alla risoluzione di diverse questioni. Innanzi tutto dobbiamo pensare a un modo per indicare un generico sistema lineare in un numero qualsiasi di incognite. Non conviene usare ancora le lettere x, y, z, ... per indicare le incognite, dato che non sappiamo *quante* sono. È preferibile invece usare una sola lettera incognita, per esempio x, usando dei numeri per distinguere fra loro le incognite; scriviamo perciò x_1, x_2, ..., x_n. Ciò per i coefficienti non basta, dato che dobbiamo indicare non solo l'incognita di cui ciascuno è coefficiente, ma anche l'equazione a cui appartiene. Conviene pertanto usare due numeri, il primo per indicare appunto l'equazione e il secondo l'incognita.

Notazione 2

Un generico sistema lineare di n equazioni in n incognite si indica con $\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \ldots + a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{cases}$

che chiamiamo **forma normale di Cramer – Leibniz**.

A esso associamo i seguenti $n + 1$ determinanti:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ b_2\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_n\ a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11}\ b_1\ a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ b_2\ a_{23} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{2n}\ b_n\ a_{n3} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots, D_n = \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1(n-1)}\ b_1 \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2(n-1)}\ b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2} \ldots a_{n(n-1)}\ b_n \end{vmatrix}$$

In cui il generico D_k si ottiene da D, sostituendo la sua k-esima colonna con quella dei termini noti.

Esempio 4

Il sistema $\begin{cases} 2x - 3y + z - t = 1 \\ 3x - y - 2t = 0 \\ 4y + 3z - t = 1 \\ -x + y - 2z + 6t = -2 \end{cases}$, lo scriviamo simbolicamente: $\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + a_{14} \cdot x_4 = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 + a_{24} \cdot x_4 = b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 + a_{34} \cdot x_4 = b_3 \\ a_{41} \cdot x_1 + a_{42} \cdot x_2 + a_{43} \cdot x_3 + a_{44} \cdot x_4 = b_4 \end{cases}$, con la seguente corrispondenza fra i simboli: per le incognite $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = t$; per i coefficienti delle incognite $a_{11} = 2$, $a_{12} = -3$, $a_{13} = 1$, $a_{14} = -1$; $a_{21} = 3$, $a_{22} = -1$, $a_{23} = 0$, $a_{24} = -2$; $a_{31} = 0$, $a_{32} = 4$, $a_{33} = 3$, $a_{34} = -1$; $a_{41} = -1$, $a_{42} = 1$, $a_{43} = -2$, $a_{44} = 6$; per i termini noti $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, $b_3 = 1$, $b_4 = -2$.

La precedente notazione ci permette di generalizzare in parte il Teorema 1 nel seguente modo:

Teorema 2 (di Cramer–Leibniz)

Il sistema di equazioni lineari a coefficienti reali $\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + \ldots + a_{nn}\cdot x_n = b_n \end{cases}$, se $D = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$, ammette l'unica soluzione $x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{D}$;diversamente ammette infinite soluzioni o non ammette soluzioni.

L'angolo storico

Il teorema precedente è spesso associato al solo Cramer, ma da questi viene semplicemente ritrovato nel 1750: una sua prima esposizione è infatti presente in alcuni manoscritti e in alcune lettere scritte da Leibniz ad altri matematici sul finire del 1600.

I protagonisti

**Gabriel Cramer** nacque a Ginevra il 31 Luglio 1704 da una famiglia alquanto agiata (il padre era medico), ad appena 18 anni ottenne un premio per un lavoro sulla teoria del suono. Due anni dopo gli fu offerta la cattedra di matematica all' Académie de Clavin di Ginevra; nel contratto era previsto che egli dovesse trascorrere almeno un paio di anni viaggiando in modo da aumentare le sue conoscenze scientifiche. Nell'insegnamento usò la lingua francese invece del tradizionale latino, in modo da interessare anche coloro che, pur avendo passione per le scienze, non conoscevano abbastanza il latino. Nei suoi viaggi si recò prima a Basilea dove lavoravano alcuni dei più brillanti matematici dell'epoca, come Johann Bernoulli e soprattutto Eulero,. poi in Inghilterra dove incontrò fra gli altri Halley, de Moivre e Stirling, infine a Parigi. Ritornò a Ginevra nel 1729. Pur non pubblicando articoli particolarmente importanti nella storia delle matematiche, si occupò di molti argomenti. Il suo lavoro più importante è *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* pubblicato nel 1750, dove è presentato il teorema che oggi porta il suo nome. Questo lavoro gli costò così grande fatica, da essere costretto a due mesi a letto. Gli venne anche suggerito di recarsi nel sud della Francia a trascorrere un periodo di riposo, ma appena due settimane dopo aver lasciato Ginevra, il 4 Gennaio 1752, morì a Bagnols–sur–Cèze.

In effetti la generalizzazione del Teorema 1a un numero qualsiasi di incognite ed equazioni si è limitata al caso in cui il sistema è determinato, rimane in ogni caso il problema di associare una regola di calcolo ai determinanti di ordine *n* con *n* > 2. Per fare ciò utilizzeremo un metodo che si usa spesso nelle matematiche, quello cioè di ricondurre un problema che non si sa risolvere alla risoluzione di altri problemi che sanno invece risolversi. Spieghiamoci meglio con un esempio.

Esempio 5

Vogliamo risolvere il seguente sistema: $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ 3x - y = 0 \\ 4y + 3z = 1 \end{cases}$. Usando il teorema di Cramer – Leibniz: dobbiamo calcolare i determinanti $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

Per semplificare le procedure poniamo alcune definizioni.

Definizione 2

Data una matrice quadrata di ordine n: $A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$, chiamiamo suo **minore complementare relativo a un elemento a_{ij}**, la matrice, di ordine $(n - 1)$, che si ottiene da A eliminando la riga e la colonna che si incrociano nel dato elemento.

Notazione 3

Il minore complementare relativo all'elemento a_{ij} si indica con A_{ij}.

Esempio 6

Nella matrice $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -3 & 2 \end{Vmatrix}$, il minore complementare relativo all'elemento –2 (che occupa la riga 3 e la colonna 2) è $A_{32} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \end{Vmatrix}$.

Definizione 3

Data una matrice quadrata di ordine n: $A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$, chiamiamo **complemento algebrico di un suo elemento a_{ij}**, il determinante, di ordine $(n - 1)$, che si ottiene moltiplicando il minore complementare di a_{ij} per $(-1)^{i+j}$.

Esempio 7

Nella matrice $A = \begin{Vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 5 \end{Vmatrix}$, il complemento algebrico dell'elemento –1 (che occupa la riga 2 e la colonna 1) è $(-1)^{2+1} \cdot A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot (5 - 8) = 3$. Il complemento algebrico dell'elemento $a_{33} = 5$ è: $(-1)^{3+3} \cdot A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (3 + 1) = 4$.

Usando le precedenti definizioni, il calcolo di un determinante del III ordine può essere scritto nel seguente modo simbolico: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} - a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$. Questo fatto ci permette di generalizzare facilmente il calcolo di un qualsiasi determinante; prima però diciamo che con la parola *linea* indichiamo una riga o una colonna senza precisare di che cosa si tratti.

Teorema 3 (di Laplace)

Per calcolare un determinante di ordine n, si sceglie una qualsiasi sua riga o colonna, si moltiplica ciascuno degli elementi della linea scelta per i rispettivi complementi algebrici e se ne calcola la somma risultante. In simboli, scegliendo la riga k: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{k+1} \cdot a_{k1} \cdot A_{k1} + (-1)^{k+2} \cdot a_{k2} \cdot A_{k2} + \ldots + (-1)^{k+n} \cdot a_{kn} \cdot A_{kn}$

o, scegliendo la colonna h : $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{h+1} \cdot a_{1h} \cdot A_{1h} + (-1)^{h+2} \cdot a_{2h} \cdot A_{2h} + \ldots + (-1)^{h+n} \cdot a_{nh} \cdot A_{nh}$

L'angolo storico

Lo studio dei determinanti anche da un punto di vista storico nasce come strumento nella teoria della risoluzione dei sistemi lineari. Fra i primi a introdurre il concetto è Gotfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), uno dei più prolifici e versatili uomini di cultura di tutti i tempi: egli è infatti sia un famoso filosofo, sia un matematico. Passano circa cento anni perché la teoria cominci a consolidarsi e svilupparsi, soprattutto con Cramer, Bezout, Laplace e Vandermonde, tutti matematici di lingua francese. Nel XIX secolo il vocabolo determinante viene usato dal grande matematico Karl Friedrich Gauss. E' sempre nel XIX secolo che vengono trovati i risultati più importanti.

I protagonisti


Pierre Simon de Laplace nacque a Beaumont–en–Auge, in Francia, il 28 Marzo 1749. Inizialmente si dedicò agli studi teologici presso l'Università di Caen, dopo aver frequentato una scuola benedettina nella sua città natale. A Caen cominciò però a interessarsi di matematica, conseguendo ben presto ottimi risultati, tanto da ottenere un incarico di insegnante presso la prestigiosa Ecole Militaire di Parigi ad appena 19 anni. Durante la Rivoluzione francese fu uno dei membri della Commissione designata per stabilire le unità dei pesi e delle misure. Occupò cariche politiche prestigiose sia durante l'impero napoleonico, sia durante la restaurazione borbonica, ebbe interessanti incarichi e fu persino nominato marchese nel 1817. I suoi interessi scientifici furono multiformi E ottenne risultati fondamentali in meccanica celeste; ricordiamo in particolare la *Exposition dusystemedu monde* del 1796, in cui espone la propria ipotesi cosmologica secondo la quale il sistema solare si originò a partire da una nebulosa. Ma è soprattutto da ricordare *Traité de Mecanique Céleste*, pubblicato in cinque volumi in un arco di 26 anni. Si interessò anche di probabilità: il suo nome è associato alla cosiddetta visione *classica* o appunto *laplaciana* della probabilità. I suoi studi sui determinanti cominciano intorno al 1770. Morì a Parigi il 5 Marzo 1827.

Esempio 8

Vogliamo calcolare il determinante $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 5 \end{vmatrix}$. Grazie al teorema di Laplace possiamo scegliere una sua riga o colonna qualsiasi; scegliamo per esempio la seconda colonna e scriviamo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot (-4) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (-5 + 0) + 1 \cdot (15 + 4) + 4 \cdot (0 - 2) = 5 + 11 - 8 = 8.$$

In effetti la migliore scelta sarebbe stata quella di coinvolgere l'unico elemento nullo, quindi la terza colonna o la seconda riga, poiché in questo modo avremmo calcolato un determinante in meno, dato che appunto non è necessario calcolare quello relativo a zero.

L'esempio precedente, nella sua "versione semplificata", ci suggerisce di cercare regole che permettano di trasformare i determinanti in altri a essi equivalenti, ma contenenti il maggior numero possibile di zeri. Infatti, già il calcolo di un determinante di ordine 4 presuppone il calcolo di 4 determinanti di ordine 3 e quindi di 12 di ordine 2. Intanto abbiamo il seguente corollario.

Corollario 1

Un determinante con una linea di elementi nulli è esso stesso nullo.
Dimostrazione Basta applicare il teorema di Laplace lavorando sulla linea nulla.

Un altro immediato corollario è il seguente.

Corollario 2

Moltiplicando tutti gli elementi di una linea di un determinante per uno stesso numero reale k, otteniamo un determinante che è k volte quello iniziale.
Dimostrazione
Consideriamo un generico determinante: $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$. Moltiplichiamo tutti gli elementi di una sua linea, per esempio la prima riga di A, per il numero reale k, ottenendo il nuovo determinante $k \cdot A = \begin{vmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \dots & k \cdot a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$. Applicando il teorema di Laplace agendo sulla prima riga, calcoliamo il determinante: $k \cdot a_{11} \cdot A_{11} - k \cdot a_{12} \cdot A_{12} + \dots + k \cdot (-1)^{1+n} \cdot a_{1n} \cdot A_{1n}$. Adesso mettiamo in evidenza il fattore comune: $k \cdot [a_{11} \cdot A_{11} - a_{12} \cdot A_{12} + \dots + (-1)^{1+n} \cdot a_{1n} \cdot A_{1n}] = k \cdot |A|$. L'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che nella parentesi abbiamo lo sviluppo del determinante di A.

Esempio 9

Sia $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 5 \end{vmatrix}$ il determinante che abbiamo già calcolato nell'esempio precedente. Scambiamo fra loro la prima e la terza riga: $\begin{vmatrix} -2 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$. Calcoliamo questo determinante agendo sulla prima riga: $\begin{vmatrix} -2 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$. Calcoliamo ora il determinante iniziale agendo sulla terza riga: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$. In questo modo i due determinanti differiscono solo perché i tre determinanti di II ordine hanno le righe scambiate: ciò provoca un cambiamento di segno in ogni determinante, quindi anche nel determinante iniziale. Infatti si ha: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$.

In pratica nell'esempio precedente abbiamo provato il seguente risultato

Corollario 3
Se in un determinante scambiamo fra loro due linee parallele, il determinante ottenuto ha valore opposto a quello di partenza.

Infatti se in un determinante del III ordine scambiamo fra loro due linee parallele il determinante cambia segno. Ma allora ciò sarà vero anche in uno del IV ordine, dato che per il suo calcolo ci basiamo su 4 determinanti del III ordine. Possiamo perciò dire che il Corollario 3 è vero. A questo punto risulta immediato il seguente fatto.

Corollario 4
Un determinante con due linee parallele uguali o proporzionali è nullo.
Dimostrazione
Se le due linee sono uguali, scambiandole fra loro non cambieremo né la matrice, né il determinante. Però il Corollario 3 dice che il determinante deve cambiare di segno. Cioè $|A| = -|A|$, il che accade solo se $|A| = 0$.
Se le due linee sono proporzionali, raccogliendo e portando all'esterno il fattore comune ricadiamo nel caso precedente.

Grazie al precedente corollario possiamo capire perché il Teorema 2 non ha potuto generalizzare completamente il Teorema 1, nel senso che quando il determinante della matrice incompleta è nullo, dalla sola conoscenza degli altri determinanti non possiamo dire se il sistema è indeterminato o impossibile. Consideriamo un esempio.

Esempio 10
Consideriamo il seguente sistema chiaramente indeterminato perché formato da tre equazioni identiche: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=1 \end{cases}$. Calcoliamo i quattro determinanti: $D = D_1 = D_2 = D_3$ che sono ovviamente nulli: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.
Adesso consideriamo il seguente sistema impossibile perché le prime due equazioni sono identiche ma in ovvia contraddizione con la terza equazione. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=2 \end{cases}$. Anche i suoi quattro determinanti sono nulli.

Possiamo a questo punto enunciare il teorema che permette di semplificare il calcolo dei determinanti.

Teorema 4
Moltiplicando una o più linee per delle costanti e poi sommando il tutto a un'altra linea parallela alle precedenti, il determinante ottenuto non cambia.

Non dimostriamo il precedente teorema, ma ne forniamo un esempio di applicazione.

Esempio 11
Vogliamo calcolare il determinante $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$. Per facilitarne il calcolo cerchiamo di *creare* in esso il maggior numero possibile di zeri. Intanto sottraiamo fra loro la seconda e la quarta riga, scrivendo il

risultato come seconda riga: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2-2 & -1-4 & 3-(-3) & 1-1 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$. Adesso moltiplichiamo la quarta riga per –2 e sommiamo il risultato alla terza riga:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 0 \\ 2\cdot(-2)+4 & 4\cdot(-2)+0 & -3\cdot(-2)-1 & -2\cdot 1+2 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 0 \\ 0 & -8 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

In questo modo abbiamo la quarta colonna che contiene ben tre zeri e perciò conviene calcolare il determinante rispetto a tale colonna: $1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -8 & 5 \end{vmatrix}$. Anche questo determinante contiene una colonna con un solo elemento non nullo, quindi continuiamo sviluppando rispetto a tale colonna: $1\cdot\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -8 & 5 \end{vmatrix} = -25+48=23$.

Abbiamo calcolato alla fine solo un determinante del II ordine, invece di 4 determinanti del III ordine e cioè 12 del II ordine.

Dal precedente teorema segue quest'altro risultato.

Corollario 5

Un determinante in cui una linea si ottiene come somma algebrica di due o più linee a essa parallele, eventualmente moltiplicate per delle costanti, è nullo.

Non dimostriamo il precedente corollario, ma lo verifichiamo con un esempio.

Esempio 12

Nel determinante $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 9 \end{vmatrix}$ è facile vedere che la terza riga si ottiene moltiplicando la prima riga per 2 e sottraendo a tale prodotto, termine a termine, la seconda riga: 4 = 2 · 3 – 2; 2 = 2 · 1 – 0; 9 = 2 · 4 – (–1). Ma allora, per il Teorema 4possiamo moltiplicare per 2 la prima riga, sottrarre da essa la seconda riga e la terza, scrivendo il risultato come una delle tre righe. Tale risultato è una riga di zeri: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2\cdot 3-2-4 & 2\cdot 1-0-2 & 2\cdot 4-(-1)-9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. Il determinante è quindi nullo.

Dato che capita più spesso di dover calcolare determinanti di ordine 2 e 3, risulta importante trovare una regola per il calcolo di questi ultimi, come già abbiamo fatto per quelli di ordine 2. Calcoliamo il seguente determinante mediante il teorema di Laplace, risolvendo per esempio rispetto alla prima riga:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{31}) - a_{12}\cdot(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) +$$

$$+a_{13}\cdot(a_{21}a_{32} - a_{21}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{21}a_{31}.$$

La regola che abbiamo ottenuto è, in questa forma, complessa da memorizzare, per ottenerla più semplicemente ripetiamo a destra del determinante le prime due colonne nel seguente modo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Così facendo abbiamo messo su sei diagonali i sei prodotti ottenuti in precedenza e quindi la regola che ci fornisce il risultato richiesto consiste adesso nell'effettuare le moltiplicazioni di questi elementi diagonali, cambiando il segno degli ultimi tre prodotti. Tale modalità di calcolo del determinante di terzo ordine è detta **regola di Sarrus**. Chiariamo con un esempio.

Esempio 13

Calcoliamo il determinante dell'esempio precedente con la regola di Sarrus: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{matrix} = 3 \cdot 0 \cdot 9 +$

$+ 1 \cdot (-1) \cdot 4 + 4 \cdot 2 \cdot 2 - [4 \cdot 0 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 9] = 0 - 4 + 16 - (0 - 6 + 18) = 12 - 12 = 0.$

Chiudiamo il paragrafo con un'ultima questione.

Definizione 4

Diciamo **trasposta** di una matrice la matrice che si ottiene scambiando fra loro righe e colonne.

Notazione 4

La trasposta di una matrice A si indica con A^T.

Teorema 5

Una matrice e la sua trasposta hanno lo stesso determinante.

Per comprendere la verità del precedente risultato, consideriamo un esempio.

Esempio 14

Dato il determinante $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, ne costruiamo il trasposto: $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$. Calcoliamo il primo determinante applicando il teorema di Laplace alla prima riga:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 10$$

Ora calcoliamo il determinante trasposto sviluppando rispetto alla prima colonna:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 10$$

Possiamo osservare non solo che i risultati sono identici, ma soprattutto che i primi passaggi dei due calcoli differiscono solo perché i determinanti, di ordine 2, sono fra loro trasposti.

Non è difficile provare che quanto visto nell'esempio è vero in generale, basta infatti verificare che si ha: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$. Dato che il calcolo di un determinante di ordine 3 si riconduce a quello di 3 determinanti di ordine 2, che hanno lo stesso determinante dei relativi trasposti, anche i trasposti di determinanti di ordine 3 sono fra loro uguali. Quindi generalizzando vale per il generico ordine n.

L'Antologia

Abbiamo detto che il cosiddetto teorema o metodo di Cramer – Leibniz viene esposto per la prima volta da Gotfried Wilhelm Leibniz, che però non lo pubblica. Riportiamo di seguito la lettera che Leibniz scrive al Marchese de l'Hopital, e che è appunto il più antico documento relativo all'uso dei determinanti per la risoluzione di un sistema lineare. Questa lettera è pubblicata per la prima volta nel 1850, parecchi anni dopo la pubblicazione del lavoro di Cramer.

***Leibniz*, 28 *Aprile* 1693**

Poiché dite di avere difficoltà a credere che è sia più generico sia più conveniente usare numeri invece di lettere, non devo essermi ben spiegato. Non vi è alcun dubbio per la generalità se si considera che è possibile usare 2, 3, *ecc., allo stesso modo di a o b, stabilito che sia sottinteso che questi ultimi non sono realmente dei numeri. Così* 2 . 3 [Leibniz indica in questo modo il prodotto] *non denota 6 quanto piuttosto ab. Relativamente alla convenienza, basta dire che io stesso ne faccio uso, specialmente in lunghi e difficili calcoli dove è facile commettere errori. A parte la convenienza di verificare poi con numeri e perfino con la regola del nove, ho trovato il loro uso di grande vantaggio persino nell'analisi. In particolare vi è questa straordinaria scoperta, della quale non ho ancora parlato a nessuno.*
Quando si ha bisogno di molte lettere, non è vero che non tutte queste lettere esprimono le relazioni fra le grandezze che rappresentano, mentre usando i numeri siamo capaci di esprimere tali relazioni. Per esempio consideriamo tre semplici equazioni in due incognite, con lo scopo di eliminare le due incognite e ottenere una legge generale.
Supponiamo che $10 + 11x + 12y = 0$ (1) *e* $20 + 21x + 22y = 0$ (2) *e* $30 + 31x + 32y = 0$ (3) *dove i pseudo numeri di due cifre che uso, mi dicono, il primo l'equazione in cui ci troviamo, il secondo la lettera a cui appartiene. Così eseguendo i calcoli troviamo un'armonia che non solo serve nelle verifiche ma anche ci fa pensare a prima vista ad alcune regole o teoremi. Per esempio eliminando la y dalla prima e seconda equazione abbiamo:* $\begin{matrix} 10.22 + 11.22x = 0 \\ -12.20 - 12.21x = 0 \end{matrix}$ (4) *e dalla prima e terza:* $\begin{matrix} 10.32 + 11.32x = 0 \\ -12.30 - 12.31x = 0 \end{matrix}$ (5) *dove è facile riconoscere che queste due equazioni differiscono solo nel fatto che il carattere anteriore* 2 *è cambiato nel carattere anteriore* 3. *Inoltre, allo stesso modo che nelle equazioni, i caratteri anteriori sono gli stessi e i caratteri posteriori hanno la stessa somma. Rimane adesso da eliminare la lettera x dalle quarte e quinte equazioni, ottenendo:* $\begin{matrix} 1_0.2_1.3_2 & & 1_0.2_2.3_1 \\ 1_1.2_2.3_0 & = & 1_1.2_0.3_2 \\ 1_2.2_0.3_1 & & 1_2.2_1.3_0 \end{matrix}$ *che è l'equazione finale liberata dalle due incognite che volevamo eliminare, che ci porta la sua stessa dimostrazione e che sarebbe stata molto difficile da scoprire usando le lettere a, b, c, specialmente quando i numeri delle lettere e delle equazioni sono grandi. […] continuando il calcolo in questo modo, si giungerà a un teorema generale per un qualsiasi numero di lettere ed equazioni.*
[Di seguito Leibniz enuncia la regola generale]
Dato un qualsiasi numero di equazioni che è sufficiente per eliminare le quantità incognite che non superano il primo grado [cioè la regola si applica solo a sistemi di equazioni lineari che hanno tante incognite quante equazioni, o comunque che non hanno più incognite che equazioni]– *per l'equazione finale devono essere prese, prima, tutte le possibili combinazioni dei coefficienti, in cui un solo coefficiente di ogni equazione deve considerarsi; secondo, quelle combinazioni, dopo che sono state poste sullo stesso lato dell'equazione finale, avranno segni differenti se hanno tanti fattori quanti ne indica il numero che è minore di uno delle quantità incognite; il resto avranno lo stesso segno.* [Il precedente tortuoso modo di spiegare equivale in realtà a porre il sistema nella forma che noi abbiamo chiamato normale di Cramer – Leibniz].

Verifiche

Lavoriamo insieme

Calcolare il determinante: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$. Applicando la nota regola si ha: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1-(-1)\cdot(-1)=1-1=0$.

***Livello* 1**

Calcolare i seguenti determinanti del secondo ordine

1. $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -3 \\ -\frac{3}{4} & 0 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{4}{3} \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{5}{2} \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$ $\left[3;6;2;-\frac{9}{4};-\frac{1}{3};-\frac{3}{2}\right]$

2. $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -8 \\ 1-\sqrt{3} & 2 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ $\left[-1-5\cdot\sqrt{2};9-8\cdot\sqrt{3};\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$

Lavoriamo insieme

Risolvere il seguente sistema di due equazioni lineari in due incognite: $\begin{cases} 2x-3y-1=0 \\ x=1-5y \end{cases}$.

Utilizziamo il teorema di Cramer – Leibniz e cominciamo quindi con scrivere il sistema nella forma corretta per potere applicare il teorema: $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x+5y=1 \end{cases}$. Stabiliamo ora se il sistema è o no determinato, calcolando il determinante della matrice dei coefficienti delle incognite: $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5-(-3)\cdot 1=10+3=13\neq 0$. Il sistema è determinato, quindi calcoliamone le soluzioni: $x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{13}=\frac{5+3}{13}=\frac{8}{13}$, $y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{13}=\frac{2-1}{13}=\frac{1}{13}$.

Risolvere i seguenti sistemi lineari utilizzando il teorema di Cramer – Leibniz

***Livello* 1**

3. $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ -4x+y=-2 \end{cases}$; $\begin{cases} 5x+y=-2 \\ 5x-3y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x+7y=-3 \\ 2x-7y=0 \end{cases}$ $\left[\left(x=\frac{1}{2}, y=0\right);\left(x=-\frac{1}{4}, y=-\frac{3}{4}\right);\left(x=-1, y=-\frac{2}{7}\right)\right]$

4. $\begin{cases} -x=1+2y \\ 5y=x-3 \end{cases}$; $\begin{cases} 3x+1=-4y \\ 7y=3-5x \end{cases}$; $\begin{cases} 2=-x+3y \\ -2x+5-4y=0 \end{cases}$ $\left[\left(x=\frac{1}{7}, y=-\frac{4}{7}\right);(x=-19, y=14);\left(x=\frac{7}{10}, y=\frac{9}{10}\right)\right]$

5. $\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y=0 \\ \frac{3}{4}x+2y=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{3}{2}x-y=\frac{4}{3} \\ 2x+5y=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} -\frac{5}{2}x+y=\frac{2}{3} \\ -\frac{7}{4}x+\frac{1}{3}y=-\frac{5}{2} \end{cases}$ $\left[\left(x=\frac{4}{3}, y=-1\right);\left(x=\frac{34}{57}, y=-\frac{25}{57}\right);\left(x=\frac{98}{33}, y=\frac{89}{11}\right)\right]$

6. $\begin{cases} \sqrt{2}x+y=-3 \\ x+\sqrt{2}y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} \left(1-\sqrt{2}\right)x+2y=\frac{1}{2} \\ \left(\sqrt{2}+3\right)x+y=-1 \end{cases}$ $\left[\left(x=-3\cdot\sqrt{2}-1;\ y=3+\sqrt{2}\right);\left(x=\frac{15\sqrt{2}-25}{14}; y=\frac{31-20\sqrt{2}}{14}\right)\right]$

Lavoriamo insieme

Calcolare il seguente determinante di ordine 3: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$. Un metodo di frequente utilizzo è quello che va sotto il nome di regola di Sarrus e consiste nel *copiare* le due prime colonne a destra del determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix}$. Quindi si moltiplicano fra loro i tre numeri di ciascuna diagonale *completa*, cambiando i segni dei prodotti di quelle diagonali disposte nel verso da sinistra in basso a destra in alto:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix} = 1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 1\cdot 2 + 3\cdot 3\cdot 1 - (3\cdot 2\cdot 2+1\cdot 1\cdot 1+2\cdot 3\cdot 3) = 6 + 4 + 9 - (12 + 1 +18) = 19 - 31 = -12$$

Calcolare i seguenti determinanti del terzo ordine

Livello 1

7. a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -3 \\ 4 & -4 & 0 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ [a) –8; b) 0; c) 8; d) 16; e) –18]

8. a) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & \frac{1}{4} \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & \frac{2}{5} & 1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{3}{2} & -1 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

$\left[\text{a)} -\frac{85}{216}; \text{b)} 12; \text{c)}\ 6;\ \text{d)}\ 0;\ \text{e)}\ 0\right]$

9. a) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 3 \\ -\sqrt{2} & 1 & 2 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1+\sqrt{2} & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & \sqrt{3} & 0 \\ 15 & 1 & \sqrt{6} \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

$\left[\text{a)}\ 2-6\sqrt{2};\ \text{b)}\ -1;\ \text{c)}\ 3\sqrt{2};\ \text{d)} -32;\ \text{e)}\ 24\right]$

10. a) $\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & 1 \\ 1+\sqrt{3} & 0 & -1 \\ 2\cdot\sqrt{3} & 2 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{4}{5} & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$\left[\text{a)}\ 2\cdot\left(\sqrt{3}+5\right);\ \text{b)}\ 0;\ \text{c)}\ 0;\ \text{d)} -\frac{32}{15}\ \text{e)}\ 4\right]$

11. a) $\begin{vmatrix} 1-\sqrt{5} & \sqrt{5} & 0 \\ -\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} & 0 \\ 1 & \sqrt{5} & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 3 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 2 & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{6} & 1 \end{vmatrix}$

$\left[\text{a)}\ 1;\ \text{b)}\ 5\cdot\left(2+\sqrt{2}\right);\ \text{c)}\ 2;\ \text{d)}\ \sqrt{6}+3\cdot\sqrt{2}\right]$

Livello 2

Nel seguito le lettere rappresentano numeri reali

12. a) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$

[a) acf; b) adf; c) $(a-c)(b-a)(b-c)$; d) 0; e) 0;]

13. a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a+d & b+e & c+f \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & a \\ c & a & a \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & a \\ a & a & c \end{vmatrix}$

[a) $3abc - a^3 - b^3 - c^3$; b) 0; c) $a \cdot (df - e^2) - b^2f + 2bce - c^2d$; d) $a \cdot (a-b) \cdot (c-a)$; e) $a \cdot (a-c) \cdot (a-b)$]

Lavoriamo insieme

Calcolare il seguente determinante di ordine 4: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \end{vmatrix}$.

Utilizziamo il teorema di Laplace, sviluppando per esempio rispetto alla prima colonna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -2 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ -2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

Ora potremmo calcolare i quattro determinanti del terzo ordine con la regola di Sarrus; preferiamo però notare che i determinanti sono molto simili fra loro, quindi con opportuni passi potremmo riuscire a semplificare i calcoli. Per esempio il secondo determinante differisce dal terzo solo per la seconda riga i cui termini sono opposti e quindi, per le proprietà dei determinanti, possiamo scrivere:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -2 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} + \xcancel{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix}} - \xcancel{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix}} - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ -2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

Allo stesso modo anche i due determinanti rimasti sono molto simili, avendo la seconda e la terza riga fra loro opposte; ma allora cambiando due volte i segni avremo ancora una volta che i due determinanti sono fra loro opposti, quindi il determinante iniziale è nullo.

Avremmo ottenuto lo stesso risultato osservando semplicemente che la seconda e la terza riga della matrice iniziale, sono fra loro opposte, quindi per il Corollario4 esso è nullo.

Usando il teorema di Laplace calcolare i seguenti determinanti. Tenere conto del fatto che, in alcuni esercizi, molti elementi sono fra loro uguali o opposti, quindi con opportune operazioni si possono creare molti zeri, facilitando il calcolo

Livello 2

14. a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -1 & -2 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & -4 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

[a) 11; b) 1; c) 17; d) –112]

15. a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

[a) 160; b) 0; c) –80; d) 0; e) 36]

16. a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -5 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -5 \end{vmatrix}$ [a) 20; b) 1920; c) 5760]

17. a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ [a) 12; b) –32; c) –112]

Lavoriamo insieme

Un determinante in cui gli elementi diagonali sono nulli e $a_{ij} = -a_{ji}$ per tutti gli altri elementi, si chiama emisimmetrico. Provare che un determinante emisimmetrico di ordine dispari è nullo. Per capirci consideriamo un determinante di ordine 3: $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$ (1). Se moltiplichiamo per –1 tutte le righe, otteniamo $\begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$ (2), cioè il determinante della matrice trasposta di quella di partenza. Ma, per il Teorema 5**,** tali determinanti devono essere uguali, deve essere infatti (1) = (2) . D'altro canto però, ogni volta che abbiamo moltiplicato una riga per –1, abbiamo cambiato il segno del determinante e siccome lo abbiamo fatto per tre volte, vuol dire che la matrice finale deve avere determinante opposto a quella di partenza. Quindi, poiché il determinante (2) deve essere uguale e opposto al determinante (1), l'unico modo per non rendere contraddittorio questo risultato è dire che esso è zero.

Livello 3

18. Senza effettuare i calcoli dimostrare che il seguente determinante è nullo $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.

[Sottraendo la prima riga dalla seconda e la terza dalla quarta si ottengono due righe uguali]

19. Verificare che il determinante emisimmetrico di ordine 4, $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$ si esprime come il quadrato di un'espressione dei suoi elementi. [Il determinante è $(af - be + cd)^2$]

20. Un determinante come questo $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$, si chiama di Vandermonde. Trovarne, limitatamente ai casi $n = 3$ e $n = 4$, una formula di calcolo.

[$(a_1 - a_2) \cdot (a_1 - a_3) \cdot (a_3 - a_2)$; $(a_1 - a_2) \cdot (a_1 - a_3) \cdot (a_1 - a_4) \cdot (a_2 - a_3) \cdot (a_2 - a_4) \cdot (a_3 - a_4)$]

Lavoriamo insieme

- *Risolvere con il teorema di Cramer – Leibniz il sistema di* 4 *equazioni in* 4 *incognite*: $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y - 3t = -1 \\ -3y + z - t = 0 \\ x - y + z - t = -1 \end{cases}$.

Calcoliamo il determinante della matrice dei coefficienti: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$. Cerchiamo di creare il maggior numero possibile di zeri:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2 = C_2 + C_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 = R_2 + R_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Come si vede abbiamo ottenuto ben tre zeri nella seconda colonna, quindi sviluppiamo secondo tale colonna: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$. Notiamo che il determinante è nullo perché le prime due colonne sono uguali. Possiamo perciò concludere che il sistema non ha soluzioni.

- *Risolvere il sistema seguente*: $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y - 3t = -1 \\ -3y + z - t = 0 \\ x + y + z - t = -1 \end{cases}$.

Abbiamo cambiato solo un segno nell'ultima equazione. Procediamo come in precedenza:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 = C_3 + C_4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2 = 3 \cdot R_1 + R_2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Ora sviluppiamo secondo la terza colonna:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2 = C_2 - 3C_3} \begin{vmatrix} 4 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

Possiamo concludere quindi che il sistema è determinato. Troviamo le soluzioni (scriviamo solo i risultati, lasciando per esercizio i calcoli):

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1&-1&1&0\\-1&2&0&-3\\0&-3&1&-1\\-1&1&1&-1\end{vmatrix}}{8}=\frac{16}{8}=2;\ y=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1&0\\1&-1&0&-3\\0&0&1&-1\\1&-1&1&-1\end{vmatrix}}{8}=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4};$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1&-1&1&0\\1&2&-1&-3\\0&-3&0&-1\\1&1&-1&-1\end{vmatrix}}{8}=-\frac{14}{8}=-\frac{7}{4};\ t=\frac{\begin{vmatrix}1&-1&1&1\\1&2&0&-1\\0&-3&1&0\\1&1&1&-1\end{vmatrix}}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

Usando il teorema di Cramer – Leibniz risolvere, ove possibile, i seguenti sistemi lineari

Livello 1

21. $\begin{cases}2x-y+z=1\\-x+y-3z=-1\\x+y-z=0\end{cases};\begin{cases}4x+y=1\\3x+2y+z=2\\2x+z=-1\end{cases};\begin{cases}5x+3y-z=2\\x+13y-5z=0\\2x-5y+2z=1\end{cases};\begin{cases}3x+2z=3-y\\x+2y=3-2z\\3x+4y-2z=-1\end{cases}$

$\left[\left(x=\frac{1}{3},y=-\frac{1}{6},z=\frac{1}{6}\right);\left(x=-\frac{1}{7},y=\frac{11}{7},z=-\frac{5}{7}\right);\varnothing;\left(x=\frac{1}{8},y=\frac{1}{4},z=\frac{19}{16}\right)\right]$

22. $\begin{cases}x+2y+3z=1\\2x+3y+z=-1\\3x+y+2z=0\end{cases};\begin{cases}x+2y+3z=2\\x+4y+9z=0\\x+8y+27z=-1\end{cases};\begin{cases}\frac{1}{2}x-2y=-\frac{2}{3}\\2x+z=-2\\\frac{3}{2}x+2y-4z=-2\end{cases};\begin{cases}x+2y-3z=4\\-y+3z=1\\z=\frac{3}{2}\end{cases}$

$\left[\left(x=-\frac{1}{3},y=-\frac{1}{3},z=\frac{2}{3}\right);\left(x=\frac{11}{2},y=-\frac{5}{2},z=\frac{1}{2}\right);\left(x=-\frac{16}{15},y=\frac{1}{15},z=\frac{2}{15}\right);\left(x=\frac{3}{2},y=\frac{7}{2},z=\frac{3}{2}\right)\right]$

23. $\begin{cases}4z=1\\-3y+7z=-2\\3x+7y-4z=3\end{cases};\begin{cases}3x+y-4z=3\\-3x+2y+5z=-2\\4x-3y-2z=1\end{cases};\begin{cases}2x-3y=1+5z\\x+y-z=0\\2x+z-3y=0\end{cases};\begin{cases}x+2y+3z=4\\2x+3y+4z=5\\3x+4y+5z=6\end{cases}$

$\left[\left(x=-\frac{19}{12},y=\frac{5}{4},z=\frac{1}{4}\right);\left(x=\frac{18}{43},y=\frac{19}{43},z=-\frac{14}{43}\right);\left(x=-\frac{1}{15},y=-\frac{1}{10},z=-\frac{1}{6}\right);\text{Indeterminato}\right]$

24. $\begin{cases}x+2y+3z=0\\-x+2y+3z=-1\\x+2y-3z=-2\end{cases};\begin{cases}-x+2y-3z=4\\x+2y-3z=-1\\x-2y+3z=2\end{cases};\begin{cases}x+y+z+t=1\\x-y+z+t=-1\\x+y-z+t=0\\x+y+z-t=-1\end{cases};\begin{cases}x+2y-3z=4\\-2x+y-z=-3\\2x-3y+4z=4\end{cases}$

$\left[\left(x=\frac{1}{2},y=-\frac{3}{4},z=\frac{1}{3}\right);\varnothing;\left(x=-\frac{3}{2},y=1,z=\frac{1}{2},t=1\right);(x=5,y=22,z=15)\right]$

25. $\begin{cases}x+2y+3z+4t=-1\\2x+y+2z+3t=0\\3x+2y+z+t=-1\\4x+3y+2z+t=-2\end{cases}\ \begin{cases}x+y+z+t=1\\x-y+z-t=-1\\x+y-z-t=1\\-x+y-z+t=-1\end{cases}\ \begin{cases}x+y+z+t=0\\x+2y+z+t=-1\\x+y+3z+t=-2\\x+y+z+4t=-3\end{cases}\ \begin{cases}x+2y+3z=1\\x-2y+3z=0\\x+2y-3z=-1\end{cases}$

$\left[\left(x=\frac{1}{5},y=-\frac{4}{5},z=-\frac{2}{5},t=\frac{2}{5}\right);\varnothing;(x=3,y=-1,z=-1,t=-1);\left(x=-\frac{1}{2},y=\frac{1}{4},z=\frac{1}{3}\right)\right]$

26. $\begin{cases} x-y+z-t=1 \\ y-2z+3t=-1 \\ 3z-4t=2 \\ 5t=6 \end{cases}$; $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x+y-z=-2 \\ 3x+3y+5z=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y-w=1 \\ x+z-t=-1 \\ y-z+t=0 \\ y-t+w=1 \\ x-y+z-t+w=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x-y+2z=-2 \\ -x-2y+z=1 \\ 3x+y+2z=0 \end{cases}$

$\left[\left(x=-\frac{2}{15}, y=-\frac{1}{15}, z=\frac{34}{15}, t=\frac{6}{5}\right);\left(x=-\frac{5}{9}, y=-\frac{2}{9}, z=\frac{2}{3}\right);(x=3, y=4, z=-11, t=-7, w=-2);\varnothing\right]$

27. $\begin{cases} y+z-t=1 \\ -x+2z-3t=2 \\ -x-2y+4t=-1 \\ x+3y-4z=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x+2y+3z+4t=0 \\ 2x+3y+4z+5t=-1 \\ 3x+4y+5z+6t=-2 \\ 4x+5y+6z+7t=3 \end{cases}$; $\begin{cases} x+2y+3z+4t=0 \\ x-2y-3z-4t=2 \\ x-2y+3z-4t=1 \\ x+2y+3z-4t=-1 \end{cases}$

$\left[\left(x=-1, y=\frac{3}{5}, z=\frac{1}{5}, t=-\frac{1}{5}\right);\varnothing;\left(x=1, y=-\frac{1}{2}, z=-\frac{1}{6}, t=\frac{1}{8}\right)\right]$

28. $\begin{cases} x+y=1 \\ y-z=-1 \\ x+t=-2 \\ z-t=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x+y+z+t+w=0 \\ x-y+z+t+w=0 \\ x+y-z+t+w=-2 \\ x+y+z-w+t=-1 \\ x+y+z+w-t=1 \end{cases}$ $\left[\varnothing;\left(x=-1, y=0, z=1, t=-\frac{1}{2}, w=\frac{1}{2}\right)\right]$

Lavoriamo insieme

Risolvere la seguente equazione nell'incognita m: $\begin{vmatrix} 1-m & 1 & -1 \\ m & -2 & 1 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix}=1$.

Cominciamo con il calcolare il determinante: $(1-m)\cdot(-2)\cdot m+1\cdot 1\cdot 0+(-1)\cdot m\cdot 1-(-1)\cdot(-2)\cdot 0-1\cdot m\cdot m-(1-m)\cdot 1\cdot 1= =-2m+2m^2+0-m-0-m^2-1+m= m^2-2m-1$. Quindi: $m^2-2m-1=1 \Rightarrow m^2-2m-2=0 \Rightarrow m=1\pm\sqrt{3}$.

Livello 2

Risolvere le seguenti equazioni nell'incognita reale m

29. a) $\begin{vmatrix} -m & 2 & 3 \\ 1 & m & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1$; b) $\begin{vmatrix} 1-m & 0 & 0 \\ m^2 & 1+m & 0 \\ 3-m^2 & 7 & -2 \end{vmatrix}=2$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m & 1+m \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2$ $\left[\text{a) } \varnothing;\text{ b) } m=\pm\sqrt{2};\text{ c) } \varnothing\right]$

30. a) $\begin{vmatrix} 1+4m & 4m-1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-3$; b) $\begin{vmatrix} 1-m^2 & -1 \\ m & -2 \end{vmatrix}=0$; c) $\begin{vmatrix} \frac{m}{2} & -\frac{1}{m} \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=0$ $\left[\text{a) } m=\frac{1}{2};\text{ b) } m=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}\text{ c) } m=\pm 2\right]$

31. a) $\begin{vmatrix} m & 3 \\ 1 & -m \end{vmatrix}=1$; b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ m+1 & 3 \end{vmatrix}=0$; c) $\begin{vmatrix} 1-m & 2 \\ 3-m & 0 \end{vmatrix}=3$; d) $\begin{vmatrix} m^2-1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-2$

$\left[\text{a) } \varnothing;\text{ b) } m=-\frac{5}{2};\text{ c) } m=\frac{9}{2}\text{ d) } m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

32. a) $\begin{vmatrix} \frac{2-m}{m+2} & 1 \\ 0 & \frac{m-1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$; b) $\begin{vmatrix} m & 1-m \\ 1+m & 1 \end{vmatrix} = 0$; c) $\begin{vmatrix} 1-3m & 0 & 1 \\ 2m & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\left[\text{a) } \varnothing\text{; b) } m = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\text{; c) } m = \frac{2}{5}\right]$

33. a) $\begin{vmatrix} 1+m & 0 & 1 \\ 3 & 2-m & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2$; b) $\begin{vmatrix} 3m & 0 & 1 \\ -4 & m & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix} = -1+3m$

$\left[\text{a) } m = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{4}\text{; b) } m = \pm 1\text{; c) } m = -1\right]$

34. a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & m \\ m & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} 1-m^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+m^2 & 0 \\ 0 & 0 & m \end{vmatrix} = 0$; c) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1-m & 1+m & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = m$

$\left[\text{a) } m = \frac{3 \pm \sqrt{15}}{2}\text{; b) } m = 0 \vee m = \pm 1\text{; c) } m = -\frac{1}{2}\right]$

35. a) $\begin{vmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ m & 0 & m \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} m & -m & 0 \\ 0 & m^2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-m^3$; c) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & m \\ \frac{1}{m} & 1 & 0 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^2$ $\left[\text{a) } m = 1\text{; b) } m = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\text{; c) } m = 2 \vee m = -\frac{1}{2}\right]$

36. a) $\begin{vmatrix} 2+m & 2 & m \\ 2-m & 2 & -m \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} m & m+1 & m-1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = m^2 - 1$; c) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & m & 0 \\ 1 & 0 & m & 1 \\ 1 & m & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\left[\text{a) } m = 0\text{; b) } m = 0 \vee m = 1\text{; c) } m = \pm\sqrt{2}\right]$

37. a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1+m & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1-m & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & m \end{vmatrix} = 1$; b) $\begin{vmatrix} 1 & m & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & m & 0 & m \\ 0 & 0 & 1 & m \end{vmatrix} = -1$; c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & m & 0 & 0 \\ m & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & m \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\left[\text{a) } \varnothing\text{; b) } m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\text{; c) } m = 1\right]$

38. a) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & m & m & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & m & 0 & m \\ m+1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$; b) $\begin{vmatrix} 1-m & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1+m & 0 & 1 & 1 \\ m & 0 & 2 & 0 & m \\ 0 & -1 & 1+m & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$\left[\text{a) } m \in \{-3; -2; 0\}\text{; b) } m \in \left\{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, -2, 0\right\}\right]$

Inversione di matrici

Il problema

E' dato un sistema lineare di n equazioni in n incognite: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_{n1} + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$. Possiamo scriverlo in forma matriciale, indicando con A la matrice dei coefficienti delle incognite a_{ij}, con X il vettore delle incognite x_i e con B il vettore dei termini noti b_i. Possiamo cioè scrivere: $A \cdot X = B$. Questa scrittura ci suggerisce di interpretare il sistema iniziale come un'equazione di primo grado, in cui però l'incognita non è un numero (reale o no), ma un vettore. Da un punto di vista *formale* quindi la soluzione è $X = B / A$, o anche, usando la notazione esponenziale: $X = B \cdot A^{-1}$. La questione è però il significato da dare al simbolo A^{-1}.

La prima cosa che osserviamo è che il problema posto ha significato solo se il simbolo A non rappresenta lo zero delle matrici, cioè solo se A non è la matrice nulla. In effetti però, tenuto conto del teorema di Cramer – Leibniz, il sistema non ha soluzione anche quando A, pur non essendo una matrice nulla, ha determinante nullo. Poniamo pertanto una definizione.

Definizione 5

Data una matrice quadrata diciamo che essa è **singolare** se il suo determinante è zero.

Possiamo perciò dire che il problema posto ha senso solo per matrici *non* singolari. Cerchiamo di risolverlo proponendo alcuni esempi.

Esempio 15

Risolviam il sistema: $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 4x + y = -2 \end{cases}$ $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{1-6}{2+12} = -\dfrac{5}{14}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}}{14} = \dfrac{-4-4}{14} = -\dfrac{4}{7}$. Utilizzando la notazione matriciale possiamo quindi scrivere: $\left\| \begin{matrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} -\frac{5}{14} \\ -\frac{4}{7} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} \right\|$. Intanto verifichiamo la verità della precedente uguaglianza: $\left\| \begin{matrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} -\frac{5}{14} \\ -\frac{4}{7} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 2 \cdot \left(-\frac{5}{14}\right) - 3 \cdot \left(-\frac{4}{7}\right) \\ 4 \cdot \left(-\frac{5}{14}\right) + 1 \cdot \left(-\frac{4}{7}\right) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} \right\|$. Vogliamo ora risolvere lo stesso sistema nel modo segnalato dal problema e quindi cerchiamo una matrice $A^{-1} = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\|$ per la quale si ha: $\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} -\frac{5}{14} \\ -\frac{4}{7} \end{matrix} \right\| \Rightarrow \left\| \begin{matrix} a_{11} - 2a_{12} \\ a_{21} - 2a_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} -\frac{5}{14} \\ -\frac{4}{7} \end{matrix} \right\|$.

Dobbiamo cioè risolvere un ulteriore sistema di due equazioni lineari in due incognite. Può sembrare che ci siamo immersi in un circolo vizioso, dato che per non risolvere un sistema ne stiamo risolvendo un altro. In effetti il nostro scopo è quello di vedere se possiamo ottenere un *diverso metodo* di risoluzione. Il problema è piuttosto che il sistema che abbiamo ottenuto ha più incognite che equazioni, quindi non riusciamo a risolverlo, almeno non con i metodi finora noti.

Visto che l'approccio proposto nell'esempio non è andato a buon fine cambiamo metodo. Abbiamo detto che questa matrice A^{-1} verifica l'uguaglianza $X = B \cdot A^{-1}$, ma allora, sostituendo tale valore nell'equazione matriciale $A \cdot X = B$, avremo: $A \cdot B \cdot A^{-1} = B$. Affinché l'uguaglianza sia vera il prodotto $A \cdot A^{-1}$deve essere unitario, ma l'*unità* rispetto all'operazione di moltiplicazione fra matrici è la matrice identità $I = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix}$, nella quale sono nulli tutti gli elementi tranne quelli della diagonale principale che sono uguali a 1. Pertanto le matrici A e A^{-1}, da un punto di vista operazionale, sono fra loro inverse.

Definizione 6

Data una matrice non singolare A, diciamo sua **matrice inversa** la matrice che moltiplicata per A fornisce la matrice identità.

Notazione 5

La matrice inversa di A si indica con A^{-1}.

Esempio 16

Vediamo di determinare la matrice inversa di $\begin{Vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{Vmatrix}$, utilizzando la definizione. Dobbiamo risolvere l'equazione matriciale: $\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} 2a_{11} + 4a_{12} & -3a_{11} + a_{12} \\ 2a_{21} + 4a_{22} & -3a_{21} + a_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$. Dato che due matrici sono uguali solo se hanno lo stesso ordine e rispettivamente uguali gli elementi che occupano le stesse posizioni, impostiamo il seguente sistema: $\begin{cases} 2a_{11} + 4a_{12} = 1 \\ -3a_{11} + a_{12} = 0 \\ 2a_{21} + 4a_{22} = 0 \\ -3a_{21} + a_{22} = 1 \end{cases}$. In effetti possiamo separare le prime due equazioni dalle rimanenti, dato che contengono le stesse incognite.

$$a_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{14}, a_{12} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}}{14} = \frac{3}{14}, a_{21} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{14} = -\frac{2}{7}, a_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}}{14} = \frac{1}{7}$$

La matrice inversa è $A^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{Vmatrix}$. Verifichiamo: $\begin{Vmatrix} \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{2}{14} + \frac{2}{14} & -\frac{3}{14} + \frac{3}{14} \\ -\frac{4}{7} + \frac{4}{7} & \frac{6}{7} + \frac{1}{7} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

Risolviamo il sistema iniziale con l'uso della matrice inversa: $\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{14} & \frac{3}{14} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{14} - \frac{6}{14} \\ -\frac{2}{7} - \frac{2}{7} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\frac{5}{14} \\ -\frac{4}{7} \end{Vmatrix}$.

Come si vede, i risultati coincidono con quelli determinati con il metodo di Cramer – Leibniz.

A questo punto siamo pronti per determinare una regola generale per il calcolo della matrice inversa di una generica matrice non singolare. Poniamo qualche definizione per semplificare la terminologia.

Definizione 7

Data una matrice A, diciamo sua **matrice aggiunta** la matrice i cui elementi sono i complementi algebrici dei corrispondenti elementi di A.

Notazione6

La matrice aggiunta di A si indica con $A^{(a)}$.

Vale il seguente teorema che è una generalizzazione di quel che abbiamo visto nel caso particolare di matrici di ordine 2.

Teorema 6

La matrice inversa di una matrice non singolare A, si ottiene considerando la matrice aggiunta della trasposta di A e dividendo ciascuno dei suoi elementi per il determinante di A. In simboli si ha:

$$A^{-1}=\begin{Vmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & -\frac{A_{21}}{|A|} & \dots & (-1)^{n+1}\cdot\frac{A_{n1}}{|A|} \\ -\frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & (-1)^{n+2}\cdot\frac{A_{n2}}{|A|} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{n+1}\cdot\frac{A_{1n}}{|A|} & (-1)^{n+2}\cdot\frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{Vmatrix}$$

(Notiamo che nell'ultimo elemento della matrice non compare $(-1)^{n+n}$ e ciò perché, essendo l'esponente evidentemente un numero pari, è $(-1)^{n+n} = (-1)^{2n} = 1$).

Esempio 17

Vogliamo determinare la matrice inversa di $A=\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$. Cominciamo con lo stabilire se essa esiste, calcolando il determinante: $|A|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=22\neq 0$. Calcoliamo la matrice aggiunta:

$$A^{(a)}=\begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \\ -14 & -1 & 4 \end{Vmatrix}$$

. Dividiamo ora ciascun termine della precedente matrice per il determinante di A: $\frac{A^{(a)}}{|A|}=\begin{Vmatrix} \frac{4}{11} & -\frac{1}{22} & \frac{2}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{5}{22} & \frac{1}{11} \\ -\frac{7}{11} & -\frac{1}{22} & \frac{2}{11} \end{Vmatrix}$ Infine trasponiamo la precedente matrice, determinando così l'inversa voluta: $A^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{4}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{7}{11} \\ -\frac{1}{22} & \frac{5}{22} & -\frac{1}{22} \\ \frac{2}{11} & \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{Vmatrix}$.

Verifichiamo il risultato: $\begin{Vmatrix} \frac{4}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{7}{11} \\ -\frac{1}{22} & \frac{5}{22} & -\frac{1}{22} \\ \frac{2}{11} & \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{4+7}{11} & \frac{-8+8}{11} & \frac{12+2-14}{11} \\ \frac{-1+1}{22} & \frac{2+20}{22} & \frac{-3+5-2}{22} \\ \frac{2-2}{11} & \frac{-4+4}{11} & \frac{6+1+4}{11} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Calcolare l'inversa della matrice $A=\begin{Vmatrix}0&1&0&-1\\0&1&1&1\\1&1&0&-1\\0&1&1&0\end{Vmatrix}$.

Dobbiamo intanto verificare che non sia singolare, calcolandone il determinante. Per semplificare i calcoli cerchiamo di ottenere più zeri possibili: $\begin{Vmatrix}0&1&0&-1\\0&1&1&1\\1&1&0&-1\\0&1&1&0\end{Vmatrix}\xrightarrow{R_2=R_2-R_4}\begin{Vmatrix}0&1&0&-1\\0&0&0&1\\1&1&0&-1\\0&1&1&0\end{Vmatrix}\xrightarrow{C_4=C_2+C_4}\begin{Vmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&1\end{Vmatrix}$

Sviluppiamo ora rispetto all'elemento a_{12}: $\begin{Vmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&1\end{Vmatrix}=-\begin{vmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=-1$. La matrice non è singolare. Per determinarne l'inversa determiniamo la matrice associata. Cominciamo intanto a calcolare i complementi algebrici:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\1&1&0\end{vmatrix}=1, A_{12}=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\0&1&0\end{vmatrix}=-1, A_{13}=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&1&-1\\0&1&0\end{vmatrix}=1, A_{14}=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}1&0&-1\\1&0&-1\\1&1&0\end{vmatrix}=0, A_{22}=\begin{vmatrix}0&0&1\\1&0&-1\\0&1&0\end{vmatrix}=-1, A_{23}=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&1&-1\\0&1&0\end{vmatrix}=1, A_{24}=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}1&0&-1\\1&1&1\\1&1&0\end{vmatrix}=-1, A_{32}=-\begin{vmatrix}0&0&-1\\0&1&1\\0&1&0\end{vmatrix}=0, A_{33}=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{vmatrix}=0, A_{34}=-\begin{vmatrix}0&1&0\\0&1&1\\0&1&1\end{vmatrix}=0,$$

$$A_{41}=-\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\0&1&-1\end{vmatrix}=0, A_{42}=\begin{vmatrix}0&0&-1\\0&1&1\\1&0&-1\end{vmatrix}=1, A_{43}=-\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&1&1\\1&1&-1\end{vmatrix}=-2, A_{44}=\begin{vmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&1&0\end{vmatrix}=1$$

Possiamo costruire la matrice associata: $A^{(a)}=\begin{Vmatrix}1&-1&1&0\\0&-1&1&-1\\-1&0&0&0\\0&1&2&1\end{Vmatrix}$. Ora costruiamo la trasposta di quest'ultima matrice: $\left[A^{(a)}\right]^T=\begin{Vmatrix}1&0&-1&0\\-1&-1&0&1\\1&1&0&-2\\0&-1&0&1\end{Vmatrix}$. Infine dividiamo per $|A|=-1$ e abbiamo la matrice inversa cercata: $A^{-1}=\begin{Vmatrix}-1&0&1&0\\1&1&0&-1\\-1&-1&0&2\\0&1&0&-1\end{Vmatrix}$. Non ci rimane che verificare che effettivamente questa è la corretta inversa:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{Vmatrix}0&1&0&-1\\0&1&1&1\\1&1&0&-1\\0&1&1&0\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}-1&0&1&0\\1&1&0&-1\\-1&-1&0&2\\0&1&0&-1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1&1-1&0&-1+1\\1-1&1-1+1&0&-1+2-1\\-1+1&1-1&1&-1+1\\1-1&1-1&0&-1+2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{Vmatrix}$$

Determinare le inverse, se esistono, delle seguenti matrici. Nelle risposte N.I. = Non invertibile

***Livello* 1**

1. a) $\begin{Vmatrix}1&1\\-1&0\end{Vmatrix}$;b) $\begin{Vmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{8}&-\frac{1}{16}\end{Vmatrix}$;c) $\begin{Vmatrix}\frac{1}{2}&\frac{2}{3}\\\frac{3}{4}&\frac{4}{5}\end{Vmatrix}$; d) $\begin{Vmatrix}1&3\\4&-1\end{Vmatrix}$ [a) $\begin{Vmatrix}0&-1\\1&1\end{Vmatrix}$; b) N.I.; c) *c*) $\begin{Vmatrix}-8&\frac{20}{3}\\\frac{15}{2}&-5\end{Vmatrix}$; d) $\begin{Vmatrix}\frac{1}{13}&\frac{3}{13}\\\frac{4}{13}&-\frac{1}{13}\end{Vmatrix}$]

2. a) $\begin{Vmatrix}1&-2\\0&-3\end{Vmatrix}$; b) $\begin{Vmatrix}1&2\\1&4\end{Vmatrix}$; c) $\begin{Vmatrix}1&2&3\\1&1&1\\-1&1&1\end{Vmatrix}$; d) $\begin{Vmatrix}1&2&3\\0&0&1\\-1&0&1\end{Vmatrix}$; e) $\begin{Vmatrix}\frac{1}{2}&0&-1\\0&\frac{2}{3}&1\\1&0&-1\end{Vmatrix}$

[a) $\begin{Vmatrix}1&-\frac{2}{3}\\0&-\frac{1}{3}\end{Vmatrix}$; b) $\begin{Vmatrix}2&-1\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{Vmatrix}$; c) $\begin{Vmatrix}0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-1&2&1\\1&-\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{Vmatrix}$; d) $\begin{Vmatrix}0&1&-1\\\frac{1}{2}&-2&\frac{1}{2}\\0&1&0\end{Vmatrix}$; e) $\begin{Vmatrix}-2&0&2\\3&\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}\\-2&0&1\end{Vmatrix}$]

3. a) $\begin{Vmatrix}1&\sqrt{2}&0\\-1&0&\sqrt{2}\\0&1&-1\end{Vmatrix}$; b) $\begin{Vmatrix}1&-1&1\\1&0&1\\-1&0&1\end{Vmatrix}$; c) $\begin{Vmatrix}2&0&-1\\0&-1&2\\-1&1&0\end{Vmatrix}$; d) $\begin{Vmatrix}1&2&3\\1&4&9\\1&8&27\end{Vmatrix}$; e) $\begin{Vmatrix}1&2&4\\8&16&32\\64&128&256\end{Vmatrix}$

[a) $\begin{Vmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{4}&\frac{\sqrt{2}}{4}&\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{4}&\frac{\sqrt{2}}{4}&-\frac{1}{2}\end{Vmatrix}$; b) $\begin{Vmatrix}0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-1&1&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{Vmatrix}$; c) $\begin{Vmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\end{Vmatrix}$; d) $\begin{Vmatrix}3&-\frac{5}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}&2&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{6}\end{Vmatrix}$; e) N.I.]

4. a) $\begin{Vmatrix}1&2&3\\3&2&1\\1&0&1\end{Vmatrix}$; b) $\begin{Vmatrix}1&-2&3\\-3&2&1\\1&0&-1\end{Vmatrix}$; c) $\begin{Vmatrix}1&-2&4\\-8&16&32\\64&128&-256\end{Vmatrix}$; d) $\begin{Vmatrix}1&2&4\\\frac{1}{4}&1&\frac{1}{2}\\16&8&\frac{1}{8}\end{Vmatrix}$

[a) $\begin{Vmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&-1\\\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{Vmatrix}$; b) $\begin{Vmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&2\\\frac{1}{2}&1&\frac{5}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{Vmatrix}$; c) $\begin{Vmatrix}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{128}\\0&\frac{1}{32}&\frac{1}{256}\\\frac{1}{8}&\frac{1}{64}&0\end{Vmatrix}$; d) $\begin{Vmatrix}\frac{62}{703}&-\frac{508}{703}&\frac{48}{703}\\-\frac{255}{1406}&\frac{1022}{703}&-\frac{8}{703}\\\frac{224}{703}&-\frac{384}{703}&-\frac{8}{703}\end{Vmatrix}$]

Livello 2

5. a) $\begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{Vmatrix}$, $a \cdot b \neq 0$; b) $\begin{Vmatrix} a & b \\ b & a \end{Vmatrix}$, $a^2 - b^2 \neq 0$; c) $\begin{Vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{Vmatrix}$, $a \cdot c \neq 0$; d) $\begin{Vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{Vmatrix}$, $a \cdot b \neq 0 \wedge a \neq b$

$$\left[\text{a)} \begin{Vmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{Vmatrix}; \text{ b)} \begin{Vmatrix} \frac{a}{a^2-b^2} & -\frac{b}{a^2-b^2} \\ -\frac{b}{a^2-b^2} & \frac{a}{a^2-b^2} \end{Vmatrix}; \text{ c)} \begin{Vmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{Vmatrix}; \text{ d)} \begin{Vmatrix} \frac{b}{a\cdot(b-a)} & \frac{1}{a\cdot(a-b)} \\ \frac{a}{b\cdot(a-b)} & \frac{1}{b\cdot(b-a)} \end{Vmatrix} \right]$$

6. a) $\begin{Vmatrix} a & \frac{1}{a} \\ a^2 & \frac{1}{a^2} \end{Vmatrix}$; b) $\begin{Vmatrix} a+1 & a-1 \\ a-2 & a+2 \end{Vmatrix}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; c) $\begin{Vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{Vmatrix}$, $a \cdot b \cdot c \neq 0$; d) $\begin{Vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & a \end{Vmatrix}$, $a \cdot b \neq 0 \wedge a \neq b$

$$\left[\text{a)} \begin{Vmatrix} -\frac{1}{a\cdot(a^2-1)} & \frac{1}{a^2-1} \\ \frac{a^3}{a^2-1} & -\frac{a^2}{a^2-1} \end{Vmatrix}; \text{ b)} \begin{Vmatrix} \frac{a+2}{6a} & \frac{1-a}{6a} \\ \frac{2-a}{6a} & \frac{a+1}{6a} \end{Vmatrix}; \text{ c)} \begin{Vmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{Vmatrix}; \text{ d)} \begin{Vmatrix} \frac{1}{a-b} & 0 & -\frac{1}{a-b} \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{b}{a\cdot(b-a)} & 0 & \frac{1}{a-b} \end{Vmatrix} \right]$$

7. a) $\begin{Vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ a & b & c \end{Vmatrix}$, $a \cdot c \neq 0$; b) $\begin{Vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{Vmatrix}$, $a \neq 0$; c) $\begin{Vmatrix} a & b & c \\ 0 & c & a \\ 0 & 0 & b \end{Vmatrix}$, $a \cdot b \cdot c \neq 0$; d) $\begin{Vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & b \\ a & b & 0 \end{Vmatrix}$, $a \cdot b \neq 0 \wedge a + b \neq 0$

$$\left[\text{a)} \begin{Vmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ -\frac{b}{ac} & \frac{1}{c} & 0 \\ \frac{b^2-ac}{ac^2} & -\frac{b}{c^2} & \frac{1}{c} \end{Vmatrix}; \text{b)} \begin{Vmatrix} \frac{1}{a} & 0 & -\frac{1}{a} \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{Vmatrix}; \text{c)} \begin{Vmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} & \frac{ab-c^2}{abc} \\ 0 & \frac{1}{c} & -\frac{a}{bc} \\ 0 & 0 & \frac{1}{b} \end{Vmatrix} \text{d)} \begin{Vmatrix} -\frac{b}{a\cdot(a+b)} & \frac{b}{a\cdot(a+b)} & \frac{1}{a+b} \\ \frac{1}{a+b} & -\frac{1}{a+b} & \frac{1}{a+b} \\ \frac{1}{a+b} & \frac{a}{b\cdot(a+b)} & -\frac{a}{b\cdot(a+b)} \end{Vmatrix} \right]$$

Lavoriamo insieme

Calcolare la matrice inversa della matrice del box precedente: $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$*, in modo diverso.*

Osserviamo che se A è una generica matrice non singolare; possiamo scrivere: $A \cdot A^{-1} = I$. Se allora formiamo un'unica matrice scrivendo una accanto all'altra le matrici A e I e trasformiamo A in I, lavorando solo sulle righe, le stesse operazioni applicate su I trasformeranno la matrice in A^{-1}. Chiariamo con un esempio, lavorando sulla precedente matrice. Trasformiamo gradatamente questa nella matrice identità:

$$\left\Vert \begin{array}{cccc:cccc} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\Vert \xrightarrow{R_1 = R_1 - R_3} \left\Vert \begin{array}{cccc:cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\Vert \xrightarrow{R_1 = -R_1} \left\Vert \begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\Vert$$

Abbiamo già ottenuto la prima riga della matrice identità:

$$\xrightarrow{R_2=R_2-R_4}\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_4}\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

Abbiamo scambiato fra loro la seconda e la quarta riga perché la prima era già la quarta riga della matrice identità. Continuiamo.

$$\xrightarrow{R_3=R_3+R_4}\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix}\xrightarrow{R_3=R_3-R_1}\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

Abbiamo ottenuto anche la seconda riga, anche in una diversa posizione.

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix}\xrightarrow{R_3=R_3-R_2}\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

Si nota che la matrice di partenza è divenuta quella identità, mentre I è appunto la matrice inversa che avevamo già ottenuto nel box precedente.

***Determinare, se esistono, le inverse delle seguenti matrici* (*N.I. = Non invertibile*)**

Livello 2

8. $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix};\begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$

$$\left[\begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{Vmatrix};\begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{Vmatrix};\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}\right]$$

9. $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix};\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix};\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$ $\left[\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix};\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix};\text{N.I.}\right]$

Lavoriamo insieme

Risolvere il sistema: $\begin{cases} y-t=1 \\ y+z+t=2 \\ x+y-t=-2 \\ y+z=0 \end{cases}$. Visto che la matrice dei coefficienti coincide con la matrice di cui abbiamo già calcolato l'inversa, nel box precedente, possiamo utilizzare tale conoscenza per semplificare i calcoli: $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}^{-1} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{Vmatrix}$. Si faccia particolare attenzione all'ordine della moltiplicazione, dato che sappiamo che in generale il prodotto di matrici non è commutativo. Ora svolgiamo i calcoli: $\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1-2 \\ 1+2 \\ -1-2 \\ 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{Vmatrix}$. Verifichiamo la correttezza della soluzione: $\begin{cases} 3-2=1 \\ 3-3+2=2 \\ -3+3-2=-2 \\ 3-3=0 \end{cases}$. La verifica è andata a buon fine.

Risolvere i seguenti sistemi, utilizzando le matrici inverse già calcolate nei precedenti esercizi

Livello 1

10. $\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y=2 \\ \frac{3}{4}x+\frac{4}{5}y=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} x+3y=-2 \\ 4x-y=1 \end{cases}$; $\begin{cases} x+2y+3z=-1 \\ x+y+z=0 \\ -x+y+z=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ x+4y+9z=-1 \\ x+8y+27z=1 \end{cases}$

$\left[\left(x=-\frac{68}{3}, y=20\right);\left(x=\frac{1}{13}, y=-\frac{9}{13}\right);(x=1, y=3, z=-2);\left(x=3, y=-\frac{5}{2}, z=\frac{2}{3}\right)\right]$

11. $\begin{cases} x+2y=-\frac{1}{2} \\ x+4y=\frac{1}{4} \end{cases}$; $\begin{cases} x+t=3 \\ y+z=-1 \\ y+t=2 \\ z=-\frac{1}{4} \end{cases}$; $\begin{cases} x-y=1 \\ -x+z+t=1 \\ y+z+t=-2 \\ x-y-z+t=3 \end{cases}$

$\left[\left(x=-\frac{5}{4}, y=\frac{3}{8}\right);\left(x=\frac{1}{4}, y=-\frac{3}{4}, z=-\frac{1}{4}, t=\frac{11}{4}\right);(x=-1, y=-2, z=-1, t=1)\right]$

12. $\begin{cases} x-y-t=\frac{2}{3} \\ y+t=-2 \\ y=-\frac{3}{2} \\ x+y+z+t=5 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x-z=\frac{1}{3} \\ -y+2z=-3 \\ -x+y=1-\sqrt{2} \end{cases}$

$\left[\left(x=-\frac{4}{3}, y=-\frac{3}{2}, z=\frac{25}{3}, t=-\frac{1}{2}\right);\left(x=-\frac{3\cdot\sqrt{2}+4}{9}, y=\frac{5-12\sqrt{2}}{9}, z=-\frac{6\cdot\sqrt{2}+11}{9}\right)\right]$

Livello 2

13. Considerando due matrici quadrate di ordine 2, verificare che $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
14. Stabilire una relazione che lega $|m \cdot A|$ con $|A|$, $m \in \mathbb{R}$, $A \in M_n(\mathbb{R})$. $[|m \cdot A| = m^n \cdot |A|]$
15. Una matrice A tale che $A = A^T$ si chiama matrice simmetrica; che relazione vi è, in questo caso, fra A^T e A^{-1} (se la matrice è non singolare)? $\left[A^{-1} = \frac{\left(A^T\right)^{(a)}}{|A|}\right]$

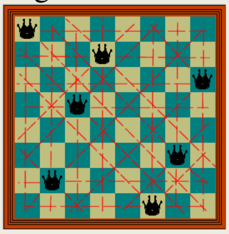
Livello 3

16. Calcolare $(A \cdot B^T \cdot C)^{-1}$, con A e C matrici di ordine 3, $B = \begin{Vmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{Vmatrix}, b \neq 0$, e $C^{-1} \cdot A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.
$\left[\begin{Vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{b} \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{b} & 0 & 0 \end{Vmatrix}\right]$

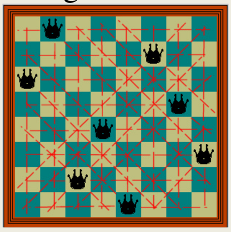
17. Calcolare $(A \cdot B \cdot C^{-1})^{-1}$, con A e B matrici di ordine 3, $C = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$, e $A \cdot B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$. $\left[\begin{Vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}\right]$

Giochiamo alla matematica

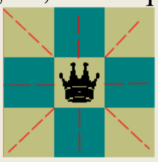
Le matrici sono utilizzate, almeno a livello formale, in tutti i giochi da scacchiera: dama, scacchi, ... In genere però i riferimenti si limitano al fatto che abbiamo a che fare con una tabella in cui ciascuna casella è determinata dalle posizioni della riga e della colonna che in essa si incontrano. Vi sono però dei casi, uno lo presentiamo, in cui grazie ai determinanti possiamo risolvere problemi sulle scacchiere.
Il problema che presentiamo è noto come quello delle 8 regine e consiste nel riuscire a collocare su una classica scacchiera 8 × 8, 8 regine in modo tale che nessuna di esse sia posta sotto scacco; naturalmente sulla scacchiera non vi saranno altri pezzi oltre alle regine. A lato un esempio di soluzione errata.



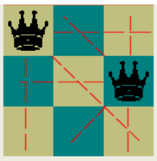
Notiamo infatti che siamo riusciti a mettere sulla scacchiera solo 7 regine e non sono rimaste celle libere da attacchi dove posizionare l'ottava. Nella seconda figura vi è un esempio di soluzione corretta.



(Le immagini sono state ottenute utilizzando il software winarc, freeware prelevabile dal sito http://math.exeter.edu/rparris)
Le soluzioni possibili sono 92 e fu il famoso matematico tedesco Carl Friedrich Gauss a trovarle, nel 1850. Nel 1874 un certo Günther stabilì un metodo per determinare le soluzioni nel generico caso di una scacchiera $n \times n$, utilizzando i determinanti. Cominciamo a mostrare che non vi sono soluzioni per $n < 4$. Banalmente si nota l'impossibilità per $n = 2$, dato che una regina, dovunque venga posta controlla tutta la scacchiera.



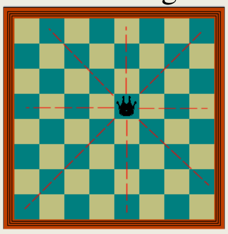
Per $n = 3$, vi sono a disposizione 9 caselle, che anche in questo caso sono tutte controllate da una sola regina posta nella casella al centro, come mostrato in figura.



Se collochiamo una regina in una cella che sta sul bordo veniamo a controllare ben 7 caselle, quindi dovunque si ponga la seconda regina, nelle 2 caselle disponibili, ciò non permetterà la collocazione di una terza regina.

Passiamo a descrivere il metodo di Günther.

L'idea è la seguente: numeriamo le celle di una classica scacchiera 8×8 come facciamo in una matrice, cioè a_{11}, a_{12}, ... a_{18}, ..., a_{78}, a_{88}. Ora osserviamo che le celle controllate dalla regina posta nella posizione a_{ij}, sono chiaramente a_{ik} (cioè le celle che stanno sulla stessa riga), a_{hj} (le celle che stanno sulla stessa colonna), $a_{i+1,j+1}$, $a_{i+2,j+2}$, ... (cioè le celle che stanno sulla diagonale destra in basso), $a_{i-1,j-1}$, $a_{i-2,j-2}$, ... (cioè le celle che stanno sulla diagonale sinistra in alto), $a_{i+1,kj-1}$, $a_{i+2,j-2}$, ... (cioè le celle che stanno sulla diagonale destra in alto) e $a_{i-1,\,kj+1}$, $a_{i-2,j+2}$, ... (cioè le celle che stanno sulla diagonale sinistra in basso).



Se allora sviluppassimo il determinante dell'ottavo ordine, utilizzando il teorema di Laplace otterremmo un'espressione contenente termini ottenuti moltiplicando fra loro 8 termini, ciascuno dei quali sta in una riga e in una colonna diversa. A questo punto basta individuare quali fra tutti questi termini sono quelli che hanno indici differenti non solo per le righe e le colonne, cosa che già avviene, ma anche per le diagonali.

Chiariamo quanto detto con un esempio.

Nel caso di cui abbiamo già provato l'impossibilità, ossia quello di porre 3 regine in una scacchiera 3 × 3, dobbiamo considerare il determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}$$

Quindi vi sono sei diversi modi di porre tre regine in una scacchiera 3 ×3 in modo tale che ciascuna di esse occupi una riga e una colonna diverse. Il problema è che nessuna di queste sei configurazioni, verifica la condizione delle diagonali; quindi ecco un altro modo, algebrico, di provare l'impossibilità del problema.

Il problema del metodo di Günther consiste nel fatto che all'aumentare di n divengono eccessivi tutti i casi possibili e risulta pertanto laboriosa (e noiosa) la determinazione delle configurazioni accettabili. Per esempio nel caso delle 8 regine, vi sono la bellezza di 1 · 2 · 3 · ... · 7 · 8 = 40 320 ottuple, dalle quali dobbiamo poi trovare le uniche 92 accettabili. Applichiamo il metodo al caso 4 × 4, in cui le configurazioni sono appena 24.

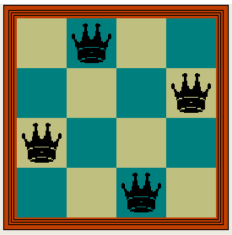
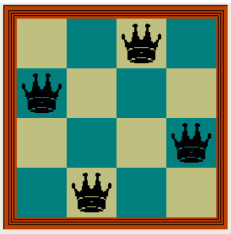
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}\cdot a_{44} - a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{34}\cdot a_{43} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{44} + a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{34}\cdot a_{42} + a_{11}\cdot a_{24}\cdot a_{32}\cdot a_{43} -$$

$$- a_{11}\cdot a_{24}\cdot a_{33}\cdot a_{42} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}\cdot a_{44} + a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{34}\cdot a_{43} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}\cdot a_{44} - a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{34}\cdot a_{41} - a_{12}\cdot a_{24}\cdot a_{31}\cdot a_{43} + a_{12}\cdot a_{24}\cdot a_{33}\cdot a_{41} +$$

$$+ a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{44} - a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{34}\cdot a_{42} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}\cdot a_{44} + a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{34}\cdot a_{41} + a_{13}\cdot a_{24}\cdot a_{31}\cdot a_{42} - a_{13}\cdot a_{24}\cdot a_{32}\cdot a_{41} - a_{14}\cdot a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{43} +$$

$$+ a_{14}\cdot a_{21}\cdot a_{33}\cdot a_{42} + a_{14}\cdot a_{22}\cdot a_{31}\cdot a_{43} - a_{14}\cdot a_{22}\cdot a_{33}\cdot a_{41} - a_{14}\cdot a_{23}\cdot a_{31}\cdot a_{42} + a_{14}\cdot a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{41}$$

Con un po' di pazienza si trovano le seguenti uniche due soluzioni accettabili, mostrate sotto.

Naturalmente possiamo migliorare il nostro procedimento eliminando in partenza alcuni casi; per esempio quando sviluppiamo il precedente determinante rispetto alla prima riga avremo da calcolare 4 determinanti di ordine 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Ognuno di essi darà poi luogo al calcolo di 3 determinanti del II ordine. Consideriamo per esempio quelli relativi ad a_{11}: $a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \left(a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{23} \cdot \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{24} \cdot \begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \right)$. Possiamo subito dire che il primo determinante di ordine 2 all'interno delle parentesi non produrrà soluzione, quindi lo elimineremo, dato che a_{11} e a_{22} appartengono alla stessa diagonale. Con ragionamenti analoghi possiamo eliminare altri casi, riducendo le verifiche da effettuare.

Attività

1. Determinare tutte le 10 soluzioni del problema delle 5 regine.
2. Il metodo di Günther fornisce tutte le soluzioni, senza nessuna eliminazione, del problema delle *n* torri. Descrivere tutte le soluzioni per il problema delle *n* torri per *n* = 2, 3, 4.
3. Utilizzare il metodo di Günther per risolvere il problema degli *n* alfieri per *n* = 2, 3, 4. Gli alfieri muovono solo in diagonale.

Risoluzione di sistemi lineari di *n* equazioni in *m* incognite.

Il problema

Un sistema che ha un numero di equazioni diverso dal numero di incognite, in generale non ha una sola soluzione, ma ne ha infinite o nessuna. Siamo in grado di stabilire una regola generale che ci permetta di dire quante sono le soluzioni di un sistema del genere?

Vediamo un esempio, considerando per il momento il caso in cui vi sono più incognite che equazioni.

Esempio 18

Consideriamo il seguente sistema di 2 equazioni in 4 incognite: $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4=1 \\ -x_1+4x_2+x_3-2x_4=-2 \end{cases}$. A un sistema del genere non possiamo applicare il teorema di Cramer – Leibniz, dato che la matrice dei coefficienti non è quadrata. D'altro canto avendo più incognite che informazioni (equazioni), il sistema certamente non può essere determinato, quindi ha infinite soluzioni. Infinite soluzioni non significa *tutte* le soluzioni, per esempio (0, 0, 0, 0) non è una soluzione; vediamo allora di cercare una generica legge che ci fornisca *tutte* le soluzioni. Per far ciò basta considerare due delle incognite come *parametri*.
Ciascuno dei sei sistemi può risolversi con il metodo di Cramer – Leibniz, dando perciò in teoria sei leggi generali solo all'apparenza diverse. Per esempio il sistema $\begin{cases} x_1+2x_2=x_3-3x_4+1 \\ -x_1+4x_2=-x_3+2x_4-2 \end{cases}$ ha soluzioni:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 1+x_3-3x_4 & 2 \\ -x_3+2x_4-2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}}=\frac{4+4x_3-12x_4+4+2x_3-4x_4}{4+2}=\frac{4+3x_3-8x_4}{3},$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+x_3-3x_4 \\ -1 & -x_3+2x_4-2 \end{vmatrix}}{6}=\frac{-2-x_3+2x_4+1+x_3-3x_4}{6}=\frac{-1-x_4}{6}$$

Se volessimo determinare una soluzione potremmo assegnare valori a piacere ai *parametri* x_3 e x_4, determinando i valori di x_1 e x_2. Così, per esempio, per $x_3 = 1$ e $x_4 = -2$ avremo:

$$x_1=\frac{4+3\cdot 1-8\cdot(-2)}{3}=\frac{23}{3},\ x_2=\frac{-1-(-2)}{6}=\frac{1}{6}$$

Il sistema $\begin{cases} x_1-x_3=-2x_2-3x_4+1 \\ -x_1+x_3=-4x_2+2x_4-2 \end{cases}$ non ha soluzioni, dato che il determinante della matrice dei coefficienti è nullo. Gli altri quattro sistemi che possiamo ottenere hanno invece soluzioni; calcoliamo per esempio quella del sistema $\begin{cases} x_1+3x_4=x_3-2x_2+1 \\ -x_1-2x_4+=-x_3-4x_2-2 \end{cases}$. Omettendo i passaggi si ha: $x_1 = 16x_2 + x_3 + 4$, $x_4 = -6x_2 - 1$.
Per verificare se questa legge genera le stesse soluzioni del primo sistema esaminato, basta assegnare a x_2 e x_3 i precedenti valori, ricavare x_1 e x_4 e controllare se coincidono con quelli già trovati. In effetti si ha: $x_1=16\cdot\frac{1}{6}+1+4=\frac{23}{3},\ x_4=-6\cdot\frac{1}{6}-1=-2$.

Definizione 8

Dato un sistema lineare di n equazioni in m incognite, se le sue eventuali soluzioni si esprimono mediante k delle incognite ($k<m$), diciamo che il sistema ha **infinito alla *m*–*k* soluzioni**.

Notazione 7

Per scrivere che il sistema ha infinito alla $m-k$ soluzioni scriviamo ∞^{m-k}.

Con riferimento all'Esempio 18 diciamo che il sistema ha ∞^2 soluzioni.
Come si è visto nell'esempio precedente, se riusciamo a scrivere il sistema di n equazioni in m incognite (con $n < m$) in modo da isolare n delle incognite che hanno coefficienti il cui determinante non è zero, il sistema avrà ∞^{n-m} soluzioni. Non è detto però che ciò sia sempre possibile.

Esempio 19

- Consideriamo il seguente sistema di 2 equazioni in 3 incognite: $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ 2x_1+2x_2-2x_3=0 \end{cases}$. Nessuno dei seguenti tre sistemi $\begin{cases} x_1+x_2=1+x_3 \\ 2x_1+2x_2=2x_3 \end{cases}$, $\begin{cases} x_1-x_3=1-x_2 \\ 2x_1-2x_3=-2x_2 \end{cases}$, $\begin{cases} x_2-x_3=1-x_1 \\ 2x_2-2x_3=-2x_1 \end{cases}$ ha matrice dei coefficienti non singolare (cioè con determinante diverso da zero). In questo caso il sistema non ha soluzioni. Del resto potevamo accorgercene subito osservando che le due equazioni sono in evidente contraddizione fra loro, dato che se dividiamo per 2 la seconda equazione otteniamo $x_1 + x_2 - x_3 = 0$, che è in evidente contrasto con la prima equazione.
- Il sistema $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ 2x_1+2x_2-2x_3=2 \end{cases}$ è invece indeterminato, dato che le due equazioni sono equivalenti e pertanto esso è l'equazione $x_1 + x_2 - x_3 = 1$, che può scriversi per esempio $x_1 = 1 - x_2 + x_3$. Il sistema quindi non ha ∞^1 soluzioni come potevamo aspettarci, dato che vi erano 3 incognite e 2 equazioni, bensì ∞^2 soluzioni.

Visti i risultati dell'esempio precedente è opportuno cercare i risultati generali che ci permettano di determinare di che *grado* di infinito sono le eventuali soluzioni. Abbiamo visto che ciò dipende dalla possibilità o meno di potere *isolare* le incognite la cui matrice sia non singolare. Poniamo alcune definizioni.

Definizione 9

Data una matrice A, diciamo **matrice estratta** da essa, una matrice che si ottiene eliminando da A una o più righe e/o una o più colonne.

Definizione 10

Data una matrice A, diciamo sua **caratteristica** o **rango**, il massimo fra gli ordini di tutte le matrici quadrate non singolari estratte da A.

Notazione8

Per indicare il rango di una matrice A, scriviamo $r(A)$.

Ovviamente una matrice quadrata non singolare di ordine n ha rango n, così come è ovvio che solo la matrice nulla ha rango zero, mentre tutte le altre matrici hanno rango almeno 1.

Esempio 20

- Consideriamo la seguente matrice: $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$. Calcoliamo il suo determinante: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$ $= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 14 - 3 \neq 0$. Possiamo allora dire che $r(A) = 3$.
- La matrice $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$ è invece singolare, come si nota osservando che la terza riga è somma delle prime due (Corollario5), perciò $r(A) < 3$. Quanti minori di ordine 2 possiamo estrarre da A? Dobbiamo

scegliere 2 righe da 3 e poi 2 colonne da 3; ognuna di queste operazioni può effettuarsi in 3 modi diversi, quindi in totale vi sono le seguenti 9 matrici estratte:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}$$

Verifichiamo se almeno uno di essi è non singolare; in effetti lo sono tutti e 9, quindi $r(A) = 2$.

- Quanto vale il rango di $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$? Dato che la matrice ha 4 righe e 3 colonne, abbiamo $r(A) \le 3$.
  Osserviamo inoltre che la seconda e la quarta riga sono fra loro opposte, quindi qualsiasi matrice estratta da A che contenga entrambe le dette righe è singolare. Le uniche due estratte di ordine 3 che possono non essere singolari sono pertanto: $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$. Anche in questo caso però non è difficile notare che, nella prima matrice, la terza riga è somma delle prime due e, nella seconda matrice, la stessa riga è differenza della prima rispetto alla seconda. Quindi $r(A) < 3$. Facilmente troviamo determinanti di ordine 2 non singolari, quindi $r(A) = 2$.

Il rango di una matrice risulta indispensabile supporto per la risoluzione dei sistemi lineari. Prima di enunciare un fondamentale risultato, poniamo alcune definizioni.

Definizione 11

Dato un sistema lineare scritto nella forma normale di Cramer – Leibniz diciamo sua **matrice incompleta** la matrice formata con i coefficienti delle incognite; diciamo sua **matrice completa** la matrice ottenuta aggiungendo come ultima colonna alla matrice incompleta il vettore dei termini noti.

Possiamo adesso enunciare il risultato cercato, che non dimostriamo.

Teorema 7 (di Rouché – Capelli)

Un sistema lineare di n equazioni in m incognite ammette soluzioni solo se la matrice incompleta e la matrice completa hanno lo stesso rango. Se ciò avviene, detto r il valore comune dei due ranghi, il sistema ammette ∞^{n-r} soluzioni, dove con il simbolo ∞^0 indichiamo il numero 1.

Nel precedente teorema rientra come caso particolare il teorema di Cramer – Leibniz, almeno limitatamente al numero di soluzioni, non al metodo per ottenerle.

L'angolo storico

Il concetto di caratteristica è dovuto al matematico Frobenius, che lo pubblica in un suo lavoro del 1894. Va sotto il nome di teorema di Rouché – Capelli poiché il risultato è presente in un lavoro pubblicato da Eugène Rouché (1832 – 1910) nel 1875 e viene successivamente ripreso da Alfredo Capelli (1855 – 1910) nel 1909.

Esempio 21

- Consideriamo il seguente sistema: $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$. La matrice incompleta è $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{Vmatrix}$, quella completa è $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{Vmatrix}$. Se la matrice incompleta non è singolare allora possiamo applicare il teorema di Cramer – Leibniz e concludiamo che il sistema ha un'unica soluzione. Si nota però che la seconda riga è somma delle altre due, quindi la matrice incompleta è singolare e il suo rango è perciò minore di 3. La matrice completa ha altre 3 possibilità di avere rango 3, dato che da essa, oltre che la matrice incompleta, possiamo estrarre queste altre matrici: $\left\|\begin{matrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right\|$.

Calcoliamo il determinante della prima matrice: $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$. La matrice completa ha quindi rango 3, perciò il sistema non ha soluzioni.

- Consideriamo il seguente sistema: $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$. Esso ha più equazioni che incognite. In casi come questo le possibilità sono due: o le equazioni in più sono *inutili*, ossia impongono le stesse condizioni delle altre e perciò possono eliminarsi, o sono in contraddizione con le altre, quindi il sistema non ha soluzioni. Consideriamo comunque le due matrici incompleta e completa: $\left\|\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{matrix}\right\|, \left\|\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{matrix}\right\|$.
Naturalmente se la matrice completa non è singolare il sistema non ha soluzioni, dato che essa può avere rango 3, mentre quella incompleta non può avere un rango superiore a 2. Calcoliamo quindi il determinante della matrice completa: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$. La matrice completa ha quindi rango 3 e il sistema non ha soluzioni.
- Consideriamo il sistema: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = -2 \\ 3x_1 - 5x_2 = 0 \end{cases}$. Calcoliamo il determinante della matrice completa:
$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 0$ Infatti si notai che la differenza fra la terza e la seconda riga è uguale al doppio della prima riga. Questo significa che una delle tre equazioni può essere eliminata. Elimineremo quella che lascia un sistema determinato, quindi con una matrice incompleta non singolare. In questo caso ciò accade eliminando una qualsiasi delle tre, per esempio la prima: $\begin{cases} x_1 - x_2 = -2 \\ 3x_1 - 5x_2 = 0 \end{cases}$. Risolviamo, con il metodo di Cramer – Leibniz, il sistema: $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}} = \dfrac{10}{-2} = -5, x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}}{-2} = \dfrac{6}{-2} = -3$

Considereremo altri esempi nelle attività proposte per esercizio.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Determinarne il rango o caratteristica della matrice $\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 5 & -4 & -2 & 8 \end{Vmatrix}$.

Evidentemente se il suo determinante è non nullo essa è 4. Calcoliamo quindi questo determinante e troviamo che è nullo, quindi il rango non è 4; per stabilire se è 3 dovremmo considerare tutti i minori di ordine 3, che sono diversi. Concentriamo la nostra attenzione sul minore che si ottiene eliminando l'ultima riga e l'ultima colonna e calcoliamone il relativo determinante: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$. Concludiamo dicendo che la data matrice ha rango 3.

Determinare il rango delle seguenti matrici

Livello **1**

1. a) $\begin{Vmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 7 \end{Vmatrix}$; b) $\begin{Vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 8 \\ 3 & -10 & -6 \end{Vmatrix}$; c) $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \\ 5 & 13 & -10 & 6 \end{Vmatrix}$; d) $\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$; e) $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{Vmatrix}$

[a) 2; b) 2; c) 2; d) 3; e) 2]

2. a) $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{Vmatrix}$;b) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$;c) $\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{Vmatrix}$; d) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 3 \end{Vmatrix}$; e) $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{Vmatrix}$ [a) 3; b) 2; c) 2; d) 2; e) 3]

3. a) $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & -4 \end{Vmatrix}$; b) $\begin{Vmatrix} -4 & 1 & 1 & -8 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{Vmatrix}$; c) $\begin{Vmatrix} 2 & 2 & 4 & -2 \\ -1 & -4 & -3 & 3 \\ 1 & -8 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & 7 & 6 \end{Vmatrix}$; d) $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{Vmatrix}$; e) $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{Vmatrix}$

[a) 2; b) 3; c) 3; d) 2; e) 2]

4. a) $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 0 & 6 & -3 \end{Vmatrix}$; b) $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$; c) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$ [a) 1; b) 3; c) 3]

Lavoriamo insieme

- *Risolvere il seguente sistema*: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ -3x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 = 2 \end{cases}$. Essendo un sistema di tre equazioni in due incognite, vi sono due possibilità: 1) almeno una delle tre equazioni è *inutile*, nel senso che è equivalente a una delle altre; 2) almeno una è *dannosa*, nel senso che è in contraddizione con una delle altre. Per stabilire quale dei casi accade, applichiamo il teorema di Rouchè – Capelli. Visto che il massimo rango che può avere la matrice incompleta, che è di tipo 3 × 2, è 2, mentre la matrice completa può avere rango 3, condizione necessaria ma non sufficiente perché il sistema abbia soluzioni è che il determinante della matrice completa sia zero. Calcoliamolo: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3=R_3+2R_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 13$

- Possiamo perciò concludere che il sistema non ha soluzioni.

Se il precedente sistema fosse stato $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ -3x_1 + 4x_2 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 = -2 \end{cases}$, il determinante della matrice completa $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix}$ sarebbe stato nullo, dato che la prima e la terza colonna sono fra loro opposte. Allora, dato che il rango della matrice incompleta è 2, e un minore diverso da zero è per esempio $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7$, anche quello della matrice completa è 2. Ciò significa che possiamo eliminare una delle tre equazioni a nostro piacere, purché in questo modo lasciamo un sistema determinato, cioè con la matrice incompleta non singolare. Il sistema perciò diviene di 2 equazioni in due incognite e lo risolviamo con il metodo di Cramer – Leibniz. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ -3x_1 + 4x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}} = -1, x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}}{7} = 0$

Utilizzando il teorema di Rouché – Capelli risolvere i seguenti sistemi lineari non omogenei

Livello **1**

5. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 + 6x_2 = 3 \\ -x_1 + 5x_2 = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$ $\left[\left(x = \dfrac{21}{16}, y = \dfrac{1}{16}\right); \left(x_1 = 7x_3 - 12x_4 + 7, x_2 = 5x_3 - 8x_4\right)\right]$

6. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$ $\left[\left(x = -\dfrac{1}{5}, y = \dfrac{2}{5}\right); \left(x_1 = -\dfrac{3x_2 + 1}{3}, x_3 = -\dfrac{1}{3}\right)\right]$

7. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ -2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$ $[\varnothing; x_1 = -5x_3 + 2, x_2 = -9x_3 + 4]$

8. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - \dfrac{3}{2}x_2 + \dfrac{1}{2}x_3 - \dfrac{1}{2}x_4 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$ $\left[\left(x_1 = \dfrac{3x_2 - x_3 + x_4 + 2}{2}\right); \left(x_1 = \dfrac{2x_2 + 1}{2}, x_3 = \dfrac{2x_4 - 1}{2}\right)\right]$

9. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases}$ $[x_1 = x_4 + 2, x_2 = 2(x_4 + 1), x_3 = 3(x_4 + 1); \varnothing]$

Livello **2**

10. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 9 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$ $\left[x_1 = \dfrac{5\cdot(x_4 + 4)}{9}, x_2 = \dfrac{2x_4 - 37}{9}, x_3 = \dfrac{-2\cdot(x_4 - 2)}{3}; \varnothing\right]$

11. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = -3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$ [$x_1 = -x_3$, $x_2 = x_3 + 1$, $x_4 = 0$; $\varnothing$]

12. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 4 \end{cases}$ [$x_1 = x_3 + 2x_4 + 1$, $x_2 = -(2x_3 + 3x_4)$]

13. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 = -1 \end{cases}$ $\left[x_1 = \frac{1-15x_3}{5},\ x_2 = \frac{7-40x_4}{20}, x_5 = \frac{1}{10}\right]$

Lavoriamo insieme

- *Risolvere il seguente sistema omogeneo*: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.

Naturalmente tutti i sistemi omogenei hanno almeno una soluzione, quella nulla. Così in ogni caso $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ è una soluzione del sistema. Dato che il detto sistema è nella forma di Cramer – Leibniz, se il determinante della matrice incompleta è diverso da zero, la precedente è l'*unica* soluzione.

In questo caso abbiamo: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2 = R_1 + R_2} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 = R_3 - 2R_1} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$

Quindi il sistema ammette la sola soluzione nulla.

- *Risolvere il seguente sistema*: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$.

Il determinante della matrice incompleta: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2 = R_1 + R_2} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 = R_1 - R_3} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ è nullo. Questa volta il sistema non ammette un'unica soluzione, ma ne ammette infinite, e dato che il rango della matrice incompleta, quindi anche della matrice completa visto che i termini noti sono nulli, è 2, vi sono ∞^1 soluzioni. Troviamole: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -x_3 \\ -x_1 + x_2 = 4x_3 \end{cases} \Rightarrow$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -x_3 & -2 \\ 4x_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-x_3 + 8x_3}{1-2} = -7x_3 \wedge x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -x_3 \\ -1 & 4x_3 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{4x_3 - x_3}{1-2} = -3x_3$$

Utilizzando il teorema di Rouché – Capelli risolvere i seguenti sistemi lineari omogenei

Livello 1

14. $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ [($x_1 = x_2 = 0$); ($x_1 = x_2$); ($x_1 = 0$, $x_2 = x_3$)]

15. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1-x_2-2x_3=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+3x_3=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ 2x_1+x_3=0 \\ -x_2+3x_3=0 \end{cases}$

$\left[\left(x_1=\frac{1}{2},x_2=-\frac{3}{2}\right);\left(x_1=x_3,x_2=-2x_3\right);\left(x_1=x_2=x_3=0\right)\right]$

16. $\begin{cases} x_1+x_2+x_4=0 \\ x_2-x_3+x_4=0 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=0 \\ x_1+x_2+x_3=0 \\ 3x_1+2x_2=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1-x_2=0 \\ x_1+x_2=0 \\ 2x_1+x_2=0 \end{cases}$

[($x_1=-x_3$, $x_2=x_3-x_4$); ($x_1=2x_3$, $x_2=-3x_3$); ($x_1=x_2=0$)]

17. $\begin{cases} x_1-x_2+x_4=0 \\ x_1+x_2+x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ 2x_1-3x_2-4x_3=0 \\ 3x_1-2x_2+x_3=0 \\ 4x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$ [($x_1=-x_4$, $x_2=0$, $x_3=x_4$); ($x_1=x_2=x_3=0$)]

18. $\begin{cases} 3x_1-x_3=0 \\ 4x_1-x_2+x_4=0 \\ 2x_1-x_3+x_4=0 \\ x_2+x_4=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=0 \\ x_1-x_2-x_3=0 \\ x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1-x_2+x_3=0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=0 \\ x_2+x_3-x_4+x_5=0 \\ x_1-x_3-x_4+x_5=0 \\ x_1+x_2-x_4-x_5=0 \\ x_1+x_2-x_3+x_5=0 \end{cases}$

[($x_i=0$, $1\le i\le 4$); ($x_i=0$, $1\le i\le 3$); ($x_i=0$, $1\le i\le 5$)]

19. $\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ x_2-x_3-x_4=0 \\ x_3-x_4-x_5=0 \\ x_4-x_5-x_6=0 \\ x_5-x_6-x_7=0 \end{cases}$ [$x_1=2x_6+x_7$, $x_2=5x_6+3x_7$, $x_3=3x_6+2x_7$, $x_4=2x_6+x_7$, $x_5=x_6+x_7$]

Lavoriamo insieme

Data la matrice $A=\begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix}$, *determinare, se esiste, una matrice* $B=\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix}$, *che moltiplicata per A fornisca come risultato la matrice nulla.*

Cominciamo a moltiplicare le due matrici: $A\cdot B=\begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} b_{11}+3b_{21} & b_{12}+3b_{22} \\ -b_{11}+2b_{21} & -b_{12}+2b_{22} \end{Vmatrix}$. Per ottenere la matrice nulla, deve aversi: $\begin{Vmatrix} b_{11}+3b_{21} & b_{12}+3b_{22} \\ -b_{11}+2b_{21} & -b_{12}+2b_{22} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$. Due matrici sono uguali se hanno lo stesso numero di righe e di colonne e ordinatamente uguali gli elementi che occupano le stesse posizioni. Quindi dobbiamo risolvere il seguente sistema: $\begin{cases} b_{11}+3b_{21}=0 \\ b_{12}+3b_{22}=0 \\ -b_{11}+2b_{21}=0 \\ -b_{12}+2b_{22}=0 \end{cases}$, che può anche scriversi come due distinti sistemi di due equazioni in 2 incognite: $\begin{cases} b_{11}+3b_{21}=0 \\ -b_{11}+2b_{21}=0 \end{cases}\wedge\begin{cases} b_{12}+3b_{22}=0 \\ -b_{12}+2b_{22}=0 \end{cases}$. Dato che sono sistemi omogenei con determinante della matrice incompleta diverso da zero, hanno l'unica soluzione nulla: $\begin{cases} b_{11} = 0 \\ b_{21} = 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} b_{21} = 0 \\ b_{22} = 0 \end{cases}$. B è quindi la matrice nulla.

Nei seguenti esercizi, determinare la matrice $B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix}$ ***che, moltiplicata per la matrice A indicata, fornisca la matrice C***

Livello 1

20. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, C = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$; $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, C = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$; $A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}, C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$ $\left[\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}; \begin{Vmatrix} m & n \\ -m & -n \end{Vmatrix}; \varnothing\right]$

21. $A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}, C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$; $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}, C = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$; $A = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}, C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ $\left[\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}; \varnothing; \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}\right]$

22. $A = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}, C = \begin{Vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{Vmatrix}$; $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}, C = \begin{Vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}$; $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}, C = \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix}$ $\left[\begin{Vmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{Vmatrix}; \begin{Vmatrix} -6 & -5 \\ 5 & 4 \end{Vmatrix}; \begin{Vmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{Vmatrix}\right]$

23. $A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, C = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$; $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{Vmatrix}, C = \begin{Vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}$; $A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}, C = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$ $\left[\begin{Vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{Vmatrix}; \begin{Vmatrix} 6 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}; \begin{Vmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{Vmatrix}\right]$

24. $A = \begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{Vmatrix}, C = \begin{Vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -3 \end{Vmatrix}$; $A = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{Vmatrix}, C = \begin{Vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -4 \end{Vmatrix}$; $A = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{Vmatrix}, C = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}$ $\left[\varnothing; \begin{Vmatrix} -4 & 1 \\ -\frac{9}{2} & 3 \end{Vmatrix}; \begin{Vmatrix} 4 & -2 \\ \frac{3}{2} & 3 \end{Vmatrix}\right]$

Lavoriamo insieme

Data la matrice $\begin{Vmatrix} 1-m & 1 & 0 \\ 0 & 1-2m & 1 \\ 1-2m & 0 & -1 \\ 1 & 2 & m \end{Vmatrix}$ *in cui è presente il parametro reale m, studiare quanto vale il suo rango al variare di m.*

Dato che il minore $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$, non dipende dal parametro ed è non singolare, possiamo dire che il rango è almeno 2 quale che sia m. In ogni caso il rango non può superare 3, vediamo allora quando assume tale valore. Per ottenere un minore di ordine 3 dobbiamo eliminare una riga a piacere; cominciamo a eliminare la quarta riga, in modo da ottenere un minore con più zeri possibili: $\begin{Vmatrix} 1-m & 1 & 0 \\ 0 & 1-2m & 1 \\ 1-2m & 0 & -1 \end{Vmatrix}$. Calcoliamo il determinante: $\begin{vmatrix} 1-m & 1 & 0 \\ 0 & 1-2m & 1 \\ 1-2m & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1-m) \cdot \begin{vmatrix} 1-2m & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1-2m & -1 \end{vmatrix} = (1 - m)\cdot(2m - 1) + 1 - 2m = (1 - 2m) \cdot (-1 + m + 1) = m \cdot (1 - 2m)$. Quindi se $m\cdot (1 - 2m) \neq 0$, cioè $m \neq 0 \wedge m \neq \frac{1}{2}$, il rango della matrice è 3. Vediamo che cosa accade invece negli altri due casi.

- Se $m = 0$, la matrice diviene: $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$ in cui il minore ottenuto eliminando la quarta riga è nullo, ma gli altri minori potrebbero non esserlo. In effetti, per esempio, quello che si ottiene eliminando la prima riga non lo è: $\left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right.$ $= 0 - 1 + 2 - 0 - 0 - 0 = 1$. Quindi anche se $m = 0$ il rango è 3.
- Vediamo infine che cosa accade se $m = \frac{1}{2}$; la matrice è: $\begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \end{Vmatrix}$. Si nota che la seconda e terza riga sono proporzionali, quindi ogni minore che le contiene entrambe è singolare; perciò l'unica possibilità è considerare i due minori che contengono una sola di tali righe, cioè: $\begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \end{Vmatrix} \vee \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \end{Vmatrix}$, che hanno chiaramente lo stesso rango. Calcoliamo uno dei due determinanti: $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$. Perciò in questo caso il rango è 2.

Studiare, al variare dei parametri reali presenti, il rango delle seguenti matrici

Livello 2

25. $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ m & 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$; $\begin{Vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m & -1 \\ 1 & m & 0 & 1 \end{Vmatrix}$; $\begin{Vmatrix} -2 & m & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 & m \end{Vmatrix}$ $\left[r = 3, \forall m \in \mathbb{R}; r = \begin{cases} 2 & m = -1 \\ 3 & m \neq -1 \end{cases}; r = \begin{cases} 2 & m = 0 \\ 3 & m \neq 0 \end{cases} \right]$

26. $\begin{Vmatrix} m & 1 \\ -1 & m \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}$; $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 0 \\ 1 & m & 1 \end{Vmatrix}$; $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ m & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & m & 0 \\ 0 & 1-m & -1 & 1 \end{Vmatrix}$ $\left[r = 2, \forall m \in \mathbb{R}; r = \begin{cases} 2 & m = 0 \\ 3 & m \neq 0 \end{cases}; r = \begin{cases} 3 & m = -1 \pm \sqrt{2} \\ 4 & m \neq -1 \pm \sqrt{2} \end{cases} \right]$

27. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & m \\ 1 & -m & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ m+2 & m-1 & 0 \end{Vmatrix}$; $\begin{Vmatrix} 1-m & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1-2m & 1 & -2 \\ 1 & m+1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$; $\begin{Vmatrix} 1-m & 1+m \\ 2m-1 & m+3 \\ m & 2m+4 \end{Vmatrix}$ [r=3,$\forall m \in \mathbb{R}$; r=3,$\forall m \in \mathbb{R}$; r=1,$\forall m \in \mathbb{R}$]

Livello 3

28. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & m & 1 & 0 \\ 0 & h & -1 & m \end{Vmatrix}; \begin{Vmatrix} m & 1 & 1 \\ 2 & h & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$ $\left[r = \begin{cases} 2 \text{ se } m \neq 1 \wedge h = \dfrac{2m-3}{m-1} \\ 3 \text{ se } m = 1 \vee h \neq \dfrac{2m-3}{m-1} \end{cases}; r = \begin{cases} 2 \text{ se } m = -\dfrac{4}{7} \wedge h = \dfrac{4}{49} \\ 3 \text{ se } m \neq -\dfrac{4}{7} \vee h \neq \dfrac{4}{49} \end{cases} \right]$

29. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 & m \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ h & 0 & 2 & 2 \end{Vmatrix}; \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & m & m+h-2 \end{Vmatrix}$ $\left[r = \begin{cases} 2 \text{ se } h = 1 \wedge m = 2 \\ 3 \text{ se } h \neq 1 \vee m \neq 2 \end{cases}; r = \begin{cases} 2 \text{ se } m \neq 0 \wedge h = 2 \\ 3 \text{ se } m \neq 0 \vee h \neq 2 \end{cases} \right]$

30. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & m & h \\ 0 & m & 0 & 1 \end{Vmatrix}; \begin{Vmatrix} 1 & m & 2 & h \\ h & 2 & 0 & h \\ -1 & 0 & 1 & m \end{Vmatrix}$ $\left[r = \begin{cases} 2 & \text{se } m = h = 2 \\ 3 \text{ se } & m \neq 2 \vee h \neq 2 \end{cases}; r = \begin{cases} 2 \text{ se } \left(h = \dfrac{3 \pm \sqrt{57}}{2} \wedge m = \dfrac{-3 \pm \sqrt{57}}{4} \right) \\ 3 \quad \text{altrimenti} \end{cases} \right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere il seguente quesito, assegnato agli esami di Liceo scientifico sperimentazione PNI nell'A.S. 1992/93: *Si stabiliscano le relazioni cui debbono soddisfare a e b affinché il sistema di equazioni* $\begin{cases} ax + y + bz = 1 \\ x + y + az = 1 \\ x + ay + bz = 1 \end{cases}$ *ammetta un'unica soluzione o infinite soluzioni o nessuna soluzione.*

Per il teorema di Cramer – Leibniz il sistema ammette un'unica soluzione solo se il determinante della matrice incompleta è diverso da zero. Calcoliamolo: $\begin{vmatrix} a & 1 & b \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} \begin{matrix} a & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & a \end{matrix} = ab + a + ab - (b + a^3 + b) = 2ab + a - 2b - a^3 = 2b \cdot (a - 1) + a \cdot (1 - a^2) = (a - 1) \cdot [2b - a \cdot (a + 1)] = (a - 1) \cdot [2b - a^2 - a)]$. Purtroppo il risultato del determinante è parametrico, anzi dipende da due parametri. Consideriamo allora il rango di tale matrice; possiamo dire che se $a \neq 1$ e $2b - a^2 - a \neq 0$, il rango è 3. Che cosa accade alla matrice completa $\begin{Vmatrix} a & 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & b & 1 \end{Vmatrix}$? Consideriamo il suo minore di ordine 3: $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} a & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & a \end{matrix} = a + 1 + a - (1 + a^2 + 1) = 2a + 1 - 2 - a^2 = - a^2 + 2a - 1 = - (a^2 - 2a + 1) = - (a - 1)^2$.

- Esso per $a \neq 1$ è non nullo. In questo caso quindi il rango della matrice completa è 3; affinché il sistema abbia soluzione anche quello della matrice incompleta deve essere 3, quindi deve essere $2b - a^2 - a \neq 0$.
- Se invece $a^2 + a - 2b = 0$ e $a \neq 1$, la matrice incompleta avrà rango 2, mentre quella completa rango 3; quindi il sistema è privo di soluzioni.
- Se $a = 1$, la matrice completa diviene: $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \end{Vmatrix}$. Avendo tre colonne uguali il rango può essere al massimo 2, e si ha quando $b \neq 1$; in questo caso infatti il minore $\begin{Vmatrix} b & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$ sarà non singolare. Quindi se è $a = 1$ e $b \neq 1$ vi sono ∞^1 soluzioni, che si ottengono eliminando per esempio la terza equazione; il sistema diviene: $\begin{cases} x + bz = 1 - y \\ x + z = 1 - y \end{cases}$ e le soluzioni sono: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1-y & b \\ 1-y & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{1 - y - b \cdot (1-y)}{1-b} = \dfrac{(1-y) \cdot (1-b)}{1-b} = 1 - y$;

$z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1-y \\ 1 & 1-y \end{vmatrix}}{1-b} = 0$.

- Se invece si ha $a = b = 1$ la matrice completa diviene $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$ che ha ovviamente rango 1, quindi vi sono ∞^2 soluzioni e il sistema si riduce alla sola equazione $x + y + z = 1$.

Studiare i seguenti sistemi lineari, al variare del parametro reale m

Livello **1**

31. $\begin{cases} mx - y = 1 \\ x - y = m \end{cases}; \begin{cases} 1 - mx = y \\ (m-2)x + 2y = 1 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = -1, \quad y = -m-1 & m \neq 1 \\ \infty^1 \text{ soluzioni} & m = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = \dfrac{1}{m+2}, \quad y = \dfrac{2}{m+2} & m \neq -2 \\ \varnothing & m = -2 \end{cases}\right]$

32. $\begin{cases} (1+m)x - my = 0 \\ 2x - (1+2m)y = -1 \end{cases}; \begin{cases} mx + (1-m) \cdot y = 2 \\ (1-m) \cdot x + my = 1 \\ mx + (m-1) \cdot y = -1 \end{cases}$ $\left[\left(x = \dfrac{m}{2m^2+m+1}, y = \dfrac{m+1}{2m^2+m+1}, \forall m \in \mathbb{R}\right); \varnothing\right]$

33. $\begin{cases} mx + (1-m) \cdot y + mz = 0 \\ mx + \quad my \quad = 1 - m \\ 2x \quad -y \quad +z \quad = 0 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = \dfrac{1-m}{m \cdot (m+1)}, y = \dfrac{1-m}{m+1}, z = \dfrac{(1-m) \cdot (m-2)}{m \cdot (m+1)}, & m \notin \{-1, 0\} \\ \varnothing & m = -1 \vee m = 0 \end{cases}\right]$

34. $\begin{cases} x + (m-1) \cdot y + z = m^2 - 1 \\ mx + y = 1 - m \\ x + y - z = -1 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = \dfrac{2m^2 - m - 2}{2 - m^2}, \quad y = \dfrac{m^3 - 2}{m^2 - 2}, \quad z = \dfrac{m^3 - m^2 + m - 2}{m^2 - 2} & m \neq \pm\sqrt{2} \\ \varnothing & m = \pm\sqrt{2} \end{cases}\right]$

35. $\begin{cases} x - my + z = 0 \\ mx - y + z = 1 \\ x + y + mz = -1 \end{cases}; \begin{cases} x + y - z = m \\ x - y + z = 1 - m \\ x + y - z = 1 + m \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = \dfrac{1}{m-1}, y = 0, z = \dfrac{1}{1-m} & m \notin \{0,1\} \\ \infty^1 \text{ soluzioni} & m = 0 \\ \varnothing & m = -1 \end{cases}; (\varnothing, \forall m \in \mathbb{R})\right]$

36. $\begin{cases} (1-m)x + y = 1 \\ (1+m)x - z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}; \begin{cases} 3x + 2y = m \\ mx + y = 2m \\ x - my = 2 \end{cases}$ $\left[(x = 2, y = 2m-1, z = 2m); \begin{cases} x = 2, y = 0 & m = 6 \\ \varnothing & m \neq 6 \end{cases}\right]$

37. $\begin{cases} 2x - my + 1 = z \\ x - y + mz = 0 \\ mx - my + z = -1 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = \dfrac{2}{(2-m) \cdot (m^2-1)}, y = \dfrac{m^2 - 2m - 2}{(2-m) \cdot (m^2-1)}, z = \dfrac{1}{m^2-1}, & m \notin \{-1, 1, 2\} \\ \varnothing & m \in \{-1, 1, 2\} \end{cases}\right]$

38. $\begin{cases} x - z = 1 \\ y - mz = -1 \\ x + mz = 1 \end{cases}; \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + my = 4 \\ 3x + (m-1)y + z = 3 + m \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x = 1, \quad y = -1, z = 0 & m \neq -1 \\ \infty^1 \text{ soluzioni} & m = -1 \end{cases}; \varnothing\right]$

39. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ x + 2y + mz = 1 \\ x + my + z = 3 - m \end{cases}$ $\left[x = -\dfrac{m^2 + 3m - 14}{m^2 - m + 2}, \; y = \dfrac{(2-m) \cdot (m-3)}{m^2 - m + 2}, \; z = \dfrac{4 \cdot (m-2)}{m^2 - m + 2}, \; \forall m \in \mathbb{R}\right]$

40. $\begin{cases} x+my+z=m \\ x+y+mz=m \\ mx+y+z=1 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x=\dfrac{-1}{m+2}, y=z=\dfrac{m+1}{m+2} & m\notin\{-2,1\} \\ \infty^1 \text{ soluzioni} & m=1 \\ \varnothing & m=-2 \end{cases}\right]$

Livello 2

41. $\begin{cases} x+y=m \\ mx+y=2m \\ x-y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} mx+z=0 \\ x+2y=0 \\ mx+2y+(2m-1)\cdot z=0 \\ x-2z=0 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x=2, y=0 & m=2 \\ x=\dfrac{1}{2}, y=-\dfrac{3}{2} & m=-1 \\ \varnothing & m\notin\{-1,2\} \end{cases} ;\left(x=y=z=0, \forall m\in\mathbb{R}\right)\right]$

42. $\begin{cases} x+my-z=1 \\ 2x+y-z=1-m \end{cases}$; $\begin{cases} x+2y+7z=-1 \\ x-y-2z=m \\ y+3z=-1 \\ -2x+y+z=-3 \end{cases}$ $\left[\infty^1 \ sol., \forall m\in\mathbb{R}; \begin{cases} \infty^1 \ sol., \ m=2 \\ \varnothing \quad m\neq 2 \end{cases}\right]$

43. $\begin{cases} x-y+mz-t=0 \\ x+my-t=-1 \\ y-mz-t=1+m \end{cases}$; $\begin{cases} x-y=0 \\ mx-y+z=0 \\ x-mt=0 \\ y+z-mt=0 \end{cases}$ $\left[\infty^1 \ sol., \forall m\in\mathbb{R}; \begin{cases} x=y=z=t=0, & m\neq 1 \\ x=y=t, z=0, & m=1 \end{cases}\right]$

44. $\begin{cases} ax+y=b \\ x-by=0 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x=\dfrac{b^2}{ab+1}, \quad y=\dfrac{b}{ab+1}, & ab\neq -1 \\ \varnothing & ab=-1 \end{cases}\right]$

45. $\begin{cases} ax+by=0 \\ x+y+z=1 \\ ax-z=0 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x=\dfrac{b}{ab-a+b}, y=\dfrac{a}{a-ab-b}, z=\dfrac{ab}{ab-a+b}, & a\neq\dfrac{b}{1-b} \\ \varnothing & a=\dfrac{b}{1-b} \end{cases}\right]$

46. $\begin{cases} ax+y-z=1 \\ x+y+az=b \\ x-y+z=0 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x=\dfrac{1}{a+1}, \quad y=\dfrac{a\cdot(b+1)+b-1}{(a+1)^2}, \quad z=\dfrac{ab+b-2}{(a+1)^2} & a\neq -1 \\ \varnothing & a=-1 \end{cases}\right]$

47. $\begin{cases} ax+y=-1 \\ y-z=b \\ x+z=1 \\ y+az=1 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x=\dfrac{a-2}{2a}, y=-\dfrac{a}{2}, z=\dfrac{a+2}{2a}, & a\neq 0\wedge b=-\dfrac{a^2+a+2}{2a} \\ \varnothing & b\neq -\dfrac{a^2+a+2}{2a}\vee a=0 \end{cases}\right]$

48. $\begin{cases} ax+z=1 \\ ax+y-z=b \\ x-ay+z=0 \end{cases}$ $\left[x=\dfrac{ab+a-1}{2a^2-a+1}, \quad y=\dfrac{a-ab+b+1}{2a^2-a+1}, \quad z=\dfrac{1-a^2b+a^2}{2a^2-a+1}\right]$

49. $\begin{cases} x-az+t=1 \\ x-y-t=0 \\ y+z+2t=2 \\ 2x+by-t=-1 \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x=\dfrac{ab+a-1}{(a+1)\cdot(2b+3)}, y=\dfrac{4a+3}{(a+1)\cdot(2b+3)}, z=\dfrac{1}{a+1}, t=\dfrac{2ab+5a+b+3}{(a+1)\cdot(2b+3)}, a\neq -1\wedge b\neq -\dfrac{3}{2} \\ \varnothing \qquad a=1\vee b=-\dfrac{3}{2} \end{cases}\right]$

Livello 3

50. Determinare i valori da assegnare ai parametri u e v, affinché il seguente sistema di equazioni abbia un numero infinito di soluzioni: $\begin{cases} 2x - u\cdot v - 9z = 1 \\ x + 2y - 5z = 2 \\ 3x - y - 16z = v \end{cases}$. [$u = -11$, $v = 9$]

L'angolo di Derive

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%202/2-1/2-1-1.exe puoi vedere una simulazione sull'uso dei vettori e delle matrici, dei determinanti e delle matrici inverse e sulla risoluzione dei sistemi lineari con Derive.
Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%202/2-1/2-1-1.dfw scarichi il file Derive relativo.
Attività
Verificare i risultati degli esercizi precedenti.

L'angolo di Microsoft Mathematics

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%202/2-1/2-1-2.exe puoi vedere una simulazione sull'uso dei vettori e delle matrici , dei determinanti e delle matrici inverse e sulla risoluzione dei sistemi lineari con Microsoft Mathematics.
Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%202/2-1/2-1-2.zip scarichi il file Microsoft Mathematics relativo.

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

1. Dimostrare che l'insieme $M_2(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate di ordine 2 a elementi reali, è un semigruppo abeliano rispetto all'operazione di somma, chi è l'elemento neutro? $\left[\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}\right]$
2. Dimostrare che l'insieme ($M_2(\mathbb{R})$, ×), in cui × è il prodotto righe per colonne, è un semigruppo non abeliano. Ha elemento neutro? $\left[\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}\right]$
3. Il prodotto righe per colonne è interno nell'insieme delle matrici quadrate di ordine 2 il cui determinante è un numero pari? [Sì]
4. Che struttura è (D_2, ×), con $D_2 = \left\{ \begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{Vmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$ e × prodotto righe per colonne? [Gruppo abeliano]
5. Che struttura è (M_2, ×), con M_2 insieme delle matrici quadrate di ordine 2 il cui determinante è un numero naturale, (× è il prodotto righe per colonne)? [Semigruppo con unità]
6. Che struttura è $\left(\left\{ \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \right\}, \times \right)$? [Non è un gruppoide]
7. Che struttura è $\left(\left\{ \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \right\}, \times \right)$? [Gruppo abeliano]
8. Che struttura è $\left(\left\{ \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} \right\}, \times \right)$? [Gruppo abeliano]

9. Nell'anello delle matrici quadrate di ordine 2: ($M_2(\mathbb{R})$, +, ×), vale il principio di annullamento del prodotto? Giustificare la risposta. $\left[\text{No,p.e.}: \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}\right]$

10. ($M_2(\mathbb{R})$, +, ×) è un corpo? Giustificare la risposta. [No]

11. Il sottoinsieme di $M_2(\mathbb{R})$, formato dalle matrici diagonali a elementi diversi da zero, $\begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{Vmatrix}$, con l'aggiunta della matrice nulla, è un campo? Giustificare la risposta. [Sì]

12. Che struttura è l'insieme delle matrici diagonali di ordine 2, $\begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{Vmatrix}$, rispetto alle operazioni di somma e di prodotto righe per colonne fra matrici? [Anello commutativo con unità]

13. Che struttura è l'insieme delle matrici $\begin{Vmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{Vmatrix}$, rispetto alle operazioni di somma e di prodotto righe per colonne fra matrici? [Anello commutativo con unità]

14. Che struttura è l'insieme delle matrici triangolari superiori di ordine 2 a elementi non nulli, $\begin{Vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{Vmatrix}$, rispetto alle operazioni di somma e di prodotto righe per colonne fra matrici. [Corpo]

15. $\left(\left\{\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}\right\}, \times\right)$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_2$? Giustificare la risposta. [Sì]

16. $\left(\left\{\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}\right\}, \times\right)$ è isomorfo a $\mathbb{Z}_2$? Giustificare la risposta. [Sì]

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcune maturità degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi

1. (Liceo scientifico PNI suppletiva 1992/93) Si stabiliscano le relazioni cui debbono soddisfare a e b affinché il sistema di equazioni $\begin{cases} ax + 2y + bz = 1 \\ x + y + az = 1 \\ x + ay + bz = 1 \end{cases}$ ammetta un'unica soluzione o infinite soluzioni o nessuna soluzione. $\left[\begin{cases} 0 & se\ b = \dfrac{a \cdot (a^2 - 2)}{2a - 3} \wedge a \neq 1 \\ 1 & se\ b \neq \dfrac{a \cdot (a^2 - 2)}{2a - 3} \\ \infty & se\ a = b = 1 \end{cases}\right]$

2. (Liceo scientifico PNI 1997/98) Sia dato il seguente sistema lineare: $\begin{cases} (k+1) \cdot x - y - 1 = 0 \\ 2kx - y - 1 = 0 \\ 2x + y + 1 + h = 0 \end{cases}$. Il candidato dica per quali valori di h e k il sistema ammette soluzioni. $[h = 0 \vee k = 1]$

Quelli che … vogliono sapere di più

Metodo di diagonalizzazione di Gauss

Il problema

Se un sistema è scritto nella seguente forma particolare: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$, esso risulta risolvibile in modo molto più semplice, o utilizzando il metodo di sostituzione o anche ricorrendo al metodo di Cramer – Leibniz, dato che le matrici ottenute hanno parecchi zeri.
Ci chiediamo: è sempre possibile ridurre *qualsiasi* sistema, anche non di tipo $n \times n$, a una forma semplificata?

Prima di cercare di risolvere il problema posto, poniamo qualche definizione e consideriamo un esempio.

Definizione 12

Data una matrice $A = \|a_{ij}\|$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, diciamo sua **diagonale principale** l'insieme degli elementi che occupano righe e colonne fra loro uguali, in simboli gli elementi $\{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{kk}\}$, in cui k è il minore fra n e m.

Definizione 13

Una matrice $A = \|a_{ij}\|$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, si dice **triangolare superiore** se si ha $a_{ij} = 0$ se $j > i$. Si dice triangolare inferiore se si ha $a_{ij} = 0$ se $j < i$.

Naturalmente nella precedente definizione, i simboli a_{ij} possono essi stessi rappresentare elementi nulli, per esempio la matrice $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{Vmatrix}$ è triangolare superiore. L'importanza di matrici del genere è dovuta al seguente teorema.

Teorema 8

Il determinante di una matrice triangolare, inferiore o superiore, è il prodotto degli elementi della diagonale principale, in simboli: $|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.

Dimostrazione

Basta osservare che conviene applicare il teorema di Laplace alla riga o colonna (a seconda che la triangolarizzazione sia superiore o inferiore) in cui vi è un solo elemento non nullo. In tal modo si ottiene un determinante di ordine inferiore che è sempre quello di una triangolare dello stesso tipo, sul quale si procede allo stesso modo fino a ridurlo a un determinante di ordine 1.

Per comprendere meglio la precedente dimostrazione sviluppiamo un esempio.

Esempio 22

Calcolare il determinante della matrice triangolare superiore $\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$. Risolviamo secondo la prima riga: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -6$.

Dal teorema 8 si trae un immediato risultato.

Corollario 6

Condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice quadrata di tipo triangolare sia non singolare è che gli elementi della sua diagonale principale siano tutti non nulli.

Adesso vediamo perché risolvere un sistema in cui la matrice dei coefficienti è triangolare è più semplice.

Esempio 23

Consideriamo il sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_3 = -3 \end{cases}$. Grazie al Corollario 6 e al Teorema di Cramer – Leibniz, possiamo dire che il sistema ammette una sola soluzione, dato che il suo determinante è certamente non nullo, essendo tutti gli elementi della diagonale principale diversi da zero. Il sistema può essere risolto o con la sostituzione $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 1 \\ x_2 - 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 0 \\ x_3 = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2 \cdot (-6) + \frac{9}{2} = 1 \\ x_2 = -6 \\ x_3 = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{17}{2} \\ x_2 = -6 \\ x_3 = -\frac{3}{2} \end{cases}$, oppure con il metodo di Cramer – Leibniz; in ogni caso il procedimento, data la presenza di zeri nella matrice dei coefficienti, risulta facilitato.

Visto che effettivamente la triangolarizzazione della matrice semplifica la risoluzione del sistema, vogliamo vedere se è sempre possibile trasformare una matrice in una triangolare. Consideriamo un esempio.

Esempio 24

Consideriamo il sistema $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ di cui vogliamo triangolarizzare la matrice incompleta. Possiamo lavorare sulla matrice completa piuttosto che sulla matrice incompleta perché modificando un'equazione modifichiamo anche i termini noti: $\begin{Vmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$. Poiché questa matrice rappresenta i coefficienti delle singole equazioni, possiamo moltiplicare una o più righe per delle costanti senza che ciò modifichi il sistema; ma possiamo anche sommare algebricamente due o più righe, scrivendo il risultato al posto di una di esse. Poiché vogliamo creare una matrice triangolare inferiore (quella incompleta), dobbiamo innanzi tutto fare in modo che a_{21} e a_{31}divengano zero. Per far ciò basta per esempio moltiplicare la seconda riga per $\left(-\frac{3}{4}\right)$, sommare termine a termine con la prima riga e scrivere il risultato al posto della seconda riga. Procediamo con ordine $\begin{Vmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \xrightarrow{R_2=-\frac{3}{4}\cdot R_2} \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ -3 & \frac{3}{2} & -\frac{15}{4} & -\frac{3}{2} \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \xrightarrow{R_2=R_1+R_2} \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{4} & -\frac{5}{2} \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

Abbiamo scritto simbolicamente le operazioni: nel primo passo abbiamo moltiplicato per $\left(-\frac{3}{4}\right)$ la seconda riga, nel secondo abbiamo sommato le prime due righe. Come si vede abbiamo annullato l'elemento a_{21}. Possiamo anche moltiplicare tutti gli elementi della seconda riga per 4, eliminandone così i denominatori: $\begin{Vmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & -10 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$. Eliminiamo a_{31}: $\begin{Vmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & -10 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \xrightarrow{R_3=-\frac{3}{2}\cdot R_3} \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & -10 \\ -3 & \frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{Vmatrix} \xrightarrow{R_3=R_1+R_3} \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & -10 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{Vmatrix}$

$\xrightarrow{R_3=2\cdot R_3} \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & -10 \\ 0 & 7 & 1 & -5 \end{Vmatrix}$.Possiamo continuare annullando l'elemento di posto a_{32}: $\begin{Vmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & -10 \\ 0 & 7 & 1 & -5 \end{Vmatrix}$

$\xrightarrow{R_3=-\frac{2}{7}\cdot R_3} \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & -10 \\ 0 & -2 & -\frac{2}{7} & \frac{10}{7} \end{Vmatrix} \xrightarrow{R_3=R_2+R_3} \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & -\frac{51}{7} & -\frac{60}{7} \end{Vmatrix} \xrightarrow{R_3=-7\cdot R_3} \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 51 & 60 \end{Vmatrix}$. Il sistema di partenza è quindi equivalente a $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_2 - 7x_3 = -10 \\ 51x_3 = 60 \end{cases}$. Le sue soluzioni sono: $x_1 = -\frac{24}{17}, x_2 = -\frac{15}{17}, x_3 = \frac{20}{17}$.

Il precedente esempio ci permette di enunciare il seguente risultato.

Teorema 9 (di Gauss)
Dato un sistema di equazioni lineari di n equazioni in n incognite è sempre possibile trasformarlo in un sistema equivalente la cui matrice incompleta è di tipo triangolare.

In effetti l'esempio 24, ci mostra come triangolarizzare la matrice, ma lo fa in un modo che appare alquanto laborioso. Vogliamo mostrare che possiamo ottenere lo stesso risultato con un metodo più semplice.

Esempio 25

Nell'esempio precedente siamo passati dalla matrice $\begin{Vmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$ alla matrice $\begin{Vmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & -10 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$ in due passaggi apparentemente laboriosi, dato che prima abbiamo moltiplicato per $\left(-\frac{3}{4}\right)$ la seconda riga, poi abbiamo sommato questa riga così modificata alla prima riga, infine abbiamo moltiplicato per 4. In effetti, trascurando l'elemento a_{21} che diverrà zero, per esempio per ottenere il *nuovo* elemento a_{22} (2), noi abbiamo effettuato queste operazioni: $4\cdot\left[\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot(-2)+(-1)\right]$ = – 3 · (–2) + 4 · (–1). Se osserviamo con attenzione i quattro numeri coinvolti in questo prodotto notiamo che sono molto simili a quelli del determinante $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$, il cui valore è opposto al precedente: 3 · (–2) – 4 · (–1), ma abbiamo visto che il cambio di un segno di tutti gli elementi di una riga non varia il risultato del sistema. La precedente osservazione vale per tutte le altre righe. Possiamo perciò dire che in pratica il metodo di triangolarizzazione equivale a sostituire a ciascuno degli elementi del *triangolo* i seguenti determinanti: $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$.

L'esempio proposto ci suggerisce quindi una semplice regola per riportare una matrice in forma triangolare.

- Manteniamo inalterati gli elementi della prima riga.
- Sostituiamo al generico elemento a_{ij} (con $i > 1$ e $j > 1$) il determinante del secondo ordine $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}$.

Così con riferimento all’esempio precedente, avremo:

$$a_{22} \to \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}; \quad a_{23} \to \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}; \quad a_{24} \to \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}; \ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ritroviamo così gli stessi risultati.
Generalizzando il procedimento a una qualunque matrice, abbiamo:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & b_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{Vmatrix} \to \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & \ldots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \\ 0 & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \ldots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{31} & a_{3n} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{n1} & a_{n3} \end{vmatrix} & \ldots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{n1} & b_n \end{vmatrix} \end{Vmatrix}$$

Una volta annullati tutti gli elementi della prima colonna, *ma non della prima riga*, ripeteremo il procedimento per quelli della seconda colonna, *ma non delle prime due righe*, e annulleremo gli elementi a_{i2} ($i > 2$) ottenendo le matrici:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & \ldots & a'_{3n} & b'_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a'_{n2} & a'_{n3} & \ldots & a'_{nn} & b'_n \end{Vmatrix} \to \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix} & \ldots & \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{2n} \\ a'_{32} & a'_{3n} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a'_{22} & b'_2 \\ a'_{32} & b'_3 \end{vmatrix} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{n2} & a'_{n3} \end{vmatrix} & \ldots & \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{2n} \\ a'_{n2} & a'_{nn} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a'_{22} & b'_2 \\ a'_{n2} & b'_n \end{vmatrix} \end{Vmatrix}$$

nelle quali abbiamo indicato con l'apice i valori calcolati nel passo precedente con la regola dei determinanti. In pratica ripetiamo la stessa regola sulla matrice di ordine n che si ottiene da quella iniziale eliminando la prima riga e la prima colonna. Il procedimento continua finché non triangolarizziamo la matrice.
Con questo procedimento possiamo anche stabilire se il sistema ha infinite soluzioni, oppure se è privo di soluzioni. Vediamo un esempio.

Esempio 26

Vogliamo risolvere il sistema $\begin{cases} x-2y-t=1 \\ x+y-2z+t=0 \\ 2x-y+3z-t=-1 \\ 3x+z=-1 \end{cases}$. Consideriamo la matrice associata al sistema: $\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$. Triangolarizziamola: $\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \to \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 3 & -4 \end{Vmatrix} \to \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 15 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -15 & 3 & -6 \end{Vmatrix}$

$\rightarrow \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 15 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$. Possiamo stabilire che il sistema è indeterminato, dato che la sua ultima equazione è l'identità 0 = 0; eliminandola dal sistema abbiamo: $\begin{cases} x-2y-t=1 \\ 3y-2z+2t=-1 \\ 15z-3t=-6 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=1+t \\ 3y-2z=-1-2t \\ 15z=-6+3t \end{cases}$. La matrice può allora scriversi, assumendo t come parametro: $\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1+t \\ 0 & 3 & -2 & -1-2t \\ 0 & 0 & 15 & -6+3t \end{Vmatrix}$. Il determinante della matrice dei coefficienti è diverso da zero, quindi il sistema ha ∞^1 soluzioni ottenibili al variare di t:

$$\begin{cases} x=-\dfrac{t+3}{15} \\ y=-\dfrac{8t+9}{15} \\ z=\dfrac{t-2}{5} \end{cases}.$$

L'esempio ci consente di trattare in generale lo studio dei sistemi lineari con il metodo di Gauss. Consideriamo per il momento un sistema di n equazioni in n incognite; se riusciamo a triangolarizzarlo in modo tale che non vi sia nessun elemento nullo sulla diagonale principale il sistema, per il teorema di Cramer–Leibniz, ha una sola soluzione.
Se invece vi è almeno un elemento nullo il determinante è anch'esso nullo; il sistema ha quindi zero o infinite soluzioni; per stabilire di quale dei due casi si tratti basta considerare le righe della matrice triangolare:
- se vi sono righe nulle, queste si eliminano e la matrice si scrive quindi in una forma triangolare con una colonna in più nella quale concentriamo tutti i *termini noti*, formati ora anche da parametri;
- se il determinante di questa nuova matrice triangolare non è nullo, il sistema ha infinite soluzioni e precisamente ne ha ∞^{n-k}, in cui k sono le righe nulle che abbiamo eliminato dalla matrice iniziale;
- se una delle righe della matrice è formata da tutti zeri tranne il termine noto, allora tale riga rappresenta evidentemente una contraddizione e il sistema non ha soluzioni.

Ci rendiamo conto che il metodo può essere usato anche per risolvere un sistema in cui le equazioni e le incognite non sono in uguale numero. Consideriamo un ultimo esempio chiarificatore di quanto detto.

Esempio 27

Vogliamo risolvere il sistema $\begin{cases} 2x-y+z-t+w=1 \\ 3x+y-2z+w=0 \\ y-z+t+w=-1 \end{cases}$. Consideriamo la matrice $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$ a esso associata. Triangolarizziamola, cioè annulliamo gli elementi a_{21}, a_{31} e a_{32}: $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$

$\rightarrow \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -7 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix} \rightarrow \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -7 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 6 & -2 \end{Vmatrix} \rightarrow \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -7 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \end{Vmatrix}$. Osserviamo innanzi tutto che non abbiamo lavorato, nel primo passo, sulla seconda riga, dato che l'elemento a_{31} era già nullo, e che poi abbiamo diviso tutti gli elementi dell'ultima riga per 2. Abbiamo ottenuto il seguente sistema: $\begin{cases} 2x-y+z-t+w=1 \\ 5y-7z+3t-w=-3 \\ z+t+3w=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y+z=t-w+1 \\ 5y-7z=-3t+w-3 \\ z=-t-3w-1 \end{cases}$. La matrice può essere scritta in questo modo: $\left\|\begin{matrix} 2 & -1 & 1 & t-w+1 \\ 0 & 5 & -7 & -3t+w-3 \\ 0 & 0 & 1 & -t-3w-1 \end{matrix}\right\|$. Il determinante della matrice dei coefficienti è diverso da zero, quindi il sistema ha ∞^2 soluzioni, ottenibili al variare di *t* e *w*.

Altri esempi saranno proposti nelle verifiche.

Verifiche

Lavoriamo insieme

- *Risolvere con il metodo di triangolarizzazione di Gauss il sistema* $\begin{cases} x+y-4z=0 \\ 3x+2y-z=1 \\ -x+2y-z=-1 \end{cases}$.

Costruiamo la matrice completa: $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -4 & \vdots & 0 \\ 3 & 2 & -1 & \vdots & 1 \\ -1 & 2 & -1 & \vdots & -1 \end{Vmatrix}$. Cominciamo ad annullare gli elementi della prima colonna diversi da quello della prima riga, ricordando che gli altri elementi si otterranno sostituendo al generico elemento a_{hk},il determinante $\begin{vmatrix} 1 & a_{1h} \\ a_{k1} & a_{hk} \end{vmatrix}$. Abbiamo perciò: $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -4 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 11 & \vdots & 1 \\ 0 & 3 & -5 & \vdots & -1 \end{Vmatrix}$. Continuiamo annullando a_{32}, stavolta il determinante da calcolare è $\begin{vmatrix} -1 & a_{2h} \\ a_{32} & a_{hk} \end{vmatrix}$, ottenendo $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -4 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 11 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 28 & \vdots & 2 \end{Vmatrix}$. Quindi il sistema equivale a $\begin{cases} x+y-4z=0 \\ -y+11z=1 \\ 28z=2 \end{cases}$, le cui soluzioni sono: $x=\frac{1}{2},\quad y=-\frac{3}{14},\quad z=\frac{1}{14}$.

- *Come prima con un sistema non nella forma di Cramer – Leibniz*: $\begin{cases} x-y+z-t=1 \\ 2x+y-3z=0 \\ -x+y-t=-1 \end{cases}$.

Possiamo ugualmente triangolarizzare: $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & \vdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & \vdots & -1 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 2 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \vdots & 0 \end{Vmatrix}$ Siamo stati fortunati, dato che abbiamo triangolarizzato la matrice in un solo passo. Basta ora *spostare* la penultima colonna nell'ultima per avere un sistema 3 × 3 determinato: $\begin{cases} x-y+z=1+t \\ 3y-5z=-2t-2 \\ z=2t \end{cases}$, vi sono quindi ∞^1 soluzioni.

- *Come prima con un sistema privo di soluzioni*: $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 4x-5y+3z=2 \\ 2x-3y+z=2 \end{cases}$.

Triangolarizziamo: $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 4 & -5 & 3 & \vdots & 2 \\ 2 & -3 & 1 & \vdots & 2 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & -2 \\ 0 & -1 & -1 & \vdots & 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & -1 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -2 \end{Vmatrix}$. Il sistema non ha certamente soluzioni perché l'ultima riga della matrice triangolarizzata dà luogo all'assurdità: 0 = –2.

Livello 2

1. Risolvere con il metodo di Gauss i precedenti sistemi non parametrici.

Lavoriamo insieme

Usare il metodo di triangolarizzazione di Gauss per il sistema parametrico $\begin{cases} ax+y+bz=1 \\ x+y+az=1 \\ x+ay+bz=1 \end{cases}$

Triangolarizziamo la matrice completa: $\left\| \begin{matrix} a & 1 & b & \vdots & 1 \\ 0 & 1-a & a-b & \vdots & 0 \\ 1 & a & b & \vdots & 1 \end{matrix} \right\| \to \left\| \begin{matrix} a & 1 & b & \vdots & 1 \\ 0 & 1-a & a-b & \vdots & 0 \\ 0 & a^2-1 & b\cdot(a-1) & \vdots & a-1 \end{matrix} \right\|$. Adesso

- se $a = 1$, la matrice diviene: $\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & b & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1-b & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{matrix} \right\|$. Il sistema quindi equivale a $\begin{cases} x+y+bz=1 \\ (1-b)\cdot z=0 \\ 0=0 \end{cases}$. Questo se anche $b = 1$ equivale all'unica equazione $x + y + z = 1$, ed ha perciò ∞^2 soluzioni, se invece $b \neq 1$ equivale a: $\begin{cases} x+y+bz=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ z=0 \end{cases}$ ed ha perciò ∞^1 soluzioni: $(-y, y, 0)$.
- Se invece $a \neq 1$, possiamo dividere per il fattore comune $(a - 1)$ e la matrice diviene: $\left\| \begin{matrix} a & 1 & b & \vdots & 1 \\ 0 & 1-a & a-b & \vdots & 0 \\ 0 & a+1 & b & \vdots & 0 \end{matrix} \right\|$; continuiamo a triangolarizzarla: $\left\| \begin{matrix} a & 1 & b & \vdots & 1 \\ 0 & 1-a & a-b & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & b\cdot(1-a)-(a+1)\cdot(a-b) & \vdots & 1-a \end{matrix} \right\| \to$ $\left\| \begin{matrix} a & 1 & b & \vdots & 1 \\ 0 & 1-a & a-b & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & -a^2+2b-a & \vdots & 1-a \end{matrix} \right\|$; il sistema è perciò: $\begin{cases} x+y+bz=1 \\ (1-a)\cdot y+(a-b)\cdot z=0 \\ (-a^2+a-2b)\cdot z=a-1 \end{cases}$, che, se $a^2 - 2b + a \neq 0$, ha un'unica soluzione: $x=\dfrac{a-b}{a^2+a-2b}; y=\dfrac{a-b}{a^2+a-2b}; z=\dfrac{a-1}{a^2+a-2b}$. Se invece la detta quantità è nulla, il sistema non ha soluzioni.

Livello 3

2. Risolvere con il metodo di Gauss i precedenti sistemi parametrici.

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_3_2.htm

2. Geometria delle coordinate

2.2 Il riferimento cartesiano ortogonale

Prerequisiti

- Conoscenze aritmetiche elementari.
- Conoscenze geometriche elementari.
- Concetto di prodotto cartesiano.
- Valore assoluto di un numero.
- Concetto di determinante.

Obiettivi

- Comprendere il concetto di sistema di riferimento.
- Risolvere semplici problemi relativi a punti e figure poligonali.
- Verificare con l'ausilio della geometria analitica teoremi di geometria sintetica.
- Generalizzare il concetto di spazio
- Assumere consapevolezza del fatto che possiamo ragionare su spazi a più di 3 dimensioni, che non riusciamo a visualizzare.

Contenuti

- Concetto di sistema di riferimento sulla retta
- Concetto di sistema di riferimento sul piano
- Geometria dei punti e delle figure poligonali
- Suddivisione di un segmento in un dato rapporto
- Aree di figure poligonali

Parole chiave

Ascissa – Coordinate – Ordinata

Richiamiamo le conoscenze

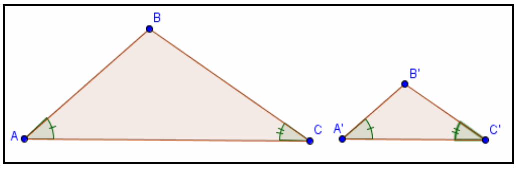
Valore assoluto

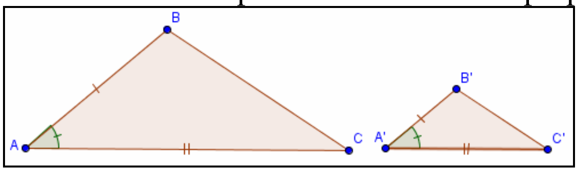
Spesso capita di dover considerare quantità numeriche indipendentemente dal loro segno, perché fisicamente o geometricamente le grandezze che esse rappresentano non avrebbero altrimenti senso. Allora, soprattutto in quei casi in cui abbiamo a che fare con quantità delle quali non sappiamo il segno prima di averle sviluppate, applichiamo il cosiddetto **valore assoluto**.

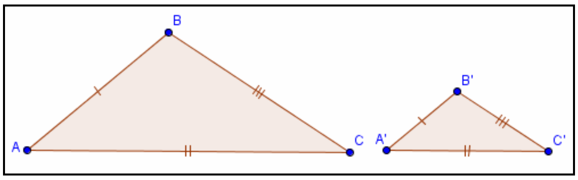
Il valore assoluto di un numero può interpretarsi come quella operazione unaria, definita su $\mathbb{R}$, il cui scopo è quello di rendere non negativo il numero. Per indicare il valore assoluto di a scriviamo $|a|$. Così per esempio $|17| = 17$ perché il numero è positivo; $|-32| = 32$; dato che abbiamo a che fare con un numero negativo; infine $|0| = 0$.

Criteri di similitudine dei triangoli

Due triangoli sono simili se verificano almeno una delle seguenti proprietà.

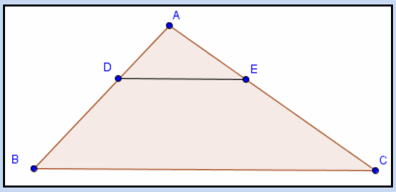
- Avere due coppie di angoli rispettivamente isometrici. 

- Avere una coppia di angoli rispettivamente isometrici e i lati che li comprendono nella stessa proporzione. 

- Avere tutti i lati nella stessa proporzione. 

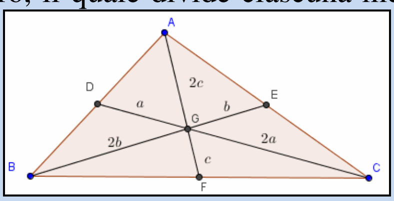
Teorema A

Se sui lati AB e AC del triangolo ABC, scegliamo i punti D ed E, condizione necessaria e sufficiente affinché tali punti dividano i detti lati in modo che $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{m}{n}$, con $m < n$, è che DE sia parallelo a BC e $\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} = \frac{m}{n}$.



Teorema B

Le mediane di un triangolo si incontrano in un punto detto baricentro, il quale divide ciascuna mediana in due parti di cui quella che contiene il vertice è doppia dell'altra.



Teorema C (di Erone)

Dato un triangolo di lati che misurano a, b e c e perimetro $2p$, la sua area è $\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$.

Teorema D (di Brahmagupta)

Dato un quadrilatero inscrivibile in una circonferenza (cioè con gli angoli opposti fra loro supplementari), di lati che misurano a, b, c e d e perimetro $2p$, la sua area è $\sqrt{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d)}$.

Concetto di sistema di riferimento sulla retta

Finché l'algebra e la geometria sono state separate, il loro progresso è stato lento e il loro uso limitato; quando queste due scienze si sono alleate, hanno unito le rispettive forze, e hanno marciato insieme verso la perfezione. *Joseph Louis Lagrange*

Il problema

Armando è rimasto in panne sull'autostrada A1 ed ha perciò bisogno di un mezzo di soccorso. Quali sono le minime informazioni che deve fornire ai soccorritori per essere individuato con esattezza?

Esempio 1

Un modo per risolvere il problema posto è quello di specificare a quale chilometro dell'autostrada ci troviamo e in quale direzione, dato che i versi di percorrenza sono due. Anche il numero che individua i chilometri deve essere riferito a qualcosa. Parlando di chilometro 25; per esempio, dobbiamo stabilire qual è il chilometro 0, ossia a partire da dove stiamo contando 25 *Km*: dal casello di Roma Nord o da quello di Roma Sud, dal casello di Roncobilaggio o da quello di Modena Nord? In questo modo, tra l'altro, non abbiamo fornito la nostra esatta posizione, dato che non abbiamo specificato a quale punto del chilometro 25 ci troviamo; l'informazione è comunque sufficiente a farci individuare con una buona approssimazione…, a meno che il mezzo di soccorso non incontri una macchina in panne duecento metri prima di noi!

La necessità di fornire informazioni relative alla posizione di qualcuno o di qualcosa si presenta frequentemente nella vita quotidiana, per esempio quando diamo appuntamento a qualcuno, o dobbiamo spiegare ad altri dove si trova un negozio, o ancora quando ci dobbiamo riferire a un oggetto o a una persona posta in un certo luogo. La questione deve essere risolta con precisione, ma anche con economia, cioè non dobbiamo usare più informazioni del necessario. Prima di continuare occorre anche rendersi conto che non vi è un solo modo per risolvere il problema.

Esempio 2

Per dare appuntamento a un amico potremmo dire che ci troveremo di fronte al Roxy bar, oppure che saremo in via Mazzini 3; o ancora che ci incontreremo a circa 100 metri a est dalla cattedrale e dal suo stesso lato, e così via, indicando sempre lo stesso posto. Naturalmente sarebbe inutile dire che il luogo dell'appuntamento sarà via Mazzini 3; di fronte al Roxy bar a circa 100 metri a est dalla cattedrale e dal suo stesso lato.

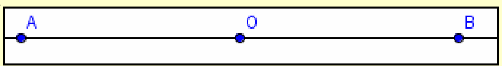
Definizione 1

L'insieme delle informazioni necessarie e sufficienti a determinare la posizione di tutti gli oggetti di un dato spazio ambiente si chiama **sistema di riferimento**.

Cominciamo con lo stabilire un sistema di riferimento sulla retta.

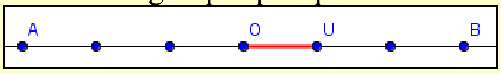
Esempio 3

Per determinare un punto posto su una retta potremmo pensare di considerare la distanza di tale punto da un punto fissato arbitrariamente su essa (per esempio il punto *O*). Dalla seguente figura notiamo però che i punti *A* e *B,* posti a uguale distanza dal punto fissato *O,* in questo modo non sarebbero distinguibili: la semplice nozione di distanza non è quindi sufficiente a determinare un punto su una retta. Resta comunque il fatto che è necessario stabilire una maniera per misurare le distanze: dobbiamo cioè introdurre una unità di misura.



Esempio 4

Riconsideriamo la figura precedente e stabiliamo una certa unità di misura, fissandola, per esempio, pari alla misura del segmento OU. Così facendo entrambi i segmenti AO e OB misurano 3 volte OU, cioè se $\overline{OU} = 1$; allora $\overline{OB} = \overline{AO} = 3$. A questo punto dire che il punto A è a 3 unità dal punto O non permette di distinguerlo da B, che dista anch'esso 3 da O. Se però stabiliamo di premettere il segno meno alle distanze dei punti che sono alla *sinistra* di O e di mantenere il segno più per quelli che stanno alla destra, abbiamo distinto i punti A e B.



Quanto visto nell'esempio permette di enunciare il seguente risultato.

Teorema 1

Esiste una corrispondenza biunivoca fra i punti della retta e $\mathbb{R}$.

Definizione 2

L''insieme $\{O, u\}$ formato da un punto O sulla retta e dalla misura u di un segmento, entrambi arbitrariamente scelti, si chiama **sistema di riferimento naturale sulla retta**: O si chiama **origine del sistema**, u si chiama **unità di misura**.

Definizione 3

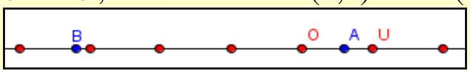
Dato un punto su una retta sulla quale è stabilito un sistema di riferimento naturale $\{O, u\}$, diciamo sua **ascissa** il numero che misura il segmento OP mediante u e al quale si premetterà il segno meno se P si trova alla sinistra di O.

Notazione 1

L'ascissa x di un punto P, si indica con il simbolo $P \equiv (x)$.

Esempio 5

Sulla stessa retta dell'esempio precedente stabiliamo una certa unità di misura, fissandola per esempio pari alla misura del segmento OU. Con i puntini rossi abbiamo segnato i punti di ascissa intera. Dopo avere opportunamente misurato i segmenti AO e BO, scriviamo: $A \equiv (0{,}6)$ e $B \equiv (–3{,}2)$.



Consideriamo un esempio di sistema di riferimento tratto dalla vita quotidiana.

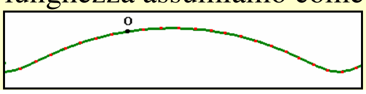
Esempio 6

Un termometro può considerarsi come un sistema di riferimento su un segmento. Infatti, mediante la dilatazione o la contrazione del liquido che vi è inserito, e mediante un'opportuna scala di misure siamo in grado di *misurare* la temperatura di un ambiente, di un oggetto o di un essere umano. Naturalmente avendo a che fare con oggetti reali il termometro misura solo un numero finito di temperature: i termometri per uso clinico, misurano in genere temperature che vanno da 35°C a 42 °C, con *passo* di 0,1. Ciò significa che non siamo in grado di distinguere, per esempio, le temperature di 38,1256° e 38,1482°. Aumentare la *scala* dei valori risolve il problema solo apparentemente, dato che non potremmo mai essere in grado di usare tutti i numeri reali compresi tra 35 e 42.

Il riferimento precedente può stabilirsi anche su una qualsiasi linea, non necessariamente retta.

Esempio 7

Per stabilire un riferimento sulla linea raffigurata sotto, basta scegliere un punto origine, che continuiamo a indicare con O, e un arco di curva la cui lunghezza assumiamo come unità di misura.



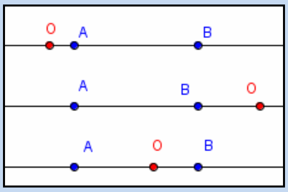
Enunciamo e proviamo il seguente risultato.

Teorema 2

Il segmento di estremi i punti $A \equiv (x_A)$, $B \equiv (x_B)$, nell'unità di misura prescelta, è lungo $|x_A - x_B| = |x_B - x_A|$.

Dimostrazione

Sono possibili i fatti mostrati nella successiva figura, non distinguiamo gli ulteriori casi in cui A segue B, perché equivalenti a quelli mostrati. Intanto osserviamo che le ascisse di A e di B sono le loro distanze da O eventualmente con il segno negativo se O è alla loro destra.



Pertanto abbiamo:

- nel primo caso: $x_A > 0$, $x_B > 0$ ed evidentemente $AB = OB - OA = x_B - x_A$;
- nel secondo caso: $x_A < 0$, $x_B < 0$, $AB = AO - BO = |x_A - x_B|$;
- nel terzo caso: $x_A < 0$, $x_B > 0$, $AB = AO + OB = - x_A + x_B$.

Concludiamo con i seguenti risultati.

Teorema 3

Il punto C che divide il segmento di estremi $A \equiv (x_A)$, $B \equiv (x_B)$, in modo che si abbia $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{m}{n}$ ha coordinate $C \equiv \left(\frac{(n-m) \cdot x_A + m \cdot x_B}{n} \right)$.

Dimostrazione

Consideriamo il rapporto $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{m}{n}$ e determiniamo le coordinate del punto C:

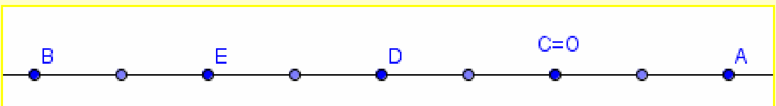
$$\frac{x_C - x_A}{x_B - x_A} = \frac{m}{n} \Rightarrow x_C = \frac{(n-m) \cdot x_A + m \cdot x_B}{n}.$$

Esempio 8

Dato il segmento di estremi $A \equiv (2)$ e $B \equiv (-6)$, i 3 punti che lo dividono in 4 parti isometriche sono, usando i risultati del teorema precedente:

$$C \equiv \left(\frac{(4-1) \cdot x_A + 1 \cdot x_B}{4} \right) \equiv \left(\frac{3 \cdot x_A + x_B}{4} \right); D \equiv \left(\frac{(4-2) \cdot x_A + 2 \cdot x_B}{4} \right) \equiv \left(\frac{x_A + x_B}{2} \right);$$
$$E \equiv \left(\frac{(4-3) \cdot x_A + 3 \cdot x_B}{4} \right) \equiv \left(\frac{x_A + 3 \cdot x_B}{4} \right).$$

Quindi sostituendo: $C \equiv \left(\frac{3 \cdot 2 - 6}{4} \right) \equiv (0); D \equiv \left(\frac{2-6}{2} \right) \equiv (-2); E \equiv \left(\frac{2-18}{4} \right) \equiv (-4)$.



Immediata conseguenza del precedente teorema è il seguente risultato.

Corollario 1

Il punto medio del segmento di estremi $A \equiv (x_A)$, $B \equiv (x_B)$ è $M \equiv \left(\frac{x_A + x_B}{2} \right)$.

Dimostrazione. Immediata, basta sostituire nella formula del Teorema 3; $m = 1$ e $n = 2$.

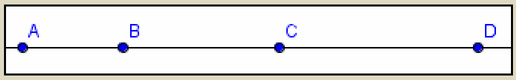
Verifiche

1. Il cosiddetto GPS (Global Positioning System) è un dispositivo che permette di determinare la posizione di un oggetto sulla superficie terrestre. Esso viene utilizzato da molti strumenti tecnologici, come i cellulari o i navigatori satellitari. È perciò un esempio di dispositivo che sfrutta un sistema di riferimento Fornire altri esempi di dispositivi che sfruttano sistemi di riferimento.

Lavoriamo insieme

Su una retta definiamo il sistema di riferimento naturale. Vogliamo verificare che, fissati sulla retta 4 punti A, B, C e D, comunque essi siano disposti, purché distinti e in quest'ordine, vale sempre la seguente relazione, detta identità di Eulero: $\overline{AB}\cdot\overline{CD}-\overline{AC}\cdot\overline{BD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=0$.

Supponiamo che i punti sulla retta siano come mostrato in figura:



Cerchiamo di esprimere le rispettive misure in modo da semplificare i calcoli.

$$\overline{AB}\cdot\left(\overline{AD}-\overline{AC}\right)-\overline{AC}\cdot\left(\overline{AD}-\overline{AB}\right)+\overline{AD}\cdot\left(\overline{AC}-\overline{AB}\right)=0.$$

Da cui: $\cancel{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}-\cancel{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}-\cancel{\overline{AC}\cdot\overline{AD}}+\cancel{\overline{AC}\cdot\overline{AB}}+\cancel{\overline{AD}\cdot\overline{AC}}-\cancel{\overline{AD}\cdot\overline{AB}}=0$. Identità verificata.

Livello 1

2. Verificare la validità dell'identità di Eulero per i punti $A \equiv (-5)$, $B \equiv (-4)$, $C \equiv (-2)$, $D \equiv (1)$.
3. Verificare la validità dell'identità di Eulero per i punti $A \equiv (-2)$, $B \equiv (1)$, $C \equiv (3)$, $D \equiv (4)$.
4. Verificare la validità dell'identità di Eulero per i punti $A \equiv (-4)$, $B \equiv (-1)$, $C \equiv (1)$, $D \equiv (4)$.
5. In un sistema di riferimento naturale sulla retta, il segmento di estremi $A \equiv (2)$ e $B \equiv (-1)$ è di 6 *cm*. Quanto misura in *cm* l'unità di misura del sistema? [2]
6. In un sistema di riferimento naturale sulla retta, il segmento di estremi $A \equiv (1/2)$ e $B \equiv (5/3)$ è di 2 *cm*. Quanto misura in *cm* l'unità di misura del sistema? [12/7]
7. Determinare le coordinate dei punti medi dei segmenti di cui forniamo le coordinate degli estremi: $A \equiv (-3)$, $B \equiv (1)$; $C \equiv (0)$, $D \equiv (5)$; $E \equiv (-6)$, $F \equiv (-1)$; $G \equiv (-1/3)$, $H \equiv (3/2)$; $I \equiv \left(1-\sqrt{2}\right)$, $J \equiv \left(1+2\cdot\sqrt{2}\right)$ $\left[(-1);\left(\frac{5}{2}\right);\left(-\frac{7}{2}\right);\left(\frac{7}{12}\right);\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2}\right)\right]$
8. Dati tre punti allineati, *A*, *B*, *C*, diciamo loro rapporto semplice, la quantità $(ABC) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$. Esprimere il rapporto semplice in funzione delle coordinate dei punti: $A \equiv (a)$, $B \equiv (b)$, $C \equiv (c)$. $\left[\frac{c-a}{c-b}\right]$
9. Determinare la posizione di *C* rispetto ad *A* e *B* se $(ABC) = 1$. [Non è possibile perché $A \equiv B$]
10. Determinare la posizione di *C* rispetto ad *A* e *B* se $(ABC) = -1$. [*C* è il punto medio di *AB*]
11. Siano $A \equiv (1)$, $B \equiv (5)$, $C \equiv (-1)$, $D \equiv (7)$, calcolare $(ABC) \cdot (ABD)$. [1]

Livello 2

12. Provare che se $A \equiv (a)$, $B \equiv (b)$, $C \equiv \left(\frac{a+b+2c}{2}\right)$, $D \equiv \left(\frac{a+b-2c}{2}\right)$, allora $(ABC) \cdot (ABD) = 1$.
13. Dati quattro punti *A*, *B*, *C* e *D* su una retta sulla quale è stabilito un sistema di riferimento naturale, siano *M* e *N* i punti medi di *AB* e *CD* rispettivamente. Provare la validità della seguente identità: $\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AC}+\overline{BD}=2\cdot\overline{MN}$.
14. Verificare l'identità di Eulero quando i punti *A*, *B*, *C*, *D* sono disposti in ordine decrescente rispetto alla propria iniziale.
15. Dimostrare che, per ogni punto *P*, esterno al segmento *AB*, detto *M* il punto medio di *AB* si ha: $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PM}^2-\overline{MA}^2$.

16. Fornire un esempio per mostrare che l'identità precedente non vale se P è interno ad AB.
17. Dimostrare che la precedente identità è caratteristica del punto medio di AB, nel senso che se X è un punto che verifica $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PX}^2 - \overline{AX}^2$, allora X è punto medio di AB.
18. Determinare le coordinate del secondo estremo dei segmenti di cui sono note le coordinate dell'altro estremo e del punto medio:
$A \equiv (-4)$, $M_{AB} \equiv (1)$; $C \equiv (1)$, $M_{CD} \equiv (-3)$; $E \equiv (0)$, $M_{EF} \equiv (3)$; $G \equiv (-1/3)$, $M_{GH} \equiv (2)$; $I \equiv \left(\sqrt{2}\right), M_{IJ} \equiv \left(-\sqrt{3}\right)$ $\left[B \equiv (6); D \equiv (-7); F \equiv (6); H \equiv \left(\frac{13}{3}\right); J \equiv \left(-2 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\right]$

Lavoriamo insieme

Determinare le coordinate dei 5 punti che dividono il segmento di estremi $A \equiv (x_A)$, $B \equiv (x_B)$ in 6 parti isometriche. Possiamo usare il risultato del Teorema 3: $C \equiv \left(\frac{5x_A + x_B}{6}\right); D \equiv \left(\frac{4x_A + 2x_B}{6}\right) \equiv \left(\frac{2x_A + x_B}{3}\right);$ $E \equiv \left(\frac{3x_A + 3x_B}{6}\right) \equiv \left(\frac{x_A + x_B}{2}\right); F \equiv \left(\frac{2x_A + 4x_B}{6}\right) \equiv \left(\frac{x_A + 2x_B}{3}\right); G \equiv \left(\frac{x_A + 5x_B}{6}\right)$.

Oppure, tenere conto che il segmento AB è lungo $x_B - x_A$, se A precede B, quindi ognuna delle 6 parti in cui lo dividiamo misura $\frac{x_B - x_A}{6}$, perciò per ottenere le coordinate dei punti cercati aggiungiamo tale valore alla coordinata di A, ottenendo $x_A + \frac{x_B - x_A}{6} = \frac{6x_A + x_B - x_A}{6} = \frac{5x_A + x_B}{6}$, e sono le coordinate del primo punto.

Se a queste aggiungiamo la data quantità, otteniamo le coordinate del secondo punto: $\frac{5x_A + x_B}{6} + \frac{x_B - x_A}{6} = \frac{4x_A + 2x_B}{6} = \frac{2x_A + x_B}{3}$ e così via.

Livello 2

19. Determinare le coordinate dei punti che dividono nel rapporto 1/4, i segmenti di estremi seguenti:
$A \equiv (-1)$, $B \equiv (1)$; $C \equiv (-3)$, $D \equiv (0)$; $E \equiv (1)$, $F \equiv (7/3)$; $G \equiv (-2/3)$, $H \equiv (1/4)$; $I \equiv \left(-\sqrt{2}\right), J \equiv \left(1 + \sqrt{2}\right)$
$\left[\left(-\frac{1}{2}\right) \vee \left(\frac{1}{2}\right); \left(-\frac{9}{4}\right) \vee \left(-\frac{3}{4}\right); (2) \vee \left(\frac{4}{3}\right); \left(-\frac{7}{16}\right) \vee \left(\frac{1}{48}\right); \left(\frac{2 \cdot \sqrt{2} + 3}{4}\right) \vee \left(\frac{1 - 2 \cdot \sqrt{2}}{4}\right)\right]$
20. Quali fra le seguenti condizioni riferite alle coordinate degli estremi di un segmento, sono sufficienti ad assicurarci che la coordinata del punto medio di un segmento sia un numero intero? Giustificare la risposta. a) Sono numeri interi b) Sono numeri interi pari c) Sono numeri interi dispari d) Sono numeri razionali con denominatore pari e) Sono numeri interi multipli di 3. [b), c)]
21. Quali fra le seguenti condizioni riferite alle coordinate degli estremi di un segmento, sono sufficienti ad assicurarci che entrambi i punti che dividono il segmento nel rapporto 1/4, abbiano coordinate intere? Giustificare la risposta. a) Sono numeri interi pari b) Sono numeri interi dispari c) Sono numeri interi multipli di 4 d) Sono numeri interi e) Sono numeri dell'insieme $\left\{n - 4 \cdot \sqrt{3}, n \in \mathbb{N}\right\}$. [c)]
22. Con riferimento all'esercizio precedente, è possibile che il problema abbia soluzione se le coordinate degli estremi sono a) una pari e l'altra dispari; b) entrambe dispari. [No; Sì, p.e. (– 1) e (3)]
23. Determinare le coordinate dei punti che dividono il segmento di estremi $A \equiv (-1)$ e $B \equiv (2)$ in 8 parti isometriche. $\left[\left(-\frac{5}{8}\right); \left(-\frac{1}{4}\right); \left(\frac{1}{8}\right); \left(\frac{1}{2}\right); \left(\frac{7}{8}\right); \left(\frac{5}{4}\right); \left(\frac{13}{8}\right)\right]$

Livello 3

24. Determinare le coordinate dei punti che dividono il segmento di estremi $A \equiv (x_A)$, $B \equiv (x_B)$ in 8 parti isometriche. $\left[\left(\frac{7x_A + x_B}{8}\right), \left(\frac{3x_A + x_B}{4}\right), \left(\frac{5x_A + 3x_B}{8}\right), \left(\frac{x_A + x_B}{2}\right), \left(\frac{3x_A + 5x_B}{8}\right), \left(\frac{x_A + 3x_B}{4}\right)\left(\frac{x_A + 7x_B}{8}\right)\right]$
25. Determinare le coordinate dei punti che dividono i segmenti di cui forniamo le coordinate degli

estremi, nei rapporti accanto segnati. $I \equiv \left(1-\sqrt{2}\right), J \equiv \left(1+2\cdot\sqrt{2}\right), \frac{m}{n}=\frac{5}{9}$ $\left[\left(\frac{2\cdot\sqrt{2}+3}{3}\right)\vee\left(\frac{\sqrt{2}+3}{3}\right)\right]$

$A \equiv (-5), B \equiv (-1), \frac{m}{n}=\frac{1}{3}$; $C \equiv (-4), D \equiv (0), \frac{m}{n}=\frac{3}{5}$ $\left[\left(-\frac{11}{3}\right)\vee\left(-\frac{7}{3}\right);\left(-\frac{5}{2}\right)\vee\left(-\frac{3}{2}\right)\right]$

$E \equiv (1), F \equiv (4), \frac{m}{n}=\frac{4}{7}$; $G \equiv \left(-\frac{1}{3}\right), H \equiv \left(\frac{3}{2}\right), \frac{m}{n}=\frac{2}{7}$ $\left[\left(\frac{19}{7}\right)\vee\left(\frac{16}{7}\right);\left(\frac{4}{21}\right)\vee\left(\frac{41}{42}\right)\right]$

Lavoriamo insieme

Dati i punti $A \equiv (-1)$, $B \equiv (2)$, vogliamo determinare, se esiste, il punto $C \equiv (c)$ per cui è verificata la seguente identità: $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{3}{4}$. Il punto cercato può essere a sinistra di A, o interno al segmento AB, oppure a destra di B. Ognuna di queste possibilità si traduce in un diverso sistema risolvente.

$$\begin{cases}\frac{-1-c}{2-c}=\frac{3}{4}\\ c<-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4-4c=6-3c\\ c<-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-c=10\\ c<-1\end{cases}\Rightarrow c=-10$$

$$\begin{cases}\frac{c+1}{2-c}=\frac{3}{4}\\ -1<c<2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4c+4=6-3c\\ -1<c<2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7c=2\\ -1<c<2\end{cases}\Rightarrow c=\frac{2}{7}$$

$$\begin{cases}\frac{c+1}{c-2}=\frac{3}{4}\\ c>2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4c+4=3c-6\\ c>2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=-10\\ c>2\end{cases}\text{ che non ha soluzione}$$

Notiamo quindi che solo la prima e la seconda condizione conducono a una soluzione accettabile. In conclusione vi sono due punti che verificano la richiesta: $C_1 \equiv (-10)$, $C_2 \equiv (2/7)$.

Livello 3

26. Dati i punti A e B , determinare, se esistono, dei punti $C \equiv (c)$ per i quali sia vera la relazione data

$A \equiv (1), B \equiv (4), \overline{AC}\cdot\overline{BC}=2$ $\left[C_1\equiv\frac{5-\sqrt{17}}{2}\vee C_2\equiv(2)\vee C_3\equiv(3)\vee C_4\equiv\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)\right]$

$A \equiv (-2), B \equiv (3), \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{3}{2}$; $A \equiv (-4), B \equiv (1), \overline{AC}+2\cdot\overline{BC}=1$ [$C_1 \equiv (1) \vee C_2 \equiv (13)$; $\varnothing$]

$A\equiv\left(-\frac{1}{3}\right), B \equiv (5), \frac{2\cdot\overline{AC}-1}{\overline{BC}+1}=\frac{4}{3}$ $\left[C_1\equiv\left(-\frac{29}{2}\right)\vee C_2\equiv\left(\frac{5}{2}\right)\right]$

$A\equiv\left(\frac{3}{2}\right), B\equiv\left(\frac{1}{4}\right), \left(2-\overline{AC}\right)\cdot\left(\overline{BC}+1\right)=3$ $\left[C_1\equiv\left(-\frac{11}{4}\right)\vee C_2\equiv\left(\frac{7-\sqrt{201}}{8}\right)\right]$

27. Dati i punti $A \equiv (-4)$, $B \equiv (-1)$ e $C \equiv (3)$, determinare, se esistono, dei punti $D \equiv (d)$ per i quali si abbia: $\overline{AD}+\overline{BD}=2+\overline{CD}$. [$D_1 \equiv (-10)$ $D_2 \equiv (0)$]

28. Si chiama *parte aurea di un segmento AB* il segmento AP, con P interno ad AB, tale che si abbia: $\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$, cioè AP è medio proporzionale fra l'intero segmento e la sua parte rimanente. Detti $A \equiv (a)$ e $B \equiv (b)$, determinare le coordinate di P. $\left[\frac{2a+\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot(b-a)}{2}\right]$

29. Determinare le coordinate dei punti P interni al segmento di estremi $A \equiv (x_A)$, $B \equiv (x_B)$ in modo che sia

$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{m}{n} \vee \frac{\overline{BP}}{\overline{AB}} = \frac{m}{n}$, con $m < n$. $\left[P_1 \equiv \left(\frac{(n-m)\cdot x_B + m\cdot x_A}{n}\right) \wedge P_2 \equiv \left(\frac{(n-m)\cdot x_A + m\cdot x_B}{n}\right)\right]$

30. Determinare la coordinata del secondo estremo dei segmenti di cui forniamo le coordinate dell'altro estremo e di un punto P che divide il detto segmento in un dato rapporto $\frac{m}{n}$. (Suggerimento: utilizzando le formule stabilite nell'Esercizio 28; impostare un'equazione in cui l'incognita è la coordinata cercata) $A \equiv (3)$, $P \equiv (-1)$, $\frac{m}{n} = \frac{2}{3}$; $C \equiv (-1)$, $P \equiv (-3)$, $\frac{m}{n} = \frac{3}{4}$ $\left[(-9) \vee (-3); (-9) \vee \left(-\frac{11}{3}\right)\right]$

$D \equiv \left(-\sqrt{3}\right), P \equiv \left(\sqrt{3}\right), \frac{m}{n} = \frac{5}{9}$; $E \equiv (0)$, $P \equiv (-3)$, $\frac{m}{n} = \frac{4}{5}$ $\left[\left(\frac{7\cdot\sqrt{3}}{2}\right) \vee \left(\frac{13\cdot\sqrt{3}}{5}\right); (-15) \vee \left(-\frac{15}{4}\right)\right]$

$F \equiv \left(\sqrt{2}\right), P \equiv \left(3\cdot\sqrt{2}\right), \frac{m}{n} = \frac{2}{7}$; $G \equiv \left(\frac{2}{3}\right), P \equiv \left(-\frac{4}{5}\right), \frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ $\left[\left(\frac{21\sqrt{2}-4}{5}\right) \vee \left(\frac{21\sqrt{2}-10}{5}\right); \left(-\frac{34}{15}\right)\right]$

Lavoriamo insieme

Dati i punti $A \equiv (-2)$, $B \equiv (3)$ e $C \equiv (4)$, vogliamo sapere per quali valori reali di m esiste un punto $X \equiv (x)$ verificante la condizione: $\overline{AX} + \overline{BX} = m \cdot \overline{CX}$.

Abbiamo 4 casi, a seconda che il punto cercato sia a sinistra di A, fra A e B, fra B e C, dopo C .Traduciamo le condizioni in espressione algebrica: $\begin{cases}(-2-x)+(3-x) = m\cdot(4-x) \\ x < -2\end{cases}$; $\begin{cases}(x+2)+(3-x) = m\cdot(4-x) \\ -2 < x < 3\end{cases}$; $\begin{cases}(x+2)+(x-3) = m\cdot(4-x) \\ 3 < x < 4\end{cases}$; $\begin{cases}(x+2)+(x-3) = m\cdot(x-4) \\ x > 4\end{cases}$. Consideriamo la prima equazione: $-2 - x + 3 - x = 4m - mx \Rightarrow -2x + mx = 4m - 1 \Rightarrow (m - 2) \cdot x = 4m - 1 \Rightarrow$ $x = \frac{4m-1}{m-2}$. Abbiamo così ottenuto un'equazione parametrica; il sistema è perciò divenuto: $\begin{cases}x = \frac{4m-1}{m-2} \\ x < -2\end{cases}$.

Dobbiamo perciò risolvere: $\frac{4m-1}{m-2} < -2$. Abbiamo: $\frac{4m-1+2\cdot(m-2)}{m-2} < 0 \Rightarrow \frac{4m-1+2m-4}{m-2} < 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{6m-5}{m-2} < 0 \Rightarrow \frac{5}{6} < m < 2$. Possiamo perciò dire che se $x < -2$; allora il punto $X \equiv (x)$ cercato esiste per $\frac{5}{6} < m < 2$. Analogamente risolviamo i rimanenti tre sistemi, ottenendo le seguenti soluzioni:

$$\begin{cases}\frac{5}{6} < m < 2 \\ x < 2\end{cases}; \begin{cases}\frac{5}{6} < m < 5 \\ -2 < x < 3\end{cases}; \begin{cases}m > 5 \\ 3 < x < 4\end{cases}; \begin{cases}m > 2 \\ x > 4\end{cases}$$

Livello 3

31. Dati i punti $A \equiv (-2)$, $B \equiv (3)$ e $C \equiv (c)$, determinare i valori del parametro reale m per i quali è vera la seguente relazione: $\overline{AC} + \overline{BC} = m$. $\left[\begin{cases}m > 5 & c < -2 \vee c > 3 \\ m = 5 & -2 < c < 3\end{cases}\right]$

32. Dati i punti $A \equiv (-4)$, $B \equiv (-1)$ e $C \equiv (c)$, determinare i valori del parametro reale m per i quali è vera la

seguente relazione: $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = m$. $\left[\begin{cases} 0 \le m \le 1 & c < -4 \\ m > 0 & -4 < c < -1 \\ m > 1 & c > -1 \end{cases}\right]$

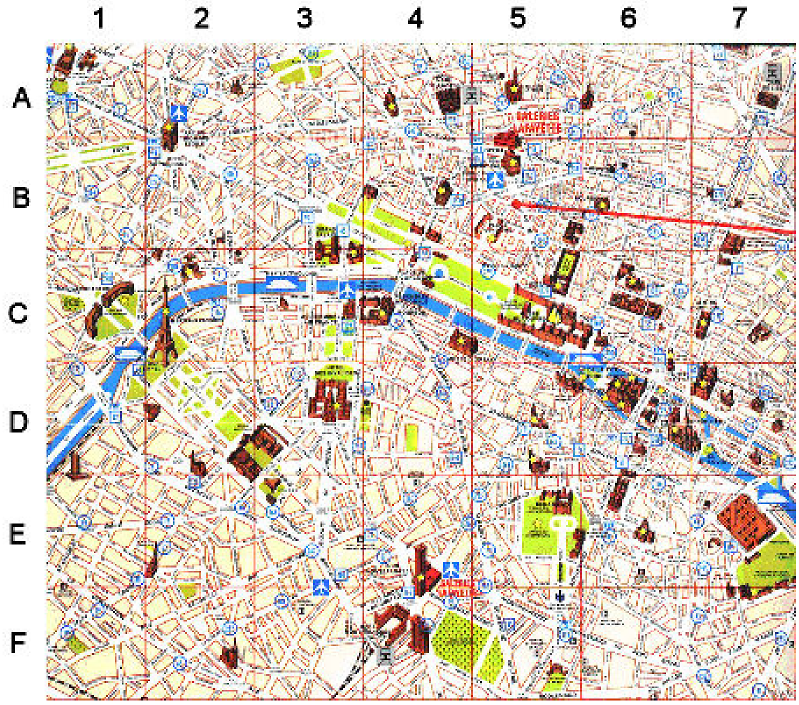
33. Dati i punti $A \equiv (1)$, $B \equiv (3)$, $C \equiv (7)$, $D \equiv (d)$, con $d > 0$, determinare i valori del parametro reale m per i quali è vera la seguente relazione: $\overline{AD} + \overline{BD} = m \cdot \overline{CD}$. $\left[\begin{cases} \frac{1}{3} < m < \frac{4}{7} & 0 < d < 1 \\ \frac{1}{3} < m < \frac{1}{2} & 1 < d < 3 \\ m > \frac{1}{2} & 3 < d < 7 \\ m > 2 & d > 7 \end{cases}\right]$

34. Dati i punti $A \equiv (-3)$, $B \equiv (0)$, $C \equiv (1)$, $D \equiv (4)$, $E \equiv (e)$, con $e > 0$, determinare i valori del parametro reale m per i quali si abbia: $\overline{AE} - \overline{DE} = m \cdot \left(\overline{BE} + \overline{CE}\right)$. $\begin{bmatrix} -1 < m < 1 & 0 < e < 1 \\ m = 1 & 1 \le e \le 4 \\ 0 < m < 1 & e > 4 \end{bmatrix}$

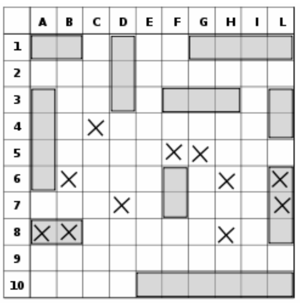
35. Dati i punti $A \equiv (-1)$, $B \equiv (2)$, $C \equiv (3)$, $D \equiv (7)$, $E \equiv (e)$, con $e < 2$; determinare i valori del parametro reale m per i quali si abbia: $\overline{BE} + \overline{DE} = m \cdot \left(\overline{AE} - 2 \cdot \overline{CE}\right)$. $\left[\begin{cases} -2 < m < -\frac{11}{8} & e < -1 \\ m < -\frac{11}{8} \vee m > 5 & -1 < e < 2 \end{cases}\right]$

Concetto di sistema di riferimento sul piano

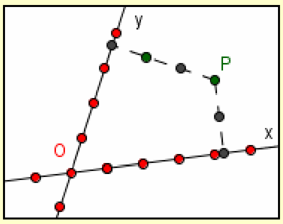
Passiamo adesso a stabilire un sistema di riferimento sul piano, di cui un esempio sono le mappe piane, come quelle turistiche. Quella che segue rappresenta Parigi ed è appunto divisa in caselle quadrate, ciascuna delle quali è individuata da un numero e da una lettera.



Che poi è la stessa tecnica che si usa nel ben noto gioco della Battaglia navale



Esempio 9

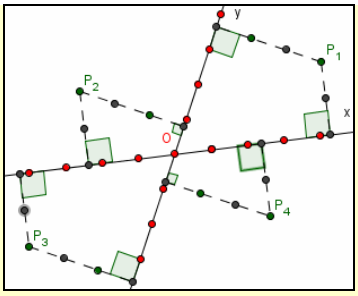
Un modo, non certo l'unico, per determinare in modo univoco la posizione di un punto sul piano è quello di riferire la sua posizione relativamente a due rette non parallele, perché due rette incidenti individuano sempre un unico punto. 

Abbiamo tracciato due rette incidenti in *O* che abbiamo chiamato *x* e *y*, su ciascuna di esse abbiamo considerato un sistema di riferimento naturale di uguale origine *O* e con uguale unità di misura. Per determinare la posizione del punto *P*, abbiamo considerato le distanze[1] di *P* da *x* e *y*. In questo caso *P* dista 2 unità dalla retta *x* e 3 unità dalla retta *y*. Pertanto questi due numeri possono rappresentare la posizione di *P*.

Anche nel sistema appena considerato possono tuttavia sorgere equivoci.

[1] Ricordiamo che per distanza di un punto *P* da una retta *r* intendiamo la misura del segmento di perpendicolare condotto da *P* a *r*.

Esempio 10

Come illustrato in figura 

i punti che distano 2 e 3 unità dalle rette *generatrici* del sistema sono ben 4. Ciò significa che dobbiamo opportunamente porre i segni + e − davanti ai numeri che misurano le dette distanze. Così potremmo per esempio stabilire che i numeri che determinano la posizione di P, e cioè le misure delle distanze dalle rette x e y, sono (2; 3) oppure (3; 2) a seconda di quale delle due rette vogliamo considerare come *iniziale*. Se scegliamo la retta x, sarà P_1 (3; 2), P_2 (–3; 2), ciò perché il segmento che *cade* su x è *dalla stessa parte* di quello determinato da P, mentre l'altro è da parte opposta. Seguendo questo criterio potremmo dire che P_3 (–3; –2) e P_4 da (3; –2).

Definizione 4

L'insieme $\{O, x, y, u\}$ formato da due rette x e y incidenti nel punto O e dalla misura u di un segmento, si chiama **sistema di riferimento cartesiano monometrico nel piano**. O si chiama **origine del sistema**, u si chiama **unità di misura**, x si chiama **asse delle ascisse**, y **asse delle ordinate**.

Definizione 5

Dato un punto P in un piano sul quale è stabilito un sistema di riferimento cartesiano monometrico $\{O, x, y, u\}$, diciamo sue **coordinate** i numeri che misurano le sue distanze dalle rette x e y mediante u e alle quali si premette il segno meno a seconda della posizione di P rispetto alle rette ($x < 0$ se P è a sinistra di y, $y < 0$ se P è sotto a x). Il primo numero si chiama **ascissa**, il secondo **ordinata**.

Definizione 6

In un sistema di riferimento i punti le cui coordinate sono entrambe intere, si chiamano **punti reticolo**.

Notazione 2

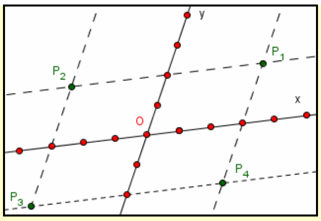
Le coordinate di un punto P, si indicano con il simbolo $P \equiv (x; y)$.

Che cosa significa?

Ascissa letteralmente significa "tagliata via" e si riferisce probabilmente al fatto che essa si configura come una tacca sulla retta. Il termine fu coniato nel Seicento dal filosofo e matematico Gottfried Wilhelm Leibniz.
Ordinata ha il significato semplicemente di ordine e si riferisce al fatto che essa è messa in una posizione che, rispetto a un sistema di riferimento, è appunto ordinata.

Passiamo ora a considerare altri modi per determinare un punto nel piano.

Esempio 11

Lasciando inalterate le due rette e la rispettiva inclinazione, possiamo individuare ciascun punto in altri modi, per esempio come illustrato di seguito. 

Abbiamo tracciato le parallele agli assi per i punti che staccano segmenti (a partire da O) lunghi 2 e 3 unità rispettivamente, i 4 punti individuati hanno le stesse coordinate di quelli omonimi dell'Esempio 9, ma non sono ad essi equivalenti, perché il modo di determinare la posizione è diverso.

Per il modo in cui abbiamo definito il sistema di riferimento cartesiano è ovvia la validità del seguente teorema.

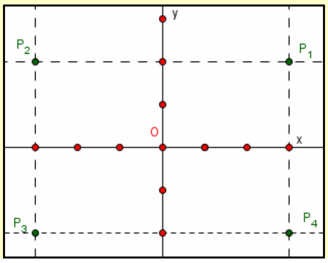
Teorema 4

Esiste una corrispondenza biunivoca fra i punti del piano e $\mathbb{R}^2$.

In effetti ci rendiamo conto che il precedente sistema di riferimento non è semplice da usare, soprattutto per il calcolo delle distanze di due punti; possiamo *migliorarlo* se facciamo in modo che gli assi siano fra loro perpendicolari.

Esempio 12

Se gli assi sono fra loro perpendicolari, le coordinate dei punti possono determinarsi in modo semplificato. Dalla figura notiamo infatti che in questo caso le coordinate di ciascun punto coincidono con quelle stabilite da un sistema di riferimento naturale sugli assi coordinati.

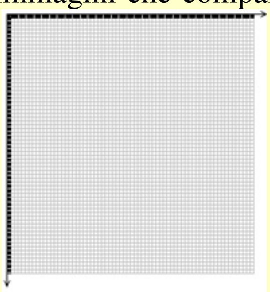


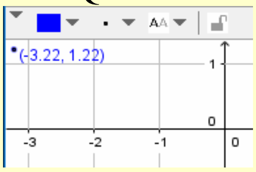
Definizione 7

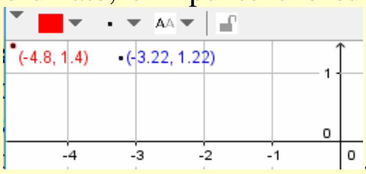
L'insieme $\{O, x, y, u\}$ formato da due rette x e y ortogonali e incidenti nel punto O e dalla misura u di un segmento, si chiama **sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico nel piano**.

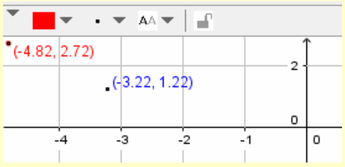
Visto che gli assi sono fra loro ortogonali, per semplicità vengono tracciati in modo che ci appaiano nelle posizioni che chiamiamo orizzontale e verticale. L'asse x è per convenzione quello che ci appare orizzontale, l'asse y quello verticale.

Esempio 13

- Un esempio di sistema di riferimento sul piano, un piano finito, è fornito dai monitor. La visualizzazione delle immagini che compaiono sul monitor è determinata dall'*illuminazione* di singoli puntini, chiamati pixel.  Affinché la CPU possa trasmettere il comando di illuminazione o spegnimento di un dato pixel, naturalmente ne deve stabilire prima la posizione. Ciò viene fatto, in genere, considerando come pixel (0; 0) quello che occupa la posizione più alta e più a sinistra. Questo è un riferimento assoluto, nel senso che quel pixel sarà sempre (0; 0), poi però occorre prendere in considerazione la cosiddetta risoluzione grafica, ossia il numero di pixel fisicamente presenti sul monitor, così se essa è 1024 × 768, il pixel più a destra della riga più in alto sarà (0; 767), quello più in basso e più a sinistra sarà (1023; 0) e quello più a destra e più in basso (1023; 767). In questo riferimento tutti i punti del monitor sono reticolo e non vi sono coordinate negative.

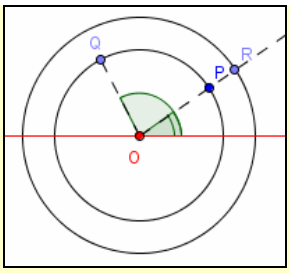
- Se vogliamo rappresentare un sistema cartesiano nostro, come per esempio fa Geogebra, dobbiamo farlo relativamente a quello assoluto del monitor. Quindi dobbiamo stabilire una unità di misura in pixel. Per esempio in figura il puntino mostrato, 

nel riferimento di Geogebra ha le coordinate mostrate, in quello del monitor invece ne ha altre per esempio supponiamo siano (45; 32). Se effettuiamo una modifica dell'origine del sistema di riferimento di Geogebra il punto cambierà ovviamente le sue coordinate, e il punto che sul monitor ha posizione (45; 32) rappresenterò un altro punto, quello rosso 

. Quindi mentre il sistema di riferimento del monitor è sempre assoluto, variando solo in termini di risoluzione dello schermo, quello di Geogebra è relativo all'origine e all'unità di misura, che potrebbe anche essere diversa per ascissa e ordinata, come mostrato in figura, in cui il punto blu non ha modificato le sue coordinate relative a Geogebra, ma ha modificato la posizione sullo schermo, quindi ha cambiato il pixel che lo rappresentava, e il punto rosso, che abbiamo lasciato nella sua posizione assoluta in termini di monitor (cioè è sempre lo stesso pixel) invece ha altre coordinate per Geogebra. 

Vediamo ancora un esempio di sistema di riferimento sul piano.

Esempio 14

Consideriamo la figura seguente, 

in cui O è un punto scelto a caso sul piano e la retta segnata è una retta qualsiasi. Per individuare un punto diverso da O consideriamo la circonferenza di centro O passante per il dato punto. Ciò non è sufficiente a determinare il punto, dato che per esempio P e Q sarebbero indistinguibili, così come tutti gli altri punti della circonferenza a cui essi appartengono. Consideriamo allora l'angolo formato dal raggio che congiunge O con il punto, e dalla retta fissata. Questa volta possiamo dire che tutto *funziona*: P e Q sono distinti perché hanno stessa distanza da O, ma formano con esso e con la retta fissata angoli distinti; anche P e R sono distinti, perché formano un angolo uguale, ma hanno diversa distanza da O.

Possiamo ora concludere che anche se varia il modo di determinare la posizione di un punto del piano, abbiamo in ogni caso bisogno di almeno due quantità (coordinate) per determinarla. Rimane da osservare che i diversi sistemi di riferimento presentati, oltre a non essere gli unici possibili, sono tutti basati sul concetto di distanza. Esiste tuttavia la possibilità di considerare sistemi di riferimento che non verranno qui presentati e che si basano su altri concetti.

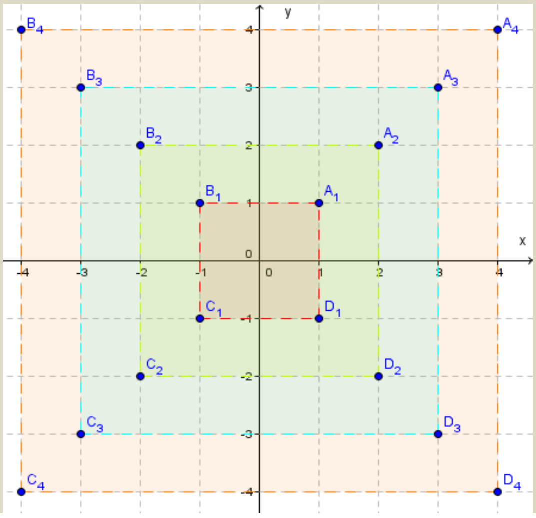
L’angolo storico

Il sistema di riferimento cartesiano, così detto in onore di René Descartes (italianizzato in Cartesio) ed è stato esposto, in forma diversa da quella attuale, in una sua opera del 1637. Il concetto di sistema di riferimento è naturalmente molto più antico; non dobbiamo dimenticare infatti che esso è indispensabile per questioni pratiche, come il tracciamento delle mappe o la determinazione della posizione delle stelle nel cielo. In particolare la lettura del firmamento stellato rivestiva grande importanza presso gli Egizi ed era una delle attività principali dei sacerdoti. Il famoso storico delle scienze Otto Neugebauer, nell’opera *Le scienze esatte nell'antichità*, racconta che gli Egizi avevano sviluppato già migliaia di anni fa un calendario basato sulla posizione delle stelle e sulla loro diversa disposizione al passare dei giorni. È evidente in questa operazione il ricorso a un sistema di riferimento. Lo stesso Neugebauer afferma che nelle tombe di Ramesse VI, VII e IX si trovano tracciate reti di coordinate che rappresentano le ore e le posizioni delle stelle. Anche i Babilonesi svilupparono sistemi di riferimento e lo fecero anch’essi per esigenze astronomiche. Si deve a loro infatti la suddivisione della parte di cielo visibile in quelle 12 sezioni, ciascuna di 30 gradi, che hanno dato luogo allo zodiaco con i suoi 12 segni zodiacali. Non dobbiamo dimenticare inoltre che nell'antichità erano molto importanti gli scambi commerciali e culturali fra paesi anche molto lontani fra loro. Era perciò indispensabile stabilire un sistema di riferimento sulla terra che permettesse il tracciamento delle carte geografiche. Il fatto che esse non fossero poi molto aderenti alla realtà dipende esclusivamente dalla scarsa tecnologia disponibile.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Nel piano cartesiano ortogonale vogliamo rappresentare un quadrato con centro nell'origine.
Se il lato del quadrato misura $2n$, espresso nell'unità di misura vigente nel sistema, non è difficile capire che le coordinate dei vertici saranno $A_n \equiv (n; n)$, $B_n \equiv (-n; n)$, $C_n \equiv (-n; -n)$ e $D_n \equiv (n; -n)$. In figura consideriamo una serie di quadrati concentrici per valori interi di n che variano da 1 a 4.



Livello 1

1. In un sistema di riferimento cartesiano obliquo, in cui gli assi formano un angolo di 45°, rappresentare i seguenti punti: $A \equiv (1; 2)$, $B \equiv (0; -1)$, $C \equiv (-3; 4)$, $D \equiv (-2; -3)$, $E \equiv (5; 1)$.
2. In un sistema di riferimento cartesiano obliquo, in cui gli assi formano un angolo di 60°, rappresentare i seguenti punti: $A \equiv (0; 1)$, $B \equiv (2; 1)$, $C \equiv (-1; 2)$, $D \equiv (-3; -1)$, $E \equiv (-2; 3)$.
3. In un sistema di riferimento cartesiano obliquo, in cui gli assi formano un angolo di 90°, rappresentare i seguenti punti: $A \equiv (2; 3)$, $B \equiv (0; 0)$, $C \equiv (-2; 1)$, $D \equiv (-1; -1)$, $E \equiv (3; 2)$.
4. In un sistema di riferimento cartesiano obliquo, in cui gli assi formano un angolo di 120°, rappresentare i seguenti punti: $A \equiv (4; 0)$, $B \equiv (0; -2)$, $C \equiv (-1; 5)$, $D \equiv (-1; -3)$, $E \equiv (3; 4)$.
5. In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, rappresentare un rettangolo, con centro nell'origine, le cui dimensioni sono parallele agli assi e misurano 4 e 3 unità. [$A \equiv (2; 1,5)$, $B \equiv (-2; 1,5)$, $C \equiv (-2; -1,5)$, $D \equiv (2; -1,5)$; $A' \equiv (1,5; 2)$, $B' \equiv (-1,5; 2)$, $C' \equiv (-1,5; -2)$, $D' \equiv (1,5; -2)$]
6. In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, rappresentare un rombo, con centro nell'origine, il cui lato è di 5 unità e i vertici hanno coordinate entrambe intere. [$A \equiv (3; 0)$, $B \equiv (0; 4)$, $C \equiv (-3; 0)$, $D \equiv (0; -4)$; $A' \equiv (4; 0)$, $B' \equiv (0; 3)$, $C' \equiv (-4; 0)$, $D' \equiv (0; -3)$]
7. In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, rappresentare un trapezio rettangolo, le cui basi e altezza sono rispettivamente di 2, 6 e 4 unità, in modo che gli assi cartesiani bisechino una base e il lato altezza sia parallelo all'asse y. [8 soluzioni: $A \equiv (1; 2)$, $B \equiv (-1; 2)$, $C \equiv (-1; -2)$, $D \equiv (5; -2)$; $A' \equiv (1; 2)$, $B' \equiv (-1; 2)$, $C' \equiv (-5; -2)$, $D' \equiv (1; -2)$; …]
8. In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, rappresentare un trapezio isoscele, le cui basi e altezza sono rispettivamente di 2; 6 e 4 unità, in modo che gli assi cartesiani bisechino una base e l'altezza e quest'ultima sia parallela all'asse y. [$A \equiv (1; 2)$, $B \equiv (-1; 2)$, $C \equiv (-3; -2)$, $D \equiv (3; -2)$; $A' \equiv (3; 2)$, $B' \equiv (-3; 2)$, $C' \equiv (-1; -2)$, $D' \equiv (1; -2)$]
9. In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, rappresentare un triangolo rettangolo, i cui cateti sono bisecati dagli assi e sono lunghi 2 e 4 unità. [8 soluzioni: $A \equiv (1; 2)$, $B \equiv (-1; 2)$, $C \equiv (1; -2)$; $A' \equiv (-1; 2)$, $B' \equiv (-1; -2)$, $C' \equiv (1; -2)$; ....]
10. In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, rappresentare un triangolo isoscele di dimensioni 5; 5 e 6; la cui base è bisecata da uno degli assi. [Infinite soluzioni, una di queste è: $A \equiv (3; -2)$, $B \equiv (0; 2)$, $C \equiv (-3; -2)$]
11. Quanti triangoli equilateri hanno il lato lungo 4 e sono bisecati dall'asse x? [Infiniti]

12. In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, rappresentare un triangolo equilatero il cui lato è lungo 4; è bisecato dall'asse y e ha due vertici su x e uno su y.
[$A_{12} \equiv (2; 0)$, $B_{12} \equiv (0; \pm 2 \cdot \sqrt{3})$, $C_{12} \equiv (-2; 0)$]

Livello 2

13. Con riferimento al problema precedente, è possibile rappresentare un triangolo equilatero in modo che tutti i suoi vertici siano punti reticolo? Giustificare la risposta.
[No, perché il lato e l'altezza sono grandezze fra loro incommensurabili]
14. Un quadrato di lato che misura 2 è rappresentato su un piano cartesiano ortogonale, con i lati paralleli agli assi e il centro nell'origine; quanti punti reticolo vi sono al suo interno? Quanti sul suo contorno?
[1; 8]
15. Un rombo di lato che misura 10 è rappresentato su un piano cartesiano ortogonale, ha il centro nell'origine, le diagonali sugli assi cartesiani e hanno misure intere; quanti punti reticolo vi sono al suo interno? Quanti sul suo contorno? [93; 8]
16. Due quadrati concentrici, di lati che misurano 4 e 8 sono rappresentati su un piano cartesiano ortogonale, con i lati paralleli agli assi e il centro nell'origine, quanti punti reticolo sono interni al quadrato maggiore ma non appartengono al minore? [24]
17. Un quadrato di lato di misura 6 ha i lati paralleli agli assi e il centro nell'origine, un altro quadrato ha per vertici i punti medi del precedente. Quanti punti reticolo sono interni al quadrato maggiore ma non appartengono al minore? Quanti punti reticolo sono sul contorno del quadrato minore ma non su quello del maggiore? [4; 8]
18. In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, quanti rettangoli con centro nell'origine, le cui dimensioni che misurano 3 e 4 unità, esistono? [Infiniti]
19. Quanti punti reticolo sono contenuti dentro il cerchio di centro l'origine e raggio 4? E quanti anche sulla circonferenza? [39; 43]
20. Quanti punti reticolo sono contenuti dentro il cerchio di centro l'origine e raggio 5? E quanti anche sulla circonferenza? [61; 73]

Nei successivi quesiti siamo su un monitor il cui pixel più in alto a sinistra nel suo riferimento assoluto è* (0; 0)*; il passo è l'incremento in termini relativi del valore rappresentato da un pixel quando si passa a uno a esso adiacente

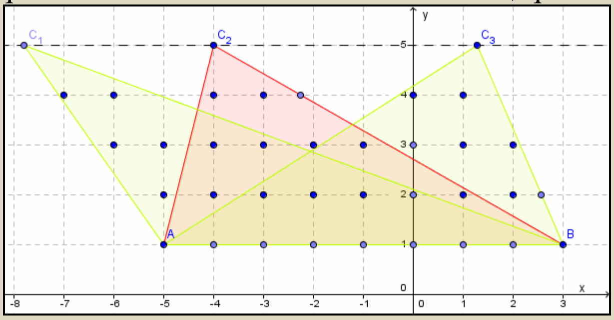
21. Su un monitor stabiliamo un riferimento in cui (0; 0) coincide e il passo è 0,1, che pixel rappresenta il punto (3; 6)? [(30; 60)]
22. Con riferimento al problema precedente, il pixel (150; 210) che punto rappresenta? [(15; 21)]
23. Con riferimento al problema 18, se il passo è 0,25, che pixel rappresenta il punto (3; 6)? [(12; 24)]
24. Con riferimento al problema precedente, il pixel (150; 210) che punto rappresenta? [(37,5; 52,5)]
25. Su un monitor stabiliamo un riferimento in cui (0; 0) è rappresentato dal pixel (100; 50) e il passo è 0,1, che pixel rappresenta il punto (1; 2)? [(110; 70)]
26. Il pixel (24; 39) rappresenta il punto (2; 3), quanti pixel rappresentano l'unità?
[12 sull'asse x e 13 su quello y]

27. Dato il generico punto $P \equiv (3h + 1; h - 4)$, stabilire per quali h esso appartiene rispettivamente a ciascuno dei quattro quadranti e quando agli assi coordinati. (Nelle risposte Q significa quadrante)
$\left[\text{I Q: } h > 4\text{; II Q: Mai; III Q: } h < -\frac{1}{3}\text{; IV Q: } -\frac{1}{3} < h < 4\text{; asse } x\text{: } h = 4\text{; asse } y\text{: } h = -\frac{1}{3}\right]$
28. Dato il generico punto $P \equiv (2 - 5h; 2h + 3)$, stabilire per quali h esso appartiene rispettivamente a ciascuno dei quattro quadranti e quando agli assi coordinati.
$\left[\text{I Q: } -\frac{3}{2} < h < \frac{2}{5}\text{; II Q: } h > \frac{2}{5}\text{; III Q: Mai; IV Q: } h < -\frac{3}{2}\text{; asse } x\text{: } h = -\frac{3}{2}\text{; asse } y\text{: } h = \frac{2}{5}\right]$

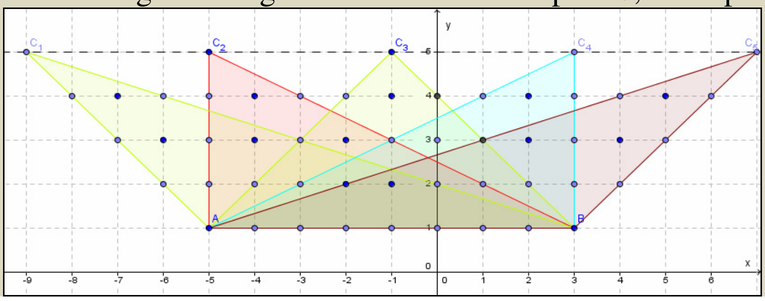
Lavoriamo insieme

Rappresentare un triangolo che ha due vertici in $A \equiv (-5; 1)$ *e* $B \equiv (3; 1)$ *e area pari a* 16.

Notiamo subito che la questione è indeterminata, dato che di triangoli del genere ne esistono infiniti. Infatti, dato che $\overline{AB} = 8$, il terzo vertice può essere uno qualsiasi dei punti di ordinata 5, come mostrato nella figura seguente, o di ordinata – 3. In questo modo l'altezza relativa ad *AB* è 4; quindi l'area di *ABC* è proprio 16.



Appurato questo fatto, vogliamo stabilire qual è il massimo numero di punti reticolo che possono essere racchiusi da triangoli del genere, considerando anche i punti sul contorno. Come possiamo procedere per risolvere il problema? Intanto osserviamo che 9 punti saranno sempre contenuti in ogni triangolo del genere, cioè quelli appartenenti ad *AB* e *C*. Ora vediamo di capire cosa accade ai punti reticolo all'interno di *ABC* quando *spostiamo C*. Per ottenere più punti dobbiamo fare in modo che i lati contengano punti reticolo, il che si ottiene nei cinque modi illustrati in figura. In ogni caso il totale è sempre 26; che è perciò il massimo cercato.

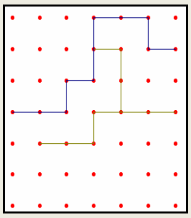
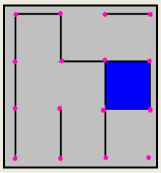


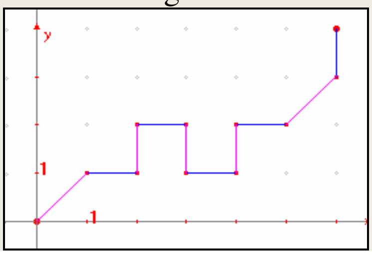
Livello 3

29. Un quadrato di lato che misura 2 è rappresentato su un piano cartesiano ortogonale e ha il centro nell'origine; quanti punti reticolo vi sono al suo interno? Quanti sul suo contorno? [1 o 4; 0, 4 o 8]
30. Due quadrati concentrici, di lati che misurano 2 e 4 sono rappresentati su un piano cartesiano ortogonale e hanno il centro nell'origine, quanti punti reticolo sono interni al quadrato maggiore ma non appartengono al minore? [0, 2, 4, 6, 8, o 10]
31. Un quadrato di lato che misura n ($n \in \mathbb{N}$), è rappresentato su un piano cartesiano ortogonale, ha il centro nell'origine e i vertici che sono punti reticolo; quanti punti reticolo contiene, compresi quelli sui lati? Quanti sono al suo interno? $[(n + 1)^2; (n - 1)^2]$
32. Un triangolo rettangolo è rappresentato sul piano cartesiano ortogonale in modo da contenere i 9 punti reticolo più vicini all'origine, origine compresa; qual è il minimo valore che può assumere la sua area? [8]
33. Il punto *P* ha coordinate (1; 2), quanti punti reticolo distano $\sqrt{10}$ unità da *P*? [8]
34. Il punto *P* ha coordinate (1; 2), quanti punti reticolo distano 4 unità da *P*? [4]
35. Il punto *P* ha coordinate (1; 2), quanti punti reticolo distano 5 unità da *P*? [12]

Giochiamo alla matematica

Esistono diversi giochi che hanno a che vedere con piani cartesiani finiti.

- Nella figura seguente  abbiamo un piano reticolato 7 × 7: scopo del gioco è arrivare da una parte all'altra del piano tracciando ogni volta un segmento unitario orizzontale o verticale, in modo che sia consecutivo a qualcuno già tracciato e in modo che non vi siano più di due segmenti adiacenti. Inoltre, non è possibile intersecare un segmento dell'avversario. Nella seguente figura mostriamo un caso in cui ha vinto il giocatore il cui colore è il blu. 
  Naturalmente possono crearsi altre varianti. Per esempio possiamo fare in modo da circondare il maggior numero possibile di quadrati, il che si effettua tracciando un segmento unitario in una parte qualsiasi del piano, ma sempre congiungente due punti reticolo: il quadrato sarà di proprietà di colui che lo chiuderà. Così per esempio nella seguente figura, uno dei giocatori ha già racchiuso un quadrato e si appresta a richiuderne diversi altri.
- Un secondo gioco potrebbe essere il seguente. Si parte da un punto del piano reticolato e si tracciano segmenti che collegano fra loro 2 punti reticolo adiacenti, , in modo però da non allontanarsi dall'origine, quindi non si può andare né a sinistra né in alto; ogni giocatore, quando è il suo turno, deve proseguire con un segmento consecutivo all'ultimo tracciato. Vince chi per primo raggiunge l'origine. In figura vi è un esempio di giocata, in cui vince il giocatore il cui tratto è di colore fucsia.



Geometria dei punti e delle figure poligonali

Sebbene l'idea che vi sta dietro sia semplice, il metodo della geometria analitica è così potente che perfino un adolescente può usarla per provare risultati che avrebbero messo in seria difficoltà i grandi geometri Greci: Euclide, Archimede e Apollonio.

Eric Temple Bell

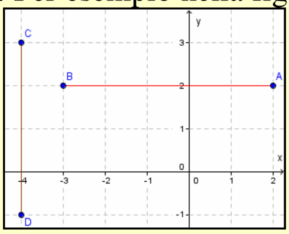
Il problema

Su una mappa sono segnati due punti, dei quali conosciamo le rispettive coordinate. Vogliamo sapere qual è la loro distanza *in linea d'aria*, ossia la loro distanza intesa come il cammino più breve che li unisce.

Ci riferiamo qui alla particolare mappa piana che è il sistema cartesiano ortogonale monometrico.

Esempio 15

Se i punti sono estremi di un segmento parallelo a uno degli assi coordinati, e sono situati da parti opposte rispetto a esso, il problema è molto semplice. Basta infatti sommare le distanze che ciascun punto ha dall'asse cui il segmento è perpendicolare. Tale valore è strettamente connesso all'ascissa (nel caso di AB) o all'ordinata (nel caso di CD), nel senso che la misura della distanza è proprio l'ascissa o l'ordinata se esse sono positive, diversamente è il suo valore assoluto. Per esempio nella figura seguente è: $A \equiv (2; 2)$, $B \equiv (-3; 2)$ e il segmento AB misura $2 + |-3| = 2 + 3 = 5$.



Analogamente, dato che $C \equiv (-4; 3)$ e $D \equiv (-4; -1)$, è $\overline{CD} = 3 + |-1| = 4$. In effetti avremmo potuto scrivere anche nel seguente modo: $\overline{AB} = |2 - (-3)| = 5$ o $\overline{AB} = |-1 - 2| = 5$ e $\overline{CD} = |3 - (-1)| = 4$ o $\overline{CD} = |-1 - 3| = 4$. Da quanto abbiamo visto, possiamo dire che le distanze si possono ottenere anche per differenza delle ascisse o delle ordinate, e questo ci permette di calcolarle agevolmente anche nel caso in cui i punti siano dalla stessa parte rispetto agli assi coordinati. Se infatti è $A \equiv (5; 2)$ e $B \equiv (7; 2)$, il segmento AB misura $7 - 5 = 2$, e analogamente se è $C \equiv (-4; 1)$ e $D \equiv (-4; 9)$, il segmento CD misura $9 - 1 = 8$. Ovviamente le precedenti misure non sono *assolute*, nel senso che i valori 5; 4; 2; 8 trovati rappresentano 5; 4; 2; 8 volte l'unità prescelta.

Alla luce del precedente esempio possiamo enunciare i seguenti risultati.

Teorema 5

Il segmento di estremi i punti $A \equiv (x_A; y)$, $B \equiv (x_B; y)$ (parallelo all'asse x), nell'unità di misura prescelta, è lungo $|x_A - x_B| = |x_B - x_A|$.

Dimostrazione per esercizio.

Teorema 6

Il segmento di estremi i punti $A \equiv (x; y_A)$, $B \equiv (x; y_B)$ (parallelo all'asse y), nell'unità di misura prescelta, è lungo $|y_A - y_B| = |y_B - y_A|$.

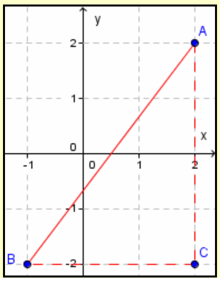
Dimostrazione per esercizio.

Affrontiamo adesso il problema generale della misura di un segmento comunque disposto sul piano.

Esempio 16

Consideriamo il segmento AB nella figura seguente, in cui $A \equiv (2; 2)$, $B \equiv (-1; -2)$. Come si vede abbiamo costruito il triangolo rettangolo ABC di cui AB è ipotenusa. Ciò per ricondurre la questione a quanto già sap-

piamo grazie ai Teoremi 2 e 3. Possiamo applicare il teorema di Pitagora scrivendo: $\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2}$.
Applicando i risultati dei teoremi citati avremo: $\overline{AB} = \sqrt{\left(2-(-1)\right)^2 + \left(2-(-2)\right)^2} = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = 5$.



Quanto visto nell'esempio precedente può generalizzarsi a due punti di coordinate generiche, ottenendo il seguente risultato.

Teorema 7

Il segmento di estremi $A \equiv (x_A; y_A)$, $B \equiv (x_B; y_B)$, nell'unità di misura prescelta, è lungo

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Dimostrazione per esercizio.

Esempio 17

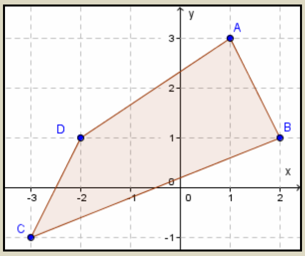
Vogliamo calcolare la misura del perimetro del triangolo di vertici $A \equiv (2; -1)$, $B \equiv (3; 0)$, $C \equiv (-1; -1)$. Basta calcolare le distanze dei punti a due a due, usando la formula del Teorema 7.

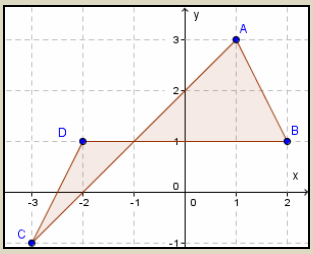
$$2p_{ABC} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \sqrt{(2-3)^2 + (-1-0)^2} + \sqrt{(3+1)^2 + (0+1)^2} + \sqrt{(-1-2)^2 + (-1+1)^2} =$$
$$= \sqrt{1+1} + \sqrt{16+1} + \sqrt{9+0} = \sqrt{2} + \sqrt{17} + 3$$

Verifiche

Lavoriamo insieme

Determinare la misura del perimetro del quadrilatero di vertici $A \equiv (1;3)$, $B \equiv (2;1)$, $C \equiv (-3;-1)$, $D \equiv (-2;1)$.
Per prima cosa osserviamo che di quadrilateri del genere ve ne sono due distinti, come mostrato nelle figure seguenti, che leggiamo come *ABCD* o *ABDC*.





Se perciò non stabiliamo qual è l'ordine in cui si collegano i vertici, il problema è indeterminato. Calcoliamo i perimetri di entrambi i quadrilateri. Per calcolare la distanza di due punti basta applicare la ben nota formula stabilità dal Teorema 7: $\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$. Si ha: $\overline{AB} = \sqrt{(1-2)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$;
$\overline{BC} = \sqrt{(2+3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$; $\overline{CD} = \sqrt{(-3+2)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$;
$\overline{DA} = \sqrt{(-2-1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$. Quindi il perimetro di *ABCD* è $2\cdot\sqrt{5} + \sqrt{29} + \sqrt{13}$.
$\overline{AC} = \sqrt{(1+3)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{16+16} = 4\cdot\sqrt{2}$; $\overline{CD} = \sqrt{5}$; $\overline{DB} = \sqrt{(2+2)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{16} = 4$; $\overline{BA} = \sqrt{5}$.
Il perimetro di *ABDC* è invece $2\cdot\sqrt{5} + 4\cdot\sqrt{2} + 4$.

Livello 1

1. Determinare una formula semplificata per calcolare la distanza di un punto $P \equiv (x_P; y_P)$ dall'origine O degli assi. $\left[\overline{PO} = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}\right]$

2. Determinare una formula semplificata per calcolare la distanza di un punto dell'asse x, $X \equiv (x_P; 0)$, da uno dell'asse y, $Y \equiv (0; y_P)$. $\left[\overline{XY} = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}\right]$

3. Determinare la misura dei seguenti segmenti di cui forniamo le coordinate degli estremi:
$A \equiv (0; -1)$, $B \equiv (-2; 1)$; $C \equiv (4; -1)$, $D \equiv (-3; -5)$; $E \equiv (0; 3)$, $F \equiv (-1; 0)$ $\left[2\cdot\sqrt{2}; \sqrt{65}; \sqrt{10}\right]$
$G \equiv (3; -1)$, $H \equiv (-2; 4)$; $I \equiv \left(\frac{1}{2};1\right), J \equiv \left(-2;\frac{3}{4}\right)$; $K \equiv \left(-\frac{3}{2};0\right), L \equiv \left(0;\frac{3}{4}\right)$ $\left[5\cdot\sqrt{2}; \frac{\sqrt{101}}{4}; \frac{3\cdot\sqrt{5}}{4}\right]$
$M \equiv \left(-3;\frac{4}{3}\right), N \equiv \left(-1,\frac{1}{3}\right)$; $P \equiv \left(\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right), Q \equiv \left(\frac{1}{4},\frac{3}{2}\right)$; $R \equiv \left(\sqrt{2};1\right)$, $S \equiv \left(-1;\sqrt{2}\right)$ $\left[\frac{\sqrt{61}}{3}; \frac{\sqrt{145}}{4}; \sqrt{6}\right]$
$T \equiv \left(1-\sqrt{3};-2\right)$, $U \equiv \left(1+\sqrt{3};-\sqrt{2}\right)$; $V \equiv \left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{3}\right), W \equiv \left(-1;-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ $\left[\sqrt{18-4\cdot\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{120\cdot\sqrt{3}+295}}{12}\right]$

4. Calcolare la misura del perimetro dei seguenti triangoli date le coordinate dei vertici:
$A \equiv (1; 2)$, $B \equiv (3; 0)$, $C \equiv (-2; 1)$; $D \equiv (3; -1)$, $E \equiv (0; 1)$, $F \equiv (-2; -3)$
$\left[\sqrt{26} + \sqrt{10} + 2\cdot\sqrt{2}; \sqrt{29} + \sqrt{13} + 2\cdot\sqrt{5}\right]$
$G \equiv (4; 1)$, $H \equiv (-2; -2)$, $I \equiv \left(-\frac{1}{2};-1\right)$ $\left[\frac{\sqrt{97}+\sqrt{13}+6\cdot\sqrt{5}}{2}\right]$

$J\equiv\left(-1;\frac{1}{4}\right), K\equiv\left(-\frac{3}{4},1\right), L\equiv(1;1)$ $\left[\frac{\sqrt{73}+\sqrt{10}+7}{4}\right]$

$M\equiv\left(\frac{4}{3};1\right), N\equiv\left(1;\frac{1}{3}\right), P\equiv\left(-1;\frac{2}{3}\right)$ $\left[\frac{\sqrt{37}+\sqrt{5}+5\cdot\sqrt{2}}{3}\right]$

$Q\equiv\left(-\frac{5}{2};-1\right), R\equiv\left(\frac{1}{2};-3\right), S\equiv\left(2;\frac{3}{4}\right)$ $\left[\frac{2\cdot\sqrt{85}+5\cdot\sqrt{13}+3\cdot\sqrt{29}}{4}\right]$

$T\equiv(\sqrt{3};-1), U\equiv(-\sqrt{3};2), V\equiv(3;-2)$ $\left[\sqrt{13-6\cdot\sqrt{3}}+3\cdot\sqrt{3}+\sqrt{21}+1\right]$

$W\equiv\left(\frac{\sqrt{3}}{2};0\right), X\equiv\left(1;-\frac{1}{4}\right), Y\equiv\left(0;\sqrt{3}-1\right)$ $\left[\frac{\sqrt{73-24\cdot\sqrt{3}}+\sqrt{29-16\cdot\sqrt{3}}-2\cdot\sqrt{3}+8}{4}\right]$

5. Verificare che i seguenti triangoli di cui sono forniti i vertici sono isosceli (Nelle risposte ci sono le misure dei lati, il secondo numero si riferisce ai lati isometrici).

$A\equiv(-5;1), B\equiv(-2;-2), C\equiv(0;3)$; $D\equiv(-5;-3), E\equiv(2;0), F\equiv(-6;9)$ $\left[\left(3\cdot\sqrt{2},\sqrt{29}\right);\left(\sqrt{58},\sqrt{145}\right)\right]$

$G\equiv(2;-2), H\equiv(-1;4), I\equiv(5;1)$; $M\equiv\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{4}\right), N\equiv\left(\frac{2}{3};\frac{3}{4}\right), P\equiv\left(\frac{5}{2};-\frac{25}{6}\right)$ $\left[\left(3\cdot\sqrt{5},3\cdot\sqrt{2}\right);\left(\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{3965}}{12}\right)\right]$

$J\equiv\left(\sqrt{2};1\right), K\equiv\left(2;-\sqrt{2}\right), L\equiv\left(-2;\frac{19-15\cdot\sqrt{2}}{2}\right)$ $\left[\sqrt{9-2\cdot\sqrt{2}},\frac{\sqrt{763-494\cdot\sqrt{2}}}{2}\right]$

6. Verificare che i seguenti triangoli di cui sono forniti i vertici sono rettangoli. (Suggerimento: verificare la validità del teorema di Pitagora.) $A\equiv(1;2), B\equiv(2;-1), C\equiv(-2;1)$

$D\equiv(-2;3), E\equiv(1;-1), F\equiv(-3;1)$ $G\equiv\left(\sqrt{2};1\right), H\equiv\left(1-\sqrt{2};-1\right), I\equiv\left(-\sqrt{2};5-\sqrt{2}\right)$

$J\equiv\left(-\frac{131}{50};-\frac{63}{50}\right), K\equiv\left(-\frac{3}{4};-5\right), L\equiv\left(\frac{5}{2};\frac{3}{10}\right)$ $M\equiv(-7;1), N\equiv(2;4), P\equiv(-4;-2)$

Livello 2

7. Determinare una relazione fra le misure dei lati di un triangolo acutangolo e non equilatero, con a la misura del lato maggiore, b e c le misure degli altri due lati. $[a^2 < b^2 + c^2]$

8. Determinare una relazione fra le misure dei lati di un triangolo ottusangolo, con a la misura del lato maggiore, b e c le misure degli altri due lati. $[a^2 > b^2 + c^2]$

9. Tenuto conto dei risultati dei precedenti esercizi, stabilire quali fra i seguenti triangoli di cui sono forniti i vertici sono acutangoli (AC) e quali ottusangoli (OT).
a) $A\equiv(-2;0), B\equiv(4;1), C\equiv(3;-2)$; b) $D\equiv(5;-6), E\equiv(0;1), F\equiv(-5;3)$; c) $G\equiv(-3;2), H\equiv(-1;1), I\equiv(3;-1)$; d) $J\equiv\left(-\frac{11}{5};-\frac{2}{5}\right), K\equiv\left(\frac{3}{2},1\right), L\equiv\left(\frac{5}{4},-\frac{3}{5}\right)$; e) $M\equiv\left(\sqrt{3};-1\right), N\equiv\left(3-\sqrt{3};0\right)$, $P\equiv\left(2-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right)$ [AC; OT; Il triangolo non esiste, i punti sono allineati; OT; OT]

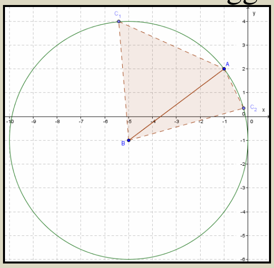
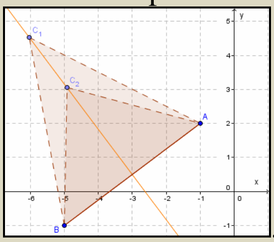
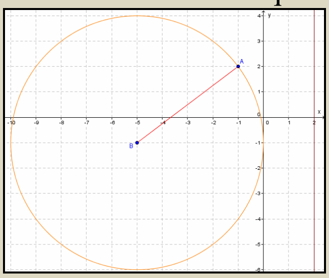
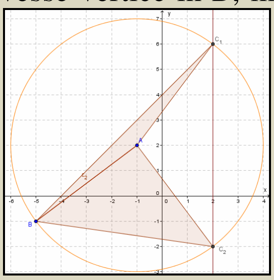
10. Verificare che i seguenti poligoni, di cui sono forniti i vertici, sono equilateri (Nelle risposte la misura comune dei lati): a) $A\equiv(-3;-2), B\equiv(2;1), C\equiv\left(\frac{3\cdot\sqrt{3}-1}{2};-\frac{1+5\cdot\sqrt{3}}{2}\right)$; b) $D\equiv(-4;-2)$, $E\equiv\left(\frac{4\cdot\sqrt{3}-3}{2};-\frac{5\cdot\sqrt{3}}{2}\right), F\equiv(1;2), G\equiv\left(-\frac{4\cdot\sqrt{3}+3}{2};\frac{5\cdot\sqrt{3}}{2}\right)$; c) $H\equiv(4;3), I\equiv\left(\frac{4+3\cdot\sqrt{3}}{2};\frac{3-4\cdot\sqrt{3}}{2}\right)$, $J\equiv\left(\frac{-4+3\cdot\sqrt{3}}{2};-\frac{3+4\cdot\sqrt{3}}{2}\right), K\equiv(-4;-3), L\equiv\left(-\frac{4+3\cdot\sqrt{3}}{2};\frac{4\cdot\sqrt{3}-3}{2}\right), M\equiv\left(\frac{4-3\cdot\sqrt{3}}{2};\frac{3+4\cdot\sqrt{3}}{2}\right)$

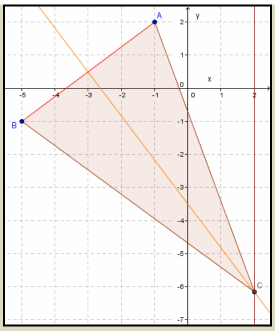
$\left[\sqrt{34};\sqrt{41};5\right]$

Lavoriamo insieme

Dati i punti $A \equiv (-1; 2)$ e $B \equiv (-5; -1)$, *trovare un terzo punto C che insieme con essi costituisca i vertici di un triangolo isoscele.*

Ci rendiamo conto che il problema è indeterminato, mostriamo perché.

- Se AB è uno dei lati obliqui, l'altro lato obliquo può avere vertice in A o in B, quindi è uno degli infiniti punti delle circonferenze di centro A o B e raggio che misura quanto AB. Nella figura seguente illustriamo cosa accade con B vertice;  analogo risultato si avrà nel caso che sia A il vertice dell'altro lato obliquo.
- Se AB fosse la base, il problema sarebbe comunque indeterminato: questa volta infatti il terzo vertice potrebbe essere uno qualsiasi dei punti dell'asse del segmento AB, escluso al più il punto medio di AB, lo mostriamo in figura . Naturalmente il problema è indeterminato anche se lo interpretiamo algebricamente. Infatti in questo caso cerchiamo un punto $C \equiv (x; y)$, quindi due numeri reali x e y, con una sola condizione, cioè $\overline{AB} = \overline{BC} \Rightarrow \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 \Rightarrow (-1+5)^2 + (2+1)^2 = (x+5)^2 + (y+1)^2$, oppure $\overline{AC} = \overline{BC} \Rightarrow \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 \Rightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = (x+5)^2 + (y+1)^2$.
- Affinché quindi il problema divenga risolubile dobbiamo fare in modo che venga fornita un'altra informazione. Ipotizziamo allora di conoscere una delle due coordinate di C. Così per $C \equiv (2; y)$, il problema continua a essere indeterminato, ma con un numero finito di soluzioni. Esaminiamo i diversi casi.
  Primo caso: se AB è uno dei lati obliqui, i punti cercati sarebbero le intersezioni della circonferenza con la retta che passa per tutti i punti di ascissa 2; ossia $x = 2$. Quindi, come si nota in figura, il problema non avrebbe soluzione se il secondo lato obliquo avesse vertice in B, mentre ne avrebbe due nel caso in cui avesse vertice in A.  
  Secondo caso: se AB fosse la base, addirittura la soluzione sarebbe unica, come mostrato di seguito in figura. Nel primo caso il problema potrebbe essere risolto algebricamente: $\overline{AB} = \overline{BC} \Rightarrow \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 = (-1 + 5)^2 + (2 + 1)^2 = (2 + 5)^2 + (y + 1)^2 \Rightarrow 16 + 9 - 49 = (y + 1)^2 \Rightarrow -24 = (y + 1)^2$, che non ha soluzione, oppure $\overline{AB} = \overline{AC} \Rightarrow \overline{AB}^2 = \overline{AC} = (-1 + 5)^2 + (2 + 1)^2 = (2 + 1)^2 + (y - 2)^2 \Rightarrow 16 = = (y - 2)^2 \Rightarrow (y - 2) = 4 \vee (y - 2) = -4 \Rightarrow y = 6 \vee y = -2$, con le due soluzioni $C_1 \equiv (2; -2)$ e $C_2 \equiv (2; -6)$. Nel secondo caso invece si avrebbe: $\overline{AC} = \overline{BC} \Rightarrow \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 = (2 + 1)^2 + (y - 2)^2 = (2 + 5)^2 + (y + 1)^2 \Rightarrow 9 + y^2 - 4y + 4 = 49 +$



$y^2 + 2y + 1 \Rightarrow y = -\frac{37}{6}$. L'unica soluzione è $C \equiv \left(2;-\frac{37}{6}\right)$.

Livello 2

11. Dimostrare il Teorema 5.
12. Dimostrare il Teorema 6.
13. Dimostrare il Teorema 7.
14. Di seguito sono fornite le coordinate di un estremo di un segmento e una coordinata dell'altro; determinare il valore della coordinata incognita affinché il segmento abbia la lunghezza d accanto indicata. a) $A \equiv (0; 4)$, $B \equiv (-4; y)$, $d = \sqrt{5}$; b) $C \equiv \left(-\frac{1}{2};5\right), D \equiv \left(x, \frac{4}{5}\right), d = \frac{13}{3}$; c) $E \equiv (1; -3)$, $G \equiv (x; -4)$, $d = 3$; d) $G \equiv \left(\frac{7}{4};-3\right)$, $H \equiv \left(-\frac{1}{5};\ y\right)$, $d = \sqrt{7}$; e) $I \equiv \left(\sqrt{11};-1\right), J \equiv \left(x;1+\sqrt{3}\right)$, $d = 4$; $K \equiv \left(1;\sqrt{2}\right), J \equiv \left(2-x;-1\right), d = \sqrt{2}$

$$\left[\left(\varnothing; x = -\frac{47}{30} \vee x = \frac{17}{30}\right); \left(x = 1 \pm 2\cdot\sqrt{2}; x = \frac{-60 \pm \sqrt{1279}}{20}\right); \left(x = \sqrt{11} \pm \sqrt{9-4\cdot\sqrt{3}}; \varnothing\right)\right]$$

15. Interpretare geometricamente il problema precedente. [Da un punto di vista geometrico cerchiamo le intersezioni della circonferenza di centro il punto dato e raggio pari alla distanza d e la retta che contiene tutte le ascisse o le ordinate uguali ai dati]
16. Con riferimento ai quesiti privi di soluzioni reali dell'Esercizio 14, fornire una giustificazione geometrica e una giustificazione algebrica del perché ciò accade. [Le circonferenze di centro il punto dato e raggio d sono esterne alle rette parallele a uno degli assi passanti per l'ascissa o l'ordinata data. Algebricamente otteniamo equazioni di secondo grado a discriminante negativo]
17. Dimostrare che i triangoli di vertici $A \equiv (-1; 3)$, $B \equiv (3; -1)$, $C \equiv (c; c)$, con $c \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ sono tutti isosceli sulla base AB. Spiegare perché ciò accade.

[$\overline{CA} = \overline{CB}$, cioè il punto C appartiene all'asse di AB, qualunque sia $c \in \mathbb{R}$]

Livello 2

18. Con i dati degli esercizi seguenti, determinare tutti i punti C del piano, per i quali il triangolo ABC risulti isoscele di volta in volta sulla base: a) BC; b) AB; c) AC

$A \equiv (1; 2)$, $B \equiv (-3; 4)$, $C \equiv (x; -1)$ $\quad \left[\text{a) } x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{11};\text{ b) } x = -3;\text{ c) } \varnothing\right]$

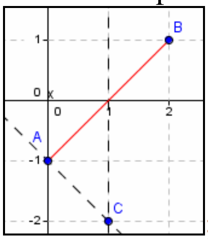
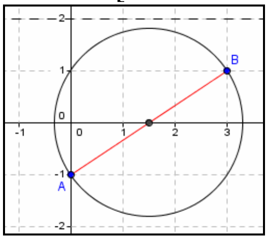
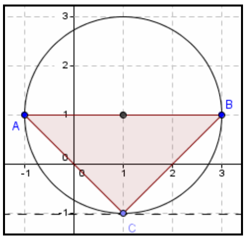
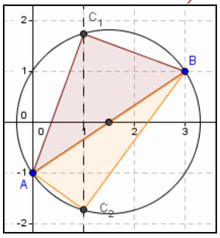
$A \equiv (3; 5)$, $B \equiv (-1; -3)$, $C \equiv (-2; y)$ $\quad \left[\text{a) } y_{1,2} = 5 \pm \sqrt{55};\text{b) } y = \frac{5}{2};\text{c)} y_{1,2} = -3 \pm \sqrt{79}\right]$

$A \equiv \left(\frac{1}{2};1\right), B \equiv \left(-\frac{2}{3};0\right), C \equiv \left(x;-\frac{3}{4}\right)$ $\quad \left[\text{a) } \varnothing;\text{b) } x = \frac{83}{84};\text{c) } x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{259}}{12}\right]$

$A \equiv \left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right), B \equiv \left(\frac{1}{4};-3\right), C \equiv \left(-\frac{3}{2};y\right)$ $\quad \left[\text{a) } y_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{541}}{12};\text{b) } y = -\frac{1237}{768};\text{c) } y_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{146}}{6}\right]$

$A \equiv \left(\sqrt{2};2\right),\quad B \equiv \left(-1;2+\sqrt{2}\right),\quad C \equiv \left(x;1-\sqrt{2}\right)$ $\quad \left[\text{a) } x_1 = 2\sqrt{2} \vee x_2 = 0;\text{b) } x = \frac{1-3\sqrt{2}}{2};\text{c) } \varnothing\right]$

19. Interpretare geometricamente la determinazione del terzo vertice C di un triangolo rettangolo di cui

sono noti due vertici A e B e una coordinata di C in tutti i casi possibili. Quante sono le soluzioni in ognuno dei tre casi? [Una soluzione se AB è cateto ; da zero a due soluzioni se AB è l'ipotenusa,    in questo caso infatti AB è diametro di una circonferenza che contiene il terzo vertice, allora la circonferenza può contenere 0, 1 o 2 punti con la fissata ascissa o ordinata]

Livello 2

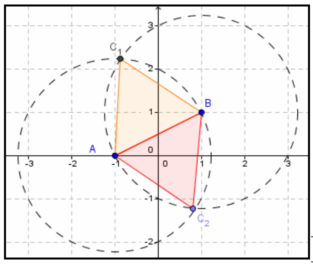
20. Con i dati degli esercizi seguenti, determinare tutti i punti C del piano per i quali il triangolo ABC risulti rettangolo di volta in volta sull'ipotenusa: a) BC; b) AB; c) AC

$A \equiv (1; -1)$, $B \equiv (2; -3)$, $C \equiv (x; 1)$ [a) $C \equiv (5; 1)$, b) $\varnothing$; c) $C \equiv (10; 1)$]

$A\equiv\left(\frac{1}{2};-3\right), B\equiv\left(0;\frac{1}{4}\right), C\equiv\left(-\frac{1}{2};y\right)$ $\left[\text{a) } y=-\frac{41}{13};\text{ b) } y_{1,2}=\frac{-11\pm\sqrt{137}}{8};\text{ c) } y=\frac{9}{52}\right]$

$A\equiv\left(-1;\frac{3}{2}\right), B\equiv\left(\frac{2}{3};\frac{1}{2}\right), C\equiv\left(x;-\frac{2}{3}\right)$ $\left[\text{a) } x=-\frac{23}{10};\text{ b)}\varnothing;\text{ c) } x=-\frac{1}{30}\right]$

$A\equiv\left(\sqrt{2};0\right),\ B\equiv\left(1;1+\sqrt{2}\right),\ C\equiv\left(1-\sqrt{2};y\right)$ $\left[\text{a) } y=11-8\cdot\sqrt{2};\text{ b)}\varnothing;\text{ c) } y=5-2\cdot\sqrt{2}\right]$

21. Trovare il terzo vertice di un triangolo equilatero di cui si conoscono le coordinate di due vertici. Quante soluzioni ha il problema? [Due, si consideri la figura ]

Livello 2

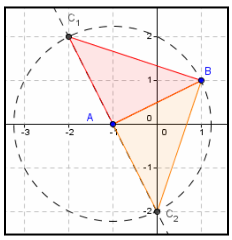
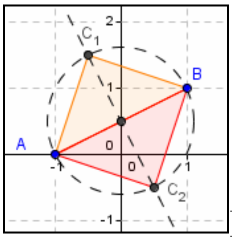
22. Con i dati degli esercizi seguenti, determinare tutti i punti $C \equiv (x; y)$ del piano per i quali il triangolo ABC risulti equilatero

$A \equiv (0; 3)$, $B \equiv (-2; 1)$ $\left[C_1\equiv\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)\vee C_2\equiv\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)\right]$

$A\equiv\left(\frac{1}{2};-1\right), B\equiv\left(0;\frac{2}{3}\right)$ $\left[C_1\equiv\left(\frac{3+10\cdot\sqrt{3}}{12};\frac{-2+3\cdot\sqrt{3}}{12}\right)\vee C_2\equiv\left(\frac{3-10\cdot\sqrt{3}}{12};\frac{-2-3\cdot\sqrt{3}}{12}\right)\right]$

$A\equiv\left(\sqrt{3};0\right),\ B\equiv\left(0;2\cdot\sqrt{3}\right)$ $\left[C_1\equiv\left(\frac{6+\sqrt{3}}{2};\frac{3+2\cdot\sqrt{3}}{2}\right)\vee C_2\equiv\left(\frac{-6+\sqrt{3}}{2};\frac{-3+2\cdot\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

23. Dimostrare che il problema di determinare il terzo vertice di un triangolo rettangolo e isoscele ha sempre un numero finito di soluzioni.

[Ci sono sempre due soluzioni, sia se i vertici sono di uno dei due cateti: ; sia se i vertici sono dell'ipotenusa: 

]

Livello 2

24. Con i dati degli esercizi seguenti, determinare tutti i punti $C \equiv (x; y)$ del piano per i quali il triangolo ABC risulti isoscele e rettangolo di volta in volta sull'ipotenusa: a) BC; b) AB; c) AC

$A \equiv (-2; -1)$, $B \equiv (3; -2)$

[a) $C_1 \equiv (-1; 4) \vee C_2 \equiv (-3; -6)$; b) $C_1 \equiv (1; 1) \vee C_2 \equiv (0; -4)$; c) $C_1 \equiv (2; -7) \vee C_2 \equiv (4; 3)$]

$A \equiv (1; 3)$, $B \equiv (0; -4)$

[a) $C_1 \equiv (-6; 4) \vee C_2 \equiv (8; 2)$; b) $C_1 \equiv (-3; 0) \vee C_2 \equiv (4; -1)$; c) $C_1 \equiv (7; -5) \vee C_2 \equiv (-7; -3)$]

$A \equiv \left(-\frac{2}{3};0\right), B \equiv \left(\frac{1}{2};-1\right)$ $\left[\begin{array}{l} \text{a) } C_1 \equiv \left(\frac{1}{3};\frac{7}{6}\right) \vee C_2 \equiv \left(-\frac{5}{3};-\frac{7}{6}\right)\text{; b)} C_1 \equiv \left(\frac{5}{12};\frac{1}{12}\right) \vee \\ \vee C_2 \equiv \left(-\frac{7}{12};-\frac{13}{12}\right)\text{;c) } C_1 \equiv \left(-\frac{1}{2};-\frac{13}{6}\right) \vee C_2 \equiv \left(\frac{3}{2};\frac{1}{6}\right) \end{array}\right]$

$A \equiv \left(\sqrt{3};1\right),\ B \equiv \left(0;\sqrt{3}\right)$ $\left[\begin{array}{l} \text{a) } C_1 \equiv \left(2\cdot\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right) \vee C_2 \equiv \left(1;1-\sqrt{3}\right)\text{; b) } C_1 \equiv \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) \vee \\ \vee C_2 \equiv \left(\frac{2\cdot\sqrt{3}-1}{3};\frac{1+2\cdot\sqrt{3}}{2}\right)\text{; c) } C_1 \equiv \left(\sqrt{3}-1;2\cdot\sqrt{3}\right) \vee C_2 \equiv \left(1-\sqrt{3};0\right) \end{array}\right]$

25. Un tappo di sughero è vincolato a muoversi su un bacino d'acqua in modo tale che le sue coordinate siano $P \equiv (2x - 1; x + 3)$, determinare la posizione del tappo in modo che risulti equidistante dai punti fissati $A \equiv (1; 2)$ e $B \equiv (3; 5)$. $\left[x = \frac{15}{14}\right]$

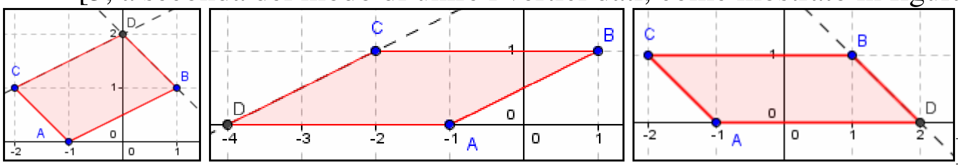
Lavoriamo insieme

Abbiamo già visto che in generale è indeterminato il problema di individuare entrambe le coordinate di un punto soddisfacenti una sola condizione, perché in questo caso le incognite sono due. Abbiamo perciò bisogno di una seconda condizione: così, per esempio, possiamo determinare le coordinate del quarto vertice di un rombo, di cui conosciamo le coordinate di tre vertici consecutivi.

Siano per esempio: $A \equiv (-3; 2)$, $B \equiv (1; 3)$, $C \equiv (2; -1)$. Il problema è risolvibile solo se, come si verifica facilmente, i segmenti AB e BC sono fra loro isometrici. La ricerca del quarto vertice D, dal punto di vista della geometria analitica equivale a risolvere: $\begin{cases} \overline{AD} = \overline{AB} \\ \overline{CD} = \overline{BC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 \\ \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+3)^2 + (y-2)^2 = (1+3)^2 + (3-2)^2 \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 = (2-1)^2 + (-1-3)^2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 16 + 1 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 1 + 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 4y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 2y - 12 = 0 \end{cases}$. Abbiamo così ottenuto un sistema di quarto grado di due equazioni in due incognite, che in generale ha 4 soluzioni. Per risolvere in modo non molto laborioso il precedente sistema possiamo sottrarre termine a termine le due equazioni, eliminando così i termini di secondo grado: $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 4 - (x^2 + y^2 - 4x + 2y - 12) = 0 \Rightarrow 10x - 6y + 8 = 0 \Rightarrow 5x - 3y + 4 = 0$. Mettiamo ora a sistema con una delle due equazioni il risultato così ottenuto: $\begin{cases} 5x - 3y + 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 2y - 12 = 0 \end{cases}$. Risolveremo a questo punto il sistema con il metodo di sostituzione, applicato alla prima equazione: $\begin{cases} x = \dfrac{3y-4}{5} \\ \left(\dfrac{3y-4}{5}\right)^2 + y^2 - 4 \cdot \dfrac{3y-4}{5} + 2y - 12 = 0 \end{cases}$. Risolviamo la seconda equazione: $\dfrac{9y^2-24y+16}{25} + y^2 - \quad -\dfrac{12y-16}{5} + 2y - 12 = 0 \Rightarrow \dfrac{9y^2-24y+16+25y^2-60y+80+50y-300}{25} = 0 \Rightarrow 34y^2 -$ $34y - 204 = 0 \Rightarrow y^2 - y - 6 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2} = \begin{array}{l} \nearrow 3 \\ \searrow -2 \end{array}$. Abbiamo ottenuto due soluzioni per y; ora determiniamo i relativi valori di x: $\begin{cases} x = \dfrac{3 \cdot 3 - 4}{5} \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{3 \cdot (-2) - 4}{5} \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$. Apparentemente abbiamo due possibili vertici, ma è evidente che uno di essi coincide con il punto B, quindi il vertice cercato è $D \equiv (-2; -2)$.

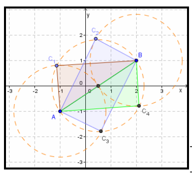
Livello 3

26. Interpretare geometricamente il problema di determinare il quarto vertice di un parallelogramma di cui sono date le coordinate di tre vertici. Quante soluzioni ha il problema?
[3, a seconda del modo di unire i vertici dati, come mostrato in figura 
]

27. Dati i vertici $A \equiv (1; -2)$, $B \equiv (3; -1)$ e $C \equiv (2; 3)$, determinare le coordinate del quarto vertice D, in modo che i quattro punti siano di volta in volta vertici del parallelogramma: a) $ABCD$; b) $ABDC$; c) $ACBD$. (Suggerimento: i lati opposti di un parallelogramma sono fra loro ... Fare attenzione al fatto che algebricamente si ottengono due soluzioni, una sola delle quali geometricamente accettabile.)
[a) $D \equiv (0; 2)$; b) $D \equiv (4; 4)$; c) $D \equiv (2; -6)$]

28. Tenuto conto che i punti dell'asse di un segmento sono equidistanti dagli estremi dello stesso segmento, e che il circocentro è il punto di incontro degli assi dei lati di un triangolo, determinare le coordinate del circocentro dei seguenti triangoli: a) $A \equiv (1; -3)$, $B \equiv (4; 1)$, $C \equiv (0; 3)$; b) $D \equiv (-2; 1)$, $E \equiv (4; -3)$, $F \equiv (1; 0)$; c) $G \equiv \left(\dfrac{1}{3};1\right), H \equiv \left(-\dfrac{2}{3},-2\right), I \equiv \left(\dfrac{1}{4};\dfrac{3}{4}\right)$ c) $J \equiv \left(-\dfrac{3}{2};1\right), K \equiv \left(4,-\dfrac{1}{2}\right), L \equiv \left(0;\dfrac{3}{4}\right)$; d) $M \equiv \left(1;\sqrt{2}+1\right)$, $N \equiv (-1;0)$, $P \equiv \left(\sqrt{2}-3;1\right)$
$\left[\left(\dfrac{23}{22};\dfrac{1}{11}\right);(-3;-7);\varnothing;\left(-\dfrac{223}{56};-\dfrac{1097}{56}\right);\left(\dfrac{7-5\cdot\sqrt{2}}{2};\dfrac{35-23\cdot\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

29. Determinare il terzo vertice del triangolo rettangolo la cui ipotenusa è $\dfrac{4}{3}$ di uno dei cateti ed ha estremi $A \equiv (-1; -2)$ e $B \equiv (4; 1)$. $\left[C_{1,2} \equiv \left(\dfrac{19 \pm 9\cdot\sqrt{7}}{16},-\dfrac{11 \pm 15\cdot\sqrt{7}}{16}\right) \vee C_{3,4} \equiv \left(\dfrac{29 \pm 9\cdot\sqrt{7}}{16},-\dfrac{5 \mp 15\cdot\sqrt{7}}{16}\right)\right]$

30. Risolvere geometricamente il problema di determinare il terzo vertice del triangolo rettangolo la cui ipotenusa è doppia di uno dei cateti e ha estremi noti. Quanti triangoli siffatti esistono?
[Quattro, si consideri la figura: ]

31. Risolvere il precedente esercizio se i vertici dell'ipotenusa sono $A \equiv (4; 2)$ e $B \equiv (-1; 3)$.

$$\left[C_{1,2} \equiv \left(\frac{11 \pm \sqrt{3}}{4}; \frac{9 \pm 5 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) \vee C_{3,4} \equiv \left(\frac{1 \pm \sqrt{3}}{4}, \frac{11 \pm 5 \cdot \sqrt{3}}{4}\right)\right]$$

32. Determinare le coordinate degli altri due vertici dei quadrati di cui forniamo le coordinate di due vertici opposti. (Suggerimento: sfruttare le proprietà della diagonale di un quadrato)

$A \equiv (1; -3)$, $C \equiv (4; 0)$; $E \equiv (3; 4)$, $G \equiv (-5; 1)$ $\left[(4;3),(1;0);\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right),\left(-\frac{5}{2},\frac{13}{2}\right)\right]$

$J \equiv \left(\frac{1}{3};-1\right), K \equiv \left(0;\frac{3}{4}\right)$; $M \equiv (2;-1), P \equiv \left(\frac{3}{5};0\right)$ $\left[\left(\frac{25}{24};\frac{1}{24}\right),\left(-\frac{17}{24};-\frac{7}{24}\right);\left(\frac{9}{5};\frac{1}{5}\right),\left(\frac{4}{5};-\frac{6}{5}\right)\right]$

$R \equiv \left(\frac{2}{5};-1\right), T \equiv \left(3;-\frac{1}{4}\right)$ $\left[\left(\frac{83}{40};-\frac{77}{40}\right),\left(\frac{53}{40};\frac{27}{40}\right)\right]$

33. Dato il punto $P \equiv (1; 2)$, determinare le coordinate di tutti i triangoli equilateri di lato lungo 2 unità, che hanno P come uno dei loro vertici e un lato parallelo all'asse delle ascisse.

$$\left[(3;2),\left(2;2+\sqrt{3}\right),\left(0;2-\sqrt{3}\right),(-1;2),\left(0;2-\sqrt{3}\right),\left(2;2-\sqrt{3}\right)\right]$$

34. Con riferimento al precedente problema, i punti cercati appartengono a una data figura geometrica, quale? [Un esagono regolare di centro *P*]

Suddivisione di un segmento in un dato rapporto

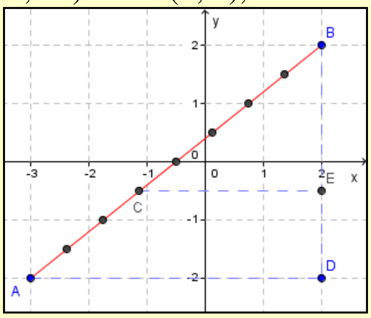
Il problema

Su una strada rettilinea che congiunge due città, vogliamo costruire alcuni distributori di carburante che si trovino in posizioni tali da dividere la strada in un certo numero di parti uguali, nel senso che due distributori consecutivi abbiano la stessa distanza fra loro.

Poiché stiamo studiando geometria con i metodi algebrici, ciò fa sì che le proprietà geometriche continuino a valere, anche se con diversa interpretazione. Per risolvere il problema proposto ci viene in aiuto il Teorema A, richiamato in apertura di Unità, che dobbiamo però interpretare da un punto di vista analitico.
Si tratta cioè, nel piano cartesiano, di cercare le coordinate dei punti che suddividono un dato segmento in parti che stanno tra loro in un rapporto assegnato.

Esempio 18

Dato il segmento di estremi i punti $A \equiv (-3; -2)$ e $B \equiv (2; 2)$, determiniamo le coordinate del punto C che divide AB in modo che si abbia: $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{3}{8}$.



Osserviamo intanto che la precedente uguaglianza equivale alla seguente: $\frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{5}{8}$. Da C tracciamo il segmento CE, parallelo all'asse x, come mostrato in figura. Per la condizione sufficiente del Teorema A richiamato in apertura di Unità possiamo scrivere che $\overline{CE} = \frac{5}{8} \cdot \overline{AD}$. Ciò ci permette di determinare le coordinate del punto $C \equiv (x_C; y_C)$. Si ha: $\overline{CE} = |x_E - x_C| = |2 - x_c|$ e $\overline{AD} = |x_D - x_A| = |2 - (-3)| = 5$. Possiamo così scrivere la seguente equazione: $|2 - x_c| = \frac{5}{8} \cdot 5 \Rightarrow 2 - x_C = \frac{25}{8} \Rightarrow -x_C = \frac{25-16}{8} \Rightarrow x_C = -\frac{9}{8}$. Osserviamo che abbiamo eliminato il valore assoluto in quanto notiamo dal grafico che $x_C < 0$. Possiamo applicare lo stesso procedimento per determinare l'ordinata di C, ottenendo quella di E: $\overline{BE} = |y_E - y_B| = |y_E - 2| = 2 - y_E$ e $\overline{BD} = |y_D - y_B| = |-2 - 2| = 4$ da cui, poiché $y_E = y_C$, $2 - y_C = \frac{5}{\cancel{8}^{2}} \cdot \cancel{4} \Rightarrow 2 - y_C = \frac{5}{2} \Rightarrow -y_C = \frac{5-4}{2} \Rightarrow y_C = -\frac{1}{2}$. Infine $C \equiv \left(-\frac{9}{8}; -\frac{1}{2}\right)$.

Ripetendo il procedimento dell'esempio precedente per generici estremi $A \equiv (x_A; y_A)$, $B \equiv (x_B; y_B)$ e generico rapporto $\frac{m}{n}$, con $m < n$, otteniamo il seguente risultato.

Teorema 8

Il punto C che divide il segmento di estremi $A \equiv (x_A; y_A)$, $B \equiv (x_B; y_B)$, in modo che si abbia $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{m}{n}$ ha coordinate $C \equiv \left(\frac{(n-m) \cdot x_A + m \cdot x_B}{n}; \frac{(n-m) \cdot y_A + m \cdot y_B}{n}\right)$.

Dimostrazione.

Consideriamo il rapporto $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{m}{n}$ e determiniamo le coordinate del punto C:

$$\frac{x_C - x_A}{x_B - x_A} = \frac{m}{n} \Rightarrow x_C = \frac{(n-m)\cdot x_A + m\cdot x_B}{n}$$

Lasciamo determinare y_C per esercizio.

Immediati corollari del precedente teorema sono i seguenti.

Corollario 2

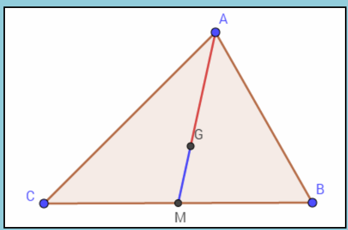
Il punto medio del segmento di estremi $A \equiv (x_A; y_A)$, $B \equiv (x_B; y_B)$ è $M \equiv \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

Dimostrazione. Immediata, basta sostituire nella formula del Teorema 5; $m = 1$ e $n = 2$.

Corollario 3

Il baricentro del triangolo di vertici $A \equiv (x_A; y_A)$, $B \equiv (x_B; y_B)$, $C \equiv (x_C; y_C)$ è $G \equiv \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$.

Dimostrazione.



Determiniamo le coordinate del punto medio M del lato BC: $x_M = \frac{x_B + x_C}{2}$, $y_M = \frac{y_B + y_C}{2}$. Sappiamo (Teorema B richiamato in apertura di Unità) che il baricentro di un triangolo divide ciascuna mediana in due parti in modo che quella che contiene il vertice è doppia dell'altra, quindi per il Teorema 8 con $m = 2$ e $n = 3$ si ha: $\frac{\overline{AG}}{\overline{AM}} = \frac{2}{3}$ e $x_G = \frac{(3-2)\cdot x_A + 2\cdot x_M}{3} = \frac{x_A + 2\cdot x_M}{3} = \quad = \frac{x_A + \cancel{2}\cdot \frac{x_A + x_B}{\cancel{2}}}{3} = \frac{x_A + x_A + x_B}{3}$. Lasciamo determinare y_G per esercizio.

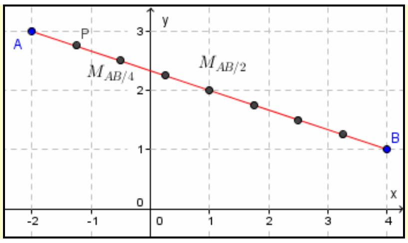
Vediamo un esempio.

Esempio 19

Vogliamo calcolare in due modi diversi le coordinate del punto che divide il segmento di estremi $A \equiv (-2; 3)$ e $B \equiv (4; 1)$, nel rapporto $\frac{1}{8}$, dalla parte di A. Innanzi tutto applichiamo la formula del Teorema 8; con $m = 1$ e $n = 8$. $P_{\frac{AB}{8}} \equiv \left(\frac{(8-1)\cdot(-2)+1\cdot 4}{8}; \frac{(8-1)\cdot 3 + 1\cdot 1}{8}\right) \equiv \left(\frac{-14+4}{8}; \frac{21+1}{8}\right) \equiv \left(-\frac{10}{8}; \frac{22}{8}\right) \equiv \left(-\frac{5}{4}; \frac{11}{4}\right)$.

Ora troviamo le coordinate del punto medio di AB: $M_{\frac{AB}{2}} \equiv \left(\frac{-2+4}{2}; \frac{3+1}{2}\right) \equiv \left(\frac{2}{2}; \frac{4}{2}\right) \equiv (1; 2)$; calcoliamo le coordinate del punto medio fra A e $M_{\frac{AB}{2}}$: $M_{\frac{AB}{4}} \equiv \left(\frac{-2+1}{2}; \frac{3+2}{2}\right) \equiv \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$. Infine le coordinate del punto medio fra A e $M_{\frac{AB}{4}}$: $P_{\frac{AB}{8}} \equiv \left(\frac{-2-\frac{1}{2}}{2}; \frac{3+\frac{5}{2}}{2}\right) \equiv \left(\frac{-\frac{5}{2}}{2}; \frac{\frac{11}{2}}{2}\right) \equiv \left(-\frac{5}{4}; \frac{11}{4}\right)$.

Naturalmente il risultato coincide con quello determinato per altra via. In figura l'esemplificazione.



Ancora un esempio.

Esempio 20

Con riferimento al precedente esempio vogliamo verificare che effettivamente il segmento AP è $\frac{1}{8}$ di AB:

$\overline{AB}=\sqrt{(-2-4)^2+(3-1)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=\sqrt{2^2\cdot 10}=2\cdot\sqrt{10}$; mentre si ha:

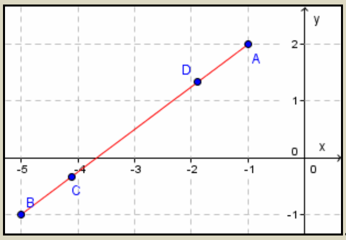
$$\overline{AP_{\frac{AB}{8}}}=\sqrt{\left(-2+\frac{5}{4}\right)^2+\left(3-\frac{11}{4}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{-8+5}{4}\right)^2+\left(\frac{12-11}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{16}+\frac{1}{16}}=\sqrt{\frac{10}{16}}=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{10}=\frac{1}{8}\cdot 2\cdot\sqrt{10}$$

Verifiche

Lavoriamo insieme

Dati $A \equiv (-1; 2)$ e $B \equiv (-5; -1)$, *trovare un punto C, interno ad AB, in modo che sia* $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{7}{9} \vee \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{7}{9}$.

Basta applicare le formule $\left(\frac{(n-m)\cdot x_A + m\cdot x_B}{n};\frac{(n-m)\cdot y_A + m\cdot y_B}{n}\right)$, stabilite nel Teorema 8. Abbiamo già osservato che per qualsiasi rapporto diverso da 1/2, di punti che verificano quanto stabilito ve ne sono due, a seconda da quale parte consideriamo il rapporto. In questo caso avremo perciò: $C \equiv \left(\frac{(9-7)\cdot(-1)+7\cdot(-5)}{9};\frac{(9-7)\cdot 2+7\cdot(-1)}{9}\right) \equiv \left(\frac{-2-35}{9};\frac{4-7}{9}\right) \equiv \left(-\frac{37}{9};-\frac{3}{9}\right) \equiv \left(-\frac{37}{9};-\frac{1}{3}\right)$; e $D \equiv \left(\frac{(9-7)\cdot(-5)+7\cdot(-1)}{9};\frac{(9-7)\cdot(-1)+7\cdot 2}{9}\right) \equiv \left(\frac{-10-7}{9};\frac{-2+14}{9}\right) \equiv \left(-\frac{17}{9};\frac{12}{9}\right) \equiv \left(-\frac{17}{9};\frac{4}{3}\right)$.

Verifichiamo graficamente .

Livello 1

1. Determinare le coordinate dei punti medi dei seguenti segmenti, di cui forniamo le coordinate degli estremi. (1; –3), (4; 5) ; $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3};-5\right),\left(1+\sqrt{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\left[\left(\frac{5}{2};1\right);\left(\frac{\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{2}+1}{2};-\frac{10+\sqrt{3}}{4}\right)\right]$

   $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{4}\right),\left(-\frac{2}{5},\frac{3}{8}\right)$; $\left(\frac{9}{7};\frac{4}{7}\right),\left(-\sqrt{7};\sqrt{5}\right)$ $\left[\left(\frac{2}{15};\frac{5}{16}\right);\left(\frac{9-7\cdot\sqrt{7}}{14};\frac{4+7\cdot\sqrt{5}}{14}\right)\right]$

   $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{1}{4}\right),\left(\frac{1+\sqrt{2}}{3};-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; $\left(2;\frac{1}{3}\right),\left(-2,-\frac{1}{3}\right)$ $\left[\left(\frac{2+5\cdot\sqrt{2}}{12};\frac{3-4\cdot\sqrt{3}}{24}\right)\left(\frac{7}{6};-\frac{7}{6}\right)\right]$

2. Determinare le coordinate dei baricentri dei triangoli di cui forniamo le coordinate dei vertici.

   (–2;4), (3;–1), (2;5) ; $\left(-3;\frac{1}{2}\right),(0;-3),\left(8;\frac{4}{3}\right)$; $\left(2;-\frac{1}{2}\right),\left(3;\frac{4}{5}\right),(1;1)$ $\left[\left(1;\frac{8}{3}\right);\left(\frac{5}{3};-\frac{7}{18}\right);\left(2;\frac{13}{30}\right)\right]$

   $\left(0;-\frac{2}{5}\right),\left(\frac{3}{4};1\right),\left(\frac{4}{3};2\right)$; $\left(\frac{1}{2}-\sqrt{2};1\right),\left(-3-\sqrt{2};4\right),(0;-2)$ $\left[\left(\frac{25}{36};\frac{13}{5}\right);\left(-\frac{5+4\cdot\sqrt{2}}{6};1\right)\right]$

3. Determinare le coordinate dei punti che dividono i seguenti segmenti, di cui forniamo gli estremi, nel relativo rapporto *k*.

   (1; –3), (4; –1), $k=\frac{1}{4}$; $\left(\frac{1}{5};-\frac{2}{7}\right),\left(3;-\frac{1}{7}\right),k=\frac{2}{5}$ $\left[\left(\frac{7}{4};-\frac{5}{2}\right)\vee\left(\frac{13}{4};-\frac{3}{2}\right);\left(\frac{33}{25};-\frac{8}{35}\right)\vee\left(\frac{47}{25};-\frac{1}{5}\right)\right]$

   $\left(-\frac{4}{7};\frac{3}{8}\right),\left(0;-\frac{2}{3}\right),k=\frac{4}{7}$; (2; 3), (–5; –5), $k=\frac{5}{6}$ $\left[\left(-\frac{12}{49};-\frac{37}{168}\right)\vee\left(-\frac{16}{49};-\frac{1}{14}\right);\left(\frac{5}{6};\frac{5}{3}\right)\vee\left(-\frac{23}{6};-\frac{11}{3}\right)\right]$

   $\left(2-\sqrt{7};1\right),\left(-\frac{3}{4};1+\sqrt{5}\right),k=\frac{6}{7}$ $\left[\left(-\frac{5+2\cdot\sqrt{7}}{14};\frac{7+6\cdot\sqrt{5}}{7}\right)\vee\left(-\frac{3\cdot\left(8\cdot\sqrt{7}-15\right)}{28};\frac{7+\sqrt{5}}{7}\right)\right]$

Livello 2

4. Due città occupano le posizioni $A \equiv (-3; 1)$ e $B \equiv (1; 6)$. Lungo la strada rettilinea che le congiunge vogliamo costruire 5 distributori di benzina posti a distanze uguali fra loro e fra le città. Determinare le posizioni dei distributori. $\left[\left(-\frac{7}{3};\frac{11}{6}\right),\left(-\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right),\left(-1;\frac{7}{2}\right),\left(-\frac{1}{3};\frac{13}{3}\right),\left(\frac{1}{3};\frac{31}{6}\right)\right]$

5. Dopo avere determinato i punti medi dei lati dei triangoli dati nell'Esercizio 2; verificare che il perimetro del triangolo che ha tali punti per estremi misura quanto metà del perimetro del triangolo di partenza. Calcolare tali perimetri. $\left[\frac{5\cdot\sqrt{2}+\sqrt{37}+\sqrt{17}}{2};\frac{2\cdot\sqrt{745}+\sqrt{4381}+3\cdot\sqrt{85}}{12};\frac{2\cdot\sqrt{101}+\sqrt{269}+5\cdot\sqrt{13}}{20}\right.$ $\left.\frac{3\cdot\sqrt{1009}+5\cdot\sqrt{193}+16\cdot\sqrt{106}}{120};\frac{\sqrt{45-4\cdot\sqrt{2}}+2\cdot\sqrt{47+6\cdot\sqrt{2}}+\sqrt{85}}{4}\right]$

6. Calcolare la misura delle mediane dei triangoli dati nell'Esercizio 2. Verificare poi che la distanza del baricentro da ciascun vertice è doppia della distanza dal punto medio del lato opposto, ossia verificare il teorema che afferma che il baricentro divide ciascuna mediana nel rapporto 1 : 2. Calcolare la misura delle mediane. $\left[\left(\frac{\sqrt{97}}{2},\frac{\sqrt{157}}{2},\frac{\sqrt{58}}{2}\right);\left(\frac{\sqrt{457}}{3},\frac{\sqrt{3109}}{12},\frac{\sqrt{13957}}{12}\right);\left(\frac{7}{5},\frac{\sqrt{1021}}{20},\frac{\sqrt{1189}}{20}\right)\right.$ $\left.\left(\frac{\sqrt{67609}}{120},\frac{13}{60},\frac{\sqrt{54841}}{120}\right);\left(\frac{4-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{501+52\cdot\sqrt{2}}}{4},\frac{\sqrt{381+40\cdot\sqrt{2}}}{4}\right)\right]$

7. Dopo aver verificato che il triangolo di vertici $(-1; 4)$, $(1; 1)$, $(7; 5)$ è rettangolo, calcolare la misura della mediana relativa all'ipotenusa verificando che misura quanto metà dell'ipotenusa stessa. $\left[\frac{\sqrt{65}}{2}\right]$

8. Dopo aver verificato che il triangolo di vertici $(-1; -1)$, $(-3; -3)$, $(-5; 1)$ è isoscele, calcolare le misure delle mediane relative ai lati obliqui e verificare che sono fra loro isometriche. [3]

Lavoriamo insieme

Il segmento di estremi $A \equiv (-1; 2)$ e $B \equiv (x; y)$, è suddiviso dal punto $C \equiv (-4; 1)$ nel rapporto 8/11. Trovare le coordinate di B.

Applichiamo le ben note formule per la suddivisione di un segmento in un dato rapporto: $\left(\frac{(11-8)\cdot(-1)+8\cdot x}{11};\frac{(11-8)\cdot 2+8\cdot y}{11}\right)\equiv\left(\frac{-3+8\cdot x}{11};\frac{6+8\cdot y}{11}\right)$, o $\left(\frac{(11-8)\cdot x+8\cdot(-1)}{11};\frac{(11-8)\cdot y+8\cdot 2}{11}\right)$ $\equiv\left(\frac{-3x-8}{11};\frac{3y+16}{11}\right)$. Queste devono però essere le coordinate di C; abbiamo perciò da risolvere delle semplici equazioni: $\begin{cases}\frac{-3+8x}{11}=-4\\ \frac{6+8y}{11}=1\end{cases}\vee\begin{cases}\frac{-3x-8}{11}=-4\\ \frac{3y+16}{11}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{41}{8}\\ y=\frac{5}{8}\end{cases}\vee\begin{cases}x=2\\ y=-\frac{5}{3}\end{cases}$.

Livello 2

9. Completare la dimostrazione del Teorema 8.
10. Dimostrare il Corollario 3.
11. Determinare le coordinate del secondo estremo dei segmenti di cui sono date le coordinate dell'altro estremo e del punto medio.
(1; 2), (–2; 3) ; $\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{5}\right),\left(-\frac{1}{6};-\frac{1}{70}\right)$; $\left(\sqrt{5};-4\right),\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$; (2; –7), (5; –3) ; $\left(\frac{2}{5};\frac{5}{2}\right),\left(\frac{1}{20};\frac{31}{12}\right)$
$\left[(-5;4);\left(0;-\frac{3}{7}\right);\left(1-\sqrt{5};3\right);(8;1);\left(-\frac{3}{8};\frac{8}{3}\right)\right]$

12. Determinare le coordinate del secondo estremo dei segmenti di cui sono date le coordinate dell'altro estremo, nonché le coordinate del punto che lo divide in un certo rapporto e il detto rapporto. La suddivisione è sempre dalla parte dell'estremo dato.

$(2; -5), \left(\frac{12}{7}; -\frac{13}{7}\right), \frac{2}{7}$; $(-5; 5), \left(\frac{2}{5}; -\frac{2}{5}\right), \frac{3}{5}$; $(1; 6), \left(\frac{5}{14}; -\frac{1}{15}\right), \frac{5}{6}$

$\left(\frac{1}{3}; \frac{3}{4}\right), \left(-\frac{5}{7}; \frac{155}{252}\right), \frac{2}{9}$; $\left(1-\sqrt{5}; \frac{3}{5}\right), \left(\frac{5\cdot\sqrt{5}+3}{3}; \frac{1}{15}\right), \frac{8}{9}$ $\left[(1;6);(4;-4);\left(\frac{3}{7};0\right);\left(-2;\frac{1}{7}\right);\left(1+2\cdot\sqrt{5};0\right)\right]$

13. Determinare le coordinate del terzo vertice di un triangolo di cui sono date le coordinate degli altri due vertici e del baricentro.

$(1; -2), (3; 0), \left(0; -\frac{1}{3}\right)$; $\left(-2; \frac{1}{4}\right), \left(11; -\frac{3}{8}\right), \left(3; -\frac{1}{24}\right)$; $\left(-\frac{3}{5}; \frac{5}{3}\right), (6;1), \left(\frac{22}{15}; -\frac{7}{9}\right)$;

$\left(\frac{2}{7}; \frac{7}{2}\right), (1;-2); \left(\frac{113}{84}; \frac{1}{6}\right)$; $\left(\sqrt{3}; -1\right), \left(2\cdot\sqrt{3}; 1\right), \left(\frac{1+2\cdot\sqrt{3}}{3}; 0\right)$; $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right), \left(\frac{2}{3}; -1\right), \left(-\frac{25}{6}; \frac{3}{4}\right)$

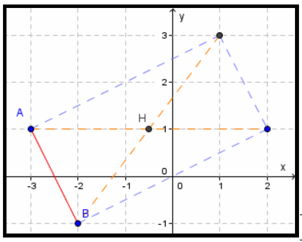
$\left[(-4;1);(0;0);(-1;-5);\left(\frac{11}{4};-1\right);\left(1-\sqrt{3};0\right);(-1;0)\right]$

14. Di un parallelogramma conosciamo le coordinate di due suoi vertici opposti, *A* e *B* e del punto d'incontro delle diagonali *H*. È possibile determinare le coordinate degli altri due vertici del parallelogramma? In caso di risposta affermativa, quante soluzioni ha il problema?
[Il problema è indeterminato o impossibile, a seconda che *H* sia punto medio di *AB* o no]

15. Determinare il quarto vertice di un parallelogramma di cui sono date le coordinate degli altri tre, senza usare la formula per la distanza di due punti. Si tenga conto del fatto che il punto medio di una diagonale è anche punto medio dell'altra

16. Risolvere il problema precedente con i seguenti dati: (–3; 0), (4; 1), (2; 3).[(– 1; – 2) ∨ (–5; 2) ∨ (9; 4)]

17. Di un parallelogramma conosciamo le coordinate di due suoi vertici consecutivi, *A* e *B* e del punto d'incontro delle diagonali *H*. È possibile determinare le coordinate degli altri due vertici del parallelogramma? In caso di risposta affermativa, quante soluzioni ha il problema? (Suggerimento: sfruttare le proprietà del punto medio.) [C'è una soluzione: essa si ottiene tenendo conto



del fatto che il punto d'incontro delle diagonali è il punto medio di entrambe]

18. Risolvere il precedente problema per $A \equiv (-2; 3)$, $B \equiv (4; -1)$, $H \equiv (0; 3)$. [$C \equiv (2; 3)$, $D \equiv (-4; 7)$]

19. Dato il quadrilatero di vertici i punti (–3; 2), (1; 3), (4; 2), (–1; –2), verificare il teorema: *il quadrilatero che ha per estremi i punti medi dei lati di un quadrilatero convesso è un parallelogramma.* [I lati del parallelogramma misurano $\frac{7}{2}, \frac{\sqrt{29}}{2}$]

20. Dato il triangolo equilatero di vertici (–2; –1), (1; 3), $\left(\frac{4\cdot\sqrt{3}-1}{2}; \frac{2-3\cdot\sqrt{3}}{2}\right)$, verificare il teorema: *la somma delle distanze del baricentro dai lati è uguale alla misura di una mediana*. Si ricordi che in un triangolo equilatero le altezze sono mediane, quindi la distanza del baricentro dai lati coincide con la sua distanza dai punti medi. [Misura comune $\frac{5}{2}\cdot\sqrt{3}$]

21. Con i dati dell'esercizio precedente verificare il teorema: *la somma dei quadrati delle distanze del baricentro dai vertici è uguale al quadrato del lato*. [Misura comune 25]

22. Il fatto che entrambe le coordinate di due punti *A* e *B* siano pari è condizione necessaria o sufficiente ad assicurare che le coordinate del punto medio del segmento *AB* siano anch'esse pari? E che siano

intere? [La prima condizione non è né necessaria né sufficiente. La seconda condizione è sufficiente.]

23. Determinare una formula per calcolare la misura della mediana che congiunge il vertice (x_A; y_A) con il punto medio del lato di vertici (x_B; y_B), (x_C; y_C).

$$\left[\frac{\sqrt{4\cdot x_A^2-4\cdot x_A\cdot\left(x_B+x_C\right)+x_B^2+2\cdot x_B\cdot x_C+x_C^2+\left(2\cdot y_A-y_B-y_C\right)^2}}{2}\right]$$

24. Enunciare una condizione sufficiente ad assicurare che le coordinate del baricentro di un triangolo siano entrambe intere; siano entrambe pari.
[Tutte le coordinate dei vertici siano multiple di 3. Tutte le coordinate dei vertici siano multiple di 6]

Con dati a piacere verificare la validità dei seguenti teoremi

Livello 3

25. *In ogni triangolo ciascuna mediana relativa a un lato è minore della semisomma degli altri due lati.*
26. *In ogni triangolo la somma delle mediane è minore del perimetro.*
27. *In ogni triangolo non equilatero ABC, di lato maggiore BC, scelto un qualsiasi punto P a esso interno, si ha:* $\overline{AP}+\overline{PB}<\overline{AC}+\overline{BC}$.
28. *In ogni triangolo, scelto un qualsiasi punto P a esso interno, la somma delle sue distanze dai vertici è sempre minore del perimetro.*
29. *In ogni triangolo di lati che misurano a, b e c, la misura di una mediana qualsiasi è data dalla seguente formula, che scriviamo solo per la mediana relativa al lato di misura a,* $\dfrac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}$.

Aree di figure poligonali

Il problema

In un terreno abbiamo piantato tre paletti e li abbiamo utilizzati per recintarlo. Conoscendo la posizione dei paletti sul terreno vogliamo determinare il valore dell'area racchiusa dalla recinzione.

Per risolvere il problema dobbiamo trovare un metodo per calcolare l'area di un triangolo mediante le coordinate dei suoi vertici. Se il triangolo fosse rettangolo basterebbe moltiplicare fra loro le misure dei cateti, dividendo per 2 il prodotto risultante.

Esempio 21

Dopo aver verificato che il triangolo di vertici i punti $A \equiv (-1; 2)$, $B \equiv (2; -1)$ e $C \equiv (1; 4)$, è rettangolo, vogliamo calcolare la sua area. Si ha: $\overline{AB}=\sqrt{(2+1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{9+9}=3\cdot\sqrt{2}$, $\overline{AC}=\sqrt{(1+1)^2+(4-2)^2}=$ $=\sqrt{4+4}=\sqrt{4}=2\cdot\sqrt{2}, \overline{BC}=\sqrt{(1-2)^2+(4+1)^2}=\sqrt{1+25}=\sqrt{26}$. Effettivamente il triangolo è rettangolo, infatti: 18 + 8 = 26. La sua area è quindi: $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\cdot 2=6$.

Riusciamo a calcolare in modo semplice anche l'area di triangoli isosceli.

Esempio 22

Dopo aver verificato che il triangolo di vertici i punti $A \equiv (-1; 2)$, $B \equiv (4; -1)$ e $C \equiv (1; 4)$ è isoscele, vogliamo calcolarne l'area. Visto che rispetto all'esempio precedente abbiamo variato solo le coordinate del punto B, calcoliamo solo le misure dei lati che hanno B come estremo:

$$\overline{AB}=\sqrt{(4+1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34},\ \ \overline{BC}=\sqrt{(1-4)^2+(4+1)^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$$

Effettivamente il triangolo è isoscele. Poiché nei triangoli isosceli l'altezza relativa alla base è anche mediana, possiamo calcolare facilmente tale segmento. Cominciamo con il trovare le coordinate del punto medio di AC: $M_{AC}\equiv\left(\frac{-1+1}{2};\frac{2+4}{2}\right)\equiv(0;3)$. Calcoliamo ora la misura della mediana–altezza: $\overline{BM_{AC}}=\sqrt{(4-0)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{16+16}=4\cdot\sqrt{2}$. Calcoliamo infine l'area del triangolo:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BM_{AC}}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cdot 4\cdot\sqrt{2}=4\cdot 2=8.$$

Per triangoli non rettangoli né isosceli, potremmo usare il teorema di Erone (Teorema C richiamato in apertura di Unità), che è però di laboriosa applicazione.

Esempio 23

Vogliamo calcolare l'area del triangolo di vertici i punti $A \equiv (-1; 2)$, $B \equiv (-2; -1)$ e $C \equiv (2; 4)$. Determiniamo le misure dei lati: $\overline{AB}=\sqrt{(-2+1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$, $\overline{AC}=\sqrt{(2+1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$, $\overline{BC}=\sqrt{(2+2)^2+(4+1)^2}=\sqrt{16+25}=\sqrt{41}$. Questo ci conferma che il triangolo non è isoscele né rettangolo (10 + 13 < 29); non possiamo quindi applicare nessuna regola che semplifichi i calcoli. Applichiamo allora il teorema di Erone, tenendo conto che il semiperimetro è: $p=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{13}+\sqrt{41}}{2}$. Abbiamo:

$$S_{ABC}=\sqrt{\frac{\sqrt{10}+\sqrt{13}+\sqrt{41}}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}+\sqrt{13}+\sqrt{41}-2\cdot\sqrt{10}}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}+\sqrt{13}+\sqrt{41}-2\cdot\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}+\sqrt{13}+\sqrt{41}-2\cdot\sqrt{41}}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{10}+\sqrt{13}+\sqrt{41}}{2}\cdot\frac{\sqrt{13}+\sqrt{41}-\sqrt{10}}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{10}+\sqrt{41}-\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}+\sqrt{13}-\sqrt{41}}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{13}+\sqrt{41}\right)^2-\left(\sqrt{10}\right)^2}{4}\cdot\frac{\left(\sqrt{10}\right)^2-\left(\sqrt{41}-\sqrt{13}\right)^2}{4}}=\sqrt{\frac{13+41+2\cdot\sqrt{533}-10}{4}\cdot\frac{10-\left(41+13-2\cdot\sqrt{533}\right)}{4}}=$$

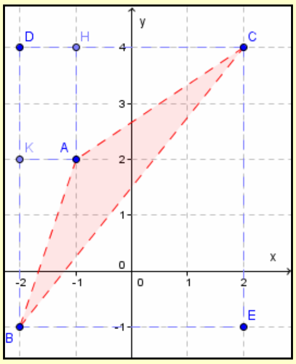
$$=\sqrt{\frac{44+2\cdot\sqrt{533}}{4}\cdot\frac{2\cdot\sqrt{533}-44}{4}}=\sqrt{\frac{\left(2\cdot\sqrt{533}\right)^2-44^2}{16}}=\sqrt{\frac{196}{16}}=\sqrt{\frac{49}{4}}=\frac{7}{2}$$

Come si vede, abbiamo fatto delle vere e proprie *acrobazie di calcolo*.

Vogliamo risolvere il precedente esercizio in modo più semplice.

Esempio 24

Consideriamo il *riquadro* in figura, in cui abbiamo racchiuso ABC in un rettangolo. L'area di ABC si ottiene sottraendo all'area del rettangolo $BECD$, quella dei triangoli ACH, AKB e BEC e quella del rettangolo $AHDK$. I triangoli sono rettangoli, quindi le loro aree si calcolano facilmente.



Quindi: $S_{ABC}=\overline{BE}\cdot\overline{EC}-\frac{1}{2}\cdot\overline{CH}\cdot\overline{AH}-\overline{AH}\cdot\overline{DH}-\frac{1}{2}\cdot\overline{BK}\cdot\overline{AK}-\frac{1}{2}\cdot\overline{BE}\cdot\overline{CE}=$

$$4\cdot5-\frac{1}{\cancel{2}}\cdot3\cdot\cancel{2}-2\cdot1-\frac{1}{2}\cdot3\cdot1-\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{4}^2\cdot5=\ 5-\frac{3}{2}=\frac{7}{2}=3{,}5\,.$$

Ovviamente il risultato coincide con quello determinato nell'esempio precedente.

Utilizzando la procedura appena illustrata possiamo dimostrare il seguente teorema.

Teorema 9 (di Lagrange)

L'area di un triangolo di vertici i punti $A\equiv(x_A;\,y_A)$, $B\equiv(x_B;\,y_B)$, $C\equiv(x_C;\,y_C)$, si ottiene con la seguente formula: $S=\frac{1}{2}\cdot\left|\left(\begin{vmatrix}x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}\right)\right|$.

Dimostrazione. Basta applicare il procedimento dell'esempio 24 a un triangolo di coordinate generiche. Osserviamo che il valore assoluto del determinante assicura la positività dell'area.

Esempio 25

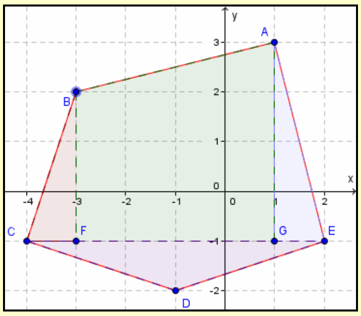
Calcoliamo ancora una volta l'area del triangolo ABC, utilizzando ora la formula di Lagrange:

$$\frac{1}{2}\cdot\left|\left(\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\ -2 & -1 & 1\\ 2 & 4 & 1\end{vmatrix}\right)\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|1+4-8-\left(-2-4-4\right)\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|-3+10\right|=\frac{7}{2}\,.$$

Consideriamo adesso il calcolo di aree poligonali non triangolari.

Esempio 26

Vogliamo calcolare l'area del pentagono in figura, in cui $A \equiv (1; 3)$, $B \equiv (-3; 2)$, $C \equiv (-4; -1)$, $D \equiv (-1; -2)$, $E \equiv (2; -1)$, che abbiamo opportunamente suddiviso in poligoni dei quali sappiamo calcolare facilmente l'area. La suddivisione presentata in figura non è certo l'unica. Questa evita l'uso della formula di Lagrange. Qualunque sia il metodo utilizzato, in questo riferimento il valore dell'area sarà sempre 20,5; come potrai verificare da solo.



Un teorema simile a quello di Erone è valido per i cosiddetti *quadrilateri ciclici*, ossia i quadrilateri inscrivibili in una circonferenza. Esso va sotto il nome di Brahmagupta ed è il Teorema D richiamato in apertura di Unità.

Esempio 27

Verifichiamo la validità del teorema di Brahmagupta per un rettangolo i cui lati sono paralleli agli assi coordinati. I vertici siano $A \equiv (2; 2)$, $B \equiv (2; 5)$, $C \equiv (-3; 5)$, $D \equiv (-3; 2)$. L'area è $(5 - 2) \cdot (2 + 3) = 15$. Applichiamo adesso la formula: $\overline{AB} = \overline{CD} = 3$, $\overline{BC} = \overline{AD} = 5$, $p = \frac{6+10}{2} = 8$. $\sqrt{(8-3)\cdot(8-5)\cdot(8-3)\cdot(8-5)} = \sqrt{5\cdot 3\cdot 5\cdot 3} = 15$. Proveremo ora che la stessa formula non è valida per un rombo non quadrato, che non è ciclico. I vertici siano $A \equiv (3; 1)$, $B \equiv (1; 4)$, $C \equiv (-1; 1)$, $D \equiv (1; -2)$. Le diagonali misurano $\overline{CA} = 4$, $\overline{DB} = 6$, rispettivamente e l'area è $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12$. La formula calcola invece il seguente valore errato: $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \Rightarrow p = 2\cdot\sqrt{13}$; $S_{ABCD} = \sqrt{\left(2\cdot\sqrt{13} - \sqrt{13}\right)^4} = 13^2 = 169$.

I Protagonisti

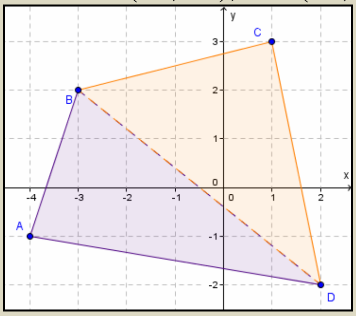
Brahmagupta fu un matematico indiano nato nel 598 e morto nel 670, scrisse importanti lavori sia in campo matematico sia in campo astronomico. Nelle matematiche si interessò soprattutto di questioni relative ai quadrilateri, e mostrò vivo interesse per le sorti dello zero che allora non era considerato un vero e proprio numero. Egli ne sottolineò l' importanza nelle leggi aritmetiche, anche se poi stabilì regole errate, come quella secondo la quale *zero diviso per zero è zero*. Inventò inoltre un interessante metodo per il calcolo approssimato di radici quadrate. In campo astronomico riuscì a stabilire per l'anno solare, un valore di 365 giorni 6 ore, 12 minuti e 36 secondi.

Erone nacque ad Alessandria, in Egitto, e visse tra il primo e il secondo secolo d.C., si occupò di questioni geometriche relativamente alla misura di superfici. Ricordiamo in particolare il suo trattato *Metrica*, in cui si trattano formule per il calcolo di aree e di volumi. Scrisse anche altri trattati riguardanti questioni fisiche, come per esempio *Dioptra* che affrontava temi astronomici e geografici; *Catoptrica* in cui prendeva in considerazione lo studio della luce e degli specchi; *Pneumatica* in cui descriveva centinaia di macchine per la risoluzione di problemi pratici, come per esempio una macchina in qualche modo assimilabile alle moderne distributrici automatiche a gettoni.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Determinare l'area del quadrilatero di vertici $A \equiv (-4; -1)$, $B \equiv (-3; 2)$, $C \equiv (1; 3)$, $D \equiv (2; -2)$.



Possiamo utilizzare diversi metodi, uno dei quali consiste nel suddividere il quadrilatero con una diagonale, in figura *BD,* calcolare le aree dei due triangoli *ABD* e *BCD*, e poi sommarle. Abbiamo così: $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}\cdot abs\begin{vmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\cdot abs\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1/2 \cdot |-8 -2+6-(3+8+4)| + 1/2 \cdot |-9+4-2-(2+6+6)| = 20.$

Livello 1

1. Determinare l'area dei seguenti triangoli di cui sono date le coordinate dei vertici.
   $(1; -2), (3; 4), (-3; 5)$; $\left(-\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right),(0;-7),\left(\frac{1}{4};1\right)$; $\left(\frac{2}{5};0\right),\left(-3;\frac{1}{3}\right),\left(-\frac{5}{4};1\right)$ $\left[19;\frac{71}{24};\frac{57}{40}\right]$
   $\left(\frac{1}{4};1\right),\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{3}{4};-\frac{3}{2}\right)$; $\left(2\cdot\sqrt{2};-1\right),\left(\frac{1}{2};1-\sqrt{2}\right),(0;5)$ $\left[\frac{37}{16};\frac{1+8\cdot\sqrt{2}}{2}\right]$
2. Dopo aver verificato che applicando la formula di Lagrange al triangolo di vertici $\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{8}\right),\left(0;\frac{1}{2}\right)$, $(1; 2)$, si ottiene zero, spiegarne le ragioni geometriche. [I punti sono allineati]
3. Determinare l'area dei seguenti poligoni di cui sono date le seguenti coordinate dei vertici.
   $(-2; -1), (-3; 4), (-6; 2), (-4; 1)$; $(1; 2), (-6; 1), (-5; -1), (-2; -2), (2; -1)$ [7,5; 21,5]
   $(-2; -3), (2; -2), (3; 1), (-4; 3), (-5; 2), (0; 0)$ [19]

Livello 2

4. Determinare per quali valori del parametro reale *m*, l'area del triangolo di vertici i punti dati ha il valore *S* indicato
   $(1; -2), (5; 1), (m; 3), S = 2$; $(-3; m), (4; 2), (-1; 0), S = 4$ $\left[\left(m=9\vee m=\frac{19}{3}\right);\left(m=\frac{4}{5}\vee m=-\frac{12}{5}\right)\right]$
   $(2 + m; 3), (-1; 5 - 2m), (1; 4), S = 3$ $\left[m=-\frac{1\pm\sqrt{41}}{4}\right]$
   $\left(\frac{1}{2}m-1;3m+1\right)$, $(1; 0)$, $\left(-\frac{1}{2}m;1\right)$, $S = 8$ $\left[m=-\frac{4\pm\sqrt{118}}{3}\right]$
   $\left(\frac{1}{2}m;-3\right)$, $\left(\frac{1}{4};\frac{2}{3}m\right)$, $(m-1; 1-m)$, $S = 5$ $\left[m=\frac{37\pm\sqrt{1945}}{4}\vee m=\frac{21}{2}\vee m=8\right]$

Livello 3

5. Considerando il trapezio isoscele di vertici $(-6; 2), (-3; 5), (2; 2), (-3; -3)$, inscrivibile in una circonferenza di raggio $\sqrt{17}$, verificare il teorema: *in ogni quadrilatero inscrivibile in una*

circonferenza di raggio R, i cui lati misurano a, b, c e d, l'area è: $\frac{\sqrt{(ac+bd)\cdot(ad+bc)\cdot(ab+cd)}}{4R}$.

6. Con i dati dell'esercizio precedente, verificare il teorema *di Tolomeo* per cui: *in ogni quadrilatero inscrivibile in una circonferenza, la somma dei prodotti dei lati opposti è uguale al prodotto delle diagonali.*
7. Su dati a piacere riferiti a un quadrato, verificare che in ogni quadrilatero, inscrivibile e anche circoscrivibile a una circonferenza, i cui lati misurano *a*, *b*, *c* e *d*, l'area si ottiene con la formula $\sqrt{abcd}$.
8. Provare che l'area di un triangolo i cui vertici hanno entrambe le coordinate intere è misurata da un numero razionale.
9. Dimostrare il teorema 9 nel caso particolare del triangolo.
10. Mediante il teorema 9 verificare i risultati dell'Esercizio 3.

L'angolo di Geogebra e Cabri

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%202/2-2/2-2-1.exe si avvia un'applicazione che mostra come usare il sistema cartesiano dei punti in Geogebra. Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%202/2-2/2-2-1.zip si scarica il relativo file Geogebra.

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%202/2-2/2-2-2.exe si avvia un'applicazione che mostra come usare il sistema cartesiano dei punti in Cabri, mentre su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%202/2-2/2-2-2.zip si scarica il relativo file Cabri.

Attività Usare Cabri o Geogebra per risolvere o interpretare gli Esercizi precedenti.

L'angolo di Derive

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%202/2-2-3.exe si avvia un'applicazione che mostra come usare il sistema cartesiano dei punti in Derive, mentre su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%202/2-2-3.exe si scarica il relativo file Derive.

Attività Usare Derive per risolvere o interpretare gli Esercizi precedenti.

L'angolo di Microsoft Mathematics

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%202/2-2/2-2-4.exe si avvia un'applicazione che mostra come usare il sistema cartesiano dei punti in Microsoft Mathematics , e su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%202/2-2/2-2-4.zip si scarica il relativo file Microsoft Mathematics.

Attività Usare Microsoft Mathematics per risolvere o interpretare gli Esercizi precedenti.

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi

1. Dati i punti $A \equiv (-4)$, $B \equiv (-1)$ e $C \equiv (c)$, determinare i valori del parametro reale *m* per i quali è vera la seguente relazione: $\overline{AC}/\overline{BC} = m$. [$m > 1$]
2. Dati i punti $A \equiv (-4)$, $B \equiv (-1)$ e $C \equiv (c)$, con $c \in \mathbb{N}$, per quali valori di *c*, $\overline{AC}/\overline{BC}$ è un numero intero minore o uguale a 7? Per quali valori di *c*, è un numero intero maggiore di 10? [$c \in \{1; 2; 3; 4\}; \varnothing$]
3. Su un supporto rettilineo sono poste due sorgenti luminose, una di intensità *x* posta in *A* e l'altra di intensità *y* in *B*. In ottica si dimostra che i punti interni al segmento *AB* ugualmente illuminati dalle due

sorgenti sono i punti P soddisfacenti la relazione: $\frac{\overline{PA}^2}{\overline{PB}^2}=\frac{y}{x}$. Se $A \equiv (a)$ e $B \equiv (b)$, con $b > a$, determinare le coordinate di P.

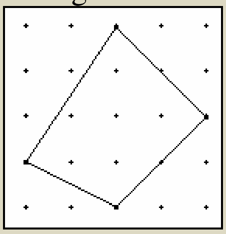
[Se $x = y$, P è il punto medio di AB, diversamente $P \equiv \left(\frac{ax-by\pm(b-a)\cdot\sqrt{xy}}{x-y}\right)$]

4. Dati tre corpi di massa $m_1; m_2; m_3;$ disposti su un segmento, il loro baricentro è il punto in cui si immagina concentrato un corpo di massa $m_1 + m_2 + m_3;$ in modo che si trovi a distanze inversamente proporzionali dalle rispettive masse. Se i tre corpi sono disposti rispettivamente in $A_1 \equiv (a_1)$, $A_2 \equiv (a_2)$ e $A_3 \equiv (a_3)$, determinare la posizione del baricentro. $\left[G \equiv \left(\frac{m_1\cdot a_1+m_2\cdot a_2+m_3\cdot a_3}{m_1+m_2+m_3}\right)\right]$
5. Indicando con (ABC) il rapporto semplice di 3 punti, provare che se $(ABC)\cdot(ABD) = 1$ allora AB e CD hanno lo stesso punto medio.
6. Qual è la massima area di un quadrato che contenga nel suo contorno al più 5 punti reticolo? [Non esiste un valore massimo vi è solo un limite superiore, l'area di quadrati del genere è minore di 4]
7. Il punto P è un punto reticolo, perché vi siano altri punti reticolo che distino $\sqrt{n}$ unità da P, con $n\in\mathbb{N}$, che proprietà deve verificare n? [$n = a^2 + b^2$, $a, b\in\mathbb{Z}$]
8. Dato il triangolo di vertici i punti $A \equiv (-4; 3)$, $B \equiv (-2; 2)$, $C \equiv (-1; -2)$, verificare il teorema: *il triangolo che ha per vertici i baricentri dei triangoli equilateri costruiti esternamente ai lati di un triangolo è equilatero*. Determinare i vertici del triangolo equilatero.
$$\left[\left(-\frac{5}{6}\cdot\left(3+\sqrt{3}\right);\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(\frac{\sqrt{3}-18}{6};\frac{15+2\cdot\sqrt{3}}{6}\right),\ \left(\frac{4\cdot\sqrt{3}-9}{6};\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\right]$$
9. Dato il parallelogramma di vertici i punti $A \equiv (-4; -1)$, $B \equiv (-3; 1)$, $C \equiv (-1; 3)$, $D \equiv (-2; 1)$, verificare il teorema: *costruiti sui lati adiacenti AB e BC di un parallelogramma ABCD i triangoli equilateri ABX e BCY, il triangolo XYD è equilatero.*
$$\left[X_1 \equiv \left(-\frac{7}{2}-\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{2}\right), Y_1 \equiv \left(-2-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right); X_2 \equiv \left(-\frac{7}{2}+\sqrt{3};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), Y_2 \equiv \left(-2+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)\right]$$
10. Dati tre corpi di massa $m_1; m_2; m_3;$ disposte ai vertici di un triangolo, il baricentro del sistema è il punto ove si immagina posto un corpo di massa $m_1 + m_2 + m_3;$ in modo che si trovi a distanze inversamente proporzionali dalle masse iniziali. Se le tre masse sono disposte rispettivamente nei punti $A_1 \equiv (x_1; y_1)$, $A_2 \equiv (x_2; y_2)$, $A_3 \equiv (x_3; y_3)$, determinare le coordinate del baricentro.
$$\left[G \equiv \left(\frac{m_1\cdot x_1+m_2\cdot x_2+m_3\cdot x_3}{m_1+m_2+m_3};\frac{m_1\cdot y_1+m_2\cdot y_2+m_3\cdot y_3}{m_1+m_2+m_3}\right)\right]$$
11. Verificare la validità del seguente Teorema di Pick: L'area di ogni poligono semplice (privo cioè di intersezioni fra i suoi lati), i cui vertici sono punti reticolo, è $\left(\frac{1}{2}c+i-1\right)$, in cui c è il numero dei punti reticolo sul contorno del poligono, i quello dei punti reticolo interni. Applicarla al poligono di vertici (1; 3), (–2; 1), (–1; –1), (1; 2), (3; 1). [6]
12. Per quali valori di n, numero naturale, i punti contenuti dentro il cerchio di centro l'origine e raggio n sono solo 4 in meno di quelli contenuti dentro il cerchio e sulla circonferenza? [Se n è ipotenusa di una terna pitagorica, per esempio 5, 13, 17 ...]

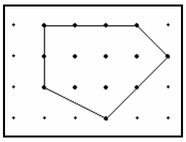
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali.

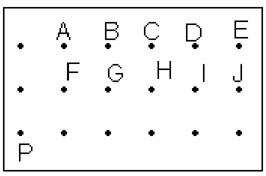
Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
HSMC = A&M University High School Mathematics Contest
MT = Mathematics Teacher, rivista della NCTM
OMI = Olimpiadi della Matematica
RICE = Rice University Mathematics Tournament

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato agli HSMC del 2000. *Trovare l'area del poligono in figura, se l'unità di misura della griglia è* 1 *cm.* 

Usando il metodo della reticolazione, l'area cercata è $4 \times 4 - (1 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 3) \cdot \frac{1}{2} = 16 - 8 = 8$.

1. (AHSME 1987) Consideriamo il triangolo OAB, con $O \equiv (0; 0)$, $A \equiv (36; 15)$, $B \equiv (a, b)$, con $a, b \in \mathbb{Z}$. Qual è il minimo valore che può assumere l'area di OAB? $\left[\frac{3}{2}\right]$
2. (AHSME 1995) Due vertici non adiacenti di un rettangolo hanno coordinate (4; 3) e (−4;−3). Se le coordinate degli altri due vertici sono entrambe intere, quanti sono tali rettangoli? [5]
3. (AHSME 1995) Determinare l'area del più grande quadrato contenente esattamente 3 punti reticolo nel suo interno. [≈ 5]
4. (OMI1997) In un piano cartesiano sono dati i punti seguenti: $A = (0; 15)$; $B = (20; 0)$; $C = (0; 0)$. Qual è la larghezza minima di una striscia rettilinea che contiene tutti e tre i punti? (Chiamiamo striscia rettilinea la porzione di piano compresa tra due rette parallele, comprese le due rette) [12]
5. (OMI1998) Sia D il dominio del piano cartesiano dei punti $(x; y)$ tali che $x - [x] \le y - [y]$. Con $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$, ricordiamo che [a] indica la parte intera di a ossia il più grande intero minore o uguale ad a. Quanto misura l'area di D? [3]
6. (HSMC2002) Un *geoboard* è una tavola simile a un piano cartesiano, su cui sono piantati dei chiodi a distanze uguali, in modo da formare ascisse e ordinate. Tendiamo un elastico come in figura, in modo da formare un poligono.  Per aree di tali poligoni vale la formula di Pick: $A = a \cdot I + b \cdot C + c$, con a, b e c valori costanti, I il numero di *chiodi* dentro la figura e C sul contorno. Determinare $a \cdot b \cdot c$. $\left[-\frac{1}{2}\right]$
7. (OMI2003) Tre circonferenze passano per l'origine. Il cento della prima circonferenza sta nel primo quadrante, il centro della seconda sta nel secondo quadrante, il centro della terza sta nel terzo quadrante. Se P è un punto interno alle tre circonferenze, allora P
A) sta nel II quadrante B) sta nel I o III quadrante C) sta nel IV quadrante D) non esiste E) non si può dire nulla [A]
8. (HSMC2003) Ogni punto della griglia sottostante dista un'unità dai punti più vicini in orizzontale e in verticale. Quale punto è esattamente a $\sqrt{10}$ unità da P? [H]

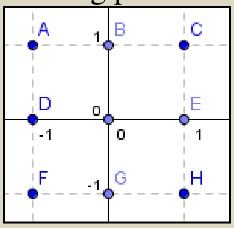


9. (Rice 2007) Quanto vale l'area del più piccolo triangolo con tutti i lati misurati da numeri razionali e tutti i vertici punti reticolo? [6]

Questions in English

Working together

This is a question assigned at HSMC, in 2006. *Let S be the set of points (a; b) in the coordinate plane, where each of a and b may be* -1 , 0 *or* 1 . *How many distinct lines pass through at least two members of S*?
There are nine such points, as we see in the following picture.



There are 3 horizontal lines; 3 vertical lines; 3 lines making a 45° angle with the x–axis and there are 3 lines making a 135° angle with the x–axis. Additional lines: through (−1;−1), (0; 1); (0;−1), (1; 1); (−1; 1), (1; 0); (0; 1), (1;−1); (−1; 0), (1; 1); (−1; 0), (1;−1); (−1; 1), (0;−1); (−1;−1), (1; 0).
Hence we have a total of 20 lines.

10. (HSMC2000) A particle starts at the point (2; −1) and moves 3 units in the direction of the point (2; 3). Afterwards, it is rotated 30° counter–clockwise about the point (−1; −2) : What is the final position of the particle? $\left[\left(\frac{3\cdot\sqrt{3}-6}{2};\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)\right]$

11. (HSMC–EF2000) Four points $P_1 \equiv (x_1; y_1)$, $P_2 \equiv (x_2; y_2)$, $P_3 \equiv (x_3; y_3)$, $P_4 \equiv (x_4; y_4)$, are placed in the plane so that the quadrilateral $P_1P_2P_3P_4$ is convex. Denote the triangles $T_1 = P_2P_3P_4$, $T_2 = P_1P_3P_4$, $T_3 = P_1P_2P_4$, $T_4 = P_1P_2P_3$. Let $Q_1Q_2Q_3Q_4$, denote the centroids[2] of triangles T_1, T_2, T_3, T_4 respectively and form the lines that pass through the points P_iQ_i for i = 1, 2, 3, 4. These lines intersect in a common point. Find this common point of intersection. $\left[\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4};\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)\right]$

12. (HSMC2003) A parallelogram has vertices at (0; 0) ; (2; 5) ; (m; n) and (10;0), where m and n are both positive numbers. How many units are in the length of the longest diagonal of the parallelogram? [13]

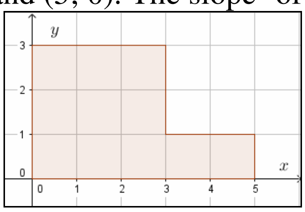
13. (HSMC2004) How many square units are in the area of the quadrilateral with vertices (0; 0), (3; 0), (2; 2) and (0; 3)? [6]

14. (HSMC2004) Starting at home, a man travelled 9 miles east, then 7 miles north, then 3 miles east, then x miles south. At that point, he was 13 miles from home. Find all possible values for x. [2 or 12]

15. (HSMC2006) The two points A(2; 0) and B(3; 5) are given. Find all values of c such that a third point C(0; c) makes ABC a right triangle with the right angle at C. [2 or 3]

16. (HSMC2008) The distance between the points (x; x^2) and ($2x$; $4x^2$) is $\sqrt{38}$. Find all possible values of x. $\left[x = \pm\sqrt{2}\right]$

17. (MT1997) In the xy-plane, consider the L-shaped region bounded by horizontal and vertical segments with vertices at (0; 0), (0; 3), (3; 3), (3; 1), (5, 2; 1) and (5; 0). The slope[3] of the line through the origin that divides the area of this region exactly in half is?



[7/9]

[2] Baricentri
[3] Pendenza

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia militare) In un sistema cartesiano, i punti $A \equiv (2; 5)$ e $B \equiv (-2;-5)$ sono:
   A) asimmetrici B) simmetrici rispetto all'asse y
   C) simmetrici rispetto all'asse delle x D) simmetrici rispetto all'origine
2. (Accademia militare) Dato nel piano cartesiano il triangolo ABC, i cui vertici hanno rispettivamente le coordinate: $A \equiv (6; 2)$, $B \equiv (4; 5)$, $C \equiv (3; 3)$ le coordinate dei vertici del triangolo A' $B'C'$ ad esso simmetrico rispetto all'asse y sono:
   A) $A' \equiv (-6; 2)$, $B' \equiv (-4; 5)$, $C' \equiv (-3; 3)$ B) $A' \equiv (-6; -2)$, $B' \equiv (-4; -5)$, $C' \equiv (-3; -3)$
   C) $A' \equiv (3; 3)$, $B' \equiv (5; 4)$, $C' \equiv (6; 2)$ D) $A' \equiv (6; -2)$, $B' \equiv (4; -5)$, $C' \equiv (3;-3)$
3. (Architettura 2002) Quanto misura l'area del triangolo che ha vertici in $A(-1; 1)$, $B\ (3; 2)$, $C\ (1; -2)$?
   A) 7,5 B) 7 C) 8 D) 6,5 E) Nessuno degli altri valori.
4. (Architettura 2002) Si consideri il segmento che congiunge fra di loro i punti di coordinate (0; 12) e (6; 0) del piano cartesiano. Quanto vale la distanza di questo segmento dall'origine del piano?
   $$A.\frac{12\cdot\sqrt{5}}{5}\quad B.\frac{13\cdot\sqrt{5}}{5}\quad C.\frac{8\cdot\sqrt{5}}{5}\quad D.\frac{11\cdot\sqrt{5}}{5}\quad E.\frac{9\cdot\sqrt{5}}{5}$$
5. (Veterinaria 2004) Il punto $T \equiv (-k; k^2 + 1)$
   A) appartiene al semipiano positivo delle y per ogni valore di k B) appartiene al semipiano positivo delle y solo se $k > 0$ C) appartiene al secondo quadrante per ogni valore di k D) appartiene all'asse delle ascisse per $k = 0$ E) appartiene al semipiano negativo delle x per ogni valore di k
6. (Ingegneria Università di Napoli, 2009) Dati i punti $A \equiv (2; 5)$, $B \equiv (4; 4)$, $C \equiv (7; 0)$, $D \equiv (1; 6)$, quale rappresenta il punto più lontano dall'origine?

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_3_2.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	2	3	4	5	6
D	A	B	A	A	C

3. Rette e trasformazioni geometriche

3.1. Curve di primo grado

Prerequisiti

- Il piano cartesiano.
- Concetto di funzione.
- Concetto di luogo geometrico.
- Concetto di equazione e sua risoluzione.
- Criteri di similitudine dei triangoli.
- Equazioni parametriche e loro risoluzione.
- Concetto di disequazione e sua risoluzione.

Obiettivi

- Comprendere il concetto di luogo di punti del piano cartesiano.
- Comprendere il concetto di appartenenza di un punto a una curva del piano cartesiano.
- Saper determinare l'equazione di una retta.
- Risolvere semplici problemi sulle rette.
- Comprendere il concetto di fascio di curve.
- Comprendere il concetto di punti base di un fascio di curve.
- Risolvere semplici problemi sui fasci di rette.

Contenuti

- Concetto di luogo geometrico
- Equazione della retta
- Posizioni reciproche di due rette
- Fasci di rette

Quelli che … vogliono sapere di più

- Cenni sulla programmazione lineare
- Piani e rette nello spazio

Parole Chiave

Coefficiente angolare – Ordinata all'origine – Punto base

Simbologia

m Indica il coefficiente angolare di una retta non parallela all'asse delle ordinate

Richiamiamo le conoscenze

Concetto di funzione

Definizione A

Una legge di natura qualsiasi che associa a ogni elemento di un insieme A un elemento di un insieme B si chiama **funzione** da A in B, la indichiamo con il simbolo $f : A \to B$ e leggiamo *f definita in A e a valori in B*.

Notazione A

Se gli elementi a e b si corrispondono mediante una funzione f scriviamo $b = f(a)$.
Se la legge può essere espressa in una forma algebrica generica scriveremo $f(x) =$, e faremo seguire una o più espressioni algebriche contenenti come incognita solo x.

Esempio A

- $f(x) = \dfrac{x}{2}$ è la funzione che a ogni numero reale associa la propria metà;
- $f(x) = \begin{cases} x+1 & se & x<1 \\ x & se & 1 \le x < 5 \\ x-1 & se & x \ge 5 \end{cases}$, è la funzione che associa: a ogni numero reale minore di 1 il numero che si ottiene aggiungendo 1; ai numeri compresi tra 1 e 5, il numero 1 incluso, lo stesso numero; agli altri numeri, il numero che si ottiene togliendo 1.

In generale elementi distinti possono avere anche lo stesso corrispondente.

Esempio B

- La funzione f: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, di legge $f(x) = x^2$, che a ogni numero reale x associa il proprio quadrato, ai distinti numeri reali 3 e –3, associa lo stesso numero reale 9.
- Invece la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita dalla legge $f(x) = x + 1$, che a ogni numero reale associa il proprio successivo, ovviamente a elementi distinti associa elementi distinti.

Definizione B

Una funzione che a elementi distinti associa elementi distinti è detta **iniettiva**.

Le funzioni iniettive sono invertibili, nel senso che possiamo *scambiare* l'associazione.

Esempio C

Nella legge $f(x) = x + 1$, partendo dal numero 5 possiamo arrivare al suo associato, il numero 5 + 1= 6. Ma possiamo anche effettuare il percorso all'inverso, partendo da 6 e arrivando a 5. La funzione $f(x)$ è iniettiva.

Definizione C

Data una funzione iniettiva f: $A \to B$, diciamo sua **funzione inversa** la funzione f^{-1}: $B \to A$, che verifica la seguente proprietà $f(x) = y \Rightarrow f^{-1}(y) = x$, $\forall x \in A$, $y \in B$.

Definizione D

L'insieme $\{y \in B: \exists x \in A: f(x) = y\}$, si chiama **Immagine o codominio della funzione *f*** e si indica con il simbolo ***Im*(*f*)**. Se $Im(f) = B$, diciamo che f è **su tutto *B*** o che è **suriettiva**.

Esempio D

La funzione $f(x) = x + 1$, definita sull'insieme {1, 2, 3, 4} è su tutto l'insieme {2, 3, 4, 5}; non è invece su tutto l'insieme {1, 2, 3, 4, 5}, perché l'equazione $f(x) = 1$ non ha alcuna soluzione $x \in \{1, 2, 3, 4\}$.

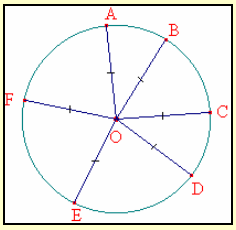
Definizione E

Una funzione contemporaneamente iniettiva e suriettiva si dice una **corrispondenza biunivoca**.

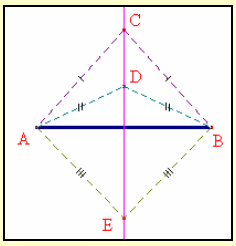
L'insieme dei punti del piano o dello spazio, che verificano una data proprietà costituisce quello che comunemente si chiama *luogo geometrico*. Diamo alcuni esempi di luoghi geometrici.

Esempio E

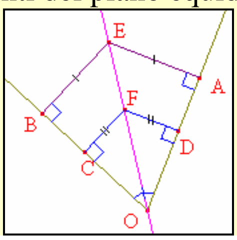
- La circonferenza è il luogo dei punti del piano la cui distanza da un punto fisso è costante.



- L'asse di un segmento è il luogo dei punti del piano equidistanti dagli estremi del segmento: è la retta perpendicolare al segmento nel suo punto medio.



- La bisettrice di un angolo è il luogo dei punti del piano equidistanti dai lati dell'angolo.



Concetto di luogo geometrico–analitico

Quando due quantità incognite si presentano in un'equazione, abbiamo un luogo in cui l'estremità di una delle quantità incognite descrive una retta o una curva.
Pierre de Fermat, Ad locos planos et solidos. Isagoge (1636-7)

Il problema

Un razzo lanciato dalla Terra per raggiungere la Luna descrive quella che si chiama una traiettoria, così come un'automobile su una strada, o una persona che cammina. Vi è però una differenza notevole fra questi tre esempi di traiettorie: nel primo caso la traiettoria è predefinita e il razzo deve attenersi scrupolosamente a essa se non vuole correre il rischio di perdersi nello spazio infinito; nel caso dell'auto la traiettoria è in qualche modo vincolata dalle strade tracciate e dai sensi di marcia, anche se l'autista, illegalmente, potrebbe decidere di prendere un senso vietato o di passare sui marciapiedi; infine nell'ultimo caso i vincoli sono molto meno rigidi, basta fare attenzione agli ostacoli (muri, buche, ...) e agli altri mezzi in movimento. In ogni caso se rappresentiamo su un supporto piano le diverse traiettorie effettivamente percorse abbiamo una linea più o meno regolare. Ci chiediamo se riusciamo sempre ad associare a tale linea uno strumento matematico (espressione, equazione, …).

Il problema proposto è in effetti di uso molto comune, vengono anzi costruiti appositi strumenti che hanno proprio la funzione di rappresentare graficamente le traiettorie di oggetti meccanici in movimento; un esempio, anche se molto semplificato, è costituito dal radar. Tale rappresentazione viene usata anche in fisica, per esempio per descrivere movimenti di tipo ondulatorio (onde radio, emissione di fasci luminosi, ...). La cosa più importante consiste nel cercare di determinare una legge, di tipo analitico, a cui ubbidiscono tutti i punti della traiettoria: in questo modo potranno essere effettuati procedimenti di previsione. Se per esempio sapessimo che un razzo segue una traiettoria regolata da una data legge matematica, saremmo anche in grado di stabilire quanto tempo impiegherà a raggiungere un certo punto dello spazio o che posizione dello spazio occuperà in un certo istante.
Anche in economia si è alla ricerca di una legge matematica che sia in grado di descrivere l'andamento di un titolo azionario, in modo da poter stabilire quando sia conveniente acquistare e quando vendere. Tale legge però potrebbe essere efficace solo per un ristrettissimo numero di persone; se infatti ne fossimo tutti a conoscenza, essa si *autodistruggerebbe*, dato che il prezzo di un titolo è determinato proprio dall'incrocio fra domanda e offerta, e soprattutto perché se la legge dovesse affermare che un certo giorno si deve acquistare tutti vorrebbero acquistare ma nessuno venderebbe. In ogni caso l'immagine che segue, relativa all'andamento del Mibtel di un giorno a caso, ci permette di dire che è del tutto impossibile la determinazione di una

legge del genere.
Ci rendiamo conto che il problema proposto è di difficile soluzione anche in altri ambiti; è infatti impossibile determinare l'esatta traiettoria tracciata da una persona che esca di casa anche solo per recarsi dal fornaio che si trova a cento metri. Le variabili che entrano in gioco sono moltissime: la persona può fermarsi a parlare con un conoscente, può farsi male a un piede e rallentare il passo, può decidere di variare il percorso perché in quello che fa di solito vi sono ostacoli imprevisti, o perché da quella parte del marciapiede vi è il sole o l'ombra, e così via. Ma anche la traiettoria di un razzo è soggetta a fattori imprevedibili, come ad esempio una pioggia di meteoriti o un guasto ai motori. Ciò significa che i nostri studi riguarderanno solo casi teorici molto semplificati. Visto che studiamo traiettorie di tipo piano, le variabili in gioco sono solo due: l'ascissa e l'ordinata dei singoli punti.

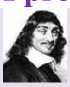
Definizione 1

Data un'equazione in due variabili, $f(x, y) = 0$, diciamo che la totalità delle sue eventuali soluzioni rappresenta un **luogo geometrico analitico piano** o una **curva piana**. In quest'ultimo caso diciamo che la curva piana ha per equazione $f(x, y) = 0$.

L'angolo storico

Storicamente il problema relativo alla rappresentazione algebrica di una traiettoria nasce, come purtroppo molto spesso accade, per risolvere questioni belliche. Con la diffusione della polvere da sparo (sec. XIV) cominciano a essere costruite armi che sfruttano questo terribile strumento; unitamente ai fucili vengono inventati i cannoni e si rende necessario determinare la *gittata* del proiettile (cioè il massimo punto raggiungibile) e la sua *traiettoria*. Risulta determinante in questi studi l'apporto di valenti matematici.
Niccolò Tartaglia (1500 – 1557) nel 1537 scrive *Nova Scientia*, un testo che può considerarsi il primo trattato sulla balistica, ossia quella parte della fisica che studia il movimento dei. Naturalmente l'approccio di Tartaglia è di tipo sintetico, dato che all'epoca la geometria analitica non era stata ancora inventata. Successivamente Galileo Galilei (1564 – 1642), nel suo processo di fondazione di quella che è la scienza moderna, si interessa in generale del moto dei corpi in caduta libera, stabilendo che la loro traiettoria è di tipo parabolico. A partire dal secolo XVIII, quando comincerà ad affermarsi la geometria analitica, molti problemi che avevano interessato, ma anche messo in seria difficoltà i matematici di ogni epoca, verranno ricondotti a luoghi geometrico–analitici, quindi a equazioni di cui si studieranno le rispettive rappresentazioni grafiche.
Anche se si parla di geometria cartesiana, i matematici che possono considerarsi i *fondatori* di questa nuova disciplina sono due: ovviamente Cartesio e Fermat. Entrambi francesi e tra loro contemporanei, essi mettono su carta idee che risalgono almeno ad Archimede (III sec. A.C.) e che solo per mancanza degli adeguati strumenti algebrici (ottenuti intorno al 1500), non erano state concretizzate. Il fatto che si parli di geometria cartesiana e non di geometria fermatiana, dipende dallo scarso interesse di Fermat nel pubblicare i propri lavori: il primo trattato dato alle stampe fu infatti *La geometrie* di Cartesio (1637), mentre *Introduzione ai luoghi*, l'opera che Fermat aveva realizzato prima di quella di Cartesio, venne pubblicata solo nel 1679.
C'è inoltre da precisare che la geometria di Cartesio non è esattamente come la noi la intendiamo ora: nella sua opera si trattano questioni geometriche risolte con l'algebra, ma anche questioni algebriche risolte con la geometria. Vi sono anche diversi esempi di equazioni di secondo grado risolte con costruzioni geometriche.
Cartesio comunque traccia la strada per una piena affermazione della geometria analitica, che si concretizzerà soprattutto nel XIX secolo. Egli per primo classifica i problemi geometrici relativi alla ricerca di particolari luoghi, associandoli ai gradi delle equazioni che li rappresentano.

I protagonisti


René Descartes (in italiano Cartesio) nacque a La Haye (chiamata ora Descartes in onore del suo più famoso cittadino) il 31 Marzo 1596. Fu educato dai gesuiti nel famoso collegio di La Flèche, frequentato in quei tempi da molti altri studenti destinati a divenire illustri scienziati ed uomini di lettere. In collegio si accorse di preferire la matematica a tutte le altre discipline, ma nonostante ciò nel 1616 si laureò in legge a Poitiers, prima di arruolarsi nell'esercito del principe d'Orange, con cui per nove anni girò l'Europa, partecipando alle tante guerre del periodo e alternando soggiorni a Parigi. Dopo aver lasciato la carriera militare si trasferì in Olanda, dove conobbe molti grandi scienziati come Huyghens e Frans van Schooten il vecchio. Qui cominciò a scrivere la sua opera forse più famosa, un trattato filosofico, il *Discorso del metodo* (pubblicato a Leda nel 1637). In una delle tre appendici che accompagnavano il testo, *La geometria*, espose le sue idee relativamente a quella che oggi viene chiamata geometria analitica. Negli anni successivi divenne famoso a tal punto da essere chiamato nel 1649 a fare da tutore alla regina Cristina di Svezia. La regina aveva abitudini molto spartane, come alzarsi di buon mattino e farsi tenere lezione in stanze del tutto prive di riscaldamento. Fu proprio a causa del freddo patito durante queste lezioni che Cartesio morì di polmonite l'11 febbraio 1650, a Stoccolma.


Pierre de Fermat nacque il 17 Agosto 1601 a Beaumont–de–Llamagne, figlio di un mercante di pelli il cui cognome era semplicemente Fermat. Frequentò prima l'università di Tolosa e poi quella di Bordeaux

dove cominciò a fare ricerca in matematica senza però conseguire alcuna laurea. Laureato in legge, cominciò a esercitare la professione di avvocato. Per tale motivo cambiò il proprio cognome aggiungendovi la particella onorifica *de*. Pur svolgendo per tutta la sua vita l'attività di giurista, si occupò con passione di matematica, tanto da essere chiamato dallo storico Eric Temple Belle il *principe dei dilettanti*. Durante la vita non pubblicò mai nulla, ma propose e risolse importantissimi problemi, diffusi proprio mediante le sue corrispondenze. È noto soprattutto per un famoso teorema, che risulta una generalizzazione di quello di Pitagora, "se n è un numero naturale maggiore di 2, non esistono valori interi e maggiori di 1, x, y, z, tali che sia $x^n + y^n = z^n$". Per più di tre secoli le migliori menti non riuscirono a provare il teorema se non per casi particolari, ossia per particolari valori dell'esponente. Fu solo nel 1994 che l'inglese Andrew Wiles riuscì a dimostrarlo. Fermat è noto anche per molti altri risultati matematici. Morì a Castres il 12 Gennaio 1665.

Esempio 1

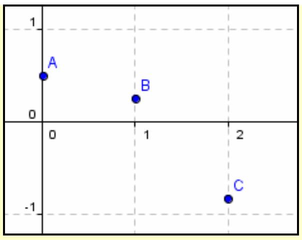
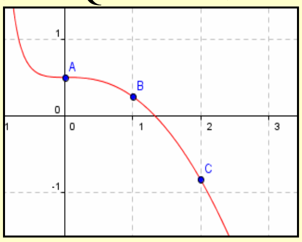
La circonferenza è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso. Ciò significa che, per esempio, se volessimo determinare il luogo geometrico–analitico della circonferenza di centro il punto $C \equiv (1; -2)$ e raggio lungo 3 unità, basterebbe *tradurre* nel linguaggio analitico quanto detto a parole. Dobbiamo insomma individuare *tutti* i punti $P \equiv (x; y)$ che verificano l'uguaglianza $\overline{PC} = 3$. Applicando la formula per il calcolo della distanza di due punti, la precedente diviene: $\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = 3$. Possiamo allora dire che questa è l'equazione della circonferenza di centro C e raggio 3.

Nell'esempio non ci siamo preoccupati di semplificare l'equazione ottenuta, dato che per il momento il nostro interesse consiste solo nel comprendere come si fa a tradurre un luogo geometrico in equazione.
Naturalmente il problema deve essere in qualche modo *invertibile*, cioè se abbiamo un'equazione $f(x, y) = 0$, ad essa dobbiamo essere in grado di associare una curva piana.
Ci rendiamo conto che quest'ultimo problema è certamente più complesso, come del resto succede sempre quando passiamo da un problema diretto al proprio inverso.

Esempio 2

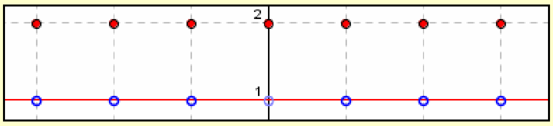
Consideriamo l'equazione $x^3 + 2xy - x + 2y - 1 = 0$. Vogliamo stabilire che tipo di curva possiamo associare ad essa. In pratica cerchiamo le soluzioni dell'equazione, che però è indeterminata avendo essa due incognite. Possiamo allora tentare un diverso approccio, cercando di ricondurre l'equazione a una sola variabile, considerandola cioè come un'equazione parametrica. Per esempio la esprimiamo come equazione di primo grado nell'incognita y: $2y \cdot (x+1) = x - x^3 + 1 \Rightarrow y = \dfrac{x - x^3 + 1}{2 \cdot (x+1)}$. Questo ci permette solo di determinare alcuni punti, assegnando valori a piacere a x. Nella tabella seguente abbiamo alcuni valori.

x	$y = \dfrac{x - x^3 + 1}{2 \cdot (x+1)}$
–1	$y = \dfrac{-1-(-1)^3+1}{2 \cdot ((-1)+1)} = \dfrac{-1+1+1}{2 \cdot 0} = ?$
0	$y = \dfrac{1}{2 \cdot 1} = \dfrac{1}{2}$
1	$y = \dfrac{1-1^3+1}{2 \cdot (1+1)} = \dfrac{1}{4}$
2	$y = \dfrac{2-2^3+1}{2 \cdot (2+1)} = -\dfrac{5}{6}$

Abbiamo assegnato valori interi alla x, solo per non complicare eccessivamente i calcoli. Notiamo intanto che in corrispondenza di $x = -1$, non abbiamo trovato alcun valore avendo annullato il denominatore: –1 non fa parte cioè dell'insieme di esistenza (dominio) della curva. Ora possiamo rappresentare i punti, ma ciò non ci fornisce alcuna informazione sull'andamento generale della curva.  Quel che possiamo fare è aumentare il numero di punti calcolati, facendoci aiutare per esempio da un software come Geogebra, che grazie alla formidabile velocità di calcolo riesce a dare un'idea migliore sull'andamento della curva, almeno limitatamente a un certo intervallo. Questa curva è solo una rappresentazione parziale della nostra funzione. 

L'esempio ci ha mostrato la difficoltà nel risolvere il problema proposto. Vogliamo fornire un esempio ulteriore che ci mostra situazioni ancora più complesse da interpretare.

Esempio 3

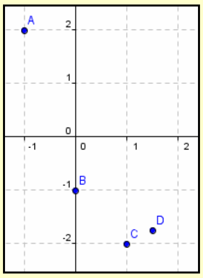
- Lejeune Dirichlet (1805 – 1859) è il matematico che ha fornito la definizione di funzione come *legge di natura qualsiasi* che tuttora utilizziamo. Egli stesso fornì un esempio, divenuto ormai classico, di una funzione ben definita ma non *rappresentabile* graficamente. Essa ha la seguente definizione: $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$. A ogni numero razionale, cioè, si associa 1, a ogni numero irrazionale 0. La definizione è coerente e completa, tant'è che di ogni numero reale siamo in grado di trovare il corrispondente. Così per esempio: $f\left(\frac{1}{2}\right)=f(-1)=f(5)=1$ e $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f(\pi)=f\left(1-\sqrt{3}\right)=0$ .Purtroppo non siamo in grado di rappresentare la funzione, dato che i numeri razionali come gli irrazionali sono insiemi un po' *speciali* da questo punto di vista, nel senso che, a differenza di insiemi come i numeri naturali, per essi non ha senso il concetto di precedente e successivo, in particolare comunque scegliamo due numeri razionali fra di loro vi sono infiniti numeri razionali; lo stesso accade fra due numeri irrazionali.
- Se avessimo modificato la definizione precedente nel modo seguente $f(x)=\begin{cases}2 & x\in\mathbb{Z}\\ 1 & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}\end{cases}$, ciò non sarebbe successo e la rappresentazione sarebbe stata la seguente. 
- Un'ultima cosa che notiamo è il fatto che **non** ogni equazione in due variabili rappresenta una curva: l'equazione $x^4 + y^2 = -5$, per esempio, non ha punti reali che la rappresentino, poiché la somma fra due potenze pari di numeri reali non è mai un numero negativo.

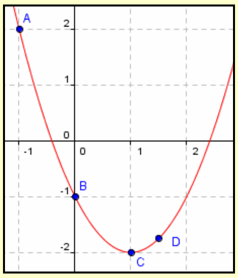
Gli esempi precedenti ci fanno di dire che *condizione necessaria e sufficiente* affinché un punto $P \equiv (x; y)$ appartenga a una curva piana di equazione $f(x, y) = 0$ è che P verifichi la data equazione.
In effetti vi sono vari altri modi per *rappresentare* analiticamente una curva, per esempio fornendo due distinte leggi, una per l'ascissa e l'altra per l'ordinata del generico punto.

Esempio 4

Consideriamo le seguenti leggi: $\begin{cases}x(t)=t+1\\ y(t)=t^2-2\end{cases}$. Esse consentono di determinare una curva assegnando al parametro reale t tutti i valori reali per cui le espressioni hanno significato; in questo caso non vi sono valori da escludere e possiamo rappresentare alcuni dei punti di questa curva, come visto prima con l'espressione analitica.

t	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$
$x(t)=t+1$	$-2+1=-1$	$-1+1=0$	$0+1=1$	$\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$
$y(t)=t^2-2$	$(-2)^2-2=4-2=2$	$(-1)^2-2=1-2=-1$	$0^2-2=-2$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2-2=\frac{1}{4}-2=-\frac{7}{4}$

Dobbiamo allora rappresentare i punti (–1; 2), (0; –1), (1; –2), $\left(\frac{3}{2};-\frac{7}{4}\right)$. Come al solito questi 4 punti da soli non ci forniscono ulteriori informazioni; 

aumentiamo allora il numero dei punti rappresentati, ottenendo una curva più dettagliata. 

In base a quanto visto nell'esempio precedente poniamo una definizione.

Definizione 2

Le leggi $\begin{cases} x(t)=f(t) \\ y(t)=g(t) \end{cases}$, in cui f e g sono due funzioni reali in una variabile reale t e t è un numero reale, si chiamano **equazioni parametriche di una curva piana**.

L'Antologia

Pierre de Fermat, *Ad locos planos et solidos: Isagoge*[1], 1679

> *Nessuno può dubitare che gli antichi scrivevano sui luoghi geometrici. Lo sappiamo da Pappo, afferma che Apollonio ha scritto sui luoghi piani e Aristeo sui luoghi solidi. Ciononostante la trattazione dei luoghi non è stata per loro un argomento semplice. Possiamo dedurlo dal fatto che, benché avessero trattato un gran numero di luoghi, essi non sono riusciti a formulare generalizzazioni, come vedremo in seguito. Noi perciò sottomettiamo questa teoria a un'analisi dettagliata che permette lo studio generale di un luogo. Quando due incognite sono presenti in un'equazione abbiamo un luogo, in modo che l'estremità di una delle incognite descriverà una retta o una curva. La retta è semplice e unica; la classe delle curve è invece infinita, cerchi, parabole, iperboli, ellissi, ecc.*

Prima di discutere il passo vediamo di chiarire chi sono le persone cui si riferisce Fermat.
Pappo è un matematico vissuto verso la fine del secondo secolo d.C. e la prima metà del terzo, autore di u-

[1] Con il termine *Isagoge* si intendeva un trattato introduttivo

n'opera, *Collezione*, che riporta molte interessanti notizie sui matematici del passato, soprattutto relativamente a opere a noi mai pervenute. Apollonio fu un grande geometra greco vissuto fra il 262 e il 190 a. C., autore di un'importante trattato sulle *Coniche*. Aristeo, uno studioso greco vissuto intorno al 300 a. C., del quale si conosce ben poco e le cui opere non sono pervenute fino ai giorni nostri. Notiamo che Fermat considera, nel piano analitico, le soluzioni dell'equazione $f(x, y) = 0$, come i punti di una data curva. Inoltre, dicendo che *una delle incognite descriverà una retta o una curva*, sta sottintendendo il concetto di variabile dipendente e variabile indipendente. Distingue poi le rette dalle altre curve, anche se fra queste ultime assegna un particolare posto alle coniche. Nel seguito stabilisce la differenza fra i luoghi piani e quelli solidi.

> *Quando l'estremità dell'incognita che traccia il luogo, segue una retta o un cerchio, il luogo si dice piano; quando l'estremità descrive una parabola, un'iperbole o un'ellisse, il luogo è detto solido.*

In pratica la differenza è legata semplicemente al fatto che i luoghi possano tracciarsi con riga e compasso (i luoghi piani) o con altri strumenti non consentiti dalla geometria classica (i luoghi solidi).
Nel passo che segue comincia a dare l'idea del sistema di riferimento ortogonale come siamo abituati a pensarlo ai giorni nostri.

> *É preferibile, per aiutare il concetto di equazione, fare in modo che le due incognite formino un angolo, che di solito supponiamo retto, con la posizione e il punto estremo di una delle incognite stabilita. Se nessuna delle due incognite è maggiore di una quadratica* [ha cioè grado non superiore a 2] *il luogo sarà piano o solido.*

In pratica Fermat suggerisce che gli assi coordinati siano fra loro perpendicolari, perché ciò *aiuta il concetto di equazione*, cioè rende più semplice l'equazione.

Cartesio, La Géométrie, 1637.
Già dalla lettura dell'indice dell'opera, suddivisa in tre libri, si può notare come in essa si parli ben poco della geometria analitica come noi la intendiamo. Infatti il primo libro tratta *dei problemi che si possono costruire con il solo uso di cerchi e rette*, cioè con riga e compasso. In pratica si affrontano con tecniche geometriche questioni algebriche, come la risoluzione di equazioni. Ciò non solo non è geometria *cartesiana,* ma non costituisce neppure una novità, in quanto già gli Arabi settecento anni prima avevano proposto tali approcci.
Nel secondo libro si tratta *della natura delle linee curve*. Come Fermat, Descartes si rifà agli antichi distinguendo fra i luoghi *piani, solidi e lineari* e descrive poi alcuni strumenti che permettono la costruzione di curve non realizzabili con il solo uso di riga e compasso. Vi è qui un accenno a ciò che potrebbero essere le coordinate che oggi chiamiamo cartesiane. Per la risoluzione di un problema infatti Egli scrive:

> *Scelgo una retta per rapportare i suoi diversi punti con quelli della linea curva* [quella che vuole costruire] *e su questa retta scelgo un punto, per cominciare da esso il calcolo.*

In pratica è come se scegliesse un asse coordinato con un'origine. Poco più avanti precisa:

> *le rette* [...] *sono due quantità indeterminate e incognite, io le chiamo una y e l'altra x, ma per determinare il rapporto di una all'altra, considero anche le quantità note che determinano la descrizione di questa curva.*

Da un punto di vista storico questo passo è quello che ha poi *trasmesso* in matematica l'uso delle lettere x e y per le incognite e per gli assi cartesiani. A questo punto Descartes comincia a tradurre in algebra, le condizioni geometriche che determinano i luoghi. Non vi sono però, né potremmo aspettarceli, le definizioni di sistema di riferimento e di coordinate di un punto; le equazioni ricavate, inoltre, non coincidono con quelle che noi troveremo. È fuor di dubbio tuttavia che sia le riflessioni di Descartes, sia quelle di Fermat costituiscono importanti e fondamentali inizi.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Determinare l'equazione del luogo geometrico dei punti del piano che verificano la seguente proprietà: il quadrato della distanza dall'origine è 3 volte il quadrato della distanza dal punto $A \equiv (1; 3)$.

Per scrivere l'equazione di questo luogo basta considerare un generico punto $P \equiv (x; y)$ appartenente al luogo, traducendo in equazione quel che abbiamo detto a parole. Per quanto riguarda la distanza di due punti sappiamo che vale la formula: $\overline{PQ} = \sqrt{\left(x_P - x_Q\right)^2 + \left(y_P - y_Q\right)^2}$. Quindi il luogo ha equazione: $\overline{PO}^2 = 3 \cdot \overline{PA}^2 \Rightarrow \left(\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}\right)^2 = 3 \cdot \left(\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}\right)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 3 \cdot (x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9) = 0 \Rightarrow$ $x^2 + y^2 - 3x^2 + 6x - 3 - 3y^2 + +18y - 27 = 0 \Rightarrow -2x^2 - 2y^2 + 6x + 18y - 30 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 3x - 9y + 15 = 0$.

Tradurre in equazione i seguenti luoghi di punti del piano cartesiano

Livello 1

1. La somma fra l'ascissa e il doppio dell'ordinata è 1 [$x + 2y = 1$]
2. Il triplo dell'ascissa differisce dal doppio dell'ordinata di 5 [$3x - 2y = 5$]
3. Il quadruplo dell'ascissa supera la metà dell'ordinata di 1 $\left[4x = \dfrac{y}{2} + 1\right]$
4. La differenza tra la metà dell'ascissa e un quarto dell'ordinata è 4 $\left[\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{4} = 4\right]$
5. La somma fra il quadruplo dell'ascissa e un terzo dell'ordinata è 1 $\left[4x + \dfrac{y}{3} = 1\right]$
6. Il triplo dell'ordinata supera il doppio dell'ascissa di 2 [$3y = 2x + 2$]
7. Il quadrato dell'ascissa è il doppio dell'ordinata [$x^2 = 2y$]
8. Il cubo dell'ordinata è 5 volte il quadrato dell'ascissa [$5x^2 = y^3$]
9. La differenza fra la quarta potenza dell'ascissa e l'ordinata è 3 [$x^4 - y = 3$]
10. La somma fra il quadrato dell'ascissa e il cubo dell'ordinata è 7 [$x^2 + y^3 = 7$]

Livello 2

11. La distanza dall'origine è metà della distanza da $A \equiv (1; -2)$

$$\left[\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2}}{2} \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 2x - 4y - 5 = 0\right]$$

12. La distanza da $A \equiv (3; 2)$ è doppia della distanza da $B \equiv (2; 3)$

$$\left[\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = 2 \cdot \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 10x - 20y + 39 = 0\right]$$

13. Il quadrato della distanza da $A \equiv (-2; 0)$ è uguale al quadrato della distanza da $B \equiv (-2; -5)$

$$\left[\left(\sqrt{(x+2)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x+2)^2 + (y+5)^2}\right)^2 \Leftrightarrow 2y + 5 = 0\right]$$

14. Un terzo della distanza da $A \equiv (3; -2)$ sottratto ai $\dfrac{3}{5}$ della distanza da $B \equiv (-1;-1)$ è 0

$$\left[\frac{1}{3} \cdot \sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2} - \frac{3}{5} \cdot \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = 0 \Leftrightarrow 56x^2 + 56y^2 + 312x + 62y - 163 = 0\right]$$

15. La somma dei quadrati delle distanze da $A \equiv (-1; 0)$ e da $B \equiv (1; 0)$ è 4

$$\left[\left(\sqrt{(x+1)^2 + y^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-1)^2 + y^2}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0\right]$$

16. La somma del quadrato della distanza da $A \equiv (3; -5)$ con la distanza da $B \equiv (2; -4)$ è 7

$$\left[\left(\sqrt{(x-3)^2+(y+5)^2}\right)^2+\sqrt{(x-2)^2+(y+4)^2}=7 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^4-12x^3+2x^2y^2+20x^2y+89x^2-12xy^2-120xy-320x+y^4+20y^3+153y^2+532y+709=0\right]$$

17. Il prodotto delle distanze dall'origine e dal punto $A \equiv (-3; 4)$ è uguale a 15

$$\left[\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2}=15 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^4+6x^3+2x^2y^2-8x^2y+25x^2+6xy^2+y^4-8y^3+25y^2-225=0\right]$$

18. Il rapporto della distanza da $A \equiv (-2; 1)$ rispetto alla distanza da $B \equiv (3; -1)$ è 3

$$\left[\frac{\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}}{\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}}=3 \Leftrightarrow 8x^2+8y^2+58x+20y+85=0\right]$$

19. Il cubo della distanza dall'origine differisce di 4 dal quadrato della distanza da $A \equiv (0; -3)$

$$\left[\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3=\left(\sqrt{x^2+(y+3)^2}\right)^2+4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^6+3x^4y^2-x^4+3x^2y^4-2x^2y^2-12x^2y-10x^2+y^6-y^4-12y^3-46y^2-60y-25=0\right]$$

20. Il quadrato della somma dei quadrati delle distanze da $A \equiv (-1; 0)$ e da $B \equiv (1; 0)$ è 4

$$\left[\left(\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right)^2=4 \Leftrightarrow y^2=0\right]$$

21. Formano con i vertici $A \equiv (2; 1)$, $B \equiv (0; 3)$ un triangolo isoscele di base AB

$$\left[\left(\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}\right)^2=\left(\sqrt{x^2+(y-3)^2}\right)^2 \Leftrightarrow x-y+1=0\right]$$

22. Formano con i vertici $A \equiv (0; 4)$, $B \equiv (-1; 3)$ un triangolo rettangolo di ipotenusa AB

$$\left[\left(\sqrt{x^2+(y-4)^2}\right)^2+\left(\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}\right)^2=\left(\sqrt{1^2+(-1)^2}\right) \Leftrightarrow x^2+y^2+x-7y+12=0\right]$$

Livello 3

23. La differenza dei quadrati delle distanze dall'origine e da $A \equiv (3; 0)$ è uguale alla somma dei quadrati delle distanze da $B \equiv (0; 1)$ e da $C \equiv (0; -2)$

$$\left[\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2-\left(\sqrt{(x-3)^2+y^2}\right)^2=\left(\sqrt{x^2+(y-1)^2}\right)^2+\left(\sqrt{x^2+(y+2)^2}\right)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2+y^2-3x+y+7=0\right]$$

24. La somma dei quadrati delle distanze da $A \equiv (1; 1)$ e da $B \equiv (-2; 1)$ è uguale al rapporto dei quadrati delle distanze da $C \equiv (-1; -1)$ e da $D \equiv (1; -2)$

$$\left[\left(\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\right)^2+\left(\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}\right)=\left(\frac{\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}}{\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}}\right)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^4-2x^3+4x^2y^2+4x^2y+12x^2-2xy^2+16xy-6x+2y^4+4y^3+6y+33=0\right]$$

25. La somma della distanza dall'asse x è il triplo della distanza dall'origine

$$\left[|y|=3\cdot\sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow 3x^2+2y^2=0\right]$$

26. Il quadrato della distanza da $A \equiv (2; 0)$ è maggiore della distanza da $B \equiv (-3; 0)$

$$\left[\left(\sqrt{(x-2)^2+y^2}\right)>\sqrt{(x+3)^2+y^2} \Leftrightarrow x^4-8x^3+2x^2y^2+23x^2-8xy^2-38x+y^4-7y^2+7>0\right]$$

27. La distanza dall'asse delle ascisse è uguale alla distanza dall'asse delle ordinate $[|x| = |y| \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0]$

28. Il rapporto delle distanze dagli assi coordinati è 3. $\left[\frac{|x|}{|y|}=3, \frac{|y|}{|x|}=3 \Leftrightarrow x=\pm 3y=0, y=\pm 3x, xy\neq 0\right]$

29. Il prodotto delle distanze dagli assi coordinati è maggiore del rapporto della distanza dall'origine rispetto alla distanza da $A \equiv (-2; 4)$.

$$\left[|x \cdot y| > \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-2)^2+(y+4)^2}} \Leftrightarrow x^4y^2 - 4x^3y^2 + x^2y^4 + 8x^2y^3 + 20x^2y^2 - x^2 - y^2 > 0 \right]$$

30. I punti che formano con i vertici $A \equiv (1; -3)$, $B \equiv (2; 0)$ un triangolo di area 1.

$$\left[\frac{1}{2} \cdot abs\left(\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} \right) = 1 \Leftrightarrow 9x^2 - 6xy + y^2 - 36x + 12y + 32 = 0 \right]$$ (*abs* indica il valore assoluto)

Equazione della retta

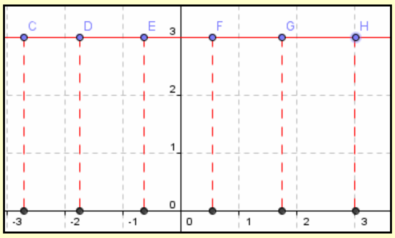
La descrizione delle rette e dei cerchi, su cui ogni geometria si fonda, appartiene alla meccanica. La geometria non ci insegna a tracciare queste linee, ma richiede che siano tracciate.
Isaac Newton (1642–1727), *Principia Mathematica.*

Il problema

In fisica si dice che un corpo si muove di moto rettilineo uniforme se percorre spazi uguali in tempi uguali. L'aggettivo rettilineo dipende dal fatto che un corpo che si muove in tal modo descrive una traiettoria che è rappresentata da una retta (in pratica da un segmento). La richiesta è perciò quella di trovare l'equazione che descrive una traiettoria rettilinea, cioè l'equazione di una retta.

Abbiamo visto nel paragrafo precedente le difficoltà che si hanno nel rappresentare luoghi che verificano leggi scelte più o meno a caso; vogliamo qui semplificare la questione considerando la linea per eccellenza, ossia la retta che è certo una delle più semplici curve. Vogliamo inoltre invertire il problema, ossia, partendo dalla linea rappresentata, la retta, intendiamo associare ad essa una legge analitica che la descriva.

Esempio 5

Abbiamo detto che possiamo passare da una curva alla sua equazione se riusciamo a *tradurre* in equazione le condizioni che definiscono la curva come luogo. Consideriamo, per iniziare, una retta parallela all'asse delle ascisse. 

In figura abbiamo rappresentato la retta i cui punti hanno 3 come ordinata comune. Possiamo quindi dire che la detta retta è *il luogo geometrico analitico dei punti del piano cartesiano le cui ordinate sono uguali a* 3. Ciò significa che l'equazione di tale retta è $y = 3$.

L'esempio precedente ci permette di enunciare il seguente intuitivo risultato.

Teorema 1

L'equazione di una retta parallela all'asse delle ascisse è $y = h$, in cui h è il numero reale ordinata comune di tutti i punti della retta.

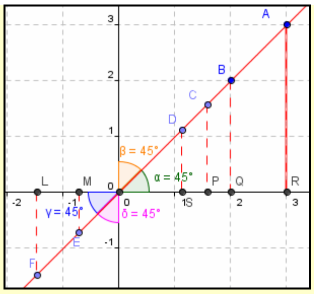
Naturalmente analogo risultato otteniamo per le rette parallele all'asse delle ordinate.

Teorema 2

L'equazione di una retta parallela all'asse delle ordinate è $x = h$, in cui h è il numero reale ascissa comune di tutti i punti della retta.

I risultati precedenti ci dicono che l'asse delle ascisse ha equazione $y = 0$, mentre $x = 0$ è l'equazione dell'asse delle ordinate.
Consideriamo ora un'altra particolare retta.

Esempio 6

Diciamo prima bisettrice la retta che biseca il primo e il terzo quadrante, ossia che passa per l'origine degli assi determinando con questi ultimi due angoli di 45°. Non è difficile stabilire che, per la stessa costruzione, tutti i triangoli segnati nella figura seguente sono rettangoli e isosceli. 

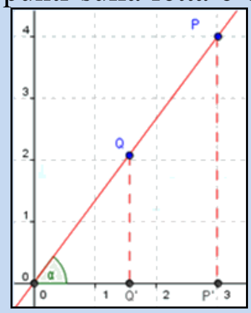
Ciò significa che la data retta è *il luogo geometrico analitico dei punti del piano cartesiano che hanno ascisse e ordinate fra loro uguali*. L'equazione di tale retta è quindi $y = x$. Facciamo attenzione al fatto che da un punto di vista geometrico sono isometrici i cateti dei triangoli, sono perciò uguali le loro misure che sono numeri reali positivi; da un punto di vista analitico, invece, a essere uguali sono le coordinate, che sono numeri reali.

L'esempio precedente ci permette di enunciare il seguente risultato più generale.

Teorema 3

L'equazione di una retta passante per l'origine degli assi cartesiani, diversa dall'asse y, è $y = mx$, in cui m è un numero reale che dipende dall'angolo che la retta forma con il semiasse positivo delle ascisse.

Dimostrazione

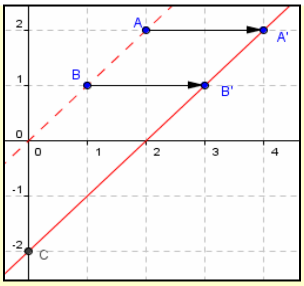
Scegliamo due punti sulla retta e consideriamone le rispettive proiezioni sull'asse delle ascisse, come mostrato in figura. 

Consideriamo i triangoli OPP' e OQQ'. Sono fra loro simili, perché entrambi triangoli rettangoli e hanno l'angolo di vertice O in comune. Quindi si ha: $\frac{\overline{PP'}}{\overline{OP'}} = \frac{\overline{QQ'}}{\overline{OQ'}}$, indichiamo il valore del precedente rapporto con il simbolo m, così potremo scrivere: $\frac{y}{x} = m \Rightarrow y = mx$. Osserviamo che in questo modo m può essere anche un numero negativo; infatti se fossimo nel secondo quadrante avremmo ancora l'uguaglianza fra i rapporti delle misure, ma x rappresenterebbe un'ascissa negativa.

Nel teorema precedente abbiamo sottolineato il fatto che la retta in considerazione non deve essere l'asse y, infatti in tal caso non possiamo ripetere quanto detto nella dimostrazione; inoltre l'equazione $y = mx$ non ci permette di giungere all'equazione $x = 0$, per alcun valore reale assegnato al parametro m.

Basta ora una semplice generalizzazione per determinare l'equazione di una retta qualsiasi, purché non parallela all'asse y.

Esempio 7

Consideriamo la retta che si ottiene spostandola orizzontalmente di due unità a destra (tecnicamente, lo vedremo meglio nella prossima unità, si dice *traslandola*) la prima bisettrice, di equazione $y = x$, Ciò significa che il generico punto che nella prima bisettrice aveva uguali l'ascissa e l'ordinata, adesso continua ad avere la stessa ordinata di prima mentre la sua ascissa è aumentata di 2 unità. Così per esempio il punto $A \equiv (1; 1)$ è divenuto $A' \equiv (3; 1)$, allo stesso modo $B \equiv (2; 2)$ è diventato $B' \equiv (4; 2)$. Facilmente si capisce che la relazione fra le coordinate è ora $y = x - 2$, che perciò può considerarsi l'equazione della data retta. Notiamo che l'intersezione della retta con l'asse y è $C \equiv (0; -2)$, ossia un punto la cui ordinata coincide con il termine noto dell'equazione della retta. 

Dall'esempio appena proposto si ottiene il seguente teorema.

Teorema 4

L'equazione di una retta non parallela all'asse delle y è $y = mx + p$, in cui m è un numero reale legato all'angolo che la retta forma con il semiasse positivo delle ascisse, p è invece l'ordinata del punto intersezione fra la retta e l'asse y.

Poniamo la seguente definizione.

Definizione 3

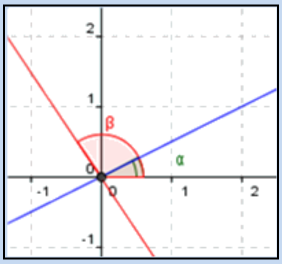
1. L'equazione $y = mx + p$ si chiama **equazione in forma esplicita di una retta non parallela all'asse delle ordinate** o più brevemente *equazione esplicita di una retta*;
2. il parametro m si chiama **coefficiente angolare** o **pendenza** della retta;
3. il parametro p si chiama **ordinata all'origine**.

L'osservazione del precedente esempio, relativamente al coefficiente angolare e alle sue relazioni fra ordinate e ascisse di un qualsiasi punto della retta, ci permette di enunciare il seguente teorema.

Teorema 5

Data una retta di equazione $y = mx + p$, con $m \neq 0$, se $m > 0$ allora la retta forma con il semiasse positivo delle ascisse un angolo acuto, se invece è $m < 0$ il detto angolo è ottuso.

Dimostrazione

Cominciamo a osservare che possiamo supporre $p = 0$, dato che le equazioni $y = mx + p$ e $y = mx$ sono fra loro parallele, avendo noi determinato la prima a partire dalla seconda. Ciò significa che la nostra generica retta potrà essere, in considerazione della misura del detto angolo, in una sola delle due configurazioni mostrate nella figura seguente. 

Nel caso della retta di colore blu l'angolo formato è acuto e i punti appartengono o al primo o al terzo quadrante, pertanto hanno coordinate il cui rapporto (cioè m) è in ogni caso positivo; nel secondo caso invece l'angolo è ottuso e i punti appartengono o al secondo o al quarto quadrante, con coordinate il cui rapporto è perciò negativo.

Esempio 8

L'equazione $y = 3x + 1$, rappresenta una retta di coefficiente angolare 3, tale cioè che il rapporto fra l'ordinata e l'ascissa di un qualsiasi punto è 3, e di ordinata all'origine 1, tale cioè da incontrare l'asse delle ordinate nel punto 1. Queste due informazioni sono sufficienti per disegnare la retta. Il metodo migliore per farlo, però, è quello di sfruttare il fatto che una retta è *completamente determinata da due suoi punti qualsiasi*: basterebbe quindi determinare un ulteriore punto, oltre a quello già determinato sull'asse y, e congiungere poi i due punti trovati.

L'aver parlato di una forma esplicita per l'equazione della retta fa già presumere che debba anche esservi una forma non esplicita, cioè implicita. Per far ciò basterebbe trasportare tutti i termini da una parte del segno di uguale, ottenendo così: $y - mx - p = 0$. In effetti m può anche essere un numero non intero, per esempio un numero razionale; ciò fa sì che la precedente espressione potrebbe scriversi in una forma ancora più compatta e generale.

Esempio 9

Consideriamo la retta di equazione $y = -\frac{4}{3}x - \frac{5}{2}$; possiamo scrivere tale equazione nella forma seguente: $\frac{4}{3}x + y + \frac{5}{2} = 0$, o, eseguendo il minimo comune denominatore: $8x + 6y + 15 = 0$.

L'esempio precedente ci permette di porre la seguente definizione.

Definizione 4

L'equazione $ax + by + c = 0$, si chiama **equazione in forma implicita di una retta**.

La prima cosa che notiamo nella definizione appena proposta è il fatto che in essa non abbiamo posto limitazioni al tipo di retta e quindi la predetta forma è più generale di quella esplicita. Possiamo infatti preparare il seguente schema.

a	b	c	Tipo di retta di equazione $ax + by + c = 0$
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	Retta non parallela agli assi e non passante per l'origine.
$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	Retta parallela all'asse x e non passante per l'origine.
$= 0$	$\neq 0$	$= 0$	Asse x
$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$	Retta parallela all'asse y e non passante per l'origine.
$\neq 0$	$= 0$	$= 0$	Asse y
$\neq 0$	$\neq 0$	$= 0$	Retta non parallela agli assi e passante per l'origine.

Non è naturalmente possibile che accada $a = b = 0$.
Che cosa avviene del coefficiente angolare nella forma implicita? Anche in questo caso possiamo parlare di coefficiente angolare e sempre solo per rette non parallele all'asse y. Per stabilire la sua forma basta allora passare dalla forma implicita a quella esplicita. Visto che $b \neq 0$, possiamo dividere tutto per b, ottenendo così: $ax + by + c = 0 \Rightarrow by = -ax - c \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Possiamo allora dire che il coefficiente angolare di una retta non parallela all'asse y, scritta in forma implicita è $m = -\frac{a}{b}$, la sua ordinata all'origine è $p = -\frac{c}{b}$. Ci siamo occupati dell'ordinata all'origine, cioè dell'intersezione della retta con l'asse y, se non parallela a tale asse. Allo stesso modo potremmo occuparci dell'ascissa all'origine, cioè dell'intersezione con l'asse x.

Esempio 10

Vogliamo trovare le intersezioni della retta di equazione $2x - 3y + 5 = 0$ con gli assi cartesiani. Nell'equazione basta porre, in successione, una delle due incognite uguale a zero e poi ricavare il valore dell'altra. Quindi: $x = 0 \Rightarrow -3y + 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{3}$; $y = 0 \Rightarrow 2x + 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$. La data retta incontra quindi gli assi nei punti: $Y \equiv \left(0; \frac{5}{3}\right)$, $X \equiv \left(-\frac{5}{2}; 0\right)$. Cerchiamo ora di scrivere l'equazione della retta in modo da mettere in evidenza le precedenti coordinate: $2x - 3y + 5 = 0 \Rightarrow 2x - 3y = -5 \Rightarrow \frac{2x}{-5} - \frac{3y}{-5} = 1 \Rightarrow \frac{x}{-\frac{5}{2}} + \frac{y}{\frac{5}{3}} = 1$

Possiamo generalizzare il precedente esempio per una generica retta di equazione $ax + by + c = 0$: $x = 0 \Rightarrow by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{c}{b}$; $y = 0 \Rightarrow ax + c = 0 \Rightarrow x = -\frac{c}{a}$; ottenendo i punti: $Y \equiv \left(0; -\frac{c}{b}\right), X \equiv \left(-\frac{c}{a}; 0\right)$. Scriviamo quindi l'equazione di una retta non parallela agli assi cartesiani e non passante per l'origine in una forma nuova, nella quale mettiamo in risalto proprio i precedenti punti, o comunque le loro coordinate non nulle: $ax + by + c = 0 \Rightarrow ax + by = -c \Rightarrow \frac{a}{-c}x + \frac{b}{-c}y = 1 \Rightarrow \frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1$.

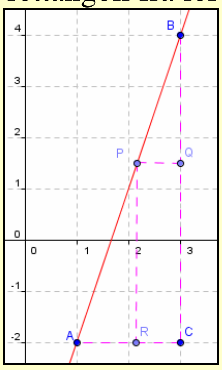
Definizione 5

L'equazione $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$, con $p \neq 0 \wedge q \neq 0$, si chiama **equazione segmentaria di una retta**.

L'aggettivo *segmentaria* usato nella precedente definizione è riferito al fatto che i valori assoluti dei denominatori sono proprio le misure dei segmenti che la retta *intercetta* sugli assi coordinati.
Anche se abbiamo già trovato diverse forme per esprimere l'equazione di una retta, non abbiamo ancora trovato la forma che forse meglio rappresenta una retta, cioè quella che ci permette di determinare la retta mediante la sola conoscenza di due suoi punti.

Esempio 11

Dati i punti $A \equiv (1; -2)$ e $B \equiv (3; 4)$, vogliamo trovare l'equazione dell'unica retta che li contiene entrambi. Nella figura seguente abbiamo costruito due triangoli rettangoli fra loro simili, ACB e PQB, in cui $P \equiv (x; y)$



è un punto qualsiasi appartenente alla retta per AB. In questo modo vogliamo cercare la condizione di *allineamento,* cioè le proprietà che deve verificare un punto per appartenere alla stessa retta alla quale appartengono A e B. Per le proprietà di similitudine, possiamo scrivere: $\frac{\overline{PR}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AR}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{y+2}{4+2} = \frac{x-1}{3-1} \Rightarrow \frac{y+2}{6} = \frac{x-1}{2} \Rightarrow \frac{y+2}{3} = x - 1 \Rightarrow y + 2 = 3x - 3 \Rightarrow 3x - y - 5 = 0$. Verifichiamo che effettivamente l'equazione trovata è quella della retta per A e B, ossia che i detti punti con le loro coordinate soddisfano l'equazione: passaggio per A: $3 \cdot 1 - (-2) - 5 = 0 \Rightarrow 0 = 0$; passaggio per B: $3 \cdot 3 - 4 - 5 = 0 \Rightarrow 0 = 0$.

Il procedimento descritto nell'esempio si può chiaramente generalizzare.

Teorema 6

La retta passante per i punti $A \equiv (x_A; y_A)$ e $B \equiv (x_B; y_B)$, con $x_A \neq x_B$ e $y_A \neq y_B$, ha equazione $\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$.

Dimostrazione. Per esercizio sulla falsariga dell'Esempio 11.

Vediamo qualche applicazione corretta e qualcuna errata della formula stabilita dal precedente teorema.

Esempio 12

- Vogliamo scrivere l'equazione della retta passante per i punti $A \equiv (0; 3)$ e $B \equiv (-1; 2)$. Applichiamo la formula stabilita dal teorema precedente: $\frac{x-0}{-1-0}=\frac{y-3}{2-3} \Rightarrow \frac{x}{-1}=\frac{y-3}{-1} \Rightarrow x=y-3 \Rightarrow x-y+3=0$.
- Anche questi altri procedimenti sono corretti:

$$\frac{x-(-1)}{0-(-1)}=\frac{y-2}{3-2} \Rightarrow \frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{1} \Rightarrow x+1=y-2 \Rightarrow x-y+3=0$$

$$\frac{y-3}{2-3}=\frac{x-0}{-1-0} \Rightarrow \frac{y-3}{-1}=\frac{x}{-1} \Rightarrow y-3=x \Rightarrow x-y+3=0$$

- Non sono invece corretti questi altri procedimenti:

$$\frac{x-0}{2-0}=\frac{y-3}{-1-3} \Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{y-3}{-4} \Rightarrow -2x=y-3 \Rightarrow 2x+y-3=0$$

$$\frac{x-1}{0-1}=\frac{y-2}{3-2} \Rightarrow \frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{1} \Rightarrow -x-1=y-2 \Rightarrow x+y-1=0.$$

Vogliamo ora determinare il coefficiente angolare della retta passante per due punti mediante le coordinate dei punti stessi. Per far ciò basta passare da $\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$ all'espressione esplicita. Abbiamo quindi:
$(x - x_A) \cdot (y_B - y_A) - (y - y_A) \cdot (x_B - x_A) = 0 \Rightarrow x \cdot (y_B - y_A) - y \cdot (x_B - x_A) = x_A \cdot (y_B - y_A) - y_A \cdot (x_B - x_A)$
$\Rightarrow y=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}\cdot x+p$. Abbiamo indicato l'ordinata all'origine con $p=y_A-x_A\cdot\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$.
Possiamo quindi enunciare il seguente risultato.

Teorema 7

Il coefficiente angolare della retta passante per i punti $A \equiv (x_A; y_A)$ e $B \equiv (x_B; y_B)$, con $x_A \neq x_B$, è $\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}$.

Abbiamo più volte detto che la formula stabilita dal Teorema 6 è parziale, nel senso che non è applicabile per due punti qualsiasi, ma solo per punti che non abbiamo uguali ascisse o uguali ordinate. Vogliamo invece trovare una formula che sia *universale*.
In effetti se ricordiamo quanto detto nell'Unità 2 a proposito dell'area di un triangolo, ci accorgiamo che una legge simile già la conosciamo. Nel Teorema 6 di quella unità, che abbiamo chiamato teorema di Lagrange, abbiamo stabilito che l'area di un triangolo di vertici i punti $A \equiv (x_A; y_A)$, $B \equiv (x_B; y_B)$, e $C \equiv (x_C; y_C)$, si calcola sviluppando il determinante $\frac{1}{2}\cdot\left|\left(\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}\right)\right|$. Tralasciando il valore assoluto e il fattore $\frac{1}{2}$, che servono solo per l'esattezza del valore numerico, a noi interessa un'altra questione. Se i punti sono allineati, che cosa accadrà al triangolo e di conseguenza alla sua area? Naturalmente il triangolo degenererà in un segmento, i tre punti saranno allineati e conseguentemente il determinante varrà zero. Ciò significa che la condizione $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}=0$, esprime l'allineamento dei 3 punti. Ma allora è proprio ciò che volevamo trovare. Basta quindi sostituire le coordinate di uno qualsiasi dei 3 punti con coordinate generiche per avere la condizione per la quale un qualsiasi punto sia allineato con altri due dati, e quindi l'equazione di una retta passante per due punti qualsiasi.

Teorema 8

La retta passante per i punti $A \equiv (x_A; y_A)$ e $B \equiv (x_B; y_B)$, ha equazione $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Dimostrazione

Sappiamo (Teorema 9 di Lagrange, dell'Unità 2.2), che l'area di un triangolo i cui vertici sono $A \equiv (x_A; y_A)$, $B \equiv (x_B; y_B)$ e $C \equiv (x_C; y_C)$ è $\frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{matrix} \right\|$. Sostituire alle coordinate di A coordinate generiche e porre il valore del determinante zero equivale a imporre di trovare il luogo dei punti del piano che con i A e B formino triangoli di area nulla, che è appunto la condizione di allineamento di tre punti.

Esempio 13

- Verifichiamo quanto affermato dal Teorema 8 con i dati dell'esempio 12, $A \equiv (0; 3)$ e $B \equiv (-1; 2)$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x \cdot (3-2) - (y-3) = 0 \Rightarrow x - y + 3 = 0.$$

- Verifichiamo inoltre che la formula funziona anche per rette parallele agli assi. Noi qui consideriamo solo rette parallele all'asse x; per rette parallele all'asse y si procederà in modo analogo:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ k & h & 1 \\ t & h & 1 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{R_2 = R_2 - R_3} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ k-t & 0 & 0 \\ t & h & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(k-t) \cdot \begin{vmatrix} y & 1 \\ h & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (t-k) \cdot (y-k) = 0 \Rightarrow y - h = 0.$$

Concludiamo determinando l'equazione di un particolare luogo geometrico che sappiamo essere costituito da una retta: l'asse di un segmento.

Esempio 14

Consideriamo il segmento di estremi i punti $A \equiv (1; 2)$ e $B \equiv (3; -4)$. L'asse di questo segmento è formata dai punti $P \equiv (x; y)$ verificanti l'equazione: $\overline{PA} = \overline{PB}$, cioè: $\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+4)^2}$.

Innalziamo al quadrato entrambi i membri e sviluppiamo: $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 \Rightarrow -2x + 5 - 4y = -6x + 25 + 8y \Rightarrow 4x - 12y - 20 = 0 \Rightarrow x - 3y - 5 = 0$

Verifiche

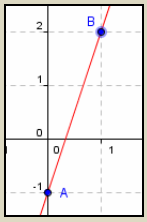
Lavoriamo insieme

Rappresentare sul piano cartesiano la retta di equazione $y = 3x - 1$.

Possiamo utilizzare diversi procedimenti. Consideriamo il più semplice di essi, consistente nel tenere conto del fatto che una retta è individuata da due qualunque suoi punti, quindi basta dare due valori a caso alla variabile x, che proprio per questo motivo viene spesso chiamata *variabile indipendente*, ottenendo i corrispondenti valori della y, chiamata perciò *variabile dipendente*. In questo modo abbiamo le coordinate di due punti che andiamo perciò a rappresentare e poi uniamo con un tratto rettilineo. Per esempio nel nostro caso calcoliamo quanto mostrato in tabella.

x	$y = 3x - 1$
0	$3 \cdot 0 - 1 = -1$
1	$3 \cdot 1 - 1 = 2$

Naturalmente la scelta dei valori da assegnare all'ascissa è del tutto arbitraria, anche se è consigliabile scegliere numeri non molto *grandi*. Abbiamo così ottenuto i punti $A \equiv (0; -1)$ e $B \equiv (1; 2)$. Li rappresentiamo e li uniamo con un tratto rettilineo.



Rappresentare le rette aventi le seguenti equazioni

Livello **1**

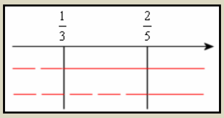
1. $x = 1$; $y = -2$; $y = 2x$; $2x = 1$; $3y = 4$; $5y = 0$; $y = 3x + 4$; $y = -7x - 3$; $y = \frac{1}{2}x - 3$
2. $y = -\frac{3}{4}x + 3$; $y = \sqrt{2}x$; $y = \left(1 - \sqrt{2}\right)x + 1$; $3x - y - 3 = 0$; $2y = x + 8$; $x = -4y + 3$; $2x - 6y - 1 = 0$
3. $4 = 3x + y$; $0 = 3y + 1 - 2x$; $\frac{1}{2}y - \frac{2}{3} = x$; $\sqrt{2}x = y - 2$; $-\sqrt{2} = 2x + \frac{1}{2}y$; $2x - \sqrt{3}y + 1 - \sqrt{3} = 0$
4. $\frac{2}{3}x - y + 1 + \sqrt{5} = 0$; $\left(1 + \sqrt{2}\right)x - \left(1 - \sqrt{2}\right)y = 0$; $\sqrt{2}x - y + 1 = 0$; $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y - \sqrt{6} = 0$

Lavoriamo insieme

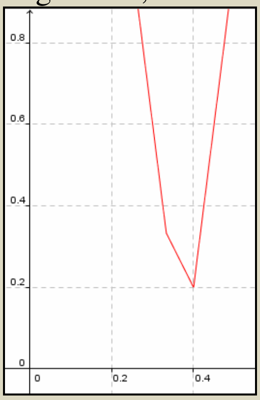
Rappresentare la funzione di equazione $y = |3x - 1| + |5x - 2|$.

Questa non è certamente l'equazione di una retta, ma è sempre un'equazione di tipo lineare, nel senso che i suoi termini sono sempre di primo grado. Quindi non abbiamo a che fare con una retta, ma con dei *pezzi* di retta. La prima cosa che dobbiamo fare è eliminare i valori assoluti. Sappiamo che scopo del valore assoluto è quello di rendere sempre non negativa un'espressione, così per esempio sia $|5|$ sia $|-5|$ valgono + 5. Quindi $|3x - 1| = 3x - 1$ se $3x - 1 > 0$, cioè se $x > 1/3$, mentre $|3x - 1| = 1 - 3x$ se $3x - 1 < 0$, cioè se $x < 1/3$; infine $|3x - 1| = 0$ se $3x - 1 = 0$, cioè se $x = 1/3$. Raccogliamo tutto in un unico schema: $|3x-1| = \begin{cases} 3x-1 & se\ x > \frac{1}{3} \\ 0 & se\ x = \frac{1}{3} \\ 1-3x & se\ x < \frac{1}{3} \end{cases}$;

$|5x-2| = \begin{cases} 5x-2 & se\ x > \frac{2}{5} \\ 0 & se\ x = \frac{2}{5} \\ 2-5x & se\ x < \frac{2}{5} \end{cases}$. Adesso rappresentiamo in un unico grafico i segni dei due addendi.



Esso ci permette di eliminare i valori assoluti al variare di x e quindi di semplificare la funzione da rappresentare. $|3x-1|+|5x-2| = \begin{cases} 1-3x+2-5x = 3-8x & se\ \ x < \frac{1}{3} \\ 2-5x & se\ \ x = \frac{1}{3} \\ 3x-1+2-5x = 8x+1 & se\ \frac{1}{3} < x < \frac{2}{5} \\ 3x-1 & se\ \ x = \frac{2}{5} \\ 3x-1+2x-5 = 5x-6 & se\ \ x > \frac{2}{5} \end{cases}$. Dobbiamo perciò rappresentare 2 semirette, la prima e l'ultima, e un segmento, il terzo; per quel che riguarda i valori nei punti in cui si annulla uno dei due argomenti, non è difficile capire che questi sono i punti di *contatto* fra le semirette e il segmento.



Rappresentare le seguenti funzioni formate da porzioni di retta

Livello 1

5. $y = |7x + 1|$; $y = |2x - 5|$; $y = |4 - 11x|$; $y = |4 - 3x|$; $y = |-x -8|$; $y = |x - 1| + x - 2$

Livello 2

6. $y = |3 - x| - |4x + 1|$; $y = |5x + 3| + 2 \cdot |x + 1|$; $y = 3 \cdot |4 - x| - |-3x - 7|$; $y = 2 \cdot |6x + 1| - 2 \cdot |8x + 1|$

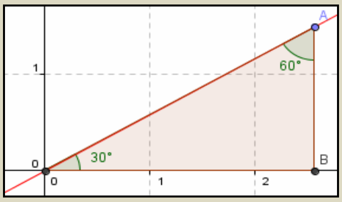
Livello 3

7. $y = |x - 1| + |2x - 1| - |3x + 4|$; $y = 2 \cdot |5x - 2| + |-x - 3| + |x + 3|$; $y = 3 \cdot |1 - 3x| - 2 \cdot |4x + 7| + |x -11|$
8. $y = 2 \cdot |x - 3| + 3 \cdot |4x - 2| - 5 \cdot |x + 9|$; $y = 3 \cdot |-2x + 7| + 3 \cdot |-2x - 5| + 4 \cdot |3x|$
9. Risolvere il seguente sistema $\begin{cases} |x|+|y|=1 \\ x+y=0 \end{cases}$. $\left[\left(x = \pm\frac{1}{2}, y = \mp\frac{1}{2}\right)\right]$
10. Determinare l'area della regione piana costituita dai punti (x, y) soluzioni di $|x| + |y| \le 1$. [2]
11. Determinare l'area della regione piana costituita dai punti (x, y) soluzioni di $|y| + |x + 2y| \le 1$. [2]
12. Determinare l'area della regione piana costituita dai punti (x, y) soluzioni di $|x - 2y| + |2x - y| \le 3$. [6]

Lavoriamo insieme

Consideriamo la retta passante per l'origine che forma con il semiasse positivo delle ascisse un angolo di 30°, *siamo in grado di trovare la sua equazione*?

Possiamo cominciare a dire che essa passa per l'origine, quindi la sua equazione è priva di termine noto, cioè è del tipo $y = mx$. Adesso dobbiamo trovare il valore di m, tenuto conto che esso misura il rapporto costante fra l'ordinata e l'ascissa di un qualsiasi punto della retta. Nella figura seguente abbiamo rappresentato la retta, un punto A su di essa e la sua proiezione B sull'asse x.



Consideriamo il triangolo AOB, che tipo di triangolo è? Naturalmente è un triangolo rettangolo, che ha gli angoli acuti che misurano 30° e 60°, quindi è metà di un triangolo equilatero di lato OA, ma allora AB misura quanto metà OA, mentre OB è l'altezza del triangolo equilatero, quindi misura $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\overline{OA}$. Ciò significa che possiamo trovare il valore di m. Si ha infatti: $m=\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}=\frac{\frac{\overline{OA}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\overline{OA}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Quindi la retta ha equazione: $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

Livello 2

13. Scrivere l'equazione della retta passante per l'origine e formante con il semiasse positivo delle ascisse rispettivamente angoli di: 45°, 60°, 120°, 135°, 150°. $\left[y=x,\ y=\sqrt{3}x,\ \ y=-\sqrt{3}x,\ \ y=-x,\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x\right]$

Scrivere l'equazione delle rette passanti per il punto P indicato e formanti con il semiasse positivo delle ascisse l'angolo α indicato

14. a) $P \equiv (0; -2)$, $\alpha = 30°$; b) $P \equiv (1; 0)$, $\alpha = 45°$; c) $P \equiv (1; 3)$, $\alpha = 60°$
$\left[a)\,y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-2; b)\,y=x-1; c)\,y=\sqrt{3}x+3-\sqrt{3}\right]$
15. a) $P \equiv (-1; 3)$, $\alpha = 120°$; b) $P \equiv (5; 4)$, $\alpha = 135°$; c) $P \equiv (-1; -3)$, $\alpha = 150°$
$\left[a)\,y=-\sqrt{3}x+3+\sqrt{3}; b)\,y=-x+9; c)\,y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-3-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

Livello 3

16. Tenuto conto che una retta che forma con il semiasse positivo delle ascisse un angolo $\alpha = 45°$, ha coefficiente angolare $m = 1$, se $0 < m < 1$, quanto vale α? [0° < α < 45°]
17. Con riferimento al precedente esercizio quanto vale α se è $m > 1$? [45° < α < 90°]
18. Tenuto conto che una retta che forma con il semiasse positivo delle ascisse un angolo $\alpha = 135°$, ha coefficiente angolare $m = -1$, se $-1 < m < 0$, quanto vale α? [135° < α < 180°]
19. Con riferimento al precedente esercizio quanto vale α se è $m < -1$? [90° < α < 135°]

Lavoriamo insieme

Scrivere in forma segmentaria la retta di equazione $3x - 5y - 2 = 0$.

Dobbiamo scriverla nella forma: $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$, in cui p e q sono rispettivamente i valori dell'ascissa e dell'ordinata dei punti intersezione fra la retta e gli assi coordinati. Trasportiamo il termine noto al secondo membro per farlo diventare 1: $3x - 5y - 2 = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}x-\frac{5}{2}y=1$. Adesso basta prendere i reciproci dei coefficienti e scriverli al denominatore di ciascun coefficiente: $\dfrac{x}{\frac{2}{3}}+\dfrac{y}{-\frac{2}{5}}=1$. Quindi la retta incontra gli assi nei punti $X\equiv\left(\dfrac{2}{3};0\right), Y\equiv\left(0;-\dfrac{2}{5}\right)$.

Porre in forma segmentaria le seguenti equazioni
Livello 2

20. $2x - y - 1 = 0$; $x + 3y + 1 = 0$; $-2x + 4y - 1 = 0$ $\left[\dfrac{x}{\frac{1}{2}}+\dfrac{y}{-1}=1;\dfrac{x}{-1}+\dfrac{y}{-\frac{1}{3}}=1;\dfrac{x}{-\frac{1}{2}}+\dfrac{y}{\frac{1}{4}}=1\right]$

21. $6x + 7y - 3 = 0$; $x - y - 7 = 0$; $4x + 2y + 5 = 0$ $\left[\dfrac{x}{\frac{1}{2}}+\dfrac{y}{\frac{3}{7}}=1;\dfrac{x}{7}+\dfrac{y}{-7}=1;\dfrac{x}{-\frac{5}{4}}+\dfrac{y}{-\frac{5}{2}}=1\right]$

22. $\dfrac{1}{2}x - y - 1 = 0$; $x-\dfrac{2}{3}y+1=0$; $-\dfrac{2}{5}x+\dfrac{3}{4}y-2=0$ $\left[\dfrac{x}{\frac{1}{2}}+\dfrac{y}{-1}=1;\dfrac{x}{-1}+\dfrac{y}{\frac{3}{2}}=1;\dfrac{x}{-5}+\dfrac{y}{\frac{8}{3}}=1\right]$

23. $\sqrt{2}\,x - 2y - 1 = 0$; $x - y + \sqrt{2} = 0$ $\left[\dfrac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\dfrac{y}{-\frac{1}{2}}=1;\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\dfrac{y}{\sqrt{2}}=1\right]$

24. $x + y - 1 + \sqrt{3} = 0$; $\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{4}y+\sqrt{3}=0$ $\left[\dfrac{x}{1-\sqrt{3}}+\dfrac{y}{1+\sqrt{3}}=1;\dfrac{x}{-\frac{2}{\sqrt{3}}}+\dfrac{y}{\frac{4}{\sqrt{3}}}=1\right]$

Lavoriamo insieme

- *Determinare l'equazione della retta passante per i punti* $A\equiv\left(\dfrac{5}{2};-\dfrac{3}{7}\right), B\equiv\left(-\dfrac{1}{6};-1\right)$.

  Visto che i punti hanno diverse sia le ascisse sia le ordinate, possiamo applicare la formula $\dfrac{x-x_A}{x_B-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_B-y_A}$, e in questo caso: $\dfrac{x-\frac{5}{2}}{-\frac{1}{6}-\frac{5}{2}}=\dfrac{y+\frac{3}{7}}{-1+\frac{3}{7}}\Rightarrow\dfrac{\frac{2x-5}{\cancel{2}^{1}}}{\frac{-1-15}{\cancel{6}^{3}}}=\dfrac{\frac{7y+3}{\cancel{7}}}{\frac{-7+3}{\cancel{7}}}\Rightarrow\dfrac{3\cdot(2x-5)}{-16}=\dfrac{7y+3}{-4}\Rightarrow$

  $\Rightarrow \cancel{12}^{3}\cdot(2x-5)=\cancel{16}^{4}\cdot(7y+3) \Rightarrow 6x - 15 - 28y - 12 = 0 \Rightarrow 6x - 28y - 27 = 0.$

- Avremmo potuto ottenere lo stesso risultato anche applicando la formula stabilita dal Teorema 8, cioè $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}=0$. Verifichiamo con gli stessi dati. $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{7} & 1 \\ -\frac{1}{6} & -1 & 1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{7} & 1 \\ -\frac{1}{6} & -1 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} x & y \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{7} \\ -\frac{1}{6} & -1 \end{matrix}=0\Rightarrow$

  $-\dfrac{3}{7}x-\dfrac{1}{6}y-\dfrac{5}{2}-\left(\dfrac{1}{14}-x+\dfrac{5}{2}y\right)=0\Rightarrow\dfrac{-18x-7y-105-3+42x-105y}{42}=0\Rightarrow 24x - 112y - 108 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6x - 28y - 27 = 0$.

- Vi è anche un altro tipo di approccio, tutto algebrico, alla questione. Dato che i punti hanno diverse ascisse e diverse ordinate, la retta che li contiene non è parallela agli assi coordinati, pertanto la sua equazione è del tipo $y = mx + p$. Possiamo allora determinare i parametri m e p imponendo l'appartenenza dei punti alla retta. Cioè risolvendo il sistema: $\begin{cases} -\frac{3}{7} = \frac{5}{2}m + p \\ -1 = -\frac{1}{6}m + p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 35m + 14p = -6 \\ m - 6p = 6 \end{cases} \Rightarrow m = \dfrac{\begin{vmatrix} -6 & 14 \\ 6 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 35 & 14 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}} = \dfrac{36-84}{-210-14} =$
$= \dfrac{-48}{-224} = \dfrac{3}{14}$, $p = \dfrac{\begin{vmatrix} 35 & -6 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}{-224} = \dfrac{210+6}{-224} = \dfrac{216}{-224} = -\dfrac{27}{28}$. Perciò: $y = \dfrac{3}{14}x - \dfrac{27}{28}$. $\Rightarrow 6x - 28y - 27 = 0$.

Scrivere le equazioni delle rette passanti per le seguenti coppie di punti, utilizzando uno dei tre procedimenti mostrati nel box precedente

Livello 1

25. (1; –3), (4; –5) ; (–1; –4), (0; –2) ; (–7; 7), (–5; –1) [$2x + 3y + 7 = 0$; $2x - y - 2 = 0$; $4x + y + 21 = 0$]
26. $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$, (–2; 1) ; $\left(0;-\frac{1}{3}\right),\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$; (0; 0), $\left(\sqrt{2};-1\right)$ $\left[2x+9y-5=0;3y+1=0;x+\sqrt{2}y=0\right]$
27. $\left(0;\frac{4}{5}\right),\left(-\frac{5}{2};-1\right)$; $\left(-\frac{3}{4};-2\right)$, (–1; 0) [$18x - 25y + 20 = 0$; $8x + y + 8 = 0$]

Livello 2

28. $\left(1-\sqrt{3};1\right),\left(1;1+\sqrt{3}\right)$; $\left(-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(-\sqrt{2};2\right)$ $\left[x-y+\sqrt{3}=0;\left(4+\sqrt{2}\right)x+2\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)y+6=0\right]$
29. $\left(1-\sqrt{2};1\right),\left(1+\sqrt{2};-3\right)$ $\left[2x+\sqrt{2}y+\sqrt{2}-2=0\right]$
30. $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\left(-\frac{1}{2};1-\sqrt{5}\right)$ $\left[\left(10-14\cdot\sqrt{5}\right)x+\left(5\cdot\sqrt{5}+10\right)y-2\cdot\sqrt{5}+20=0\right]$

Livello 3

31. Esistono rette che non contengono alcun punto reticolo? In caso affermativo proporre un esempio ed enunciare una condizione sufficiente.
[$2x + 1 = 0$; Solo due dei tre coefficienti dell'equazione $ax + by + c = 0$ sono irrazionali]
32. Quali punti reticolo le cui coordinate hanno entrambe valori compresi tra –3 e 3, appartengono alla retta di equazione $x + y = 1$? [(–2; –3), (–1; –2), (0; –1), (1; 0), (2; 1), (3; 2)]
33. Quali punti reticolo le cui coordinate hanno entrambe valori compresi tra –3 e 3, appartengono alla retta di equazione $x + 2y = 0$? [(2; –1), (0; 0), (–2; 1)]
34. Per quale valore del parametro m l'equazione $x + y = m$, ammette esattamente 7 punti reticolo le cui coordinate hanno entrambe valori compresi tra –3 e 3? [0]

Lavoriamo insieme

Determinare le equazioni delle mediane del triangolo di vertici i punti $A \equiv (-3; 1)$, $B \equiv (2; -3)$, $C \equiv (4; -1)$.
Intanto cominciamo a verificare che i punti non sono allineati, cioè che il seguente determinante non è nullo $\left|\begin{matrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -3 & 1 \\ 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{matrix} = 0 \Rightarrow 9+4-2-\left(-12+3+2\right)=11+7\neq 0$. Adesso determiniamo i punti medi dei lati, usando la formula vista nell'unità 2: $M_{AB} \equiv \left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$. Si ha: $M_{AB} \equiv \left(\frac{-3+2}{2};\frac{1-3}{2}\right) \equiv \left(-\frac{1}{2};-1\right)$,

$M_{AC} \equiv \left(\frac{-3+4}{2};\frac{1-1}{2}\right) \equiv \left(\frac{1}{2};0\right), M_{BC} \equiv \left(\frac{2+4}{2};\frac{-3-1}{2}\right) \equiv (3;-2)$. Adesso determiniamo le equazioni delle mediane, con una qualsiasi delle formule già viste per la retta per 2 punti (compito lasciato per esercizio). Abbiamo: $\overrightarrow{AM_{BC}}: x+2y+1=0$, $\overrightarrow{BM_{AC}}: 2x+y-1=0$, $\overrightarrow{CM_{AB}}: y=-1$.

Verifichiamo che le rette si incontrano nel baricentro, che è $G_{ABC} \equiv \left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$, nel nostro caso si ha: $G_{ABC} \equiv \left(\frac{-3+2+4}{3};\frac{1-3-1}{3}\right) \equiv (1;-1)$. Basta allora verificare che G appartiene a tutte e tre le rette: $1+2\cdot(-1)+1=0$; $2\cdot 1-1-1=0$; $-1=-1$.

Scrivere le equazioni delle mediane dei triangoli di cui forniamo i vertici, verificando poi che tali mediane si incontrano sempre nel baricentro

Livello 2

35. (4; 1), (–2; 0), (1; –1) ; $\left(\frac{1}{3};\frac{5}{9}\right),\left(\frac{2}{3};\frac{7}{9}\right),\left(-\frac{1}{2};0\right)$ [$x-3y-1=0$; $y=0$; $x=1$; Punti allineati]
36. (1; 2), (–1; 3), (–2; –1) [$2x-5y+8=0$; $5x+y+2=0$; $7x-4y+10=0$]
37. (3; 0), (–2; 1), (–4; –1) [$y=0$; $x+y+1=0$; $x-3y+1=0$]
38. $\left(\frac{1}{2};-1\right),\left(-1;\frac{2}{3}\right)$, (–3; 0) [$8x+15y+11=0$; $14x-3y+16=0$; $2x+33y+16=0$]

Livello 3

39. Determinare l'equazione della mediana condotta da $(x_A; y_A)$ al lato opposto di vertici $(x_B; y_B)$ e $(x_C; y_C)$. Verificare la correttezza di tale formula applicandola ai dati degli esercizi precedenti. Verificare poi che il baricentro appartiene a tutte e tre le mediane di un qualsiasi triangolo.
[$(2y_A-y_B-y_C)\cdot x-(2x_A-x_B-x_C)\cdot y+x_A\cdot y_B+x_A\cdot y_C-x_B\cdot y_A-x_C\cdot y_A=0$]

Lavoriamo insieme

Verificare che il triangolo di vertici $A \equiv (1; 2)$, $B \equiv (-3; 4)$, $C \equiv \left(\sqrt{3}-1;3+2\cdot\sqrt{3}\right)$, *è equilatero.*

Troviamo che ogni lato misura $2\cdot\sqrt{5}$ (lasciamo i calcoli per esercizio). Determiniamo l'equazione della mediana relativa ad AB. Il punto medio: $M_{AB} \equiv \left(\frac{1-3}{2};\frac{2+4}{2}\right) \equiv (-1;3)$, quindi l'equazione della mediana è:
$\overrightarrow{CM_{AB}}: \frac{x+1}{\sqrt{3}-1+1} = \frac{y-3}{3+2\cdot\sqrt{3}-3} \Rightarrow \frac{x+1}{\sqrt{3}} = \frac{y-3}{2\cdot\sqrt{3}} \Rightarrow 2x+2-y+3=0 \Rightarrow 2x-y+5=0$. Dato che il triangolo è equilatero, questa è anche l'equazione dell'asse di AB. Gli assi si incontrano nel circocentro che nel caso del triangolo equilatero coincide con il baricentro ma in generale è il punto equidistante dai tre vertici. Consideriamo gli assi del triangolo di vertici $A \equiv (2; -1)$, $B \equiv (3; -4)$, $C \equiv (-3; -2)$, applicando la procedura precedente, troviamo l'equazione: $x-3y-10=0$, $5x+y+4=0$, $3x-y-3=0$. Le coordinate $C \equiv (x; y)$ del circocentro sono soluzioni di:

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y+1)^2=(x-3)^2+(y+4)^2\\(x-2)^2+(y+1)^2=(x+3)^2+(y+2)^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2-4x+4+y^2+2y+1=x^2-6x+9+y^2+8y+16\\x^2-4x+4+y^2+2y+1=x^2+6x+9+y^2+4y+4\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}2x-6y-20=0\\-10x-2y-8=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-3y-10=0\\5x+y+4=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-\frac{1}{8}\\y=-\frac{27}{8}\end{cases}.$$

Si verifica facilmente che C appartiene alle rette precedenti.

Scrivere le equazioni degli assi dei lati dei triangoli di cui forniamo i vertici, verificando poi che tali assi si incontrano sempre in un punto C, di cui si chiedono le coordinate

***Livello* 1**

40. (–1; 0), (–2; 1), (3; –1) $\left[x - y + 2 = 0,\ 8x - 2y - 9 = 0;\ 10x - 4y - 5 = 0;\ C \equiv \left(\frac{13}{6}; \frac{25}{6}\right)\right]$

41. (4; 1), (–1; 3), (–2; 5) $\left[10x - 4y - 7 = 0;\ 3x - 2y + 3 = 0;\ 2x - 4y + 19 = 0;\ C \equiv \left(\frac{13}{4}; \frac{51}{8}\right)\right]$

42. $\left(-\frac{2}{3}; 3\right), \left(-\frac{3}{4}; \frac{4}{5}\right), \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

$\left[600x + 15840y - 29671 = 0;\ 6x - 90y + 161 = 0;\ 200x - 240y + 281 = 0;\ C \equiv \left(\frac{445}{552}; \frac{15257}{8280}\right)\right]$

43. (3; 2), (5; 0), (0; 2) $\left[x - y - 3 = 0;\ 2x - 3 = 0;\ 10x - 4y - 21 = 0;\ C \equiv \left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)\right]$

44. $\left(\frac{1}{2}; -2\right), \left(0; -\frac{2}{3}\right)$, (–1; 3) $\left[36x - 96y - 137 = 0;\ 12x - 40y + 23 = 0;\ 9x - 33y + 43 = 0;\ C \equiv \left(\frac{961}{12}; \frac{103}{12}\right)\right]$

Determinare il valore del parametro reale m in modo tale che la data retta sia asse del segmento di estremi dati

***Livello* 2**

45. (–1; 3), (m; 4), $x + y - 6 = 0$; (4; –2), (1 + m; 3), $12x + 40y - 77 = 0$ $\left[\varnothing; \frac{9}{2}\right]$

46. (1 – m; 2), (–2; 3 – m), $4x + 2y + 3 = 0$; (1 – 2m; m + 3), (3; –5), $16x - 22y + 27 = 0$ [∅ ; 3]

47. (0; 2 – m), (2m + 3; 4m + 7), r: $48x + 40y - 171 = 0$ $\left[-\frac{3}{4}\right]$

Livello 2

48. Determinare l'equazione dell'asse del segmento di estremi i punti $A \equiv (x_A; y_A)$ e $B \equiv (x_B; y_B)$

$\left[2\cdot(x_B - x_A)\cdot x + 2\cdot(y_B - y_A)\cdot y + x_A^2 - x_B^2 + y_A^2 - y_B^2 = 0\right]$.

Lavoriamo insieme

Dati la retta r : $2x - 3y + 4 = 0$ *e i punti* $A \equiv (2; -3)$ e $B \equiv (1; -4)$ *non appartenenti a r, vogliamo determinare un terzo punto C appartenente a r in modo che il triangolo ABC sia rettangolo di ipotenusa BC.*

Intanto dobbiamo determinare le coordinate di un generico punto appartenente a r, basta esprimere una delle incognite mediante l'altra. Per esempio $x = \frac{3}{2}y - 2$. Ciò significa che un generico punto di r ha coordinate $\left(\frac{3}{2}y - 2; y\right)$. Dobbiamo perciò determinare il valore dell'incognita y, applicando le richiesta del problema, cioè $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$. Traduciamola in equazione: $(2-1)^2 + (-3+4)^2 + \left(\frac{3y-4}{2} - 2\right)^2 +$ $+(y+3)^2 = \left(\frac{3y-4}{2} - 1\right)^2 + (y+4)^2$. Risolviamo: $1 + 1 + \left(\frac{3y-4}{2}\right)^2 - 2\cdot(3y-4) + 4 + y^2 + 6y + 9 = \left(\frac{3y-4}{2}\right)^2 -$ $-(3y-4) + 1 + y^2 + 8y + 16 \Rightarrow 15 - 6y + 8 + 6y = -3y + 4 + 17 + 8y \Rightarrow -5y + 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{5}$. Il punto cercato è perciò: $C \equiv \left(\frac{3\cdot\frac{2}{5} - 4}{2}; \frac{2}{5}\right) \equiv \left(\frac{6-20}{10}; \frac{2}{5}\right) \equiv \left(-\frac{7}{5}; \frac{2}{5}\right)$.

***Livello* 2**

49. Determinare un punto C appartenente alla retta di equazione $4x - y + 2 = 0$, in modo che il triangolo ABC, con $A \equiv (0; 3)$ e $B \equiv (1; -4)$, sia rettangolo di ipotenusa AB. $\left[C_1 \equiv \left(-\frac{19+\sqrt{769}}{34}; -\frac{4+2\cdot\sqrt{769}}{17}\right), C_2 \equiv \left(\frac{-19+\sqrt{769}}{34}; \frac{-4+2\cdot\sqrt{769}}{17}\right)\right]$

50. Determinare un punto C appartenente alla retta di equazione $3x + 5y - 1 = 0$, in modo che il triangolo ABC, con $A \equiv (1; 5)$ e $B \equiv (-1; 2)$, sia rettangolo di ipotenusa AC. $[C \equiv (17; -10)]$

51. Determinare un punto C appartenente alla retta di equazione $5x + 2y - 3 = 0$, in modo che il triangolo ABC, con $A \equiv (0; -3)$ e $B \equiv (4; -1)$ sia isoscele sulla base AB. $[C \equiv (-1; 4)]$

52. Determinare un punto C appartenente alla retta di equazione $x - 2y + 1 = 0$, in modo che il triangolo ABC, con $A \equiv (2; -1)$ e $B \equiv (-3; -4)$ sia equilatero. [Impossibile]

53. Determinare un punto C appartenente alla retta di equazione $2x + y - 5 = 0$, in modo che il triangolo ABC, con $A \equiv (3; 2)$ e $B \equiv (-3; 0)$ sia isoscele sulla base BC. $\left[C_1 \equiv \left(\frac{9-\sqrt{191}}{5}; \frac{7+\sqrt{191}}{5}\right), C_2 \equiv \left(\frac{9+\sqrt{191}}{5}; \frac{7-\sqrt{191}}{5}\right)\right]$

54. Sulla retta $3x + 7y - 4 = 0$, determinare un punto C in modo che sia terzo vertice del triangolo ABC con $A \equiv (1; 3)$ e $B \equiv (2; -5)$, il cui baricentro sia $G \equiv \left(-\frac{8}{9}; \frac{1}{3}\right)$. $\left[C \equiv \left(-\frac{17}{3}; 3\right)\right]$

Livello 3

55. Sulla retta $2x - 5y + 2 = 0$, determinare un punto C in modo che sia terzo vertice del triangolo ABC, con $A \equiv (3; -2)$ e $B \equiv (-1; 4)$, la cui area misuri 3. $\left[C_1 \equiv \left(\frac{6}{19}; \frac{10}{19}\right) \vee C_2 \equiv \left(\frac{36}{19}; \frac{22}{19}\right)\right]$

56. $P \equiv (x_P; y_P)$ e $Q \equiv (x_Q; y_Q)$ stanno entrambi su uno dei semipiani individuati dalla retta $ax + by + c = 0$, che segno ha il prodotto $(a \cdot x_P + b \cdot y_P + c) \cdot (a \cdot x_Q + b \cdot y_Q + c)$? [positivo]

57. Determinare il valore di m in modo che i punti $P \equiv (-1; -2)$, $Q \equiv (4; 2)$, $R \equiv (1; m)$ siano allineati. $\left[-\frac{2}{5}\right]$

58. L'equazione $x^2 - y^2 = 0$ può scriversi anche come $(x - y) \cdot (x + y) = 0$, quindi rappresenta le due bisettrici dei quadranti. Possiamo dire che, in generale, l'equazione $ax^2 - by^2 = 0$, rappresenta due rette che si incontrano nell'origine, qualunque siano i numeri reali a e b? [No, solo se $ab > 0$]

59. Cosa rappresenta l'equazione $x^2 = 0$? [L'asse y]

60. Cosa rappresenta l'equazione $xy = 0$? [Gli assi coordinati]

61. Cosa rappresenta l'equazione $xy - ax - by + ab = 0$? [Due rette parallele agli assi coordinati]

62. Possiamo dire che l'equazione $ax^2 + by^2 = c$, con tutti i coefficienti non nulli, non rappresenta mai rette? E l'equazione $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$? [Sì; No, p.e. $x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$]

63. Con riferimento al precedente quesito, quando $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$, rappresenta rette? [Quando si può scomporre nel prodotto di due espressioni di I grado]

Posizioni reciproche di due rette

Il problema

Due rette nel piano possono trovarsi in una sola delle seguenti reciproche posizioni: *incidenti*, *coincidenti*, *parallele*. Riusciamo a determinare una condizione analitica che ci permetta di distinguere, date le equazioni di due rette, in che reciproca posizione esse sono?

Il problema posto, da un punto di vista analitico è di semplice impostazione e di altrettanto semplice soluzione. Chiedersi se due rette hanno o no punti in comune, da un punto di vista analitico equivale a dire se le equazioni che le rappresentano hanno o no soluzioni comuni, quindi le reciproche posizioni di due rette sono governate dalle soluzioni di un sistema lineare di due equazioni in due incognite. Dato che sappiamo che un sistema del genere può avere 1, 0 o infinite soluzioni, tutto concorda con le soluzioni geometriche del problema.

Esempio 15

Vogliamo stabilire le reciproche posizioni delle rette di equazioni: $3x + 2y - 1 = 0$ e $4x - 2y + 1 = 0$.
Risolviamo il sistema formato da tali equazioni: $\begin{cases} 3x+2y-1=0 \\ 4x-2y+1=0 \end{cases}$. Vediamo se ammette o no soluzioni: $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6-8 \neq 0$. Per il teorema di Cramer – Leibniz il sistema ammette un'unica soluzione, quindi le rette sono incidenti. Se vogliamo determinare le coordinate di tale punto dobbiamo completare la risoluzione del sistema: $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}}{-14} = \dfrac{-2+2}{-14} = 0$, $\quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{-14} = \dfrac{-3-4}{-14} = \dfrac{-7}{-14} = \dfrac{1}{2}$. Le rette sono quindi incidenti nel punto $P \equiv \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$, come può essere verificato facilmente.

Applicando il procedimento dell'esempio precedente a rette generiche, siamo in grado di determinare anche le relazioni fra i coefficienti delle rette e le loro reciproche posizioni.

Teorema 9

Condizione necessaria e sufficiente affinché le rette di equazioni $ax + by + c = 0$ e $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, siano incidenti è che si abbia: $\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = a\beta - b\alpha \neq 0$.

Dal precedente teorema si trae il seguente immediato corollario, del resto intuitivo dal significato di coefficiente angolare.

Corollario 1

Condizione necessaria e sufficiente affinché due rette siano parallele è che abbiano lo stesso coefficiente angolare.

Esempio 16

Consideriamo le rette di equazioni $2x + 4y - 1 = 0$ e $x + 2y + 1 = 0$. Visto che si ha $2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0$, possiamo concludere che esse sono parallele. Verifichiamo che hanno lo stesso coefficiente angolare: $-\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2}$.

Possiamo allora scrivere l'equazione dell'unica retta passante per un dato punto e parallela a una retta data.

Esempio 17

Data la retta di equazione $3x + 5y – 4 = 0$ e il punto $P \equiv (–2; 3)$, qual è l'equazione della retta ad essa parallela e passante per P? Dobbiamo scrivere una retta che passa certamente per P; un modo semplice per farlo è il seguente: $a \cdot (x + 2) + b \cdot (y – 3) = 0$ (*) Infatti in questo modo se sostituiamo alle incognite le coordinate di P otteniamo un'identità: quali che siano i valori assegnati ai parametri a e b, la retta di equazione (*) contiene P. Dobbiamo ora scegliere in modo opportuno a e b per fare sì che (*) sia parallela alla retta data. Anche in questo caso la soluzione è semplice: basta scegliere tali parametri uguali ai coefficienti omonimi della retta data, cioè $a = 3$ e $b = 5$. La retta cercata ha equazione $3 \cdot (x + 2) + 5 \cdot (y – 3) = 0 \Rightarrow 3x + 6 + 5y – 15 = 0 \Rightarrow 3x + 5y – 9 = 0$.

L'esempio ci consente di enunciare il seguente risultato.

Teorema 10

L'equazione della retta passante per $P \equiv (x_P; y_P)$ e parallela a una retta data r non parallela all'asse y, è:

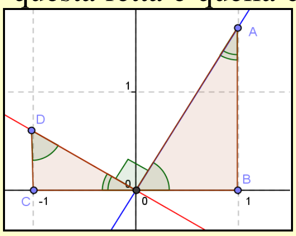
$$a \cdot (x – x_P) + b \cdot (y – y_P) = 0, \quad \text{se } r \text{ ha equazione } ax + by + c = 0;$$
$$y – y_P = m \cdot (x – x_P) \quad \text{se } r \text{ ha equazione } y = mx + p.$$

Dimostrazione

Si ottiene seguendo il procedimento dell'esempio 17.

Fra le rette incidenti, quelle fra loro perpendicolari hanno sempre avuto un posto di rilievo; crediamo perciò interessante cercare di determinare le relazioni fra i coefficienti delle equazioni di rette fra loro perpendicolari.

Esempio 18

Riconsideriamo la retta di equazione $3x + 5y – 4 = 0$ e il punto $P \equiv (–2; 3)$, cercando ora l'equazione della retta a essa perpendicolare e passante per P. Ancora una volta la retta ha la forma seguente che le garantisce il passaggio per P: $a \cdot (x + 2) + b \cdot (y – 3) = 0$. Come scegliere i parametri in questo caso?
Cerchiamo di semplificare il problema. La retta $3x + 5y = 0$ è parallela a quella data, passa per l'origine degli assi e ha coefficiente angolare $-\frac{3}{5}$. Se troviamo l'equazione della perpendicolare a tale retta per l'origine, abbiamo ottenuto il risultato cercato, dato che questa retta e quella che cerchiamo sono fra loro parallele e hanno perciò lo stesso coefficiente angolare. 

Nel disegno precedente abbiamo rappresentato le due rette scegliendo poi i triangoli OAB e ODC fra loro simili a causa del fatto che l'angolo formato dalle date rette è di 90°. Inoltre abbiamo scelto i punti B e C con ascisse rispettivamente 1 e –1, quindi i segmenti OB e OC hanno la stessa lunghezza. Possiamo allora scrivere: $\frac{\overline{DC}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}}$. Poiché abbiamo posto pari a 1 la misura dei cateti OB e OC, possiamo dire che il coefficiente angolare delle due rette è rispettivamente dato dall'ordinata di A, per la retta per O e A, e dall'opposto dell'ordinata di D, per la retta per O e D. Del resto noi sappiamo che D sta sulla retta $3x + 5y = 0$ e quindi ha coordinate $D \equiv \left(-1; \frac{5}{3}\right)$, ma allora possiamo scrivere: $\overline{AB} = \frac{1}{\overline{DC}} \Rightarrow A \equiv \left(1; \frac{1}{\overline{DC}}\right) \equiv \left(1; \frac{1}{\frac{3}{5}}\right) \equiv \left(1; \frac{5}{3}\right)$. Il coefficiente angolare della perpendicolare è $-\frac{a'}{b'} = \frac{5}{3}$, quindi l a sua equazione è: $5 \cdot (x + 2) – 3 \cdot (y – 3) = 0 \Rightarrow 5x – 3y + 19= 0$. Considerando ancora la retta per l'origine $3x + 5y = 0$, che come abbiamo visto ha coefficiente angolare $-\frac{a}{b}=-\frac{3}{5}$, e la perpendicolare per A, ad essa per l'origine di coefficiente angolare $\frac{5}{3}$, appare evidente la relazione tra i rispettivi coefficienti angolari: $a' = b$, $b' = -a$ se le rette sono in forma implicita; $m'=-\frac{1}{m}$, se le rette sono in forma esplicita.

Quanto visto nell'esempio ci permette di enunciare e dimostrare il seguente teorema.

Teorema 11

L'equazione della retta passante per $P \equiv (x_P; y_P)$ e perpendicolare a una retta data r non parallela all'asse x, è:

$$b \cdot (x - x_P) - a \cdot (y - y_P) = 0, \qquad \text{se } r \text{ ha equazione } ax + by + c = 0$$

$$y - y_P = -\frac{1}{m}\cdot(x - x_P) \qquad \text{se } r \text{ ha equazione } y = mx + p.$$

Dimostrazione Si ottiene seguendo il procedimento dell'esempio 18.

Immediati corollari sono i seguenti.

Corollario 2

Condizione necessaria e sufficiente affinché le rette di equazioni $y = mx + p$ e $y = m'x + p'$ ($m \cdot m' \neq 0$), siano perpendicolari è che abbiano coefficienti angolari il cui prodotto valga 1. In simboli $m \cdot m' = -1$.

Corollario 3

Condizione necessaria e sufficiente affinché le rette (nessuna delle quali parallela agli assi) di equazioni $ax + by + c = 0$ e $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, siano perpendicolari è che si abbia: $a \cdot \alpha + b \cdot \beta = 0$.

Esempio 19

Sfruttando il Teorema 11 vogliamo trovare per altra via l'equazione dell'asse di un segmento. Sappiamo che tale retta è perpendicolare al segmento nel suo punto medio. Determiniamo allora il punto medio del segmento: $M_{AB}\equiv\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$. Applichiamo ora la formula citata, nella forma esplicita, tenuto conto che il coefficiente angolare della retta cui appartiene il segmento AB è (Teorema 7): $\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}$.

$$y-\frac{y_A+y_B}{2}=-\frac{1}{\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}}\cdot\left(x-\frac{x_A+x_B}{2}\right)\Rightarrow y-\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{x_B-x_A}{y_A-y_B}\cdot\left(x-\frac{x_A+x_B}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2y-y_A-y_B}{2}=\frac{x_B-x_A}{y_A-y_B}\cdot\frac{2x-x_A-x_B}{2}\Rightarrow(2y-y_A-y_B)\cdot(y_A-y_B)=(x_B-x_A)\cdot(2x-x_A-x_B)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y\cdot(y_A-y_B)-(y_A+y_B)\cdot(y_A-y_B)-2x\cdot(x_B-x_A)+(x_B-x_A)\cdot(x_B+x_A)=0\Rightarrow 2y\cdot(y_A-y_B)-y_A^2+y_B^2-$$

$$-2x\cdot(x_B-x_A)+x_B^2-x_A^2=0\Rightarrow 2x\cdot(x_B-x_A)+2y\cdot(y_B-y_A)+y_A^2-y_B^2-x_B^2+x_A^2=0.$$

L'equazione ottenuta, a parte qualche lieve differenza formale, coincide con quella trovata con altra tecnica.

Siamo già in grado di calcolare la distanza di due punti; vogliamo ora determinare la distanza di un punto da una retta, che risulta utile per esempio per il calcolo dell'altezza di un triangolo.

Esempio 20

Vogliamo determinare la distanza del punto $P \equiv (-2; 5)$, dalla retta di equazione $3x + 4y - 2 = 0$. Innanzi tutto verifichiamo che il punto è esterno alla retta, perché diversamente la sua distanza sarebbe zero: $3 \cdot (-2) +$

$4 \cdot 5 - 2 = -6 + 20 - 2 = 12 \neq 0$. Ci chiediamo ora che cosa intendiamo per distanza di un punto da una retta. Infiniti sono i segmenti che congiungono il punto dato con punti della retta, ma di questi segmenti ve ne è uno solo che ha la misura minima, ed è quello che risulta perpendicolare alla retta. Per trovarne la misura dobbiamo effettuare i seguenti passi:

1. determinare la perpendicolare n alla retta r per P;
2. determinare l'intersezione P' fra n ed r;
3. determinare la distanza fra P e P'.

Cominciamo con il passo 1: n: $4 \cdot (x + 2) - 3 \cdot (y - 5) = 0 \Rightarrow 4x - 3y + 23 = 0$. Procediamo con il passo 2: $\begin{cases} 3x+4y-2=0 \\ 4x-3y+23=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+4y=2 \\ 4x-3y=-23 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -23 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}} = \dfrac{-6+92}{-9-16} = -\dfrac{86}{25}; y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -23 \end{vmatrix}}{-25} = \dfrac{-69-8}{-9-16} = \dfrac{77}{25}$. Infine:

$$\overline{PP'} = \sqrt{\left(-2+\frac{86}{25}\right)^2 + \left(5-\frac{77}{25}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{36}{25}\right)^2 + \left(\frac{48}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{1296+2304}{25^2}} = \frac{\sqrt{3600}}{25} = \frac{60}{25} = \frac{12}{5}.$$

Applicando la tecnica mostrata nell'esempio dimostriamo il seguente teorema.

Teorema 12

La distanza del punto $P \equiv (x_P; y_P)$ dalla retta di equazione $ax + by + c = 0$ è $\dfrac{|a \cdot x_P + b \cdot y_P + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Dimostrazione

Determiniamo la perpendicolare alla retta per il punto P. $b \cdot (x - x_P) - a \cdot (y - y_P) = 0$. Intersechiamo la precedente retta con la retta data: $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ bx-ay-bx_P+ay_P=0 \end{cases}$. Determiniamo il punto intersezione delle due rette del passo 2. $P' \equiv \left(\dfrac{b^2x_P-aby_P-ac}{a^2+b^2}; \dfrac{a^2y_P-abx_P-bc}{a^2+b^2}\right)$. Determiniamo la distanza fra P e P': $\overline{PP'} \equiv \sqrt{\left(\dfrac{b^2x_P-aby_P-ac}{a^2+b^2}-x_P\right)^2+\left(\dfrac{a^2y_P-abx_P-bc}{a^2+b^2}-y_P\right)^2}$. Semplifichiamo la precedente espressione:

$$\overline{PP'} = \sqrt{\left(\frac{a^2x_P+aby_P+ac}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\frac{b^2y_P+abx_P+bc}{a^2+b^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2\cdot(ax_P+by_P+c)^2+b^2\cdot(by_P+ax_P+c)^2}{(a^2+b^2)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\cancel{(a^2+b^2)}\cdot(ax_P+by_P+c)^2}{(a^2+b^2)^{\cancel{2}}}} = \sqrt{\frac{(ax_P+by_P+c)^2}{a^2+b^2}} = \frac{|ax_P+by_P+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo usato il valore assoluto perché non siamo certi del segno del radicando.

Verifichiamo la formula stabilita dal precedente teorema.

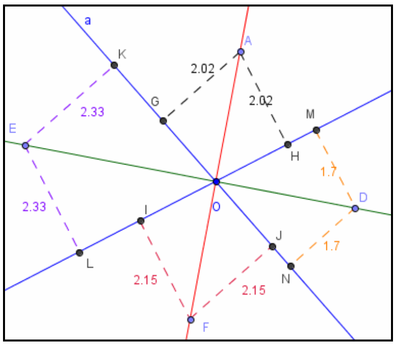
Esempio 21

Applichiamo la formula ancora al punto $P \equiv (-2; 5)$ e alla retta di equazione $3x + 4y - 2 = 0$.

$$\overline{PP'} = \frac{|3\cdot(-2)+4\cdot 5-2|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|-6+20-2|}{\sqrt{25}} = \frac{12}{5}.$$

Concludiamo determinando l'equazione di un altro luogo formato da rette, cioè le bisettrici di un angolo. Sappiamo che la bisettrice è il luogo dei punti del piano equidistanti dai lati dell'angolo.
Noi rappresentiamo un angolo mediante le semirette dei suoi lati. Per semplificare il lavoro, consideriamo le

rette dei lati, anche se in questo modo otterremo non una bisettrice ma due, come esemplificato in figura.



Esempio 22

Date le rette di equazioni $4x - y + 4 = 0$, $x + 3y + 1 = 0$; poiché non sono fra loro parallele esse si incontrano in un punto determinando 4 angoli, a due a due isometrici. Vogliamo determinare le equazioni delle bisettrici delle coppie di angoli. Cerchiamo allora tutti i punti $P \equiv (x; y)$ che hanno la stessa distanza dalle due rette, che verificano cioè la seguente uguaglianza: $\frac{|4x-y+4|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}} = \frac{|x+3y+1|}{\sqrt{1^2+3^2}} \Rightarrow \frac{|4x-y+4|}{\sqrt{17}} = \frac{|x+3y+1|}{\sqrt{10}}$. La presenza dei valori assoluti fa sì che la precedente scritta rappresenti non una ma due equazioni:

$$\frac{4x-y+4}{\sqrt{17}} = \frac{x+3y+1}{\sqrt{10}} \wedge \frac{4x-y+4}{\sqrt{17}} = \frac{-x-3y-1}{\sqrt{10}}$$

Ossia, semplificando: $\left(4\cdot\sqrt{10}-\sqrt{17}\right)\cdot x - \left(\sqrt{10}+3\cdot\sqrt{17}\right)\cdot y + 4\cdot\sqrt{10}-\sqrt{17} = 0$

$$\left(4\cdot\sqrt{10}+\sqrt{17}\right)\cdot x - \left(\sqrt{10}-3\cdot\sqrt{17}\right)\cdot y + 4\cdot\sqrt{10}+\sqrt{17} = 0.$$

Basandoci sul precedente esempio dimostriamo con facilità il seguente teorema.

Teorema 13

Le bisettrici degli angoli formati dalle rette $ax + by + c = 0$ e $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, hanno equazioni:

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} \pm \frac{\alpha x+\beta y+\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = 0.$$

Verifiche

Lavoriamo insieme

Stabilire la reciproca posizione delle rette di equazione $3x - y + 1 = 0$ *e* $4x + 5y - 2 = 0$.
Potremmo risolvere il sistema formato con le equazioni delle due rette, ma a noi interessa solo un risultato qualitativo, ossia vogliamo sapere se sono parallele, incidenti o coincidenti. Basta quindi usare il risultato del Teorema 9, riferito alle generiche rette $ax + by + c = 0$ e $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, calcolando la quantità: $\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = a \cdot \beta - b \cdot \alpha$. Nel nostro caso essa è $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 + 1 \cdot 4 = 19 \neq 0$, quindi le rette sono incidenti. Per determinare le coordinate del punto di intersezione risolviamo il sistema: $\begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ 4x + 5y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{19} = \dfrac{-5+2}{19} = -\dfrac{3}{19}$; $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}{19} = \dfrac{6+4}{19} = \dfrac{10}{19}$. Il punto intersezione ha coordinate $I \equiv \left(-\dfrac{3}{19}; \dfrac{10}{19}\right)$.

Determinare le reciproche posizioni delle seguenti coppie di rette, calcolando anche le coordinate del loro eventuale punto comune I

***Livello* 1**

1. $3x + 4y - 5 = 0$, $-2x + 7y + 1 = 0$; $x + y - 1 = 0$, $2x - 3y - 2 = 0$ $\left[\left(\dfrac{39}{29}; \dfrac{7}{29}\right); (1; 0)\right]$
2. $6x - 4y + 10 = 0$, $3x - 2y - 5 = 0$; $3x - y + 5 = 0$, $12x - 4y + 20 = 0$ [Rette parallele; Rette coincidenti]
3. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{1}{4} = 0$, $6x + 4y + 3 = 0$; $\dfrac{x}{4} - 4y + 20 = 0$, $\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{10} + 1 = 0$ $\left[\left(-\dfrac{5}{3}; 0\right); \left(\dfrac{4}{3}; \dfrac{50}{3}\right)\right]$

***Livello* 2**

4. $\sqrt{2}x - y + 1 = 0, 2x - \sqrt{2}y + \sqrt{2} = 0$; $\sqrt{2}x - y + 1 = 0, x - \sqrt{2}y + \sqrt{2} = 0$ [Rette coincidenti; (0; 1)]
5. $x - 2y + 1 = 0$, $x + \sqrt{3}y = 0$; $\dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{3}y - 2 = 0, 9x - 2 \cdot \sqrt{3}y - 1 = 0$ $\left[\left(3 - 2 \cdot \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}\right); \text{Rette parallele}\right]$
6. $\left(1 - \sqrt{2}\right)x - 2y = 0, x + \left(1 + \sqrt{2}\right)y + 1 = 0$ $\left[I \equiv \left(-2; \sqrt{2} - 1\right)\right]$
7. Determinare perimetro e area del triangolo rettangolo che la retta di equazione $x - 3y + 5 = 0$ forma con gli assi coordinati. $\left[2p = 5 \cdot \dfrac{4 + \sqrt{10}}{3}, A = \dfrac{25}{6}\right]$
8. Consideriamo le rette di equazioni: $y = 3x + 2$; $y = -3x + 2$ e $y = -2$, esse racchiudono una porzione di piano che rappresenta che figura geometrica? [Un triangolo isoscele]
9. Determinare perimetro e area del triangolo determinato dalle rette: $2x + y - 4 = 0$, $y = x - 2$, $x = 2 - 3y$. [Le rette sono incidenti, quindi non determinano alcun triangolo]
10. Determinare perimetro e area del triangolo determinato dalle rette: $-4x + 5y = 0$, $3y + 7x + 5 = 0$ e $2x - 9y + 1 = 0$. $\left[2p = \dfrac{177 \cdot \sqrt{41}}{1222} + \dfrac{59 \cdot \sqrt{58}}{1081} + \dfrac{59 \cdot \sqrt{85}}{598}; A = \dfrac{10443}{56212}\right]$
11. Determinare il perimetro del quadrilatero determinato dalle rette di equazioni: $x + 2y - 1 = 0$, $x = 2$, $3x - y - 5 = 0$ e $2x - 3y + 1 = 0$. $\left[2p = \dfrac{13 \cdot \sqrt{13} + 9 \cdot \sqrt{10} + 14}{21}\right]$

Determinare il valore del parametro m in modo che le seguenti rette abbiano in comune il punto indicato

Livello 2

12. $x + my - 1 = 0, -x + y + 1 = 0, I \equiv (1; 0)$; $mx + 2y = 0, 3x - y - 1 = 0, I \equiv (0; 0)$ $[\forall m \in \mathbb{R}; \varnothing]$
13. $3mx + y = 0, 4x - 3y - 1 = 0, I \equiv \left(\frac{1}{13}; -\frac{3}{13}\right)$ $[m = 1]$
14. $(1 - m) \cdot x - y + 1 = 0, x - (1 + m) \cdot y - 1 = 0, I \equiv (6; 10)$ $\left[m = -\frac{1}{2}\right]$
15. $mx - y + 1 - m = 0, x - 3y + 2 = 0, I \equiv \left(\frac{4}{13}; \frac{10}{13}\right)$ $\left[m = -\frac{3}{4}\right]$
16. $x + 2y - 3 = 0, 2x + y + 3 = 0, I \equiv (1 - m, 3)$ $[m = 4]$
17. $(1 - 2m) \cdot x + y - 2 = 0, (1 + m) \cdot x + y - 3 = 0, I \equiv \left(m; \frac{8 - \sqrt{3}}{3}\right)$ $\left[m = \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

Livello 3

18. Determinare i valori reali del parametro m in modo che l'area del triangolo rettangolo che la retta di equazione $mx - y + m = 0$, forma con gli assi coordinati sia 3. $[m = \pm 6]$
19. Determinare i valori reali del parametro m in modo che le rette: $x + my - 1 = 0$, $3x + 2y = 0$ e $x = 1$, racchiudano un triangolo di area 4. $\left[m = \frac{32}{57} \vee m = \frac{32}{39}\right]$
20. Enunciare una condizione sufficiente sui segni dei coefficienti delle equazioni di due rette, per potere dire che esse sono incidenti: $ax + by + c = 0$ e $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$. [$a \cdot b$ e $\alpha \cdot \beta$ devono avere segni diversi]
21. Due pali alti 10 m e 15 m distano 20 m. Uniamo con dei cavi le cime dei pali alle basi dei pali opposti, vogliamo sapere a che altezza dal suolo si incontrano i cavi. [6 m]

Lavoriamo insieme

Determinare l'equazione della retta passante per il punto $A \equiv (2; -4)$ e parallela alla retta $3x - 2y + 1 = 0$.
Per far ciò possiamo sfruttare una delle formule stabilite dal Teorema 10, in particolare quella relativa alla forma implicita di una retta. Ossia la retta per $P \equiv (x_P; y_P)$ e parallela alla retta di equazione $ax + by + c = 0$, ha equazione $a \cdot (x - x_P) + b \cdot (y - y_P) = 0$. Nel nostro caso abbiamo allora:

$$3 \cdot (x - 2) - 2 \cdot (y + 4) = 0 \Rightarrow 3x - 6 - 2y - 8 = 0 \Rightarrow 3x - 2y - 14 = 0.$$

Determinare l'equazione della retta parallela alla retta r e passante per il punto P

Livello 1

22. r: $3x - 2y = 0, P \equiv (1; -3)$; r: $2x + 5y = 0, P \equiv (4; -1)$ $[3x - 2y - 9 = 0; 2x + 5y - 3 = 0]$
23. r: $-x - 3y = 0, P \equiv (0; 1)$; r: $-4x + y - 5 = 0, P \equiv (-2; -3)$ $[-x - 3y + 3 = 0; 4x - y + 5 = 0]$
24. r: $y = -3x + 5,\ P \equiv \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$; $r: y = -\frac{5}{6}x - 3, P \equiv \left(-2; -\frac{4}{3}\right)$ $\left[y = -3x; y = -\frac{5}{6}x - 3\right]$
25. $\frac{x}{3} - \frac{2}{5}y - \frac{7}{8} = 0,\ P \equiv \left(-\frac{1}{3}; \frac{3}{4}\right)$; $-\frac{1}{3}x = \frac{4}{5}y,\ P \equiv \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{1}{2}\right)$ $\left[\frac{x}{3} - \frac{2}{5}y + \frac{37}{90} = 0; \frac{1}{3}x + \frac{4}{5}y + \frac{5 \cdot \sqrt{3} - 18}{45} = 0\right]$
26. $x - \frac{1}{2}y + 1 - \sqrt{2} = 0,\ P \equiv \left(\sqrt{2}; -3\right)$ $\left[x - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} - \sqrt{2} = 0\right]$
27. $2 = -\frac{4}{3}x + \frac{6}{5}y,\ P \equiv \left(-\frac{3}{4}; 1 + \sqrt{2}\right)$ $\left[\frac{4}{3}x - \frac{6}{5}y + \frac{11 + 6 \cdot \sqrt{2}}{5} = 0\right]$

Lavoriamo insieme

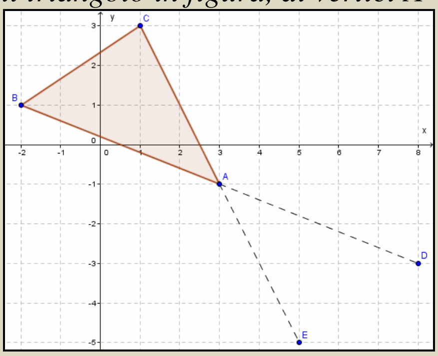
Le equazioni parametriche $3x - (3m + 4) \cdot y + 1 = 0$ e $(m - 4) \cdot x + 5my - 3 = 0$, *al variare di m in* $\mathbb{R}$ *rappresentano infinite rette, vogliamo stabilire se vi sono valori di m per cui le rette sono fra loro parallele.*
La condizione di parallelismo delle rette di equazioni $ax + by + c = 0$ e $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, sappiamo che è: $a \cdot \beta - b \cdot \alpha = 0$. Quindi deve essere: $3 \cdot 5m + (3m + 4) \cdot (m - 4) = 0$. Risolviamo l'equazione nell'incognita m: $15m + 3m^2 - 12m + 4m - 16 = 0 \Rightarrow 3m^2 + 7m - 16 = 0 \Rightarrow m = \frac{-7 \pm \sqrt{49+192}}{6} = \frac{-7 \pm \sqrt{241}}{6}$. Vi sono quindi due valori di m per i quali si ottengono rette parallele.

Determinare i valori del parametro m in modo tale che le rette r e s siano fra loro parallele
Livello 2

28. r: $3x - 4y + 1 = 0$, s: $mx + 5y - 3 = 0$; r: $2x + 5y = 0$, s: $(1 - m) \cdot x + 4y = 0$ $\left[m = -\frac{15}{4}; m = -\frac{3}{5}\right]$
29. $r : 2x + 3y - 8 = 0$, $s : x + (2 - m) \cdot y + 6 = 0$; $r : 2x - my + m = 0$, $s : mx + 4y - 1 = 0$ $\left[m = \frac{1}{2}; \varnothing\right]$
30. $r : mx + 6y + 3 = 0$, $s : 3x + my + 7 = 0$ $\left[m = \pm 3 \cdot \sqrt{2}\right]$
31. $r : (1 - 2m) \cdot x + 8y - 7 = 0$, $s : (m - 4) \cdot x + 2y = 0$ $\left[m = \frac{17}{6}\right]$
32. $r : (3 - 2m) \cdot x + my + 1 = 0$, $s : 3x + 2y = 0$ $\left[m = \frac{6}{7}\right]$
33. $r : x - y = 0$, $s : (m + 3) \cdot x + (5 - 2m) \cdot y + 2 = 0$ $[m = 8]$
34. $r : 3mx + my + 1 - m = 0$, $s : 3x + y - 4 = 0$ $[m \neq 0]$
35. $r : mx + 5y + 1 = 0$, $s : x + 5my = 0$ $[m = \pm 1]$

Lavoriamo insieme

Verificare la validità della seguente proprietà: dato un triangolo qualsiasi ABC, si considerino i punti D ed E, allineati con AB e AC rispettivamente in modo che A sia punto medio di BD e CE. Allora il quadrilatero BCDE è un parallelogramma. Usare il triangolo in figura, di vertici $A \equiv (3; -1)$, $B \equiv (-2; 1)$, $C \equiv (1; 3)$.



Cominciamo a trovare le coordinate dei punti $D \equiv (x_D; y_D)$ ed $E \equiv (x_E; y_E)$. Visto che A è punto medio di BD e CE deve aversi: $(3; -1) \equiv \left(\frac{-2 + x_D}{2}; \frac{1 + y_D}{2}\right) \equiv \left(\frac{1 + x_E}{2}; \frac{3 + y_E}{2}\right)$. Quindi si ha: $D \equiv (8; -3)$, $E \equiv (5; -5)$.

Per verificare la proprietà possiamo fare in diversi modi, per esempio misurare i lati opposti e facendo vedere che sono isometrici. Visto l'argomento che stiamo trattando preferiamo provare che il lati opposti sono paralleli. Allora dobbiamo considerare i coefficienti angolari delle rette cui appartengono i lati. Sappiamo però (Teorema 7) che il coefficiente angolare della retta passante per i punti $A \equiv (x_A; y_A)$ e $B \equiv (x_B; y_B)$, con $x_A \neq x_B$, è $\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$. Quindi noi abbiamo: $m_{BC} = \frac{1-3}{-2-1} = \frac{2}{3}$; $m_{DE} = \frac{-3+5}{8-5} = \frac{2}{3}$; $m_{BE} = \frac{1+5}{-2-5} = -\frac{6}{7}$; $m_{CD} = \frac{3+3}{1-8} = -\frac{6}{7}$.
Se volessimo dimostrare la proprietà generale, dovremmo usare vertici generici: $A \equiv (x_A; y_A)$, $B \equiv (x_B; y_B)$,

$C \equiv (x_C; y_C)$. Determiniamo le coordinate di D ed E: $(x_A;\ y_A) \equiv \left(\frac{x_B + x_D}{2};\ \frac{y_B + y_D}{2}\right) \Rightarrow D \equiv (2x_A - x_B;\ 2y_A - y_B)$
$(x_A;\ y_A) \equiv \left(\frac{x_C + x_E}{2};\ \frac{y_C + y_E}{2}\right) \Rightarrow E \equiv (2x_A - x_C;\ 2y_A - y_C)$. Abbiamo ottenuto le coordinate di D ed E tenendo applicando il seguente procedimento che esplicitiamo solo per l'ascissa di D: $\frac{x_B + x_D}{2} = x_A \Rightarrow x_D = 2x_A - x_B$. Adesso calcoliamo i coefficienti angolari: $m_{BE} = \frac{y_B - (2y_A - y_B)}{x_B - (2x_A - x_B)} = \frac{y_A}{x_A}$;
$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C}$; $m_{DE} = \frac{2y_A - y_B - (2y_A - y_C)}{2x_A - x_B - (2x_A - x_C)} = \frac{2y_A - y_B - 2y_A + y_C}{2x_A - x_B - 2x_A + x_C} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C}$; $m_{CD} = \frac{y_C - (2y_A - y_C)}{x_C - (2x_A - x_C)} = \frac{y_A}{x_A}$.
La dimostrazione è conclusa.

Livello 3

36. Dato il quadrilatero di vertici $A \equiv (–4; 3)$, $B \equiv (–2; 1)$, $C \equiv (2; 0)$, $D \equiv (–1; 4)$, verificare che il quadrilatero avente per vertici i punti medi dei lati di ABC è un parallelogramma.
37. Dato il quadrilatero di vertici $A \equiv (–4; 2)$, $B \equiv (–1; 0)$, $C \equiv (–2; 3)$, $D \equiv (–5; 1)$, verificare che è un parallelogramma. Condotte poi le rette passanti per il punto d'incontro delle diagonali di $ABCD$ e di coefficienti angolari rispettivamente $-\frac{10}{3}, \frac{4}{3}$, si calcolino le coordinate dei punti E, F, G, H, intersezioni di tali rette con i lati di $ABCD$. Verificare che il quadrilatero $EFGH$ è esso stesso un parallelogramma.
38. Dato il quadrilatero di vertici $A \equiv (–5; 0)$, $B \equiv (–2; –1)$, $C \equiv (2; 2)$, $D \equiv (–1; 3)$, verificare che è un parallelogramma. Siano poi E ed F i punti medi di due lati opposti di $ABCD$. Verificare che $AECF$ è un parallelogramma.
39. Dato il triangolo di vertici $A \equiv (–5; 2)$, $B \equiv (–3; –1)$, $C \equiv (2; 1)$, si consideri la mediana BM. Si tracci poi il segmento CD, con D sul lato AB, passante per il punto medio E di BM. Si consideri infine il punto F su CD in modo che EF ed ED siano fra loro isometrici. Verificare che $BFMD$ è un parallelogramma.
40. Dato il quadrilatero $ABCD$, con $A \equiv (–3; – 4)$, $B \equiv (–6; –2)$, $C \equiv (–2; –3)$, $D \equiv (1; –1)$, Verificare che il quadrilatero $EFGH$, avente come vertici i punti medi di due lati opposti e i punti medi delle diagonali di $ABCD$, è un parallelogramma.

Lavoriamo insieme

Dato il triangolo di vertici $A \equiv (4; 1)$, $B \equiv (–2; 0)$, $C \equiv (1; –1)$, e i punti D ed E che dividono, dalla parte di A, i segmenti AB e AC nel rapporto $k = 2/5$. Verificare che il segmento DE è parallelo a BC.
Ci serve ricordare il Teorema 5 dell'unità 2 che afferma che il punto che divide il segmento di estremi $A \equiv (x_A; y_A)$ e $B \equiv (x_B; y_B)$, in modo che $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{m}{n}$ e $\left(\frac{(n-m)\cdot x_A + m\cdot x_B}{n}; \frac{(n-m)\cdot y_A + m\cdot y_B}{n}\right)$. Quindi per $n = 5$, $m = 2$, le formule divengono: $\left(\frac{(5-2)\cdot x_A + 2\cdot x_B}{5}; \frac{(5-2)\cdot y_A + 2\cdot y_B}{5}\right) \equiv \left(\frac{3\cdot x_A + 2\cdot x_B}{5}; \frac{3\cdot y_A + 2\cdot y_B}{5}\right)$. E

$$P \equiv \left(\frac{(5-2)\cdot 4 + 2\cdot(-2)}{5}; \frac{(5-2)\cdot 1 + 2\cdot 0}{5}\right) \equiv \left(\frac{8}{5}; \frac{3}{5}\right); \qquad Q \equiv \left(\frac{(5-2)\cdot 4 + 2\cdot 1}{5}; \frac{(5-2)\cdot 1 + 2\cdot(-1)}{5}\right) \equiv \left(\frac{14}{5}; \frac{1}{5}\right).$$

Calcoliamo adesso i coefficienti angolari delle rette cui appartengono i segmenti BC e PQ:

$$m_{BC} = \frac{-1-0}{1+2} = -\frac{1}{3};\ m_{PQ} = \frac{\frac{3}{5} - \frac{1}{5}}{\frac{8}{5} - \frac{14}{5}} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}.$$

Dei triangoli seguenti, di cui sono fornite le coordinate dei vertici, determinare i punti che dividono i lati AB ed AC nel rapporto k indicato, dalla parte di A. Verificare poi che il segmento congiungente tali punti

è parallelo a BC e misura k volte esso. Nelle risposte è dato il coefficiente angolare comune

Livello 2

41. $A \equiv (1; 2), B \equiv (-1; 3), C \equiv (-2; -1),\ k = \frac{3}{4}$; $A \equiv (3; 0), B \equiv (-2; 1), C \equiv (-4; -1),\ k = \frac{4}{5}$ [$m = 4; m = 1$]
42. $A \equiv (4; 1), B \equiv (-3; 3), C \equiv (-4; -1),\ k = \frac{1}{4}$; $A \equiv (0; 2), B \equiv (-1; 2), C \equiv (-3; -2),\ k = \frac{1}{3}$ [$m = 4; m = 2$]
43. $A\equiv (4;1), B\equiv (2;-1), C\equiv (-3;2), k = \frac{3}{7}$; $A \equiv (1;-3),\ B \equiv \left(\frac{1}{2};0\right), C \equiv \left(-\frac{4}{3};\frac{1}{2}\right), k = \frac{3}{4}$ $\left[m = -\frac{3}{5}; m = -\frac{3}{11}\right]$
44. $A \equiv \left(0;-\frac{5}{2}\right), B \equiv \left(-\frac{1}{2};1\right), C \equiv \left(-\frac{1}{3};2\right), k = \frac{7}{8}$ [$m = 6$]
45. $A \equiv \left(\frac{2}{3};-2\right), B \equiv \left(3;-\frac{2}{3}\right), C \equiv \left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), k = \frac{1}{5}$ $\left[m = -\frac{1}{3}\right]$
46. $A \equiv \left(\sqrt{2};-1\right), B \equiv \left(-\frac{1}{2};1\right), C \equiv \left(-\frac{1}{3};0\right), k = \frac{1}{2}$ [$m = -6$]
47. $A \equiv \left(1-\sqrt{2};-1\right),\ B \equiv \left(\sqrt{2};1\right),\ C \equiv \left(-1;1+\sqrt{2}\right),\ k = \frac{3}{4}$ $\left[m = \sqrt{2}-2\right]$

Lavoriamo insieme

Trovare l'equazione della retta passante per $A \equiv (-3; 2)$ e perpendicolare alla retta $x - 4y + 1 = 0$.
Applichiamo la formula stabilita nel Teorema 11: $b \cdot (x - x_P) - a \cdot (y - y_P) = 0$. Sostituendo i dati diventa: $-4 \cdot (x + 3) - 1 \cdot (y - 2) = 0 \Rightarrow -4x - 12 - y + 2 = 0 \Rightarrow 4x + y + 10 = 0$.

Scrivere l'equazione della retta perpendicolare alla retta data e passante per il punto dato

Livello 1

48. $5x + 2y = 0, (-3; 2)$; $7x + 3y - 1 = 0, (2; 5)$ [$2x - 5y + 16 = 0; 3x - 7y + 29 = 0$]
49. $y = -x + 2, \left(-\frac{1}{2};2\right)$; $y = \frac{5}{6}x + 7, \left(-1;\frac{5}{3}\right)$ [$2x - 2y + 5 = 0; 18x + 15y + 7 = 0$]
50. $-\frac{1}{3}x + y - 2 = 0, \left(\frac{1}{3};-4\right)$; $2x - y + \sqrt{2} = 0, (-\sqrt{2};0)$ [$3x + y + 3 = 0; x + 2y + \sqrt{2} = 0$]
51. $4 - \frac{4}{3}x = \frac{1}{5}y, \left(\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$; $3x - y + 1 = 0, (1; -3)$ [$6x - 40y - 3\sqrt{3} = 0; x + 3y + 8 = 0$]
52. $\frac{4}{5}x - \frac{6}{7}y = 0, \left(-\frac{1}{4};1-\sqrt{2}\right)$; $2x - 7y = 0, (-2; 3)$ [$60x + 56y + 56\sqrt{2} - 41 = 0; 7x + 2y + 8 = 0$]

Lavoriamo insieme

Date le equazioni parametriche $m \cdot x + (m + 1) \cdot y + 3 = 0$ e $(m + 2) \cdot x + 3y - 1 = 0$, stabilire se vi sono valori di m per cui le rette che le equazioni rappresentano sono fra loro perpendicolari.
La condizione di perpendicolarità delle rette $ax + by + c = 0$ e $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, è: $\alpha a + \beta b = 0$. Abbiamo allora: $m \cdot (m + 2) + (m + 1) \cdot 3 = 0 \Rightarrow m^2 + 2m + 3m + 3 = 0 \Rightarrow m^2 + 5m + 3 = 0$. Risolviamo l'equazione nell'incognita m: $m = \frac{-5 \pm \sqrt{25-12}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$. Vi sono quindi due valori di m per i quali si ottengono rette perpendicolari.

Determinare gli eventuali valori del parametro m in modo che le rette r e s siano fra loro perpendicolari

Livello 2

53. a) r: $4x - 3y + 1 = 0$, s: $2mx + y - 1 = 0$; b) r: $3x + my = 0$, s: $(1 + m)\cdot x + y = 0$ [a) $m = 3/8$; b) $m = -3/4$]
54. $r: -x + my - 1 = 0,\ s: 3mx + (1 - m)\cdot y + 3 = 0$ [$m = 0 \vee m = -2$]
55. $r: 4x + (2 - 5m)\cdot y = 0,\ s: x + my + 1 - m = 0$ $\left[m = \dfrac{1 \pm \sqrt{21}}{5}\right]$
56. a) $r: x - 5my + 1 = 0,\ s: 5mx + y - 1 = 0$; b) $r: (m - 3)\cdot x + 2y = 0,\ s: x + 2y = 0$ [a) $\forall m \in \mathbb{R}$; b) $m = -1$]
57. $r: (3 - 4m)\cdot x + y = 0,\ s: (5m - 1)\cdot x + y = 0$ $\left[m = \dfrac{19 \pm \sqrt{201}}{40}\right]$
58. $r: mx - my = 0,\ s: (3m + 1)\cdot x + (4 - m)\cdot y = 0$ [$m = 3/4$]
59. $r: (3 + 6m)\cdot x + y - m = 0,\ s: x + 4my - 7 = 0$ [$m = -3/10$]
60. $r: x + y + m = 0,\ s: mx + (1 + 5m)\cdot y - 8 = 0$ [$m = -1/6$]

Lavoriamo insieme

Verificare che le altezze del triangolo di vertici $A \equiv (2; 1)$, $B \equiv (-4; 2)$, $C \equiv (1; -3)$. si incontrano in uno stesso punto, l'ortocentro.

Calcoliamo le equazioni delle tre altezze, applicando la formula seguente: $y - y_A = \dfrac{x_B - x_C}{y_C - y_B}\cdot(x - x_A)$. Essa è l'equazione della retta per A perpendicolare alla retta passante per i punti B e C, sappiamo infatti che il coefficiente angolare di quest'ultima retta è $\dfrac{y_B - y_C}{x_B - x_C}$. Abbiamo perciò:

$y - 1 = \dfrac{-4-1}{-3-2}\cdot(x-2) \Rightarrow y = 1 + x - 2 \Rightarrow y = x - 1$; $y - 2 = \dfrac{2-1}{-3-1}\cdot(x+4) \Rightarrow y = 2 - \dfrac{1}{4}x - 1 \Rightarrow y = -\dfrac{1}{4}x + 1$; $y + 3 = \dfrac{2+4}{2-1}\cdot(x-1) \Rightarrow y = -3 + 6x - 6 \Rightarrow y = 6x - 9$. Per verificare che le rette sono incidenti in un punto possiamo fare in diversi modi, o determiniamo l'intersezione di due di esse e verifichiamo che il punto trovato appartiene anche alla terza retta, determinando così quindi le coordinate dell'ortocentro; oppure consideriamo il sistema formato dalle tre rette e verifichiamo che la matrice completa e incompleta hanno caratteristica 2. Con il primo metodo si ha:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -\dfrac{1}{4}x + 1 \end{cases} \Rightarrow x - 1 = -\dfrac{1}{4}x + 1 \Rightarrow 4x - 4 = -x + 4 \Rightarrow 5x = 8 \Rightarrow x = \dfrac{8}{5} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{8}{5} - 1 \\ x = \dfrac{8}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3}{5} \\ x = \dfrac{8}{5} \end{cases}$$

Verifichiamo che il detto punto appartiene anche alla terza retta: $\dfrac{3}{5} = 6\cdot\dfrac{8}{5} - 9 \Rightarrow \dfrac{3}{5} = \dfrac{48-45}{5} \Rightarrow \dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{5}$.

Verificare che le altezze di un triangolo si incontrano in uno stesso punto, considerando i seguenti vertici, determinare perciò le coordinate dell'ortocentro

Livello 1

61. (3; – 1), (–2; 1), (–2; 4) ; (2; 2), (–3; 0), (–5; 2) ; (3; 1), (–2; 5), (–3; 0) $\left[(-4;-1);(-3;-3);\left(-\dfrac{43}{29};\dfrac{55}{29}\right)\right]$
62. $\left(\dfrac{1}{3};0\right),\left(-1;\dfrac{2}{3}\right),\left(\sqrt{2};-1\right)$; (0; 2), (–4; 0), (3; –1) $\left[\left(-\dfrac{24+15\cdot\sqrt{2}}{7};-\dfrac{31+22\cdot\sqrt{2}}{7}\right);\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{13}{3}\right)\right]$
63. (3; 2), (–5; 0), (–2; –2); $\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{7}\right),\left(-\dfrac{1}{5};-1\right)$, (0; 0); $\left(-\dfrac{4}{3};1\right),\left(-2;-\dfrac{5}{2}\right)$, (–1; 0) $\left[\left(-\dfrac{15}{11};-\dfrac{50}{11}\right);\left(-\dfrac{170}{231};-\dfrac{289}{330}\right);\left(\dfrac{69}{22};-\dfrac{26}{33}\right)\right]$

64. $\left(-\sqrt{2};1\right),\left(1-\sqrt{2};0\right),\left(3;-4\right)$; (3; 4), (–2; 0), (–1; –1) $\left[\left(36+19\cdot\sqrt{2},\ 29+19\cdot\sqrt{2}\right);\left(-\frac{13}{9};-\frac{4}{9}\right)\right]$

65. $\left(-\frac{2}{3};1+\sqrt{2}\right),\left(-1;\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(0;0\right)$; (4; – 1), (1; 1), (3; 4) $\left[\left(\frac{2\cdot\sqrt{2}-7}{2},\ \frac{18-11\cdot\sqrt{2}}{6}\right);\left(1;1\right)\right]$

Livello 2

66. Nel precedente quesito l'ortocentro coincide con uno dei vertici, perché?
[Il triangolo è rettangolo e l'ortocentro è il vertice dell'angolo retto]

67. Determinare l'equazione dell'altezza condotta dal vertice $A \equiv (x_A; y_A)$ al lato opposto di vertici i punti $B \equiv (x_B; y_B)$ e $C \equiv (x_C; y_C)$. Verificare la correttezza di tale formula applicandola ai dati degli esercizi precedenti. $[(x_B - x_C) \cdot x + (y_B - y_C) \cdot y + (x_C - x_B) \cdot x_A + (y_C - y_B) \cdot y_A = 0]$

Livello 3

68. Dato il triangolo di vertici i punti $A \equiv (2; 4)$, $B \equiv (-1; 2)$, $C \equiv (-1; 1)$, verificare la validità del seguente teorema: *Il circocentro K, il baricentro G e l'ortocentro H di uno stesso triangolo sono allineati.* La linea di appartenenza viene detta retta di Eulero. $\left[G\equiv\left(0;\frac{7}{3}\right),H\equiv\left(-3;4\right),K\equiv\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}1\right),5x+9y-21=0\right]$

69. Dato il triangolo di vertici i punti $A \equiv (1; 2)$, $B \equiv (3; 3)$, $C \equiv (5; -1)$, dopo avere verificato che è rettangolo di ipotenusa AC, verificare che la sua retta di Eulero passa per B.
$\left[G\equiv\left(3;\frac{4}{3}\right),H\equiv B,K\equiv\left(3;\frac{1}{2}\right),x=3\right]$

70. Dato il triangolo di vertici i punti $A \equiv (1; 2)$, $B \equiv (3; -1)$, $C \equiv (6; 1)$, dopo avere verificato che è isoscele sulla base AC, verificare che la sua retta di Eulero passa per B.
$\left[G\equiv\left(\frac{10}{3};\frac{2}{3}\right),H\equiv B,K\equiv\left(\frac{7}{2};\frac{3}{2}\right),5x-y-16=0\right]$

71. Dato il triangolo di vertici i punti $A \equiv (3; 4)$, $B \equiv (-2; 1)$, $C \equiv (2; -1)$, verificare che in ogni triangolo le rette congiungenti i punti medi dei lati con i punti medi delle rispettive altezze si incontrano in un punto L, detto di Lemoine. $\left[L\equiv\left(\frac{19}{20};\frac{9}{10}\right)\right]$

Lavoriamo insieme

Determinare l'area del triangolo di vertici i punti $A \equiv (-1; 3)$, $B \equiv (4; -1)$, $C \equiv (0; 5)$, *senza utilizzare la formula che abbiamo già presentato nell'unità precedente, ma mediante base per altezza diviso* 2.
Scegliamo un lato qualsiasi come base, per esempio AB, e ne determiniamo la misura:

$$\overline{AB}=\sqrt{\left(4+1\right)^2+\left(-1-3\right)^2}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}$$

Adesso calcoliamo la misura dell'altezza relativa ad AB, ossia la distanza del vertice C dalla retta per AB. Determiniamo quest'ultima retta: $r_{AB}:\frac{x+1}{4+1}=\frac{y-3}{-1-3}\Rightarrow -4\cdot\left(x+1\right)-5\cdot\left(y-3\right)=0\Rightarrow 4x+4+5y-15=0\Rightarrow$ $4x + 5y - 11 = 0$. Per calcolare la misura dell'altezza cercata applichiamo la formula stabilita dal Teorema 12, cioè $\frac{\left|a\cdot x_P+b\cdot y_P+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, dove il punto ha coordinate $P \equiv (x_P; y_P)$, e la retta ha equazione $ax + by + c = 0$.
$\frac{\left|4\cdot 0+5\cdot 5-11\right|}{\sqrt{4^2+5^2}}=\frac{14}{\sqrt{41}}$. L'area misura perciò: $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{41}\cdot\frac{14}{\sqrt{41}}=7$.

Determinare la distanza dei punti seguenti dalle rette assegnate

Livello 1

72. (2; –1), $3x - 5y + 1 = 0$; (4; 5), $2x + y - 4 = 0$; (–3; 0), $4x - 7y + 12 = 0$ $\left[\frac{6\cdot\sqrt{34}}{17};\frac{9\cdot\sqrt{5}}{5};0\right]$

73. $(-1; -1)$, $-x + 8y + 2 = 0$; $(0; 3)$, $4x + 3y - 7 = 0$; $\left(-\frac{1}{2};3\right)$, $4x - 5y + 2 = 0$ $\left[\frac{\sqrt{65}}{13};\frac{2}{5};\frac{15}{\sqrt{41}}\right]$

74. $\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$, $-\frac{x}{3}+2=0$; $\left(4;-\frac{4}{5}\right)$, $-\sqrt{2}y+1=0$ $\left[\frac{11}{2};\frac{8+5\cdot\sqrt{2}}{10}\right]$

75. $\left(1-\sqrt{5};-1\right)$, $3x + 2y = 0$; $\left(1-2\cdot\sqrt{3};-\frac{3}{2}\right)$, $x+y-\sqrt{3}=0$ $\left[\frac{3\cdot\sqrt{65}-\sqrt{13}}{13};\frac{2\cdot\sqrt{2}+3\cdot\sqrt{6}}{4}\right]$

Determinare l'area dei triangoli di cui sono date le coordinate dei vertici

Livello 1

76. $A \equiv (-1; 2)$, $B \equiv (0; -1)$, $C \equiv (3; 1)$; $D \equiv (-2; 1)$, $E \equiv (3; -2)$, $F \equiv (1; 3)$ [5,5; 9,5]

77. $A \equiv (-4; 0)$, $B \equiv (2; 2)$, $C \equiv (-2; -1)$; $D \equiv (-1; 2)$, $E \equiv (2; -1)$, $F \equiv (3; 0)$ [5; 3]

78. $A \equiv (2; 1)$, $B \equiv (-4; 1)$, $C \equiv (0; 0)$; $D \equiv (-5; 2)$, $E \equiv (-2; -3)$, $F \equiv (2; 0)$ [1; 14,5]

Determinare l'eventuale valore del parametro m affinché i seguenti triangoli, di cui sono dati i vertici, abbiano l'area S assegnata

Livello 2

79. $A \equiv (m; 1)$, $B \equiv (3; -2)$, $C \equiv (1; 1)$, $S = 2$; $D \equiv (m - 2; 0)$, $E \equiv (3; 1)$, $F \equiv (0; m)$, $S = 4$

$\left[\left(-\frac{1}{3}\vee\frac{7}{3}\right);\left(3\pm\sqrt{15}\right)\right]$

80. $A \equiv (m + 1; 1)$, $B \equiv (1; 2)$, $C \equiv (-m; -1)$, $S = 3{,}5$; $D \equiv (m - 1; m)$, $E \equiv (1; -1)$, $F \equiv (2; 0)$, $S = 4{,}2$

$\left[\left(-2\vee\frac{3}{2}\right);\varnothing\right]$

Lavoriamo insieme

Dato il generico punto $P \equiv (1 + 2m; 1 - m)$, *e la retta r di equazione* $3x - 4y - 1 = 0$, *stabilire se esistono valori reali del parametro m per i quali la distanza di P da r è* 1.

Dobbiamo risolvere la seguente equazione: $\frac{\left|3\cdot(1+2m)-4\cdot(1-m)-1\right|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1$, cioè: $\frac{\left|3+6m-4+4m-1\right|}{\sqrt{9+16}}=1\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{\left|10m-2\right|}{5}=1\Rightarrow\left|10m-2\right|=5\Rightarrow\prec\begin{cases}10m-2=5\Rightarrow 10m=7\Rightarrow m=\frac{7}{10}\\10m-2=-5\Rightarrow 10m=-3\Rightarrow m=-\frac{3}{10}\end{cases}$. Sono perciò due i punti cercati, precisamente: $P_1\equiv\left(1+\cancel{2}^1\cdot\frac{7}{\cancel{10}^5};1-\frac{7}{10}\right)\equiv\left(\frac{12}{5};\frac{3}{10}\right)$, $P_2\equiv\left(1+\cancel{2}^1\cdot\left(-\frac{3}{\cancel{10}^5}\right);1+\frac{3}{10}\right)\equiv\left(\frac{2}{5};\frac{13}{10}\right)$.

Negli esercizi seguenti determinare per quale valore del parametro m il punto indicato ha la distanza d indicata dalla retta data

Livello 2

81. $(1 - m, 1 + m)$, $d = 2$, $4x + 3y - 1 = 0$ [$m = -4$, $\vee$ $m = 16$]

82. $(2 + m, 1 - 3m)$, $d = 4$, $4x - 3y - 1 = 0$ $\left[m=-\frac{24}{13}\vee m=\frac{16}{13}\right]$

83. $(m, 1 - m)$, $d = 3$, $5x + 12y - 1 = 0$ $\left[m=-4\vee m=\frac{50}{7}\right]$

84. $(1 + 3m, - m)$, $d = 1$, $12x + 5y - 1 = 0$ $\left[m=-\frac{24}{31}\vee m=\frac{2}{31}\right]$

85. $(2m, 2 - m)$, $d = 1$, $12x - 5y - 1 = 0$ $\left[m=\frac{24}{29} \vee m=-\frac{2}{29}\right]$

86. $(1 + 4m, - m)$, $d = 2$, $6x + 8y - 1 = 0$ $\left[m=-\frac{25}{16} \vee m=\frac{15}{16}\right]$

87. $(1 - 2m, 1 - m)$, $d = 2$, $8x + 6y - 1 = 0$ $\left[m=-\frac{7}{22} \vee m=\frac{3}{2}\right]$

88. $(4 - m, 1 + m)$, $d = 3$, $8x - 6y - 1 = 0$ $\left[m=-\frac{5}{14} \vee m=\frac{55}{14}\right]$

89. $(4 + 3m, m)$, $d = 4$, $6x - 8y - 1 = 0$ $\left[m=-\frac{63}{10} \vee m=\frac{17}{10}\right]$

90. $(m, 1 - 5m)$, $d = 2$, $9x + 12y - 1 = 0$ $\left[m=-\frac{19}{51} \vee m=\frac{41}{51}\right]$

91. $(2m - 1;\ 1 - m)$, $d = 3$, $x + 2y = 0$; $(2m-1;\ 1-m),\ d=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $x + 2y = 0$ $[\varnothing; \forall m \in \mathbb{R}]$

Livello 3

92. Spiegare perché il primo degli esercizi 86 non ha soluzione. [*P* appartiene a una parallela a $x + 2y = 0$ la cui distanza è diversa da *d*]

93. Spiegare perché il secondo degli esercizi 86 è indeterminato. [*P* appartiene a una parallela a $x + 2y = 0$ la cui distanza è uguale a *d*]

94. Dato il triangolo di vertici i punti (0; 4), (–3; 1), (–2; 5), verificare la validità della seguente proprietà: *Ogni altezza è minore della semisomma dei lati concorrenti in essa.*

95. Dato il triangolo di vertici i punti (–1; 3), (2; –4), (0; –2), verificare la validità della seguente proprietà: *La somma delle tre altezze è minore della somma dei lati.*

96. Dato il triangolo di vertici i punti (5; –2), (0; 1), (–3; 2), calcolare le coordinate del baricentro e poi verificare la validità la seguente proprietà: *Ognuno dei* 4 *punti è ortocentro del triangolo formato dagli altri* 3 *punti.*

Lavoriamo insieme

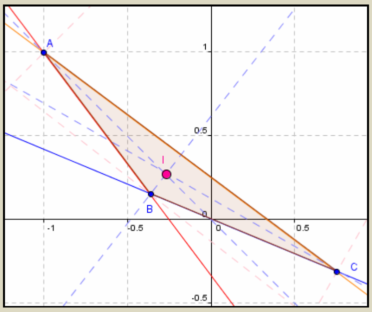
Determinare le equazioni delle bisettrici degli angoli del triangolo di vertici $A \equiv (-1; 1)$, $B\equiv\left(-\frac{4}{11};\frac{5}{33}\right)$, $C\equiv\left(\frac{3}{4};-\frac{5}{16}\right)$, *verificando che si incontrano in uno stesso punto.*

Applichiamo le due formule $\frac{a\cdot x+b\cdot y+c}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{\alpha\cdot x+\beta\cdot y+\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=0 \wedge \frac{a\cdot x+b\cdot y+c}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{\alpha\cdot x+\beta\cdot y+\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=0$, stabilite dal Teorema 13, cioè, in cui le rette hanno equazioni: $ax + by + c = 0$ e $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$. Quindi cominciamo a determinare le equazioni dei lati, (lasciamo i dettagli di calcolo per esercizio): $r_{AB}:\frac{x+1}{-\frac{4}{11}+1}=\frac{y-1}{\frac{5}{33}-1}\Rightarrow 4x+3y+1=0$; $r_{AC}:\frac{x+1}{\frac{3}{4}+1}=\frac{y-1}{-\frac{5}{16}-1}\Rightarrow$ $\Rightarrow 3x + 4y - 1 = 0$;

$r_{BC}:\frac{x+\frac{4}{11}}{\frac{3}{4}+\frac{4}{11}}=\frac{y-\frac{5}{33}}{-\frac{5}{16}-\frac{5}{33}}\Rightarrow 5x+12y=0$. Adesso applichiamo le formule precedenti:

$$\frac{4x+3y+1}{\sqrt{4^2+3^2}}-\frac{3x+4y-1}{\sqrt{3^2+4^2}}=0\Rightarrow\frac{4x+3y+1}{5}-\frac{3x+4y-1}{5}=0\Rightarrow x-y+2=0$$

$$\frac{4x+3y+1}{\sqrt{4^2+3^2}}+\frac{3x+4y-1}{\sqrt{3^2+4^2}}=0 \Rightarrow \frac{4x+3y+1}{5}+\frac{3x+4y-1}{5}=0 \Rightarrow x+y=0$$
$$\frac{4x+3y+1}{\sqrt{4^2+3^2}}-\frac{5x+12y}{\sqrt{5^2+12^2}}=0 \Rightarrow \frac{4x+3y+1}{5}-\frac{5x+12y}{13}=0 \Rightarrow 27x-21y+13=0$$
$$\frac{4x+3y+1}{\sqrt{4^2+3^2}}+\frac{5x+12y}{\sqrt{5^2+12^2}}=0 \Rightarrow \frac{4x+3y+1}{5}+\frac{5x+12y}{13}=0 \Rightarrow 77x+99y+13=0$$
$$\frac{3x+4y-1}{\sqrt{3^2+4^2}}-\frac{5x+12y}{\sqrt{5^2+12^2}}=0 \Rightarrow \frac{3x+4y-1}{5}-\frac{5x+12y}{13}=0 \Rightarrow 14x-8y-13=0$$
$$\frac{3x+4y-1}{\sqrt{3^2+4^2}}+\frac{5x+12y}{\sqrt{5^2+12^2}}=0 \Rightarrow \frac{3x+4y-1}{5}+\frac{5x+12y}{13}=0 \Rightarrow 64x+112y-13=0$$



Dalla rappresentazione delle rette, notiamo che le bisettrici degli angoli interni sono quelle che, nella lista precedente, occupano le posizioni 2, 3 e 6, le altre sono quindi le equazioni delle bisettrici degli angoli esterni. Determiniamo le coordinate dell'incentro: $\begin{cases} x+y=0 \\ 27x-21y+13=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ -27y-21y+13=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ -48y+13=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y \\ y=\frac{13}{48} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{13}{48} \\ y=\frac{13}{48} \end{cases}$. Quindi l'incentro è $I \equiv \left(-\frac{13}{48};\frac{13}{48}\right)$.

Livello 2

97. Determinare l'equazione della bisettrice delle rette $3x - 2y + 1 = 0$ e $3x - 2y + 7 = 0$. [$3x - 2y + 4 = 0$]
98. Determinare l'equazione della bisettrice delle rette $ax + by + c = 0$ e $ax + by + d = 0$.
$\left[ax+by+\frac{c+d}{2}=0\right]$
99. Determinare le equazioni delle bisettrici degli angoli formati dalle rette fra loro incidenti, di equazioni $4x - y + 5 = 0$ e $2x + 3y - 5 = 0$.
$\left[\begin{matrix}\left(4\cdot\sqrt{13}+2\cdot\sqrt{17}\right)\cdot x-\left(3\cdot\sqrt{17}+\sqrt{13}\right)\cdot y+5\cdot\sqrt{17}+5\cdot\sqrt{13}=0 \\ \left(4\cdot\sqrt{13}+2\cdot\sqrt{17}\right)\cdot x+\left(3\cdot\sqrt{17}+\sqrt{13}\right)\cdot y-5\cdot\sqrt{17}+5\cdot\sqrt{13}=0\end{matrix}\right]$
100. Con riferimento all'esercizio precedente, qual è la reciproca posizione delle due bisettrici? [Sono perpendicolari]
101. Dato il quadrilatero di vertici i punti (0; 2), (–2; 1), (–3; –4), (3; –1), dopo aver verificato che è un trapezio, verificare che le bisettrici degli angoli interni adiacenti a uno qualsiasi dei suoi lati obliqui sono fra loro perpendicolari.

Scrivere le equazioni delle bisettrici degli angoli interni dei triangoli di cui forniamo i vertici, determinare quindi le coordinate dell'incentro I

Livello 3

102. (0; 2), (–1; 2), (–3; –2) $\left[\begin{matrix}x-2y+4=0,\ 2\cdot\left(2+\sqrt{5}\right)\cdot x-\left(3+\sqrt{5}\right)\cdot y+6+4\cdot\sqrt{5}=0,\ 2x+\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot y+4-2\cdot\sqrt{5}=0, \\ I\equiv\left(\sqrt{5}-3;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\end{matrix}\right]$

103. $\left(-\frac{1}{4},\frac{5}{33}\right),\left(\frac{6}{25};-\frac{9}{50}\right),\left(\frac{7}{11};\frac{23}{66}\right)$

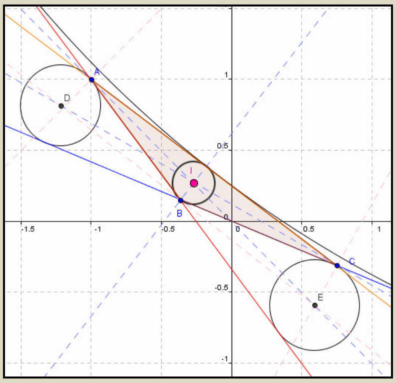
[$14x + 112y - 5 = 0$, $2x - 14y - 3 = 0$, $54x + 42y - 49 = 0$, $I \equiv \left(\frac{163}{770};\frac{1}{55}\right)$]

104. (4; 1), (2; –1), (–3; 2) $\left[\begin{array}{l} x-3y-1=0,\ \left(3+\sqrt{17}\right)\cdot x-\left(\sqrt{17}-5\right)\cdot y-1-3\cdot\sqrt{17}=0, \\ \left(15+\sqrt{17}\right)\cdot x+\left(25+7\cdot\sqrt{17}\right)\cdot y-5-11\cdot\sqrt{17}=0, I\equiv\left(\frac{3\cdot\sqrt{17}-5}{4};\frac{\sqrt{17}-3}{4}\right)\end{array}\right]$

Lavoriamo insieme

Con riferimento al precedente box, osserviamo che ogni bisettrice interna si incontra con le due bisettrici esterne riferite agli altri due angoli. Questi tre punti si chiamano excerchi perché sono centri delle circonferenze exinscritte al triangolo, tali cioè da essere tangenti ai lati o ai loro prolungamenti. Calcolarli:

$\begin{cases} x-y+2=0 \\ 27x-21y+13=0 \\ 14x-8y-13=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{29}{6};\frac{41}{6}\right)$; $\begin{cases} x+y=0 \\ 77x+99y+13=0 \\ 14x-8y-13=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{13}{22};-\frac{13}{22}\right)$; $\begin{cases} x-y+2=0 \\ 77x+99y+13=0 \\ 64x+112y-13=0 \end{cases} \Rightarrow \left(-\frac{211}{176};\frac{141}{176}\right)$



Nella figura non vediamo il terzo excerchio, ma solo una sua parte.

I seguenti esercizi si riferiscono a teoremi veri per qualsiasi triangolo, si richiede di verificarli con un software come Derive o una calcolatrice grafica riferendosi a un triangolo a piacere. Indichiamo con R il raggio della circonferenza circoscritta (distanza circocentro vertici), con r il raggio della circonferenza inscritta (distanza incentro lati)

Livello 3

105. Verificare che l'incentro è equidistante dai lati del triangolo, determinando così il raggio del cerchio inscritto.
106. Verificare che l'area di un triangolo si trova moltiplicando il raggio r del cerchio inscritto per il semiperimetro.
107. La somma dei raggi degli excerchi è uguale alla somma del raggio del cerchio inscritto e del quadruplo del raggio del cerchio circoscritto.
108. La distanza dei centri delle circonferenze inscritta e circoscritta è $\sqrt{R\cdot(R-2r)}$.
109. Le distanze del circocentro da uno qualsiasi degli excentri è $\sqrt{R\cdot(R+2\rho)}$, con ρ raggio dell'excerchio considerato.
110. Dato il triangolo di vertici $O \equiv (0; 0)$, $A \equiv (1; 1)$, $B \equiv (9; 1)$, determinare il valore del parametro m, in modo che le rette seguenti dividano OAB in due regioni equivalenti: a) $x = m$; b) $y = m$; c) $y = mx + 1$.

$\left[\text{a) } 3; \text{b) } \frac{\sqrt{2}}{2}; \text{c) } \frac{5-\sqrt{34}}{9}\right]$

111. A quali quadranti può appartenere un punto della retta di equazione $3x + 5y = 15$, che verifica la proprietà di essere equidistante dagli assi coordinati? Giustificare la risposta. [I o II]

Lavoriamo insieme

Mostrare che in generale il luogo dei punti del piano che hanno da una retta data una distanza data è una retta.

Indichiamo con $ax + by + c = 0$ l'equazione della retta data e con k la distanza data. Traduciamo analiticamente il luogo, indicando come la solito con $P \equiv (x; y)$ il generico punto del luogo: $\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=k$. Adesso cerchiamo di scrivere meglio la precedente equazione, per esempio innalziamo tutto al quadrato: $\frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}=k^2 \Rightarrow (ax+by+c)^2=k^2\cdot\left(a^2+b^2\right) \Rightarrow ax+by+c=\pm|k|\cdot\sqrt{a^2+b^2}$

Quanto ottenuto rappresenta l'equazione di due rette parallele fra loro e con la retta data.

Verificare che i seguenti luoghi geometrici sono formati da rette o da loro parti

Livello 3

112. Punti le cui distanze da due rette incidenti hanno un rapporto assegnato. [2 rette incidenti con le date]
113. Punti le cui distanze da due rette parallele hanno un rapporto assegnato. [Due rette parallele alle date]
114. Punti che hanno costante la differenza dei quadrati da due punti dati. [Retta perpendicolare alla retta per i punti dati]
115. Baricentri dei triangoli di vertici (0; 0), (1; 2), (k, 4 + k), al variare di k nell'insieme dei numeri reali. Suggerimento: scrivere l'equazione parametrica e poi eliminare il parametro. [$3x - 3y + 5 = 0$]
116. Incentri dei triangoli di vertici (0; 0), (–2; 1), (k, 3 – 5k), al variare di k nell'insieme dei numeri reali. [$4x - 2y + 5 = 0$]

Fasci di rette

Il problema

Sappiamo che per due punti passa una sola retta, mentre per un punto ne passano infinite. Siamo in grado di scrivere una legge generale, quindi un'equazione, tale da rappresentare tutte le rette passanti per il dato punto?

Abbiamo visto che una retta scritta in forma esplicita, da un punto di vista analitico è determinata da due parametri, che abbiamo indicato con m e p. Questo significa che se noi fissiamo uno solo dei due parametri non abbiamo una sola retta, ma una infinità di rette. Esemplifichiamo quanto detto.

Esempio 23

- Fissare il parametro m in un'equazione esplicita della retta equivale a fissare la direzione della retta, così per esempio l'equazione $y = 2x + p$, rappresenta tutte le rette il cui coefficiente angolare è 2.
- Fissando invece il parametro p e lasciando variabile m non fissiamo la direzione, ma imponiamo che le rette abbiamo tutte la stessa ordinata all'origine, così l'equazione $y = mx - 1$, rappresenta tutte le rette, non parallele all'asse delle ascisse, che incontrano l'asse y nel punto di ordinata -1. In pratica tutte le rette passanti per il punto $P \equiv (0; -1)$.

Quanto visto nell'esempio ci permette di porre le seguenti definizioni.

Definizione 6

Date due rette di equazioni $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$, e un parametro reale k, diciamo **fascio di rette generato dalle due rette,** la retta $a'x + b'y + c' = 0$ e la totalità dei punti del piano che verificano l'equazione $(ax + by + c) + k \cdot (a'x + b'y + c') = 0$.

- Se le generatrici del fascio sono fra loro parallele il fascio si dice **a centro improprio**.
- Se le generatrici del fascio sono fra loro incidenti in un punto si chiama **fascio a centro proprio**.

Nel seguito quando parleremo di fascio scriveremo solo l'equazione parametrica e non indicheremo esplicitamente la retta $a'x + b'y + c' = 0$.
Come si vede abbiamo generalizzato la questione a una generica equazione, in forma esplicita o implicita. Naturalmente la precedente definizione dice anche che una qualsiasi equazione di primo grado in due incognite e un parametro rappresenta un fascio di rette. Vediamo adesso qualche esempio.

Esempio 24

- Date le rette $2x + y - 1 = 0$ e $x + 4y = 0$, il fascio da esse generato ha equazione $(2x + y - 1) + k \cdot(x + 4y) = 0$. Poiché le rette sono fra loro incidenti, come facilmente si verifica, nel punto $C \equiv \left(\frac{4}{7}; -\frac{1}{7}\right)$, tutte le rette del fascio passano per C. Ciò si capisce anche perché sostituendo le coordinate di C nell'equazione del fascio otteniamo l'identità $0 + k \cdot 0 = 0$.
- Consideriamo l'equazione $(1 - h) \cdot x + h \cdot y + 2 - h = 0$, con h numero reale qualsiasi. Ci chiediamo che tipo di fascio essa rappresenti. Basta trovare le generatrici, il che si fa semplicemente scrivendo l'equazione nel modo seguente: $(x + 2) + h \cdot (-x + y - 1) = 0$. Le generatrici sono quindi le rette di equazioni $x + 2 = 0$ e $-x + y - 1= 0$. Poiché esse si incontrano nel punto $C \equiv (-2; -1)$, tale punto è il centro del fascio.
- Consideriamo adesso l'equazione $h \cdot x + 3h \cdot y + 1 - 4h = 0$, da cui: $h \cdot (x + 3y - 4) + 1 = 0$. Stavolta non siamo riusciti a scrivere l'equazione nella forma voluta, con le generatrici. E ciò perché non siamo riusciti a isolare almeno una x o una y senza il parametro, ciò significa che tutte le rette del fascio hanno lo stesso coefficiente angolare: $-\frac{h}{3h} = -\frac{1}{3}$, cioè abbiamo a che fare con un fascio di rette tutte fra loro parallele.

Adesso chiediamoci perché nella definizione 6 abbiamo aggiunto la condizione che nel fascio c'era anche la retta moltiplicata per il parametro. Ovviamente perché essa fa parte del fascio in quanto generatrice, ma non la riusciremo mai a trovarla sostituendo un valore al parametro, dato che per determinarla il valore sostituito dovrebbe annullare l'altra retta che non dipende dal parametro e perciò non può annullarsi. Chiariamo meglio con un esempio.

Esempio 25

Sia ancora il fascio di rette di equazione $(2x + y - 1) + h \cdot (x + 4y) = 0$. Sostituendo ad h valori a piacere troviamo quasi tutte le rette del fascio. Per esempio per $h = 0$ troviamo la generatrice $2x + y - 1 = 0$; per $h = 1$ troviamo la retta $2x + y - 1 + x + 4y = 0$, cioè $3x + 5\ y - 1 = 0$; e così via. Se però volessimo ottenere l'altra generatrice: $x + 4y = 0$, dovremmo sostituire ad h un valore che faccia sparire la prima equazione, ma ciò non è possibile poiché la prima equazione non dipende da h.

Verifiche

Lavoriamo insieme

- *Dato il fascio di rette di equazione* $5x - (2 + k)\,y - 3 + 8k = 0$, *stabilire quali rette di questo fascio sono parallele agli assi coordinati*. Noi sappiamo che una retta scritta in forma implicita è parallela all'asse delle ascisse se è priva del termine in x. In questo caso il coefficiente non dipende dal parametro, quindi rimane sempre uguale a 5, non può perciò mai annullarsi. Dovremmo concludere che non vi sono rette parallele all'asse delle ascisse in questo fascio, ma ciò non è possibile perché è un fascio a centro proprio. Quindi la retta cercata è quella "nascosta". Riscriviamo il fascio nella forma $5x - 2y - 3 + k\,(-y + 8) = 0$. Perciò la retta cercata ha equazione $y - 8 = 0$, anche se non si trova per alcun valore di k.
- *Analogo discorso vale per le parallele all'asse delle y*. Solo che stavolta il coefficiente da annullare è $2 + k$, che si annulla per $k = -2$. Quindi vi è una sola retta del fascio parallela all'asse y e la sua equazione è $5x - (2 - 2)\,y - 3 + 8 \cdot (-2) = 0 \Rightarrow 5x - 3 - 16 = 0 \Rightarrow 5x - 19 = 0$.
- *Vi sono rette passanti per l'origine*? Stavolta deve annullarsi il termine noto: $-3 + 8k = 0 \Rightarrow k = \frac{3}{8}$. La retta cercata ha equazione: $5x - \left(2 + \frac{3}{8}\right) \cdot y - 3 + 8 \cdot \frac{3}{8} = 0 \Rightarrow 40x - 19y = 0$.
- *Determinare la retta del fascio passante per* $P \equiv (2; -5)$. Basta sostituire le coordinate del punto alle incognite: $5 \cdot 2 - (2 + k) \cdot (-5) - 3 + 8k = 0 \Rightarrow 10 + 10 + 5k - 3 + 8k = 0 \Rightarrow 17 + 3k = 0 \Rightarrow k = -\frac{17}{13}$. La retta cercata è: $5x - \left(2 - \frac{17}{13}\right) \cdot y - 3 + 8 \cdot \left(-\frac{17}{13}\right) = 0 \Rightarrow 65x - 9y - 175 = 0$.
- *Come prima con* $P \equiv (1; 8)$. Non troviamo alcun valore di k: $5 - (2 + k) \cdot 8 - 3 + 8k = 0 \Rightarrow -14 = 0$. Ciò dipende dal fatto che il punto appartiene alla retta *nascosta* del fascio, che avevamo già trovato, $y = 8$.
- *Trovare il centro del fascio*. Basta risolvere il sistema formato con 2 qualsiasi delle rette trovate, anche se è preferibile usare le parallele agli assi: $\begin{cases} 5x - 19 = 0 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{19}{5} \\ y = 8 \end{cases}$, quindi il centro è $\left(\frac{19}{5}; 8\right)$.

Nei fasci di rette seguenti determinare le rette: a) parallele agli assi coordinati; b) passanti per l'origine; c) passanti per il punto indicato; d) determinare infine il centro del fascio.

Livello 1

31. $(4 - 3k) \cdot x + (7k + 2) \cdot y + k + 4 = 0$; $(1; -4)$

$\left[17y + 8 = 0;\ 17x + 13 = 0;\ 8x - 13y = 0;\ 2x + y + 2 = 0;\ \left(-\frac{13}{17}; -\frac{8}{17}\right)\right]$

32. $(3 + 2k) \cdot x - (5k - 1) \cdot y + k - 1 = 0$; $(-1; 2)$

$\left[17y - 5 = 0;\ 17x - 4 = 0;\ 5x - 4y = 0;\ 29x + 21y - 13 = 0;\ \left(\frac{4}{17}; \frac{5}{17}\right)\right]$

33. $(5 - 3k) \cdot x - (6k - 2) \cdot y + 2k - 1 = 0$; $(-3; 4)$

$\left[24y - 7 = 0;\ 12x - 1 = 0;\ 7x - 2y = 0;\ 89x + 74y - 29 = 0;\ \left(\frac{1}{12}; \frac{7}{24}\right)\right]$

34. $(1 - 6k) \cdot x + (5k - 3) \cdot y + k + 4 = 0$; $(4; 1)$

$\left[13y - 25 = 0;\ 13x - 23 = 0;\ 25x - 23y = 0;\ 12x + 29y - 77 = 0;\ \left(\frac{23}{13}; \frac{25}{13}\right)\right]$

35. $(-2 + 3k) \cdot x - (4k - 1) \cdot y + 3k - 1 = 0$; $(-2; 3)$

[$5y - 3 = 0$; $5x + 1 = 0$; $3x + y = 0$; $4x + 3y - 1 = 0$; $\left(-\frac{1}{5};\frac{3}{5}\right)$]

36. $(4 + k) \cdot x + y + k + 4 = 0$; $(2; -4)$ [$y = 0$; $x + 1 = 0$; $y = 0$; $4x + 3y + 4 = 0$; $(-1; 0)$]

37. $(-2 + k) \cdot x - (3k + 5) \cdot y + 7k = 0$; $(-1; -2)$

[$11y - 14 = 0$; $11x + 35 = 0$; $2x + 5y = 0$; $3x + 2y + 7 = 0$; $\left(-\frac{35}{11};\frac{14}{11}\right)$]

38. $(-1 + 3k) \cdot x - (5k - 1) \cdot y + 3k - 1 = 0$; $(1; -5)$ [$y = 0$; $x + 1 = 0$; $y = 0$; $5x + 2y + 5 = 0$; $(-1; 0)$]

39. $(2 + 4k) \cdot x + (k + 5) \cdot y + 7k - 2 = 0$; $(-2; -1)$

[$9y - 11 = 0$; $18x + 37 = 0$; $22x + 37y = 0$; $40x + y + 81 = 0$; $\left(-\frac{37}{18};\frac{11}{9}\right)$]

40. $(7 + k) \cdot x - (k - 1) \cdot y + 4 = 0$; $(3; 1)$ [$2y + 1 = 0$; $2x + 1 = 0$; $x - y = 0$; $3x - 7y - 2 = 0$; $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$]

41. $k \cdot x - (5k + 1) \cdot y + k + 9 = 0$; $(0; -1)$ [$y - 9 = 0$; $x - 44 = 0$; $9x - 44y = 0$; $5x - 22y - 22 = 0$; $(44; 9)$]

42. $(12 - 7k) \cdot x + (3k + 1) \cdot y + 2k = 0$; $(4; 1)$

[$43y + 24 = 0$; $43x - 2 = 0$; $12x + y = 0$; $67x - 170y - 98 = 0$; $\left(\frac{2}{43};-\frac{24}{43}\right)$]

43. $(2 - 9k) \cdot x + (8k + 1) \cdot y + 3 = 0$; $\left(\frac{1}{2};-\frac{2}{3}\right)$

[$25y + 27 = 0$; $25x + 24 = 0$; $9x - 8y = 0$; $62x - 219y - 177 = 0$; $\left(-\frac{24}{25};-\frac{27}{25}\right)$]

44. $(-1 + 5k) \cdot x + (7k - 1) \cdot y + k = 0$; $\left(-\frac{1}{4};1\right)$ [$2y + 1 = 0$; $2x - 1 = 0$; $x + y = 0$; $4x + 2y - 1 = 0$; $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$]

45. $\left(1-\frac{k}{2}\right)\cdot x - 3y + 1 + \frac{k}{3} = 0, \left(-1;\frac{3}{4}\right)$ [$9y - 5 = 0$; $3x - 2 = 0$; $5x - 6y = 0$; $7x + 60y - 19 = 0$; $\left(\frac{2}{3};\frac{5}{9}\right)$]

46. $3x - \left(\frac{1}{2}+k\right)\cdot y - \frac{k+4}{3} = 0, \left(1;\frac{2}{3}\right)$ [$3y + 1 = 0$; $18x - 7 = 0$; $6x + 7y = 0$; $54x - 33y - 32 = 0$; $\left(\frac{7}{18};-\frac{1}{3}\right)$]

47. $3k \cdot x - (1 + k) \cdot y - 2k + 1 = 0$; $\left(\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right)$

[$y - 1 = 0$; $x - 1 = 0$; $x - y = 0$; $\left(8+3\cdot\sqrt{2}\right)\cdot x + \left(5-\sqrt{2}\right)\cdot y - 2\cdot\sqrt{2} - 13 = 0$; $(1; 1)$]

48. $k \cdot x - 2k \cdot y + 3k = 0$; $\left(-\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right)$ [Non è un fascio, perché per $k \neq 0$ genera sempre la stessa retta]

Lavoriamo insieme

- *Con riferimento al fascio di rette di equazione* $5x - (2 + k) \cdot y - 3 + 8k = 0$, *stabilire se vi sono rette parallele alla retta di equazione* $3x - 2y + 4 = 0$. La condizione di parallelismo è, in questo caso: $5 \cdot (-2) + (2 + k) \cdot 3 = 0 \Rightarrow -10 + 6 + 3k = 0 \Rightarrow 3k - 4 = 0 \Rightarrow k = \frac{4}{3}$. Quindi la retta cercata ha equazione: $5x - \left(2+\frac{4}{3}\right)\cdot y - 3 + 8\cdot\frac{4}{3} = 0 \Rightarrow 15x - 10y + 23 = 0$, in effetti si ha: $15 \cdot (-2) + 10 \cdot 3 = 0$.
- *Determinare la retta del fascio perpendicolare alla retta data*. Si pone: $5 \cdot 3 - (2 + k) \cdot (-2) = 0 \Rightarrow 15 + 4 + 2k = 0 \Rightarrow 2k + 19 = 0 \Rightarrow k = -\frac{19}{2}$ e la retta è: $5x - \left(2-\frac{19}{2}\right)\cdot y - 3 + 8\cdot\left(-\frac{19}{2}\right) = 0 \Rightarrow 10x + 15y - 158 = 0$. Ed effettivamente $10 \cdot 3 - 2 \cdot 15 = 0$.

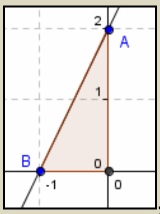
Con riferimento ai fasci di rette degli esercizi dal* 31 *al* 47*, determinare le rette: a) parallele alla retta r; b) perpendicolari alla retta s

Livello 2

49. r: $2x - 7y + 7 = 0$; s: $3x + 5y + 7 = 0$ [$34x - 119y - 30 = 0$; $85x - 51y + 41 = 0$]
50. r: $3x - 2y + 1 = 0$; s: $-x + 5y + 2 = 0$ [$51x - 34y - 2 = 0$; $85x + 17y - 25 = 0$]
51. r: $3x + 2y + 8 = 0$; s: $2x + y = 0$ [$18x + 12y - 5 = 0$; $2x - 4y + 1 = 0$]
52. r: $x - 3y + 4 = 0$; s: $4x + y = 0$ [$x - 3y + 4 = 0$; $13x - 52y + 77 = 0$]
53. r: $4x + y + 5 = 0$; s: $7x - 2y + 2 = 0$ [$20x + 5y + 1 = 0$; $10x + 35y - 19 = 0$]
54. r: $-3x + y = 0$; s: $7x + y - 2 = 0$ [$-3x + y - 3 = 0$; $x - 7y + 1 = 0$]
55. r: $8x - y + 1 = 0$; s: $9x + y = 0$ [$88x - 11y + 294 = 0$; $11x - 99y + 161 = 0$]
56. r: $2x + 3y + 7 = 0$; s: $4x - 3y + 7 = 0$ [$2x + 3y + 2 = 0$; $3x + 4y + 3 = 0$]
57. r: $4x - 5y + 1 = 0$; s: $6x - 8y = 0$ [$12x - 15y + 43 = 0$; $36x + 27y + 41 = 0$]
58. r: $x - y + 1 = 0$; s: $2x + 4y = 0$ [$x - y = 0$; $4x - 2y + 1 = 0$]
59. r: $2y + 1 = 0$; s: $x + 5y + 1 = 0$ [$y - 9 = 0$; $5x - y + 211 = 0$]
60. r: $-x + 6y = 0$; s: $3x - y + 2 = 0$ [$-43x + 258y + 146 = 0$; $43x + 129y + 70 = 0$]
61. $r: \frac{x}{2} - y + 1 = 0; s: -2x + \frac{3y}{4} = 0$ [$5x - 10y - 6 = 0$; $75x + 200y + 288 = 0$]
62. $r: -\frac{x}{2} + \frac{3}{4}y = 0; s: -x + \frac{5y}{2} - 1 = 0$ [$4x - 6y - 5 = 0$; $10x + 4y - 3 = 0$]
63. $r: \frac{5x}{2} - 3y = 0; s: -\frac{6}{5}x + y = 0$ [$15x - 18y + 5 = 0$; $15x + 18y - 25 = 0$]
64. $r: -x + \frac{4}{5}y = 0; s: 3x + \frac{y}{4} = 0$ [$90x - 72y - 59 = 0$; $18x - 216y - 79 = 0$]
65. $r: \left(1-\sqrt{3}\right)\cdot x + y + 1 = 0; s: \left(1-\sqrt{2}\right)\cdot x + \left(1+\sqrt{2}\right)\cdot y = 0$

$$\left[3\cdot\left(3\cdot\sqrt{3}-1\right)x-3\cdot\left(4+\sqrt{3}\right)y-6\cdot\sqrt{3}-11=0;\ 3\cdot\left(5+3\cdot\sqrt{2}\right)x+3\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)y+4-6\cdot\sqrt{2}=0\right]$$

Lavoriamo insieme

Sempre con riferimento al fascio di rette di equazione $5x - (2 + k)\,y - 3 + 8k = 0$, *stabilire se vi sono rette che formano con gli assi coordinati un triangolo di area* 4. In generale una retta non parallela agli assi coordinati incontra questi ultimi in due punti, formando così, insieme con l'origine un triangolo rettangolo, i cui cateti hanno per misure i valori assoluti dell'ascissa e dell'ordinata, non nulle, dei punti intersezione. In figura chiariamo quanto detto, 

, OAB ha area che misura $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot|-1| = 1$. Come si vede abbiamo considerato con il proprio segno l'ordinata di A perché positiva, mentre abbiamo considerato in valore assoluto l'ascissa di B perché negativa.

Si tratta quindi di determinare ascissa e ordinata delle intersezioni della generica retta del fascio con gli assi, cioè di risolvere i sistemi: $\begin{cases}5x-(2+k)\cdot y-3+8k=0\\ x=0\end{cases}$; $\begin{cases}5x-(2+k)\cdot y-3+8k=0\\ y=0\end{cases}$. Le cui soluzioni sono: $\begin{cases}y=\frac{8k-3}{2+k}\\ x=0\end{cases}$; $\begin{cases}x=\frac{3-8k}{5}\\ y=0\end{cases}$. L'area del generico triangolo è $S_{OAB}=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{8k-3}{2+k}\right|\cdot\left|\frac{3-8k}{5}\right|$. Dobbiamo quindi risolvere la seguente equazione: $\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{8k-3}{2+k}\right|\cdot\left|\frac{3-8k}{5}\right|=4$, che equivale alle seguenti due equazioni:

$\left|\frac{8k-3}{2+k}\right| \cdot \left|\frac{3-8k}{5}\right| = 8 \Rightarrow \left(\frac{8k-3}{2+k}\right) \cdot \left(\frac{3-8k}{5}\right) = 8 \vee \left(\frac{8k-3}{2+k}\right) \cdot \left(\frac{3-8k}{5}\right) = -8$. Risolviamole: $24k - 64k^2 - 9 + 24k = 40 \cdot (2 + k) \Rightarrow 64k^2 - 8k + 89 = 0 \Rightarrow \Delta < 0$; $24k - 64k^2 - 9 + 24k = -40 \cdot (2 + k) \Rightarrow 64k^2 - 88k - 71 = 0 \Rightarrow k = \frac{11 \pm 9 \cdot \sqrt{5}}{16}$. Ci sono quindi due rette che verificano quanto detto.

Con riferimento ai fasci di rette definiti negli esercizi dal n. 31 al 46, determinare, usando eventualmente un software come Derive o una calcolatrice grafico–simbolica, gli eventuali valori reali di k, per i quali si ottengono rette formanti: a) con gli assi coordinati un triangolo di area A assegnata; b) con le rette r e s degli esercizi precedenti, un'area S assegnata; c) determinare poi la retta del fascio che non si ottiene per alcun valore reale di k

Livello 3

66. $A = 1; S = 1$ $\left[a) k \in \left\{\frac{26 \pm 2 \cdot \sqrt{497}}{41}, 0, \frac{36}{43}\right\}; b)\ k = \frac{52\,243 \pm 31 \cdot \sqrt{647\,249}}{62924}; c)\ 3x - 7y - 1 = 0\right]$

67. $A = 2; S = 4$ $\left[a) k \in \left\{\frac{-25 \pm 2 \cdot \sqrt{269}}{41}, \frac{-27 \pm 2 \cdot \sqrt{309}}{39}\right\}; b)\ k \in \left\{\frac{-2701 \pm 13 \cdot \sqrt{168194}}{3310}, \frac{-4111 \pm 39 \cdot \sqrt{24726}}{2410}\right\}, c)\ 2x - 5y + 1 = 0\right]$

68. $A = 3; S = 1$ $\left[a) k \in \left\{\frac{53 \pm 5 \cdot \sqrt{51}}{52}, \frac{55 \pm \sqrt{1317}}{56}\right\}; b)\ k = \frac{-235 \pm \sqrt{1310}}{2630}; c)\ 3x + 6y - 2 = 0\right]$

69. $A = 4; S = 5$ $\left[a) k = \frac{96 \pm 2 \cdot \sqrt{1826}}{239}; b)\ k \in \left\{\frac{130}{341}, \frac{130}{179}\right\}; c)\ 6x - 5y - 1 = 0\right]$

70. $A = 3; S = 1$ $\left[a) k \in \left\{\frac{4 \pm \sqrt{3}}{9}, \frac{10 \pm \sqrt{23}}{21}\right\}; b)\ k \in \left\{\frac{1647 \pm 15 \cdot \sqrt{865}}{8743}, \frac{-243 \pm 15 \cdot \sqrt{385}}{383}\right\}; c)\ 3x - 4y + 3 = 0\right]$

71. $A = 4; S = 6$ $\left[a) k \in \{4, 12\}; b)\ k \in \left\{\frac{-74 \pm 5 \cdot \sqrt{190}}{22}, \frac{-34 \pm 5 \cdot \sqrt{10}}{2}\right\}; c)\ x + 1 = 0\right]$

72. $A = 5; S = 3$ $\left[a) k = \frac{5 \pm 5 \cdot \sqrt{317}}{79}; b)\ k = \frac{114328 \pm 17 \cdot \sqrt{9003387}}{57\,407}; c)\ x - 3y + 7 = 0\right]$

73. $A = 6; S = 10$ $\left[a) k \in \left\{\frac{13}{63}, \frac{11}{57}\right\}; b)\ k \in \left\{\frac{3335 \pm 270 \cdot \sqrt{30}}{18811}, \frac{3325 \pm 270 \cdot \sqrt{42}}{18809}\right\}; c)\ 3x - 5y + 3 = 0\right]$

74. $A = 5; S = 8$ $\left[a) k = \frac{124 \pm 4 \cdot \sqrt{1015}}{9}; b)\ k = \frac{-2169 \pm 4 \cdot \sqrt{3066}}{1788}; c)\ 4x + y + 7 = 0\right]$

75. $A = 8; S = 1$ $\left[a) k \in \left\{-3 \pm \sqrt{15}, -3 \pm \sqrt{17}\right\}; b)\ k \in \left\{\frac{23 \pm 24 \cdot \sqrt{2}}{3}, -\frac{25}{3}\right\}; c)\ x - y = 0\right]$

76. $A = \frac{1}{2}; S = 3$ $\left[a) k = \frac{17 \pm \sqrt{1585}}{8}; b)\ k = \frac{89 \pm 6 \cdot \sqrt{571}}{70}; c)\ x - 5y + 1 = 0\right]$

77. $A = \frac{4}{3}; S = \frac{5}{8}$ $\left[a) k \in \left\{\frac{29 \pm \sqrt{1921}}{45}, \frac{29 \pm \sqrt{1777}}{39}\right\}; b)\ k = \frac{93501 \pm 17 \cdot \sqrt{36391985}}{113612}; c)\ 7x - 3y - 2 = 0\right]$

78. $A = \frac{3}{2}; S = \frac{7}{2}$

$$\left[a)\ k=\frac{7\pm\sqrt{1489}}{144},\ b)\ k\in\left\{\frac{-5821\pm13\cdot\sqrt{1943305}}{78292},\frac{14011\pm13\cdot\sqrt{8407945}}{56388}\right\},\ c)\ 9x-8y=0\right]$$

79. $A=\frac{6}{7};S=\frac{11}{2}$ $\left[a)\ k\in\left\{\frac{72\pm2\cdot\sqrt{57}}{413},\frac{72\pm2\cdot\sqrt{15}}{427}\right\},\ b)\ k\in\left\{\frac{15}{82},\frac{6}{35}\right\},\ c)\ 5x+7y+1=0\right]$

80. $A=\frac{7}{4};S=\frac{13}{3}$ $\left[a)\ k\in\left\{\frac{165\pm3\cdot\sqrt{2289}}{8},\frac{-213\pm3\cdot\sqrt{5649}}{8}\right\},\ b)\ k\in\left\{-\frac{3075}{596},-\frac{3009}{574}\right\},\ c)\ 3x-2=0\right]$

81. $A=\frac{45}{2};S=\frac{101}{2}$ $\left[\begin{array}{l}a)\ k\in\left\{\frac{-1154\pm63\cdot\sqrt{334}}{5},\frac{1114\pm63\cdot\sqrt{314}}{5}\right\},\\ b)\ k\in\left\{\frac{62297\pm3\cdot\sqrt{2296388823}}{109186},\frac{63145\pm3\cdot\sqrt{2345657835}}{108974}\right\},\ c)\ 3y+1=0\end{array}\right]$

Livello 2

82. Scrivere l'equazione del fascio di rette parallele alla retta di equazione $3x - 5y = 0$ e determinare in esso l'unica retta passante per il punto $(-2; 4)$. $[3x - 5y + k = 0,\ 3x - 5y + 26 = 0]$

83. Scrivere l'equazione del fascio di rette di centro il punto $(3; -1)$, e determinare in esso l'unica retta parallela alla retta di equazione $3x - 2y + 1 = 0$. $\left[y+1=m(x-3),\ y=\frac{3}{2}x-\frac{11}{2}\right]$

Livello 3

84. Determinare l'unica retta appartenente a entrambi i fasci di equazioni $(3 - k)\,x - 2y + 5k + 6 = 0$ e $(2 + 7k)\,x + (2 - 3k)\,y + k - 2 = 0$. $[97x - 48y + 19 = 0]$

85. Nel fascio di centro il punto $(4; -1)$ determinare le eventuali rette che incontrano gli assi coordinati determinando due segmenti che sono uno doppio dell'altro.
$[2x + y - 7 = 0,\ 2x - y - 9 = 0,\ x + 2y - 2 = 0,\ x - 2y - 3 = 0]$

86. Scrivere l'equazione del fascio di rette contenenti entrambe le rette $x - 5y = 0$ e $2x + y - 1 = 0$. Determinare in esso i valori di k per cui la generica retta stacca sull'asse x un segmento di lunghezza 3.
$$\left[3\cdot(1+2k)\cdot x+(k-5)\cdot y-k=0,\ k\in\left\{\frac{27\pm\sqrt{1119}}{13},\frac{27\pm\sqrt{1059}}{11}\right\}\right]$$

87. Nei fasci di centri rispettivi $(0; 3)$ e $(-3; 1)$ determinare le rette che siano tra loro perpendicolari e che si incontrino in un punto che verifichi le seguenti condizioni: a) abbia ascissa maggiore di 3; b) abbia ordinata minore di 2; c) abbia ascissa e ordinata uguali; d) abbia ascissa minore di 5 e ordinata maggiore di 0. Studiare il problema al variare del coefficiente angolare m della generica retta del fascio di centro P. $\left[a)\ \varnothing;\ b)\ m<-\frac{3+\sqrt{21}}{6}\vee m>\frac{-3+\sqrt{21}}{6};\ c)\ m=-2\vee m=3;\ d)\ -\frac{3+\sqrt{21}}{2}<m<\frac{-3+\sqrt{21}}{2}\right]$

L'angolo di Derive

Clicca su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%203/3-1/3-1-1.exe per vedere come con Derive si rappresentano e studiano le rette.
Clicca su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%203/3-1/3-1-1.dfw per scaricare il relativo file in Derive.
Attività Svolgere i precedenti esercizi utilizzando Derive per eseguire i calcoli.

L'angolo di Geogebra e Cabri

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%203/3-1/3-1-2.exe , un applicazione per vedere come con Geogebra si rappresentano e studiano le rette.
Clicca su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%203/3-1/3-1-2.zip per scaricare i relativi files in Geogebra.

Attività Verificare i risultati degli esercizi assegnati.

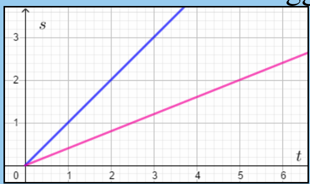
Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%203/3-1/3-1-3.exe si vede come con Cabri si rappresentano le rette e si calcolano le loro equazioni.

Clicca su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%203/3-1/3-1-5.rar per scaricare i relativi files in Cabri.

Attività Risolvere gli esercizi assegnati sulla determinazione dell'equazione per 2 punti.

L’angolo della MateFisica

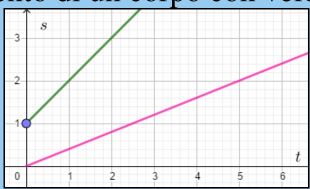
La rappresentazione grafica del moto rettilineo uniforme, su un piano cartesiano in cui sulle ascisse abbiamo la variabile tempo e sulle ordinate la variabile spazio, è ovviamente una retta. Questa passa per l’origine se lo studio del moto avviene nel momento stesso in cui esso inizia, quindi la sua legge è del tipo $s = v \cdot t$; diversamente invece passa per il punto $(0; s_0)$ e la sua legge è del tipo $s = s_0 + v \cdot t$. Ovviamente la s è la variabile dipendente e fa le veci di quella che qui abbioamo indicato con y; t è la variabile indipendente che in matematica di solito indichiamo con x. v rappresenta la pendenza della curva, quindi una maggiore o minore pendenza indica una maggiore o minore velocità.

In figura 

il moto rappresentato dal tratto blu ha una velocità costante maggiore di quello rappresentato dal tratto rosso. Osserviamo che in effetti la curva non è una retta, bensì una semiretta, perché dal punto di vista fisico non hanno senso i tempi negativi. E siccome prima o poi smetteremo di osservare il fenomeno è più propriamente un segmento.

In ogni caso i due grafici precedenti rappresentano moti con velocità crescente, mentre il seguente è riferito al movimento di un corpo con velocità che diminuisce 

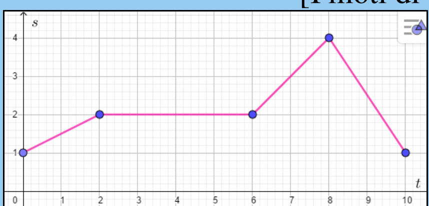
.

In figura 

è più difficile valutare le rispettive velocità, dato che hanno punti di partenza diversi.

In effetti un grafico del genere si può associare a svariati fenomeni fisici. Per esempio la cosiddetta I legge di Ohm, che lega fra di loro differena potenziale, resistenza e intensità di corrente elettrica: $\Delta V = R \cdot I$; oppure la cosiddetta II legge della dinamica che relaziona forza, massa e accelerazione: $F= m \cdot a$.

Attività

1. Cosa rappresenta una semiretta parallela all’asse delle ascisse? [Un corpo fermo]
2. Cosa rappresentano, dal punto di vista fisico due rette parallele? [Moti con uguale velocità]
3. Due rette che si incontrano in un punto cosa rappresentano? [I moti di due punti materiali che a un certo punto occupano la stessa posizione]
4. 

Con riferimento al grafico, determinare la velocità del corpo nell’istante a) $t = 1$ s; b) $t = 4$ s; c) $t = 7$ s; d) $t = 9$ s. [a) 2m/s; b) 0m/s; c) 1m/s; d) –1,5 m/s]
5. Se mettiamo sulla ascisse il tempo e sulle ordinate la velocità, in un moto unifromemente accelerato, il grafico è sempre rettilineo? Giustifica la risposta. [Sì]
6. Nella I legge di Ohm, cosa rappresenta la pendenza della curva? [La Resistenza]

7. Nella II legge della dinamica, cosa rappresenta la pendenza della curva? [La massa]
8. Vi è una differenza sostanziale fra il grafico del moto rettilineo uniforme e quello della I legge di Ohm o della II legge della dinamica, quale? [Gli altri due non possono avere pendenza negativa]

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi

1. In che relazione sono gli angoli formati con il semiasse positivo delle ascisse, da due rette con coefficienti angolari opposti (p.e. $y = 2x$ e $y = -2x$). [Sono supplementari]
2. In che relazione sono gli angoli formati con il semiasse positivo delle ascisse, da due rette con coefficienti angolari inversi e positivi (p.e. $y = 2x$ e $y = \frac{1}{2}x$). [Sono complementari]
3. In che relazione sono gli angoli formati con il semiasse positivo delle ascisse, da due rette con coefficienti angolari inversi e negativi (p.e. $y = 2x$ e $y = -\frac{1}{2}x$). [La somma è 270°]
4. Dimostrare che il quadrilatero avente per vertici i punti medi dei lati di un altro quadrilatero convesso è un parallelogramma.
5. Si considerino due rette passanti per il punto d'incontro delle diagonali di un parallelogramma *ABCD*. Dimostrare che il quadrilatero *EFGH*, avente per vertici i punti d'intersezione delle dette rette con i lati del parallelogramma è esso stesso un parallelogramma.
6. *E* ed *F* sono punti medi di due lati opposti di uno stesso parallelogramma *ABCD*. Dimostrare che *AECF* è un parallelogramma.
7. Punti per cui la somma delle distanze da due rette incidenti è costante. [I lati di un rettangolo che ha le date rette per diagonali]
8. Punti per cui la differenza delle distanze da due rette incidenti date è costante. [Prolungamento dei lati di un rettangolo che ha le date rette per diagonali]
9. Trovare le coordinate dei punti equidistanti dagli assi coordinati e dalla retta $x + y = 2$.
$$\left[\left(2-\sqrt{2};2-\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right),\left(2+\sqrt{2};2+\sqrt{2}\right),\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)\right]$$

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi

1. (Liceo scientifico 1990/91) In un piano cartesiano ortogonale *Oxy* si consideri il punto $A \equiv (2x; 0)$. Si trovi il luogo *L* del punto $B \equiv (x; y)$ tale che il triangolo *OAB* abbia perimetro $2p$. Se B_0 è il punto di *L* del primo quadrante la cui ascissa è $\frac{p}{4}$ e A_0 il terzo vertice del relativo triangolo, si calcoli l'area del triangolo OA_0B_0. Si individuino inoltre le altre 7 posizioni di *B* tali che il triangolo *OAB* sia equivalente a OA_0B_0.
$$\left[L: \begin{cases} x = \dfrac{p^2-y^2}{2p} & x \ge 0 \\ x = \dfrac{y^2-p^2}{2p} & x \ge 0 \end{cases}; S_{OA_0B_0} = \frac{p^2\cdot\sqrt{2}}{8}; B_0 \equiv \left(\frac{p}{4}, \frac{p\cdot\sqrt{2}}{2}\right), B_1 \equiv \left(-\frac{p}{4}; \frac{p\cdot\sqrt{2}}{2}\right), \right.$$
$$\left. B_{2,3} \equiv \left(\pm\frac{p}{4}; -\frac{p\cdot\sqrt{2}}{2}\right), B_{4,5,6,7} \equiv \left(\pm\frac{p\cdot\left(1+\sqrt{5}\right)}{8}; \pm\frac{p\cdot\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)}{4}\right)\right]$$
2. (Liceo scientifico PNI 1995/96) In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (*Oxy*), sono assegnati i punti $A \equiv (2; 0)$ e $B \equiv (0; 4)$. Sia $P \equiv (x; y)$ un punto di detto piano con $x > 0$ e $y > 0$, e *C*, *D*, *E*, *F* i punti medi dei lati *OA*, *AP*, *PB*, *BO* del quadrilatero *OAPB*. Il candidato: a) dica quali po-

sizioni deve occupare *P* affinché *OAPB* degeneri in un triangolo; b) dimostri che il quadrilatero *CDEF* è un parallelogramma; c) dica quali posizioni deve occupare *P* affinché il parallelogramma *CDEF* sia un rettangolo d) dica quali posizioni deve occupare *P* affinché il parallelogramma *CDEF* sia un rombo; e) determini le coordinate di *P* quando il parallelogramma *CDEF* è un quadrato; f) dimostri che l'area del parallelogramma *CDEF* è metà dell'area del quadrilatero *OAPB*; g) esprima in funzione dell'ascissa di *P* il rapporto *z* tra l'area del quadrato di lato *EF* e l'area del parallelogramma *CDEF*, quando *P*, oltre a rispettare le condizioni inizialmente assegnate, appartiene alla retta $y = 4 - x$.

[a) $P \in AB$; c) $P \equiv \left(x; \frac{x}{2}\right), x > 0$; d) $P \in x^2 + y^2 = 20, x > 0, y > 0$;

e) $P \equiv (4; 2)$; g) $z = \frac{x^2 - 4x + 8}{x + 4}, 0 < x < 4$]

3. (Liceo scientifico PNI 1997/98) Sia dato il seguente sistema lineare: $\begin{cases} (k+1)x - y - 1 = 0 \\ 2kx - y - 1 = 0 \\ 2x + y + 1 + h = 0 \end{cases}$. Il candidato:

a) dica per quali valori di *h* e *k* il sistema ammette soluzioni; b) interpretate le equazioni del sistema come quelle di tre rette *r*, *s*, *t* di un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy*, dica quali sono le posizioni delle rette quando il sistema ha soluzione; c) nei casi in cui il sistema non ha soluzione, determini, per via algebrica o geometrica, quando le tre rette individuano un triangolo.

[a) $h = 0 \vee k = 1$; b) $h = 0 \wedge k \neq 1) \vee (h \neq 0 \wedge k = 1)$, le rette sono incidenti in $P \equiv \left(-\frac{h}{4}; -\frac{h+2}{2}\right)$; $h = 0 \wedge k = 1$, *r* e *s* sono coincidenti; $h = 0 \wedge k = -1$, *s* e *t* sono coincidenti; $h = 0 \wedge k = -3$, *r* e *t* sono coincidenti; c) $h \neq 0 \wedge k \neq 1 \wedge k \neq -1 \wedge k \neq -3$]

Quelli che … vogliono sapere di più

Cenni sulla programmazione lineare

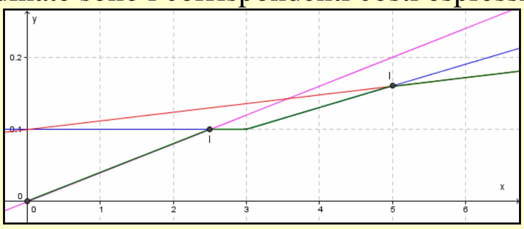
Il problema

Corinna è alquanto confusa dalle offerte dei vari operatori di telefonia cellulare. La *Tuttocompreso* le offre un contratto in cui ogni telefonata ha un costo di € 0,04 al minuto; la *Freephone* invece le propone un contratto con un fisso di € 0,10 alla risposta, maggiorata di € 0,012 ogni minuto; la *Phonemobile* invece fa pagare € 0,10 per i primi 3 minuti e poi € 0,03 al minuto per le successive telefonate. Quale fra le tre offerte risulta la più conveniente?

Il problema proposto non ha una risposta assoluta, nel senso che la risposta dipende dalla durata media di una telefonata: se Corinna pensa di telefonare mediamente 3 minuti è certo che l'offerta della *Phonemobile* è la più vantaggiosa, dato che pagherebbe in ogni caso € 0,10, mentre con la *Tuttocompreso* pagherebbe un totale di € 0,12 e con la *Freephone* € (0,10 + 3 · 0,012) = € 1,036. Se però le sue telefonate dovessero durare solo un minuto la situazione varierebbe. Piuttosto che effettuare una scelta casuale conviene fare un discorso più generale.

Esempio 26

Innanzi tutto scriviamo le tre leggi della spesa, s, in funzione del tempo e, visto che l'unità di misura comune è un minuto, con t indicheremo appunto tale durata. Nel primo caso la legge è: $s = 0{,}04 \cdot t$. Nel secondo caso la legge impone di aggiungere la spesa fissa: $s = 0{,}10 + 0{,}012t$. Più complicata risulta la legge che regola la terza offerta, infatti si deve tenere conto che per i primi tre minuti il prezzo è fisso. Dobbiamo quindi usare una legge non *unica*: $s = \begin{cases} 0{,}10 & \text{se } t \le 3 \\ 0{,}10 + 0{,}03 \cdot (t-3) & \text{se } t > 3 \end{cases}$. Consideriamo ora le tre leggi come leggi di rette (anche se in realtà sono successioni di più punti allineati), dato che noi consideriamo solo i valori interi positivi di t. Rappresentiamole in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale non monometrico, in cui le ascisse sono multipli di un minuto e le ordinate sono i corrispondenti costi espressi in euro.



Nel grafico abbiamo indicato con il fucsia il primo caso, con il rosso il secondo, con il blu il terzo. Il tratto verde rappresenta invece la linea spezzata che ci fornisce, per ogni valore di t quale dei servizi è più conveniente; in particolare con i punti I abbiamo indicato i punti in cui vi sono due servizi ugualmente convenienti. Determiniamo tali punti: $\begin{cases} s = 0{,}04t \\ s = 0{,}10 \end{cases} \Rightarrow t = \dfrac{0{,}10}{0{,}04} = 2{,}5$; $\begin{cases} s = 0{,}10 + 0{,}012t \\ s = 0{,}10 + 0{,}03 \cdot (t-3) \end{cases} \Rightarrow t = \dfrac{0{,}09}{0{,}018} = 5$. Possiamo allora dire che se Corinna mediamente telefona meno di 2,5 minuti, è più conveniente il primo servizio con il quale spenderà da un minimo di € 0,04 per una conversazione che dura da 0 a 60 secondi, a un massimo di € 0,10 per una conversazione che dura appunto 2,5 minuti; se prevede che mediamente le sue telefonate durino da 2,5 a 5 minuti è più conveniente il terzo operatore, dato che pagherà da un minimo di € 0,10 fino a 3 minuti di conversazione a € (0,10 + 0,06) = € 0,16 per 5 minuti; se poi le sue telefonate dovessero durare più di 5 minuti le converrà il secondo servizio.

In realtà quanto abbiamo detto non è del tutto corretto, poiché, come già osservato, abbiamo a che fare non con un insieme continuo di valori, ma con un insieme discreto. Così la *Tuttocompreso* per 2,5 minuti farà pagare quanto fa pagare per 3 minuti, cioè € 0,12, e la convenienza del suo contratto varrà pertanto fino a 2 minuti e non a 2,5.

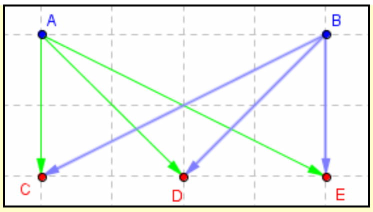
Definizione 7

Un problema nel quale si deve determinare il minimo o il massimo valore assunto da due o più equazioni lineari in due o più variabili, al variare di alcune delle due variabili, si chiama **problema di programmazione lineare libero**. Le funzioni si chiameranno **funzioni obiettivo**. Gli eventuali valori di minimo o massimo comuni a due o più delle equazioni si chiamano **punti di indifferenza**.

In generale quindi un problema di programmazione lineare può avere una risoluzione grafica in uno spazio a tante dimensioni quante sono le variabili; da un punto di vista *pratico* tale risoluzione è praticabile solo per spazi a 2 e a 3 dimensioni.

Vogliamo considerare ora un altro tipo di problema di programmazione lineare, il cosiddetto *problema dei trasporti*.

Esempio 27

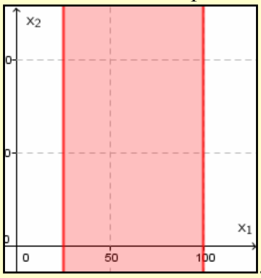
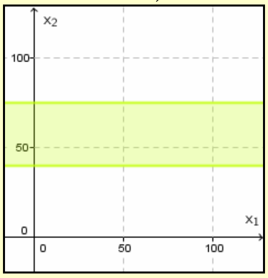
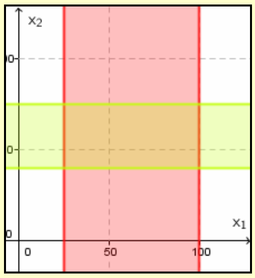
Nel diagramma in figura 

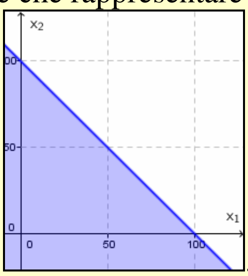
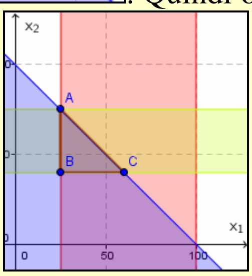
rappresentata quella che si chiama *rete di trasporti*. Con i punti blu rappresentiamo due fabbriche, con i punti rossi rappresentiamo invece tre punti di *distribuzione* dove devono essere portati i prodotti fabbricati. È chiaro che i trasporti hanno un certo costo, dipendente in genere dalla quantità trasportata e dal luogo di destinazione. Supponiamo per esempio che trasportare un'unità di merce da A a C costi 1, mentre 3 e 2 indicano il costo per portare un'unità di merce da A rispettivamente in D ed E. I costi del trasporto da B sono invece 4, 2 e 3. Le variabili sono la quantità di merce che deve essere trasportata da A e da B verso i luoghi di distribuzione. Indichiamole con x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 e x_6. Il costo totale sarà quindi: $y = 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 + 2 \cdot x_5 + 3 \cdot x_6$. Si tratta di una funzione lineare in sei variabili, quindi non rappresentabile. Vi è però da dire che vi sono alcune limitazioni. Per esempio la merce trasportata non potrà superare il totale di quella prodotta, così se la fabbrica A produce quotidianamente 100 unità di merce e la fabbrica B 150, dovremo rispettare queste due condizioni: $x_1 + x_2 + x_3 \le 100$, $x_4 + x_5 + x_6 \le 150$. Analogamente vi sono alcune limitazioni nella merce che può essere portata nei luoghi di distribuzione, come la capienza dei magazzini, la capacità di vendita, la richiesta dei clienti e così via. Pertanto ogni distributore è interessato a ricevere un certo quantitativo di merce compreso tra due valori, per esempio il distributore C accetta da A solo quantitativi maggiori di 3 unità e minori di 13 unità. Imponendo analoghi vincoli per le altre merci e gli altri distributori potremmo avere questi altri vincoli da rispettare: $\begin{cases} 4 \le x_1 \le 12 \\ 3 \le x_2 \le 18 \\ 10 \le x_3 \le 40 \\ 2 \le x_4 \le 5 \\ 24 \le x_5 \le 32 \\ 1 \le x_6 \le 8 \end{cases}$. A questo punto il nostro problema diviene quello di trovare il minimo della seguente funzione $y = 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 + 2 \cdot x_5 + 3 \cdot x_6$, soggetta alle condizioni $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 100 \\ x_4 + x_5 + x_6 \le 150 \\ 4 \le x_1 \le 12 \\ 3 \le x_2 \le 18 \\ 10 \le x_3 \le 40 \\ 2 \le x_4 \le 5 \\ 24 \le x_5 \le 32 \\ 1 \le x_6 \le 8 \end{cases}$.

Come abbiamo visto la differenza fra il problema appena proposto e quello iniziale consiste non tanto nel fatto che vi sono più variabili, ma che esse sono vincolate da condizioni esterne. Il semplice metodo che abbiamo applicato al caso dell'Esempio 26, non è più applicabile, ma occorre utilizzare strumenti più sofisticati che fanno parte di una nuova disciplina matematica: la ricerca operativa. In questo paragrafo affronteremo solo i casi a due variabili.

Esempio 28

Riprendiamo l'esempio precedente supponendo che vi sia una sola fabbrica, A, e due luoghi di distribuzione, B e C. Supponiamo che trasportare un'unità di merce da A a B costi 1, da A a C costi 3. La funzione obiettivo da minimizzare è quindi $y = 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2$, che è una funzione lineare in due variabili. Sappiamo poi che la fabbrica A produce quotidianamente 100 unità di merce, quindi dobbiamo rispettare $x_1 + x_2 \le 100$. Le limitazioni nella merce che può essere portata nei luoghi di distribuzione sono le seguenti: $\begin{cases} 25 \le x_1 \le 100 \\ 40 \le x_2 \le 75 \end{cases}$.

Il nostro problema è allora: $\begin{cases} \min(x_1 + 3x_2) \\ x_1 + x_2 \le 100 \\ 25 \le x_1 \le 100 \\ 40 \le x_2 \le 75 \end{cases}$. Rappresentiamo in un piano cartesiano ortogonale in cui le ascisse si chiamano x_1 e le ordinate x_2, i tre vincoli. Il problema è che non sappiamo come interpretare le disequazioni. Non è però difficile capire che dire $x_1 \le 100$ significa che consideriamo tutti i punti che hanno l'ascissa non superiore a 100, quindi il semipiano che sta *a sinistra* della retta di equazione $x_1 \le 100$; allo stesso modo $x_1 \ge 25$ indica i punti la cui ascissa non è inferiore a 25, cioè la striscia mostrata nella figura . Allo stesso modo la figura seguente  rappresenta il terzo vincolo, quello su x_2. I due vincoli insieme determinano quindi il rettangolo mostrato in figura .

Non ci rimane che rappresentare il vincolo che lega fra loro x_1 e x_2. Stavolta avremo la situazione mostrata in questa figura . Quindi otterremo perciò la seguente figura finale, in cui il triangolo segnato è quello dei vincoli. 

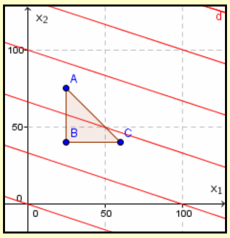
In vista di quanto visto nell'esempio poniamo qualche definizione.

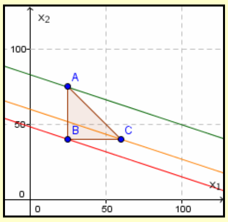
Definizione 8

Un problema nel quale si deve determinare il minimo o il massimo valore assunto da due o più equazioni lineari in due o più variabili, al variare di alcune delle due variabili, soggette a certe condizioni rappresentate da disequazioni anch'esse di tipo lineare, si chiama **problema di programmazione lineare vincolato**. Se le rette che rappresentano i vincoli si incontrano in modo da racchiudere un poligono, esso si chiamerà **poligono delle soluzioni**.

Torniamo all'Esempio 28, che non avevamo ancora concluso. Abbiamo determinato il poligono delle soluzioni, ma non abbiamo stabilito qual è la soluzione da noi cercata.

Esempio 29

Abbiamo rappresentato i vincoli ma non la funzione obiettivo. Anch'essa rappresenta una retta sul piano Ox_1x_2. Il problema però è che noi vogliamo considerare tutti i valori che tale retta assume nei punti del poligono soluzione, cercandone il minimo. La questione non è risolvibile in modo *ingenuo*, cioè semplicemente per sostituzione dei valori, dato che i valori da sostituire sono infiniti. Dobbiamo quindi cercare di mostrare che in effetti non è necessario sostituire tutti i valori. 

In figura abbiamo tracciato alcune rette del fascio $x_1 + 3x_2 = k$, che ci fornisce appunto il valore della funzione obiettivo, con il valore di k. Tale valore però si ottiene considerando un qualsiasi punto sulla retta ed effettuando la somma fra la sua ascissa e il triplo della sua ordinata. Ciò significa che possiamo calcolare solamente le tre rette che passano per i tre vertici del triangolo; il minimo fra questi valori è quello cercato. 

I nostri tre vertici hanno coordinate (25; 40), (25; 75) e (60; 40); la funzione obiettivo calcolata in essi vale rispettivamente: $25 + 3 \cdot 40 = 145$; $25 + 3 \cdot 75 = 250$; $60 + 3 \cdot 40 = 180$. Il minimo fra i valori è il primo. Possiamo concludere che conviene inviare 25 unità al primo distributore e 40 al secondo; ciò determina una diminuzione dei costi, che sono di € 145,00.

Concludiamo il paragrafo enunciando il teorema fondamentale della programmazione lineare vincolata.

Teorema 14

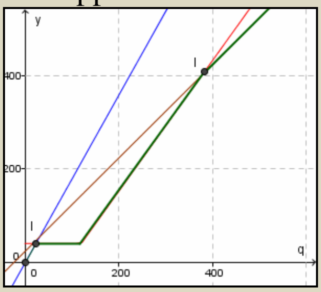
Dato un problema di programmazione lineare vincolato, i cui vincoli determinano un poligono delle soluzioni, il minimo e il massimo della funzione obiettivo sono il minimo e il massimo della detta funzione calcolata nei vertici del poligono.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Una banca offre le seguenti alternative per la tenuta di un conto corrente: € 40,00 *di spese fisse*, 120 *operazioni gratuite e le altre a* € 1,40 *l'una; oppure spese fisse* € 25,00 *e* € 1,00 *per ogni operazione; o ancora* € 1,80 *per operazione senza spese fisse. Vogliamo studiare l'andamento dei costi al variare del numero delle operazioni.*

Cominciamo a determinare la legge relativa al primo servizio. Essa è formata da due diverse leggi, una valida fino a 120 operazioni e l'altra dalla 121[a] operazione in poi. La sua espressione analitica, in funzione del numero q di operazioni, è perciò $y=\begin{cases}40 & 0\le q\le 120\\ 40+1,40\cdot(q-120) & q>120\end{cases}$. Invece il secondo servizio è governato dalla legge $y = 25 + q$. Infine il terzo servizio ha per legge: $y = 1,80q$. Rappresentiamo graficamente le tre funzioni in un riferimento in cui le ascisse rappresentano il numero di operazioni.



Abbiamo segnato con un tratto verde il percorso minimo. Si tratta perciò di determinare intanto i punti di indifferenza, risolvendo i seguenti sistemi:

$$\begin{cases}y=1,80\,q\\ y=40\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}40=1,80\,q\\ y=40\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}q=\dfrac{40}{1,80}\\ y=40\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}q\approx 22,2\\ y=40\end{cases};\Rightarrow\begin{cases}q=\dfrac{40}{1,80}\\ y=40\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}q\approx 22,2\\ y=40\end{cases}\quad\begin{cases}y=25+q\\ y=40+1,40\cdot(q-120)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y=25+q\\ 25+q=40+1,40q-168\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=25+q\\ 0,40q=153\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=25+q\\ q=\dfrac{153}{0,4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=407,5\\ q=382,5\end{cases}$$

. Adesso consideriamo il primo intero maggiore delle soluzioni effettivi, cioè 23 per il primo sistema e 383 per il secondo. Ciò significa che se pensiamo di effettuare meno di 23 operazioni ci conviene scegliere l'alternativa senza spese fisse, nel qual caso pagheremo un massimo di € (22· 1,80) = € 39,60. Se invece le nostre operazioni sono comprese nel range [23, 382], allora è più conveniente la prima alternativa, con la quale il massimo che ci aspettiamo di pagare è € [40,00 + 1,40 · (382 – 120)] = € 406,80. Con almeno 383 operazioni sceglieremo la seconda alternativa. Potevamo risolvere il problema anche con metodi puramente algebrici, ossia risolvendo le disequazioni: $1,80q > 40$; $1,80q > 25 + q$; $1,80q > 40 + 1,40\cdot(q – 120)$; $25 + q > 40$; $25 + q > 40 + 1,40\cdot(q – 120)$.

Livello 1

1. Affittando una macchina possiamo scegliere di pagare un fisso di € 30,00 al giorno senza limite di chilometri, oppure un fisso di € 12,00 più € 0,10 al chilometro. Studiare la soluzione più conveniente al variare del numero di chilometri percorsi in un giorno.
   [Fino a Km 180 è più conveniente la seconda opzione]
2. Un muratore per demolire e ricostruire fa pagare o un fisso di € 100,00 fino a un massimo di 500 m^2; oppure un fisso di € 25,00 più € 0,25 al m^2. Studiare la soluzione più conveniente al variare del numero intero di metri quadrati di parete. [Fino a m^2 300 conviene la seconda opzione]
3. Una compagnia telefonica propone due abbonamenti, il primo prevede il costo fisso di € 0,10 per chiamata, aumentato di € 0,01 ogni multiplo di 15 secondi di conversazione; oppure € 0,01 per ogni chiamata, aumentato di € 0,015 per ogni minuto o sottomultiplo di chiamata. Studiare la soluzione più conveniente al variare del numero intero multiplo di 15 secondi della media giornaliera delle chiamate.
   [Fino a 7 minuti conviene la seconda opzione]

4. L'abbonamento a Internet da parte di una compagnia ha due opzioni. Un fisso di € 2,00 al giorno aumentato di € 0,01 per minuto, oppure € 0,10 per minuto di collegamento. Studiare la soluzione più conveniente al variare del numero medio intero di minuti di collegamento giornalieri.
[Fino a 22 minuti conviene la seconda opzione]
5. Davide è indeciso a quale compagnia di telefonia mobile affidarsi. La Teleconomia fa pagare un fisso di € 10,00 mensili e poi € 0,01 per ogni minuto di conversazione. Una seconda compagnia, la Free invece propone un costo di € 0,07 ogni 30 secondi di conversazione. Studiare l'andamento dei costi al variare del tempo medio di conversazione mensile. [Fino a 400 minuti conviene la seconda]
6. Una azienda di prestiti per il rimborso delle somme prevede le seguenti due possibilità. Un fisso di € 100,00 più il 2% della somma prestata; oppure il 4,50% della somma prestata. Studiare la soluzione più conveniente al debitore, al variare della somma prestata.
[Fino a un prestito di € 4000 conviene la seconda opzione]
7. Una banca offre un nuovo servizio per i suoi clienti titolari di un conto corrente. Prima faceva pagare €20,00 l'anno e € 0,10 per ogni assegno emesso, adesso invece richiede € 25,00 l'anno e € 0,06 per ogni assegno. Quanti assegni l'anno deve emettere al minimo un cliente affinché il nuovo servizio risulti più economico? [Più di 25]
8. Una banca offre le seguenti alternative per la tenuta di un conto corrente: € 32,00 di spese fisse e € 1,10 ogni operazione, oppure spese fisse di € 28,00 e € 1,15 per ogni operazione. Studiare l'andamento dei costi al variare del numero delle operazioni. [Fino a 80 operazioni conviene la seconda]

Livello 2

9. Come nell'esercizio precedente, ma con una terza alternativa: costo di € 1,80 per ogni operazione senza spese fisse.
[Fino a 43 operazioni conviene il terzo, da 44 a 80 operazioni il secondo, per più di 80 il primo]
10. Con riferimento al problema 1, tenere conto dell'ulteriore opzione: € 0,18 al chilometro.
[Fino a Km 150 conviene la terza, da Km 151 a Km 180 la seconda, da Km 180 in poi la prima]
11. Con riferimento al problema 2, tenere conto dell'ulteriore opzione: solo € 0,40 al m^2.
[Fino a m^2 166 conviene la seconda, da m^2 167 a m^2 300 la seconda, da m^2 300 a m^2 500 la prima]
12. Con riferimento al problema 3, tenere conto dell'ulteriore opzione: € 0,03 per ogni minuto o sottomultiplo di chiamata. [Fino a 7^m la seconda, per più di 7^m la prima]
13. Per affittare un'auto si richiedono tre preventivi. L'agenzia *Ruote Dorate* chiede € 15,00 al giorno più € 0,10 per ogni chilometro percorso. *Sterzo Argentato* vuole € 12,00 di fisso e € 0,12 per ogni chilometro. *Strade infinite* richiede € 0,15 al chilometro senza spesse fisse. Quale delle tre agenzie è più conveniente? [Fino a Km 300 conviene *Strade infinite*, per più di Km 300 conviene *Ruote Dorate*]
14. Un autotrasportatore propone le seguenti tariffe, o un fisso di € 15,00 al viaggio per ogni multiplo di 50 chilometri, con l'intesa che da 1 km a 50 Km si paga sempre lo stesso; oppure un costo di € 0,40 al chilometro. Studiare la soluzione più conveniente al variare del numero intero di chilometri percorsi.
[Nelle fasce di chilometri [0, 37], [51, 74], [101, 112], ... conviene la seconda opzione; 75, 150, ... sono punti di indifferenza]
15. Una azienda ha bisogno di carta per imballaggio e ha ricevuto i seguenti preventivi da tre ditte fornitrici A: € 0,10 al chilo più € 60,00 per il trasporto; B: € 0,08 al chilo più € 80,00; C: fisso di € 120 aumentato di € 0,06 al chilo. Studiare quali fra le tre ditte propone un servizio più conveniente, al variare della quantità di carta ordinata.
[Fino a Kg 1000 conviene C, da Kg 1001 a Kg 2000 conviene B, per più di Kg 2000 conviene A]
16. Un ristorante deve ordinare della pasta e si rivolge a tre diversi pastifici, indicati con A, B e C. Riceve i seguenti tre preventivi. A: € 0,50 al Kg e € 75,00 per il trasporto; B: € 0,40 al Kg e € 90,00 per il trasporto; C: € 0,45 al Kg e € 82,00 per il trasporto. Studiare l'andamento dei costi al variare della quantità ordinata. [Fino a 139 Kg conviene A, per 140 Kg A e C si equivalgono, da 141 a 159 Kg è più economico C, per 160 Kg B e C si equivalgono, per più di 160 Kg conviene B]

Livello 3

17. Una ditta deve scegliere fra le seguenti offerte pervenute da parte di 4 corrieri espressi per il recapito di pacchi. L'agenzia *Consegne sicure* vuole un fisso di € 3,00 più € 0,30 per ogni Kg; la ditta *Più veloci della luce* fa pagare € 0,35 al Kg per pesi non superiori a 10 Kg, poi chiede un fisso di € 3,50 per i primi dieci Kg e € 0,45 per i Kg eccedenti i 10; l'agenzia *Super espresso* pretende un fisso di € 1,00 per pacchi fino a 10 Kg, ogni 10 Kg il fisso aumenta di altri € 0,50, inoltre richiede € 0,40 al Kg; infi-

ne la ditta *Già consegnato* applica le seguenti tariffe: € 0,50 al Kg fino a 5 Kg, da 6 a 10 Kg. chiede € 0,55 al Kg, comprendendo anche i primi 5 Kg, così un pacco da 5 Kg costa 2.5 euro e uno da 6, 3,3 euro. Ogni 5 Kg. aumenta di € 0,05 il Kg. Tutte le ditte arrotondano per difetto, così un pacco di 300 g. viene fatto pagare come uno da 1 Kg. Studiare la situazione per consegne il cui peso varia da 1 Kg a 50 Kg. [Fino a 10 Kg la *Già consegnato*; da 11 a 15 Kg la *Più veloci della luce* e la *Già consegnato* si equivalgono; da 16 a 29 Kg la *Più veloci della luce*; per 30 Kg la *Consegne sicure* e la *Più veloci della luce* si equivalgono; per più di 30 Kg la *Consegne sicure*]

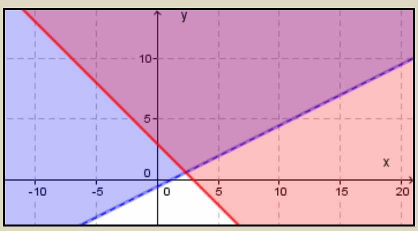
18. Per il trasporto di alcuni alunni che abitano in zone particolarmente disagiate, pervengono, da parte di 4 ditte di minibus, le seguenti offerte relative al singolo viaggio. La ditta *Busauto* vuole un fisso di € 20,00 più € 0,40 per ogni passeggero; la ditta *Chi va piano va lontano*, fa pagare € 19,00 di fisso e € 0,50 a persona; l'agenzia *Sicurezza è il nostro mestiere*, vuole € 17,00 di fisso e € 0,83 a persona; infine la ditta *Quattroruote* applica la seguente tariffa: € 16,00 come fisso e € 1,20 a persona. Determinare la ditta che offre il preventivo più economico a seconda del numero di alunni da trasportare.
[Fino a 2 persone conviene *Quattroruote*; da 3 a 5 *Sicurezza …*; per 6 alunni *Sicurezza* e *Chi va…* si equivalgono; da 7 a 9 *Chi va …*; per 10 passeggeri si equivalgono *Busauto* e *Chi va …*; per più di 10 partecipanti conviene *Busauto*]

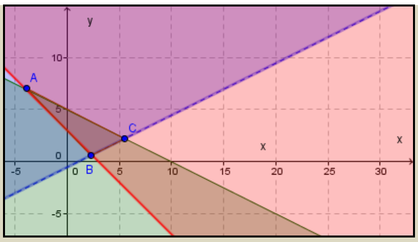
19. Una tipografia si rivolge a tre rivenditori per acquistare la carta. Il primo gli prospetta le seguenti possibilità: € 1,20 al Kg per ordini fino a 1 quintale di carta, dopodiché applica uno sconto del 10% per ordini fino a 5 quintali solo per la parte eccedente 100 Kg., e uno ulteriore del 15% per ordini superiori a 5 quintali, sempre solo per la parte eccedente tale quantità. Un altro fornitore invece propone un prezzo di € 1,00 il chilo più un fisso per il trasporto di € 30,00 per ogni mezza tonnellata o porzione, cioè se ordina 500 Kg, di carta paga € 30,00 di fisso, se ne ordina 501 paga € 60,00. Un terzo fornitore invece vuole € 1,25 il chilo fino a 250 Kg., ogni 250 Kg. sconta di € 0,10 il prezzo al chilo, prezzo valido per tutti i chili ordinati: così se ordina 251 Kg, pagherà € 1,30 il chilo, per 501 Kg. € 1,20 e così via. Tenuto conto che il magazzino del signor Anselmo non può contenere più di 1 tonnellata di carta, studiare le varie possibilità a seconda dell'ordine da effettuare.
[La ditta numero 1 conviene per ordini fino a 225 Kg. e da 705 Kg. a 750 Kg.; la numero 2 per ordini da 226 Kg. a 500 Kg.; la numero 3 per ordini da 501 Kg. a 704 Kg. e da 751 Kg. a 1000 Kg]

20. Un ufficio deve provvedere all'appalto per le pulizie dei suoi stabili. Riceve le seguenti offerte: la ditta *Linda* chiede € 27,75 di fisso più € 0,25 per ogni stanza; la ditta *Splendor* vuole € 0,83 per ogni stanza più un fisso di € 18,50; la *Nettoben* richiede un fisso di € 31,07 e € 0,10 per ogni stanza; infine la *Pulitutto* propone un fisso di € 23,50 e € 0,50 per ogni stanza. In base al numero di stanze da pulire, determinare l'offerta più conveniente. [Fino a 14 stanze si sceglierà la *Splendor*; per 15 stanze *Splendor* e *Pulitutto* si equivalgono; per 16 stanze conviene *Pulitutto*; per 17 stanze *Pulitutto* e *Linda* si equivalgono; da 18 a 22 stanze si preferisce *Linda*; per più di 22 stanze *Nettoben*]

Lavoriamo insieme

Rappresentare le soluzioni del seguente sistema $\begin{cases} x-2y<1 \\ x+y\geq 3 \\ x+2y\leq 10 \end{cases}$.

Cominciamo a rappresentare le prime due disequazioni 

Abbiamo colorato in viola la zona *soluzione*, ossia la parte di piano in cui sono verificate entrambe le disequazioni. Adesso inseriamo anche la terza disequazione. 

Come si nota abbiamo individuato un triangolo, i cui punti rappresentano le soluzioni del sistema. Si faccia attenzione al fatto che solo due dei lati del triangolo, sono soluzioni, il lato *BC* non è invece soluzione.

Risolvere graficamente i seguenti sistemi di disequazioni in 2 variabili

Livello 2

21. $\begin{cases} 3x - y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$ [Triangolo infinito con un solo vertice in *O* e un lato il semiasse negativo delle ordinate]

22. a) $\begin{cases} x \le 0 \\ y \ge 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y < 3 \\ x - y > 1 \end{cases}$ [a) Rettangolo inf. nel II quadrante; b) Triangolo inf. con vertice in $A \equiv (2; 1)$]

23. $\begin{cases} 2x + 3y > 0 \\ 3x < 0 \end{cases}$ [Triangolo infinito con un solo vertice in *O* e un lato il semiasse positivo delle ordinate]

24. a) $\begin{cases} 2x - 7 \le 1 \\ x \le 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + 5y - 2 < 0 \\ x + 3y \le 1 \end{cases}$ [a) Rettangolo inf. a sinistra di $x = 3$; b) Triang. inf. con vertice in *O*]

25. a) $\begin{cases} x - 2y < -1 \\ x < y \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x \le 2y \\ 2 \ge x - y \end{cases}$ [a) Triang. inf. con vert. $A \equiv (1;1)$; b) Triang. inf. con vert. $B \equiv (-4;-6)$]

26. a) $\begin{cases} 2x + 3y < 0 \\ x + y > -1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x + 2y - 1 > 0 \\ x - 2y < 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$ [a) Triang. inf. Vert. in $A \equiv (-3; 2)$; b) Triang. inf. Vert. in *O*]

27. $\begin{cases} 5x - 1 \le 0 \\ 4y < 3x - 1 \\ 0 > 3y - 2 \end{cases}$ [Triangolo infinito con un solo vertice finito in $A \equiv \left(\frac{1}{5}; -\frac{1}{10}\right)$]

28. $\begin{cases} -4x < 2 + y \\ 1 + x - y \le 0 \\ x + y \ge 0 \end{cases}$ [Quadrilatero infinito con due soli vertici finiti in $A \equiv \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), B \equiv \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$]

29. $\begin{cases} x + y > 0 \\ x < 1 \\ y > 2 \end{cases}$ [Quadrilatero infinito con due soli vertici finiti in $A \equiv (1; 2)$ e $B \equiv (-2; 2)$]

30. a) $\begin{cases} 2x - y \le 0 \\ y - x \ge -1 \\ x < y \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x < 3 - y \\ y > 1 + x \\ 2x - y \ge 0 \end{cases}$ [a) Triangolo infinito con un solo vertice finito in *O* ; b) $\varnothing$]

Livello 3

31. $\begin{cases} |x| < 1 \\ y < 0 \end{cases}$ [Quadrilatero infinito con due soli vertici finiti in $A \equiv (-1; 0)$ e $B \equiv (1; 0)$]

32. a) $\begin{cases} |x + 1| \le 0 \\ x - y \ge 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} |x + y| < 0 \\ x + y \le 2 \end{cases}$ [a) Semiretta parallela all'asse delle *y*, vert. il punto $A \equiv (-1; -2)$; b) $\varnothing$]

33. $\begin{cases} |x| + y > 0 \\ 3 - |y| < -1 \end{cases}$ [Unione di due triangoli infiniti di vertici $A \equiv (-4; -4)$ e $B \equiv (4; -4)$ e la striscia formata dai punti di ordinata maggiore o uguale a 4]

34. a) $\begin{cases} |2x - y| \le 1 \\ x \ge y \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + |y - 1| < 0 \\ |2x - 1| < y \end{cases}$ [a) Quadrilatero inf. con vert. $A \equiv (-1; -1)$ e $B \equiv (1; 1)$; b) $A \equiv (0; 1)$]

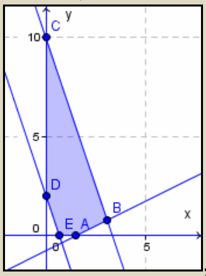
35. a) $\begin{cases} |x| < 1 \\ |y| \ge 2 \\ x - y < 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} |x| + |y| < 1 \\ x + y > 1 \\ x - y < 1 \end{cases}$ [a) Rettangolo infinito con vertici finiti in $A \equiv (-1; 2)$ e $B \equiv (1; 2)$; b) $\varnothing$]

36. $\begin{cases} 3x - y < 4 \\ |x + y| < x \\ |x - y| \ge |x| - |y| \end{cases}$ $\left[\text{Triangolo di vertici } A \equiv \left(\frac{4}{3}; 0\right), B \equiv \left(\frac{4}{5}; -\frac{8}{5}\right), O \equiv (0; 0)\right]$

Lavoriamo insieme

Trovare il minimo dell'espressione $z(x, y) = 2x + 3y - 7$, *soggetta ai vincoli* $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 2x - 4y \le 3 \\ 2 \le 3x + y \le 10 \end{cases}$.

Rappresentiamo i vincoli, ottenendo il pentagono *ABCDE* in figura



, in cui i vertici sono $A \equiv \left(\frac{3}{2}; 0\right)$, $B \equiv \left(\frac{43}{14}; \frac{11}{14}\right)$, $C \equiv (0; 10)$, $D \equiv (0; 2)$, $E \equiv \left(\frac{2}{3}; 0\right)$ come si trova facilmente risolvendo appositi sistemi fra le equazioni. Per quanto detto nella parte teorica basta calcolare il valore dell'espressione da minimizzare nei vertici. Abbiamo perciò $z\left(\frac{3}{2}; 0\right) = 2 \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot 0 - 7 = -4$; $z\left(\frac{43}{14}; \frac{11}{14}\right) = \frac{3}{2}$; $z(0, 10) = 23$; $z(0; 2) = -1$; $z\left(\frac{2}{3}; 0\right) = -\frac{17}{3}$. Se si accettano anche valori negativi (in certi problemi reali tali soluzioni sarebbero prive di senso, non si possono avere per esempio costi negativi), il minimo si ha nel punto E e vale $-\frac{17}{3}$.

Determinare minimo m e massimo M, delle funzioni seguenti soggetti ai vincoli accanto indicati

Livello 2

37. a) $z(x, y) = 12x + 5y + 5$; $\begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ y \le 4 \\ 2x - 3y \le 4 \end{cases}$; b) $z(x; y) = 4x + 3y + 12$; $\begin{cases} 1 \le x \le 5 \\ 1 \le y \le 6 \\ x + y < 7 \end{cases}$

$\left[\text{a) } \left(z_{\min}\left(0; -\frac{4}{3}\right) = \frac{5}{3}; z_{Max}(3; 4) = 61\right); \text{b) } \left(z_{\min}(1; 1) = 19; z_{Max}(5; 2) = 38\right)\right]$

38. a) $z(x; y) = 15x + 10y - 8$; $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \le 4 \\ x-3y \le 4 \end{cases}$; b) $z(x; y) = 30x - 20y + 1$; $\begin{cases} x \le 3 \\ y \le 5 \\ x+y \ge 3 \end{cases}$

$$\left[\text{a) } \left(z_{\min}\left(0;-\frac{4}{3}\right)=-\frac{64}{3}; z_{Max}(16;4)=272\right);\text{b) } \left(z_{\min}(-2;5)=-159; z_{Max}(3;0)=91\right)\right]$$

39. a) $z(x; y) = 115x + 315y - 40$; $\begin{cases} x+y \ge 3 \\ y \le 4 \\ x-y \le 4 \end{cases}$; b) $z(x; y) = 45x + 52y + 10$; $\begin{cases} x+2y \le 1 \\ 3x-y \ge 2 \\ 3x-7y \le 2 \end{cases}$

$$\left[\text{a) } \left(z_{\min}\left(\frac{7}{2};-\frac{1}{2}\right)=205; z_{Max}(8;4)=2140\right);\text{b) } \left(z_{\min}\left(\frac{2}{3};0\right)=40; z_{Max}\left(\frac{11}{13};\frac{1}{13}\right)=\frac{677}{12}\right)\right]$$

40. a) $z(x,\ y)=\frac{25}{4}x+\frac{13}{2}y-\frac{1}{8}$; $\begin{cases} 1 \le x+3y \le 5 \\ 4 \le 2x-y \le 7 \end{cases}$; b) $z(x; y) = 74x + 31y + 25$; $\begin{cases} 3x+y \le 4 \\ x-3y \le 1 \\ 2x-5y \ge 1 \\ 5x+2y \ge 0 \end{cases}$

$$\left[\text{a) } \left(z_{\min}\left(\frac{13}{7};-\frac{2}{7}\right)=\frac{77}{8}; z_{Max}\left(\frac{26}{7};\frac{3}{7}\right)=\frac{207}{8}\right);\text{b) } \left(z_{\min}\left(\frac{2}{17};-\frac{5}{17}\right)=\frac{418}{17}; z_{Max}\left(\frac{21}{17};\frac{5}{17}\right)=\frac{2134}{17}\right)\right]$$

41. a) $z(x; y) = 12{,}5x + 3{,}75y + 12{,}8$; $\begin{cases} 3x+2y \le 5 \\ x+7y \ge 2 \\ 5x-2y \le 3 \\ 4x-y \ge 1 \end{cases}$; b) $z(x; y) = 125x + 15{,}4y + 30$; $\begin{cases} x \ge 2 \\ y \le 3 \\ x-3y \le 1 \\ 3x+4y \ge 12 \\ x-y \le 5 \end{cases}$

$$\left[\text{a) } \left(z_{\min}\left(\frac{9}{29};\frac{7}{29}\right)\approx 17{,}58; z_{Max}(1;1)\approx 29{,}05\right);\text{b) } \left(z_{\min}\left(2;\frac{3}{2}\right)=78{,}1; z_{Max}(8;3)=176{,}2\right)\right]$$

Livello 3

Si ricordi che non sempre il valore calcolato è accettabile, poiché in alcuni casi deve essere intero. In tali casi si approssima ai valori interi più vicini

42. Un oste vuole ordinare non più di 100 bottiglie di vino che hanno due prezzi diversi: € 5,00 e € 6,00 la bottiglia. Dalla sua ventennale esperienza sa che non deve comprare meno di 10 né più di 60 bottiglie per ogni tipo e che il numero delle bottiglie da 6 euro non deve superare quello delle bottiglie da € 5,00. Decide di vendere ciascuna bottiglia ai rispettivi prezzi di €10,00 e €12,00. Nell'ipotesi in cui riuscisse a vendere tutte le bottiglie, quante deve comprarne di ciascun tipo per ottenere il massimo guadagno? [50 di ciascun tipo]
43. Un'impresa produce due beni che hanno costi unitari di produzione pari a € 2,00 e € 1,50 rispettivamente. Indipendentemente dal numero di beni prodotti si spende un fisso di € 1000,00. Sapendo che non si possono produrre complessivamente più di 2500 pezzi al giorno, che si debbono produrre almeno 1000 pezzi e non più di 1500 di ciascun tipo, determinare il numero ottimale di beni di ciascun tipo da produrre per minimizzare i costi. [1000 di ciascun tipo]
44. Un'azienda ha una spesa fissa di € 300,00 per produrre un certo bene A e un fisso di € 250,00 per produrre B, inoltre ogni unità del bene A costa € 6,00, ogni unità di B costa € 4,00. Sappiamo che il prezzo di vendita unitario è rispettivamente di € 8,00 e € 5,50; il mercato non assorbe più di 500 pezzi di tipo A e 350 di tipo B; non possono prodursi più di 700 pezzi complessivi per volta, determinare quanti pezzi di ciascun tipo devono prodursi per ottenere il massimo guadagno, nell'ipotesi che il mercato assorbe tutto il prodotto. [500 A e 200 B]
45. Un'azienda produce due beni A e B, per un numero totale complessivo non superiore a 1000, Devono prodursi almeno 100 e non più di 500 pezzi di tipo A, almeno 200 e non più di 700 di tipo B. Per distribuire i prodotti si spendono € 20,00 di fisso più € 0,20 per ciascun pezzo di tipo A e un fisso di €

15,00 aumentato di € 0,30 al pezzo per il prodotto B. La vendita di un pezzo A frutta € 4,00, di uno di tipo B € 3,50. Determinare il numero di pezzi da produrre, per tipo, per massimizzare il guadagno.
[500 di ogni tipo]

46. Un'azienda produce i beni A e B, servendosi di due macchinari, C e D. Per produrre ogni unità di A bisognano 25 minuti di lavoro di C e 30 minuti di D; per produrre un'unità del bene B sono necessari 40 minuti di lavoro di C e 15 minuti di A. La macchina C ogni 12 ore di lavoro ininterrotto deve essere fermata per altre 12 ore, la macchina D invece può lavorare solo 8 ore al giorno. Sapendo che un'unità di prodotto A frutta un guadagno di € 15,00 e una di tipo B € 28,00, stabilire quanti beni di ciascun tipo devono esser prodotti per avere il massimo guadagno, tenuto conto che devono prodursi beni di ciascun tipo. [10 A e 11 B]

47. Un'azienda produce due beni, A e B, utilizzando due materie prime, C e D. Sappiamo che per produrre un'unità di A necessitano 3 unità di C e 2 di D; per produrre un'unità di B abbisognano 1 unità di C e 5 unità di D; per questioni economiche non è conveniente produrre meno di 100 unità A e 120 unità B; il mercato è in grado di assorbire un massimo di 205 unità A e 180 unità B; le disponibilità di C e D sono di 750 e 1110 unità rispettivamente. Nell'ipotesi in cui tutto il prodotto sia venduto il guadagno unitario sia di € 310,00 per A e di € 275,00 per B, si determinino le quantità ottimali di prodotti dei due beni in modo da assicurare il massimo guadagno.
[203 unità A e 140 unità B forniscono un guadagno massimo di € 101430]

48. Un maschio di 16 – 19 anni ha un fabbisogno energetico giornaliero medio di 2980 calorie. Il 55% – 66% di tali calorie deve essere costituito da glucidi, che si dividono in amidi (pane, pasta, riso, patate) e glucidi semplici (saccarosio, dolciumi, miele). Vogliamo assicurare un apporto totale di glucidi compreso tra 1800 e 1960 calorie. Imponiamo che gli amidi totali forniscano un apporto di calorie compreso tra 1350 e 1650, i glucidi semplici tra 300 e 360, Sapendo che il prezzo medio degli amidi è di € 1,40 al Kg, quello dei glucidi semplici di € 3,50 al Kg; ogni grammo di glucidi fornisce 4 calorie; determinare il numero di grammi da consumare per ciascuno dei due tipi di glucidi in modo da minimizzare il costo. [g 375 di amidi e g 75 di glucidi semplici, che danno un costo di € 0,79]

49. Una femmina di 16 – 19 anni ha un fabbisogno energetico giornaliero medio di 2290 calorie. Il 10% – 12% di tali calorie deve essere costituito da protidi, che si dividono in proteine AVB (ad alto valore biologico), presenti in uova, carne, pesce, latte, formaggi; e cibi proteici supplementari (cereali, legumi). Vogliamo assicurare un apporto totale di protidi compreso tra 228 e 276 calorie. Imponiamo che le proteine AVB forniscano un apporto di calorie compreso tra 112 e 140, i cibi supplementari tra 100 e 132. Sapendo che il prezzo medio dei cibi contenenti AVB è di € 14,00 al Kg, quello dei cibi proteici di € 3,00 al Kg; ogni grammo di protidi fornisce 4 calorie; determinare il numero di grammi da consumare per ciascuno dei due tipi di protidi in modo da minimizzare il costo.
[g 28 di AVB e g 29 di proteici supplementari permettono una spesa di € 0,48]

50. Un adulto con intensa attività lavorativa ha un fabbisogno energetico giornaliero medio di 3000 – 3500 calorie. Il 20% – 25% di tali calorie deve essere costituito da lipidi, in modo però che i 2/3 provengano da alimenti di origine vegetale (olio d'oliva, olio di semi, alimenti vegetali), 1/3 da alimenti di origine animale (burro, alimenti animali). Vogliamo assicurare un apporto totale di lipidi compreso tra 666 e 855 calorie. Imponiamo che gli alimenti vegetali forniscano un apporto di calorie compreso tra 405 e 603, quelli animali tra 207 e 297. Sapendo che il prezzo medio dei primi cibi è di € 3,80 al Kg, quello dei secondi di € 3,30 al Kg; ogni grammo di lipidi fornisce 9 calorie; determinare il numero di grammi da consumare per ciascuno dei due tipi di lipidi in modo da minimizzare il costo.
[g 45 di alimenti vegetali e g. 29 di alimenti animali costano € 0,27]

51. (Esami di maturità tecnica commerciale indirizzo: programmatori 1997/98) Il modello matematico di Programmazione Lineare riferito ad una certa azienda che produce gli articoli Alfa e Beta, risulta così strutturato: a) Funzione obiettivo di utile z = 200,000 x_1 + 100,000 x_2; b) Vincoli tecnici dipendenti dalla disponibilità di fattori (produzione settimanale) $\begin{cases} 28x_1 + 7x_2 \le 168 \\ 3x_1 + 3x_2 \le 42 \\ 7x_1 + 14x_2 \le 84 \end{cases}$ c) Vincoli economici $\begin{cases} x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$.

Il candidato, dopo aver esposto i metodi di risoluzione dei problemi di Programmazione Lineare in due e in tre variabili, proceda come segue. a) Costruisca il grafico che evidenzi il campo di scelta di tutte le possibili soluzioni del problema. b) Calcoli il valore di z (utile) in corrispondenza dei vertici del poligono di scelta e determini la soluzione che renda massima la funzione obiettivo. Considerando poi che gli articoli Alfa e Beta non possono essere frazionati, il candidato ricerchi la soluzione ottima a coordinate intere. Infine determini il grado di utilizzo dei fattori produttivi.

$$\left[z(0;0)=0,\ z(0;6)=600000,\ z\left(\frac{36}{7};\frac{24}{7}\right)=\frac{9600000}{7},\ z(6;0)=1200000,\ z(5;3)=1300000\right]$$

L'angolo di Derive

Clicca http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%203/3-1/3-1-4.exe per vedere come con Derive si studiano i problemi di programmazione lineare.
Clicca su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%203/3-1/3-1-4.dfw per scaricare il relativo file in Derive.
Attività Verificare i risultati degli esercizi precedenti.

L'angolo di Geogebra

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%203/3-1/3-1-5.exe, un applicazione per vedere come con Geogebra si studiano i problemi di programmazione lineare.
Clicca su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%203/3-1/3-1-5.7z per scaricare il relativo file in Geogebra.
Attività
Verificare i risultati degli esercizi assegnati. Si ricordi che Geogebra fornisce sempre risultati approssimati.

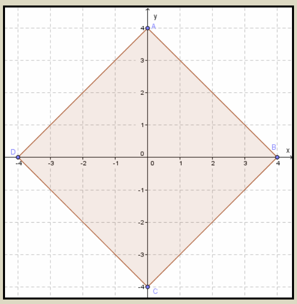
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
HSMC = A&M University High School Mathematics Contest
MT =Mathematics Teacher, rivista della NCTM
OMI = Olimpiadi della Matematica

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato all'High School Mathematics Contest dell'autunno 2007.
Determinare l'area della regione di piano che verifica $|x| + |y| \le 4$.
La disuguaglianza si può scrivere anche nel seguente modo, applicando le proprietà del valore assoluto:

$$\begin{cases} x+y\le 4 & x\ge 0, y\ge 0 \\ x-y\le 4 & x\ge 0, y<0 \\ -x+y\le 4 & x<0, y\ge 0 \\ -x-y\le 4 & x<0, y<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-4\le 0 & x\ge 0, y\ge 0 \\ x-y-4\le 0 & x\ge 0, y<0 \\ x-y+4\ge 0 & x<0, y\ge 0 \\ x+y+4\ge 0 & x<0, y<0 \end{cases}.$$



Rappresentiamo graficamente le rette legate alle disequazioni.
Non è difficile capire che la regione di piano cercata è quella determinata dalle 4 rette, ossia un quadrato di lato $\sqrt{4^2+4^2}=4\cdot\sqrt{2}$. Pertanto l'area cercata misura 32 unità quadrate.

1. (AHSME 1953) Siano $A \equiv (5; 5)$, $B \equiv (2; 1)$, $C \equiv (0; k)$. Quanto vale k affinché $\overline{AC}+\overline{BC}$ sia il minimo possibile? $\left[0 \vee \frac{15}{7}\right]$
2. (AHSME 1964) Una retta passante per $(-a, 0)$, intercetta nel secondo quadrante un triangolo di area T.

Qual è l'equazione della retta, in termini di a e T? [$2Tx - a^2y + 2aT = 0$]

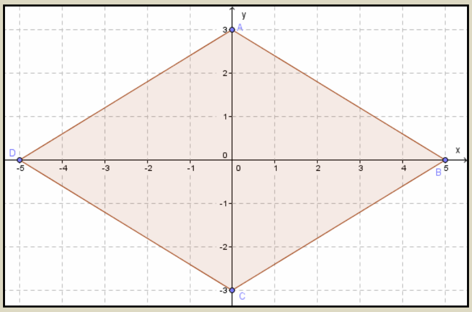
3. (AHSME 1966) Determinare tutti i valori reali di m in modo che le rette di equazioni $13x + 11y = 700$ e $y = mx - 1$ abbiamo in comune un punto a coordinate entrambe intere. [$m = 6$]
4. (AHSME 1967) Determinare il valore di m in modo che l'area della regione di piano delimitata dall'asse x e dalle rette di equazioni $x = 1$, $y = 4$ e $y = mx + 4$, sia 7. $\left[-\dfrac{2}{3}\right]$
5. (AHSME 1969) Determinare l'area della regione di piano delimitata dalla retta di equazione $x = 8$ e dalla curva $y = \begin{cases} x & 0 \le x \le 5 \\ 2x - 5 & 5 \le x \le 8 \end{cases}$. [36,5]
6. (AHSME 1974) $P \equiv (a, b)$ e $Q \equiv (c, d)$ sono due punti della retta di equazione $y = mx + k$, determinare la distanza di OP da Q in termini di a, c e m. $\left[|a-c| \cdot \sqrt{1+m^2}\right]$
7. (AHSME 1978) Dato $S = \left\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{1}{2}a \le x \le 2a \wedge \dfrac{1}{2}a \le y \le 2a \wedge x + y \ge a \wedge x + a \ge y \wedge y + a \ge x\right\}$, rappresentarlo, stabilendo che tipo di figura geometrica rappresenta il suo contorno al variare del parametro reale a. [Esagono]
8. (AHSME 1986) Costruiamo dei triangoli rettangoli i cui cateti sono paralleli agli assi coordinati e le mediane relative a tali cateti appartengano alle rette di equazioni $y = 3x + 1$ e $y = mx + 2$. per quanti valori di m possiamo fare ciò? [2]
9. (OMI 1991) Determinare l'area della regione piana costituita dai punti (x, y) che verificano la disuguaglianza: $|x| + |x + y| \le 2$. [8]

Lavoriamo insieme

Svolgiamo un quesito assegnato agli HSMC del 2004.

Trovare l'area racchiusa dal grafo dell'espressione $\dfrac{|x|}{5} + \dfrac{|y|}{3} = 1$.

L'espressione può scriversi: $\begin{cases} \dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{3} = 1, & \text{se } x \ge 0, y \ge 0 \\ \dfrac{x}{5} - \dfrac{y}{3} = 1, & \text{se } x \ge 0, y < 0 \\ \dfrac{-x}{5} + \dfrac{y}{3} = 1, & \text{se } x < 0, y \ge 0 \\ \dfrac{-x}{5} - \dfrac{-y}{3} = 1, & \text{se } x < 0, y < 0 \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow \begin{cases} 3x + 5y - 1 = 0, & \text{se } x \ge 0, y \ge 0 \\ 3x - 5y - 1 = 0, & \text{se } x \ge 0, y < 0 \\ 3x - 5y + 1 = 0, & \text{se } x < 0, y \ge 0 \\ 3x + 5y + 1 = 0, & \text{se } x < 0, y < 0 \end{cases}$. Quindi la regione è il rombo in figura e l'area misura: $1/2 \cdot 10 \cdot 6 = 30$.



10. (AHSME 1994) Determinare tutte le rette del fascio di centro $P \equiv (4; 3)$, che incontrano l'asse x in un punto la cui ascissa è un numero primo e l'asse y in un punto la cui ordinata è un numero naturale. [$3x + y - 15 = 0$, $x + y = 7$]
11. (AHSME 1995) L'area del triangolo delimitato dalle rette $y = x$, $y = -x$ e $y = 6$ è
    A) 12 B) $12 \cdot \sqrt{2}$ C) 24 D) $24 \cdot \sqrt{2}$ E) 36 [E]
12. (AHSME 1997) Se m e b sono numeri reali e $m \cdot b > 0$, allora la retta di equazione $y = mx + b$ non può

contenere il punto A) (0; 1997) B) (0;–1997) C) (19; 97) D) (19;–97) E) (1997; 0) [E]

13. (AHSME 1998) Un pezzo di carta su cui è stabilito un sistema di riferimento cartesiano ortogonale è piegato in modo che il punto (0; 2) si sovrapponga al punto (4; 0), e il punto (7; 3) al punto $(m; n)$. Trovare $m + n$. [6,8]
14. (AHSME 1999) I grafici delle funzioni $y = -|x - a| + b$ e $y = |x - c| + d$ si incontrano nei punti (2; 5) e (8; 3). Determinare $a + c$. [10]
15. (HSMC 2003) Per ogni numero c, indichiamo con Lc la retta di pendenza $4c$ che contiene il punto $(c; 0)$. Determinare tutti i punti $(x; y)$ che non appartengono a Lc per ogni c. Scrivere la risposta come disuguaglianza in x e y. $[x^2 < y]$
16. (AHSME 1980) Consideriamo $f(x) = \min\limits_{x\in R} \{4x + 1, x + 2, -2x + 4\}$, determinare il valore massimo di $f(x)$. $\left[\frac{8}{3}\right]$
17. (AHSME 1997) La Mientka Publishing Company stabilisce il prezzo del suo bestseller *Where's Walter*?, con la seguente legge: $C(n) = \begin{cases} 12n & \text{se } 1 \le n \le 24 \\ 11n & \text{se } 25 \le n \le 48 \\ 10n & \text{se } n \ge 49 \end{cases}$, in cui n è il numero di libri ordinati e $C(n)$ è il costo in dollari di n libri.. Si osservi che 25 libri costano meno di 24. Per quanti valori di n è più economico comprare più di n libri piuttosto che comprarne n? [6]

Questions in english

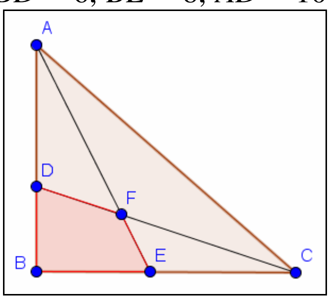
Working together

This is a question assigned at AHSME in 1995. *Let f be a linear function with the properties that* $f(1) \le f(2)$, $f(3) \ge f(4)$, *and* $f(5) = 5$. *Which of the following statements is true*?

A) $f(0) < 0$ B) $f(0) = 0$ C) $f(1)< f(0) < f(-1)$ D) $f(0) = 5$ E) $f(0) > 5$.

Since f is a linear function, it has the form $f(x) = mx + b$. Because $f(1) \le f(2)$, we have $m \ge 0$.
Similarly, $f(3) \ge f(4)$ implies $m \le 0$. Hence, $m = 0$, and f is a constant function. Thus, $f(0) = f(5) = 5$.

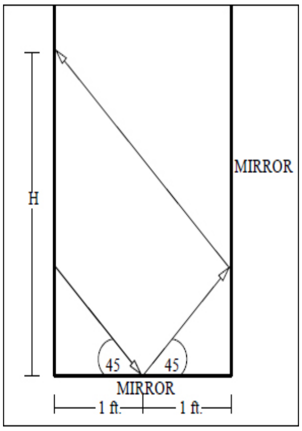
18. (MT1994) Find the area of the triangle determined by x-axis, y-axis, and the line $y = -2x + 10$. [25]
19. (MT1996) $ABCD$ is a unit square with $D \equiv (1; 0)$ and $C \equiv (2; 0)$. Find the equation of the line through the origin that bisects the area of the square. $[y = x/3]$
20. (MT1996) Given that $AB \perp BC$, $BD = 6$, $BE = 8$, $AD = 10$ and $CE = 10$, find the area of quadrilateral



DBEF. [34]

21. (MT1997) In the region $-1 < x < 1/2$, the graph of the function $y = |x + 1| + |2x - 1|$ coincides with the graph of the function $y = ax + b$. Find a and b. $[a = 1, b = 2]$
22. (HSMC 1999) A beam of light reflects from the mirrors as shown. Find the quantity H in the figure[2]. (Hint: choose a system of coordinates and consider the beams of light as lines) [3ft]

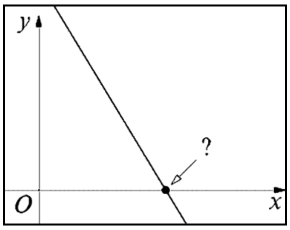
[2] Ft è l'abbreviazione di *feet* (piedi), un'unità di misura di lunghezza di circa 31 cm.



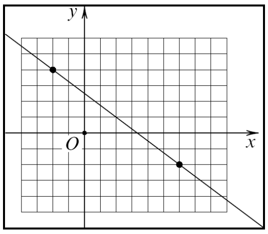
23. (HSMC 2000) Suppose the xy plane represents a level floor with the units along each axis measured in inches. A ball of radius 3 inches is sitting at the origin, and is suddenly rolled along the line $y = 3x$ into the first quadrant until it strikes a vertical wall that is placed along the line $y = 20-x$. Give the x–coordinate of the point on the line which lies directly below the point of contact of the ball with the wall when the ball strikes the wall. $\left[5+\frac{3\cdot\sqrt{2}}{4}\right]$
24. (HSMC 2000) A particle sits at the point in the xy plane and awaits instructions. Every second, it is told to take its current coordinates $(x; y)$ and move to a new point given by $\left(3-\frac{x}{3}+\frac{1}{4};2+\frac{x}{2}-\frac{y}{4}\right)$. Where should the particle be initially if it wants to move as little as possible during the first 100 seconds? $\left[\left(\frac{102}{37};\frac{100}{37}\right)\right]$
25. (HSMC 2000) Quadrilateral WXYZ is located in the xy plane with the points located at the following coordinates: $W \equiv (3; 8)$, $X \equiv (8; 9)$, $Y \equiv (7; 4)$, $Z \equiv (2; 3)$. Show that the diagonals are perpendicular.
26. (HSMC 2001) Find the area of the trapezoid bounded by the graphs of the equations $x = 6$; $y = 4$; $y=\frac{1}{2}x$ and the y–axis. [15]
27. (HSMC 2002) The graphs of the equations $y = 5 - |x - 2|$ and $y = |x + 2| - 5$ enclose a rectangular region in the coordinate plane. What is the area of this rectangle? [42]
28. (HSMC 2003) Consider a linear function $f(x) = mx + b$. Let $f(1) = 2$ and $f(3) = -5$. What is the change in the value of the function if the change in x is -4? [14]
29. (HSMC 2003) Three vertices of a parallelogram have coordinates $(-3; 1)$; $(2; 5)$ and $(4; 1)$. The remaining vertex lies in the third quadrant. Find the sum of the coordinates of the remaining vertex. [–4]
30. (HSMC 2003) For the linear function $f(x) = mx + r$; $f(1) = -2$ and $f(-2) = 11$. What is the change in the value of $f(x)$ when x increases by 2? $\left[-\frac{13}{3}\right]$
31. (HSMC 2004) The coordinates of the vertices of a parallelogram are $(10; 1)$; $(7;-2)$; $(4; 1)$ and $(x; y)$. What is the sum of the distinct possible values for x? [21]
32. (HSMC 2006) Find the area of the region bounded by $|x| + |2y| \le 2$. [4]
33. (HSMC 2007) Let T be the region in the xy–plane satisfying $|x| + |y| \le 4$. Find the area of T. [32]
34. (HSMC 2008) Find the area of the region bounded by $y = |x - 1|$ and $y = 2 - |2x - 2|$. $\left[\frac{4}{3}\right]$

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia militare) Nel piano cartesiano Oxy il grafico della funzione $y = 3x + 1$:
A) interseca l'asse y nel punto di ordinata $y = 1$ B) interseca l'asse x nel punto di ascissa $x = 1$
C) passa per l'origine O D) rappresenta una retta parallela all'asse x
2. (Accademia Navale) L'equazione $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, con a e b numeri reali non nulli, rappresenta tutte le rette del piano? Giustificare la risposta.
3. (Accademia Navale) Verificare che le equazioni $a(x - 1) + b(y - 1) = 0$ e $c(x - 1) + d(x + y - 2) = 0$ rappresentano lo stesso fascio di rette.
4. (Accademia Navale) Date le rette r: $3x + 4y = 0$ e s: $4x - 3y = 0$ e un P un punto del piano, siano P_r e P_s le sue proiezioni ortogonali sulle due rette rispettivamente, determinare il luogo dei punti P per cui si ha $2\cdot\overline{OP_r}=\overline{OP_s}$.
5. (Accademia Navale) Date le rette r: $y - 1 = 0$ e s: $x - 2y = 0$, individuare i vertici dei rombi aventi due lati contenuti in r e s e perimetro 8.
6. (Odontoiatria 1998) Una retta inclinata di 45 gradi incontra l'asse delle ordinate nel punto di ordinata 3; l'equazione della retta è: A) $y = 3x +1$ B) $y = 45\,x + 3$ C) $y = x$ D) $y = x - 3$ E) $y = x + 3$
7. (Medicina 1998) Quale delle seguenti condizioni deve verificarsi affinché la retta $y = mx + n$ non passi per il IV quadrante? A) $m > 0$, $n > 0$ B) $m < 0$, $n > 0$ C) $m > 0$, $n < 0$ D) $m < 0$, $n < 0$ E) $m > 0$, $n = 0$
8. (Odontoiatria 2002) Una retta forma con il semiasse positivo delle ordinate un angolo di 30° e passa per il punto P(0;1). La sua equazione sarà A) $\frac{\sqrt{3}}{3}x - y + 1 = 0$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}x + y + 1 = 0$
C) $\sqrt{3}\,x + y + 1 = 0$ D) $\sqrt{3}\,x + y - 1 = 0$ E) $\sqrt{3}\,x - y + 1 = 0$
9. (Ingegneria 2002) Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, la distanza del punto di coordinate (1; 2) dalla retta di equazione $x + y + 1 = 0$ è A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$ D) 4 E) 2
10. (Ingegneria 2002) In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, sia r la retta $y=\frac{3x+1}{-2}$.
Quale delle seguenti equazioni rappresenta una retta parallela ad r e passante per (1; 1)?
A) $y=\frac{2}{3}x+1$ B) $y=-\frac{3}{2}x+1$ C) $y=\frac{3}{2}(x-1)+1$ D) $y=1+\frac{2}{3}(x-1)$ E) $y=\frac{5-3x}{2}$
11. (Architettura 2002) A quale distanza dall'origine del piano cartesiano si trova il punto in cui la retta di equazione $-x - y = 1$ interseca la retta $\frac{1}{3}x + 2y = 3$? A) $\sqrt{11}$ B) $\sqrt{13}$ C) $\sqrt{15}$ D) $\sqrt{17}$ E) $\sqrt{19}$
12. (Architettura 2002) Si consideri la regione R del piano cartesiano costituita da tutti e soli i punti le cui coordinate $(x; y)$ soddisfano sia la condizione $|x - 1| \le 1$ che la condizione $y^2 \le 4$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta? A) L'area della regione R è pari a 4 B) La regione R è un quadrato con lato di lunghezza 2 C) La regione R ha forma triangolare D) La regione R ha un perimetro di lunghezza pari a 12 E) La regione R ha la forma di un semidisco
13. (Veterinaria 2002) L'equazione $ax + 3y = 0$, con a numero reale A) rappresenta una retta parallela all'asse delle y se $a \neq 0$ B) rappresenta una retta passante per l'origine solo se $a \neq 0$ C) rappresenta una retta che forma con l'asse delle x un angolo ottuso per ogni valore di a D) rappresenta una retta che ha come coefficiente angolare a E) rappresenta una retta passante per l'origine per ogni valore di a
14. (Odontoiatria 2005) Data l'equazione $mx - y - 2m + 1 = 0$, con m parametro reale. Quale fra le seguenti proposizioni è corretta? Al variare di m l'equazione A) non rappresenta alcuna retta passante per l'origine B) non rappresenta alcuna retta orizzontale C) individua tutte le rette del piano passanti per (2; 1) D) individua tutte le rette del piano passanti per (2; 1) eccetto una E) individua tutte le rette del piano passanti per (2; 1) eccetto due
15. (Medicina 2005) Determinare i valori del parametro reale a (se esistono) per cui le rette seguenti risultano perpendicolari: $a^2x + (a - 4)\cdot x + a - 2 = 0$; $2x - 3y + 9a = 0$.
A) 0 B) 1 C) $-3 < a < 2$ D) $a \in \mathbb{R}\setminus\{0, 4\}$ E) nessun valore di a

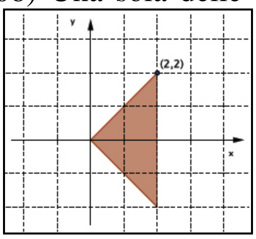
16. (Architettura 2007) Nella figura 

è rappresentata la retta di equazione $y = -\frac{5}{3}x + \frac{3}{5}$. Il punto di intersezione con l'asse delle ascisse ha coordinata x pari a:
A) $\frac{9}{25}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{5}{3}$ D) 3 E) $\frac{3}{25}$

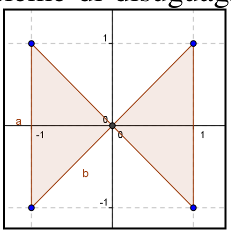
17. (Architettura 2008) Nel disegno 

è rappresentato un piano cartesiano dove ogni quadretto ha lato unitario. Una retta passa per i due punti a coordinate intere indicati con un pallino nero. Il coefficiente angolare m della retta scritta nella forma $y = mx + q$ è:
A) $-\frac{6}{7}$ B) $-\frac{4}{5}$ C) $-\frac{3}{4}$ D) $\frac{3}{5}$ E) non determinabile dal disegno

18. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza 2008) Qual è l'area del triangolo individuato nel piano cartesiano dall'asse delle x, dall'asse delle y e dalla retta di equazione $y = 3x - 2$?
A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $\frac{4}{3}$

19. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza 2008) Una sola delle seguenti condizioni è vera per ogni punto $(x;y)$ del triangolo tratteggiato in figura. 

Quale?
A) $x \le 1$ B) $y \ge 0$ C) $y \ge x$ D) $y \ge -x$

20. (Architettura 2009) Determinare l'insieme di disuguaglianze che descrive esattamente la regione del piano cartesiano indicata nella figura 

A) $|y| \le x,\ x \le 1$ B) $y \le x,\ x \le 1$ C) $|y| \le |x|,\ |x| \le 1$ D) $y \le |x|,\ |x| \le 1$ E) $y \le x,\ |x| \le 1$

21. (Economia Università di Trento) Quale fra le seguenti equazioni rappresenta una retta parallela alla bisettrice del secondo e quarto quadrante e passante per il punto $P\ (-2; 11)$?
A) $y = -x + 13$ B) $y = x + 9$ C) $y = x + 13$ D) $y = -x + 9$

22. (Ingegneria 2009) In un piano cartesiano, quale delle seguenti rette è parallela alla retta passante per i punti di coordinate (1; 0) e (0; 1) A) $2x + 3y = 0$ B) $x = y - 1$ C) $x = 2$ D) $x + y = 3$ E) $y = 1$

23. (Ingegneria 2009) In un piano cartesiano, quale dei seguenti punti è interno al triangolo racchiuso tra le tre rette $y = 0$, $y = 2x$ e $y = -x + 7$? A) (3; 5) B) (4; 4) C) (1; –3) D) (3; 3) E) (–3; 2)

24. (Ingegneria 2009) In un piano cartesiano, consideriamo le rette di equazione $y = kx + 2k + 1$, dove k è un parametro reale. Qual delle seguenti affermazioni è vera? A) Le rette sono a due a due incidenti, ma non esiste un punto comune a tutte B) per $k = 0$ non si ottiene l'equazione di una retta C) tutte le rette passano per (1; –2); D) tutte le rette passano per (–2; 1) E) Le rette sono tutte fra loro parallele

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_3_3.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	**2**	**4**	**5**
A	No, mancano le parallele agli assi	$11x-2y=0$ e $x-2y=0$	4 soluzioni: tutte con (2; 1) in comune. $\left(\frac{8+4\cdot\sqrt{5}}{5};\frac{5+2\cdot\sqrt{5}}{5}\right)$, $(0;1)$, e $\left(\frac{10+4\cdot\sqrt{5}}{5};\frac{5+2\cdot\sqrt{5}}{5}\right)$ $\left(\frac{10+4\cdot\sqrt{5}}{5};\frac{5+2\cdot\sqrt{5}}{5}\right)$, $(4;1)$, e $\left(\frac{12+4\cdot\sqrt{5}}{5};\frac{5+2\cdot\sqrt{5}}{5}\right)$ $\left(\frac{10-4\cdot\sqrt{5}}{5};\frac{5-2\cdot\sqrt{5}}{5}\right)$, $(0;1)$, e $\left(\frac{12-4\cdot\sqrt{5}}{5};\frac{5-2\cdot\sqrt{5}}{5}\right)$ $\left(\frac{8-4\cdot\sqrt{5}}{5};\frac{5-2\cdot\sqrt{5}}{5}\right)$, $(4;1)$, e $\left(\frac{10+4\cdot\sqrt{5}}{5};\frac{5-2\cdot\sqrt{5}}{5}\right)$
6	**7**	**8**	**9**
E	A	E	C
10	**11**	**12**	**13**
E	B	D	E
14	**15**	**16**	**17**
D	E	A	C
18	**19**	**20**	**21**
A	D	C	D
22	**23**	**24**	
D	D	D	

3. Rette e trasformazioni geometriche

3.2. Trasformazioni geometriche

Prerequisiti
- Concetto di corrispondenza biunivoca
- Concetto di isometria
- Concetto di similitudine
- Concetto di relazione e di funzione
- Concetto di equazione e sua risoluzione
- Piano cartesiano ortogonale
- Spazio cartesiano ortogonale
- Algebra delle matrici
- Risoluzione di sistemi lineari

Obiettivi
- Comprendere il concetto di trasformazione geometrica
- Saper riconoscere le leggi delle trasformazioni isometriche, di similitudine e di affinità
- Comprendere il concetto di elementi uniti per una trasformazione
- Saper individuare simmetrie in particolari figure geometriche
- Saper riconoscere analiticamente il tipo di trasformazione ottenuta componendo due o più trasformazioni di leggi note
- Saper costruire dei semplici disegni in scala

Contenuti
- Trasformazioni geometriche
- Composizione di trasformazioni geometriche
- Inversione di trasformazioni geometriche
- Leggi delle trasformazioni isometriche
- Leggi delle omotetie
- Leggi delle trasformazioni di similitudine
- Leggi delle trasformazioni di affinità

Quelli che vogliono sapere di più
- Il gruppo delle trasformazioni
- I gruppi delle isometrie sui poligoni regolari
- Trasformazioni nello spazio

Parole Chiave
Affinità – Asse – Centro – Composizione – Inversione – Punto unito – Omotetia – Retta unita – Rotazione – Simmetria – Trasformazione involutoria – Traslazione – Vettore

Simbologia

$\circ$	Indica la composizione di trasformazioni
$\vec{v}$	Indica un vettore
τ	Indica una trasformazione geometrica
τ^{-1}	Indica l'inversa di una trasformazione geometrica

Richiamiamo le conoscenze

Trasformazioni isometriche da un punto di vista sintetico

Definizione A

Chiamiamo **vettore** un segmento sul quale abbiamo stabilito un orientamento.

Notazione A

Indichiamo con il simbolo $\vec{v}$, un vettore di nome ***v***.

Definizione B

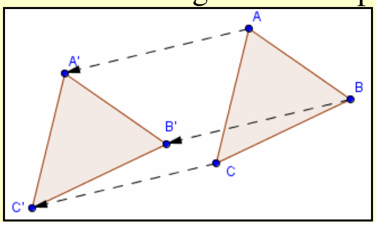
Diciamo **vettore nullo** il vettore che applicato a qualsiasi punto del piano associa lo stesso punto.

Definizione C

Diciamo **traslazione** di vettore $\vec{v}$ la trasformazione geometrica τ che a ogni punto P associa il punto $P + \vec{v}$. In formula: $\tau(P) = P + \vec{v}$.

Esempio A

Ecco un riferimento grafico di una traslazione del triangolo *ABC* rispetto al vettore tratteggiato.



Definizione D

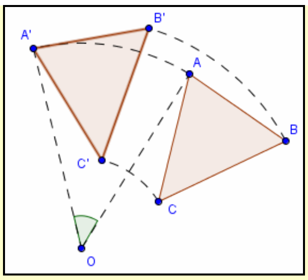
Dato un vettore $\vec{v}$, diciamo suo **vettore opposto** quel vettore che ha la stessa ampiezza di $\vec{v}$, la stessa direzione ma verso opposto.

Definizione E

Diciamo **rotazione** di centro C e angolo α la trasformazione geometrica che a ogni punto P associa il punto P', ottenuto considerando la circonferenza Γ di centro C, di raggio CP e l'angolo α di vertice C, un lato del quale è la semiretta CP. Il punto P' è ottenuto dall'intersezione dell'altro lato dell'angolo con Γ.

Esempio B

In figura il triangolo *ABC* è ruotato di 45° rispetto al centro *O*.

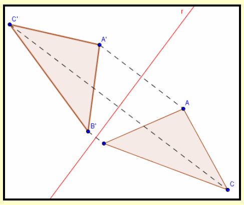


Definizione F

Diciamo **simmetria assiale** di asse la retta a, la trasformazione geometrica che a ogni punto P associa il punto P', ottenuto in modo che l'asse a sia perpendicolare al segmento PP' nel suo punto medio.

Esempio C

In figura è rappresentata la simmetria del triangolo ABC rispetto alla retta r (asse della simmetria). I segmenti tratteggiati collegano i punti corrispondenti e sono perpendicolari all'asse.

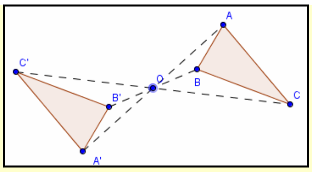


Definizione G

Diciamo **simmetria centrale** di centro il punto C, la trasformazione geometrica che a ogni punto P associa il punto P', ottenuto in modo che i punti P, P' e C siano allineati e che C sia il punto medio del segmento PP'.

Esempio D

Ecco una simmetria centrale del triangolo ABC rispetto al centro O.



Teorema A

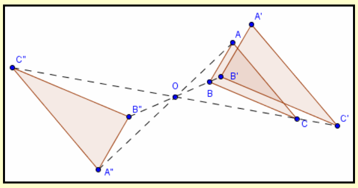
Le traslazioni, le rotazioni, le simmetrie centrali e le simmetrie assiali sono isometrie.

Definizione H

Sono dati un punto P, un punto O e un numero $k \neq 0$. Diciamo **omotetia** di centro O e rapporto k, la trasformazione che associa a P il punto P' allineato con O e P, in modo che sia $\frac{\overline{OP}}{\overline{\overline{OP'}}} = k$. (Con l'avvertenza che se $k < 0$, allora O è posto, nella retta PP', fra P e P'; se invece $k > 0$, P e P' stanno, sulla retta PP', dalla stessa parte rispetto a O.)

Esempio E

In figura rappresentiamo le omotetiche del triangolo ABC rispetto al centro O, e rapporti fra loro opposti, $\frac{4}{3}$ (che produce $A'B'C'$) e $-\frac{4}{3}$ (per $A''B''C''$).



Definizione I

Una trasformazione geometrica che conserva il rapporto delle aree fra figure corrispondenti si chiama **affinità**. In un'affinità il rapporto delle aree fra figure corrispondenti si chiama **costante dell'affinità**.

Definizione J

Un'affinità il cui rapporto è unitario si dice **equiestensione**.

Teorema B

Un'affinità conserva il parallelismo fra rette.

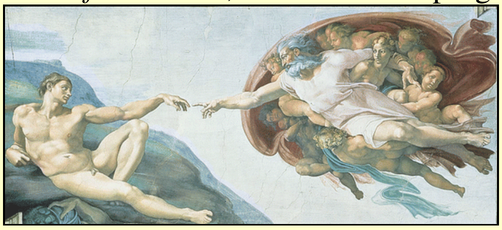
Trasformazioni geometriche

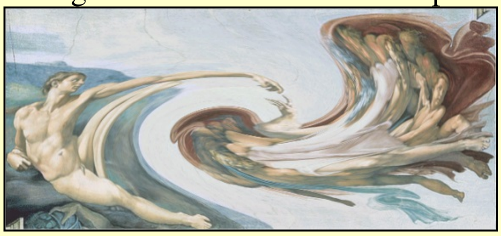
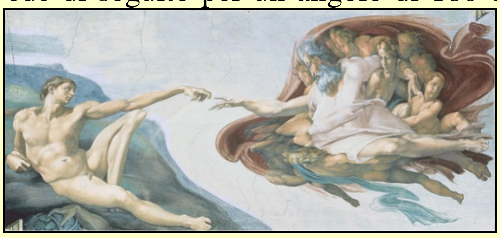
Il problema

Nell'attuale società tecnologica, facciamo largo uso di computer, cellulari, macchine fotografiche digitali e spesso ci divertiamo a manipolare delle immagini, a volte per simulare un movimento. Vogliamo studiare queste manipolazioni da un punto di vista matematico.

Esempio 1

Manipoliamo la famosa immagine michelangiolesca della creazione di Adamo nella Cappella Sistina. Applichiamo a tale immagine una serie di *deformazioni*, utilizzando un programma di computer grafica.



- Il primo effetto è il cosiddetto *twirl* o *mulinello* e in qualche modo può essere spiegato nel seguente modo: come se avessimo conficcato una forchetta nel centro dell'immagine ruotando di un certo angolo (in questo caso è 60°). Nella realtà la tela si sarebbe lacerata, ma noi immaginiamo che invece sia composta  di un materiale simile all'argilla.
- Con l'effetto *twirl* l'immagine continua a essere riconoscibile e i soggetti sono ben distinguibili. Naturalmente ciò non accade aumentando il grado di *torsione*, come si vede di seguito per un angolo di 180°:  l'immagine di Dio non è più riconoscibile.
- Chiudiamo questa breve rassegna di immagini, con l'effetto *caleidoscopio*, nel quale dell'immagine di partenza si riconoscono solo alcuni colori e qualche dettaglio, eppure il programma ha utilizzato la figura  di partenza esattamente come ha fatto nei casi precedenti.

Cominciamo a porre alcune definizioni.

Definizione 1

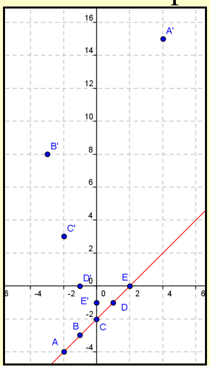
Una legge di natura qualsiasi che a ogni punto P del piano cartesiano Π associa un punto $P' \in \Pi$, si chiama **trasformazione geometrica piana**.

Notazione 1

Una generica trasformazione piana si indica con il simbolo $\tau : \Pi \to \Pi$, o brevemente con τ. Il punto corrispondente del generico P mediante la trasformazione τ, si indica con $\tau(P)$.

Esempio 2

Consideriamo la trasformazione τ definita dalla legge $\tau(x; y) = (x - 2; y^2 - 1)$. Per avere un'idea di cosa accade applichiamo la trasformazione ad alcuni punti a piacere: $\tau(-2; -4) = (-2 - 2; (-4)^2 - 1) = (-4; 15)$; $\tau(-1; -3) = (-1 - 2; (-3)^2 - 1) = (-3; 8)$; $\tau(2; 0) = (2 - 2; 0^2 - 1) = (0; -1)$; $\tau(0; -2) = (0 - 2; (-2)^2 - 1) = (-2; 3)$; $\tau(1; -1) = (1 - 2; (-1)^2 - 1) = (-1; 0)$. Rappresentiamo i punti prima e dopo la trasformazione, indicando con lettere maiuscole i punti di partenza, nell'ordine in cui sono dati, e con le stesse lettere accentate quelli dopo. Possiamo notare che siamo partiti da cinque punti che appartenevano a una retta e abbiamo ottenuto cinque punti che non solo non stanno sulla retta di partenza, ma non stanno su alcuna retta.



Nell'esempio precedente abbiamo visto quindi una trasformazione che non *conserva* l'allineamento dei punti. Vediamo ancora qualche esempio di trasformazione geometrica piana.

Esempio 3

- Sia la trasformazione τ definita dalla legge $\tau(x; y) = (x; y)$. Questa trasformazione è *neutra* infatti non modifica alcunché, dato che il generico punto $P \equiv (x; y)$ è associato ancora a $(x; y)$.
- La trasformazione τ definita dalla legge $\tau(x; y) = (y; x)$, invece *scambia* fra loro ascisse e ordinate dei punti a cui è applicata. Così per esempio al punto $P \equiv (1; 4)$ è associato il punto $P' \equiv (4;1)$. Naturalmente vale anche il viceversa, cioè $\tau(P') = P$.
- La trasformazione $\tau(x; y) = (|x|; |y|)$, ha il compito di associare a ogni punto uno che ha le coordinate entrambe non negative. Per esempio: $\tau(1; 2) = \tau(-1; 2) = \tau(1; -2) = \tau(-1; -2) = (1; 2)$.

Abbiamo visto alcuni esempi di trasformazioni geometriche, alcune apparentemente *inutili*, come quella neutra, altre *commutative*, come la seconda, altre ancora *multivoche*, dato che associano più elementi a uno stesso elemento. Potremmo proporre infiniti altri esempi, ma vogliamo invece concentrarci su alcune trasformazioni e per far ciò cominciamo a porre alcune definizioni.
Il cosiddetto *fermo immagine* è una trasformazione geometrica in cui nun muta alcun valore, e inoltre considerare una trasformazione *neutra* è importante dal punto di vista algebrico, giacché ogni operazione degna di tale nome deve avere un elemento neutro. Ecco il perché della seguente definizione.

Definizione 2

La trasformazione geometrica $\tau : \Pi \to \Pi$, definita dalla legge: $\tau(x; y) = (x; y)$, $\forall\ (x; y) \in \Pi$, si chiama **trasformazione identica o identità**.

Notazione 2

L'identità si indica con il simbolo $\Im$.

Nell'esempio della *Creazione di Adamo*, la prima immagine mostra alcune sue parti modificate ed altre inalterate (la parte più a sinistra di Adamo per esempio), quindi non sempre in una trasformazione un elemento è associato a un punto da esso diverso, ma può essere invece esso stesso. Definiamo tale concetto.

Definizione 3

- Data una trasformazione geometrica $\tau : \Pi \to \Pi$, diciamo che l'oggetto geometrico $A \subseteq \Pi$ è **unito per** τ se $\tau(A) = A$. Parleremo perciò di **punti unite**, **rette unite**, ... a seconda di cosa rappresenti A.
- Se poi si ha $\tau(P) = P$, $\forall\ P \in A$ (P rappresenta un punto), diciamo che A è **luogo di punti uniti per** τ **.**

Esempio 4

- Considerando la trasformazione τ definita dalla legge $\tau(x; y) = (y; x)$, già vista nell'esempio precedente, è facile vedere che tutti i punti che hanno ascissa e ordinata fra loro uguali, come per esempio $P \equiv (2; 2)$, sono uniti.
- Per determinare gli eventuali punti uniti della trasformazione $\tau(x; y) = (x - 2y + 1; 2x + y^2 - 1)$, dobbiamo risolvere il seguente sistema: $\begin{cases} x = x - 2y + 1 \\ y = 2x + y^2 - 1 \end{cases}$. Esso è ottenuto semplicemente imponendo l'uguaglianza del generico punto $(x; y)$ con il suo trasformato mediante la τ. Risolviamo: $\begin{cases} y = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} = 2x + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{5}{8} \end{cases}$. Quindi la trasformazione ha l'unico punto unito: $P \equiv \left(\dfrac{5}{8}; \dfrac{1}{2}\right)$. Verifichiamo la validità del nostro procedimento: $\tau\left(\dfrac{5}{8}; \dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{5}{8} - 2 \cdot \dfrac{1}{2} + 1; 2 \cdot \dfrac{5}{8} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 1\right) = \left(\dfrac{5}{8}; \dfrac{1}{2}\right)$.

L'angolo storico

Le trasformazioni geometriche sono una branca relativamente recente della geometria, è soprattutto nel XIX secolo che tale teoria si è sviluppata maggiormente, anche e soprattutto mediante i suoi collegamenti con la cosiddetta algebra moderna, ossia l'algebra delle strutture (gruppi, anelli, corpi, campi). Una data molto importante al riguardo è il 1872; quando Felix Klein, noto geometra tedesco in occasione della sua nomina presso l'Università di Erlangen, presentò una breve memoria dal titolo *Considerazioni comparative sulle recenti ricerche geometriche*, nella quale discusse dello stato dell'arte della geometria e indicò quelli che a suo parere sarebbero stati gli sviluppi futuri. In tale discorso, noto come programma di Erlangen (alcuni passi sono riportati nella successiva Antologia), Klein pose l'attenzione proprio sulle trasformazioni geometriche che sono in grado di distinguere e caratterizzare le diverse discipline geometriche.

I protagonisti


Felix Klein nacque il 25 Aprile 1849 a Düsseldorf. Cominciò a studiare matematica e fisica con l'intenzione di laurearsi in quest'ultima disciplina. Mentre era ancora uno studente all'Università di Bonn, fu nominato assistente di laboratorio di Julius Plücker (1801 – 1868), uno dei più importanti matematici dell'epoca. Fu così che Klein scelse di studiare matematica, laureandosi nel 1868 con una tesi riguardante proprio le trasformazioni geometriche e le loro applicazioni alla meccanica. Poco dopo Plücker morì lasciando incompleti i suoi lavori, che furono perciò ripresi e completati da Klein. Dopo aver viaggiato per l'Europa e aver prestato servizio militare nella guerra franco – prussiana, nel 1872 fu nominato professore a Erlangen. A causa della scarsità di studenti, tre anni dopo si trasferì alla Technische Hochschule di Monaco. Qui ebbe brillanti allievi che divennero poi famosi matematici (Runge, Planck, Bianchi e Ricci–Curbastro fra gli altri). Nello stesso anno sposò la nipote del grande filosofo Georg Wilhelm Friedrich Hegel. Cinque anni dopo fu chiamato alla cattedra di geometria di Leipzig dove rimase per altri 6 anni. A partire dal 1886 insegnò all'Università di Göttingen dove rimase fino alla sua pensione nel 1913.Fu anche grazie alla sua presenza, che questa Università ritornò a essere una delle maggiori al mondo per gli studi matematici. Proprio a Göttingen Klein si spense il 22 Giugno 1925.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Data la trasformazione τ *definita dalla legge* $\tau(x; y) = (3x + 2y - 1; x^2 - y^2)$, *determinare i corrispondenti dei punti in tabella*. Completiamo la seguente tabella

$(x ; y)$	$\tau(x; y) = (3x + 2y - 1; x^2 - y^2)$
$(2; -3)$	$(-1; -5)$
$(0; 4)$	$(7; -16)$
$\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)$	$\left(-1; -\frac{5}{16}\right)$
$\left(\sqrt{2}; 1\right)$	$\left(3 \cdot \sqrt{2} + 1; 1\right)$

Determinare i corrispondenti dei punti accanto indicati secondo le leggi delle seguenti trasformazioni geometriche

Livello 1

1. $\tau(1; -2)$, $\tau(2; 0)$, $\tau(0, 0)$, $\tau(3; -4)$, $\tau(2; 3)$, con $\tau(x; y) = (x + y - 1; x - y + 1)$.
$[(-2; 4), (1; 3), (-1; 1), (-2; 8), (4; 0)]$
2. $\tau(2; 3)$, $\tau(-1; 1)$, $\tau(0, 0)$, $\tau(4; 1)$, $\tau(3; 2)$, con $\tau(x; y) = (x + y; x^2 - 1)$.
$[(5; 3), (0; 0), (0; -1), (5; 15), (5; 8)]$
3. $\tau(4; 1)$, $\tau(1; 1)$, $\tau(-1; 2)$, $\tau(5; 1)$, $\tau(-1; -1)$, con $\tau(x; y) = (4x; 2y)$.
$[(16; 2), (4; 2), (-4; 4), (20; 2), (-4; -2)]$
4. $\tau(3; 2)$, $\tau(0; 4)$, $\tau(2; 0)$, $\tau(7; -1)$, $\tau(3; 1)$, con $\tau(x; y) = (3x + 2y; 1 - y^2)$.
$[(13; -3), (8; -15), (6; 1), (19; 0), (11; 0)]$
5. $\tau(0; -3)$, $\tau(3; 8)$, $\tau(1; 0)$, $\tau(4; -1)$, $\tau(6; 2)$, con $\tau(x; y) = (x + 2y; x - y^2)$.
$[(-6; -9), (19; -61), (1; 1), (2; 3), (10; 2)]$
6. $\tau\left(3; \frac{1}{2}\right)$, $\tau\left(0; -\frac{3}{2}\right)$, $\tau(1; -2)$, $\tau\left(3; -\frac{1}{4}\right)$, $\tau\left(\frac{3}{4}; 0\right)$, con $\tau(x; y) = (x + 1; 2 + y^2)$.
$$\left[\left(4; \frac{9}{4}\right), \left(1; \frac{17}{4}\right), (2; 6), \left(4; \frac{33}{6}\right), \left(\frac{7}{4}; 2\right)\right]$$
7. $\tau\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$, $\tau\left(1; \frac{3}{2}\right)$, $\tau(1; -1)$, $\tau\left(0; -\frac{2}{3}\right)$, $\tau\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$, con $\tau(x; y) = (x^2; x - y)$.
$$\left[\left(1; -\frac{1}{2}\right), \left(1; -\frac{1}{2}\right), (1; 2), \left(0; \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{16}; -\frac{1}{4}\right)\right]$$

Livello 2

8. $\tau(1; -2)$, $\tau\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right)$, $\tau(0; 2)$, $\tau\left(-2; \frac{1}{4}\right)$, $\tau\left(-\frac{3}{2}; 3\right)$, con $\tau(x;\ y) = \left(\frac{1}{x}; \frac{x+y}{x-y}\right)$.
$$\left[\left(1; -\frac{1}{3}\right), \left(\frac{3}{2}; 7\right), \text{Non definito}, \left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{9}\right), \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)\right]$$
9. $\tau\left(0; \sqrt{2}\right)$, $\tau\left(1; -\frac{1}{3}\right)$, $\tau\left(1+\sqrt{2}; -1\right)$, $\tau\left(5; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\tau\left(\frac{1}{4}; -1\right)$, con $\tau(x; y) = \left(x + 2y - 3; \sqrt{x+y}\right)$.
$$\left[\left(2 \cdot \sqrt{2} - 3;\ \sqrt[4]{2}\right), \left(-\frac{8}{3}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right), \left(\sqrt{2} - 4;\ \sqrt[4]{2}\right), \left(2 - \sqrt{2};\ \sqrt{\frac{10-\sqrt{2}}{2}}\right), \text{Non definita in } \mathbb{R}\right]$$
10. $\tau\left(1; \sqrt{3}\right)$, $\tau(0; 0)$, $\tau\left(\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$, $\tau\left(1; -\frac{1}{5}\right)$, $\tau\left(1-\sqrt{2}; 1\right)$, con $\tau(x; y) = \left(\frac{x-1}{y+1}; \frac{\sqrt{x}}{y}\right)$.
$$\left[\left(0; \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \text{Non definita}, \left(-1; -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right), (0; -5), \text{Non definita in } \mathbb{R}\right]$$

Lavoriamo insieme

Trovare gli eventuali elementi uniti della trasformazione τ definita nel box precedente. Dobbiamo imporre che il generico punto $(x; y)$ sia trasformato in se stesso, cioè $\tau(x; y) = (3x + 2y - 1; x^2 - y^2) = (x; y)$.

Dobbiamo perciò risolvere il sistema: $\begin{cases} 3x+2y-1=x \\ x^2-y^2=y \end{cases}$, la cui unica soluzione è $\begin{cases} x=\dfrac{3}{8} \\ y=\dfrac{1}{8} \end{cases}$. Perciò la trasformazione ha un solo punto unito, cioè $P \equiv \left(\frac{3}{8}; \frac{1}{8}\right)$. Verifichiamo: $\tau\left(\frac{3}{8}; \frac{1}{8}\right) = \left(3\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{1}{8}-1; \left(\frac{3}{8}\right)^2-\left(\frac{1}{8}\right)^2\right)$
$\equiv \left(\frac{9+2-8}{8}; \frac{9-1}{64}\right) \equiv \left(\frac{3}{8}; \frac{1}{8}\right)$.

Determinare gli eventuali elementi uniti delle trasformazioni seguenti

Livello 2

11. a) $\tau(x; y) = (x + y - 1; x - y)$; b) $\tau(x; y) = (x + 2y; x - 2y)$; c) $\tau(x; y) = (x - 1; y + 3)$
[a) (2; 1); b) (0; 0); c) $\varnothing$]

12. a) $\tau(x; y) = (3x + 2y - 1; 6x + 4y - 2)$; b) $\tau(x; y) = (x^2 + y; x - y^2)$; c) $\tau(x;y)=\left(\frac{x}{y};\frac{y}{x}\right)$
$\left[\text{a)}\left(\frac{1}{6};\frac{1}{3}\right);\text{b)}(0;0),(2;-2);\text{c)}(1;1)\right]$

13. a) $\tau(x; y) = (3x + 2y - 1; 2x + 3y - 1)$; b) $\tau(x; y) = (x + y; x^2 + y^2)$ [a) $2x + 2y - 1 = 0$; b) (0; 0)]

14. a) $\tau(x; y) = (x + y - 2; 4x + 4y + 1)$; b) $\tau(x;y)=\left(\sqrt{x};1-\sqrt{y}\right)$ $\left[\text{a)}\left(-\frac{7}{4};2\right);\text{b)}\left(0;\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right),\left(1;\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right]$

15. a) $\tau(x; y) = (x^2 + y; x^2 - y)$; b) $\tau(x; y) = (x^3 - y; x - y)$ $\left[\text{a)}(0;0),\left(\frac{2}{3};\frac{2}{9}\right);\text{b)}(0;0),\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2};\pm\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right]$

Lavoriamo insieme

Dato il punto $P \equiv (k - 2; h)$ e la trasformazione $\tau(x; y) = (x + y ; x - y)$, stabilire se ci sono dei valori da assegnare ai parametri affinché esso sia unito per τ.
Deve essere $\tau(P) = P \Leftrightarrow \tau(k - 2; h) = (k - 2; h) \Leftrightarrow (k - 2 + h; k - 2 - h) = (k - 2; h)$. Quindi dobbiamo risolvere $\begin{cases} k-2+h=k-2 \\ k-2-h=h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=0 \\ k=2+2h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=0 \\ k=2 \end{cases}$. Perciò il punto unito è $U \equiv (2 - 2; 0) \equiv (0; 0)$, ossia l'origine O.

Determinare, se esistono, i valori dei parametri reali h e k per i quali i punti indicati sono uniti per le trasformazioni τ date

Livello 3

16. (2; 1), $\tau(x; y) = (hx + ky ; x^2 - y^2)$; $(k + 2;1 - h)$, $\tau(x; y) = (x + y - 1 ; x - y + 1)$ [$\varnothing$; ($h = 0$, $k = -1$)]
17. (1; 1), $\tau(x; y) = (hy ; kx - 2)$; (0; 1), $\tau(x; y) = (2x^4 + ky - h; kx + hy - 1)$ [($h = 1$, $k = 3$); ($h = k = 2$)]
18. $(k; k)$, $\tau(x; y) = (hy; x)$; $(k + 2; h)$, $\tau(x; y) = (x^2 + h; -y)$ [($h = 1$, $k = 0$); ($h = 0$, $k = -2$); ($h = 0$, $k = -1$)]
19. $(h - 2; k + 1)$, $\tau(x; y) = (kx + y; x + hy)$ [$h = 2$, $k = -1$]
20. (0;0), $\tau(x; y) = (x + k; h - y)$; $(h; k)$, $\tau(x; y) = (2kx + (1 - h)\cdot y + 1; (1 + h)\cdot x - 2)$
$\left[(h=k=0);\left(h=\frac{\sqrt{5}-3}{2},\ k=-\sqrt{5}\right);\left(h=\frac{-\sqrt{5}-3}{2},\ k=\sqrt{5}\right)\right]$

Composizione di trasformazioni geometriche

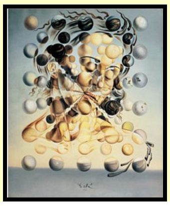
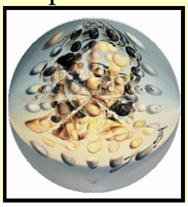
Il problema

Applichiamo una data trasformazione geometrica τ a un oggetto *O*, ottenendo un oggetto *O*', in generale diverso da *O*; a *O*' applichiamo un'altra trasformazione geometrica τ', ottenendo *O*''. Possiamo dire che *O*'' è una trasformazione geometrica di *O*? E se lo è possiamo sempre precisare la natura di quest'ultima trasformazione dalla sola conoscenza di τ e τ'?

Come al solito prima di cercare di rispondere al nostro problema vediamo qualche esempio.

Esempio 5

Manipoliamo un'opera più moderna: *Galatea delle sfere* del pittore surrealista spagnolo Salvador Dalì.
Applichiamo ad essa una prima trasformazione, che trasforma il rettangolo in un cerchio.
A quest'ultima trasformazione applichiamo la trasformazione cosiddetta *warp* o *curvatura*.
Non vi sono dubbi che quest'ultima sia una trasformazione geometrica della figura iniziale, che però non riusciamo a inquadrare né in una trasformazione di tipo cerchio né in una di tipo *warp*.


Anche se né un singolo esempio, né un numero infinito di essi può *dimostrare* un fatto, per la sua stessa definizione possiamo affermare che l'applicazione successiva di due trasformazioni a una data figura è anch'essa una trasformazione della figura di partenza. Come visto nell'esempio però non sempre riusciamo a capire di che tipo è tale trasformazione, pur conoscendo i tipi delle componenti. Di tale trasformazione è importante e interessante riuscire a individuare le caratteristiche, cosa che, come abbiamo già visto nell'esempio, risulta non essere una questione di semplice risoluzione, almeno in generale. Perciò, prima di procedere, poniamo una definizione.

Definizione 4

Date due trasformazioni geometriche $\tau:\Pi\to\Pi$ e $\tau':\Pi\to\Pi$, la trasformazione $\tau'':\Pi\to\Pi$ ottenuta applicando successivamente prima τ e poi τ' agli stessi oggetti geometrici, si chiama **trasformazione composizione di τ e τ'.**

Notazione 3

La composizione delle trasformazioni τ e τ', in questo ordine, si indica con il simbolo $\tau'\circ\tau$.
(Le trasformazioni si applicano nell'ordine inverso di scrittura, quindi prima τ e poi τ')

Nella definizione precedente abbiamo sottolineato il fatto che la composizione avvenga in un certo ordine, poiché non sappiamo se la composizione di trasformazioni è o no un'operazione commutativa.

Esempio 6

Con riferimento a quanto ottenuto nell'esempio precedente, componiamo in ordine inverso le due trasformazioni operate sull'opera di Dalì. Interveniamo quindi prima con la trasformazione *warp* e poi con la trasformazione cerchio. Non è difficile notare che quest'ultima trasformazione coincide con quella finale ottenuta nell'esempio 5.


L'avere ottenuto un esempio di composizione commutativa non deve naturalmente spingerci a generalizzare il risultato. Vediamo ancora un esempio.

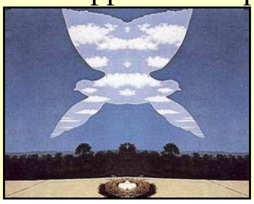
Esempio 7

Lavoriamo su un'opera del pittore belga René Magritte dal titolo *Ritorno*.

Ad essa applichiamo prima una trasformazione *twirl e* poi una trasformazione specchio:

Procediamo adesso in ordine inverso e applichiamo prima l'effetto *specchio* e poi quello *twirl:*

Visti i risultati dell'esempio precedente possiamo dire che, in generale, la composizione di due qualsiasi trasformazioni non è commutativa. Affrontiamo ora un'ultima questione.

Il problema

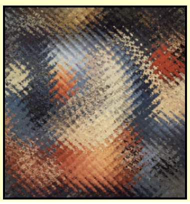
Componiamo due trasformazioni geometriche dello stesso tipo, τ e τ'. Possiamo dire che anche la trasformazione $\tau'' = \tau \circ \tau'$ è dello stesso tipo delle trasformazioni componenti?

Procediamo al solito con un esempio.

Esempio 8

Consideriamo un particolare del trittico di Hyeronimus Bosch *Il giardino delle delizie.*

A cui applichiamo un effetto *cristallizzazione*. A questa figura deformata applichiamo un ulteriore effetto *cristallizzazione*. Non è difficile rendersi conto che quest'ultima immagine può essere ottenuta dalla prima, ancora con un effetto dello stesso tipo, ossia un effetto *cristallizzazione*.

L'esempio precedente ci fa pensare che in generale *la composizione di due trasformazione di uno stesso tipo è una trasformazione dello stesso tipo*.
Per il momento assumiamo come vera questa affermazione, sulla quale ritorneremo in seguito.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Comporre fra loro le trasformazioni $\tau(x; y) = (3x + 2y - 1; x^2 - y^2)$, $\tau'(x; y) = (x + y - 2; x)$.
Seguiamo i diversi passi, iniziando da un particolare punto: $\tau(2; -1) = (3\cdot 2 + 2\cdot(-1) - 1; 2^2 - (-1)^2) = (3; 3)$. A questo punto applichiamo la τ': $\tau'(3; 3) = (3 + 3 - 2; 3) = (4; 3)$. Adesso cambiamo l'ordine di composizione: $\tau'(2; -1) = (2 - 1 - 2; -1) = (-1; -1)$ e poi $\tau(-1; -1) = (3\cdot(-1) + 2\cdot(-1) - 1; (-1)^2 - (-1)^2) = (-6; 0)$. Avendo ottenuto risultati diversi possiamo dire che la composizione non è commutativa. Avremmo potuto lavorare in generale: $\tau(x; y) = (3x + 2y - 1; x^2 - y^2)$; $\tau'(3x + 2y - 1; x^2 - y^2) = (3x + 2y - 1 + x^2 - y^2 - 2; 3x + +2y - 1) = (x^2 - y^2 + 3x + 2y - 3; 3x + 2y - 1)$. Invece si ha: $\tau'(x; y) = (x + y - 2; x)$; $\tau(x + y - 2; x) = (3\cdot(x + +y - 2) + 2x - 1 ; (x + y - 2)^2 - x^2) = (5x + 3y - 7; y^2 + 2xy - 4x - 4y + 4)$. I risultati sono diversi.

Comporre fra loro le seguenti trasformazioni geometriche, nei due versi, stabilendo così l'eventuale validità della proprietà commutativa. (Nelle risposte prima vi è $\tau'\circ\tau$ ***e poi*** $\tau\circ\tau'$***)***

Livello 2

1. $\tau(x; y) = (x + y; x)$, $\tau'(x; y) = (x; x - y)$ $[(2x - y; x) ; (x + y; y)]$
2. $\tau(x; y) = (4x + y; x^2 - 1)$, $\tau'(x; y) = (x + 5y - 4; 1 - y)$ $[(4x + 19y - 15; x^2 + 25y^2 + 10xy - 8x - 40y + 15) ; (5x^2 + 4x + y - 9; 2 - x^2)]$
3. $\tau(x; y) = (x - 1; x^2)$, $\tau'(x; y) = (y^2 + 3; 4x - y + 2)$ $[(y^2 + 2; (y^2 + 3)^2) ; (x^4 + 3; y - x^2 + 4x - 2)]$
4. $\tau(x; y) = (x + 2y + 1; 3x - 4y - 5)$, $\tau'(x; y) = (y; x)$ $[(2x + y + 1; -4x + 3y - 5); (3x - 4y - 5; x + 2y + 1)]$
5. $\tau(x; y) = (x^2 + 2; 3 - y^2)$, $\tau'(x; y) = (x; -y)$ $[(x^2 + 2 ; 3 - y^2) ; (x^2 + 2 ; 3 - y^2)]$
6. $\tau(x; y) = (x + 2; 3x^2)$, $\tau'(x; y) = (y - 1; 3y)$ $[(y + 1; 3\cdot(y - 1)^2) ; (3x^2 - 1; 9x^2)]$
7. $\tau(x,y)=\left(\frac{x+y}{2};\frac{1}{x}\right)$, $\tau'(x,y)=\left(3x-1;\frac{y}{2}\right)$ $\left[\left(\frac{6x+y-2}{4};\frac{1}{3x-1}\right);\left(\frac{3x+3y-2}{2};\frac{1}{2x}\right)\right]$
8. $\tau(x;y)=\left(\frac{x+y}{x-y};1\right)$, $\tau'(x; y) = (x - 2y + 3; x^2)$ $\left[\left(-\frac{x^2+x-2y+3}{x^2-x+2y-3};1\right);\left(\frac{2x}{x-y};\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2\right)\right]$
9. $\tau(x;y)=\left(\sqrt{x};\frac{y}{x}\right)$, $\tau'(x; y) = (x - y; 3)$ $\left[\left(\sqrt{x-y};\frac{3}{x-y}\right);\left(\frac{x\cdot\sqrt{x}-y}{x};3\right)\right]$
10. $\tau(x;\ y)=\left(\frac{3x+2y-1}{2};\ \frac{x-1}{y+2}\right)$, $\tau'(x;\ y)=\left(x+y;\ \frac{3}{x}\right)$
$\left[\left(\frac{3x^2+3xy-x+6}{2x};\frac{x\cdot(x+y-1)}{2x+3}\right);\left(\frac{3xy+8x+2y^2+3y-4}{2\cdot(y+2)};\frac{6}{3x+2y-1}\right)\right]$

Livello 3

Con riferimento agli esercizi di seguito indicati, dire se vi sono punti per i quali le composizioni non possono eseguirsi. Nelle risposte ci si riferisce prima a $\tau(\tau'(x; y))$ ***e poi a*** $\tau'(\tau(x; y))$

11. Esercizio 7 ; Esercizio 8 $\left[(x;\ y): x\neq\frac{1}{3};(x;y): x\neq 0;(x;\ y): x^2-x+2y-3\neq 0;(x;y): x\neq y\right]$
12. Eserc. 9 ; Es. 10 $\left[(x;\ y): x>y;(x;y): x>0;(x;\ y): x\notin\left\{0,-\frac{3}{2}\right\};(x;y): y\neq -2\wedge 3x+2y-1\neq 0\right]$

Inversione di trasformazioni geometriche

Il problema

Data una trasformazione geometrica applicata a un certo oggetto, essa è *reversibile*? Ossia, se applichiamo una trasformazione geometrica a un certo oggetto O generando un nuovo oggetto O', riusciamo a *ritornare* ad O conoscendo soltanto O' e la trasformazione applicata?

Cominciamo come al solito con un esempio.

Esempio 9

Consideriamo la trasformazione definita dalla legge τ $(x; y) = (x - y + 3; 3x + 4y + 1)$, essa a $P \equiv (1; -3)$, per esempio, associa $P' \equiv (1 - (-3) + 3; 3\cdot 1 + 4\cdot(-3) + 1) \equiv (1 + 3 + 3; 3 - 12 + 1) \equiv (7; -8)$. Vogliamo cercare la trasformazione inversa τ' che verifica la seguente proprietà: $\tau'(7; -8) = (1; -3)$. Per far ciò basta risolvere il seguente sistema: $\begin{cases} x' = x - y + 3 \\ y' = 3x + 4y + 1 \end{cases}$, in cui le incognite sono da intendersi x e y. Risolvendo per esempio con il metodo di Cramer abbiamo: $\begin{cases} x - y = x' - 3 \\ 3x + 4y = y' - 1 \end{cases} \Rightarrow x = \dfrac{\begin{vmatrix} x'-3 & -1 \\ y'-1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \dfrac{4x' - 12 + y' - 1}{4+3} = \dfrac{4x' + y' - 13}{7} \wedge$

$\wedge\, y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & x'-3 \\ 3 & y'-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \dfrac{y' - 1 - 3x' + 9}{7} = \dfrac{-3x' + y' + 8}{7}$. Le leggi della trasformazione cercata sono dunque: $\tau'(x; y) = \left(\dfrac{4x + y - 13}{7}; \dfrac{-3x + y + 8}{7} \right)$. Verifichiamo che la trasformazione sia effettivamente quella cercata: $\tau'(7; -8) = \left(\dfrac{4\cdot 7 - 8 - 13}{7}; \dfrac{-3\cdot 7 - 8 + 8}{7} \right) = \left(\dfrac{7}{7}; \dfrac{-21}{7} \right) = (1; -3)$.

Anche se l'esempio precedente ci ha permesso di invertire la trasformazione, una sua analisi attenta dovrebbe però farci notare che ciò è successo perché il sistema ammetteva un'unica soluzione. Questo fatto non capita sempre.

Esempio 10

Sia la trasformazione definita dalla legge τ $(x; y) = (x + y; 2x + 2y + 1)$. Noi diciamo che essa non è invertibile. Infatti cercando di risolvere il sistema $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 2x + 2y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = x' \\ 2x + 2y = y' - 1 \end{cases}$ ci accorgiamo che esso non ha una sola soluzione, dato che il suo determinante è zero: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$. Quindi a seconda del punto considerato possiamo avere o più punti associati a uno stesso punto o nessuno. Per esempio al punto (1; 3) sono associati infiniti punti, tutti quelli le cui coordinate hanno per somma 1; cioè i punti del tipo $(h, 1 - h)$, con $h \in \mathbb{R}$. Difatti avremo: $\tau(h; 1 - h) = (h + 1 - h; 2 \cdot h + 2 \cdot (1 - h) + 1) = (1; h + 2h + 2 - 2h + 1) = (1; 3)$ Viceversa al punto (1; 2), per esempio, non è associato alcun punto, dato che il sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$ è evidentemente privo di soluzioni, poiché le due equazioni sono in evidente contraddizione fra di loro.

In vista dei risultati degli esempi precedenti, poniamo la seguente definizione.

Definizione 5

Una trasformazione geometrica $\tau : \Pi \to \Pi$, si dice **invertibile** se l'equazione τ (*x*; *y*) = (*x*', *y*') ammette sempre un'unica soluzione, ∀ (*x*; *y*) ∈ Π.

Notazione 4

L'eventuale trasformazione inversa di τ, si indica con τ^{-1}.

Per la stessa definizione di trasformazione inversa vale la seguente proprietà:

Teorema 1

Per ogni trasformazione invertibile τ, si ha: $\tau'' = \tau \circ \tau^{-1} = \tau^{-1} \circ \tau = \Im$.

Ci sono alcune particolari trasformazioni invertibili che, se invertite, danno la stessa trasformazione.

Esempio 11

Sia la trasformazione definita da τ (*x*; *y*) = (3 – *x*; 1 – *y*); determiniamone l'inversa $\tau^{-1} : \begin{cases} x' = 3 - x \\ y' = 1 - y \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} -x = x' - 3 \\ -y = y' - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - x' \\ y = 1 - y' \end{cases}$. Come si vede l'inversa coincide con la trasformazione di partenza. Se non siamo convinti verifichiamolo su un caso particolare. Determiniamo $P' = \tau$ (2; 0) = (3 – 2; 1 – 0) = (1; 1). Applichiamo ora a *P*' ancora la τ: τ (1; 1) = (3 – 1; 1 – 1) = (2; 0) = *P*.

Riserviamo una definizione per queste particolari trasformazioni.

Definizione 6

Una trasformazione geometrica invertibile $\tau : \Pi \to \Pi$, per la quale si ha $\tau = \tau^{-1}$ si chiama **trasformazione involutoria**.

Di immediata dimostrazione e comprensione è il seguente risultato:

Teorema 2

Per una trasformazione involutoria τ, si ha: $\tau \circ \tau = \Im$.

L'Antologia

Vogliamo riportare alcuni passi dal cosiddetto *programma di Erlangen*, prolusione che fece in occasione della sua nomina a professore.

Felix Klein, 1872

> *Il concetto più importante tra quelli necessari per le considerazioni che seguono è quello di gruppo di trasformazioni dello spazio. Componendo un numero qualunque di trasformazioni dello spazio si ha ancora una trasformazione. Ora, se una data serie di trasformazioni è costituita in modo tale che ogni trasformazione risultante dalla composizione di un numero qualunque di esse appartenga ancora alla stessa serie, la serie in questione è detta gruppo di trasformazioni.*
> *Un esempio di gruppo di trasformazioni è la totalità dei movimenti (se ogni movimento è considerato come un'operazione effettuata su tutto lo spazio). La totalità delle rotazioni intorno a un punto costituisce un gruppo che è, a sua volta, contenuto nel gruppo della totalità dei movimenti. Al contrario, la totalità delle collineazioni forma un gruppo che contiene il gruppo dei movimenti.*

Come si vede Klein immediatamente introduce il problema, che è appunto quello di collegare geometria e algebra moderna, studiando quindi le trasformazioni come strutture algebrichemediante l'operazione di composizione. In seguito stabilisce quali sono le priorità di questo tipo di studi.

> *Individuare le proprietà invarianti, rispetto al gruppo principale, non degli oggetti dello spazio ma del sistema costituito da essi e dal punto dato. La questione può essere posta in un altro modo: studiare le proprietà geometriche dello spazio in ragione delle proprietà che restano inalterate, quando le trasformazioni del gruppo principale mantengono fisso il punto.*

Dopo avere in qualche modo inquadrato i problemi propone alcuni esempi tecnici sui quali sorvoliamo. Presentiamo invece le conclusioni del lavoro.

> *La differenza tra indirizzo sintetico e indirizzo analitico non deve più considerarsi essenziale nella geometria attuale, perché argomenti e metodi di entrambi hanno finito per coincidere quasi completamente. Per designare i suddetti indirizzi, ho quindi parlato unicamente di "geometria proiettiva". Infatti se l'indirizzo sintetico si serve preferibilmente dell'intuizione spaziale e rende in questo modo particolarmente attraenti le sue teorie elementari, il dominio di una tale intuizione non è automaticamente precluso all'indirizzo analitico, in quanto le formule della geometria analitica si possono concepire come un'espressione chiara e precisa delle relazioni geometriche. Per altro verso, non può essere trascurato, per lo sviluppo della ricerca, il vantaggio di un formalismo adeguato, che in un certo senso va al di là della stessa intuizione. È doveroso ricordare che un problema matematico si esaurisce solo quando diviene intuitivamente evidente, mentre procedere analiticamente significa compiere un passo importantissimo ma solo un primo passo.*

(I passi presentati sono tratti dall'edizione italiana del 1998 de La Scuola Editrice, tradotta da Antonio Bernardo.)

Verifiche

Lavoriamo insieme

Stabilire se la trasformazione $\tau(x; y) = (3x + 2y - 1; x - y^2)$ *è invertibile, e nel caso determinarne la legge dell'inversa.*

Dire che una trasformazione è invertibile significa che siamo in grado di passare da $\tau(x; y)$ a $(x; y)$. Per esempio dato che $\tau(2; 0) = (5; 4)$, dobbiamo essere in grado di risalire da (5; 4) a (2; 0). Per ottenere il risultato generale dobbiamo risolvere il seguente sistema $\begin{cases} 3x+2y-1=x' \\ x-y^2=y' \end{cases}$, in cui le incognite sono x e y.

$$\begin{cases} x=\dfrac{x'-2y+1}{3} \\ \dfrac{x'-2y+1}{3}-y^2=y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{x'-2y+1}{3} \\ x'-2y+1-3y^2-3y'=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{x'-2y+1}{3} \\ 3y^2+2y-x'+3y'-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{x'-2y+1}{3} \\ y=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+3x'-9y'+3}}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3x'+5\pm\sqrt{3x'-9y'+4}}{9} \\ y=\dfrac{-1\pm\sqrt{3x'-9y'+4}}{3} \end{cases}$$

. Visto che abbiamo ottenuto più di una soluzione possiamo dire che la trasformazione non è invertibile.

Stabilire quali fra le seguenti trasformazioni sono invertibili e di quelle che lo sono determinare le inverse (Nelle risposte N.I. = Non invertibile)

Livello 2

1. $\tau(x; y) = (x + 2y - 1; x - y)$; $\tau(x; y) = (5x - y + 1; 1 - y)$ $\left[\left(\dfrac{x+2y+1}{3}; \dfrac{x-y+1}{3}\right);\left(\dfrac{x-y}{5}; 1-y\right)\right]$
2. $\tau(x; y) = (4x - 1; 2 - y^2)$; $\tau(x; y) = (3y - 1; 4x)$; $\tau(x; y) = (5; x^2 - 1)$ $\left[\text{N.I.};\left(\dfrac{y}{4}; \dfrac{x+1}{3}\right);\text{N.I.}\right]$
3. $\tau(x; y) = (x + y; x - y)$; $\tau(x; y) = (x + 7y - 4; 3)$; $\tau(x; y)=\left(\dfrac{x+y}{2}; \dfrac{1}{x}\right)$ $\left[\left(\dfrac{x+y}{2}; \dfrac{x-y}{2}\right);(x-17;3);\left(\dfrac{1}{y}; \dfrac{2xy-1}{y}\right), y\neq 0\right]$
4. $\tau(x; y)=\left(\dfrac{x+y}{x-y}; 4x-2\right)$; $\tau(x; y)=\left(\sqrt{x}; y+1\right)$ $\left[\left(\dfrac{y+2}{4}; \dfrac{(x-y)\cdot(y+2)}{4\cdot(x+1)}\right), x\neq -1;\left(x^2; y-1\right)\right]$

Livello 2

Stabilire quali delle seguenti trasformazioni sono involutorie

5. $\tau(x; y) = (x; -y)$; $\tau(x; y) = (y; x)$; $\tau(x; y) = (3x; 4y)$; $\tau(x; y) = (x + y; x - y)$ [Sì ; Sì ; No ; No]
6. $\tau(x; y) = (x^2 + y^2; x^2 - y^2)$; $\tau(x; y) = (x - 1; y + 1)$; $\tau(x; y) = (3 - x; 8 - 3y)$ [No; No; No]
7. $\tau(x; y)=\left(\dfrac{5x-12y+4}{13}; \dfrac{-12x-5y+6}{13}\right)$ [Sì]

Leggi delle trasformazioni isometriche

La nostra nozione di simmetria è derivata dal volto umano. Quindi noi richiediamo simmetria orizzontale e in larghezza, non verticale né in profondità. *Blaise Pascal,* (1623–1662)

Il problema

Il concetto di movimento rigido è di fondamentale importanza nello studio della geometria, dato che esso è alla base dei criteri di isometria dei triangoli che sono, in un certo senso, le proprietà che *regolano* la geometria euclidea. Un movimento rigido è perciò una trasformazione invertibile e ha precise leggi che lo governano. Ci chiediamo quali possano essere tali leggi.

Prima di affrontare la risoluzione del problema proposto poniamo una definizione.

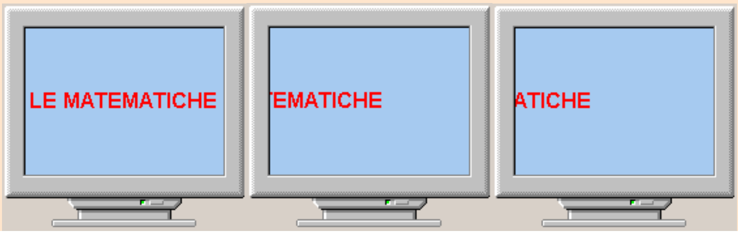
Definizione 7

- Una trasformazione geometrica $\tau:\Pi\to\Pi$, per la quale $\overline{P'Q'}=\overline{PQ},\forall P,Q\in\Pi$, $P'=\tau(P)$ e $Q'=\tau(Q)$, ossia $\overline{\tau(P)\tau(Q)}=\overline{PQ},\forall P,Q\in\Pi$, si chiama **trasformazione isometrica o isometria**;
- Una isometria che trasforma il triangolo *ABC* nel triangolo $A'B'C'$, si dice **diretta**;
- Una isometria che trasforma il triangolo *ABC* nel triangolo $A'C'B'$, si dice **inversa**.

Un'isometria è perciò una trasformazione che trasforma segmenti in segmenti isometrici, ossia conserva la distanza tra due punti. Un'isometria diretta conserva il *verso di lettura*, ossia se la applichiamo a un poligono e ne leggiamo i vertici in un dato verso, se manteniamo lo stesso verso anche il poligono trasformato si leggerà allo stesso modo, viceversa l'isometria sarà inversa. Le isometrie inverse sono le simmetrie.
Diverse sono le trasformazioni isometriche che, anche solo intuitivamente, già conosciamo: la traslazione, le simmetrie, la rotazione. Quindi, piuttosto che trattare il problema in generale cominciamo a indagare le leggi di tali trasformazioni.

Il problema

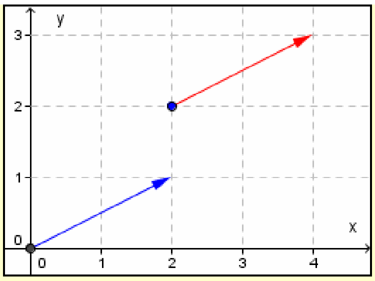
Uno degli screen saver più semplici che vengono forniti con il sistema operativo Windows © nelle sue varie release è il cosiddetto *Testo scorrevole*, consistente nella visualizzazione di un testo a nostro piacere che si sposta orizzontalmente per lo schermo. Come viene realizzato questo *scorrimento*?



Senza entrare nel dettaglio spieghiamo brevemente cosa accade. Quel che viene realizzato è simile a ciò che accade nei tabelloni luminosi su cui appaiono scritte che sembrano in *movimento* se viste da lontano, mentre in realtà si tratta di un alternarsi di luci che si spengono e si accendono e che il nostro occhio tramuta in un moto continuo. Nel caso particolare mostrato nel problema, vengono illuminati di rosso certi pixel, in modo da rappresentare la scritta LE MATEMATICHE; in un intervallo brevissimo gli stessi pixel sono colorati del colore dello sfondo in modo da divenire indistinguibili. Successivamente vengono illuminati quei pixel che sono a una distanza assegnata (in questo caso solo in orizzontaldai precedenti, in modo che la scritta risulti spostata. In pratica il programmatore che ha progettato questo screen–saver, comunica mediante leggi la traslazione desiderata. Vediamo allora di determinare in generale le leggi di una traslazione.

Leggi della traslazione

Esempio 12



Una traslazione è determinata da un vettore; cominciamo quindi a rappresentare i vettori sul piano cartesiano. Nella figura seguente abbiamo rappresentato due vettori equipollenti (aventi cioè uguali lunghezze, direzioni e versi), ma con diversi punti di applicazione; poiché il punto di applicazione di un vettore non pregiudica la traslazione determinata dallo stesso vettore, è chiaramente preferibile scegliere l'origine come punto di applicazione; ciò fa sì che possiamo associare al vettore in figura le coordinate del suo punto di *arrivo*, in questo caso (2; 1).

Tenuto conto dell'esempio precedente, poniamo la seguente definizione.

Definizione 8

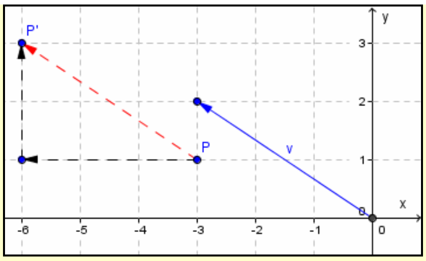
Dato un vettore $\vec{v}$, lo rappresentiamo sul piano cartesiano ortogonale in modo che sia applicato nell'origine: diciamo sue **componenti** le coordinate del punto individuato dall'altro estremo.

Notazione 5

Un vettore di componenti *a* e *b* si indica con $\vec{v} \equiv (a;b)$.

Siamo ora in grado di determinare le leggi di una generica traslazione.

Esempio 13



In figura abbiamo traslato $P \equiv (-3;\ 1)$ rispetto al vettore $\vec{v} \equiv (-3;2)$. Per determinare più semplicemente il corrispondente di *P* abbiamo scomposto il percorso nei due tratti più lunghi ma più semplici da determinare. In pratica, a partire da *P*, ci siamo spostati di 2 unità a sinistra e poi di 3 unità verso l'alto. Naturalmente avremmo ottenuto lo stesso risultato invertendo i due passi precedenti. Quel che importa è invece il fatto che vi è una relazione fra le coordinate di *P* e quelle di *P*' che coinvolge solo le coordinate omonime, cioè ascisse con ascisse e ordinate con ordinate. Pertanto la legge che abbiamo applicato a *P* è: $\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y + 2 \end{cases}$, infatti $P \equiv (-3;\ 1)$ è divenuto $P' \equiv (-3 - 3;\ 1 + 2) \equiv (-6;\ 3)$.

Tenuto conto dell'esempio precedente possiamo enunciare il seguente risultato.

Teorema 3

Le leggi di una traslazione di vettore $\vec{v} \equiv (a;b)$ sono le seguenti: t: $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$.

Ovviamente una traslazione è un'isometria diretta. Risultano altresì di semplice comprensione e altrettanto semplice dimostrazione i seguenti altri teoremi.

Teorema 4

L'inversa di una traslazione di vettore $\vec{v} \equiv (a;b)$ è una traslazione di vettore $\vec{w} \equiv (-a;-b)$.

Teorema 5

La composizione di una traslazione di vettore $\vec{v} \equiv (a;b)$ con una traslazione di vettore $\vec{w} \equiv (c;d)$ è una traslazione di vettore $\vec{v} + \vec{w} \equiv \vec{z} \equiv (a+c;b+d)$.

Corollario 1

L'insieme delle traslazioni rispetto all'operazione di composizione di trasformazioni è un **gruppo abeliano**.

Poiché lasciamo per esercizio le dimostrazioni dei Teoremi 4 e 5 enunciati, proponiamo qui due esemplificazioni che potranno servire da schema per tali dimostrazioni.

Esempio 14

- Consideriamo la traslazione di legge $\begin{cases} x' = x-2 \\ y' = y+3 \end{cases}$, quale sarà la sua inversa? Basta risolvere il precedente sistema considerato nelle incognite *x* e *y*. Abbiamo facilmente $\begin{cases} x = x'+2 \\ y = y'-3 \end{cases}$. Quindi l'inversa della traslazione di vettore $\vec{v} \equiv (-2;3)$ è una traslazione di vettore $\vec{v}\,' \equiv (2;-3)$.
- Componiamo le traslazioni aventi le seguenti leggi: $t_1 : \begin{cases} x' = x-1 \\ y' = y+4 \end{cases}, t_2 : \begin{cases} x'' = x'+2 \\ y'' = y'+3 \end{cases}$. Abbiamo usato diversi apici solo per distinguere più facilmente le due traslazioni. Consideriamo un generico punto $P \equiv (x; y)$, e applichiamo successivamente le leggi: $P \equiv (x;y) \xrightarrow{t_1} P' \equiv (x-1;y+4) \xrightarrow{t_2} P'' \equiv (x-1+2;y+4+3)$ $\equiv (x+1;y+7)$. Quindi la composizione eseguita, $t_2 \circ t_1$, è effettivamente una traslazione di vettore le cui componenti sono somma delle componenti omonime dei due vettori caratteristici. Ciò era del resto evidente. Infatti con t_1 ci siamo spostati di un passo a sinistra e 4 in alto, con t_2 di due passi a destra e 3 in alto, quindi complessivamente abbiamo compiuto 1 passo a destra e 7 in alto.

Un po' più ostica può risultare la dimostrazione del seguente risultato.

Teorema 6

Le traslazioni sono isometrie.

Dimostrazione

Applichiamo una traslazione di vettore $\vec{v} \equiv (a;b)$ agli estremi di un segmento *PQ*: $P \equiv (x_P; y_P)$, $Q \equiv (x_Q; y_Q)$, ottenendo i punti $P' \equiv (x_P + a; y_P + b)$, $Q' \equiv (x_Q + a; y_Q + b)$. Adesso calcoliamo le distanza fra *P* e *Q* e fra *P*' e *Q*': $\overline{PQ} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$; $\overline{P'Q'} = \sqrt{(x_P + a - x_Q - a)^2 + (y_P + b - y_Q + b)^2} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$

Infine osserviamo che i segmenti *PQ* e *P*'*Q*' sono isometrici.

Non dimostriamo ora analiticamente il seguente risultato intuitivo, che lasciamo per esercizio.

Teorema 7

Tutte le rette aventi la direzione del vettore di una data traslazione *t* sono unite per *t*.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Trovare il trasformato del punto $P \equiv (-1; 4)$ *mediante la traslazione di vettore* $\vec{v} \equiv (2; -3)$.

Tenuto conto delle leggi stabilite dal Teorema 3; che individuano in $t: \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$, le leggi di una traslazione di vettore $\vec{v} \equiv (a; b)$, abbiamo: $t(-1; 4) = (-1 + 2; 4 - 3) = (1; 1)$.

Determinare i trasformati dei seguenti punti mediante le traslazioni di vettore $\vec{v}$ ***indicato***

Livello 1

1. $(2; 0)$, $\vec{v} \equiv (-1; -2)$; $(-1; 4)$, $\vec{v} \equiv (-2; -3)$; $(-1; 3)$, $\vec{v} \equiv (1; 5)$ [(1; –2); (–3; 1); (0; 8)]
2. $(3; -7)$, $\vec{v} \equiv (0; -4)$; $(3; -1)$, $\vec{v} \equiv (4; -5)$; $(5; -2)$, $\vec{v} \equiv (1; 4)$ [(3; –11); (7; –6); (6; 2)]
3. $(0; 8)$, $\vec{v} \equiv (3; 1)$; $(7; 1)$, $\vec{v} \equiv (4; 0)$; $(-1; -1)$, $\vec{v} \equiv (-4; 0)$ [(3; 9); (11; 1); (–5; –1)]
4. $(5; -1)$, $\vec{v} \equiv (4; -4)$; $\left(\frac{1}{2}; -3\right)$, $\vec{v} \equiv (5; -1)$; $\left(0; -\frac{3}{4}\right)$, $\vec{v} \equiv (-1; 3)$ $\left[(9; -5); \left(\frac{11}{2}; -4\right); \left(-1; \frac{9}{4}\right)\right]$
5. $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{4}{3}\right)$, $\vec{v} \equiv (0; 3)$; $\left(1; \frac{1}{4}\right)$, $\vec{v} \equiv \left(\frac{1}{2}; -1\right)$; $(0;0)$, $\vec{v} \equiv \left(\sqrt{2}; -1 - \sqrt{3}\right)$ $\left[\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{3}\right); \left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}\right); \left(\sqrt{2}; -1 - \sqrt{3}\right)\right]$
6. $\left(-2; \frac{4}{5}\right)$, $\vec{v} \equiv \left(-\frac{3}{2}; \frac{2}{3}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 2\right)$, $\vec{v} \equiv \left(-\frac{3}{5}; -2\right)$ $\left[\left(-\frac{7}{2}; \frac{22}{15}\right); \left(\frac{5 \cdot \sqrt{3} - 6}{10}; 0\right)\right]$
7. $\left(\frac{5}{4}; -\frac{1}{3}\right)$, $\vec{v} \equiv \left(\sqrt{2} - 1; 3\right)$; $\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}; \frac{1}{\sqrt{3} - 1}\right)$, $\vec{v} \equiv \left(1; -\frac{1}{2}\right)$ $\left[\left(\frac{4 \cdot \sqrt{2} + 1}{4}; \frac{8}{3}\right); \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$
8. $\left(\frac{2}{3}; -\sqrt{5}\right)$, $\vec{v} \equiv \left(1 + \sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2} - 1}\right)$ $\left[\left(\frac{3 \cdot \sqrt{2} + 5}{3}; 1 + \sqrt{2} - \sqrt{5}\right)\right]$

Trasformare i seguenti poligoni secondo la traslazione di vettore indicato. Verificare poi che il poligono trasformato è isometrico a quello di partenza, calcolandone le misure dei lati

Livello 1

9. $A \equiv (-2; 0)$, $B \equiv (1; 1)$, $C \equiv (0; 3)$, $\vec{v} \equiv (-1; 2)$ [$A' \equiv (-3; 2)$, $B' \equiv (0; 3)$, $C' \equiv (-1; 5)$]
10. $A \equiv (1; 2)$, $B \equiv (-2; 3)$, $C \equiv (3; 5)$, $\vec{v} \equiv (2; 3)$ [$A' \equiv (3; 5)$, $B' \equiv (0; 6)$, $C' \equiv (5; 8)$]
11. $A \equiv (2; 2)$, $B \equiv (0; 4)$, $C \equiv (-1; 3)$, $D \equiv (-2; -1)$, $\vec{v} \equiv (-2; -4)$
[$A' \equiv (0; -2)$, $B' \equiv (-2; 0)$, $C' \equiv (-3; -1)$, $D' \equiv (-4; -5)$]
12. $A \equiv (-1; 0)$, $B \equiv (-2; -3)$, $C \equiv (1; -5)$, $D \equiv (2; 0)$, $\vec{v} \equiv (3; -1)$
[$A' \equiv (2; -1)$, $B' \equiv (1; -4)$, $C' \equiv (4; -6)$, $D' \equiv (5; -1)$]
13. $A \equiv (-2; 2)$, $B \equiv (1; -3)$, $C \equiv (5; -2)$, $D \equiv (4; 3)$, $E \equiv (1; 1)$, $\vec{v} \equiv (-4; 5)$
[$A' \equiv (-6; 7)$, $B' \equiv (-3; 2)$, $C' \equiv (1; 3)$, $D' \equiv (0; 8)$, $E' \equiv (-3; 6)$]

Lavoriamo insieme

Trovare le componenti dei vettori che trasformano $A \equiv (-2; 0)$ in $A' \equiv (-3; 1)$.

Deve aversi: $\begin{cases} -3 = -2 + a \\ 1 = 0 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$. Quindi il vettore cercato è $\vec{v} \equiv (-1; 1)$

Determinare le componenti dei vettori delle traslazioni che trasformano i punti appresso indicati nei loro corrispondenti con apici

Livello 2

14. $(1; 2) \rightarrow (-1; -2)$; $(-5; 7) \rightarrow (4; 7)$; $(-4; -3) \rightarrow (-4; 1)$ $(3; 4) \rightarrow (-3; 4)$ [(–2; –4); (9; 0); (0 4); (–6; 0)]

15. $(-1; 0) \to (0; -1)$; $(0; -1) \to (0; 1)$; $\left(\frac{3}{2};-1\right) \to \left(\frac{1}{2};3\right)$ [(1; –1); (0; 2); (–1; 4)]

16. $\left(1;-\frac{5}{6}\right) \to \left(\frac{5}{6};-1\right)$; $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right) \to \left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$; $(0;-3) \to \left(-\frac{5}{4};\frac{7}{8}\right)$ $\left[\left(-\frac{1}{6};-\frac{1}{6}\right);(-1;1);\left(-\frac{5}{4};\frac{31}{8}\right)\right]$

17. $\left(-\frac{3}{5};-\frac{4}{3}\right) \to \left(\frac{5}{2};\frac{7}{4}\right)$; $\left(2;-\frac{7}{3}\right) \to \left(\frac{1}{6};-3\right)$ $\left[\left(\frac{31}{10};\frac{37}{12}\right);\left(-\frac{11}{6};-\frac{2}{3}\right)\right]$

18. $\left(\sqrt{2};1\right) \to \left(2;\sqrt{2}\right)$; $\left(1+\sqrt{3};-2\right) \to \left(2\cdot\sqrt{3};3\cdot\sqrt{2}+3\right)$ $\left[\left(2-\sqrt{2};\sqrt{2}-1\right);\left(\sqrt{3}-1;3\cdot\sqrt{2}+5\right)\right]$

19. Dato il triangolo di vertici $A \equiv (-5; 0)$, $B \equiv (1; 4)$, $C \equiv (0; -2)$ determinare i vettori che lo trasformano in un triangolo in cui uno dei vertici coincide con l'origine degli assi. [(5; 0), (–1; –4), (0; 2)]

20. Al triangolo $A'B'C'$ risultato della traslazione dell'esercizio precedente che porta A in O, applicare la traslazione di vettore $\vec{v} \equiv (-4; 1)$ ottenendo $A''B''C''$. Determinare poi il vettore che permette di passare da $A''B''C''$ ad ABC. [$A'' \equiv (-4; 1)$, $B'' \equiv (2; 5)$, $C'' \equiv (1; -1)$; $\vec{v} \equiv (-1; -1)$]

21. Al quadrilatero $A'B'C'D'$ risultato della traslazione dell'esercizio 12, applicare la traslazione di vettore $\vec{v} \equiv (-4; -3)$, ottenendo $A''B''C''D''$. Determinare poi la trasformazione che fa passare da $A''B''C''D''$ ad $ABCD$. [$A'' \equiv (-2; -4)$, $B'' \equiv (-3;-7)$, $C'' \equiv (0;-9)$, $D'' \equiv (1;-4)$; $\vec{v} \equiv (1;0)$]

Lavoriamo insieme

Dati i vettori $\overrightarrow{v_1} \equiv (3; h)$, $\overrightarrow{v_2} \equiv (k; -4)$, *vogliamo trovare, se esistono, i valori dei parametri reali h e k in modo che la composizione delle traslazioni secondo i dati vettori, trasformi* $A \equiv (1; 2)$ *in* $A'' \equiv (4;-2)$.

Deve aversi: $A \equiv (1; 2) \xrightarrow{\overrightarrow{v_1}} A' \equiv (1 + 3; 2 + h) \xrightarrow{\overrightarrow{v_2}} A'' \equiv (4 + k; h - 2)$, pertanto deve essere: $A'' \equiv (4 + k; h - 2) \equiv (4;-2)$, cioè $\begin{cases} 4+k=4 \\ h-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ h=0 \end{cases}$.

Determinare i valori dei parametri reali h e k, se esistono, in modo che la composizione delle traslazioni di vettori dati, permettano di trasformare i punti indicati

Livello 2

22. $(h - 1;3)$, $(-2; k + 5)$, $(0; 4) \to (4; 0)$; $(3 - h; 1 + 2k)$, $(h - 3; 3k - 1)$, $(5;1) \to (-2; 8)$ [$h = 7$; $k = -12$; $\varnothing$]

23. $(3 - 2h; 1 + k)$, $(h - 3; k - 5)$, $(-3; -1) \to (-5; 1)$ [$h = 2$; $k = 3$]

24. $(h + k - 1; k - 3h + 1)$, $(2k - 3; h - 4k + 3)$, $(5; 0) \to (3; -4)$ $\left[h=6; k=-\frac{4}{3}\right]$

Livello 3

25. Dimostrare il Teorema 3.
26. Dimostrare il Teorema 4.
27. Dimostrare il Teorema 5.
28. Dato il pentagono di vertici (3; –4), (4; 3), (0; 2), (–2; –1), (2; –2) determinare il vettore con le componenti minime e intere, che lo trasforma in un poligono tutto contenuto nel *I* quadrante. [(3; 5)]
29. Con riferimento al problema precedente. Determinare i vettori con le componenti minime e intere, che trasformano il poligono in un pentagono tutto contenuto nel II, nel III e nel IV quadrante rispettivamente. [(–5; 5) ;(–5; –4) ;(3; –4)]

Lavoriamo insieme

Trovare la trasformata della retta $3x - y + 1 = 0$, *secondo la traslazione di vettore* $(2; -3)$.

Possiamo fare in diversi modi. Un primo metodo consiste nel determinare due punti qualsiasi della retta e traslarli, dato che la traslazione conserva l'allineamento, consideriamo la retta che passa per i due trasformati. Per esempio siano $A \equiv (0; 1)$ e $B \equiv (1; 4)$ punti della retta r. Trasliamoli: $A \equiv (0; 1) \xrightarrow{\vec{v}} A' \equiv (0 + 2; 1 - 3) \equiv (2; -2)$; $B \equiv (1; 4) \xrightarrow{\vec{v}} B' \equiv (1 + 2; 4 - 3) \equiv (3; 1)$. Adesso determiniamo l'equazione della retta pas-

sante per $A'B'$: $\frac{x-2}{3-2}=\frac{y+2}{1+2} \Rightarrow 3x - y - 8 = 0$.
Un altro metodo consiste invece nel determinare la traslazione inversa sostituendo le sue leggi nell'equazione di r. Abbiamo così: $t:\begin{cases} x'=x+2 \\ y'=y-3 \end{cases} \Rightarrow t^{-1}:\begin{cases} x=x'-2 \\ y=y'+3 \end{cases} \Rightarrow 3x' - y' - 8 = 0$. Come si vede i risultati coincidono, il fatto che le incognite si chiamino x' e y' è del tutto ininfluente.

Determinare le equazioni delle traslate delle rette seguenti secondo i vettori indicati

Livello **1**

30. $y = 3x + 1$; $\vec{v} \equiv (-1; 4)$; $y = 7x - 1$; $\vec{v} \equiv (2; -5)$ [$y = 3x + 8$; $y = 7x - 26$]
31. $x + 4y = 0$; $\vec{v} \equiv (-3; -7)$; $2x - 7y + 4 = 0$; $\vec{v} \equiv (1; -5)$ [$x + 4y + 31 = 0$; $2x - 7y - 33 = 0$]
32. $7x + 2y - 3 = 0$; $\vec{v} \equiv (3; 0)$; $x + 3y = 0$; $\vec{v} \equiv (-3; 1)$ [$7x + 2y - 24 = 0$; $x + 3y = 0$]

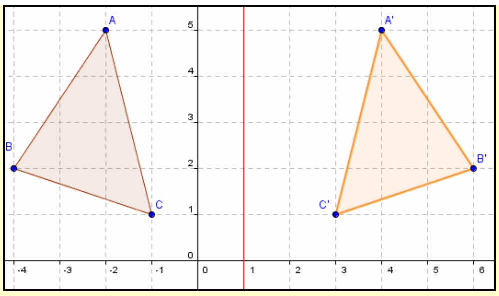
Livello **2**

33. Determinare la traslata della retta di equazione $y = mx + q$, relativamente al vettore generico $\vec{v} \equiv (a; b)$. [$y = mx - am + b + q$]
34. Con riferimento al problema precedente, determinare b in funzione di a in modo tale che la retta sia unita. [$b = am - q$]
35. Tenuto conto del risultato precedente determinare tutti i vettori $\vec{v}$ per i quali la traslazione secondo essi ha come unita la retta di equazione $y = 3x + 2$. In particolare determinare quello le cui componenti sono le minime intere positive. [(a; $3a + 2$); (1; 5)]
36. Dimostrare il Teorema 7.
37. La composizione di traslazioni è interna nell'insieme dei triangoli? [Sì]
38. La composizione di trasformazioni geometriche è interna nell'insieme delle traslazioni? [Sì]

Leggi delle simmetrie

Consideriamo adesso particolari simmetrie assiali.

Esempio 15



In figura abbiamo costruito il triangolo simmetrico di *ABC* rispetto a una retta parallela all'asse delle ordinate, in particolare a quella che passa per i punti di ascissa 1; cioè di equazione $x = 1$. Come si vede la trasformazione è inversa dato che se leggiamo *ABC* il primo triangolo nel verso antiorario, nello stesso verso il secondo triangolo si leggerà *A'C'B'*. Vogliamo cercare di determinare la legge che permette di passare dalle coordinate di *ABC* a quelle di *A'B'C'*. Notiamo intanto che le ordinate non sono variate, pertanto $y' = y$. Per quanto riguarda le ascisse si tratta invece di valutare la distanza fra ciascun punto e l'asse di simmetria. Per esempio nel caso di *A* tale distanza è 2 unità. Noi però vogliamo mettere in relazione il numero 2 con l'ascissa di *A*, cioè –1; e con l'ascissa comune ai punti dell'asse, cioè 1. Applicando la legge per determinare la distanza di due punti di uguale ordinata si ha: $1 - (-1) = 2$. A questo punto, dato che anche *A'* dista 2 unità dall'asse, per determinare l'ascissa di *A'* basta aggiungere ulteriori 2 unità, e quindi in totale 4 unità, all'ascissa di *A*. Pertanto: $x_{A'} = -1 + 4 = 3$. Esprimiamo la precedente operazione in funzione dell'ascissa di *A* e dell'ascissa comune dell'asse: $x_{A'} = x_A + 2 \cdot (1 - x_A) = x_A + 2 \cdot 1 - 2 \cdot x_A = 2 \cdot 1 - x_A$.

Visti i risultati dell'esempio precedente, è di immediata comprensione e dimostrazione il seguente teorema.

Teorema 8

Le leggi di una simmetria rispetto alla retta $x = a$, sono: $s_{x=a}: \begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases}$.

Come immediata generalizzazione si ha la validità anche di quest'altro teorema.

Teorema 9

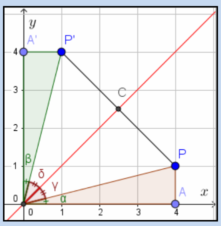
Le leggi di una simmetria rispetto alla retta $y = a$, sono: $s_{y=a}: \begin{cases} x' = x \\ y' = 2a - y \end{cases}$.

Facilmente possiamo trovare anche le simmetrie rispetto alle bisettrici degli assi.

Teorema 10

- Le leggi di una simmetria rispetto alla retta $y = x$, sono: $s_{y=x}: \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$.
- Le leggi di una simmetria rispetto alla retta $y = -x$, sono: $s_{y=-x}: \begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$.

Dimostrazione

Proviamo solo il primo caso. Ci riferiamo alla figura. 

Il triangolo *OPP′* è isoscele, quindi

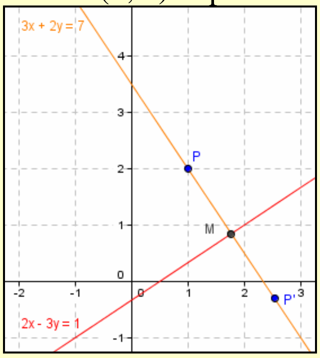
γ = δ, ma allora anche i loro complementari, α e β sono uguali. Pertanto i triangoli rettangoli *AOP* e *A′OP′* sono isometrici, avendo le ipotenuse *OP* e *OP′* uguali. Perciò $\overline{AP} = \overline{A'P'}, \overline{AO} = \overline{A'O}$, che equivale alla tesi.

Pone maggiori difficoltà il problema di determinare le leggi di una simmetria rispetto a una retta generica, di equazione $ax + by$ è $c = 0$. Consideriamo un esempio.

Esempio 16

Vogliamo determinare il simmetrico del punto $P \equiv (1; 2)$ rispetto la retta *r* di equazione $2x – 3y –1= 0$.

Nella figura seguente vediamo come fare.



Dobbiamo considerare l'intersezione *M* della retta *n* per *P* perpendicolare a *r* con la stessa *r*. Quindi dobbiamo determinare *P*' su *n* in modo tale che *M* sia punto medio di *PP*'. Intanto troviamo la retta *n*, applicando l'apposita formula per la perpendicolare a una retta per un punto, si ha: $n: 3 \cdot (x – 1) + 2 \cdot (y – 2) = 0 \Rightarrow 3x + 2y – 7 = 0$. Ora determiniamo le coordinate del punto *M*: $\begin{cases} 2x-3y-1=0 \\ 3x+2y-7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{23}{13} \\ y=\dfrac{11}{13} \end{cases}$. Le coordinate di *P*': $\begin{cases} \dfrac{x'+1}{2}=\dfrac{23}{13} \\ \dfrac{y'+2}{2}=\dfrac{11}{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=\dfrac{33}{13} \\ y'=-\dfrac{4}{13} \end{cases}$. Se ripetiamo il precedente procedimento per un generico punto $P \equiv (x_P; y_P)$, determiniamo le leggi della simmetria rispetto alla retta *r* di equazione $2x – 3y – 1 = 0$. Procediamo:

$n: 3 \cdot (x – x_P) + 2 \cdot (y – y_P) = 0 \Rightarrow 3x + 2y – 3x_P – 2y_P = 0$. $\begin{cases} 2x-3y-1=0 \\ 3x+2y-3x_P-2y_P=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{9x_P+6y_P+2}{13} \\ y=\dfrac{6x_P+4y_P-3}{13} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x'+x_P}{2}=\dfrac{9x_P+6y_P+2}{13} \\ \dfrac{y'+y_P}{2}=\dfrac{6x_P+4y_P-3}{13} \end{cases} \Rightarrow; \begin{cases} x'=\dfrac{5x_P+12y_P+4}{13} \\ y'=\dfrac{12x_P-5y_P-6}{13} \end{cases}$. Sostituendo x_P e y_P con *x* e *y*, otteniamo le leggi cercate.

Lasciamo per esercizio la dimostrazione del seguente teorema che segue la falsariga del precedente esempio.

Teorema 10

Le leggi di una simmetria rispetto alla retta $ax + by + c = 0$, sono: $s_{ax+by+c=0}: \begin{cases} x'=\dfrac{x\cdot\left(b^2-a^2\right)-2aby-2ac}{a^2+b^2} \\ y'=\dfrac{-2abx+y\cdot\left(a^2-b^2\right)-2bc}{a^2+b^2} \end{cases}$.

Esempio 17

- Verifichiamo che le leggi del Teorema 10, contengono come caso particolare quelle trovate nell'esempio 16. Abbiamo $a = 2$; $b = -3$; $c = -1$. $s_{2x-3y-1=0}: \begin{cases} x' = \dfrac{x\cdot\left((-3)^2-2^2\right)-2\cdot 2\cdot(-3)\,y-2\cdot 2\cdot(-1)}{2^2+(-3)^2} \\ y' = \dfrac{-2\cdot 2\cdot(-3)\,x+y\cdot\left(2^2-(-3)^2\right)-2\cdot(-3)\cdot(-1)}{2^2+(-3)^2} \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{5x+12y+4}{13} \\ y' = \dfrac{12x-5y-6}{13} \end{cases}$.
- Verifichiamo che coincidono anche con quelle trovate per assi paralleli agli assi coordinati: retta $x - h = 0$ $\Rightarrow a = 1$; $b = 0$, $c = -h$: $s_{x-h=0}: \begin{cases} x' = \dfrac{x\cdot\left(0^2-1^2\right)-2\cdot 1\cdot 0\cdot y-2\cdot 1\cdot(-h)}{1^2+0^2} \\ y' = \dfrac{-2\cdot 1\cdot 0\cdot x+y\cdot\left(1^2-0^2\right)-2\cdot 0\cdot(-h)}{1^2+0^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -x+2h \\ y' = y \end{cases}$. Allo stesso modo si *ritrovano* le leggi per le simmetrie rispetto alle rette $y = k$.

Adesso enunciamo due risultati intuitivi, che dimostreremo analiticamente solo nel caso particolare delle simmetrie con assi paralleli agli assi coordinati.

Teorema 11

Le simmetria assiali sono trasformazioni involutorie.

Dimostrazione

Applichiamo la simmetria di asse parallelo all'asse x, i cui punti hanno ordinata costante a, la cui legge è $s_{y=a}: \begin{cases} x' = x \\ y' = 2a - y \end{cases}$, al generico punto $P \equiv (x; y)$, ottenendo $P' \equiv (x; 2a - y)$. Adesso applichiamo la stessa simmetria a P', ottenendo $P'' \equiv (x; 2a - (2a - y)) \equiv (x; y)$. Abbiamo riottenuto P, quindi abbiamo dimostrato la tesi.

Teorema 12

Componendo due simmetrie di assi fra loro paralleli si ottiene una traslazione il cui vettore è ortogonale agli assi e ha ampiezza pari al doppio della distanza fra i due assi.

Dimostrazione

Consideriamo la dimostrazione solo per rette parallele all'asse y. Applichiamo la simmetria di asse parallelo all'asse y, i cui punti hanno ascissa costante a, al punto $(x; y)$, ottenendo $(2a - x; y)$, a cui applichiamo la stessa simmetria, ottenendo $(2b - (2a - x); y) \equiv (2b - 2a + x; y)$. Quindi le leggi della composizione sono: $s_{x=b} \circ s_{x=a}: \begin{cases} x' = x + 2b - 2a \\ y' = y \end{cases}$, cioè le leggi di una traslazione di vettore $(2b - 2a; 0)$. Osserviamo che $2b - 2a$ è il doppio della distanza fra gli assi. Ciò che volevamo provare.

Il precedente teorema nega la congettura fatta in precedenza che la composizione di due trasformazioni dello stesso tipo sia ancora una trasformazione dello stesso tipo.

Teorema 13

Le simmetria assiali sono isometrie inverse.

Non dimostriamo questo teorema, ma ne lasciamo per esercizio la verifica limitatamente ai casi esaminati, cioè nei casi in cui l'asse di simmetria è un asse coordinato o una retta a esso parallela.

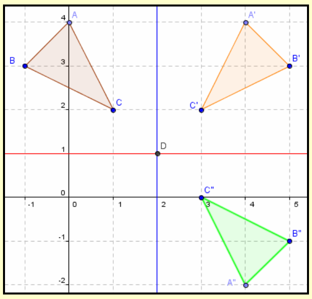
Teorema 14

In una simmetria assiale tutte le rette perpendicolari all'asse sono unite.

Passiamo alle simmetrie centrali.

Esempio 18

In figura abbiamo determinato il simmetrico del triangolo *ABC* rispetto al punto *D* in due modi: prima applicando la definizione di simmetria centrale, poi considerando i simmetrici di *ABC* rispetto alle rette parallele agli assi coordinati passanti per *D*.



Quanto mostrato nell'esempio, evidentemente generalizzabile a qualsiasi centro di simmetria, ci permette di trovare le leggi di una simmetria centrale come composizione di due simmetrie assiali.

Teorema 15

Le leggi di una simmetria di centro $(a; b)$ sono: $s_{C(a,b)}: \begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$.

La dimostrazione che si ottiene, applicando al generico punto $P \equiv (x; y)$ successivamente e non importa in quale ordine le simmetrie $s_{x=a}$ e $s_{y=b}$, è lasciata per esercizio.
Enunciamo ora anche per le simmetrie centrali alcuni teoremi di facile comprensione e dimostrazione, lasciate perciò per esercizio

Teorema 16

Le simmetrie centrali sono trasformazioni involutorie.

Teorema 17

Le simmetrie centrali sono isometrie dirette.
Dimostrazione
Dato che le simmetrie assiali sono inverse e la simmetria centrale è composizione di due simmetrie assiali, effetuiamo due inversioni dell’ordine di lettura, che quindi ritorna normale.

Teorema 18

La composizione di due simmetrie centrali di centri $C \equiv (a; b)$ e $C' \equiv (c; d)$ è una traslazione di vettore $\vec{v} \equiv (2c - 2a; 2d - 2b)$.

Teorema 19

In una simmetria centrale tutte le rette passanti per il centro sono unite.

Verifiche

Leggi delle simmetrie assiali

Lavoriamo insieme

- *Determinare le coordinate del simmetrico del punto* $P \equiv (3; -2)$, *rispetto alla retta di equazione* $x = 3$.
  In questo caso il punto appartiene all'asse, quindi chiaramente $P' \equiv P$.
- *Come prima rispetto alla retta* $x = -2$.
  Applichiamo le leggi stabilite dal Teorema 8; che in questo caso divengono: $s_{x=-2}: \begin{cases} x' = -4 - x \\ y' = -y \end{cases}$. Pertanto si ha: $P \equiv (3; -2) \xrightarrow{s_{x=-2}} P' \equiv (-4 - 3; -2) \equiv (-7; -2)$.

Determinare i trasformati dei seguenti punti mediante le simmetrie di asse indicato
Suggerimento**:** Attenzione alle posizioni dei punti rispetto agli assi di simmetria

Livello **1**

1. $(1; -3)$, $x = 1$; $(-3; 2)$, $y = 3$; $(-1; 3)$, $y = 2$; $(0; -4)$, $x = -4$ [(1; –3); (–3; 4); (–1; 1); (–8; –4)]
2. $(4; -5)$, $x = y$; $(1; 4)$, $x = -y$; $(3; 1)$, $x = 0$; $(7; 1)$, $y = 0$ [(–5; 4) ; (–4; –1) ; (–3; 1); (7; –1)]
3. $(-4; 0)$, $x = -y$; $(4; -4)$, $x = y$; $\left(\frac{1}{2}; -3\right), x = -\frac{1}{2}$; $(0; 0)$, $x = 3y$ $\left[(0;4);(-4;4);\left(-\frac{3}{2};-3\right);(0;0)\right]$
4. $\left(0; -\frac{3}{4}\right), y = \frac{4}{3}$; $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{4}{3}\right), y = -\sqrt{2}$; $\left(1; \frac{1}{4}\right), x = -\frac{4}{3}$ $\left[\left(0;\frac{41}{12}\right);\left(-\frac{1}{2};\frac{4-6\cdot\sqrt{2}}{3}\right);\left(-\frac{11}{3};\frac{1}{4}\right)\right]$
5. $\left(-2; \frac{4}{5}\right)$, $3x + 5y + 2 = 0$; $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 2\right), x = -\frac{\sqrt{2}+1}{3}$; $\left(\frac{5}{4}; -\frac{1}{3}\right), y = -x$ $\left[\left(-2;\frac{4}{5}\right);\left(\frac{4\cdot\sqrt{2}-3\cdot\sqrt{3}}{6};2\right);\left(\frac{1}{3};-\frac{5}{4}\right)\right]$

Lavoriamo insieme

Trasformare il triangolo di vertici $A \equiv (0; 1)$, $B \equiv (-1; 1)$, $C \equiv (-2; -1)$, *secondo la simmetria di asse* $y = -2$.
Le leggi della simmetria sono: $\begin{cases} x' = x \\ y' = -4 - y \end{cases}$, quindi: $A \equiv (0; 1) \to A' \equiv (0; -5)$; $B \equiv (-1; 1) \to B' \equiv (-1; -5)$; $C \equiv (-2; -1) \to C' \equiv (-2; -3)$. Facilmente si verifica che il perimetro di ABC è uguale a quello di $A'B'C'$.

Trasformare i seguenti poligoni secondo la simmetria di asse indicato. Verificare poi che il poligono trasformato è isometrico a quello di partenza, calcolandone le misure dei lati

Livello **1**

6. $A \equiv (1; 0)$, $B \equiv (-2; 3)$, $C \equiv (-2; -1)$, $x = 3$ [$A' \equiv (5; 0)$, $B' \equiv (8; 3)$, $C' \equiv (8; -1)$]
7. $A \equiv (2; 3)$, $B \equiv (-3; 0)$, $C \equiv (-2; 1)$, $D \equiv (3; 1)$, $y = 1$ [$A' \equiv (2; -1)$, $B' \equiv (-3; 2)$, $C' \equiv (-2; 1)$, $D' \equiv (3; 1)$]
8. $A \equiv (2;2)$, $B \equiv (2;4)$, $C \equiv (-1; -1)$, $D \equiv (0;0)$, $x = -2$ [$A' \equiv (-6; 2)$, $B' \equiv (-6;4)$, $C' \equiv (-3; -1)$, $D' \equiv (-4;0)$]
9. $A \equiv (1; 0)$, $B \equiv (-2; 0)$, $C \equiv (-2; 3)$, $D \equiv (4; 1)$, $y = x$ [$A' \equiv (0; 1)$, $B' \equiv (0; -2)$, $C' \equiv (3; -2)$, $D' \equiv (1; 4)$]
10. $A \equiv (1;2)$, $B \equiv (0;4)$, $C \equiv (-3; -1)$, $D \equiv (3;0)$, $x = -y$ [$A' \equiv (-2; -1)$, $B' \equiv (-4;0)$, $C' \equiv (1; 3)$, $D' \equiv (0; -3)$]
11. $A \equiv (-2; 1)$, $B \equiv (1; 0)$, $C \equiv (1; -1)$, $x = y$ [$A' \equiv (1; -2)$, $B' \equiv (0; 1)$, $C' \equiv (-1; 1)$]
12. $A \equiv (-3; 2)$, $B \equiv (-4; -1)$, $C \equiv (-2; -1)$, $x = -y$ [$A' \equiv (-2; 3)$, $B' \equiv (1; 4)$, $C' \equiv (1; 2)$]
13. $A \equiv (1; 2)$, $B \equiv (3; -2)$, $C \equiv (-2;1)$, $D \equiv (0; -1)$, $x = y$ [$A' \equiv (2; 1)$, $B' \equiv (-2; 3)$, $C' \equiv (1; -2)$, $D' \equiv (-1; 0)$]
14. $A \equiv (1; 0)$, $B \equiv (0;1)$, $C \equiv (-1;2)$, $D \equiv (-2;1)$, $x = -y$ [$A' \equiv (0; -1)$, $B' \equiv (-1; 0)$, $C' \equiv (-2; 1)$, $D' \equiv (-1; 2)$]

Livello **2**

In ciascuno dei seguenti esercizi determinare infine la trasformazione che permette di passare dalla terza alla prima figura

15. Dato il quadrilatero di vertici $A \equiv (-1; 2)$, $B \equiv (-3; 2)$, $C \equiv (-4; 1)$, $D \equiv (-2; -1)$, determinare il suo trasformato secondo la simmetria di asse la retta di equazione $x = -y$. Alla figura ottenuta applicare la simmetria di asse la retta di equazione $x = y$.

[$A'' \equiv (1; –2)$, $B'' \equiv (3; –2)$, $C'' \equiv (4; –1)$, $D'' \equiv (2;1)$; $x = – x''$, $y = –y''$]

16. Dato il triangolo di vertici $A \equiv (1; 1)$, $B \equiv (–3; 0)$, $C \equiv (1; –4)$ determinare il suo trasformato secondo la simmetria di asse la retta di equazione $y = 1$. Alla figura ottenuta applicare la simmetria di asse la retta di equazione $y = 2$. [$A'' \equiv (1; 3)$, $B \equiv (–3; 2)$, $C \equiv (1; –2)$, $x = x''$, $y = y'' –2$]
17. Dato il quadrilatero di vertici $A \equiv (2; 0)$, $B \equiv (3; 0)$, $C \equiv (–1; 1)$, $D \equiv (–2; 3)$, determinare il suo trasformato secondo la simmetria di asse la retta di equazione $x = –2$. Alla figura ottenuta applicare la simmetria di asse la retta $x = 3$. [$A'' \equiv (12;0)$, $B'' \equiv (13;0)$, $C'' \equiv (9; 1)$, $D'' \equiv (8; 3)$, $x = x'' – 10$, $y = y''$]
18. Dato il quadrilatero di vertici $A \equiv (1; 2)$, $B \equiv (–4; 1)$, $C \equiv (–2; –1)$, $D \equiv (–1; 1)$, determinare il suo trasformato secondo la simmetria di asse la retta di equazione $x = –y$. Alla figura ottenuta applicare la simmetria di asse la retta $x = 4$. [$A'' \equiv (10; –1)$, $B \equiv (9; 4)$, $C \equiv (7; 2)$, $D \equiv (9; 1)$, $x = – y''$, $y = x'' – 8$]
19. Dato il triangolo di vertici $A \equiv (–3; 1)$, $B \equiv (–4; –1)$, $C \equiv (2; –2)$ determinare il suo trasformato secondo la simmetria di asse la retta di equazione $y = –1$. Alla figura ottenuta applicare la simmetria di asse la retta di equazione $x = 3$. [$A \equiv (9; –3)$, $B \equiv (10; 1)$, $C \equiv (4; 0)$, $x = – x'' + 6$; $y = –y'' – 2$]
20. Dato il quadrilatero di vertici $A \equiv (–2; 3)$, $B \equiv (–3; –1)$, $C \equiv (–2; –2)$, $D \equiv (–1; 1)$, determinare il suo trasformato secondo la simmetria di asse la retta $x = –3$. Alla figura ottenuta applicare la simmetria di asse la retta $x = y$. [$A'' \equiv (–9; –2)$, $B \equiv (–5; –3)$, $C \equiv (–4; –2)$, $D \equiv (–7; –1)$, $x = –y'' – 6$; $y = x''$]
21. Dato il triangolo di vertici $A \equiv (2; 5)$, $B \equiv (–2; 1)$, $C \equiv (–1; 4)$ determinare il suo trasformato secondo la traslazione di vettore $\vec{v} \equiv (–1; –3)$, a tale figura applicare la simmetria di asse la retta $y = 5$. [$A \equiv (1; 8)$, $B \equiv (–3; 12)$, $C \equiv (–2; 9)$, $x = x'' + 1$; $y = 13 – y''$]
22. Dato il triangolo di vertici $A \equiv (1; 4)$, $B \equiv (–1; 0)$, $C \equiv (–2; 3)$ determinare il suo trasformato secondo la simmetria di asse la retta $x = 1$; a tale figura applicare la traslazione di vettore $\vec{v} \equiv (2; –4)$. [$A'' \equiv (3; 0)$, $B'' \equiv (5; –4)$, $C'' \equiv (6; –1)$, $x = 4 – x''$, $y = y'' + 4$]

Lavoriamo insieme

Trovare, se esistono, le simmetrie di assi paralleli agli assi, che trasformano (1; 3) in (–2; 3).
Poiché le ordinate sono uguali ma le ascisse no, esisterà solo una simmetria di asse parallelo all'asse x, le cui generiche leggi sono: $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y \end{cases}$. Deve perciò aversi: $2a – 1 = –2$; cioè $a = –1/2$. Pertanto le leggi cercate sono: $\begin{cases} x' = -1 - x \\ y' = y \end{cases}$.

Scrivere le leggi delle simmetrie di assi paralleli a quelli coordinati, che trasformano i punti dati nei loro corrispondenti con apici

Livello 2

23. $(1; 2) \to (–5; 2)$; $(–1; –2) \to (–1; 6)$; $(2; 3) \to (–2; 3)$; $(0; 1) \to (–4; 1)$ [$x = –2$; $y = 2$; $x = 0$; $x = –2$]
24. $\left(\sqrt{2};-4\right) \to \left(3\cdot\sqrt{2};-4\right)$; $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{4}\right) \to \left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$; $(1;1) \to \left(1;-\frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{2}}{4};\sqrt{2}\right) \to \left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{2}\right)$ $\left[x = 2\cdot\sqrt{2}; x = \frac{1}{12}; y = \frac{1}{4}; x = \frac{3\cdot\sqrt{2}}{8}\right]$

Lavoriamo insieme

Determinare le leggi di composizione fra una traslazione di vettore $\vec{v} \equiv (a; b)$ e una simmetria di asse la retta di equazione $y = c$.
Le leggi da applicare sono: $t_{(a,b)} = \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$; $s_{y=c} : \begin{cases} x' = x \\ y' = 2c - y \end{cases}$. Applichiamo prima la simmetria poi la traslazione: $P \equiv (x;\ y) \xrightarrow{s_{y=c}} P' \equiv (x;\ 2c - y) \xrightarrow{t_{(a,b)}} P''(x + a;\ 2c + b - y)$. Come si vede le leggi ottenute non corrispondono né a una traslazione, né a una simmetria assiale di asse una retta parallela agli assi coordinati. In effetti una trasformazione del genere si chiama antitraslazione o glissosimmetria. Adesso vogliamo vedere se la detta composizione è commutativa. Invertiamo l'ordine di composizione:

$P \equiv (x; y) \xrightarrow{t_{(a,b)}} P' \equiv (x+a;\ y+b) \xrightarrow{s_{y=c}} P''(x+a;\ 2c-b-y)$. Come si vede i risultati non coincidono, pertanto la composizione non è commutativa.

Livello 3

25. Dato il pentagono di vertici (3; –4), (4; 3), (0; 2), (–2; –1), (2; –2), applichiamo la simmetria di asse la retta $x = h,\ h \in \mathbb{Z}$, ottenendo un nuovo pentagono. Determinare il minimo valore di h in modo che questo sia tutto contenuto nel I quadrante. [Impossibile]
26. Con riferimento al pentagono del problema precedente, applichiamogli la simmetria di asse la retta di equazione $x = h,\ h \in \mathbb{Z}$. Determinare il minimo valore di h in modo che il pentagono trasformato abbia tutti i vertici di ascissa positiva. [3]
27. Con riferimento al pentagono del problema precedente, applichiamogli la simmetria di asse la retta di equazione $y = h,\ h \in \mathbb{Z}$. Determinare il minimo valore di h in modo che abbia tutti i vertici di ordinata positiva. [2]
28. Determinare le leggi della composizione di due simmetrie assiali di assi le rette $x = a$ e $x = b$. Che tipo di trasformazione otteniamo? Giustificare la risposta. [$x' = x + 2a – 2b$, $y' = y$; Traslazione]
29. Con riferimento al precedente esercizio, la composizione è commutativa? Giustificare la risposta. [No, è $x' = x – 2a + 2b$, $y' = y$]
30. Con riferimento alla dimostrazione del Teorema 12; possiamo dire che la composizione è commutativa? Giustificare la risposta. [No]
31. Determinare le leggi della composizione di una traslazione di vettore $\vec{v} \equiv (a;\ b)$ con una simmetria di asse la retta di equazione $x = c$. Che tipo di trasformazione si ottiene? La detta composizione è commutativa? [$x' = –x – a + 2c$, $y' = y + b$; Glissosimmetria; No]
32. Dimostrare il Teorema 10.
33. Dimostrare il Teorema 13.

Lavoriamo insieme

Utilizzando il risultato stabilito dal Teorema 10, *trovare il corrispondente di* $P \equiv (3;\ 1)$ *rispetto alla simmetria di asse la retta di equazione* $4x – 7y + 3 = 0$.

In questo caso le leggi da applicare sono: $s_{4x-7y+3=0}: \begin{cases} x' = \dfrac{x\cdot\left((-7)^2-4^2\right)-2\cdot 4\cdot(-7)\cdot y-2\cdot 4\cdot 3}{4^2+(-7)^2} \\ y' = \dfrac{-2\cdot 4\cdot(-7)\cdot x+y\cdot\left(4^2-(-7)^2\right)-2\cdot(-7)\cdot 3}{4^2+(-7)^2} \end{cases} = \begin{cases} x' = \dfrac{33x+56y-24}{65} \\ y' = \dfrac{56x-33y+42}{65} \end{cases}$

Quindi si ha: $P \equiv (3;\ 1) \xrightarrow{s_{4x-7y+3=0}} P' \equiv \left(\dfrac{33\cdot 3+56\cdot 1-24}{65};\ \dfrac{56\cdot 3-33\cdot 1+42}{65}\right) \equiv \left(\dfrac{131}{65};\ \dfrac{177}{65}\right)$.

Determinare il trasformato del punto indicato rispetto alla simmetria di asse la retta data

Livello 2

34. (2; –3), $3x + y – 2 = 0$; (1; 5), $2x + 5y = 0$; (–1; 4), $x – 5y + 1 = 0$; (0; 3), $2x + 3y – 4 = 0$
$\left[\left(\frac{7}{5};-\frac{16}{5}\right);\left(-\frac{79}{29};-\frac{125}{29}\right);\left(\frac{79}{13};-\frac{48}{13}\right);\left(-\frac{20}{13};\frac{9}{13}\right)\right]$
35. (–1; 8), $x + y – 1 = 0$; (5; 2), $x – y – 3 = 0$; $\left(\frac{1}{2};-3\right)$, $4x – 3y + 2 = 0$; $\left(-\frac{5}{4};\frac{1}{3}\right)$, $x – 5y + 6 = 0$
$\left[(-7;2);(5;2);\left(-\frac{183}{50};\frac{3}{25}\right);\left(-\frac{58}{39};\frac{79}{52}\right)\right]$
36. (–2; 6), $\frac{2}{3}x – y + 1 = 0$; (–2; 1), $\sqrt{3}x - y + 4 = 0$; $\left(-\frac{1}{2};\sqrt{2}\right)$, $\frac{4}{3}x + \frac{5}{4}y = 0$
$\left[\left(\frac{50}{13};-\frac{36}{13}\right);\left(\frac{2-3\cdot\sqrt{3}}{2};\frac{5-2\cdot\sqrt{3}}{2}\right);\left(\frac{31-960\cdot\sqrt{2}}{962};\frac{240+31\cdot\sqrt{2}}{481}\right)\right]$

Lavoriamo insieme

Determinare la simmetrica della retta di equazione $2x + 5y - 3 = 0$ *rispetto alla retta* $4x + y + 5 = 0$.
Anche in questo caso diversi sono i metodi. Un primo consiste nel considerare due punti a caso sulla prima retta, determinandone i simmetrici rispetto all'asse; poi troveremo la retta passante per questi due punti. Così per esempio scegliamo i punti $P \equiv (-1; 1)$ e $Q \equiv (4; -1)$. Troviamo i simmetrici, applicando le opportune formule stabilite dal Teorema 10: $P' \equiv \left(-\frac{33}{17}; \frac{13}{17}\right), Q' \equiv \left(-\frac{92}{17}; -\frac{57}{17}\right)$. Adesso scriviamo l'equazione della retta contenente P' e Q': $\frac{x + \frac{33}{17}}{-\frac{92}{17} + \frac{33}{17}} = \frac{y - \frac{13}{17}}{-\frac{57}{17} - \frac{13}{17}} \Rightarrow 70x - 59y + 181 = 0$.
Un altro metodo consiste nel sostituire nell'equazione della retta le formule di trasformazione applicate a un generico punto $P \equiv (x; y)$. $s_{4x+y+5=0}: \begin{cases} x' = \frac{x \cdot (1^2 - 4^2) - 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot y - 2 \cdot 4 \cdot 5}{4^2 + 1^2} \\ y' = \frac{-2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot x + y \cdot (4^2 - 1^2) - 2 \cdot 1 \cdot 5}{4^2 + 1^2} \end{cases} = \begin{cases} x' = \frac{-15x - 8y - 40}{17} \\ y' = \frac{-8x + 15y - 10}{17} \end{cases}$. Stavolta non ricaviamo x e y proprio in virtù della simmetria della trasformazione. Abbiamo allora:
$2x + 5y - 3 = 0 \xrightarrow{s_{4x+y+5=0}} = 2 \cdot \frac{-15x - 8y - 40}{17} + 5 \cdot \frac{-8x + 15y - 10}{17} - 3 = 0 \Rightarrow$ $-30x - 16y - 80 - 40x + 75y - 50 - 51 = 0 \Rightarrow 70x - 59y + 181 = 0$. Ovviamente otteniamo lo stesso risultato.

Determinare le simmetriche delle rette r rispetto alle rette s di seguito indicate

Livello 2

37. r: $y = 3x - 1$; s : $y = 3$; r: $y = -2x + 5$; s: $x = -2$; r: $y = 1$; s: $x = -3$ [$3x + y - 7 = 0$; $2x - y + 13$; $y = 1$]
38. r: $x = -4$; s: $y = 2$; r: $3x - y + 2 = 0$, s: $x = y$; r: $-x + 5y = 0$, s: $x - 2y + 3 = 0$ [$x = -4$; $3x - y + 2 = 0$; $17x - 19y + 66 = 0$]
39. r: $x - y + 1 = 0$, s: $x + y = 0$; r: $2x - y = 0$, s: $x + 2y + 5 = 0$; r: $\frac{1}{2}x - y + 1 = 0$, s: $\frac{3}{2}x - \frac{4}{5}y = 0$ $x - y + 1 = 0$; $2x - y = 0$; $641x + 82y - 598 = 0$]
40. r: $-x + \frac{1}{5}y = 0$,s: $3x + \frac{6}{5}y - 1 = 0$; r: $x - \frac{3}{4}y = 0$, s: $4x - 3y + 1 = 0$; r: $3x + \frac{1}{2}y - 1 = 0$, s: $\frac{1}{2}x - 3y + 1 = 0$ [$255x + 363y - 230 = 0$; $4x - 3y + 2 = 0$; $6x + y - 2 = 0$]
41. r: $\sqrt{2}x - y = 0$, s: $x - y + 2 = 0$; r: $x + y - 3 = 0$, s: $x + \sqrt{3}y = 0$ $\left[\sqrt{2}x - 2y + 4 + 2\sqrt{2} = 0; \left(\sqrt{3} - 1\right)x + \left(\sqrt{3} + 1\right)y + 6 = 0\right]$
42. r: $x - \sqrt{2}y = 0$, s: $\sqrt{2}x - 2y + 1 = 0$; $\sqrt{3}x + \left(1 - \sqrt{3}\right)y - 1 = 0$, s: $x + 4y - 1 = 0$ $\left[\sqrt{2}x - 2y + 2 = 0; \left(23\sqrt{3} - 8\right)x + \left(7\sqrt{3} - 15\right)y - 6\sqrt{3} - 9 = 0\right]$

Livello 3

43. Determinare la retta simmetrica di una retta di equazione $y = mx + p$, secondo la simmetria di asse la retta di equazione $y = a$. [$y = -mx + 2a - p$]
44. Determinare la retta simmetrica di una retta di equazione $y = mx + p$, secondo la simmetria di asse la retta di equazione $x = b$. [$y = -mx + 2bm + p$]
45. Affinché una retta generica venga mutata da una simmetria assiale in una retta a essa parallela, cosa deve accadere? [La retta data deve essere parallela all'asse di simmetria]
46. Data la retta di equazione $y = mx + q$, determinare le equazioni delle sue simmetriche rispetto a) all'asse x; b) all'asse y; c) alla prima bisettrice; d) alla seconda bisettrice. $\left[\text{a) } y = -mx - q; \text{ b) } y = -mx + q; \text{ c) } y = \frac{1}{m}x - \frac{q}{m}; \text{ d) } y = \frac{1}{m}x + \frac{q}{m}\right]$
47. Data la retta di equazione $ax + by + c = 0$, determinare le equazioni delle sue simmetriche rispetto

a) all'asse x; b) all'asse y; c) alla prima bisettrice; d) alla seconda bisettrice.

[a) $ax - by + c = 0$; b) $ax - by - c = 0$; c) $bx + ay + c = 0$; d) $bx + ay - c = 0$]

Lavoriamo insieme

Data la retta r di equazione $x + 4y - 1 = 0$, determinare tutte le rette unite nella simmetria di asse r.

Consideriamo una generica retta di equazione $ax + by + c = 0$. Applichiamo a essa la simmetria di asse r: $s_{x+4y-1=0}: \begin{cases} x' = \dfrac{15x-8y+2}{17} \\ y' = \dfrac{8x+15y-8}{17} \end{cases}$, ottenendo: $(15a - 8b) \cdot x + (-8a - 15b) \cdot y + 2a + 8b + 17c = 0$. Dato che questa retta deve essere unita dobbiamo risolvere il sistema: $\begin{cases} a = k\cdot(15a-8b) \\ b = k\cdot(-8a-15b) \\ c = k\cdot(2a+8b+17c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-15k)\cdot a + 8kb = 0 \\ 8ak + (1+15k)\cdot b = 0 \\ 2ak + 8bk + (17k-1)\cdot c = 0 \end{cases}$ con k numero reale, infatti due equazioni coincidono se hanno i coefficienti proporzionali. Il sistema è omogeneo, ha perciò soluzioni diverse da quella banale solo se il determinante della matrice incompleta è nullo, cioè se $\begin{vmatrix} 1-15k & 8k & 0 \\ 8k & 1+15k & 0 \\ 2k & 8k & 17k-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (17k+1)^2 \cdot (17k-1) = 0 \Rightarrow k = \pm\dfrac{1}{17}$. Il sistema diviene perciò $k = -\dfrac{1}{17} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{8b-15a}{17} \\ b = \dfrac{8a+15b}{17} \\ c = -\dfrac{2a+8b+17c}{17} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -c \\ b = -4c \end{cases}$ e $k = \dfrac{1}{17} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{15a-8b}{17} \\ b = -\dfrac{8a+15b}{17} \\ c = \dfrac{2a+8b+17c}{17} \end{cases} \Rightarrow a = -4b$, $c = c$. Quindi vi sono le seguenti rette unite: $-cx - 4cy + c = 0 \Rightarrow x + 4y - 1 = 0$, cioè lo stesso asse, e le rette: $-4bx + by + c = 0 \Rightarrow 4x - y + k = 0$, cioè il fascio di rette perpendicolari all'asse.

Determinare le equazioni di tutte le rette unite, diverse dallo stesso asse, nella simmetria di asse la retta r seguente

Livello 3

48. $x = h$; $y = k$; $x = y$; $y = -x$; $3x - y + 1 = 0$ [$y = p$; $x = p$; $x + y + p = 0$; $x - y + p = 0$; $x + 3y + p = 0$]

49. $5x + 2y - 3 = 0$; $7x + y - 2 = 0$; $x + y - 1 = 0$; $\sqrt{2}\,x + y - 1 = 0$; $3x - \sqrt{5}\,y + 1 = 0$

[$2x - 5y + p = 0$; $x - 7y + p = 0$; $x - y + p = 0$; $x - \sqrt{2}\,y + p = 0$; $\sqrt{5}\,x + 3y + p = 0$]

Leggi delle simmetrie centrali

Lavoriamo insieme

Determinare il simmetrico del punto $A \equiv (1; -4)$, rispetto al centro $C \equiv (-1; 3)$.

Le leggi sono: $s_{(-1,3)}: \begin{cases} x' = -2 - x \\ y' = 6 - y \end{cases}$, pertanto: $A \equiv (1; -4) \xrightarrow{s_{(-1,3)}} A' \equiv (-2-1; 6-(-4)) \equiv (-3; 10)$. Naturalmente A è simmetrico di A' rispetto a C: $A' \equiv (-3; 10) \xrightarrow{s_{(-1,3)}} A \equiv (-2+3; 6-10) \equiv (1; -4)$.

Determinare i trasformati dei seguenti punti mediante le simmetrie di centro C indicato

Livello 1

50. $(2; 0)$, $C \equiv (-1; -2)$; $(-1; 4)$, $C \equiv (-2; -3)$; $(1; 5)$, $C \equiv (-1; 3)$ [$(-4; -4)$; $(-3; -10)$; $(-3; 1)$]

51. $(3; -7)$, $C \equiv (0; -4)$; $(3; -1)$, $C \equiv (4; -5)$; $(5; -2)$, $C \equiv (1; 4)$ [$(-3; -1)$; $(5; -9)$; $(-3; 10)$]

52. $(0; 8)$, $C \equiv (3; 1)$; $(7; 1)$, $C \equiv (4; 0)$; $(-1; -1)$, $C \equiv (-4; 0)$ [$(6; -6)$; $(1; -1)$; $(-7; 1)$]

53. (5; –1), $C \equiv (4; -4)$; $\left(\frac{1}{2};-3\right)$, $C \equiv (5; -1)$; $\left(0;-\frac{3}{4}\right)$, $C \equiv (-1; 3)$ $\left[(3;-7);\left(\frac{19}{2};1\right)\left(-2;\frac{27}{4}\right)\right]$

54. $\left(-\frac{1}{2};-\frac{4}{3}\right)$, $C \equiv (0; 3)$; $\left(1;\frac{1}{4}\right), C \equiv \left(\frac{1}{2};-1\right)$; $\left(-2;\frac{4}{5}\right), C \equiv \left(-\frac{3}{2};\frac{2}{3}\right)$ $\left[\left(\frac{1}{2};\frac{22}{3}\right);\left(0;-\frac{9}{4}\right);\left(-1;\frac{8}{15}\right)\right]$

55. (0; 0), $C \equiv (\sqrt{2}; 1-\sqrt{3})$; $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};2\right), C \equiv \left(-\frac{3}{5};-2\right)$ $\left[\left(2\sqrt{2};-2-2\sqrt{3}\right);\left(\frac{-5\cdot\sqrt{3}-12}{10};-6\right)\right]$

56. $\left(\frac{5}{4};-\frac{1}{3}\right), C \equiv \left(\sqrt{2}-1;3\right)$; $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2};\frac{1}{\sqrt{3}-1}\right), C \equiv \left(1;-\frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{2}{3};-\sqrt{5}\right), C \equiv \left(1+\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)$

$\left[\left(\frac{8\cdot\sqrt{2}-13}{4};\frac{19}{3}\right);\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2};-\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right);\left(\frac{4+6\cdot\sqrt{2}}{3};2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{5}+2\right)\right]$

Trasformare i seguenti poligoni secondo la simmetria di centro C indicato. Verificare poi che il poligono trasformato è isometrico a quello di partenza, calcolandone le misure dei lati

Livello 2

57. $A \equiv (0; 1)$, $B \equiv (-1; 1)$, $D \equiv (-2; -1)$; $C \equiv (-1; 5)$ [$A' \equiv (-2; 9)$, $B' \equiv (-1; 9)$, $D' \equiv (0; 11)$]

58. $A \equiv (2; 1)$, $B \equiv (-1; 1)$, $D \equiv (-3; -1)$, $E \equiv (0; 5)$; $C \equiv (3; -1)$
[$A' \equiv (4; -3)$, $B' \equiv (7; -3)$, $D' \equiv (9; -1)$, $E' \equiv (6; -7)$]

59. $A \equiv (-1; 1)$, $B \equiv (1; -1)$, $D \equiv (-2; -3)$, $E \equiv (3; 3)$; $C \equiv (0; 2)$
[$A \equiv (1; 3)$, $B' \equiv (-1; 5)$, $D' \equiv (2; 7)$, $E' \equiv (-3; 1)$]

60. $A \equiv (0;2)$, $B \equiv (3; 4)$, $D \equiv (5; -2)$, $E \equiv (-1; -3)$; $C \equiv (2; 3)$ [$A' \equiv (4;4)$, $B' \equiv (1;2)$, $D' \equiv (-1; 8)$, $E' \equiv (5;3)$]

61. $A \equiv (-1; 4)$, $B \equiv (0; 1)$, $D \equiv (-3; 2)$, $E \equiv (4; -5)$; $C \equiv (-1; -2)$
[$A' \equiv (-1; -8)$, $B' \equiv (-2; -5)$, $D' \equiv (1; -6)$, $E' \equiv (-6; 1)$]

Lavoriamo insieme

Trovare, se esistono, le coordinate del centro della simmetria che trasforma $A \equiv (3; 1)$ *in* $A' \equiv (-1; 2)$.
Applichiamo una generica simmetria centrale al punto A, ottenendo: $A \equiv (3;1) \xrightarrow{s_c} A' \equiv (2a-3;2b-1) \Rightarrow$,
uguagliamo questo risultato alle coordinate di A': $\Rightarrow \begin{cases} 2a-3=-1 \\ 2b-1=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\frac{3}{2} \end{cases}$. Ecco il centro della simmetria.

Determinare le coordinate dei centri delle simmetrie che trasformano i punti seguenti nei loro corrispondenti accentati

Livello 2

62. (1; 1) → (–2; 0) ; (–2; 3) → (4; 1) ; (–3; 4) → (5; 0) ; (3; 0) → (4; –2) $\left[\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right);(1;2);(1;2);\left(\frac{7}{2};-1\right)\right]$

63. (7; 2) → (–3; 3) ; (1; 2) → (–3; 5) ; (1; 4) → (–7; 2) (2; 0) → (–4; –3)
$\left[\left(2;\frac{5}{2}\right);\left(-1;\frac{7}{2}\right);(-3;3);\left(-1;-\frac{3}{2}\right)\right]$

64. (2; 1) → (–3; –4) ; $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right) \to \left(\frac{1}{4};-1\right)$; $\left(\sqrt{2};1\right) \to \left(-\sqrt{2};-5\right)$; $\left(1+\sqrt{2};0\right) \to \left(1-\sqrt{2};-2\right)$
$\left[\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right);\left(\frac{3}{8};-\frac{1}{3}\right);(0;-2);(1;-1)\right]$

65. $\left(\frac{3}{8};-\frac{5}{3}\right) \to \left(-\frac{5}{7};0\right)$; $\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right) \to \left(2-\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ $\left[\left(-\frac{119}{112};-\frac{5}{6}\right);\left(1;\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right]$

Ai triangoli seguenti applicare nell'ordine le trasformazioni indicate. Determinare poi la trasformazione

che permette di passare dalla terza alla prima figura

Livello 2

66. $A \equiv (1;\ 1)$, $B \equiv (-3;\ 0)$, $C \equiv (1;\ -4)$; $s_{(-3;\ 0)}$, $s_{(-7;\ 4)}$ $\left[A'' \equiv (-7;9), B'' \equiv (-11;8), C'' \equiv (-7;4); \begin{cases} x = x''+8 \\ y = y''-8 \end{cases}\right]$

67. $A \equiv (5;\ 3)$, $B \equiv (1;\ -2)$, $C \equiv (3;\ -1)$; $s_{(1;\ -1)}$, $t_{(2;\ -1)}$ $\left[A'' \equiv (-1;-6),\ B'' \equiv (3;-1), C'' \equiv (1;-2); \begin{cases} x = 4-x'' \\ y = -3-y'' \end{cases}\right]$

68. $A \equiv (0;\ 0)$, $B \equiv (-4;\ 4)$, $C \equiv (3;\ -2)$; $t_{(2;\ -4)}$, $s_{(-1;\ 3)}$ $\left[A \equiv (-4;10), B \equiv (0;6), C \equiv (-7;12); \begin{cases} x = -4-x'' \\ y = 10-y'' \end{cases}\right]$

69. $A \equiv (2;\ 0)$, $B \equiv (-4;\ 1)$, $C \equiv (0;\ -3)$; $s_{(-1;\ 2)}$, $s_{x\ +\ 2y=0}$

$$\left[A''\left(-\frac{28}{5};\frac{4}{5}\right), B'' \equiv \left(-\frac{6}{5}; -\frac{17}{5}\right), C'' \equiv \left(-\frac{34}{5}; -\frac{13}{5}\right); \begin{cases} x = \dfrac{-3x''+4y''-10}{5} \\ y = \dfrac{4x''+3y''+20}{5} \end{cases}\right]$$

70. $A \equiv (4;\ 0)$, $B \equiv (-1;\ 6)$, $C \equiv (3;\ -1)$; $s_{(x\ -\ 3y\ +2\ =\ 0)}$, $s_{(3;\ -1)}$

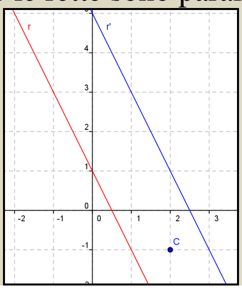
$$\left[A''\left(\frac{16}{5};-\frac{28}{5}\right), B'' \equiv \left(\frac{54}{5}; -\frac{37}{5}\right), C'' \equiv \left(\frac{23}{5}; -\frac{29}{5}\right); \begin{cases} x = \dfrac{-4x''-3y''+16}{5} \\ y = \dfrac{-3x''+4y''+32}{5} \end{cases}\right]$$

Livello 3

71. Esiste una simmetria centrale che muta il punto $P \equiv (a;\ b)$ nel punto $P' \equiv (a;\ c)$, quali che siano i numeri reali a, b e c con $b \neq c$? Giustificare la risposta. $\left[Sì: \begin{cases} x' = 2a-x \\ y' = b+c-y \end{cases}\right]$

Lavoriamo insieme

Trovare l'equazione della simmetrica della retta r: $2x + y - 1 = 0$, *rispetto alla simmetria di centro* $C \equiv (2;-1)$.
Intanto vediamo se il centro sta sulla retta, nel qual caso la retta è unita. Poiché si ha: $2 \cdot 2 - 1 - 1 \neq 0$, $C \notin r$.
Date le leggi della simmetria: $\begin{cases} x' = 4-x \\ y' = -2-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4-x' \\ y = -2-y' \end{cases}$, sostituiamo nell'equazione di *r*. r': $2 \cdot (4 - x') + (-2 - y') = 0 \Rightarrow 2x + y - 6 = 0$. Ovviamente le rette sono parallele, come mostrato in figura.



Determinare le equazioni delle simmetriche delle rette seguenti rispetto al centro C indicato

Livello 2

72. $y = 3x + 1$; $C \equiv (2; -3)$; $2x + y - 2 = 0$, $C \equiv (2; -3)$; $2x - 3y = 0$, $C \equiv (1; 4)$; $x + y - 7 = 0$, $C \equiv (1; -2)$
[$y = 3x + 19$; $2x + y = 0$; $2x - 3y + 20 = 0$; $x + y + 9 = 0$]

73. $4x + y - 5 = 0$, $C \equiv (0; -1)$; $-x + y + 6 = 0$, $C \equiv (3; 0)$; $\frac{1}{2}x - y + 3 = 0, C \equiv (-2;1)$
[$4x + y + 7 = 0$; $x - y = 0$; $x - 2y + 2 = 0$]

74. $x - 5y + 4 = 0$, $C \equiv \left(-\frac{1}{4};3\right)$; $\frac{5}{2}x - \frac{3}{4}y = 0, C \equiv \left(-\frac{4}{5};0\right)$; $y + \frac{4}{7} = 0, C \equiv \left(-\frac{3}{2};\frac{2}{3}\right)$
[$2x - 10y + 53 = 0$; $10x - 3y + 16 = 0$; $21y - 40 = 0$]

75. $\sqrt{2}\,x - 3y + 1 = 0$, $C \equiv (-4; 0)$; $3x - 7y = 0$, $C \equiv \left(\sqrt{5}+1;1-\sqrt{3}\right)$

[$\sqrt{2}\,x - 3y + 8\sqrt{2} - 1 = 0$; $3x - 7y - 14\sqrt{3} - 6\sqrt{5} + 8 = 0$]

Livello 3

76. Determinare le equazioni di tutte le rette unite nella simmetria di centro i punti indicati:

(3; 2) ; (0; 4) ; (–1; 2) ; (0; 0) ; $(h; h)$, $h \in \mathbb{R}$; $(h; -h)$, $h \in \mathbb{R}$

[$y - 2 = m\cdot(x - 3)$; $y - 4 = mx$; $y - 2 = m(x + 1)$; $y = mx$; $y - h = m \cdot (x - h)$; $y + h = m \cdot (x - h)$]

77. La composizione di trasformazioni geometriche è interna nell'insieme delle simmetrie assiali di assi fra loro paralleli? [No, in generale il risultato è una traslazione]

78. La composizione di trasformazioni geometriche è interna nell'insieme delle isometrie dirette? [Sì]

79. La composizione di trasformazioni geometriche è interna nell'insieme delle isometrie inverse?

[No, in generale il risultato è una isometria diretta]

80. Determinare le leggi di composizione di una simmetria di centro $C \equiv (a; b)$ con una simmetria di asse la retta di equazione $x = h$. L'isometria ottenuta è di uno dei due tipi componenti? La detta composizione è commutativa? $\left[s_{x=h} \circ s_{(a,b)} : \begin{cases} x' = x + 2a - 2h \\ y' = 2b - y \end{cases} ; s_{(a,b)} \circ s_{x=h} : \begin{cases} x' = x - 2a + 2h \\ y' = 2b - y \end{cases} ; \text{no; no} \right]$

81. Determinare le leggi di composizione di una simmetria di centro $C \equiv (a; b)$ con una simmetria di asse la retta di equazione $y = h$. L'isometria ottenuta è di uno dei due tipi componenti? La detta composizione è commutativa? $\left[s_{y=h} \circ s_{(a,b)} : \begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y + 2b - 2h \end{cases} ; s_{(a,b)} \circ s_{y=h} : \begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = y - 2b + 2h \end{cases} ; \text{no; no} \right]$

82. Determinare le leggi di composizione di una simmetria di centro $C \equiv (a; b)$ con una simmetria di asse la retta di equazione $x = y$. L'isometria ottenuta è di uno dei due tipi componenti? La detta composizione è commutativa? $\left[s_{y=x} \circ s_{(a,b)} : \begin{cases} x' = 2a - y \\ y' = 2b - y \end{cases} ; s_{(a,b)} \circ s_{y=x} : \begin{cases} x' = 2b - y \\ y' = 2a - x \end{cases} ; \text{no; no} \right]$

83. Determinare le leggi di composizione di una simmetria di centro $C \equiv (a; b)$ con una simmetria di asse la retta di equazione $x = -y$. L'isometria ottenuta è di uno dei due tipi componenti? La detta composizione è commutativa? $\left[s_{y=-x} \circ s_{(a,b)} : \begin{cases} x' = y + 2a \\ y' = x + 2b \end{cases} ; s_{(a,b)} \circ s_{y=-x} : \begin{cases} x' = y - 2b \\ y' = x - 2a \end{cases} ; \text{no; no} \right]$

84. Determinare le leggi di composizione di una simmetria di centro $C \equiv (a; b)$ con una traslazione di vettore $\vec{v} \equiv (v, w)$. L'isometria ottenuta è di uno dei due tipi componenti? La detta composizione è commutativa? $\left[t_{(v,w)} \circ s_{(a,b)} : \begin{cases} x' = 2a - v - x \\ y' = 2b - w - y \end{cases} ; s_{(a,b)} \circ t_{(v,w)} : \begin{cases} x' = 2a + v - x \\ y' = 2b + w - y \end{cases} ; \text{sì è una simmetria centrale; no} \right]$

85. Dimostrare il Teorema 15.

86. Dimostrare il Teorema 16.

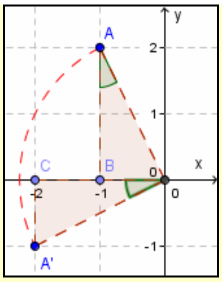
87. Dimostrare il Teorema 17.

88. Dimostrare il Teorema 18.

Leggi delle rotazioni

Chiudiamo il paragrafo cercando le leggi delle rotazioni. Stavolta non abbiamo gli strumenti per considerarne le leggi rispetto ad un angolo generico, quindi tratteremo solo angoli multipli di 90°.

Esempio 19



In figura abbiamo ruotato di 90° in senso antiorario il punto A rispetto all'origine degli assi. Per determinare le relazioni che legano le coordinate di A con quelle di A', abbiamo costruito i due triangoli rettangoli ABO e $A'CO$, i cui cateti rappresentano, in valore assoluto, le coordinate di A e A'. Facilmente si prova che i due triangoli sono isometrici per il criterio di isometria dei triangoli rettangoli, dato che hanno isometrici: l'ipotenusa (raggi di una stessa circonferenze), gli angoli acuti $O\hat{A}B, A'\hat{O}C$, perché entrambi complementari di $B\hat{O}A$. Quindi possiamo scrivere: $\overline{AB} = \overline{OC}$, $\overline{BO} = \overline{A'C}$. Le precedenti uguaglianze scritte in termini di coordinate divengono: $\begin{cases} y_A = -x_{A'} \\ x_A = y_{A'} \end{cases}$.

Visti i risultati dell'esempio possiamo enunciare il seguente teorema, di cui lasciamo per esercizio la dimostrazione.

Teorema 20

Le leggi di una rotazione rispetto all'origine e di 90° sono: $r_{90°}: \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$.

Utilizzando analoghe tecniche possono provarsi i seguenti due teoremi.

Teorema 21

Le leggi di una rotazione rispetto all'origine e di 270° sono: $r_{270°}: \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$.

Teorema 22

Una rotazione di 180° rispetto a un centro C equivale a una simmetria di centro C.

Componendo poi una rotazione di centro l'origine con una traslazione, possiamo ottenere le generiche leggi di una rotazione di 90° (o 270°) e centro generico.

Teorema 23

Le leggi della rotazione di 90° o 270° di centro $(a; b)$ sono: $r_{90°}^{C}: \begin{cases} x' = -y + a + b \\ y' = x - a + b \end{cases}$ e $r_{270°}^{C}: \begin{cases} x' = y + a - b \\ y' = -x + a + b \end{cases}$.

Valgono inoltre i seguenti teoremi.

Teorema 24

L'inversa di una rotazione di α° rispetto a un centro $C \equiv (a; b)$ è una rotazione di (– α°) rispetto a C.

Teorema 25

La composizione di due rotazioni di $\alpha°$ e $\beta°$, attorno allo stesso centro $C \equiv (a; b)$ è una rotazione di $(\alpha° + \beta°)$ e centro C.

Corollario 2

L'insieme delle rotazioni attorno a uno stesso centro, rispetto all'operazione di composizione di trasformazioni è un gruppo abeliano.

Lasciamo per esercizio la dimostrazione, limitata ad angoli di 90° e di 270°, dei precedenti teoremi, mentre rimandiamo a una successiva Unità la dimostrazione del seguente risultato.

Teorema 26

In una rotazione di centro C, tutte le circonferenze di centro C sono unite.

Concludiamo con le generiche equazioni di un'isometria, che non dimostreremo.

Teorema 27

Le leggi di una generica isometria piana diretta sono: $\iota: \begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + d \end{cases}$, quelle di un'isometria inversa sono $\iota: \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = bx - ay + d \end{cases}$, in entrambi i casi vale la condizione: $a^2 + b^2 = 1$.

Esempio 20

- Verifichiamo che le leggi di una traslazione $t: \begin{cases} x' = x + m \\ y' = y + n \end{cases}$ rientrano in quelle di una generica isometria diretta in cui $a = 1$; $b = 0$ e $1^2 + 0^2 = 1$.
- Analogamente le leggi di una generica simmetria assiale $s_{ax+by+c=0}: \begin{cases} x' = \dfrac{x \cdot (b^2 - a^2) - 2aby - 2ac}{a^2 + b^2} \\ y' = \dfrac{-2abx + y \cdot (a^2 - b^2) - 2bc}{a^2 + b^2} \end{cases}$ sono quelle di un'isometria inversa.

Concludiamo con un ultimo intuitivo risultato.

Corollario 3

Un'isometria conserva il parallelismo fra rette, cioè muta rette parallele in rette parallele.
Dimostrazione omessa

Esempio 21

- Naturalmente non stiamo dicendo che una retta e la sua trasformata sono parallele in qualsiasi isometria, ma che se due rette sono parallele anche le loro trasformate sono parallele. Per certe isometrie, come per esempio per le traslazioni, invece una retta è trasformata in una a essa parallela. Così la retta $y = x - 3$ viene trasformata dalla traslazione di leggi $t_{(1,-2)}: \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 2 \end{cases}$, nella retta di equazione: $y + 2 = x - 1 - 3 \Rightarrow y = x - 6$.
- Non accade lo stesso se applichiamo alla stessa retta la simmetria $s_{x=2}: \begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = y \end{cases}$, dato che la trasformata avrà equazione: $y = 2 - x - 3 \Rightarrow y = -x - 1$; che è perpendicolare e non parallela alla retta iniziale.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Trasformare il punto P ≡ (2; –3), *applicandogli la rotazione di centro il punto C* ≡ (1; –2) *e angolo* 90°, *ottenendo P'; a quest'ultimo punto applichiamo poi la rotazione di centro P e angolo* 270°.
Ricordiamo le leggi della rotazione attorno a un dato centro e di angoli rispettivi 90° e 270°, come stabiliti dal Teorema 22: $r_{90°}^C : \begin{cases} x' = -y + a + b \\ y' = x - a + b \end{cases}$ e $r_{270°}^C : \begin{cases} x' = y + a - b \\ y' = -x + a + b \end{cases}$. Nel nostro caso sono: $r_{90}^C : \begin{cases} x' = -y - 1 \\ y' = x - 3 \end{cases}$ e $r_{270}^P : \begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = -x - 5 \end{cases}$. Infine: $P \equiv (2; -3) \xrightarrow{r_{90}^C} P' \equiv (-3-1;\ 2-3) \equiv (-4; -1) \xrightarrow{r_{270}^P} P'' \equiv (-1-1;\ 4-5) \equiv (-2; -1)$.

Determinare i trasformati dei seguenti punti mediante le rotazioni di centro C e angolo α

Livello 1

1. (2; 0), C ≡ (–1; –2), α = 90° ; (–1; 4), C ≡ (–2; –3), α = 90° ; (–1; 3), C ≡ (1; 5), α = 270° [(–3; 1); (–9; –2); (–1; 7)]
2. (3; –7), C ≡ (0; –4), α = 90° ; (3; –1), C ≡ (4; –5), α = 180°; (5; –2), C ≡ (1; 4), α = 270° [(3; –1); (5; –9); (–5; 0)]
3. $\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{4}\right)$, C ≡ (5; –1), α = 270° ; $\left(0; \frac{3}{4}\right), C \equiv \left(-\frac{3}{2}; 3\right)$, α = 90°; $\left(\frac{1}{2}; -\frac{4}{5}\right), C \equiv \left(-\frac{3}{2}; 3\right)$, α = 270° $\left[\left(\frac{19}{4}; \frac{7}{2}\right); \left(\frac{3}{4}; -\frac{9}{2}\right); \left(-\frac{53}{10}; 1\right)\right]$
4. $\left(0; -\frac{1}{4}\right)$, C ≡ (0; 0), α = 180°; (0;0), $C \equiv (1+\sqrt{2}; -1)$, α = 90°; $\left(\sqrt{3}; \frac{4}{5}\right), C \equiv \left(\frac{3}{2}; \frac{2}{3}\right)$, α = 270° $\left[\left(0; \frac{1}{4}\right); \left(\sqrt{2}; -2-\sqrt{2}\right); \left(\frac{49}{30}; \frac{13-6\cdot\sqrt{3}}{6}\right)\right]$

Trasformare i seguenti poligoni secondo la rotazione di centro C e angolo α indicati. Verificare poi che il poligono trasformato è isometrico a quello di partenza, calcolandone le misure dei lati.

Livello 1

5. A ≡ (0; 1), B ≡ (–1; 1), D ≡ (–2; –1); C ≡ (0; 0); α = 90°[A' ≡ (–1; 0), B' ≡ (–1; –1), C' ≡ C, D' ≡ (1; –2)]
6. A ≡ (2; 1), B ≡ (–1; 1), D ≡ (–3; –1), E ≡ (0; 5); C ≡ (–1; 0), α = 270° [A' ≡ (0; –3), B' ≡ (0; 0), D' ≡ (–2; 2), E' ≡ (4; –1)]
7. A ≡ (4; 0), B ≡ (–1; 3), D ≡ (2; –1); C ≡ (–1; 2); α = 90° [A' ≡ (1; 7), B' ≡ (–2; 2), D' ≡ (2; 5)]
8. A ≡ (–2; 3), B ≡ (3; 0), D ≡ (0; 1); C ≡ (–2; 1); α = 270° [A' ≡ (0; 1), B' ≡ (–3; –4), D' ≡ (–2; –1)]
9. A ≡ (0; –3), B ≡ (1; –2), D ≡ (–1; 4); C ≡ (–2; 3); α = 90° [A' ≡ (4; 5), B' ≡ (3; 6), D' ≡ (–3;4)]

Livello 2

10. Verificare che applicando al poligono di vertici A ≡ (–4;–1), B ≡ (–3;1), C ≡ (–2;2), D ≡ (1;0) le successive rotazioni di 90° rispetto ai centri E ≡ (5; 2) e F ≡ (–2; 1), si ottiene lo stesso poligono che se applicassimo la simmetria centrale di centro G ≡ (1; 5).
[A' ≡ (8;–7), B' ≡ (6;–6), C' ≡ (5;–5), D' ≡ (7;–2); A'' ≡ (6;11), B'' ≡ (5;9), C'' ≡ (4;8), D'' ≡ (1;10)]

Tutti i quesiti seguenti si riferiscono al poligono di vertici A' ≡ (8;–7), B' ≡ (6;–6), C' ≡ (5;–5), D' ≡ (7;–2)

11. Applicare la traslazione di vettore $\vec{v}$ ≡ (2; 3). Determinare poi le leggi della trasformazione composizione. [A'' ≡ (10; –4), B'' ≡ (8; –3), C'' ≡ (7; –2), D'' ≡ (9; 1); $\begin{cases} x'' = 9 - y \\ y'' = x \end{cases}$]
12. Applicare la simmetria di asse la retta di equazione x = 3. Determinare infine le leggi della trasforma-

zione composizione. [$A'' \equiv (-2; -7)$, $B'' \equiv (0; -6)$, $C'' \equiv (1; -5)$, $D'' \equiv (-1; -2)$; $\begin{cases} x'' = y - 1 \\ y'' = x - 3 \end{cases}$]

13. Applicare la simmetria di asse la retta di equazione $y = 1$. Determinare infine le leggi della trasformazione composizione. [$A'' \equiv (8; 9)$, $B'' \equiv (6; 8)$, $C'' \equiv (5; 7)$, $D'' \equiv (7; 4)$; $\begin{cases} x'' = 7 - y \\ y'' = 5 - x \end{cases}$]

14. Applicare la simmetria di centro $C \equiv (1; -3)$. Determinare infine le leggi della trasformazione composizione. [$A'' \equiv (-6; 1)$, $B'' \equiv (-4; 0)$, $C'' \equiv (-3; -1)$, $D'' \equiv (-5; -4)$; $\begin{cases} x'' = y - 5 \\ y'' = -x - 3 \end{cases}$]

15. Applicare la simmetria di asse la retta di equazione $2x + y - 1 = 0$. Determinare infine le leggi della trasformazione composizione.

$$\left[A'' \equiv \left(\frac{8}{5}, -\frac{51}{5}\right),\ B'' \equiv (2, -8),\ C'' \equiv \left(\frac{9}{5}, -\frac{33}{5}\right),\ D'' \equiv \left(-\frac{9}{5}, -\frac{32}{5}\right);\ \begin{cases} x'' = -\dfrac{4x - 3y + 5}{5} \\ y'' = \dfrac{3x + 4y - 35}{5} \end{cases} \right]$$

Livello 3

16. Applicare al poligono di vertici $A \equiv (1; -1)$, $B \equiv (2; 1)$, $C \equiv (-1; 2)$, $D \equiv (0; 3)$ le successive rotazioni di 90° rispetto ai centri $E \equiv (-1; 3)$ e $F \equiv (3; -1)$. Determinare poi il centro della simmetria centrale che applicata ad $ABCD$ fornisce lo stesso poligono. [$A' \equiv (3; 5)$, $B' \equiv (1; 6)$, $C' \equiv (0; 3)$, $D' \equiv (-1; 4)$; $A'' \equiv (-3; -1)$, $B'' \equiv (-4; -3)$, $C'' \equiv (-1; -4)$, $D'' \equiv (-2; -5)$; $(-1;-1)$]

17. Determinare l'inversa della generica rotazione di 90°, attorno al centro $C \equiv (a; b)$.

$$\left[r^{-1}_{(a,b),90} \begin{cases} x' = y + a - b \\ y' = -x + a + b \end{cases} \right]$$

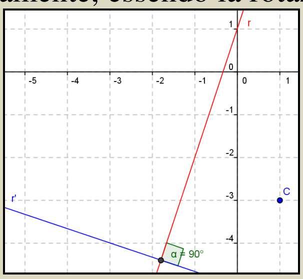
18. Determinare l'inversa della generica rotazione di 270°, attorno al centro $C \equiv (a; b)$.

$$\left[r^{-1}_{(a,b),270} \begin{cases} x' = -y + a + b \\ y' = x - a + b \end{cases} \right]$$

Lavoriamo insieme

Determinare la rotazione della retta $y = 3x + 1$, *rispetto al centro* $C \equiv (1; -3)$ *e di angolo* $\alpha = 90°$.

Le leggi sono: $r_{90}^{C}: \begin{cases} x' = -y + 1 - 3 \\ y' = x - 3 - 1 \end{cases} \Rightarrow r_{90}^{C}: \begin{cases} x' = -y - 2 \\ y' = x - 4 \end{cases}$, da cui ricaviamo: $\begin{cases} x = y' + 4 \\ y = -x' - 2 \end{cases}$. Sostituiamo: r: $-x - 2 = 3 \cdot (y + 4) + 1 \Rightarrow x + 3y + 15 = 0$. Ovviamente, essendo la rotazione di 90°, le rette sono fra loro perpendicolari, come mostrato in figura.



Determinare le equazioni delle rette date ruotate attorno al centro e di angolo indicati

Livello 3

19. $x + 4y - 2 = 0$, $(0; 0)$, 270° ; $2x + y = 0$, $(-1; 0)$, 90° ; $4x - y - 2 = 0$, $(-2; -3)$, 90° [$4x - y - 2 = 0$; $x - 2y + 3 = 0$; $x + 4y + 7 = 0$]

20. $\left(1 - \sqrt{3}\right)x - 2y = 0$, $\left(0; 1 + \sqrt{2}\right)$, 90°; $ax + by + c = 0$, $(0; 0)$, 270°; $ax + by + c = 0$, $(0; 0)$, 90°

$$\left[2x + \left(1 - \sqrt{3}\right)y - 3\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{3} - 3 = 0; bx - ay + c = 0; bx - ay - c = 0 \right]$$

21. $3x - 4y = 0$, $(-4; 4)$, 270°; $\frac{2}{3}x - y + 1 = 0, \left(-\frac{5}{3};0\right)$, 270° ; $x - 4y + 7 = 0$, $\left(\sqrt{2};-1\right)$, 270°

[$4x + 3y + 32 = 0$; $9x + 6y + 16 = 0$; $4x + y - 10 - 5\sqrt{2} = 0$]

22. Dimostrare il Teorema 20.
23. Dimostrare il Teorema 21.
24. Dimostrare il Teorema 22.
25. Dimostrare il Teorema 23.
26. Dimostrare il Teorema 24.
27. Dimostrare il Teorema 25.
28. La composizione di trasformazioni geometriche è interna nell'insieme delle rotazioni di uguale centro? [Sì]
29. Determinare le leggi di composizione di due rotazioni di uguale centro, $C \equiv (a; b)$, e ampiezza, 90°. Il risultato è ancora una rotazione? Giustificare la risposta. [Sì, una rotazione di 180° attorno a C]
30. CAS Determinare le leggi di composizione di due rotazioni di uguale centro, $C \equiv (a; b)$, e ampiezze 90° e 270°. Il risultato è ancora una rotazione? Giustificare la risposta. [Identità]
31. CAS Determinare le leggi di composizione di due rotazioni di centri $C \equiv (a; b)$ e $C' \equiv (a', b')$ e ampiezza 90° per entrambe. Il risultato è ancora una rotazione? Giustificare la risposta.

$$\left[\text{Sì}, \alpha = 180°, C'' \equiv \left(\frac{a-b+a'+b'}{2}; \frac{a+b-a'+b'}{2}\right)\right]$$

32. CAS Determinare le leggi di composizione di una rotazione di 90° rispetto al centro $C \equiv (a; b)$ con una composizione di 90°, rispetto al centro $C' \equiv (-b, -a)$. Che tipo di isometria otteniamo? [Rotazione di 180° o simmetria di centro $C'' \equiv (-b, b)$]

Lavoriamo insieme

Dato il poligono di vertici $A \equiv (-1; 2)$, $B \equiv (3; 0)$, $C \equiv (0; 4)$, $D \equiv (2; -3)$, *trovare il suo trasformato mediante la composizione fra la traslazione di vettore* $\vec{v} \equiv (-4;\ 3)$ *e la simmetria di asse* $x = 2$. *Infine determinare la legge della trasformazione composizione.*

Si ha: $A \xrightarrow{t} A' \equiv (-1 - 4; 2 + 3) \equiv (-5; 5)$; $B \xrightarrow{t} B' \equiv (3 - 4; 0 + 3) \equiv (-1 ; 3)$; $C \xrightarrow{t} C' \equiv (-4; 7)$; $D \xrightarrow{t} D' \equiv (-2; 0)$. Adesso applichiamo la simmetria: $A' \xrightarrow{s} A'' \equiv (4 - (-5); 5) \equiv (9; 5)$; $B' \xrightarrow{s} B'' \equiv (4 - (-1); 3) \equiv (5 ; 3)$; $C' \xrightarrow{s} C'' \equiv (4 - (-4); 3) \equiv (8; 7)$; $D' \xrightarrow{s} D''$ $(4 - (-2); 3) \equiv (6; 0)$. Determiniamo le leggi generali: $(x; y) \xrightarrow{t} (x - 4; y + 3) \xrightarrow{s} (4 - (x - 4); y + 3) = (-x + 8; y + 3)$.

Quindi la composizione ha leggi $t_{(4,-3)} \circ s_{x=2} : \begin{cases} x'' = 8 - x \\ y'' = y + 3 \end{cases}$.

Ai poligoni di vertici seguenti, applicare la trasformazione τ ***indicata; al poligono così ottenuto applicare la trasformazione*** τ'. ***Determinare infine le leggi delle trasformazioni*** $\tau' \circ \tau$, $\tau \circ \tau'$

Livello 2

33. $A \equiv (-3; 4)$, $B \equiv (3; 0)$, $C \equiv (2; -1)$, $D \equiv (1; 1)$; $\tau = s_{y=5}$, $\tau' = r_{O,\,90°}$

$$\left[A'' \equiv (-6;-3), B'' \equiv (-10;3), C'' \equiv (-11;2), D'' \equiv (-9;1); \begin{cases} x'' = y - 10 \\ y'' = x \end{cases}; \begin{cases} x'' = -y \\ y'' = 10 - x \end{cases}\right]$$

34. $A \equiv (4; 1)$, $B \equiv (-3; 2)$, $C \equiv (1; 0)$, $D \equiv (2; 4)$ $\tau = r_{O,\,270°}$, $\tau' = s_{x=4}$

$$\left[A'' \equiv (7;-4), B'' \equiv (6;3), C'' \equiv (8;-1), D'' \equiv (6;-2); \begin{cases} x'' = 8 - y \\ y'' = -x \end{cases}; \begin{cases} x'' = y \\ y'' = x - 8 \end{cases}\right]$$

35. $A \equiv (1; 2)$, $B \equiv (3; -2)$, $C \equiv (-3; 1)$, $D \equiv (0; -4)$; $\tau = s_{x=5}$, $\tau' = r_{(2;-3),\,90°}$

$$\left[A'' \equiv (-3;4), B'' \equiv (1;2), C'' \equiv (-2;8), D'' \equiv (3;5); \begin{cases} x'' = -y - 1 \\ y'' = 5 - x \end{cases}; \begin{cases} x'' = y + 11 \\ y'' = x - 5 \end{cases}\right]$$

36. $A \equiv (1; 5)$, $B \equiv (-2; 2)$, $C \equiv (0; 1)$, $D \equiv (0; 3)$; $\tau = t_{(2;-5)}$, $\tau' = s_{x=y}$

$$\left[A''\equiv(0;3), B''\equiv(-3;0), C''\equiv(-4;2), D''\equiv(-2;2); \begin{cases} x''=y-5 \\ y''=x+2 \end{cases}; \begin{cases} x''=y+2 \\ y''=x-5 \end{cases}\right]$$

37. $A \equiv (4; 0)$, $B \equiv (-1; 1)$, $C \equiv (2; 1)$, $D \equiv (4; -2)$; $\tau = s_{(4;1)}$, $\tau' = s_{(1;4)}$

$$\left[A''\equiv(-2;6), B''\equiv(-7;7), C''\equiv(-4;7), D''\equiv(-2;4); \begin{cases} x''=x-6 \\ y''=y+6 \end{cases}; \begin{cases} x''=x+6 \\ y''=y-6 \end{cases}\right]$$

38. $A \equiv (2; 4)$, $B \equiv (5; 0)$, $C \equiv (1; -1)$, $D \equiv (3; 1)$; $\tau = s_{(-2;0)}$, $\tau' = r_{(-2;-1),\ 270°}$

$$\left[A''\equiv(-5;3), B''\equiv(-1;6), C''\equiv(0;2), D''\equiv(-2;4); \begin{cases} x''=-y-1 \\ y''=x+1 \end{cases}; \begin{cases} x''=-y-3 \\ y''=x+3 \end{cases}\right]$$

39. $A \equiv (3; 1)$, $B \equiv (0; 2)$, $C \equiv (-1; 0)$, $D \equiv (-2; -4)$; $\tau = s_{(4;-3)}$, $\tau' = r_{2x+y=0}$

$$\left[A''\equiv\left(\frac{13}{5}; -\frac{41}{5}\right); B''\equiv\left(\frac{8}{5}; -\frac{56}{5}\right), C''\equiv\left(-\frac{3}{5}; -\frac{54}{5}\right), D''\equiv\left(-\frac{22}{5}; -\frac{46}{5}\right); \begin{cases} x''=\dfrac{3x+4y}{5} \\ y''=\dfrac{4x-3y-50}{5} \end{cases}; \begin{cases} x''=\dfrac{3x+4y+40}{5} \\ y''=\dfrac{4x-3y-30}{5} \end{cases}\right]$$

40. $A \equiv (2; 1)$, $B \equiv (-2; -2)$, $C \equiv (1; 3)$, $D \equiv (-2; -3)$; $\tau = s_{(0;-2)}$, $\tau' = s_{x-3y=0}$

$$\left[A''\equiv\left(-\frac{23}{5}; \frac{14}{5}\right); B''\equiv\left(\frac{2}{5}; \frac{14}{5}\right), C''\equiv(-5; 5), D''\equiv(1; 2); \begin{cases} x''=-\dfrac{4x+3y+12}{5} \\ y''=\dfrac{-3x+4y+16}{5} \end{cases}; \begin{cases} x''=-\dfrac{4x+3y}{5} \\ y''=\dfrac{-3x+4y-20}{5} \end{cases}\right]$$

41. CAS $A \equiv (0; 2)$, $B \equiv (2; 2)$, $C \equiv (6; 1)$, $D \equiv (-4; 1)$; $\tau = t_{(-3;0)}$, $\tau' = s_{2x-4y+1=0}$

$$\left[A''\equiv\left(-\frac{2}{5}; -\frac{16}{5}\right); B''\equiv\left(\frac{4}{5}; -\frac{8}{5}\right), C''\equiv\left(\frac{12}{5}; \frac{11}{5}\right), D''\equiv\left(-\frac{18}{5}; -\frac{29}{5}\right); \begin{cases} x''=\dfrac{3x+4y-10}{5} \\ y''=\dfrac{4x-3y-10}{5} \end{cases}; \begin{cases} x''=\dfrac{3x+4y-16}{5} \\ y''=\dfrac{4x-3y+2}{5} \end{cases}\right]$$

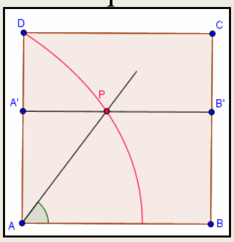
Determinare i valori dei parametri nelle leggi $t: \begin{cases} x'=ax+by+c \\ y'=bx-ay+d \end{cases}, (a^2+b^2=1)$ ***di una generica isometria, in modo che essa rappresenti***

42. Una simmetria di asse parallelo all'asse x. [$a = -1$; $b = d = 0$]
43. Una simmetria di asse parallelo all'asse y. [$a = 1$; $b = c = 0$]
44. Una simmetria di asse la prima bisettrice. [$b = 1$; $a = c = d = 0$]
45. Una simmetria di asse la seconda bisettrice. [$b = -1$; $a = c = d = 0$]
46. Una simmetria di centro $C \equiv (3; -2)$. [$a = -1$; $c = 6$; $d = -4$; $b = 0$]
47. Una rotazione di 90° rispetto al centro $C \equiv (-1; 3)$. [$b = -1$; $c = 2$; $d = 4$; $a = 0$]

Intervallo Matematico

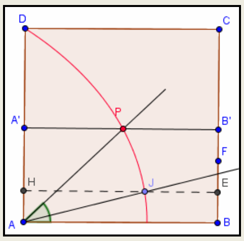
Nella geometria euclidea una figura geometrica viene detta costruibile se essa può costruirsi solo con riga e compasso. In particolare la riga non deve essere graduata, ossia non deve servire a prendere delle misure, e il compasso deve solo a tracciare circonferenze con centro assegnato e raggio dato non da una misura, ma da un punto della circonferenza. Non si sa perché siano state imposti questi vincoli, però essi hanno creato diversi problemi spesso difficili da risolvere, a volte impossibili. In particolare tre problemi, tutti insolubili, sono passati alla storia come i tre problemi classi della geometria. Essi sono: la duplicazione del cubo, la trisezione dell'angolo e la quadratura del cerchio.

Consideriamo quello della trisezione dell'angolo, consistente nella costruzione di un angolo la cui misura sia la terza parte di un qualsiasi angolo dato. Il fatto che, solo nel XIX secolo, sia stato provato che il problema non è risolvibile non significa che qualsiasi angolo consideriamo non sappiamo costruire il suo terzo, ma che non sappiamo costruirlo per tutti gli angoli. Infatti noi sappiamo costruire facilmente angoli che misurano 60° (basta costruire un triangolo equilatero) cioè sappiamo trisecare l'angolo piatto, o che misurano 45° (basta costruire un triangolo rettangolo e isoscelcioè sappiamo trisecare l'angolo di 135°. Sappiamo trisecare anche molti altri angoli, ma non qualsiasi angolo. Il problema è stato però risolto utilizzando altri strumenti diversi dalla riga e dal compasso. Uno di questi procedimenti utilizza una curva non costruibile con riga e compasso, ma con metodi che usano le trasformazioni geometriche isometriche. Esso è dovuto a Ippia di Elide, un matematico vissuto nel V secolo a.C., il quale inventò una particolare curva che risolve il problema della trisezione dell'angolo. La sua curva, chiamata perciò trisettrice, è il luogo che si ottiene nel seguente modo. Si considera un quadrato e contemporaneamente se ne fa traslare un lato fino a sovrapporsi al suo opposto, mentre si fa ruotare un lato consecutivo a quello che trasla attorno all'estremo comune fra i due lati. L'intersezione dei due segmenti, quello che ruota e quello che trasla, determina la trisettrice di Ippia. Si ottiene la seguente figura.



Adesso vediamo perché la trisettrice di Ippia serve a trisecare gli angoli. Dato che la traslazione avviene nello stesso "tempo" della rotazione, vuol dire che vi è una proporzionalità fra lo "spazio" percorso da AB nel suo traslare, cioè del segmento BB' rispetto al lato BC, e lo "spazio" percorso da AB nel suo ruotare, cioè l'ampiezza dell'angolo. Quindi se trisechiamo il segmento BB' e tracciamo la parallela dal punto individuato, l'intersezione della retta con il luogo triseca l'angolo indicato.

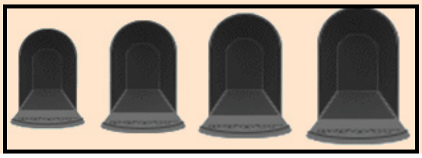
La stessa trisettrice di Ippia risolve anche il problema della quadratura del cerchio, che consiste nel costruire un quadrato la cui area equivalga all'area racchiusa da un cerchio dato e quindi nel costruire un segmento la cui misura sia π. Si dimostra infatti che il punto di intersezione della curva di Ippia con il lato del quadrato, determina un segmento che misura $\frac{2\ell}{\pi}$, dove ℓ è la misura del lato. Dato che sappiamo costruire la divisione di due segmenti, basta dividere un segmento di misura 2ℓ per $\frac{2\ell}{\pi}$, per ottenere un segmento che misura appunto π.



Leggi delle omotetie

Il problema

Una tecnica che simula l'avvicinamento di un oggetto è quella di mostrare in breve successione immagini ingrandite o rimpicciolite dell'oggetto stesso, come mostrato di seguito. Da un punto di vista matematico stiamo effettuando quella che si chiama una *similitudine*. La questione è perciò quella di determinare le leggi di una generica similitudine.



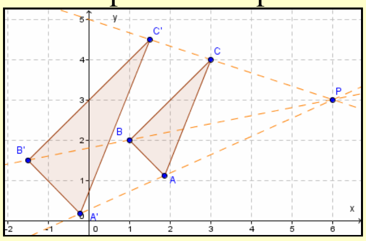
In effetti determinare le leggi di una generica similitudine comporta dei problemi. Consideriamo quindi un particolare tipo di similitudine: l'*omotetia*.

Che cosa significa?

Omotetia. Dal greco *omos* che vuol dire "simile" e *tìtheo* che significa "metto". Il termine è stato usato per la prima volta da Michael Chasles nel 1827.

Esempio 22

L'omotetia è una particolare similitudine in cui i punti corrispondenti sono allineati, come mostrato in figura.



Per determinare le leggi dell'omotetia bisogna quindi sfruttare le proprietà di tale trasformazione. Intanto i triangoli $PB'C$ e PBC sono fra loro simili, con un certo rapporto di similitudine k. Per il Teorema 5 dell'Unità 2 del modulo 2, possiamo ricavare per esempio le coordinate di B' conoscendo quelle di P, quelle di B e il rapporto di similitudine $\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}} = \dfrac{m}{n}$. Perciò si ha: $B' \equiv \left(\dfrac{(n-m)\cdot x_P + m\cdot x_B}{n}; \dfrac{(n-m)\cdot y_P + m\cdot y_B}{n} \right)$. Scrivendo le precedenti coordinate con $k = \dfrac{m}{n}$, otteniamo: $B' \equiv \left(\left(1-\dfrac{m}{n}\right)\cdot x_P + \dfrac{m}{n}\cdot x_B; \left(1-\dfrac{m}{n}\right)\cdot y_P + \dfrac{m}{n}\cdot y_B \right)$ $\equiv \left((1-k)\cdot x_P + k\cdot x_B; (1-k)\cdot y_P + k\cdot y_B \right)$. Queste, così trovate, sono le leggi di una generica omotetia.

In pratica nell'esempio precedente abbiamo dimostrato il seguente teorema.

Teorema 28

Le leggi di un'omotetia di centro $C \equiv (a; b)$ e rapporto $k \neq 0$ sono: $\omega_{k,C}: \begin{cases} x' = kx + (1-k)\cdot a \\ y' = ky + (1-k)\cdot b \end{cases}$.

Esempio 23

Vogliamo determinare il corrispondente di $P \equiv (-2; 4)$ nell'omotetia di centro $C \equiv (1;3)$ e rapporto $k = -\dfrac{3}{5}$.

Cominciamo con lo scrivere le leggi dell'omotetia: $\omega_{-\frac{3}{5},C}: \begin{cases} x' = -\dfrac{3}{5}x + \left(1+\dfrac{3}{5}\right)\cdot 1 \\ y' = -\dfrac{3}{5}y + \left(1+\dfrac{3}{5}\right)\cdot 3 \end{cases} = \begin{cases} x' = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{8}{5} \\ y' = -\dfrac{3}{5}y + \dfrac{24}{5} \end{cases}$. Applichiamole a P: $P \equiv (-2;4) \xrightarrow{\omega_{-3/5,C}} P' \equiv \left(-\frac{3}{5}\cdot(-2)+\frac{8}{5};-\frac{3}{5}\cdot 4+\frac{24}{5}\right) \equiv \left(\frac{6}{5}+\frac{8}{5};-\frac{12}{5}+\frac{24}{5}\right) \equiv \left(\frac{14}{5};\frac{12}{5}\right)$. Adesso vogliamo determinare la trasformazione inversa della precedente, quella cioè che porta P' in P. Come visto altre volte, dobbiamo risolvere il seguente sistema, nelle incognite x, y: $\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x+\frac{8}{5} \\ y' = -\frac{3}{5}y+\frac{24}{5} \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} 3x = -5x'+8 \\ 3y = -5y'+24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{3}x'+\frac{8}{3} \\ y = -\frac{5}{3}y'+8 \end{cases}$. Facilmente notiamo che abbiamo ottenuto ancora un'omotetia di rapporto $-\frac{5}{3}$, reciproco di quello dell'omotetia diretta come c'era da aspettarsi. Qual è il centro? Sospettiamo che sia ancora C e, per confermare questa ipotesi, dobbiamo manipolare l'equazione in modo da renderla simile a quella generica. Avremo perciò: $\begin{cases} x = -\frac{5}{3}x'+\left(1+\frac{5}{3}\right)\cdot 1 \\ y = -\frac{5}{3}y'+\left(1+\frac{5}{3}\right)\cdot 3 \end{cases}$. Componiamo ora l'omotetia iniziale con un'altra di uguale centro e rapporto $h=\frac{1}{3}$. Applichiamo la seconda omotetia al punto P' già trovato. Cominciamo intanto a scrivere le leggi di tale omotetia: $\omega_{\frac{1}{3},C}: \begin{cases} x'' = \frac{1}{3}x'+\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot 1 \\ y'' = \frac{1}{3}y'+\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot 3 \end{cases} = \begin{cases} x'' = \frac{1}{3}x'+\frac{2}{3} \\ y'' = \frac{1}{3}y'+2 \end{cases}$. Trasformiamo P: $P \equiv (-2;4) \xrightarrow{\omega_{-3/5,C}} P' \equiv \left(\frac{14}{5};\frac{12}{5}\right) \xrightarrow{\omega_{1/3,C}} P'' \equiv \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{14}{5}+\frac{2}{3};\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{5}+2\right) \equiv \left(\frac{8}{5};\frac{14}{5}\right)$. Per determinare le leggi della composizione dobbiamo agire su un generico punto: $P \equiv (x;y) \xrightarrow{\omega_{-\frac{3}{5},C}} P' \equiv \left(-\frac{3}{5}x+\frac{8}{5};-\frac{3}{5}y+\frac{24}{5}\right)$ $\xrightarrow{\omega_{\frac{1}{3},C}} P'' \equiv \left(\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{3}{5}x+\frac{8}{5}\right)+\frac{2}{3};\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{3}{5}y+\frac{24}{5}\right)+2\right) \equiv \left(-\frac{1}{5}x+\frac{6}{5};-\frac{1}{5}y+\frac{18}{5}\right)$. Ancora una volta abbiamo ottenuto un'omotetia il cui rapporto è $-\frac{1}{5} = -\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}$, cioè il prodotto dei rapporti delle trasformazioni componenti. Anche qui pensiamo che il centro sia ancora C, verifichiamolo: $P \equiv \left(-\frac{1}{5}x+\frac{6}{5};-\frac{1}{5}y+\frac{18}{5}\right)$ $\equiv \left(-\frac{1}{5}x+\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot 1;-\frac{1}{5}y+\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdot 3\right)$. Effettivamente abbiamo scritto la legge di composizione in modo da esplicitare il centro $C \equiv (1; 3)$.

L'esempio precedente ci consente di enunciare il seguente risultato.

Teorema 29

Data una omotetia ω, di centro $C \equiv (a; b)$ e rapporto k, la trasformazione inversa di ω, è ancora un'omotetia di centro C e rapporto $\frac{1}{k}$.

Per quanto riguarda la composizione di omotetie preferiamo enunciare un risultato riguardante composizioni con centri diversi.

Teorema 30

La composizione di una omotetia di centro $C \equiv (a; b)$ e rapporto k, con un'omotetia di centro $C' \equiv (c; d)$ e rapporto $h \neq 1/k$ è un' omotetia, di rapporto $h \cdot k$ e centro $C'' \equiv \left(\frac{a \cdot h \cdot (k-1) + c \cdot (h-1)}{h \cdot k - 1}; \frac{b \cdot h \cdot (k-1) + d \cdot (h-1)}{h \cdot k - 1}\right)$.

Dimostrazione

Consideriamo l'omotetia di centro C e raggio k: $\begin{cases} x' = kx + (1-k) \cdot a \\ y' = ky + (1-k) \cdot b \end{cases}$ e l'omotetia di centro C' e raggio h: $\begin{cases} x' = hx + (1-h) \cdot c \\ y' = hy + (1-h) \cdot d \end{cases}$. Lavoriamo sul generico $P \equiv (x; y)$, ottenendo prima $P' \equiv (kx + (1 - k) \cdot a; ky + (1 - k) \cdot b)$, e poi $P'' \equiv (h \cdot [kx + (1 - k) \cdot a] + (1 - h) \cdot c; h \cdot [ky + (1 - k) \cdot b] + (1 - h) \cdot d)$, cioè, semplificando:

$$P'' \equiv (h \cdot k \cdot x + h \cdot (1 - k) \cdot a + (1 - h) \cdot c; h \cdot k \cdot y + h \cdot (1 - k) \cdot b + (1 - h) \cdot d) \qquad (1)$$

Per comprendere cosa è successo, scriviamo le coordinate di P'' in modo da esprimerle come risultato di un'omotetia di rapporto $h \cdot k$ e centro $C^* \equiv (m; n)$:

$$P'' \equiv (h \cdot k \cdot x + (1 - h \cdot k) \cdot m; h \cdot k \cdot y + (1 - h \cdot k) \cdot n) \qquad (2)$$

Determiniamo le coordinate di C^*, risolvendo il sistema fra (1) e (2). Tralasciamo i calcoli, alla fine otteniamo: $\begin{cases} m = \dfrac{a \cdot h \cdot (k-1) + c \cdot (h-1)}{h \cdot k - 1} \\ n = \dfrac{b \cdot h \cdot (k-1) + d \cdot (h-1)}{h \cdot k - 1} \end{cases}$, che è la tesi.

Abbiamo imposto che sia $h \neq 1/k$, perché diversamente i denominatori si annullerebbero e l'espressione non avrebbe senso. In questo caso otteniamo una traslazione di vettore parallelo al segmento che ha per estremi i centri. Immediatamente seguono i risultati

Corollario 4

La composizione di due omotetie di centro C e rapporti k e h è un'omotetia di centro C e rapporto $h \cdot k$.

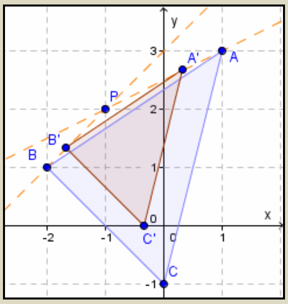
Corollario 5

L'insieme delle omotetie di centro C, rispetto all'operazione di composizione di trasformazioni è un gruppo abeliano.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Dato il triangolo di vertici i punti $A \equiv (1; 3)$, $B \equiv (-2; 1)$, $C \equiv (0; -1)$ *determinare il suo omotetico rispetto al centro* $P \equiv (-1; 2)$ *e rapporto* 2/3.

Ricordiamo le leggi di una omotetia di centro $C \equiv (a; b)$ e rapporto $k \neq 0$: $\omega_{k,C}:\begin{cases} x' = kx + (1-k)\cdot a \\ y' = ky + (1-k)\cdot b \end{cases}$. Avremo: $A \equiv (1;3) \to A' \equiv \left(\frac{2}{3}\cdot 1 + \left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot(-1); \frac{2}{3}\cdot 3 + \left(1-\frac{2}{3}\right)\cdot 2\right) \equiv \left(\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)$; $B \equiv (-2;1) \to B' \equiv \left(-\frac{5}{3};\frac{4}{3}\right)$; e infine $C \equiv (0;-1) \to C' \equiv \left(-\frac{1}{3};0\right)$. Rappresentiamo graficamente, 

tracciando le rette congiungenti i punti corrispondenti, per verificare graficamente che essi sono allineati con il centro dell'omotetia. Se avessimo voluto verificare il fatto analiticamente sarebbe bastato calcolare, per A e A' per esempio, il determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{8}{3} & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Determinare i corrispondenti dei seguenti punti nelle omotetie di centro C e rapporto k indicati

Livello **1**

1. a) $A \equiv (-1; 2)$, $C \equiv (-3; 1)$, $k = 1/2$; b) $B \equiv \left(1+\sqrt{2};\sqrt{2}-2\right), C \equiv (0;-1), k = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\left[A' \equiv \left(-2;\frac{3}{2}\right); B' \equiv \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$
2. a) $D \equiv (0; -1)$, $C \equiv (-1; 0)$, $k = -2$; b) $E \equiv (2; -4)$, $C \equiv (-4; 2)$, $k = -3$ [$D' \equiv (-3; 2)$, $E' \equiv (-22; 20)$]
3. a) $F \equiv (1/5; -1/6)$, $C \equiv (-1; 4)$, $k = -4/5$; b) $G \equiv (-3/4; -1/2)$, $C \equiv (4/3; -4)$, $k = 2/5$
[$F' \equiv (-49/25; 22/3)$, $G' \equiv (1/2; -13/5)$]
4. a) $H \equiv (-8/3; 2)$, $C \equiv (-1/3; 3/4)$, $k = 2$; b) $K \equiv (-7/3; 1/4)$, $C \equiv (3; 0)$, $k = 3/2$
[$H' \equiv (-5; 13/4)$, $K' \equiv (-5; 3/8)$]
5. a) $L \equiv (2; -3)$, $C \equiv \left(\sqrt{2};-1\right), k = \frac{3}{5}$; b) $M \equiv \left(\sqrt{2};-\sqrt{3}\right)$, $C \equiv (2; -1)$, $k = 5$
$\left[L' \equiv \left(\frac{6+2\cdot\sqrt{2}}{5};-\frac{11}{5}\right); M' \equiv \left(5\cdot\sqrt{2}-8;4-5\cdot\sqrt{3}\right)\right]$
6. a) $O \equiv (0; 0)$, $C \equiv (2; -3)$, $k = -2$; b) $P \equiv \left(1-\sqrt{3};1\right), C \equiv \left(1+\sqrt{3};\sqrt{3}\right), k = -\frac{1}{5}$
$\left[O' \equiv (6;-9); P' \equiv \left(\frac{5+7\cdot\sqrt{3}}{5};\frac{6\cdot\sqrt{3}-1}{5}\right)\right]$

Trasformare i seguenti poligoni secondo l'omotetia di centro Q e rapporto k indicati. Verificare poi che il poligono trasformato ha i lati che sono nel rapporto k con i loro corrispondenti

Livello 1

7. $A \equiv (-1; 2), B \equiv (3; 1), C \equiv (1; 4); Q \equiv (-2; -3); k = -2$ $[A' \equiv (-4; -13), B' \equiv (-12; -11), C' \equiv (-8; -17)]$

8. $A \equiv (0; 3), B \equiv (-1; 2), C \equiv (4 , 5); Q \equiv A;\ k = \dfrac{2}{3}$ $\left[A' \equiv A, B' \equiv \left(-\dfrac{2}{3}; \dfrac{7}{3}\right), C' \equiv \left(\dfrac{8}{3}; \dfrac{13}{3}\right)\right]$

9. $A \equiv (-4; -1), B \equiv (0; -4), C \equiv (3; -1); Q \equiv (0; -5);\ k = -\dfrac{1}{4}$ $\left[A' \equiv (1; -6), B' \equiv \left(0; -\dfrac{21}{4}\right), C' \equiv \left(-\dfrac{3}{4}; -\dfrac{13}{2}\right)\right]$

10. $A \equiv (1; -1), B \equiv (2; 0), C \equiv (1; 4), D \equiv (-2; 3); Q \equiv D;\ k = \dfrac{1}{3}$

$\left[A' \equiv \left(-1; \dfrac{5}{3}\right), B' \equiv \left(-\dfrac{2}{3}; 2\right), C' \equiv \left(-1; \dfrac{10}{3}\right), D' \equiv D\right]$

11. $A \equiv (5; 1), B \equiv (0; 1), C \equiv (3; 2), D \equiv (-1; 2); Q \equiv B;\ k = -\dfrac{3}{4}$

$\left[A' \equiv \left(-\dfrac{15}{4}; 1\right), B' \equiv B, C' \equiv \left(-\dfrac{9}{4}; \dfrac{1}{4}\right), D' \equiv \left(\dfrac{3}{4}; \dfrac{1}{4}\right)\right]$

12. $A \equiv (-3; 0), B \equiv (1; -4), C \equiv (0 , 0); Q \equiv (4; -4);\ k = -\dfrac{5}{4}$ $\left[A' \equiv \left(\dfrac{51}{4}; -9\right), B' \equiv \left(\dfrac{31}{4}; -4\right), C' \equiv (9; -9)\right]$

13. $A \equiv (3; -2), B \equiv (2; 3), C \equiv (0; 1), D \equiv (-1; 4); Q \equiv A;\ k = \dfrac{2}{3}$ $\left[A' \equiv A, B' \equiv \left(\dfrac{7}{3}; \dfrac{4}{3}\right), C' \equiv (1; 0), D' \equiv \left(\dfrac{1}{3}; 2\right)\right]$

Lavoriamo insieme

Determinare il centro e il rapporto dell'omotetia di leggi: $\begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y - 3 \end{cases}$.

Basta confrontare le precedenti leggi con quelle di una generica omotetia per concludere che si ha $k = 2$. A questo punto per trovare le coordinate del centro, imponiamo l'uguaglianza fra i "termini noti" delle due uguaglianze, risolvendo il sistema: $\begin{cases} 1 = (1-2) \cdot a \\ -3 = (1-2) \cdot b \end{cases}$, le cui soluzioni sono: $\begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$. Infine il centro è $C \equiv (-1; 3)$ e il rapporto è $k = 2$. Verifichiamo: $\begin{cases} x' = 2x + (1-2) \cdot (-1) \\ y' = 2y + (1-2) \cdot 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 2x + 1 \\ y' = 2y - 3 \end{cases}$.

Determinare i centri C e i rapporti k delle seguenti omotetie, delle quali sono date le leggi

Livello 1

14. $\begin{cases} x' = -x + 4 \\ y' = -y + 3 \end{cases}$; $\begin{cases} x' = -2x \\ y' = -2y + 5 \end{cases}$; $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x - 2 \\ y' = \dfrac{1}{2}y + 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x' = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{4} \\ y' = -\dfrac{3}{4}y \end{cases}$; $\begin{cases} x' = -\dfrac{4}{5}x - \dfrac{4}{5} \\ y' = -\dfrac{4}{5}y - \dfrac{4}{5} \end{cases}$

$\left[\left(-2; \dfrac{3}{2}\right), -1; \left(0; \dfrac{5}{3}\right), -2; (-4; 2), \dfrac{1}{2}; \left(\dfrac{5}{7}; 0\right), -\dfrac{3}{4}; \left(-\dfrac{4}{9}; -\dfrac{4}{9}\right), -\dfrac{4}{5}\right]$

15. $\begin{cases} x' = \dfrac{6}{5}x - \dfrac{5}{6} \\ y' = \dfrac{6}{5}y + 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x' = \sqrt{5}x - 2 \\ y' = \sqrt{5}y + 2 \end{cases}$; $\begin{cases} x' = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} \\ y' = -\sqrt{3}y - \sqrt{2} \end{cases}$; $\begin{cases} x' = -5x + \sqrt{2} \\ y' = -5y + \dfrac{4}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} x' = \left(1 - 2 \cdot \sqrt{2}\right) \cdot x + 1 - \sqrt{7} \\ y' = \left(1 - 2 \cdot \sqrt{2}\right) \cdot y + 2 + \sqrt{5} \end{cases}$

$\left[\left(\dfrac{25}{6}; -10\right), \dfrac{6}{5}; \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \sqrt{5}; \left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\right), -\sqrt{3}; \left(\dfrac{\sqrt{2}}{6}; \dfrac{2}{9}\right), -5; \left(\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{14}}{4}; \dfrac{2 \cdot \sqrt{2}+\sqrt{10}}{4}\right), 1 - 2 \cdot \sqrt{2}\right]$

Determinare i centri C delle seguenti omotetie, delle quali sono dati due punti che si corrispondono e il rapporto

Livello 2

16. a)(–1; 3)→(2; –4),k = 3/5;b)(–1; 3)→(–1; 3),k = 1/3;c)(–1; 3)→(1; –3),k = – 1;d)(–1; 3)→(–3; 1), k = 1
[a) (13/2; –29/2); b) (–1; 3); c) (0; 0); d) ∅]

17. a) (1/4; –3) → (–1/4; 3), k = –2; b) (0; 0) → (1/4; –1/4), k = 5/6; c) (2; 1) → (1; 2), k = 3
[a) (1/12; –1); b) (3/2; –3/2); c) (5/2; 1/2)]

18. a) $\left(-\sqrt{2};0\right)\rightarrow\left(1+\sqrt{2};\ 0\right)$, k = –1/2; b) $\left(1;2-\sqrt{2}\right)\rightarrow(-1;0), k=5$; c) $\left(1-\sqrt{2};\ \frac{3}{\sqrt{3}}\right)\rightarrow\left(1+\sqrt{2};\frac{\sqrt{3}}{3}\right), k=\frac{4}{3}$

$$\left[\text{a})\left(\frac{2+\sqrt{2}}{3};0\right);\text{b})\left(\frac{3}{2};-\frac{10-5\sqrt{2}}{4}\right);\text{c})\left(-5-4\cdot\sqrt{2};4\cdot\sqrt{3}-3\right)\right]$$

Livello 2

19. Un'omotetia di centro $C \equiv (a;\ b)$ e rapporto $k = -1$ è una particolare isometria, quale?
[Simmetria centrale di centro C]

20. Dimostrare il Corollario 4, determinando le leggi della omotetia composta di due omotetie di rapporti $h \neq 0$ e $k \neq 0$ e centro $C \equiv (a;\ b)$.
$$\left[\begin{cases} x' = h\cdot k\cdot x+\left(1-h\cdot k\right)\cdot a \\ y = h\cdot k\cdot y+\left(1-h\cdot k\right)\cdot b \end{cases}\right]$$

21. Con riferimento al precedente esercizio, la composizione è commutativa? [Sì]

22. Determinare le leggi della omotetia inversa di una omotetia di rapporto $k \neq 0$ e centro $C \equiv (a;\ b)$.
$$\left[\omega^{-1}:\begin{cases} x=\frac{1}{k}x'+\frac{k-1}{k}\cdot a \\ y=\frac{1}{k}y'+\frac{k-1}{k}\cdot b \end{cases}\right]$$

23. Dato il quadrilatero di vertici $A \equiv (2; -1)$, $B \equiv (3; 0)$, $C \equiv (4; 4)$, $D \equiv (-1; 6)$ determinare il suo trasformato mediante l'omotetia di centro il punto B e rapporto k = 1/3. Determinare poi le leggi della omotetia inversa.
$$\left[A'\equiv\left(\frac{8}{3};-\frac{1}{3}\right),\ B'\equiv\left(3;0\right),\ C'\equiv\left(\frac{10}{3};\frac{4}{3}\right),\ D'\equiv\left(\frac{5}{3};2\right);\ \omega^{-1}:\begin{cases} x=3x'-6 \\ y=3y' \end{cases}\right]$$

24. Comporre le omotetie di rapporti k = 3 e h = –2 e centro $C \equiv (2; -3)$, verificando che i risultati trovati coincidono con le formule determinate nell’esercizio 18.
$$\left[\begin{cases} x'=-6x+14 \\ y=-6y-21 \end{cases}\right]$$

25. Dato il quadrilatero di vertici $A \equiv (0; -1)$, $B \equiv (1; 0)$, $C \equiv (2; 2)$, $D \equiv (-1; 2)$ determinare il suo trasformato mediante l'omotetia di centro il punto A e rapporto k = 2; alla figura ottenuta applicare l’omotetia di centro B e rapporto k = –2/3. Infine determinare le leggi della omotetia che permette di passare dal primo quadrilatero al terzo. [$A' \equiv A$, $B' \equiv (2; 1)$, $C' \equiv (4; 5)$, $D' \equiv (-2; 5)$;
$$A''\equiv\left(\frac{5}{2};\frac{2}{3}\right), B''\equiv\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right), C''\equiv\left(-1;-\frac{10}{3}\right), D''\equiv\left(3;-\frac{10}{3}\right),\begin{cases} x=\frac{-3x'+5}{4} \\ y=\frac{-3y'-2}{4} \end{cases}\Bigg]$$

26. Al triangolo di vertici $A \equiv (1; 3)$, $B \equiv (-2; 1)$, $C \equiv (0; -3)$, applicare successivamente le omotetie di centri $Q \equiv (1; 2)$ e rapporto k = 3 e $P \equiv (-1; 3)$ e rapporto h = –2.
[$A' \equiv (1; 5)$, $B' \equiv (-8; -1)$, $C' \equiv (-2; -13)$; $A''(-5; -1)$, $B'' \equiv (13; 11)$, $C'' \equiv (1; 35)$]

Livello 3

27. La composizione di omotetie è interna nell'insieme dei triangoli rettangoli? [Sì]

28. La composizione di trasformazioni geometriche è interna nell'insieme delle omotetie? [Sì]

29. Provare che una omotetia ha un solo punto unito. (Suggerimento**:** si considerino le leggi generali e si imponga $x' = x$ e $y' = y$). [È il centro]

30. Alla retta di equazione $y = -2x + 1$, applicare una omotetia di centro $A \equiv (-1; 3)$ e rapporto k = –3. Che relazioni ha della retta trasformata con quella di partenza? [$y = -2x + 1$; sono coincidenti]

31. Alla retta di equazione $y = 2x - 1$, applicare una omotetia di centro il punto $A \equiv (1; 2)$ e rapporto k = 2. Cosa può dirsi della retta trasformata, che relazioni ha con quella di partenza?
[$2x - y - 2 = 0$; sono parallele]

32. CAS Con riferimento ai due esercizi precedenti, studiare l'omotetica della retta $ax + by + c = 0$, nei due casi in cui il centro $C \equiv (x_C; y_C)$ e rapporto k , appartiene o no alla retta.

[$ax + by + c = 0$; $ax + by + a \cdot xc \cdot (k - 1) + b \cdot yc \cdot (k - 1) + c \cdot k = 0$]

Livello 3

Comporre le seguenti omotetie, determinando centro e rapporto dell'omotetia composizione nell'ordine

33. a) (ω_1: (1; 2), $k = 2$; ω_2: (2; 1), $k = -2$); b) $\left(\omega_1 : (0;-1), k = \frac{1}{2}; \omega_2 : (-3;2), k = -\frac{2}{3}\right)$

$\left[\text{a) } C \equiv \left(\frac{8}{5};\frac{7}{5}\right), k = -4; \text{b) } C \equiv \left(-\frac{15}{4};-\frac{1}{4}\right), k = -\frac{1}{3}\right]$

34. a)$\left(\omega_1 : (3;0), k = \frac{3}{2}; \omega_2 : (1;-2), k = \frac{2}{3}\right)$; b) $\left(\omega_1 : (3;-2), k = -\frac{1}{2}; \omega_2 : (4;0), k = -\frac{4}{3}\right)$

$\left[\text{a)Traslazione; b) } C \equiv (10;12), k = \frac{2}{3}\right]$

35. a)$\left(\omega_1 : (-1;-1), k = -3; \omega_2 : (0;0), k = \frac{5}{6}\right)$; b) $\left(\omega_1 : (2;-1), k = -\frac{3}{4}; \omega_2 : (-2;0), k = \frac{2}{3}\right)$

$\left[\text{a) } C \equiv \left(-\frac{20}{21};-\frac{20}{21}\right), k = -\frac{5}{2}; \text{b) } C \equiv \left(\frac{10}{9};-\frac{7}{9}\right), k = -\frac{1}{2}\right]$

36. a)$\left(\omega_1 : (-2;2), k = \frac{1}{4}; \omega_2 : (1;3), k = \frac{3}{5}\right)$; b)$\left(\omega_1 : (2;-3), k = \frac{1}{2}; \omega_2 : (0;5), k = -\frac{5}{3}\right)$

$\left[\text{a) } C \equiv \left(-\frac{10}{17};\frac{42}{17}\right), k = \frac{3}{20}; \text{b) } C \equiv \left(-\frac{10}{11};\frac{95}{11}\right), k = -\frac{5}{6}\right]$

37. a)$\left(\omega_1 : (3;1), k = -\frac{4}{7}; \omega_2 : (-2;-1), k = -3\right)$; b) $\left(\omega_1 : (4;1), k = -\frac{5}{9}; \omega_2 : (-1;5), k = -\frac{6}{5}\right)$

$\left[\text{a) } C \equiv \left(31;\frac{61}{5}\right), k = \frac{12}{7}; \text{b) } C \equiv \left(-29;\frac{137}{5}\right), k = \frac{2}{3}\right]$

Determinare le equazioni delle rette r trasformate nelle omotetie di cui sono dati il centro C e il rapporto k indicato

38. a) $3x - y = 0, C \equiv \left(\sqrt{2};1\right), k = -\frac{6}{7}$; b) $x + 4y - 2 = 0$, $C \equiv (0; 0)$, $k = -3$

$\left[\text{a) } 21x - 7y + 13 - 39\sqrt{2} = 0; \text{ b) } x + 4y + 6 = 0\right]$

39. a) $2x + y = 0, C \equiv (-1; 0)$, $k = 1/2$; b) $4x - y - 2 = 0$, $C \equiv (-2; -3)$, $k = -3/4$

[a) $2x + y + 1 = 0$; b) $16x - 4y + 41 = 0$]

40. a) $3x - 4y = 0$, $C \equiv (-4; 4)$, $k = 5/7$; b) $\frac{4}{3}x - 2y + 1 = 0, C \equiv \left(\frac{5}{3};1\right), k = -\frac{5}{3}$

[a) $3x - 4y + 8 = 0$; b) $36x - 54y - 61 = 0$]

41. a) $y = 3x + 1$; $C \equiv (1; -3)$, $k = 4$; b) $\left(1+\sqrt{3}\right)x - y = 0, C \equiv \left(-1;\sqrt{2}\right), k = \sqrt{2}$

$\left[\text{a) } y = 3x + 22; \text{ b) } \left(1+\sqrt{3}\right)x - y - \sqrt{6} + \sqrt{23} - 1 = 0\right]$

42. $ax + by + c = 0$, $C \equiv (0; 0)$, $k = -1/3$ [$3ax + 3by - c = 0$]

43. Dimostrare che la composizione di due omotetie di centri $(a; b)$ e $(c; d)$ e di rapporti k e $1/k$, fra loro reciproci è una traslazione. Determinare il vettore di traslazione in funzione delle coordinate dei centri e del rapporto k.

$\left[\left(\frac{(c-a)\cdot(k-1)}{k};\frac{(d-b)\cdot(k-1)}{k}\right)\right]$

Leggi delle trasformazioni di similitudine

Consideriamo adesso le composizioni delle omotetie con le isometrie.

Esempio 24

Componiamo un'omotetia ω di rapporto *k* e centro $C \equiv (a;\ b)$ con una traslazione *t*, di vettore $\vec{v} \equiv (c;\ d)$. Applichiamo l'omotetia al generico punto *P*: $P \equiv (x;\ y) \xrightarrow{\omega} P' \equiv (k\cdot x + (1 - k)\cdot a;\ k\cdot y + (1 - k)\cdot b)$. Adesso applichiamo la traslazione:

$$P' \equiv (k\cdot x + (1 - k)\cdot a;\ k\cdot y + (1 - k)\cdot b) \xrightarrow{t} P'' \equiv (k\cdot x + (1 - k)\cdot a + c;\ k\cdot y + (1 - k)\cdot b + d)$$

Non è difficile notare che abbiamo ottenuto ancora un'omotetia di uguale rapporto *k* ma centro diverso da *C*.

Il precedente esempio ci permette di enunciare il seguente risultato, abbastanza intuitivo del resto (almeno limitatamente al tipo di composizione ottenuta), dato che una traslazione lascia inalterata la direzione di una retta.

Teorema 31

La composizione di un'omotetia di centro $C \equiv (a;\ b)$ e rapporto $k \notin \{0,\ 1\}$ con una traslazione di vettore $\vec{v} \equiv (v_x; v_y)$ è una omotetia di centro $C' \equiv \left(a + \frac{v_x}{1-k}; b + \frac{v_y}{1-k}\right)$ e rapporto *k*. Inoltre CC' è parallelo a $\vec{v}$ e si ha: $\frac{|\vec{v}|}{\overline{CC'}} = 1 - k$.

Dimostrazione Per esercizio

Esempio 25

Componiamo adesso invece un'omotetia con una simmetria assiale. Siano date $\omega_{O,2}: \begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases}$ e $s_x: \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$.

Applichiamo le due trasformazioni a un generico punto: $P \equiv (x;\ y) \xrightarrow{\omega_{=,2}} P'(2x;\ 2y) \xrightarrow{s_x} P''(-2x;\ \ 2y)$.

È evidente che le leggi ottenute non possono essere mai quelle di un'omotetia, dato che i coefficienti delle incognite sono fra loro diversi (2 e –2).

L'esempio precedente ci permette di dire che, in generale, la composizione di un'omotetia con una simmetria assiale di asse parallelo all'asse *x* non è un'omotetia. D'altro canto però le figure trasformate stanno sempre in un certo rapporto quindi, se non omotetiche, sono simili. Possiamo allora definire le similitudini da un punto di vista analitico.

Definizione 9

La trasformazione composizione di un'omotetia di rapporto *k,* con un'isometria si chiama **similitudine di rapporto *k***.

Utilizzando i Teoremi 24 e 25 possiamo allora determinare le leggi di una generica similitudine.

Teorema 32

Le leggi di una generica similitudine piana di rapporto *k* sono: $\zeta: \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = bx - ay + d \end{cases}$, in cui $a^2 + b^2 = k^2$.

È ovvio che, anche da un punto di vista analitico, possiamo dire che un'isometria è una similitudine di rapporto $k = 1$.

Esempio 26

Consideriamo il triangolo equilatero di vertici $A \equiv (-2; 1)$, $B \equiv (1; -2)$, $C \equiv \left(\frac{3\cdot\sqrt{3}-1}{2};\ \frac{3\cdot\sqrt{3}-1}{2}\right)$, il cui lato misura $3\sqrt{2}$. Applichiamo a esso la similitudine di leggi $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases}$. Notiamo che le proprietà di una similitudine sono tutte verificate e che il rapporto vale $\sqrt{2}$. Determiniamo i corrispondenti:

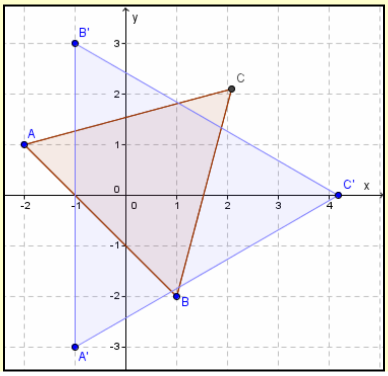
$A \equiv (-2; 1) \xrightarrow{\zeta} A' \equiv (-2 + 1; -2 - 1) \equiv (-1; -3)$, $B \equiv (1; -2) \xrightarrow{\zeta} B' \equiv (1 -2; 1 + 2) \equiv (-1; 3)$,

$$C \equiv \left(\frac{3\cdot\sqrt{3}-1}{2};\frac{3\cdot\sqrt{3}-1}{2}\right) \xrightarrow{\zeta} C' \equiv \left(\frac{3\cdot\sqrt{3}-1}{2}+\frac{3\cdot\sqrt{3}-1}{2};\frac{3\cdot\sqrt{3}-1}{2}-\frac{3\cdot\sqrt{3}-1}{2}\right) \equiv \left(3\cdot\sqrt{3}-1;0\right).$$

Rappresentiamo graficamente il triangolo ABC e il suo trasformato $A'B'C'$, che appare essere un triangolo equilatero, e in effetti lo è, come verifichiamo facilmente calcolando le misure dei suoi lati:

$$\overline{A'B'} = 6,\ \overline{B'C'} = \sqrt{\left(-1-3\cdot\sqrt{3}+1\right)^2+\left(0-3\right)^2} = 6,\ \overline{C'A'} = \sqrt{\left(-1-3\cdot\sqrt{3}+1\right)^2+\left(-3-0\right)^2} = 6.$$

Questa misura è naturalmente pari a $3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$. Quindi effettivamente i due triangoli sono fra loro simili di rapporto $\sqrt{2}$.



Verifiche

Lavoriamo insieme

Determinare le leggi della similitudine composizione della simmetria assiale rispetto alla prima bisettrice con l'omotetia di centro il punto C ≡ (1; – 1) *e rapporto k* = 2/5**.**

Scriviamo le leggi delle singole trasformazioni: $s_{x=y}:\begin{cases}x'=y\\ y'=x\end{cases}$ e $\omega_{k,C}:\begin{cases}x'=\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}\\ y'=\frac{2}{5}y-\frac{3}{5}\end{cases}$. *Seguiamo* la trasformazione che dal generico punto $P \equiv (x;\ y)$ passa a P' mediante la simmetria e da questo a P'' mediante l'omotetia $P\equiv(x;y)\xrightarrow{s_{x=y}}P'\equiv(y;x)\xrightarrow{\sigma_{C,k}}P''\left(\frac{2}{5}y+\frac{3}{5};\frac{2}{5}x-\frac{3}{5}\right)$. Quindi le leggi della similitudine sono: $s_{x=y}\circ\omega_{k,C}:\begin{cases}x'=\frac{2}{5}y+\frac{3}{5}\\ y'=\frac{2}{5}x-\frac{3}{5}\end{cases}$. In modo analogo possiamo determinare le leggi della similitudine composta scambiando l'ordine: $\omega_{k,C}\circ s_{x=y}:\begin{cases}x'=\frac{2}{5}y-\frac{3}{5}\\ y'=\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}\end{cases}$.

Determinare i corrispondenti dei seguenti punti nelle similitudini di leggi indicate, determinando il rapporto di similitudine

Livello **1**

1. a) (0; –1), $\begin{cases}x'=-x+2y\\ y'=2x+y-1\end{cases}$; b) (–4; 2), $\begin{cases}x'=4x+y+7\\ y'=x-4y\end{cases}$; c) $\left(\frac{1}{5};-\frac{1}{6}\right)$, $\begin{cases}x'=x+y+4\\ y'=x-y-3\end{cases}$

$\left[\text{a)}(-2;-2),\sqrt{5};\text{b)}(-7;-12),\sqrt{17};\text{c)}\left(\frac{121}{30};-\frac{79}{30}\right),\sqrt{2}\right]$

2. a) $\left(\frac{4}{3};-4\right)$, $\begin{cases}x'=-x+3y\\ y'=3x+y\end{cases}$; b) $\left(-\frac{8}{3};2\right)$, $\begin{cases}x'=-\frac{1}{2}x+y-3\\ y'=x+\frac{1}{2}y+4\end{cases}$; c) $\left(-\frac{7}{3};\frac{1}{4}\right)$, $\begin{cases}x'=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}y\\ y'=\frac{1}{4}x+\frac{2}{3}y\end{cases}$

$\left[\text{a)}\left(-\frac{40}{3};\frac{30}{3}\right),\sqrt{10};\text{b)}\left(\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right),\frac{\sqrt{5}}{2};\text{c)}\left(\frac{233}{144};-\frac{5}{12}\right),\frac{\sqrt{73}}{12}\right]$

3. a) $\left(\sqrt{2};\ -1\right)$, $\begin{cases}x'=3x+4y+1\\ y'=4x-3y-1\end{cases}$; b) (2; –3), $\begin{cases}x'=3x+y-4\\ y'=x-3y-1\end{cases}$; c) $\left(1+\sqrt{2};\ \sqrt{2}-2\right)$, $\begin{cases}x'=x+y\\ y'=x-y-1\end{cases}$

$\left[\text{a)}\left(3\cdot\sqrt{2}-3;\ 2+4\cdot\sqrt{2}\right),5;\text{b)}(-1;10),\sqrt{10};\text{c)}\left(2\cdot\sqrt{2}-1;2\right),\ \sqrt{2}\right]$

4. a) (–1; 2), $\begin{cases}x'=3x+2y\\ y'=2x-3y-1\end{cases}$; b) $\left(\sqrt{2};-\sqrt{3}\right)$, $\begin{cases}x'=12x+5y\\ y'=5x-12y\end{cases}$; c) $\left(1-\sqrt{3};\ 1\right)$, $\begin{cases}x'=-15x+8y-1\\ y'=8x+15y-1\end{cases}$

$\left[\text{a)}(1;-9),\sqrt{13};\text{b)}\left(12\cdot\sqrt{2}-5\cdot\sqrt{3};\ 12\cdot\sqrt{3}+5\cdot\sqrt{2}\right),13;\text{c)}\left(15\cdot\sqrt{3}-8;22-8\cdot\sqrt{3}\right),17\right]$

Trasformare i seguenti triangoli secondo la similitudine di leggi indicate, determinare poi il rapporto di similitudine k e verificare che il poligono trasformato ha i lati nel rapporto k con i corrispondenti di partenza

Livello 2

5. $A \equiv (-1; 0)$, $B \equiv (0; 1)$, $C \equiv (1; 4)$; $\zeta: \begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases}$ [$A' \equiv (-1; -1)$, $B' \equiv (1; -1)$, $C' \equiv (5; -3)$]
6. $A \equiv (1; -1)$, $B \equiv (0; 0)$, $C \equiv (1; 2)$; $\zeta: \begin{cases} x' = x + 2y + 1 \\ y' = 2x - y - 1 \end{cases}$ [$A' \equiv (0; 2)$, $B' \equiv (1; -1)$, $C' \equiv (6; -1)$]
7. $A \equiv (0; 3)$, $B \equiv (1; 2)$, $C \equiv (4 , 3)$; $\zeta: \begin{cases} x' = -x + y - 2 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$ [$A' \equiv (1; 2)$, $B' \equiv (-1; 2)$, $C' \equiv (-3; 6)$]
8. $A \equiv (3; 1)$, $B \equiv (0; 1)$, $C \equiv (1; 2)$; $\zeta: \begin{cases} x' = 4x + y \\ y' = x - 4y \end{cases}$ [$A' \equiv (13; -1)$, $B' \equiv (1; -4)$, $C' \equiv (6; -7)$]
9. $A \equiv (-2; 0)$, $B \equiv (1; 4)$, $C \equiv (0 , 0)$; $\zeta: \begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = -4x - 3y \end{cases}$ [$A' \equiv (-6; 8)$, $B' \equiv (-13; -16)$, $C' \equiv (0; 0)$]
10. $A \equiv (3; -4)$, $B \equiv (1; 3)$, $C \equiv (0; 1)$; $\zeta: \begin{cases} x' = x - 3y - 2 \\ y' = -3x - y + 2 \end{cases}$ [$A' \equiv (13; -3)$, $B' \equiv (-10; -4)$, $C' \equiv (-5; 1)$]

Livello 3

11. Fornire una giustificazione geometrica del fatto che la composizione fra una omotetia e una traslazione è un'omotetia. [La traslazione sposta la figura su rette fra loro parallele]
12. La composizione di similitudini è interna nell'insieme dei triangoli rettangoli i cui lati hanno misure intere? [No, p. e. il triangolo di lati 3, 4, 5 nella similitudine di rapporto 3/4, ha lati (6/4; 3; 15/4)]

Determinare le leggi delle similitudini ottenute dalla composizione fra le trasformazioni seguenti

13. $\omega_{(-1;-1),-\frac{1}{4}}$, $s_{y=-2}$; $\omega_{(3;0),\frac{1}{3}}$, $s_{x=1}$; $\omega_{(2;-3),k=2}$; $r_{O,90°}$

$$\left[\begin{cases} x' = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4} \\ y' = \frac{1}{4}y - \frac{21}{4} \end{cases}; \begin{cases} x' = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4} \\ y' = \frac{1}{4}y + \frac{9}{4} \end{cases}; \begin{cases} x' = -\frac{1}{3}x \\ y' = \frac{1}{3}y \end{cases}; \begin{cases} x' = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3} \\ y' = \frac{1}{3}y \end{cases}; \begin{cases} x' = -2y - 3 \\ y' = 2x - 2 \end{cases}; \begin{cases} x' = -2y - 2 \\ y' = 2x + 3 \end{cases}\right]$$

14. $\omega_{(1;-1),-3}$; $r_{O,270°}$; $\omega_{(0;-2),\frac{1}{2}}$; $r_{(-2;3),90°}$; $\omega_{(1;-2),-\frac{1}{2}}$; $s_{2x+y-1=0}$

$$\left[\begin{cases} x' = -3y - 4 \\ y' = 3x - 4 \end{cases}; \begin{cases} x' = -3y + 4 \\ y' = 3x - 4 \end{cases}; \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}y + 2 \\ y' = \frac{1}{2}x + 5 \end{cases}; \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \end{cases}; \begin{cases} x' = \frac{3}{10}x + \frac{2}{5}y + \frac{23}{10} \\ y' = \frac{2}{5}x - \frac{3}{10}y - \frac{13}{5} \end{cases}; \begin{cases} x' = \frac{3}{10}x + \frac{2}{5}y + \frac{11}{10} \\ y' = \frac{2}{5}x - \frac{3}{10}y - \frac{16}{5} \end{cases}\right]$$

15. Determinare le costanti di similitudine degli esercizi precedenti. $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; 2; 3; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

Lavoriamo insieme

Data la similitudine di leggi $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = bx - ay \end{cases}$, *determinare i valori dei parametri reali a e b, in modo che i punti* $P \equiv (0; 1)$ e $P' \equiv (2; -2)$ *siano corrispondenti nella data similitudine*.

Basta applicare la similitudine a P, ottenendo $P' \equiv (b; -a)$. Adesso risolviamo il sistema: $\begin{cases} b = 2 \\ -a = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}$. La similitudine è: $\begin{cases} x' = -2x + 2y \\ y' = -2x + 2y \end{cases}$, la cui costante è $\sqrt{4+4} = 2 \cdot \sqrt{2}$.

Livello 2

Data la similitudine di leggi $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = bx - ay \end{cases}$, ***determinare i valori dei parametri reali a e b, in modo che i punti dati siano corrispondenti nella data similitudine***

16. (1; 2)→(13; –1) ; (–1; 3)→(–1; 3) ; (–1; 3)→(–1; –3) $\left[\begin{cases} x'=3x+5y \\ y'=5x-3y \end{cases}; \begin{cases} x'=-\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y \\ y'=-\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y \end{cases}; \begin{cases} x'=x \\ y'=-y \end{cases}\right]$

17. $\left(-\frac{1}{4};0\right)\to\left(\frac{1}{4};0\right)$; (–1; 0)→(0; –3) ; (2; 1)→(–1; –2) $\left[\begin{cases} x'=-x \\ y'=y \end{cases}; \begin{cases} x'=3y \\ y'=3x \end{cases}; \begin{cases} x'=-y \\ y'=-x \end{cases}\right]$

18. $\left(-\sqrt{2};0\right)\to\left(1+\sqrt{2};0\right)$; $\left(1;-\sqrt{2}\right)\to(0;0)$; $\left(0;\sqrt{3}\right)\to\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$; $\left(1+\sqrt{2};1\right)\to\left(1-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$

$$\left[\begin{cases} x'=-\frac{\sqrt{2}+1}{2}\cdot x \\ y'=\frac{\sqrt{2}+1}{2}y \end{cases}; \varnothing; \begin{cases} x'=-\frac{\sqrt{3}}{6}x-\frac{\sqrt{3}}{12}y \\ y'=-\frac{\sqrt{3}}{12}x+\frac{\sqrt{3}}{6}y \end{cases}; \begin{cases} x'=-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{6-3\cdot\sqrt{2}}{4}y \\ y'=\frac{6-3\cdot\sqrt{2}}{4}x+\frac{\sqrt{2}}{4}y \end{cases}\right]$$

Lavoriamo insieme

Quanti punti uniti può avere al più una similitudine?

Le generiche leggi sono: $\zeta:\begin{cases} x'=ax+by+c \\ y'=bx-ay+d \end{cases}$, in cui i parametri sono numeri reali.Per determinare i punti uniti dobbiamo risolvere il sistema, nelle incognite *x* e *y*: $\begin{cases} x=ax+by+c \\ y=bx-ay+d \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} (a-1)\cdot x+by=-c \\ bx-(a+1)\cdot y=-d \end{cases}$. Per il teorema di Cramer – Leibniz, esso ha una sola soluzione, quindi un solo punto unito, che in questo caso si chiama centro della similitudine, se $\begin{vmatrix} a-1 & b \\ b & -(a+1) \end{vmatrix}=-a^2+1-b^2\neq 0\Rightarrow a^2+b^2\neq 1$. Visto che il determinante coincide con il quadrato del rapporto di similitudine, ogni similitudine non isometria ha un solo punto unito che è il centro. Se invece abbiamo un'isometria il sistema può avere da 0 punti uniti (la traslazione) a 1 retta di punti uniti.

- Così la similitudine non isometria $\zeta:\begin{cases} x'=2x+y \\ y'=x-2y-1 \end{cases}$, ha un solo punto unito, come si vede risolvendo il sistema: $\begin{cases} x=2x+y \\ y=x-2y-1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x+y=0 \\ x-3y=1 \end{cases}\Rightarrow x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}=\frac{-1}{-4}=\frac{1}{4};\ y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-4}=\frac{1}{-4}=-\frac{1}{4}$. Verifichiamo che effettivamente è unito: $P\equiv\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{4}\right)\xrightarrow{\zeta}P'\equiv\left(2\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{4};\frac{1}{4}+\frac{2}{4}-1\right)\equiv\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{4}\right)$.
- La traslazione $t_{(1,2)}:\begin{cases} x'=x+1 \\ y'=y+2 \end{cases}$ non ha punti uniti: $\begin{cases} x=x+1 \\ y=y+2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 0=1 \\ 0=2 \end{cases}$.
- Infine la simmetria assiale $s_{3x-2y+4=0}:\begin{cases} x'=-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-\frac{24}{13} \\ y'=\frac{12}{13}x+\frac{5}{13}y+\frac{16}{13} \end{cases}$, ha una retta di punti uniti ,che ovviamente è l'asse: $\begin{cases} x=-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-\frac{24}{13} \\ y=\frac{12}{13}x+\frac{5}{13}y+\frac{16}{13} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 13x+5x-12y+24=0 \\ 12x+5y-13y+16=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 18x-12y+24=0 \\ 12x-8y+16=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 3x-2y+4=0 \\ 3x-2y+4=0 \end{cases}$.

Livello 3

19. Determinare i punti uniti delle similitudini assegnate negli esercizi da 1 a 12.

20. Dire perché la similitudine di leggi $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$ è una isometria. [Ha rapporto di similitudine 1]

21. Determinare le leggi di una similitudine inversa. $\left[\zeta^{-1} : \begin{cases} x = \frac{a}{a^2+b^2}x' + \frac{b}{a^2+b^2}y' - \frac{ac+bd}{a^2+b^2} \\ y = \frac{b}{a^2+b^2}x' - \frac{a}{a^2+b^2}y' + \frac{ad-bc}{a^2+b^2} \end{cases} \right]$

Livello 3

Determinare le equazioni delle rette trasformate nelle similitudini di leggi indicate

22. $y = -3x + 1,\ \zeta : \begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases}$; $x + 4y - 1 = 0,\ \zeta : \begin{cases} x' = x + 2y + 1 \\ y' = 2x - y - 1 \end{cases}$; $x + y = 0, \zeta : \begin{cases} x' = -x + y - 2 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$

[$y = -2x + 1$; $9x - 2y - 16 = 0$; $y = -1$]

23. $3x - 4y - 5 = 0,\ \zeta : \begin{cases} x' = 4x + y \\ y' = x - 4y \end{cases}$; $x - 4y = 0,\ \zeta : \begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = -4x - 3y \end{cases}$; $3x - 5y + 1 = 0,\ \zeta : \begin{cases} x' = x - 3y - 2 \\ y' = -3x - y + 2 \end{cases}$

[$8x + 19y - 85 = 0$; $19x + 8y = 0$; $9x - 2y + 27 = 0$]

24. $x + 7y + 5 = 0,\ \zeta : \begin{cases} x' = x - y - 2 \\ y' = -x - y + 1 \end{cases}$; $ax + by + c = 0, \zeta : \begin{cases} x' = x - y \\ y' = -x - y \end{cases}$; $ax + by + c = 0,\ \zeta : \begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases}$

[$3x + 4y - 3 = 0$; $(a - b)\cdot x - (a + b)\cdot y + 2c = 0$; $(a + b)\cdot x + (a - b)\cdot y + 2c = 0$]

Leggi delle trasformazioni di affinità

A questo punto non ci rimane altro che procedere con un'ultima generalizzazione: considerare le generiche leggi lineari che governano isometrie e similitudini, eliminando ogni condizione.

Definizione 10

Una trasformazione fra punti del piano le cui leggi sono α: $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$, con $a \cdot b' - b \cdot a' \neq 0$, si chiama **affinità**.

Che cosa significa?

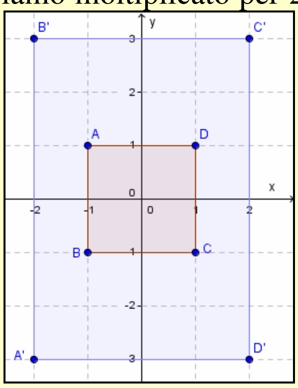
Affine deriva dal latino *adfinis* che vuol dire "confinante". In genere nella lingua italiana viene usato con il significato di *vicino*, da non intendersi però in senso spaziale. Si parla per esempio di *affinità di intenti*, di *affini della moglie o del marito* per intendere i parenti del coniuge; in certe insegne di negozi è scritto: *salumi e affini*. In matematica quindi due oggetti affini hanno qualcosa che li accomuna, che non è però né la forma né la misura.

Avevamo detto che avremmo eliminato ogni condizione, ma ne abbiamo imposta una ($a \cdot b' - b \cdot a' \neq 0$). Ciò dipende da una questione molto semplice. Noi stiamo considerando trasformazioni che a un punto associano al massimo un punto. In questo caso ciò significa che il sistema che definisce le leggi dell'affinità, considerato nelle incognite x e y, deve avere un'unica soluzione. Grazie al teorema di Cramer–Leibniz, ciò accadrà solo se il determinante della matrice dei coefficienti non è nullo, cioè solo se: $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = a \cdot b' - b \cdot a' \neq 0$. Si nota facilmente che effettivamente le leggi dell'affinità comprendono come caso particolare sia le isometrie sia le similitudini. Fra le affinità *pure* (cioè non isometrie né similitudini) ve ne sono alcune che sono più interessanti di altre da studiare o per la loro relativa semplicità o perché rappresentano argomenti che in qualche modo già conosciamo, anche se in altre forme.

Definizione 11

Un'affinità le cui leggi sono $\delta_{a,b}$: $\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$, si chiama **dilatazione**.

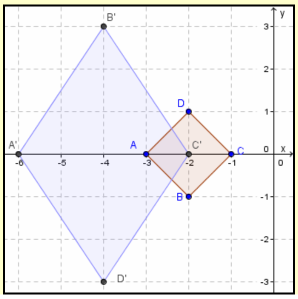
Esempio 27

- Vogliamo dilatare il quadrato di vertici $A \equiv (-1; 1)$, $B \equiv (-1; -1)$, $C \equiv (1; -1)$, $D \equiv (1; 1)$, applicandogli le leggi: $\delta_{2,-3}$: $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = -3y \end{cases}$. Otteniamo i seguenti trasformati: $A \equiv (-1; 1) \xrightarrow{\delta_{2,-3}} A' \equiv (-2; -3)$, $B \equiv (-1; -1) \xrightarrow{\delta_{2,-3}} B' \equiv (-2; 3)$, $C \equiv (1; -1) \xrightarrow{\delta_{2,-3}} C' \equiv (2; 3)$, $D \equiv (1; 1) \xrightarrow{\delta_{2,-3}} D' \equiv (2; -3)$. Rappresentiamo in figura. Come si vede abbiamo ottenuto un rettangolo le cui dimensioni misurano 4 e 6 unità. Tenuto conto che il quadrato iniziale aveva lato che misurava 2 unità, in pratica abbiamo moltiplicato per 2 la dimensione sull'asse delle ascisse e per 3 quella sull'asse delle ordinate 

.

338

- Non ci inganni l'esempio precedente, dato che il risultato è stato così *perfetto* solo perché i lati del quadrato erano paralleli agli assi coordinati, quindi l'influsso della *dilatazione* su di essi è stato immediato. Se invece ciò non accade risulta più difficile avvertire l'apporto delle costanti dilatative, come si nota nella successiva immagine, in cui abbiamo applicato la stessa dilatazione a un altro quadrato, disposto in modo diverso rispetto agli assi coordinati. Questa volta la figura è, almeno apparentemente, un rombo. In ogni caso però ogni punto ha *dilatato* la propria posizione di 2 unità sull'asse x e di -3 sull'asse y. Ciò comporta una *dilatazione* di ogni quadratino unitario in un rettangolo di area 6; quindi pensiamo che l'area di $A'B'C'D'$ sia 6 volte quella di $ABCD$. Verifichiamo. Il lato del quadrato misura $\sqrt{2}$, quindi l'area è 2 unità quadrate. L'area di $A'B'C'D'$, che effettivamente è un rombo, è: $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$.



L'ultima parte dell'esempio precedente ci fa congetturare che in una dilatazione un poligono (non necessariamente un quadrato) avente una certa area Q, si trasforma in un altro poligono la cui area è $a \cdot b$ volte Q, con a e b caratteristiche della dilatazione. In effetti noi ci proponiamo di provare un risultato più generale.

Teorema 33
In un'affinità il rapporto delle aree fra figure corrispondenti è costante.

Dimostrazione

Senza perdere di generalità possiamo lavorare sul quadrato unitario di vertici i punti $A \equiv (1; 0)$, $B \equiv (1; 1)$, $C \equiv (0; 1)$, $O \equiv (0; 0)$. Gli applichiamo una generica affinità α: $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$, ottenendo i punti trasformati: $A' \equiv (a + c; a' + c')$; $B' \equiv (a + b + c; a' + b' + c')$; $C' \equiv (b + c; b' + c')$; $O' \equiv (c; c')$. Per calcolare l'area di $A'B'C'O'$, suddividiamo $A'B'C'O'$ nei triangoli $A'B'C'$ e $B'C'O'$. Ottenendo $\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} a+c & a'+c' & 1 \\ a+b+c & a'+b'+c' & 1 \\ b+c & b'+c' & 1 \end{vmatrix} +$

$+\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} c & c' & 1 \\ a+b+c & a'+b'+c' & 1 \\ b+c & b'+c' & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot |ab' - a'b| + \frac{1}{2} \cdot |ab' - a'b| = |ab' - a'b|$. Il precedente valore è proprio il rapporto delle aree di $A'B'C'O'$ e $ABCO$, che è perciò costante e dipende solo dai parametri dell'affinità.

Definizione 12
Nell'affinità α: $\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$ il numero $|ab' - a'b|$, si chiama **costante dell'affinità**.

Definizione 13
Un'affinità di costante unitaria si chiama **equiestensione**.

Esempio 28
Vogliamo stabilire che la costante di una dilatazione è proprio il prodotto, in valore assoluto, dei suoi parametri. Infatti in questo caso abbiamo $a' = b = 0$, quindi esso vale ab'. Applichiamo l'affinità

$\alpha: \begin{cases} x' = x + 2y + 1 \\ y' = -x + y - 2 \end{cases}$, al triangolo di vertici $A \equiv (1; 1)$, $B \equiv (3; 2)$, $C \equiv (2; -3)$, ottenendo: $A' \equiv (1+2+1; -1+1-2) \equiv (4; -2)$, $B' \equiv (3 + 4 + 1; -3+ 2 - 2) \equiv (8; -3)$, $C' \equiv (2 - 6+1; -2 -3-2) \equiv (-3; -7)$. Calcoliamo le aree dei due triangoli: $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{9}{2}; S_{A'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 8 & -3 & 1 \\ -3 & -7 & 1 \end{vmatrix} = \frac{27}{2}$. Il loro rapporto è 3, che coincide con quanto atteso: $|ab' - a'b| = |1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2| = |1 + 2| = 3$.

Nell'esempio 27 avevamo avuto la sensazione che un quadrato fosse trasformato, in generale, in un rombo. In effetti sussiste un teorema più generale che è la generalizzazione del corollario 3; e si dimostra con una tecnica analoga.

Teorema 34

Un'affinità conserva il parallelismo fra rette.

Vogliamo concludere cercando gli eventuali punti uniti di un'affinità.

Esempio 29

Consideriamo l'affinità dell'esempio precedente. Per cercare i suoi eventuali punti uniti dobbiamo risolvere il seguente sistema: $\begin{cases} x = x + 2y + 1 \\ y = -x + y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = -1 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = -2 \end{cases}$. Concludiamo dicendo che vi è un unico punto unito: $U \equiv \left(-2; -\frac{1}{2}\right)$. Verifichiamo: $U \equiv \left(-2, -\frac{1}{2}\right) \xrightarrow{\alpha} U' \equiv \left(-2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1, 2 - \frac{1}{2} - 2\right) \equiv \left(-2, -\frac{1}{2}\right) \equiv U$.

In effetti quanto è accaduto nell'esempio precedente non è un fatto generale.

Teorema 35

Una affinità può avere nessun punto unito, un solo punto unito o una retta di punti uniti.

Dimostrazione

Cerchiamo gli elementi uniti dell'affinità di legge: $\alpha: \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$, quindi risolviamo il sistema nelle incognite $(x; y)$: $\begin{cases} x = ax + by + c \\ y = a'x + b'y + c' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-1) \cdot x + by = -c \\ a'x + (b'-1) \cdot y = c' \end{cases}$. Il sistema ha una sola soluzione se $\begin{vmatrix} a-1 & b \\ a' & b'-1 \end{vmatrix} = ab' - a - b' + 1 - a'b$ è diverso da zero. Se è 0, consideriamo le caratteristiche. Il sistema può avere 0 soluzioni o infinite soluzioni, quindi possono esservi 0 punti uniti o infiniti punti uniti in questo caso appartenenti a una stessa retta

Definizione 14

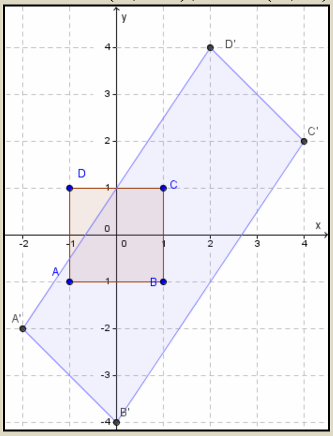
Se un'affinità ha un solo punto unito esso si chiama **centro dell'affinità**.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Trasformare il quadrato di vertici $A \equiv (-1; -1)$, $B \equiv (1; -1)$, $C \equiv (1; 1)$, $D \equiv (-1; 1)$, *mediante l'affinità di leggi* $\alpha: \begin{cases} x' = x + 2y + 1 \\ y' = -x + 3y \end{cases}$.

Abbiamo: $A \equiv (-1; -1) \xrightarrow{\alpha}$, $A' \equiv (-2; -2)$, $B \equiv (1; -1) \xrightarrow{\alpha} B' \equiv (0; -4)$, $C \equiv (1; 1) \xrightarrow{\alpha} C' \equiv (4; 2)$, $D \equiv (-1; 1) \xrightarrow{\alpha} D' \equiv (2; 4)$. Rappresentiamo i due poligoni.



Come si vede il quadrato è stato trasformato in un parallelogramma, almeno così sembra. Per avere la certezza, verifichiamo che i lati opposti sono paralleli, calcolando i coefficienti angolari dei segmenti.

$$m_{A'B'} = \frac{-4+2}{0+2} = -1;\ m_{C'D'} = \frac{4-2}{2-4} = -1; m_{B'C'} = \frac{2+4}{4-0} = \frac{3}{2};\ m_{A'D'} = \frac{4+2}{2+2} = \frac{3}{2}.$$

Determinare i corrispondenti dei seguenti punti nelle dilatazioni $\delta_{a,b}: \begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$.

Livello 1

1. $(-1; 2)$, $a = 3$, $b = 2$; $(0; 0)$, $a = -1$, $b = -4$; $(2; -4)$, $a = -5$, $b = 5$; $\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{2}\right), a = \frac{4}{5}$, $b = 2$

$\left[(0;0);(-3;4);(-10;-20);\left(\frac{4}{25};1\right)\right]$

2. $\left(\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}\right), a = -3, b = \frac{2}{5}$; $\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{5}\right), a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$; $\left(\sqrt{2}; -1\right), a = -\frac{3}{5}$, $b = -2$; $(-1; 0)$, $a = 4$, $b = 1$

$\left[\left(-\frac{9}{4}; -\frac{1}{5}\right); \left(\frac{4}{3}; -\frac{2}{5}\right); \left(-\frac{3}{5} \cdot \sqrt{2}; 2\right); (-4; 1)\right]$

3. $\left(-\sqrt{3}; \frac{1}{2}\right)$, $a = \sqrt{2}$, $b = -\frac{1}{5}$; $\left(\sqrt{2} + 1; 1 - \sqrt{3}\right), a = -2, b = \frac{2}{3}$; $\left(\frac{7}{3}; -\frac{1}{4}\right), a = \frac{3}{2}, b = -\frac{2}{3}$

$\left[\left(-\sqrt{6}; -\frac{1}{10}\right); \left(-2 \cdot \sqrt{2} - 2; \frac{2 \cdot \left(1 - \sqrt{3}\right)}{3}\right); \left(\frac{7}{2}; \frac{1}{6}\right)\right]$

4. $\left(\sqrt{2}; \sqrt{2} - 1\right)$, $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}\right)\right]$

Determinare i corrispondenti dei seguenti punti nelle affinità di leggi indicate.

5. $(1; -2)$, $\begin{cases} x' = x + 2y + 1 \\ y' = -x + 3y \end{cases}$; $(3; -4)$, $\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = -x + y - 2 \end{cases}$; $(-1; 0)$, $\begin{cases} x' = 4x + y \\ y' = 5x - y + 4 \end{cases}$; $(2; -4)$, $\begin{cases} x' = 5x + y - 2 \\ y' = 3x + y - 4 \end{cases}$

[(–2; –7); (0; –9); (–4; –1); (4; –2)]

6. $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right),\begin{cases}x'=2x+y-3\\y'=-4x+y-2\end{cases}$; $\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{4}\right),\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x+y\\y'=\frac{3}{2}x+y\end{cases}$; $\left(-\frac{8}{3};\frac{1}{5}\right),\begin{cases}x'=-\frac{2}{3}x+y\\y'=-\frac{4}{5}x+\frac{1}{2}y-2\end{cases}$

$\left[\left(-\frac{3}{2};-\frac{7}{2}\right);\left(\frac{1}{2};2\right);\left(\frac{89}{45};\frac{7}{30}\right)\right]$

7. $\left(-\frac{7}{3};\frac{1}{4}\right),\begin{cases}x'=-\frac{1}{2}x+y\\y'=\sqrt{2}x+y-\sqrt{2}\end{cases}$ $\left(\sqrt{2};1\right),\begin{cases}x'=\sqrt{2}x+1\\y'=-2x+y-2\end{cases}$ $\left(\sqrt{2};-\sqrt{3}\right),\begin{cases}x'=\sqrt{3}x+\sqrt{2}y\\y'=-\sqrt{3}x+\sqrt{2}y-1\end{cases}$

$\left[\left(\frac{17}{12};\frac{3-40\cdot\sqrt{2}}{12}\right);\left(0;-2\cdot\sqrt{6}-1\right)\right]$

Lavoriamo insieme

Riconsideriamo il quadrato ABCD e l'affinità di leggi $\alpha:\begin{cases}x'=x+2y+1\\y'=-x+3y\end{cases}$ *, del precedente box. Vogliamo calcolare il rapporto di affinità.*

Cominciamo a calcolare le aree dei due poligoni. Abbiamo: $S_{ABCD} = 2^2 = 4$; $S_{A'B'C'D'} = 48 - 2 \cdot (2 + 12) = 48 - 28 = 20$. Il rapporto di affinità è perciò 20/4 = 5. Calcoliamolo analiticamente: per la Definizione 12 esso è uguale a $|1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1)| = |3 + 2| = 5$.

Livello 2

Trasformare i seguenti triangoli secondo l'affinità di leggi indicate, determinare poi le aree dei due triangoli, calcolando quindi il rapporto di affinità

8. $A \equiv (-1; 0)$, $B \equiv (0; 1)$, $C \equiv (1; 4)$; $\begin{cases}x'=2x+3y-1\\y'=2x-3y+2\end{cases}$ [$A' \equiv (-3; 0)$, $B' \equiv (2;-1)$, $C' \equiv (13;-8)$, $k = 12$]

9. $A \equiv (1; -1)$, $B \equiv (0; 0)$, $C \equiv (1; 2)$; $\begin{cases}x'=x+y+1\\y'=2x-4y\end{cases}$ [$A' \equiv (1; 6)$, $B' \equiv (1; 0)$, $C' \equiv (4; -6)$; $k = 6$]

10. $A \equiv (0; 3)$, $B \equiv (1; 2)$, $C \equiv (4; 3)$; $\begin{cases}x'=x+y-2\\y'=x-5y-1\end{cases}$ [$A' \equiv (1; -16)$, $B' \equiv (1; -10)$, $C' \equiv (5; -12)$; $k = 6$]

11. $A \equiv (3; 1)$, $B \equiv (0; 1)$, $C \equiv (1; 2)$; $\begin{cases}x'=-3x+y-5\\y'=x-4y+2\end{cases}$ [$A' \equiv (-13; 1)$, $B' \equiv (-4; -2)$, $C' \equiv (-6;-5)$; $k = 11$]

12. $A \equiv (1; 1)$, $B \equiv (2; -1)$, $C \equiv (-3; 2)$; $\begin{cases}x'=3x-2y+1\\y'=2x-3y+2\end{cases}$ [$A' \equiv (2; 1)$, $B' \equiv (9; 9)$, $C' \equiv (-12; -10)$; $k = 5$]

13. $A \equiv (3; 1)$, $B \equiv (2; -2)$, $C \equiv (0; 4)$; $\begin{cases}x'=4x-y+2\\y'=x-2y+1\end{cases}$ [$A' \equiv (13; 2)$, $B' \equiv (12; 7)$, $C' \equiv (-2; -7)$; $k = 7$]

Livello 3

14. Considerato il triangolo rettangolo isoscele di vertici $O \equiv (0; 0)$, $A \equiv (1; 1)$ e $B \equiv (2; 0)$ applicarvi l'affinità di leggi $\begin{cases}x'=x+y\\y'=x+2y\end{cases}$, quindi dedurne che una affinità è una trasformazione che non conserva né le misure dei lati, né quelle degli angoli. [$O' \equiv (0; 0)$, $A' \equiv (2; 3)$, $B' \equiv (2; 2)$]

15. La conoscenza di quanti punti che si corrispondono è sufficiente per determinare un'affinità? Giustificare la risposta. [3]

16. La composizione di affinità è interna nell'insieme dei quadrati?
[No, in generale la trasformazione affine di un quadrato è un parallelogramma non per forza quadrato]

Dato il triangolo ABC determinare l'affinità, se esiste, che lo trasforma nel triangolo A'B'C'.

17. $A \equiv (0; 4)$, $B \equiv (-2; -1)$, $C \equiv (3; -2)$; $A' \equiv (-1; 7)$, $B' \equiv (0; -5)$, $C' \equiv (11; -2)$ $\left[\alpha: \begin{cases} x' = 2x - y + 3 \\ y' = x + 2y - 1 \end{cases}\right]$

18. $A \equiv (1; 1)$, $B \equiv (-3; 0)$, $C \equiv (0; -3)$; $A' \equiv (-1; 1)$, $B' \equiv (0; -3)$, $C' \equiv (2; -2)$ $\left[\alpha: \begin{cases} x' = -\frac{1}{15}x - \frac{1}{15}y - \frac{1}{5} \\ y' = \frac{13}{15}x + \frac{8}{15}y - \frac{2}{5} \end{cases}\right]$

19. $A \equiv (0; 1)$, $B \equiv (-1; -1)$, $C \equiv (3; 2)$; $A' \equiv A$, $B' \equiv C$, $C' \equiv B$ $\left[\alpha: \begin{cases} x' = -3x + 8y - 8 \\ y' = -x + y \end{cases}\right]$

20. $A \equiv (0; 0)$, $B \equiv (-1; 4)$, $C \equiv (2; 1)$; $A' \equiv B$, $B' \equiv C$, $C' \equiv A$ $\left[\alpha: \begin{cases} x' = \frac{1}{9}x + \frac{7}{9}y - 1 \\ y' = -\frac{13}{9}x - \frac{10}{9}y + 4 \end{cases}\right]$

21. $A \equiv (3;3)$,$B \equiv (-1;2)$, $C \equiv (0;-2)$; $A' \equiv (-1; 3)$, $B' \equiv (4; -2)$, $C' \equiv (3; 0)$ $\left[\alpha: \begin{cases} x' = -\frac{21}{17}x - \frac{1}{17}y + \frac{49}{17} \\ y' = \frac{22}{17}x - \frac{3}{17}y - \frac{6}{17} \end{cases}\right]$

Determinare le equazioni delle rette r trasformate nelle affinità di leggi indicate

22. $y = -x$, $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 2x - y \end{cases}$; $x + y - 1 = 0$, $\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = 2x - 3y \end{cases}$; $x + 2y = 0$, $\begin{cases} x' = -4x + 5y \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$
[$y = 3x$; $x - 2 = 0$; $x + 13y + 13 = 0$]

23. $3x - y - 2 = 0$, $\begin{cases} x' = -3x + 2y - 1 \\ y' = x - 4y + 8 \end{cases}$ $3x - 4y = 0$, $\begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = -x - y + 4 \end{cases}$ $x - 5y + 1 = 0$, $\begin{cases} x' = x - 3y - 2 \\ y' = -x + y \end{cases}$
[$11x + 3y + 7 = 0$; $3x - 4y = 0$; $2x + y + 5 = 0$]

24. $4x + 7y + 5 = 0$, $\begin{cases} x' = x - y - 2 \\ y' = -3x + 1 \end{cases}$; $ax + by + c = 0$, $\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = 2x - y \end{cases}$; $ax + by + c = 0$, $\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = -x + y - 2 \end{cases}$
[$21x + 11y + 16 = 0$; $(a + 2b) \cdot x + (b + 2a) \cdot y + 3c = 0$; $(a + b) \cdot x + (b - a) \cdot y + b - 3a + 2c = 0$]

Considerato il quadrato di vertici O ≡ (0; 0), A ≡ (1; 0), B ≡ (1; 1), C ≡ (0; 1), applicarvi le seguenti affinità verificando che esse sono delle equivalenze

25. $\alpha: \begin{cases} x' = kx \\ y' = \frac{1}{k}y \end{cases}$, $\forall k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ [$O' \equiv O$, $A' \equiv (k; 0)$, $B' \equiv \left(k; \frac{1}{k}\right)$, $C' \equiv \left(0; \frac{1}{k}\right)$]

26. $\alpha: \begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 1 \end{cases}$ [$O' \equiv (2; 1)$, $A' \equiv \left(3; \frac{3}{2}\right)$, $B' \equiv (2; 2)$, $C' \equiv \left(1; \frac{3}{2}\right)$]

27. $\alpha: \begin{cases} x' = 2x + 3y + 1 \\ y' = 3x + 5y - 2 \end{cases}$ [$O' \equiv (1; -2)$, $A' \equiv (3; 1)$, $B' \equiv (6; 6)$, $C' \equiv (4; 3)$]

Lavoriamo insieme

Determinare le rette unite dell'affinità di leggi $\alpha:\begin{cases} x' = x + 2y + 1 \\ y' = -x + 3y \end{cases}$.

Consideriamo una generica retta di equazione $ax + by + c = 0$ e determiniamo la sua trasformata secondo l'affinità precedente. Cominciamo a determinare l'affinità inversa: $\alpha^{-1}:\begin{cases} x = \dfrac{3x' - 2y' - 3}{5} \\ y = \dfrac{x' + y' - 1}{5} \end{cases}$. Adesso determiniamo la retta trasformata:

$$a \cdot \frac{3x' - 2y' - 3}{5} + b \cdot \frac{x' + y' - 1}{5} + c = 0 \Rightarrow (3a + b) \cdot x' + (-2a + b) \cdot y' - 3a - b + 5c = 0$$

Affinché la retta sia unita i rapporti fra i coefficienti delle incognite e i termini noti devono essere uguali. $\frac{3a+b}{a} = \frac{-2a+b}{b} = \frac{-3a-b+5c}{c}$. Dobbiamo perciò risolvere il sistema di due equazioni in 3 incognite:

$$\begin{cases} \dfrac{3a+b}{a} = \dfrac{-2a+b}{b} \\ \dfrac{3a+b}{a} = \dfrac{-3a-b+5c}{c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \cdot (3a+b) = a \cdot (-2a+b) \\ c \cdot (3a+b) = a \cdot (-3a-b+5c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a^2 + 2ab + b^2 = 0 \\ 3a^2 - 2ac + bc + ab = 0 \end{cases}.$$

Questo sistema è privo di soluzioni reali, a parte quella nulla non accettabile ($a = b = c = 0$) quindi non vi sono rette unite per l'affinità.

Se volessimo evitare la risoluzione di un sistema con più incognite che equazioni possiamo fare nel seguente modo. Consideriamo l'affinità $\alpha:\begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = 2x - y \end{cases}$ e la sua inversa: $\alpha^{-1}:\begin{cases} x = \dfrac{x' + y' + 1}{3} \\ y = \dfrac{2x' - y' + 2}{3} \end{cases}$. Trasformiamo la retta generica $y = mx + p$: $\frac{2x' - y' + 2}{3} = m \cdot \frac{x' + y' + 1}{3} + p \Rightarrow (2 - m) \cdot x' - (1 + m) \cdot y' + 2 - m - 3p = 0$.

Imponiamo la coincidenza delle rette: $\frac{2-m}{m} = 1 + m = \frac{2-m-3p}{p}$. Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} 2 - m = m + m^2 \\ p + mp = 2 - m - 3p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \sqrt{3} - 1 \\ p = 2 - \sqrt{3} \end{cases} \vee \begin{cases} m = -\sqrt{3} - 1 \\ p = 2 + \sqrt{3} \end{cases}$$

Quindi le rette $y = (\sqrt{3} - 1) \cdot x + 2 - \sqrt{3}$, $y = (-\sqrt{3} - 1) \cdot x + 2 + \sqrt{3}$ sono unite per l'affinità. Non abbiamo finito poiché dovremmo controllare che non vi siano rette parallele all'asse delle ordinate che siano unite. $x - h = 0 \Rightarrow \frac{x' + y' + 1}{3} - h = 0 \Rightarrow x' + y' + 1 - 3h = 0$. Dato che la trasformata ha sempre il termine in y, non vi sono rette unite parallele all'asse delle y.

Determinare tutte le rette unite (non luogo di punti uniti) delle seguenti affinità. Suggerimento: considerare le rette y = mx e usare un software di tipo CAS

28. $\alpha:\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 2x - y \end{cases}$ $\alpha:\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = 2x - 3y \end{cases}$ $\left[y = -(\sqrt{3} + 1) \cdot x,\ y = (\sqrt{3} - 1) \cdot x;\ y = -\frac{\sqrt{10} + 2}{3} \cdot x,\ y = \frac{\sqrt{10} - 2}{3} \cdot x \right]$

29. $\alpha:\begin{cases} x' = -4x + 5y + 2 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$ $\left[y = \frac{5 + 3 \cdot \sqrt{5}}{10} \cdot x + \frac{1 - 3 \cdot \sqrt{5}}{10},\ y = \frac{5 - 3 \cdot \sqrt{5}}{10} \cdot x + \frac{1 + 3 \cdot \sqrt{5}}{10} \right]$

30. $\alpha: \begin{cases} x' = -x + 2y - 1 \\ y' = x - y + 8 \end{cases}$ $\left[y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x + \frac{15 - 7 \cdot \sqrt{2}}{2};\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x + \frac{15 + 7 \cdot \sqrt{2}}{2} \right]$

31. $\alpha: \begin{cases} x' = x - 4y + 5 \\ y' = -x - y \end{cases}$ $\left[y = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \cdot x + \frac{15 + 5 \cdot \sqrt{5}}{8},\ y = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \cdot x + \frac{15 - 5 \cdot \sqrt{5}}{8} \right]$

32. $\alpha: \begin{cases} x' = x - y \\ y' = -x + 5y - 3 \end{cases}$ $\left[y = \left(\sqrt{5} - 2\right) \cdot x + 3 \cdot \sqrt{5} - 6,\ y = -\left(\sqrt{5} + 2\right) \cdot x - 3 \cdot \sqrt{5} - 6 \right]$

33. $\alpha: \begin{cases} x' = 2x - y + 4 \\ y' = -x + y - 3 \end{cases}$ $\left[y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot x + \frac{5 + 3 \cdot \sqrt{5}}{2},\ y = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \cdot x + \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \right]$

34. $\alpha: \begin{cases} x' = x - 2y + 3 \\ y' = 2x - y - 3 \end{cases}$ [Non vi sono rette unite reali]

35. Determinare l'affinità che ha la retta di equazione $3x - y + 7 = 0$ come luogo di punti uniti e fa corrispondere all'origine il punto $A \equiv (3; -2)$. $\left[\alpha: \begin{cases} x' = \frac{16}{7}x - \frac{3}{7}y + 3 \\ y' = -\frac{6}{7}x + \frac{9}{7}y - 2 \end{cases} \right]$

L'angolo di Derive

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%203/3-2/3-2-1.exe puoi vedere come studiare le trasformazioni geometriche con Derive. Clicca su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%203/3-2/3-2-1.dfw per scaricare il relativo file in Derive.

Attività Verificare gli esercizi assegnati.

L'angolo di Geogebra e Cabri

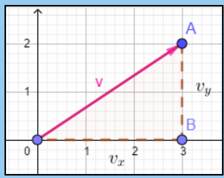
Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%203/3-2/3-2-2.exe puoi vedere come studiare le trasformazioni geometriche con Geogebra. Clicca su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%203/3-2/3-2-2.7z per scaricare il relativo file in Geogebra.

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%203/3-2/3-2-3.exe puoi vedere come studiare le trasformazioni geometriche con Cabri. Clicca su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%203/3-2/3-2-3.7z per scaricare il relativo file in Cabri.

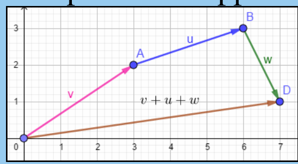
Attività

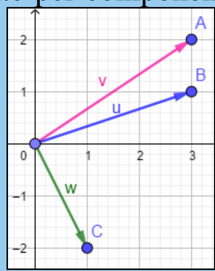
1. Studiare l'omotetica di una retta rispetto a un punto appartenente alla retta, al variare del rapporto dell'omotetia.
2. Studiare l'omotetica di una retta rispetto a un punto non appartenente alla retta, al variare del rapporto di omotetia.
3. Studiare l'omotetica di una retta rispetto a un punto non appartenente alla retta, al variare del punto.
4. Verificare i risultati degli esercizi assegnati.

L'angolo della MateFisica

Il concetto di vettore o grandezza vettoriale è fondamentale nello studio della fisica. Un vettore piano in fisica è rappresentato, come in matematica, da una coppia ordinata di numeri reali: $\vec{v} \equiv \left(v_x; v_y\right)$. Il suo modulo, utilizzando il Teorema di Pitagora, 

, è $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

Un'altra importante proprietà, riguarda la determinazione della composizione di due o più grandezze vettoriali. Per esempio per determinare la risultante di due o più forze applicate ad uno stesso corpo, possiamo usare diversi metodi, da quello detto *punta-coda*, 

, a quello più *algebrico*, di determinare le diverse componenti dei vettori e sommarle componente per componente. Con riferimento alla figura precedente, intanto applichiamo tutti i vettori nell'origine, 

, si determinano le componenti: $\vec{v} \equiv (3;2), \vec{u} \equiv (3;1), \vec{w} \equiv (1;-2)$. Il vettore risultante è $\vec{v} + \vec{u} + \vec{w} \equiv (3+3+1; 2+1-2) \equiv (7;1)$, che in effetti corrisponde alle componenti del vettore già individuato con il metodo *punta-coda*.

Inoltre le leggi di trasformazioni di Galileo, rappresentano le diverse componenti di un punto materiale in un sistema di riferimento spazio-temporale *Oxyt*, che si muova di moto traslatorio lungo l'asse delle ascisse, rispetto al primo, con velocità (**v**; 0). Esse sono: $\begin{cases} x' = x + v \cdot t \\ y' = y \\ t' = t \end{cases}$.

Attività

1. Dati $\overrightarrow{v_1} \equiv (-1;0), \overrightarrow{v_2} \equiv (2;-1), \overrightarrow{v_3} \equiv (0;2)$, calcolare $\left|\overrightarrow{v_1} + 2\overrightarrow{v_2} - 3\overrightarrow{v_3}\right|$. [≈ 8,5]
2. Dati $\overrightarrow{v_1} \equiv (x-1;1), \overrightarrow{v_2} \equiv (1;x+1), \overrightarrow{v_3} \equiv (1;2)$, determinare, se esiste, il valore reale di *x*, affinché $\left|\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}\right| = 1$. [$x = 1 \vee x = 2$]
3. In relazione al precedente quesito, per quali valori reali di *a*, il problema $\left|\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}\right| = a$, ammette soluzioni reali? [$a \geq 0,5$]
4. Dati i vettori forza: $\overrightarrow{F_1} \equiv (2x-1;3), \overrightarrow{F_2} \equiv (3;1-2x), \overrightarrow{F_3} \equiv (x+1;4x-1)$, determinare, se esiste, il valore di *x* in modo che la risultante delle forze sia nulla. [Impossibile]
5. Come il precedente con $\overrightarrow{F_1} \equiv (3x-5;1), \overrightarrow{F_2} \equiv (2+x;4-x), \overrightarrow{F_3} \equiv (3-4x;3x+4)$. [$x = -4,5$]
6. Determinare il modulo della somma di due vettori uguali, in funzione del loro modulo **v**, nelle diverse ipotesi seguenti: a) uguale direzione e verso; b) uguale direzione e verso opposto; c) direzione perpendicolare a 90°; d) direzione perpendicolare a 270°. [a) 2**v**; b) 0; c) $\sqrt{2}$ **v**; d) $\sqrt{2}$ **v**]
7. (Simulazione Esami di Stato 02/04/19) Ai vertici di un quadrato *ABCD*, di lato 2 *m*, sono fissate quattro cariche elettriche. La carica in *A* è pari a 9 *nC*, la carica in *B* è pari a 2 *nC*, la carica in *C* è pari a 4 *nC*, la carica in *D* è pari a –3 *nC*. Supponendo che le cariche si trovino nel vuoto, determinare intensità, direzione e verso del campo elettrostatico generato dalle quattro cariche nel centro del quadrato. [|*B*| = 31,8 *N/C*; Direzione e verso Nord]

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi

1. CAS Determinare le leggi della composizione di due simmetrie rispetto agli assi di equazioni $y = mx + p$ e $y = mx + q$, cioè con assi paralleli. La detta composizione è commutativa?

$$\left[\begin{cases} x' = x + 2\cdot\dfrac{m\cdot(p-q)}{m^2+1} \\ y' = y - 2\cdot\dfrac{p-q}{m^2+1} \end{cases};\ \begin{cases} x' = x - 2\cdot\dfrac{m\cdot(p-q)}{m^2+1} \\ y' = y + 2\cdot\dfrac{p-q}{m^2+1} \end{cases}\right]$$

2. CAS Con riferimento al problema precedente, dopo avere osservato che la trasformazione composizione è una traslazione, determinare la direzione e l'ampiezza del vettore.

[Direzione ortogonale agli assi e ampiezza doppia della distanza fra i due assi]

3. CAS Sappiamo (Teorema 17), che la composizione di due simmetrie centrali è una traslazione, determinare la direzione e l'ampiezza del vettore.

[Parallelo al segmento che congiunge i due centri e ampiezza pari al doppio di tale segmento]

4. CAS Determinare le leggi della composizione di una traslazione di vettore $\vec{v} \equiv (v; w)$ con una simmetria di asse la retta di equazione $ax + by + c = 0$. La detta composizione è commutativa?

$$\left[s\circ t: \begin{cases} x' = \dfrac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\cdot x - 2\cdot\dfrac{ab}{a^2+b^2}\cdot y + \dfrac{b^2v-2a\cdot(bw+c)}{a^2+b^2} \\ y' = 2\cdot\dfrac{ab}{a^2+b^2}\cdot x + \dfrac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\cdot y + \dfrac{b\cdot(2av+bw+2c)-a^2w}{a^2+b^2} \end{cases};\right.$$

$$\left. t\circ s: \begin{cases} x' = \dfrac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\cdot x - 2\cdot\dfrac{ab}{a^2+b^2}\cdot y + \dfrac{a^2v-2ac+b^2v}{a^2+b^2} \\ y' = 2\cdot\dfrac{ab}{a^2+b^2}\cdot x + \dfrac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\cdot y - \dfrac{b\cdot(bw-2c)+a^2w}{a^2+b^2} \end{cases}\right]$$

5. CAS Determinare le leggi della composizione di due simmetrie rispetto agli assi di equazioni $y = mx + p$ e $y = nx + q$, con $m \neq n$, cioè con assi incidenti. La detta composizione è commutativa?

$$\left[\begin{cases} x' = \dfrac{\left(m^2n^2-m^2+4mn-n^2+1\right)\cdot x + 2\cdot\left(m^2n-mn^2+m-n\right)\cdot y - 2m^2nq + 2mn^2p - 2mp + 4np - 2nq}{\left(m^2+1\right)\cdot\left(n^2+1\right)} \\ y' = \dfrac{2\cdot\left(m^2n-mn^2+m-n\right)\cdot x - \left(m^2n^2-m^2+4mn-n^2+1\right)\cdot y - 2m^2q + 4mnp - 2n^2p + 2p - 2q}{\left(m^2+1\right)\cdot\left(n^2+1\right)} \end{cases}\right.$$

$$\left.\begin{cases} x' = \dfrac{\left(m^2n^2-m^2+4mn-n^2+1\right)\cdot x - 2\cdot\left(m^2n-mn^2+m-n\right)\cdot y - m^2nq + mn^2p + mp - 2mq + mnq}{\left(m^2+1\right)\cdot\left(n^2+1\right)} \\ y' = \dfrac{2\cdot\left(m^2n-mn^2+m-n\right)\cdot x + \left(m^2n^2-m^2+4mn-n^2+1\right)\cdot y + 2m^2q - 4mnq + 2n^2p + 2p - 2q}{\left(m^2+1\right)\cdot\left(n^2+1\right)} \end{cases}\right]$$

6. CAS Determinare la composizione di una simmetria assiale di asse r: $y = mx + q$ con una traslazione di vettore $\vec{v} \equiv \left(a; 1 - \dfrac{a}{m}\right)$ (perpendicolare alla direzione di r).

$$\left[\begin{cases} x' = -\dfrac{m^2-1}{m^2+1}\cdot x + 2\cdot\dfrac{m}{m^2+1}\cdot y - a + \dfrac{2mq}{m^2+1} \\ y' = \dfrac{2m}{m^2+1}\cdot x + \dfrac{m^2-1}{m^2+1}\cdot y - \dfrac{a}{m} + \dfrac{2q}{m^2+1} \end{cases}\right]$$

7. CAS La composizione di una traslazione e di una simmetria centrale di centro C, è ancora una simmetria centrale di centro C'. In che relazione sono il segmento CC' e il vettore?

[Sono paralleli e CC' è metà dell'ampiezza del vettore]

8. CAS Determinare le leggi di composizione di una rotazione di centro $C \equiv (a; b)$ e ampiezza 90°, con una simmetria centrale di centro $C' \equiv (a', b')$. L'isometria ottenuta è di uno dei due tipi componenti? La detta composizione è commutativa? Giustificare la risposta.
$$\left[r_{C,90} \circ s_{C'} : \begin{cases} x' = y - a - b + 2a' \\ y' = -x + a - b + 2b' \end{cases}; R_{C,90°}, C \equiv (-a + a' - b'; -b + a' + b'); no; s_{C'} \circ r_{C,90} : \begin{cases} x' = y + a + b - 2b' \\ y' = -x - a + b + 2a' \end{cases} \right]$$

9. Determinare le leggi di composizione di una rotazione di centro $C \equiv (a; b)$ e ampiezza 90°, con una simmetria di asse la retta di equazione $x = h$. La detta composizione è commutativa? Giustificare la risposta.
$$\left[r_{C,90} \circ s_{x=h} : \begin{cases} x' = y - a - b + 2h \\ y' = x - a + b \end{cases}; no; s_{x=h} \circ r_{C,90} : \begin{cases} x' = -y + a + b \\ y' = -x - a + b + 2h \end{cases} \right]$$

10. CAS Determinare le leggi di composizione di una rotazione di centro $C \equiv (a; b)$ e ampiezza 90°, con una traslazione di vettore $\vec{v} \equiv (v, w)$. L'isometria ottenuta è di uno dei due tipi componenti? La detta composizione è commutativa? Giustificare la risposta.
$$\left[r_{C,90} \circ t : \begin{cases} x' = -y + a + b + v \\ y' = x - a + b + w \end{cases}; R_{C,90°}, C \equiv \left(\frac{2a + v - w}{2}; \frac{2b + v + w}{2} \right) no; \quad t \circ r_{C,90} : \begin{cases} x' = -y + a + b - w \\ y' = x - a + b + v \end{cases} \right]$$

11. Determinare le leggi di composizione di una rotazione di centro $C \equiv (a; b)$ e ampiezza 90°, simmetria di asse la retta di equazione $y = h$. L'isometria ottenuta è di uno dei due tipi componenti? La detta composizione è commutativa? Giustificare la risposta.
$$\left[r_{C,90} \circ s_{y=h} : \begin{cases} x' = -y + a + b \\ y' = -x + a - b + 2h \end{cases}; no; s_{y=h} \circ r_{C,90} : \begin{cases} x' = y + a + b - 2h \\ y' = x - a + b \end{cases} \right]$$

12. Determinare le leggi di composizione di una rotazione di centro $C \equiv (a; b)$ e ampiezza 90°, simmetria di asse la retta di equazione $x = y$. L'isometria ottenuta è di uno dei due tipi componenti? La detta composizione è commutativa? Giustificare la risposta.
$$\left[r_{C,90} \circ s_{x=y} : \begin{cases} x' = x - a + b \\ y' = -y + a + b \end{cases}; no; s_{x=y} \circ r_{C,90} : \begin{cases} x' = -x + a + b \\ y' = y - a + b \end{cases} \right]$$

13. Determinare tutte le rette unite in un'omotetia di centro $C \equiv (x_C; y_C)$ e rapporto k.

[Tutte le rette passanti per il centro]

14. Verificare che in ogni triangolo vale la seguente proprietà: "Costruito il triangolo i cui vertici sono i punti medi dei lati del triangolo di partenza, l'omotetia di centro il baricentro e rapporto –2 (o $-\frac{1}{2}$) fa corrispondere i triangoli.
$$\left[\begin{array}{l} M_{AB} \equiv \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right) \xrightarrow{\omega_{G,-2}} C \equiv (x_C; y_C) \\ M_{AC} \equiv \left(\frac{x_A + x_C}{2}; \frac{y_A + y_C}{2} \right) \xrightarrow{\omega_{G,-2}} B \equiv (x_B; y_B) \\ M_{BC} \equiv \left(\frac{x_B + x_C}{2}; \frac{y_B + y_C}{2} \right) \xrightarrow{\omega_{G,-2}} A \equiv (x_A; y_A) \end{array} \right]$$

15. Componendo due omotetie di centri O_1 e O_2 e rapporti h e k si ottiene un'omotetia, il cui rapporto è $h \cdot k$ e il centro è O (Teorema 29). Determinare la posizione del centro O rispetto a O_1 e O_2.

[O è allineato con O_1 e O_2 e divide il segmento O_1O_2 nel rapporto $\frac{k-1}{(h-1) \cdot k}$]

16. Componiamo due omotetie con centri distinti e rapporti fra di loro reciproci, che tipo di trasformazione si ottiene? [Una traslazione di vettore di direzione quella del segmento congiungente i due centri]
17. Dimostrare il Teorema 30.
18. Il quadrato Q di vertici i punti $O \equiv (0; 0)$, $A \equiv (2; 0)$, $B \equiv (2; 2)$, $C \equiv (0; 2)$ è trasformato da una similitudine nel quadrato Q' di vertici $O' \equiv \left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right), A \equiv \left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right), B' \equiv \left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right), C' \equiv \left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$. Determinare le leggi della similitudine che muta OA in $O'A'$; $A'B'$; $B'C'$; $C'O'$.
$$\left[\text{a) } \zeta: \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ y' = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2} \end{cases}; \text{ b) } \zeta_1 \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}y + \frac{5}{2} \\ y' = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases}; \text{c) } \zeta: \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ y' = -\frac{1}{2}y + \frac{5}{2} \end{cases}; \text{ d) } \zeta: \begin{cases} x' = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2} \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \end{cases}\right]$$
19. CAS Comporre due similitudini di uguale rapporto k, $\zeta: \begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = bx - ay + d \end{cases}$; $\zeta': \begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = bx - ay + f \end{cases}$. Dopo avere giustificato il fatto che si ottiene ancora una similitudine, determinarne il rapporto di similitudine e le coordinate del centro di similitudine. $\left[k^2; C \equiv \left(-\frac{ac + bd + e}{a^2 + b^2 - 1}; \frac{ad - bc - f}{a^2 + b^2 - 1}\right)\right]$
20. CAS Determinare le leggi di una similitudine composizione fra un'omotetia di centro $C \equiv (a; b)$ e rapporto k e una rotazione di 90° e centro $Q \equiv (c; d)$. Determinare le coordinate del centro S di similitudine.
$$\left[\begin{array}{l} \zeta: \begin{cases} x' = -k \cdot y + b \cdot (k-1) + c + d \\ y' = k \cdot x + a \cdot (1-k) - c + d \end{cases}; \\ S \equiv \left(\frac{(ak + b - d) \cdot (k-1) + c \cdot (k+1)}{k^2 + 1}, \frac{(a + bk - c) \cdot (k-1) - d \cdot (k+1)}{k^2 + 1}\right) \end{array}\right]$$
21. CAS Determinare le leggi di una similitudine composizione fra un'omotetia di centro $C \equiv (a; b)$ e rapporto k e una simmetria di asse la prima bisettrice. Determinare le coordinate del centro S di similitudine. $\left[\zeta: \begin{cases} x' = k \cdot y + b \cdot (1-k) \\ y' = k \cdot x + a \cdot (1-k) \end{cases}; S \equiv \left(\frac{ak + b}{k+1}; \frac{a + bk}{k+1}\right)\right]$
22. Provare che una affinità di leggi $\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$ muta rettangoli in rettangoli, dedurne che essa conserva le ampiezze degli angoli.
23. Studiare l'affinità di leggi $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = bx + ay \end{cases}$ applicandola a un quadrato. Ha punti uniti?
[0, 1 punto unito o una retta di punti uniti]
24. Dimostrare il Teorema 33.
25. Studiare gli elementi uniti di un'affinità.
26. CAS Determinare le leggi della generica affinità inversa. $\left[\alpha^{-1}: \begin{cases} x = \dfrac{e \cdot x' - b \cdot y' + bf - ce}{ae - bd} \\ y = \dfrac{-d \cdot x' + a \cdot y' + cd - af}{ae - bd} \end{cases}\right]$
27. Qual è la struttura dell'insieme delle rotazioni attorno a uno stesso centro di angoli $k \cdot 45°$ con $0 \le k \le 7$? [Gruppo abeliano]
28. Qual è la struttura dell'insieme delle rotazioni attorno a uno stesso centro di angoli $k \cdot 30°$ con $0 \le k \le 11$? [Gruppo abeliano]
29. Qual è la struttura dell'insieme delle rotazioni attorno a uno stesso centro di angoli $k \cdot 100°$ con $0 \le k \le 3$? [Non è un gruppoide, la composizione di una rotazione di 100° con una di 300° è una di 400° che equivale a una di 400° – 360° = 40°]
30. $(\mathbb{Z}_4, +)$ è isomorfo al gruppo delle rotazioni secondo quale angolo? [90°]

31. Il gruppo delle rotazioni di 30° è isomorfo a $\mathbb{Z}_n$, quanto vale n? [12]

Che strutture algebriche hanno i seguenti insiemi rispetto all'operazione di composizione?

32. L'insieme delle isometrie [Gruppo non abeliano]
33. Insieme delle traslazioni. [Gruppo abeliano]
34. Insieme delle simmetrie centrali.
[Non è un gruppoide, la composizione di due simmetrie di centri diversi è una traslazione]
35. Insieme delle simmetrie assiali di assi fra loro paralleli.
[Non è un gruppoide, la composizione di due simmetrie di assi diversi è una traslazione]
36. {Identità, Simmetria rispetto l'asse x, Simmetria rispetto l'asse y, Simmetria rispetto l'origine}.
[Gruppo abeliano]
37. Insieme delle rotazioni di uguale centro. [Gruppo abeliano]
38. Insieme delle omotetie di uguale centro. [Gruppo abeliano]
39. Determinare tutti gli eventuali sottogruppi propri del Gruppo delle trasformazioni {Identità, Simmetria rispetto l'asse x, Simmetria rispetto l'asse y, Simmetria rispetto l'origine}.
[{Identità, Simm. Risp. asse x}, {Identità, Simm. Risp. asse y}, {Identità, Simm. Risp. origine}]

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi

1. (Liceo scientifico PNI 1991/92) In un piano cartesiano ortogonale si indichino con x e y le coordinate di un punto P e con X e Y le coordinate di un punto P'. Si consideri la trasformazione di equazioni: $X = ax + by$; $Y = a'x + b'y$, tale che al punto A di coordinate $x = 1$; $y = 1$ corrisponda il punto A' di coordinate $X = 0$, $Y = 2$ e al punto B di coordinate $x = 1$; $y = 0$ corrisponda il punto B' di coordinate $X = 1$; $Y = 0$. Si studi la trasformazione ottenuta determinando in particolare i punti e le rette che si trasformano rispettivamente in se stessi. [$a = 1$; $b = -1$; $a' = 0$, $b' = 2$; Punti uniti: $(x; 0)$, rette unite: $ax + ay + c = 0$]
2. (Liceo scientifico PNI 1993/94) Si consideri la trasformazione T che muta i punti $A \equiv (1; 0)$, $B \equiv (0; 1)$, $C \equiv (-1; 0)$ di un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, rispettivamente nei punti $A' \equiv (0; 1)$, $B' \equiv (2; -1)$, $C' \equiv (0; -1)$. Si studi la natura di T e si determinino gli elementi che restano uniti nella trasformazione e il rapporto tra le aree dei triangoli corrispondenti ABC e $A'B'C'$.
$$\left[T: \begin{cases} x' = 2y \\ y' = x - y \end{cases}; \text{Affinità;El.uniti:} \left(x; \frac{x}{2}\right), y = -x + h, h \in \mathbb{R}; y = \frac{x}{2}, \text{R.a.} = \frac{1}{2}\right]$$
3. (Liceo scientifico PNI 1998/99) In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy sono dati i punti $P \equiv (x; y)$, $A \equiv (x', y')$, $B \equiv (x'', y'')$, $P' \equiv (X; Y)$, legati dalle seguenti relazioni: $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases}, \begin{cases} x'' = -y' \\ y'' = x' \end{cases}, \begin{cases} X = x'' + 2 \\ Y = y'' - 1 \end{cases}$. Il candidato: a) dica la natura delle trasformazioni T_1; T_2; T_3 rappresentate rispettivamente dalle predette equazioni; b) determini la trasformazione T che fa passare da P a P'; c) studi la trasformazione T enunciandone le proprietà e determinandone, in particolare gli eventuali punti uniti. [a) T_1: omotetia di centro O e rapporto 2); T_2: rotazione di 90° e centro O, T_3: traslazione di vettore $\vec{v} \equiv (2; -1)$; b) $T: \begin{cases} X = -2y + 2 \\ Y = 2x - 1 \end{cases}$; Similitudine di rapporto 2; punto unito: $\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$]
4. (Liceo scientifico PNI 2003/2004) Nel piano è data la seguente trasformazione: $\begin{cases} x \to x \cdot \sqrt{3} - y \\ y \to x + y \cdot \sqrt{3} \end{cases}$. Di quale trasformazione si tratta? [Similitudine]
5. (Liceo scientifico PNI 2004/2005) Le rette r e s d'equazioni rispettive $y = 1 + 2x$ e $y = 2x - 4$ si corrispondono in un'omotetia σ di centro l'origine O. Si determini σ. $\left[\sigma: \begin{cases} x' = -4x \\ y' = -4y \end{cases}\right]$
6. (Liceo scientifico PNI 2004/2005) Si determinino le equazioni di due simmetrie assiali σ e ϕ, la cui

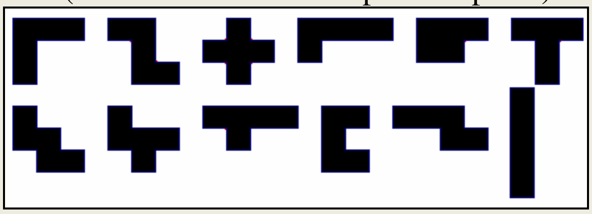
composizione σ ° ϕ dia luogo alla traslazione di equazione: $\begin{cases} x' = x + \sqrt{5} \\ y' = y - \sqrt{5} \end{cases}$. Si determinino poi le equazioni della trasformazione che si ottiene componendo le due simmetrie in ordine inverso ϕ°σ.

$$\left[\sigma : \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} ; \phi : \begin{cases} x' = y - \sqrt{5} \\ y' = x + \sqrt{5} \end{cases} ; \phi \circ \sigma : \begin{cases} x' = x - \sqrt{5} \\ y' = y + \sqrt{5} \end{cases} \right]$$

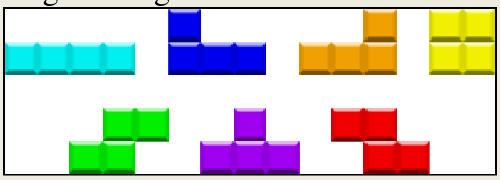
7. (Liceo scientifico PNI 2006/07) Si dimostri che l'insieme delle omotetie con centro O fissato è un gruppo.

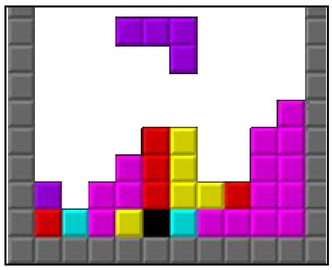
Giochiamo alla matematica

Un gioco che riguarda le trasformazioni geometriche è il ben noto Tetris, inventato nel 1985 da un ricercatore russo, Al*exey* Pazhitnov, che stava studiando un precedente gioco matematico quello dei pentamini. Questi sono i seguenti 12 pezzi, che si dimostra essere gli unici, a meno di rotazioni e simmetrie, che si possono formare unendo 5 quadratini unitari (ecco da dove deriva il prefisso penta).



Il matematico russo invece utilizzò solo 6 dei 12 pentamini, quelli mostrati di seguito, quindi li inserì in un gioco nel quale all'interno di un rettangolo vengono immessi con cadenze temporali variabili, i vari pezzi.



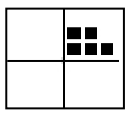


Scopo del gioco non è, come per i pentamini, di costruire date figure, bensì di far cadere il maggior numero di pezzi. Ovviamente ci deve essere una regola di "eliminazione" per creare spazi e così continuare a fare cadere pezzi, infatti quando non possono più scendere pezzi il gioco è finito. Per guadagnare spazio basta riempire una intera riga. Per esempio nella figura seguente, l'ultima riga non viene eliminata perché è rimasto vuoto un quadratino (quello nero). Le trasformazioni geometriche utilizzate sono ovviamente le traslazioni, per fare spostare verticalmente o orizzontalmente i pezzi, ma anche e soprattutto le rotazioni di multipli di 90°, per inserire meglio possibile i pezzi. Per esempio, sempre con riferimento alla precedente figura, se ruotiamo la "elle" che sta cadendo, di 90° a destra e poi la spostiamo verso destra possiamo inserirla nei due spazi vuoti che sono sopra il quadratino giallo e quello rosso.

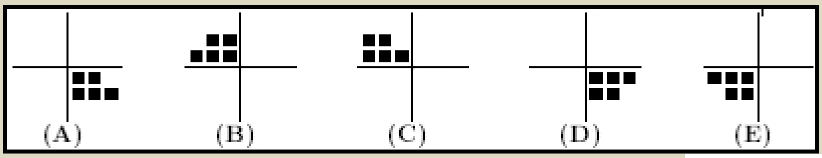
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
AL = Alabama State Wide Mathematics Contest
CMC = Canadian Mathematical Contest
HSMC = A&M University High School Mathematics Contest

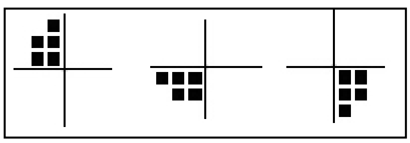
Lavoriamo insieme



Consideriamo il seguente quesito assegnato ai giochi di Archimede del 2001.
Il diagramma a fianco viene ruotato attorno all'origine. Quale fra le seguenti è la figura che è stata ottenuta?



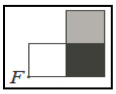
La risposta corretta è la (E), perché l'angolo di rotazione deve essere ov-

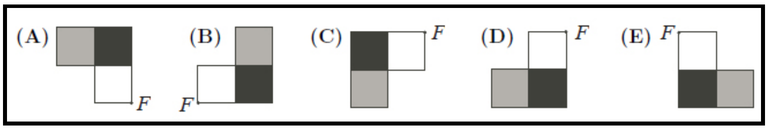


viamente un multiplo di 90°. Di seguito vi sono le tre possibilità per 90°, 180° e 270°, da cui si vede anche che l'angolo è di 180°, cioè è anche una simmetria rispetto all'origine.

1. (AL2000) La retta ℓ è l'asse del segmento di estremi A ≡ (2; 4) e B ≡ (–2; 2). La retta m è la riflessione di ℓ rispetto all'asse y. Quanto misura l'area del triangolo delimitato da ℓ, m e dall'asse x? $\left[\frac{9}{2}\right]$

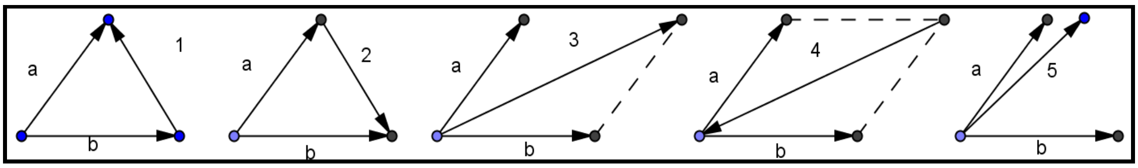
Questions in english

2. (HSMC 2006) The point $A(-3;2)$ is rotated 90° counterclockwise around the origin to point B. Point B is then reflected about the line $y = x$ to point C. What are the coordinates of C? [(–3; –2)]
3. (HSMC 2008) The point A = (2; 3) is reflected about the x–axis to the point B. Then B is reflected about the line $y = x$ to the point C . Find the area of triangle ABC. [15]
4. (CMC 2009) If the figure is rotated 180° about point F, the result could be  [(C)]



Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia Navale) Determinare le simmetriche delle rette $x = 0$ e $y = 2x + 1$, nella simmetria ortogonale rispetto alla retta $y = 2x$.
2. (Odontoiatria 2000) Dire quale degli elenchi di termini riportati sotto identifica grandezze tutte vettoriali: A) forza, quantità di moto, energia cinetica B) accelerazione, densità, energia potenziale; C) quantità di moto, forza, accelerazione; D) energia cinetica, accelerazione, velocità angolare; E) nessuna delle precedenti è corretta
3. (Odontoiatria 2002) Siano A e B due forze, complanari, applicate ad uno stesso punto. La forza A abbia un modulo di 3 N e la forza B di 5 N. Niente si sa della loro direzione e verso, ma certamente uno dei seguenti valori è comunque impossibile come modulo della loro risultante, espressa in newton (non esistono valori di direzione e verso che permettano uno dei seguenti risultati):
A) 2 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9
4. (Odontoiatria 2003) E' dato il vettore a di modulo a ≠ 0. E' dato poi il vettore b avente verso opposto al precedente e modulo b sconosciuto. Si sa inoltre che a + b = 0 ; possiamo allora concludere che:
A) b = a B) b = 0 C) Non è possibile che a + b = 0 D) a + b = 0 E) a · b = 0
5. (Medicina 2005) Quale dei vettori indicati nei seguenti disegni con i numeri da 1 a 5; rappresenta il vettore differenza a – b?



6. (Ingegneria Università di Napoli, 2009) Se $\vec{A} = (3;\,5), \vec{B} = (1;\,3)$ quali sono le coordinate cartesiane del vettore $\vec{C}$ per cui $\vec{A} + \vec{B} - 2\vec{C} = 0$? A) (4; 7) B) (4; 3) C) $\left(\sqrt{2};-2\sqrt{2}\right)$ D) (2; 4)

Per svolgere un Test finale di 20 quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_3_3.htm
Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	2	3	4	5	6
$3x - 4y = 0$; $y = 2x - 1$	C	E	A	1	D

4. Geometria delle coniche

4.1. Le sezioni coniche

Prerequisiti

- Concetto di funzione
- Concetto di luogo geometrico
- Concetto di equazione e sua risoluzione
- Equazione della retta
- Fasci di rette
- Trasformazioni geometriche e loro leggi
- Matrici e determinanti
- Il cono

Obiettivi

- Comprendere il concetto di luogo di punti del piano cartesiano
- Comprendere il concetto di appartenenza di un punto a una curva del piano cartesiano
- Comprendere il concetto di conica spezzata
- Distinguere le varie coniche fra di loro
- Riconoscere dall'equazione il genere di conica
- Risolvere semplici questioni relative alle coniche
- Risolvere semplici questioni relative ai fasci di coniche

Contenuti

- I numeri complessi
- Operazioni aritmetiche con i numeri complessi
- Le coniche
- Posizioni reciproche di retta e conica e di coniche
- Fasci di coniche

Parole Chiave

Conica spezzata o degenere – Conica irriducibile – Coniche bitangenti – Coniche esterne – Coniche iperosculanti – Coniche osculanti – Ellisse – Fuoco, direttrice, eccentricità – Iperbole – Modulo – Norma – Numero complesso – Numero complesso coniugato – Parabola – Punti base – Unità immaginaria

Simbologia

i	Indica l'unità immaginaria
$\bar{z}$	Indica il complesso coniugato del numero complesso z
$\|z\|$	Indica il modulo di un numero complesso z
$\|\|z\|\|$	Indica la norma di un numero complesso z

Richiamiamo le conoscenze

Razionalizzazione di binomi quadratici

Il procedimento di razionalizzazione di un'espressione irrazionale consiste nel *trasferimento* dell'irrazionalità dal numeratore al denominatore di una frazione o viceversa. Nel caso che l'espressione sia binomia si sfrutta il prodotto notevole noto sotto il nome di differenza di quadrati.

Esempio A

- Si ha: $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{2\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}=\frac{2\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{2\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{3-2}=2\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$
- Se invece abbiamo: $\sqrt{11}+\sqrt{5}$, possiamo *trasferire* l'irrazionalità al denominatore, che è sempre presente e pari a 1: $\sqrt{11}+\sqrt{5}=\frac{\left(\sqrt{11}+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{11}-\sqrt{5}\right)}{\sqrt{11}-\sqrt{5}}=\frac{\left(\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}{\sqrt{11}-\sqrt{5}}=\frac{11-5}{\sqrt{11}-\sqrt{5}}=\frac{6}{\sqrt{11}-\sqrt{5}}$

Verifiche

Lavoriamo insieme

Razionalizzare il denominatore della frazione $\frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{2}-1}$.

Per far ciò sfruttiamo il prodotto notevole noto sotto il nome di prodotto della somma delle basi per la loro differenza , ossia simbolicamente: $(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$.

In questo modo otteniamo infatti due quadrati, quindi eliminiamo le radici al denominatore della frazione, *trasferendole* al numeratore.

$$\frac{\left(\sqrt{7}+2\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)}=\frac{\sqrt{14}+\sqrt{7}+2\cdot\sqrt{2}+2}{\left(\sqrt{2}\right)^2-1^2}=\frac{\sqrt{14}+\sqrt{7}+2\cdot\sqrt{2}+2}{2-1}=\sqrt{14}+\sqrt{7}+2\cdot\sqrt{2}+2$$

Razionalizzare i denominatori delle seguenti espressioni.

Livello **1**

1. $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}$; $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$; $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}+2}$ $\left[\sqrt{3}-\sqrt{2};\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3};\frac{\sqrt{21}-3}{4};\sqrt{2}+2;2\cdot\sqrt{5}-\sqrt{15}\right]$
2. $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$; $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$; $\frac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+3}$; $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+1}$; $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ $\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2};3-2\cdot\sqrt{2};\frac{11-6\cdot\sqrt{2}}{7};\frac{7-\sqrt{7}}{6};4+\sqrt{15}\right]$
3. $\frac{\sqrt{11}-\sqrt{2}}{\sqrt{11}+\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{5}+1}$; $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{12}}{\sqrt{8}-\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{18}}{\sqrt{40}+\sqrt{24}}$
$\left[\frac{13-2\cdot\sqrt{22}}{9};\frac{\sqrt{35}-\sqrt{7}-\sqrt{5}+1}{4};\sqrt{6}+\sqrt{3};\frac{2-\sqrt{6}-\sqrt{15}+\sqrt{10}}{3};\frac{5\cdot\sqrt{6}-3\cdot\sqrt{10}+6\cdot\sqrt{5}-6\cdot\sqrt{3}}{8}\right]$

I numeri complessi

Com'è possibile che la matematica, essendo dopotutto un prodotto del pensiero umano indipendente dall'esperienza, si adatti in modo così ammirevole agli oggetti della realtà? *Albert Einstein*

Il Problema

Gli algebristi italiani del rinascimento (Del Ferro, Tartaglia, Cardano), hanno dimostrato che ogni equazione di terzo grado si può ridurre alla forma equivalente $x^3 - px = q$, alla quale si può applicare la seguente formula risolutiva per determinare una soluzione: $x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}+\frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}-\frac{q}{2}}$. In seguito Rafael Bombelli applicando la detta formula all'equazione $x^3 - 15x = 4$, che ha l'evidente soluzione: $x = 4$, trovò però la seguente scritta priva di senso:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{-15^3}{27}+\frac{4^2}{4}}+\frac{4}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{-15^3}{27}+\frac{4^2}{4}}-\frac{4}{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{-125+4}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{-125+4}-2} = \sqrt[3]{\sqrt{-121}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{-121}-2}$$

Quindi la soluzione c'è ma non si trova. Come è possibile?

Per risolvere il precedente problema, Bombelli fornì una dimostrazione pratica di quel che significa *astrarre*. Egli infatti osservò che, a parte il segno –, dentro le radici quadrate vi erano dei quadrati perfetti ($121 = 11^2$), decise quindi di indicare il simbolo non reale $\sqrt{-121}$ nel seguente modo: + di –11, in pratica è come se avesse detto che $\sqrt{-121} = \sqrt{121}\cdot\sqrt{-1} = 11z$, dove z è il simbolo non reale $\sqrt{-1}$. A questo punto la formula risolutiva diviene: $x = \sqrt[3]{11z+2} - \sqrt[3]{11z-2}$. Vi è ancora un problema: non sappiamo cosa rappresentano queste scritte singolarmente, sappiamo però che il valore di questa differenza deve essere 4. Quindi il problema equivale a trovare due numeri la cui differenza è 4, ciò significa che i due numeri si possono scrivere $4 + h$ e h, con un'opportuna scelta di h. Possiamo perciò scrivere nel modo seguente:

$$\begin{cases} 4+h = \sqrt[3]{11z+2} \\ h = \sqrt[3]{11z-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (4+h)^3 = 11z+2 \\ h^3 = 11z-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 64+12h^2+48h+h^3 = 11z+2 \\ h^3+2 = 11z \end{cases}$$

Dalla seconda delle precedenti equazioni ricaviamo il valore di $11z$ e lo sostituiamo nella prima: $64 + 12h^2 + 48h + h^3 = h^3 + 2 + 2 \Rightarrow 64 + 12h^2 + 48h - 4 = 0 \Rightarrow 12h^2 + 48h + 60 = 0 \Rightarrow h^2 + 4h + 5 = 0 \Rightarrow$ $h = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm \sqrt{-1}$. Abbiamo ottenuto come equazione risolvente il nostro problema, un'altra equazione priva di soluzioni reali, ma contenente il simbolo $\sqrt{-1}$ che avevamo già indicato con z. Ciò significa che possiamo scrivere: $\sqrt[3]{11z+2} = 4 + (-2+z) = 2 + z \wedge \sqrt[3]{11z-2} = -2 + z$. Così facendo troviamo la soluzione *perduta*, infatti: $x = \sqrt[3]{11z+2} - \sqrt[3]{11z-2} = 2 + z - (-2 + z) = 4$. Naturalmente il nostro procedimento è *modernizzato* rispetto a quello che usò Bombelli (lo vedremo nell'Antologia), ma è efficace. In pratica abbiamo applicato il cosiddetto **principio di permanenza delle proprietà formali**, secondo il quale se vogliamo estendere un concetto dobbiamo cercare di garantire che le proprietà più *importanti* continuino a valere. Quindi abbiamo operato con simboli sconosciuti e addirittura *proibiti* ($\sqrt{-121}$), come si fa con quelli noti ($\sqrt{-121} = \sqrt{121}\cdot\sqrt{-1}$).

Adesso facciamo in modo di *legalizzare* il nostro procedimento, definendo questi nuovi enti.

Definizione 1

Chiamiamo **unità immaginaria** il numero non reale $\sqrt{-1}$.

Notazione 1

L'unità immaginaria si indica con il simbolo i. Essa fu usata per la prima volta da Leonhard Euler in una memoria presentata nel 1777 all'Accademia di San Pietroburgo, anche se apparve a stampa solo nel 1794.

L'angolo storico

Qualche anno prima di Rafael Bombelli, il francese Nicolas Chuquet (1445 – 1488) in un lavoro del 1484, *Le Triparty*, cercando di risolvere l'equazione $x^2 - 3x + 4 = 0$ mediante l'uso della formula risolutiva, notò che il discriminante era negativo e chiamava la soluzione impossibile. Successivamente Girolamo Cardano riconobbe l'impossibilità di risolvere il problema di trovare due numeri reali la cui somma fosse 10 e il cui prodotto 40. Successivamente introdusse il concetto astratto di radice quadrata di un numero negativo e operò su tali simboli con le stesse proprietà dei numeri reali, anche se più volte espresse dubbi sul fatto che ciò potesse essere lecito. Invece Bombelli, con un modo di procedere poco *matematico*, pur di riconoscere la validità della formula di Del Ferro accettò l'uso di tali simboli astratti e chiamò tali numeri con le locuzioni *più di meno* (per radici positive di numeri negativi) e *meno di meno* (per radici negative di numeri negativi). Passarono comunque parecchi secoli prima che i numeri immaginari (*battezzati* così solo nel 1637 da Cartesio ne *La geometrie*) fossero considerati enti matematici a tutti gli effetti. Lo stesso simbolo i per l'unità immaginaria continuò a essere alternato con $\sqrt{-1}$ per parecchio tempo.

I protagonisti


Rafael Bombelli nacque a Bologna nel 1526. Autodidatta, divenne ingegnere; cominciò a occuparsi di matematica in seguito ai grandi risultati ottenuti dagli algebristi italiani che avevano trovato le formule risolutive per le equazioni di III e IV grado. Così nel 1560 scrisse un libro, *Algebra*, pubblicato però solo nel 1572, in cui raccolse i più importanti risultati relativi appunto a tali formule. Il libro contiene molte esemplificazioni e appunto in una di queste, come abbiamo mostrato, è presente il primo esempio cosciente di numeri complessi. Morì probabilmente a Roma nel 1573.


Girolamo Cardano nacque a Pavia il 24 settembre 1501. Alternò per il resto della vita il lavoro di medico a quello di matematico. Nel 1539 conobbe il famoso matematico Niccolò Tartaglia, dal quale ebbe rivelata la formula risolutiva dell'equazione di III grado, che Tartaglia non aveva pubblicata. Nel 1545 Cardano, nella sua opera più famosa, *Ars Magna*, pubblicò i metodi per la risoluzione delle equazioni di III e IV grado e perciò ebbe dissapori con Tartaglia. Vi è da dire però che egli sapeva che la formula dell'equazione di III grado non era dovuta a Tartaglia, bensì al bolognese Scipione del Ferro. La pubblicazione *dell'Ars Magna* lo rese famoso fra i suoi contemporanei, nello stesso tempo i suoi meriti medici furono ufficialmente riconosciuti e venne nominato rettore del Collegio dei Medici, fu inoltre richiesta la sua opera di medico dai maggiori regnanti europei. Nel 1570 fu imprigionato per eresia, dato che aveva scritto l'oroscopo di Gesù Cristo e un libro in onore di Nerone. Nonostante si fosse in pieno periodo inquisitorio rimase in carcere qualche mese e poi fu liberato. Fra i suoi altri importanti contributi alle matematiche ricordiamo il primo tentativo di dare una sistemazione scientifica ai giochi d'azzardo, *Liber de Ludo Aleae*, pubblicato solo nel 1663 ma probabilmente scritto nel 1563. Morì il 21 settembre 1576 a Roma.

A questo punto quelle equazioni di secondo grado a delta negativo, che nell'insieme dei numeri reali sono catalogate come *impossibili*, cioè prive di soluzioni reali, divengono *possibili* con l'uso di questo nuovo simbolo; ovviamente in un nuovo insieme che dobbiamo definire.

Esempio 1

L'equazione $x^2 + 1 = 0$ è priva di soluzioni reali. Possiamo però scriverla $x^2 = -1$, e risolverla come una normale equazione binomia: $x = \pm\sqrt{-1}$, ossia, usando il nuovo simbolo da noi introdotto: $x = \pm\, i$.

Osserviamo che anche se abbiamo introdotto solo un nuovo simbolo, esso ci permette di costruire infiniti nuovi numeri.

Esempio 2

Vogliamo risolvere l'equazione $x^2 + x + 1 = 0$, il cui discriminante è negativo: $\Delta = 1 - 4 = -3$. Applichiamo ugualmente la formula risolutiva: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3} \cdot i}{2}$. Quindi possiamo dire che la detta equazione ammette le due soluzioni, non reali, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3} \cdot i}{2}$.

Visti i risultati dell'esempio precedente poniamo una nuova definizione.

Definizione 2

Chiamiamo **numero complesso espresso in forma algebrica** il simbolo $a + bi$, in cui a e b sono numeri reali e i è l'unità immaginaria. Il numero a si chiama **parte reale**, il numero b **parte immaginaria**.

L'angolo storico

Il termine **numero complesso** (nell'originale latino *numeros integros complexos*) fu usato per la prima volta da Carl Friedrich Gauss in un lavoro del 1832.

Notazione 2

Dato un numero complesso z, la sua parte reale si indica con **Re**(z), la sua parte immaginaria con **Im**(z).

Notazione 3

L'insieme dei numeri complessi si indica con il simbolo $\mathbb{C}$.

Mediante la definizione precedente abbiamo stabilito una relazione fra gli insiemi $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$, dato che a ogni numero complesso associamo appunto due numeri reali (la parte reale e la parte immaginaria). Tale relazione è chiaramente una corrispondenza biunivoca, nel senso che ogni coppia di numeri reali ha associato un solo numero complesso e viceversa ogni numero complesso ha associato un solo numero complesso. In particolare possiamo enunciare il seguente teorema.

Teorema 1

Due numeri complessi sono uguali solo se hanno la stessa parte reale e la stessa parte immaginaria.

In simboli: $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$.

Dimostrazione Segue dalla definizione di numero complesso.

Notiamo che le eventuali soluzioni complesse di un'equazione di secondo grado sono sempre della forma $a + bi$ e $a - bi$, sono cioè numeri che hanno la stessa parte reale e opposta parte immaginaria. Poiché ciò capiterà anche nella risoluzione di altre equazioni, è bene assegnare dei nomi a tali numeri.

Definizione 3

Dato un numero complesso $z = a + bi$, diciamo suo **complesso coniugato** il numero $z = a - bi$.

Notazione 4

Dato un numero complesso z, il suo coniugato si indica con la scritta **Con**(z) oppure $\overline{z}$.

Da quanto visto possiamo allora enunciare il seguente teorema di immediata dimostrazione.

Teorema 2

Ogni equazione di secondo grado a coefficienti reali e con discriminante negativo ammette sempre due soluzioni che sono complesse coniugate fra di loro.

Per sua stessa definizione è evidente che l'insieme dei numeri complessi contiene quello dei numeri reali, quindi ogni numero reale è un numero complesso, ma non viceversa.

Esempio 3

Il numero reale 5, può considerarsi anche come il numero complesso $5 + 0i$.

L'Antologia

Girolamo Cardano, *Ars Magna*, 1545

Se qualcuno vi dice di dividere 10 *in due parti, una delle quali moltiplicata per l'altra produrrà* 30 *o* 40*, è evidente che questo caso o questione è impossibile.*

In pratica si tratta di risolvere i sistemi $\begin{cases} x+y=10 \\ xy=30 \end{cases} \vee \begin{cases} x+y=10 \\ xy=40 \end{cases}$, che equivale alla risoluzione di una delle due equazioni seguenti: $z^2 - 10z + 30 = 0 \vee z^2 - 10z + 40 = 0$. Solo che il discriminante di entrambe è negativo, $100 - 120 = -20 \vee 100 - 160 = -60$, quindi non vi sono soluzioni reali.

Tuttavia noi risolveremo in questo modo. Dividiamo 10 *in due parti uguali e sia* 5 *questa metà. Moltiplicando per se stessi otteniamo* 25. *Da* 25 *sottraiamo lo stesso prodotto, cioè* 40, *che, come vi ho insegnato nel capitolo sulle operazioni nel sesto libro* [dell'Ars Magna], *ci fornisce un resto di m :* 15 [Così Cardano indica –15]. *La radice quadrata di questo aggiunta e sottratta da* 5 *da le parti che moltiplicate insieme produrranno* 40.

Detto ciò Cardano fornisce una dimostrazione geometrica di ciò che ha enunciato e propone il seguente schema

$$\begin{array}{l} 5\,p{:}\ \ R\!\!\!/\,m{:}15 \\ 5m{:}\ \ R\!\!\!/\,m{:}15 \\ \hline 25m{:}m{:}15\quad \tilde{q}d\quad est\quad 40 \end{array}$$

In notazione moderna le scritte precedenti equivalgono a $\begin{array}{l} 5+\sqrt{-15} \\ 5-\sqrt{-15} \\ \hline 25-(-15)=40 \end{array}$ che letteralmente si leggono

$$\begin{array}{l} 5\quad plus\quad Radix\quad minus\quad 15 \\ 5\quad minus\quad Radix\quad minus\quad 15 \\ \hline 25\quad minus\quad minus\quad 15\quad quid\quad est\quad 40 \end{array}$$

Quindi Cardano indica con le parole *Radix minus* la radice quadrata di un numero negativo e opera sui numeri non reali come sui numeri reali, anche se più volte esprime dei dubbi sul fatto che ciò possa essere lecito.

Operazioni aritmetiche con i numeri complessi

Il cammino più breve tra due verità nel dominio reale passa attraverso il dominio complesso.
Jacques Hadamard (1865-1963)

Il problema

Possiamo definire, nell'insieme dei numeri complessi due operazioni, di somma e prodotto, in modo tale che mantengano le stesse proprietà valide nei numeri reali?

I numeri complessi possono considerarsi come degli speciali polinomi di primo grado nell'incognita i, quindi ci sembra naturale definire le operazioni aritmetiche su di essi come facciamo con i polinomi.

Esempio 4

Supponiamo di volere sommare i numeri complessi $7 - 2i$ e $4 + 3i$. Considerandoli come due polinomi nell'incognita i scriveremo: $7 - 2i + 4 + 3i = (7 + 4) + (-2 + 3)i = 11 + i$.

Definizione 4

Si ha: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.

Passiamo alla moltiplicazione.

Esempio 5

Moltiplichiamo fra loro i due numeri complessi $2 - 3i$ e $1 + 5i$, considerandoli come polinomi. Si ha:

$$(2 - 3i) \cdot (1 + 5i) = 2 + 10i - 3i - 15i^2 = 2 + 7i - 15i^2.$$

In effetti però i numeri complessi sono polinomi particolari, poiché in essi vale la proprietà $i^2 = -1$, pertanto possiamo ulteriormente semplificare: $(2 - 3i) \cdot (1 + 5i) = 2 + 7i - 15 \cdot (-1) = 2 + 7i + 15 = 17 + 7i$.

In vista del risultato del precedente esempio, poniamo la seguente definizione.

Definizione 5

Si ha: $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Possiamo quindi dire che l'insieme $\mathbb{C}$ con le definizioni precedenti di somma e prodotto si comporta come l'insieme dei numeri reali, quindi è anch'esso un campo. Visto che stiamo considerando i numeri complessi come particolari polinomi in una variabile, possiamo applicare a essi anche i prodotti notevoli. Alcuni di essi sono particolarmente interessanti.

Esempio 6

Moltiplichiamo fra loro due numeri complessi coniugati: $(3 - i) \cdot (3 + i)$. Possiamo semplificare tale prodotto mediante la regola della differenza di quadrati, possiamo quindi scrivere: $9 - i^2 = 9 - (-1) = 9 + 1 = 10$, abbiamo cioè ottenuto un numero reale.

Facilmente possiamo generalizzare il risultato dell'esempio precedente.

Definizione 6

Diciamo **norma** di un numero complesso $z = a + bi$, il numero reale non negativo ottenuto moltiplicando z per il suo coniugato. In simboli $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$.

Notazione 5

La norma di un numero complesso z si indica con $\|z\|$.

Definizione 7

Diciamo **modulo** o **valore assoluto** di un numero complesso $z = a + bi$, la radice quadrata della sua norma. In simboli $\sqrt{a^2+b^2}$.

Notazione 6

Il modulo di un numero complesso z si indica con $|z|$.

Vediamo adesso come possiamo effettuare la divisione fra due numeri complessi. In effetti basta solo definire in modo opportuno il reciproco di un numero complesso. Poiché l'elemento unità della moltiplicazione è 1, dato z $\in \mathbb{C}$ il suo reciproco è z^{-1}: $z \cdot z^{-1} = 1$. Vediamo un esempio.

Esempio 7

Vogliamo determinare il reciproco del numero complesso 4 – 3i. Cerchiamo quindi un numero complesso $a + bi$ per cui si abbia: $(4 - 3i) \cdot (a + bi) = 1$. Cioè: $4a + 3b + (4b - 3a)i = 1$. In virtù del teorema 1, la precedente scritta è vera solo se accadono i seguenti fatti: $\begin{cases} 4a+3b=1 \\ 4b-3a=0 \end{cases}$. Risolviamo il sistema, per esempio moltiplicando contemporaneamente la prima equazione per 3 e la seconda per 4: $\begin{cases} 12a+9b=3 \\ 16b-12a=0 \end{cases}$ e poi sommando termine a termine, in modo da eliminare l'incognita a: $9b + 16b = 3 \Rightarrow 25b = 3 \Rightarrow b = \frac{3}{25}$.
Per determinare il valore di a possiamo invece moltiplicare, nel sistema di partenza, la prima equazione per 4 e la seconda per 3: $\begin{cases} 16a+12b=4 \\ 12b-9a=0 \end{cases}$ e sottrarre termine a termine: $25a = 4 \Rightarrow a =$. Potevamo risolvere il sistema con un qualsiasi altro metodo. Abbiamo così trovato che il reciproco di 4 – 3i è $\frac{4}{25}+\frac{3}{25}i$. Verifichiamo: $(4-3i)\cdot\left(\frac{4}{25}+i\cdot\frac{3}{25}\right)=\frac{16}{25}+\frac{12}{25}i-\frac{12}{25}i+\frac{9}{25}=\frac{25}{25}=1$.

Possiamo applicare il procedimento dell'esempio precedente a un generico numero complesso.

Teorema 3

Il reciproco di un numero complesso non nullo $z = a + bi$ è $\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$.

Dimostrazione

Risolviamo l'equazione, nelle incognite, x e y, con $(a, b) \neq (0, 0)$: $(a + bi) \cdot (x + yi) = 1$. Scriviamo: $(ax - by) + (ay + bx)i = 1 + 0i$. Uguagliamo fra loro le parti reali e le parti immaginarie. $\begin{cases} ax-by=1 \\ ay+bx=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax-by=1 \\ bx+ay=0 \end{cases}$.

Risolviamo usando il metodo di Cramer: $x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}}=\frac{a}{a^2+b^2}$; $y=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}}=\frac{-b}{a^2+b^2}$. Il sistema ammette sempre soluzioni reali, perché $a^2+b^2 \neq 0, \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$. Quindi abbiamo provato la tesi.

Grazie al teorema precedente possiamo svolgere la divisione fra due qualsiasi numeri complessi, il secondo dei quali non nullo.

Esempio 8

Vogliamo dividere il numero complesso 2 + 5*i* per il numero complesso 3 – 4*i*. Cioè vogliamo scrivere la frazione $\frac{2+5i}{3-4i}$ come un solo numero complesso. Basta determinare il reciproco del denominatore e moltiplicarlo per il numeratore. Grazie al teorema 3 possiamo scrivere: $\frac{1}{3-4i}=\frac{3}{3^2+4^2}-i\frac{-4}{3^2+4^2}=\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i$.
Quindi $\frac{2+5i}{3-4i}=(2+5i)\cdot\frac{1}{3-4i}=(2+5i)\cdot\left(\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i\right)=\frac{6+8i+15i-20}{25}=\frac{-14+23i}{25}=-\frac{14}{25}+\frac{23}{25}i$. In effetti notiamo che possiamo eliminare il passo intermedio del calcolo del reciproco applicando un procedimento simile alla razionalizzazione del denominatore di una frazione di denominatore binomio:

$$\frac{2+5i}{3-4i}=(2+5i)\cdot\frac{1}{3-4i}=(2+5i)\cdot\left(\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i\right)=\frac{6+8i+15i-20}{25}=\frac{-14+23i}{25}=-\frac{14}{25}+\frac{23}{25}i.$$

Teorema 4

Il rapporto dei numeri complessi, $z = a + bi$ e $w = c + id$, $w \neq 0$, è $\frac{(ac+bd)}{c^2+d^2}+\frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}i$.

Dimostrazione

Moltiplichiamo numeratore e denominatore della frazione per il complesso coniugato del denominatore: $\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)}$, per ottenere il denominatore reale, quindi semplifichiamo ottenendo quanto richiesto.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Semplificare la seguente espressione: $(2+3i)\cdot(1-i)+(3-2i)^2-\dfrac{4-3i}{i+3}$, *contenente numeri complessi.*

Cominciamo con lo svolgere le moltiplicazioni considerandole come prodotti di polinomi:

$$2-2i+3i-3i^2+9-12i+4i^2-\frac{4-3i}{i+3}=2+9+(-2+3-12)i+(-3+4)\,i^2-\frac{4-3i}{i+3}=11-11i-1-\frac{4-3i}{i+3}$$

Oltre a ridurre i termini simili abbiamo applicato l'identità $i^2=-1$; Quindi alla fine: $10-11i-\dfrac{4-3i}{i+3}$.

Passiamo adesso alla frazione, che tratteremo con un procedimento simile alla razionalizzazione del denominatore, per rendere *reale* il denominatore: $10-11i-\dfrac{(4-3i)\cdot(i-3)}{(i+3)\cdot(i-3)}=10-11i-\dfrac{4i-12-3i^2+9i}{i^2-3^2}=$

$$=10-11i-\frac{13i-12+3}{-1-9}=10-11i-\frac{13i-9}{-10}=\frac{100-110i+13i-9}{10}=\frac{91-97i}{10}=\frac{91}{10}-\frac{97}{10}i.$$

Semplificare le seguenti espressioni.

Livello **1**

1. $3-2i+i\cdot(4-5i)$; $1-i\cdot(4-i)+2\cdot(3-6i)$; $\dfrac{i-2}{3}-\dfrac{i}{2}+\dfrac{7}{4}+i^2$ $\left[8+2i;6-16i;\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{6}i\right]$
2. $(i-5)\cdot(2-7i)-5i\cdot(3-i)$; $\dfrac{5}{3}i+\dfrac{7i-11}{8}-\dfrac{i}{12}$; $(1-i)^3$ $\left[-8+22i;-\dfrac{11}{8}+\dfrac{59}{24}i;-2-2i\right]$
3. $\dfrac{i-8}{3}+\dfrac{4}{5}i-\dfrac{3-4i}{2}$; $[(2i-5)\cdot(2i+5)]^2$; $(1-2i+i^2)^2$ $\left[-\dfrac{25}{6}+\dfrac{47}{15}i;841;-4\right]$
4. $\sqrt{2}i-1+\left(\sqrt{2}-i\right)\cdot\left(i-\sqrt{2}\right)$; $(1-9i)\cdot 3-i\cdot(5i+1)$; $(5i-1)^2$ $\left[-2+3\sqrt{2}i;8-28i;-24-10i\right]$
5. $7i-5-6i\cdot(7i+2)-i\cdot(i-6)$; $4i-3+(7i-8)\cdot(2i+3)$ $[38+i;-41+9i]$
6. $(2-3i)\cdot(3i+2)-4i+1$; $(2i-7)\cdot(11-i)+(i-11)\cdot(7i+2)$ $[14-4i;-104-46i]$
7. $1-(5+i)\cdot(4i-7)+3i$; $\dfrac{\sqrt{2}-3i}{8}-\dfrac{i-5}{\sqrt{2}+1}$ $\left[40-10i;\dfrac{41\cdot\sqrt{2}-40+\left(5-8\cdot\sqrt{2}\right)i}{8}\right]$
8. $(2-i)\cdot(3+i)\cdot(i-4)$; $(4-i)\cdot(i+4)\cdot(2i+1)$; $i^{(2)^{i^4}}$; $(2-i+3i^2)^3$ $[-27+11i;17+34i;-1;2-2i]$
9. $(7i-1)\cdot(5-6i)\cdot(3i+7)$; $\left(\dfrac{i}{3}-2\right)^2-\left(\dfrac{5}{2}i+\dfrac{1}{2}\right)^2$; $(1-i)^3-(1+i)^3$ $\left[136+398i;\dfrac{89}{9}-\dfrac{23}{6}i;-4i\right]$
10. $\left(\dfrac{i}{2}-1\right)\cdot\left(\dfrac{2}{3}i+1\right)\cdot\left(\dfrac{1}{4}i+1\right)$; $\left(\dfrac{i}{2}-4\right)\cdot\left(5-\dfrac{1}{3}i\right)\cdot\left(\dfrac{3}{4}-i\right)$ $\left[-\dfrac{31}{24}-\dfrac{1}{2}i;-\dfrac{265}{24}+\dfrac{545}{24}i\right]$
11. $(a+bi)\cdot(b-ai)\cdot(a-bi)\cdot(b+ai)$; $\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{5}{4}i-\dfrac{2}{3}i-\dfrac{5}{3}\right)^2$ $\left[\left(a^2+b^2\right)^2;-\dfrac{5}{3}+\dfrac{13}{24}i\right]$
12. $(i-2i^3+i^4)^2$; $\left(\dfrac{4}{5}i-\dfrac{3}{5}\right)^2$; $\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{i}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}i+\dfrac{3}{2}\right)^2$; $(3-i)^2-(i+3)^2$ $\left[-8+6i;-\dfrac{7}{25}-\dfrac{24}{25}i;4;-12i\right]$
13. $\dfrac{i}{4}+\dfrac{i}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}-i\right)+\left(\dfrac{2}{3}+i\right)\cdot\left(-\dfrac{3}{2}i+1\right)$; $\left(\dfrac{2}{3}i-4\right)^2-\left(\dfrac{2}{3}-4i\right)^2$ $\left[\dfrac{35}{12}+\dfrac{1}{4}i;\dfrac{280}{9}\right]$
14. $\left(-\dfrac{1}{3}+i\right)\cdot\left(\dfrac{1}{3}i-1\right)+\left(\dfrac{2}{3}-2i\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}-3i\right)-\left(\dfrac{1}{2}+i\right)^2$; $(5-i)^{i^{48}}$ $\left[-\dfrac{177}{36}-\dfrac{46}{9}i;5-i\right]$

15. $(3-2i)^2(2+3i)^2-(1-3i)(1+i)^3$; $\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}i+\frac{i}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}i-\frac{i}{6}\right)$ $\left[115+112i;\frac{289}{36}\right]$

16. $i^2-i^3+i^4-i^5+i^6$; $i-2i^2+3i^3+(4i)^4$; $(1-3i)^{i^8}$; $(1-i)^{(1-i)(1+i)}$ $[-1; 258-2i; 1-3i; -2i]$

17. $i+2i^2+3i^3+4i^4+5i^5$; $\frac{i}{2}-\frac{i^2}{3}+\frac{i^5}{4}-\frac{i^{12}}{6}$; $(4-i)^{(1-i)(1+i)}$ $\left[2+3i;\frac{1}{6}+\frac{3}{4}i;15-8i\right]$

18. $(i-2i^3)^2+(i^8+4i^{15})^2$; $(i-i^3+i^{17}-i^{77})^2+(i^2+i^4-i^{50}-i^{72})^2$ $[-24-8i; -4]$

19. $(4i+i^{13}+2i^{171}+3i^{49})^3-(i^{42}-2i^{54}+3i^{150}+i^{160})^3$; $i^{87}-5i^{92}+6i^{37}-8i^{112}$ $[1-216i; -13+5i]$

20. $2001i^{2002}-2002i^{2001}$; $2004i^{2005}-2005i^{2006}+2006i^{2008}-2007i^{2007}$ $[-2001-2002i; 4011+4011i]$

21. $Im(Re(Im(Re(a+bi))))$; $Re\left(Im\left(\overline{a-ib}\right)\right)$; $Re(5-7i)-Im(4i-2)$; $\frac{2i-3}{5i}$ $\left[0;b;1;\frac{2}{5}+\frac{3}{5}i\right]$

22. $Re(a-ib)+Im(Re(a-ib))+Im\left(\overline{a+ib}\right)$; $\overline{a+ib}-(a+ib)$; $\frac{2-7i}{4-i}$ $\left[a-b;-2bi;\frac{15}{17}-\frac{26}{17}i\right]$

23. $Re(Im(a+bi))-Im(Re(a-bi))$; $\left|\sqrt{3+2i}\right|$; $|3-7i|$; $\left|\sqrt{2-i}\right|$; $\frac{5i+13}{12-i}$ $\left[b;\sqrt[4]{13};\sqrt{58};\sqrt[4]{5};\frac{151}{145}+\frac{73}{145}i\right]$

24. $\left|i-\sqrt{2}\right|$; $\left|2\cdot\sqrt{2}-\sqrt{3}i\right|$; $|1+8i|$; $\frac{8i+1}{i-8}$; $\frac{11i-5}{2i+3}$; $\frac{i}{2i-1}$ $\left[\sqrt{3};\sqrt{11};\sqrt{65};-i;\frac{7}{13}+\frac{43}{13}i;\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i\right]$

25. $\frac{21-i}{5i}$; $\frac{\sqrt{2}-i}{1+\sqrt{2}i}$; $\frac{\sqrt{3}i}{i-\sqrt{3}}$; $\frac{1}{i-\frac{1}{i}}$; $\frac{5i+6}{3i}$; $\frac{2i+8}{8-2i}$ $\left[-\frac{1}{5}-\frac{21}{5}i;-i;\frac{\sqrt{3}-3i}{4};-\frac{1}{2}i;\frac{5}{3}-2i;\frac{15}{17}+\frac{8}{17}i\right]$

Livello 2

26. $\frac{8i-9}{8+9i}-\frac{9i-8}{9+8i}$; $Re\left(\frac{4+i}{5-i}\right)+Im\left(\frac{4-i}{5+i}\right)$; $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2-\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$; $\frac{i\cdot(2-3i)}{3+2i}$ $\left[0;\frac{5}{13};0;i\right]$

27. $\frac{\sqrt{3}+i}{i-\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{3}+i}$; $Re\left(\frac{\sqrt{2}+3i}{3+\sqrt{2}i}\right)-Im\left(\frac{3-\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-3i}\right)$ $\left[\frac{1-7\cdot\sqrt{6}-\left(7\cdot\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)i}{12};\frac{6\cdot\sqrt{2}-7}{11}\right]$

28. $\frac{6-i}{2i}+\frac{i}{6-i}-\frac{3i-2}{4i-3}$; $\overline{\left(\frac{7-2i}{11+13i}\right)}-\frac{7-2i}{11+13i}$; $\frac{1-i}{(1+i)^2}$ $\left[-\frac{2307}{1850}-\frac{2588}{925}i;\frac{113}{145}i;-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right]$

29. $\frac{(1+5i)\cdot(2-3i)}{7-i}$; $\frac{7-6i}{2i+3}\cdot\frac{i}{4i-5}$; $\frac{i+i^2+i^3+i^4+i^5}{1+i}$ $\left[\frac{56}{25}+\frac{33}{25}i;-\frac{124}{533}-\frac{175}{533}i;\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right]$

30. $\frac{i^5-4}{3i^7+1}-\frac{5i+2}{3i-5}$; $\left(\frac{2-i}{2+i}\right)^2+\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^2$; $Re\left(\frac{2-i}{11+6i}\right)-Im\left(\frac{8i}{3-i}\right)$ $\left[-\frac{72}{85}-\frac{16}{85}i;-\frac{14}{25};-\frac{1804}{785}\right]$

Livello 3

Semplificare le seguenti operazioni fra matrici

31. $\begin{Vmatrix}1 & i\\ -1 & -i\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}i & 1\\ 0 & -i\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}i & -1\\ 1 & 0\end{Vmatrix}^2$; $\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}^{10}$ $\left[\begin{Vmatrix}-2+i & 2-i\\ 0 & -3\end{Vmatrix};\begin{Vmatrix}2^9 & 0 & 0 & 0 & 2^9\\ 0 & 2^9 & 0 & 2^9 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2^9 & 0 & 2^9 & 0\\ 2^9 & 0 & 0 & 0 & 2^9\end{Vmatrix}\right]$

32. $(1-i)\cdot\begin{Vmatrix}1 & 0 & i\\ 0 & i & 0\\ i & 0 & 1\end{Vmatrix}+(1+i)\cdot\begin{Vmatrix}i & 1+i & 0\\ 1-i & 1 & -1\\ 0 & i & -1\end{Vmatrix}$; $\begin{Vmatrix}i & 0 & 0\\ 0 & 2i & 0\\ 0 & 0 & -i\end{Vmatrix}^{30}$ $\left[\begin{Vmatrix}0 & 2i & 1+i\\ 2 & 2+2i & -1-i\\ 1+i & -1+i & -2i\end{Vmatrix};\begin{Vmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2^{30} & 0\\ 0 & 0 & -1\end{Vmatrix}\right]$

33. $\left(\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & i \\ 2i & -4i \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -2 & i \\ 3 & i & 1 \end{Vmatrix}\right)^2 ; \begin{Vmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}^{15}$ $\left[\begin{Vmatrix} 17+4i & 6+11i & 9-2i \\ 10-9i & 8-2i & 1-6i \\ -28+52i & -38+16i & 2+30i \end{Vmatrix} ; \begin{Vmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}\right]$

34. $\begin{Vmatrix} 1 & -i & i & 1 \\ i & 1 & -1 & i \\ -i & i & -1 & 1 \\ 1 & -1 & i & -i \end{Vmatrix}^2 ; \begin{Vmatrix} i-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \\ 0 & i & 0 \end{Vmatrix}^6$ $\left[\begin{Vmatrix} 4 & -2-2i & 2i & 2 \\ 4i & 2-2i & -2 & 2i \\ 0 & -2 & 2 & -2-2i \\ 2-2i & -2 & 2 & 0 \end{Vmatrix} ; \begin{Vmatrix} 8i & 0 & 0 \\ 0 & 2+2i & 0 \\ 0 & 0 & 2+2i \end{Vmatrix}\right]$

35. $(1-i)^2 \cdot \begin{Vmatrix} 1+i & 0 & 1-i \\ i & 0 & -i \\ 0 & 2i & 0 \end{Vmatrix} - (2-i)^2 \cdot \begin{Vmatrix} 2i & -1 & 3i \\ 0 & i & 0 \\ -i & 1 & -3i \end{Vmatrix}$ $\left[\begin{Vmatrix} -6-8i & 3-4i & -14-11i \\ 2 & -4-3i & -2 \\ 4+3i & 1+4i & 12+9i \end{Vmatrix}\right]$

36. $\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & i & -i & 0 \\ i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -i \end{Vmatrix}^9 ; \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & i & i \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{Vmatrix}^6$ $\left[\begin{Vmatrix} 20 & 4 & -12i & -8+4i \\ 16+12i & 8+4i & 4-8i & -12 \\ 36i & 12i & 20 & -12-16i \\ -12 & -4 & 4i & 8-4i \end{Vmatrix} ; \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}\right]$

37. $i \cdot \begin{Vmatrix} 1 & i & -1 \\ -i & 0 & 1 \\ -1 & i & 1 \end{Vmatrix} - 2 \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & i & -1 \\ i & -i & 1 \end{Vmatrix}^2$ $\left[\begin{Vmatrix} -8+i & -5-2i & 2-i \\ 1+2i & 2-2i & 2+3i \\ -7i & -3 & -2-i \end{Vmatrix}\right]$

Calcolare i seguenti determinanti

38. $\begin{vmatrix} i & 1+i \\ 2i & 3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} -3 & i+2 \\ i-2 & 4 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} \frac{1+i}{2} & 1-2i \\ -2 & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} \frac{1}{1-i} & 2 \\ i & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} \frac{1-i}{1+i} & 3 \\ 4 & \frac{1+i}{1-i} \end{vmatrix}$ $\left[2+i;-7;\frac{5}{2}-\frac{7}{2}i;\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i;-11\right]$

39. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3i & \frac{3}{i} \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} i & 0 & 1 \\ 1 & 1 & i \\ i & 0 & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & i & -i \\ i & 1 & -i \\ i & -i & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1+i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1-i \end{vmatrix}$ [$-9i$; $1 + i$; 0; 2; 2]

40. $\begin{vmatrix} 1-i & 1+i & 1 \\ 1+2i & 1 & 1-2i \\ 1-3i & 1+3i & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} i & -2 & 2i \\ 3 & i & 0 \\ 0 & 0 & 2-i \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} \frac{1-i}{1+i} & i & -2 \\ 0 & 0 & -i \\ 3i & \frac{i}{2} & \frac{1}{1-i} \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} \frac{1}{i} & 1 & -i \\ 0 & 0 & -1 \\ i & i^2 & 1 \end{vmatrix}$ $\left[-12;10-5i;\frac{7}{2}i;0\right]$

41. $\begin{vmatrix} \frac{i}{2} & \frac{2}{i} & i \\ 1 & 2 & 3 \\ -i & i & 0 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 3i & 1+5i & 5i \\ 2-i & i+2 & 0 \\ 2i-3 & 2+3i & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & i & -i \\ 1 & i^2 & i^2 \\ 1 & i^3 & -i^3 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} \frac{1-2i}{i} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{i}{1-2i} & i \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ $\left[-\frac{15}{2};-25+72i;-4i;1-i\right]$

Lavoriamo insieme

Semplificare la seguente espressione contenente numeri complessi: $|4 - 3i| \cdot |5 - i|$.

Stiamo considerando espressioni riguardanti il modulo di un numero complesso. Noi sappiamo che si ha $|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$, che è un numero reale. Possiamo allora scrivere:

$$|4-3i| \cdot |5-i| = \sqrt{4^2+(-3)^2} \cdot \sqrt{5^2+(-1)^2} = \sqrt{16+9} \cdot \sqrt{25+1} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{26} = 5 \cdot \sqrt{26}$$

Anche il seguente procedimento è ugualmente corretto:

$$\left|(4-3i)\cdot(5-i)\right| = |20-4i-15i-3| = |17-19i| = \sqrt{17^2+19^2} = \sqrt{289+361} = \sqrt{650} = 5\cdot\sqrt{26}$$

Possiamo perciò dire che si ha: $|4-3i|\cdot|5-i| = |(4-3i)\cdot(5-i)|$.

Semplificare le seguenti espressioni

Livello 2

42. $|2-7i|\cdot|5+3i|$; $|5+3i|^2\cdot|4i-9|$; $\dfrac{4-5i}{|4-5i|}$ $\left[\sqrt{1802}; 34\cdot\sqrt{97}; \dfrac{4\cdot\sqrt{41}-5i\cdot\sqrt{41}}{41}\right]$

43. $\dfrac{|5+7i|}{2i-3}-\dfrac{6-i}{|7i|}$; $\overline{\dfrac{Re(8-i)}{5-7i}+\left|\dfrac{i}{i-2}\right|}$ $\left[\dfrac{-21\cdot\sqrt{74}-78+\left(13-14\cdot\sqrt{74}\right)i}{91}; \dfrac{37\cdot\sqrt{5}+100+140i}{185}\right]$

44. $\dfrac{|12-i|}{3-4i}+\dfrac{13-5i}{|2i-7|}$; $\dfrac{\|z\|}{\overline{z}}$; $|z|+|\overline{z}|, z\in\mathbb{C}$ $\left[\dfrac{159\cdot\sqrt{145}+325\cdot\sqrt{53}}{1325}+i\left(\dfrac{212\cdot\sqrt{145}-125\cdot\sqrt{53}}{1325}\right); z; 2\cdot|z|\right]$

45. $\dfrac{Re(3+2i)}{5-9i}+Im\left(\dfrac{|2+3i|}{2i-1}\right)$; $Im\left(\dfrac{i}{\overline{Re(4-i)-Im(2-4i)}}\right)$ $\left[\dfrac{75-212\cdot\sqrt{13}-135i}{530}; \dfrac{1}{8}\right]$

46. $Re\left(\dfrac{a+ib}{b+ia}\right)-Im\left(\dfrac{a-ib}{b-ia}\right)$; $Re\left(\dfrac{a-ib}{b+ia}\right)+Im\left(\dfrac{a+ib}{b-ia}\right)$ $\left[-\dfrac{a^2-2ab-b^2}{a^2+b^2}; 1\right]$

47. $Re\left(\dfrac{a+ib}{a-ib}\right)+Im\left(\dfrac{b-ia}{b+ia}\right)$; $\overline{z+w}-\overline{z}-\overline{w}, z, w\in\mathbb{C}$; $(1+i)^{20}-(1-i)^{20}$ $\left[\dfrac{a^2-2ab-b^2}{a^2+b^2}; 0; 0\right]$

Livello 3

48. $i^{4n}+i^{4n+1}+i^{4n+2}+i^{4n+3}, n\in\mathbb{N}$; $i^{4n}-i^{4n+1}-i^{4n+2}+i^{4n+3}, n\in\mathbb{N}$ $[0; 2-2i]$

49. $\dfrac{1}{\left(\dfrac{1-i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)^2-\dfrac{1-i\cdot\sqrt{3}}{2}}$; $\dfrac{a+ib}{a-ib}$; $\dfrac{a+ib}{a-ib}+\dfrac{a-ib}{a+ib}$ $\left[-1; \dfrac{a^2-b^2+2iab}{a^2+b^2}; 2\cdot\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right]$

50. $\left(\dfrac{a+ib}{a-ib}\right)^2-\left(\dfrac{a-ib}{a+ib}\right)^2$; $\left(\dfrac{a+ib}{a-ib}\right)^2+\left(\dfrac{a-ib}{a+ib}\right)^2$ $\left[\dfrac{8ab\cdot\left(a^2-b^2\right)}{\left(a^2+b^2\right)^2}i; \dfrac{2\cdot\left(a^4-6a^2b^2+b^4\right)}{\left(a^2+b^2\right)^2}\right]$

51. $\dfrac{ai+b}{bi-a}+\dfrac{bi+a}{ai-b}$; $\dfrac{(b+ai)^2}{ai-b}$; $\dfrac{|a-ib|}{a+ib}$ $\left[-2i; \dfrac{3a^2b-b^3+a\cdot\left(a^2-3b^2\right)i}{a^2+b^2}; \dfrac{a-ib}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$

52. Esprimere la parte reale di un numero complesso mediante z e $\overline{z}$. $\left[Re(z)=\dfrac{z+\overline{z}}{2}\right]$

53. Esprimere la parte immaginaria di un numero complesso mediante z e $\overline{z}$. $\left[Im(z)=\dfrac{z-\overline{z}}{2i}\right]$

54. Provare che si ha: $|z|\cdot|w| = |z\cdot w|, \forall\, z, w\in\mathbb{C}$.

55. Provare la validità della seguente uguaglianza: $\|z+w\| = \|z\|+2\cdot Re(z\cdot\overline{w})+\|w\|, \forall z, w\in\mathbb{C}$.

56. Provare la validità della seguente uguaglianza: $\|z-w\| = \|z\|-2\cdot Re(z\cdot\overline{w})+\|w\|, \forall z, w\in\mathbb{C}$.

57. Provare la validità della seguente uguaglianza: $\|z+w\|+\|z-w\| = 2\cdot\left(\|z\|+\|w\|\right), \forall z, w\in\mathbb{C}$.

58. Quanti e quali sono i distinti valori che assume l'espressione $i^n + i^{-n}$, al variare di n nell'insieme dei numeri naturali? [3: –2, 0, 2]

Lavoriamo insieme

- *Data l'espressione* $\frac{1+xi}{x+i}, x \in \mathbb{R}$*; vogliamo vedere se esistono numeri reali x per i quali la data espressione è un numero immaginario puro.*
Cominciamo con lo scrivere la frazione come un numero complesso: $\frac{1+xi}{x+i} = \frac{(1+xi)\cdot(x-i)}{(x+i)\cdot(x-i)} = \frac{x-i+ix^2-i^2x}{x^2-i^2} = \frac{x+(x^2-1)i+x}{x^2+1} = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{x^2-1}{x^2+1}i$. Affinché il numero ottenuto sia immaginario puro, deve avere parte reale nulla, cioè $2x = 0 \Rightarrow x = 0$.
- *Se invece avessimo voluto sapere quando l'espressione rappresenta un numero reale*, si sarebbe dovuta annullare la parte immaginaria, cioè $x^2 - 1$, fatto che si verifica per $x = \pm 1$.

Livello 3

Trovare i valori dei parametri reali h e k, se esistono, per cui le seguenti uguaglianze sono identità

59. $h + k - 1 + (3k - h + 2)i = \frac{1-i}{3-4i}$; $h - k + (k - 2h + 1)i = 5 + 2i$ $\left[\left(h = \frac{29}{20}, k = -\frac{17}{100}\right); (h = -6, k = -11)\right]$

60. $3h - 1 + (2k - 3)i = 1 + i$; $\frac{h-ki}{1+i} = 4 - i$; $\frac{ki}{2} = \frac{h}{3-i}$ $\left[\left(h = \frac{2}{3}, k = 2\right); (h = 5, k = -3); (h = k = 0)\right]$

Trovare, se esistono numeri reali x per i quali le seguenti espressioni rappresentano rispettivamente numeri reali o numeri immaginari puri

61. $\frac{x\cdot i}{1+i}$; $\frac{x-3+xi}{x-i}$; $\frac{(2-xi)^2}{3x+2i}$; $\frac{3+x+xi}{3+x-i}$; $\frac{5x-i}{2+ix}$
$\left[(0;\varnothing); \left(\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}; 0 \vee 4\right); \left(\varnothing; 0 \vee \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right); (-1 \vee -3; \varnothing); (0; \varnothing)\right]$

62. Per quali numeri complessi z la somma $z + \frac{1}{z}$ è un numero reale? [Quelli a norma unitaria]

L'angolo di Derive

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%204/4-1/4-1-1.exe puoi scaricare un'applicazione che ti mostra l'utilizzo dei numeri complessi in Derive. Invece su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%204/4-1/4-1-1.dfw ti scarichi il relativo file Derive.
Attività Verificare gli esercizi assegnati.

L'angolo di Microsoft Mathematics

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%204/4-1/4-1-2.exe puoi scaricare un'applicazione che ti mostra l'utilizzo dei numeri complessi in Microsoft Mathematics. Invece su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%204/4-1/4-1-2.rar ti scarichi il relativo file Microsoft Mathematics.

Le coniche

Bisogna evitare, disse Triuscaillon, che in questa semplice ellisse, venga utilizzato iperbolicamente il circolo vizioso della parabola.
Raimond Queneau, Zazie dans le métro

Il problema

Dopo avere notato che nel piano cartesiano ortogonale le equazioni di primo grado in due variabili, rappresentano rette, risulta naturale cercare di studiare le rappresentazioni grafiche di equazioni di grado superiore al primo. Naturalmente ci si rende conto che all'aumentare del grado aumentano le difficoltà, pertanto cominciamo a stabilire cosa accade per il secondo grado.

Una prima questione che nasce dal tentativo di risoluzione del precedente problema è il fatto che, a differenza di quel che accade per le curve di primo grado, già con le curve di secondo grado possiamo avere equazioni alle quali non possiamo associare nessun punto del piano cartesiano. Basta infatti considerare equazioni che non hanno soluzioni reali.

Esempio 9

Consideriamo l'equazione $x^2 + y^2 = -1$. Ci rendiamo facilmente conto che da un punto di vista algebrico l'equazione non ha soluzioni reali, dato che qualsiasi numero reale innalzato al quadrato non è negativo (al minimo è zero), pertanto la somma di due quadrati non può essere negativa. Perciò la curva associata alla data equazione non esiste, o se si preferisce è una curva immaginaria, dato che se accettiamo che x e y possano rappresentare numeri complessi l'equazione ha soluzioni, per esempio ($x = 0$, $y = i$) è una di tali soluzioni. Solo che non sappiamo ancora se possiamo rappresentare numeri complessi sul piano cartesiano, quindi anche l'utilizzo dei numeri complessi non risolve il problema.

Prima di continuare enunciamo un risultato sulle rette.

Definizione 8

Una retta la cui equazione, comunque semplificata, contiene almeno un coefficiente complesso, si chiama **retta complessa**.

Definizione 9

Due rette si dicono **rette complesse coniugate** se i coefficienti omonimi sono fra loro numeri complessi coniugati.

Esempio 10

- La retta di equazione $3ix + 4iy + i = 0$, non è complessa, poiché dividendo tutti i suoi termini per i otteniamo la retta reale equivalente: $3x + 4y + 1 = 0$.
- Invece la retta $3ix + 4iy + 1 + i = 0$, è complessa, poiché per qualsiasi numero reale o complesso moltiplichiamo tutti i suoi termini, non riusciamo a eliminare tutti i termini complessi.
- Le rette di equazione $3x + (1 + i)\, y + 1 = 0$ e $3x + (1 - i)\, y + 1 = 0$, sono fra loro complesse coniugate, dato che ogni numero reale è coniugato di se stesso.
- Le rette di equazione $3x + (1 + i)\, y + 1 = 0$ e $2x + (1 - i)\, y + 1 = 0$, non sono fra loro complesse coniugate.

A proposito delle rette complesse coniugate vale un teorema che appare quantomeno sorprendente.

Teorema 5

Due rette complesse e coniugate si incontrano in un punto reale o sono parallele.

Dimostrazione

Siano le rette complesse e coniugate: $(a + zi)\, x + (b + pi)\, y + c + di = 0$ e $(a - zi)\, x + (b - pi)\, y + c - di = 0$.

Risolviamo il sistema formato da esse: $\begin{cases}(a+zi)x+(b+pi)y+c+di=0\\(a-zi)x+(b-pi)y+c-di=0\end{cases}$, sommando termine a termine otteniamo $2a + 2b + 2c = 0$, invece sottraendo otteniamo $2zi + 2pi + 2di = 0$, quindi il sistema equivale al sistema reale $\begin{cases}ax+by+c=0\\zx+py+d=0\end{cases}$ che se $ap \neq bz$ ha soluzioni reali; mentre se $ap = bz$, il sistema non ha soluzioni, reali o complesse che siano.

Esempio 11

- Le rette $(1+ i) x + y + i = 0$ e $(1 – i) x + y – i = 0$, si incontrano nel punto le cui coordinate sono soluzioni del sistema $\begin{cases}(1+i)x+y+i=0\\(1-i)x+y-i=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+y=0\\-x-1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$.
- Invece le rette $(1 + 2i) x + (2 + 4i) y + i = 0$ e $(1 – 2i) x + (2 – 4i) y – i = 0$, non si incontrano in alcun punto reale o complesso dato che il sistema $\begin{cases}x+2y=0\\2x+4y+1=0\end{cases}$ non ha soluzioni.

Dopo avere osservato che non sempre a un'equazione riusciamo ad associare una curva nel piano cartesiano, cominciamo a definire l'oggetto delle nostre discussioni.

Definizione 10

La totalità dei punti del piano cartesiano che verificano una generica equazione di secondo grado in due variabili: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, si chiama **conica**. Se la detta equazione ha soluzioni reali, la conica si dice **reale**, se l'equazione non ha soluzioni reali la conica si dice **immaginaria**.

Non è detto che le coniche reali siano sempre diverse dalle rette.

Esempio 12

- Sia l'equazione $x^2 + 2xy + y^2 = 0$. Stavolta le soluzioni reali ci sono, una di esse è per esempio $x = y = 0$; quindi l'origine $O \equiv (0; 0)$ appartiene alla curva associata all'equazione. Ma vi sono tanti altri punti come per esempio $A \equiv (1; –1)$ o $B \equiv (–3; 3)$. Notiamo però che l'equazione può anche scriversi più semplicemente nel modo seguente: $(x + y)^2 = 0$, cioè come il quadrato dell'equazione di una retta. Ciò vuol dire che la nostra equazione ha le stesse soluzioni di $x + y = 0$, quindi ha la stessa rappresentazione grafica. Pertanto è una retta, ma nello stesso tempo è diversa dall'equazione di una retta, non fosse altro perché è un'equazione di secondo grado. Diciamo che è una retta di *molteplicità* due.
- Adesso consideriamo l'equazione $(x – y + 1) \cdot (2x + 3y – 3) = 0$. Se sviluppiamo i calcoli otteniamo un'equazione di secondo grado in due variabili: $2x^2 + xy – 3y^2 – x + 6y – 3 = 0$, quindi abbiamo una conica reale. Ma ancora una volta osserviamo che questa equazione ha le stesse soluzioni di entrambe le singole equazioni $x – y + 1 = 0$, $2x + 3y – 3 = 0$, quindi graficamente non differisce dalla rappresentazione di entrambe, cioè la nostra conica reale è in realtà l'insieme di due rette incidenti.

Visto quanto evidenziato nel precedente esempio poniamo una definizione.

Definizione 11

Una conica reale o immaginaria, la cui equazione può scriversi come prodotto di due equazioni di primo grado a coefficienti reali o complessi, si chiama **conica spezzata o degenere**, altrimenti si dice **irriducibile**.

Abbiamo osservato facilmente che $x^2 + 2xy + y^2 = 0$ si può scrivere $(x + y)^2 = 0$; certamente più difficile è far vedere che $2x^2 + xy – 3y^2 – x + 6y – 3 = 0$, si possa scrivere $(x – y + 1) \cdot (2x + 3y – 3) = 0$. Vogliamo allora vedere come stabilire se una conica è o no degenere.

Esempio 13

- Dato che abbiamo a che fare con un'equazione di secondo grado, seppure in due variabili, per scomporla usiamo il fatto noto che afferma che se l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha le soluzioni, reali o complesse, distinte o no, x_1 e x_2, allora essa si può scrivere $a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$. Quindi cerchiamo di risolvere la nostra equazione come se avesse una sola variabile, considerando l'altra come un parametro. Supponiamo per esempio che l'incognita sia x. $2x^2 + (y - 1)\ x - 3y^2 + 6y - 3 = 0$. Calcoliamone il discriminante: $\Delta = (y - 1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3y^2 + 6y - 3) = [5 \cdot (y - 1)]^2$. Adesso risolviamo l'equazione:

$$x = \frac{-(y-1) \pm \sqrt{[5\cdot(y-1)]^2}}{4} = \frac{-y+1\pm 5\cdot(y-1)}{4} = \prec \begin{array}{l} \frac{-y+1+5y-5}{4} = \frac{4y-4}{4} = y-1 \\ \frac{-y+1-5y+5}{4} = \frac{-6y+6}{4} = \frac{-3y+3}{2} \end{array}.$$

Questo significa che possiamo scrivere l'equazione di partenza nel seguente modo:

$$2 \cdot (x - y + 1) \cdot \left(x - \frac{-3y+3}{2}\right) = 0 \Rightarrow (x - y + 1) \cdot (2x + 3y - 3) = 0$$

- Consideriamo adesso l'equazione $x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 6y + 10 = 0$. Ripetiamo quanto visto nel precedente caso: $\begin{array}{l} x^2 - 2\cdot(y+3)\cdot x + y^2 + 6y + 10 = 0 \Rightarrow x = y + 3 \pm \sqrt{(y+3)^2 - y^2 - 6y - 10} = \\ = y + 3 \pm \sqrt{y^2 + 6y + 9 - y^2 - 6y - 10} = y + 3 \pm \sqrt{-1} = y + 3 \pm i \end{array}$. Perciò la conica è spezzata nelle rette complesse e coniugate: $x - y - 3 - i = 0$ e $x - y - 3 + i = 0$.
- Naturalmente non tutte le coniche sono degeneri, per esempio $x^2 + (y - 1) \cdot x - y^2 + y - 3 = 0$ non lo è. Infatti: $\Delta = (y - 1)^2 - 4 \cdot (-y^2 + y - 3) = 5y^2 - 6y + 13$, che non è un quadrato perfetto, dato che il suo delta: $6^2 - 4 \cdot 5 \cdot 13 \neq 0$. Ciò significa che non riusciamo a scomporre in nessun modo, l'equazione di partenza come prodotto di due espressioni di primo grado.

In vista degli esempi precedenti, possiamo enunciare una regola per stabilire se una data conica è o no spezzata. Partiamo dall'equazione generica, $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, che andiamo a scrivere come un'equazione nella sola incognita x: $ax^2 + (by + d) \cdot x + cy^2 + ey + f = 0$. Di questa equazione dobbiamo calcolare il Δ, se esso è un quadrato di binomio allora la conica è spezzata. Ma abbiamo già ricordato che un trinomio di secondo grado è un quadrato di binomio solo se il suo Δ è nullo. Questo significa che anche se il discriminante è un semplice numero, positivo o negativo allora la conica è spezzata, come mostrato nel secondo degli esempi 13.
Enunciamo una condizione equivalente ma più veloce da calcolare.

Teorema 6

La conica di equazione $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ è spezzata se e solo se $\begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} = 0$.

Dimostrazione

Consideriamo il discriminante dell'equazione $ax^2 + (by + d) \cdot x + cy^2 + ey + f = 0$; esso è $\Delta = (by + d)^2 - 4a \cdot (cy^2 + ey + f) = b^2y^2 + 2bdy + d^2 - 4acy^2 - 4aey - 4af = (b^2 - 4ac) \cdot y^2 + 2 \cdot (bd - 2ae) \cdot y + d^2 - 4af$. La conica è spezzata se questa espressione è un quadrato di binomio, ma ciò significa che il suo discriminante è nullo. Cioè se $\frac{\Delta}{4} = (bd - 2ae)^2 - (b^2 - 4ac) \cdot (d^2 - 4af) = 4acf - ae^2 - b^2f + bde - cd^2 = 0$. Questa è perciò la condizione affinché la generica conica sia spezzata. Se sviluppiamo il determinante della tesi otteniamo la stessa relazione, pertanto il teorema è provato.

Esempio 14

Abbiamo già visto in altro modo che la conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 6y + 10 = 0$ è spezzata, proviamolo adesso con il risultato del teorema 6. Si ha: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 10 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{matrix} = 10+9+9-9-9-10=0$.

Un'altra cosa che abbiamo osservato è che una conica può spezzarsi o in due rette coincidenti (cioè l'equazione è essa stessa un quadrato di binomio), o in due rette reali e distinte o in due rette complesse e coniugate. Queste differenze da un punto di vista analitico dipendono, come abbiamo visto negli esempi, dal valore del discriminante dell'equazione $ax^2 + (by + d) \cdot x + cy^2 + ey + f = 0$. In particolare se esso è un quadrato perfetto positivo, allora otteniamo due rette reali, distinte e incidenti; se è l'opposto di un quadrato perfetto positivo, le rette sono complesse e incidenti; se infine è zero le rette sono o coincidenti o parallele, reali o complesse. Questo ci permette di distinguere fra loro queste tre situazioni, dando loro tre nomi diversi che useremo anche nel caso in cui le coniche non sono degeneri.

Teorema 7

Data una conica degenere di equazione $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, essa è spezzata in due rette reali e distinte, parallele o complesse e coniugate, a seconda che la quantità $b^2 - 4ac$ sia rispettivamente, positiva, nulla o negativa.

Nel teorema precedente consideriamo rette parallele anche le rette coincidenti.
Adesso possiamo classificare le coniche.

Definizione 12

Data una conica di equazione $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, la quantità $\Delta = b^2 - 4ac$ si chiama **discriminante** della conica.

Definizione 13

Una conica reale o immaginaria, degenere o irriducibile, a seconda che il suo discriminante sia rispettivamente, negativo, nullo o positivo, si chiama: **ellisse**, **parabola**, **iperbole**.

Il significato dei tre vocaboli usati sarà spiegato successivamente.

Esempio 15

Per la conica di equazione $x^2 + 2xy + y^2 - 3x - y + 1 = 0$, si ha: $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 = 0$, quindi è una parabola. Inoltre, poiché $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_1-R_2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right) = -2 \neq 0$, è irriducibile.

Visto che nell'equazione di una conica sono presenti 6 parametri, possiamo enunciare anche il seguente risultato.

Teorema 8

Per 5 punti, di cui al massimo tre allineati, passa una e una sola conica.

Dimostrazione

L'equazione di una conica generica è $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, quindi in generale per determinarla servono 6 condizioni. Però se uno almeno dei 6 parametri è nullo le condizioni diventano tante quanti sono i parametri non nulli. Se invece sono tutti diversi da zero, possiamo riscrivere l'equazione nel modo seguente: $\frac{a}{f}x^2+\frac{b}{f}xy+\frac{c}{f}y^2+\frac{d}{f}x+\frac{e}{f}y+1=0$ che contiene appunto solo 5 parametri.

Esempio 16

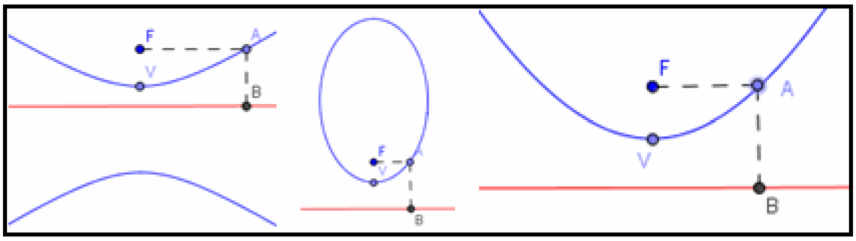
Vogliamo trovare l'equazione della conica passante per i punti (0; 0), (1; 0), (1; 1), (– 1; 1), (–2; – 1). Impostiamo il seguente sistema $\begin{cases} a+d=0 \\ a+b+c+d+e=0 \\ a-b+c-d+e=0 \\ 4a+2b+c-2d-e=0 \end{cases}$ in cui abbiamo sostituito le coordinate dei punti nell'equazione $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = 0$, questo perché il passaggio per l'origine implica che il termine noto sia nullo:, le cui soluzioni sono: $\left(a=\frac{2}{7}e; b=\frac{2}{7}e; c=-\frac{9}{7}e; d=-\frac{2}{7}e\right)$, cioè dipendono dal parametro e, che possiamo pertanto eliminare, quindi l'equazione è $2x^2 + 2xy - 9y^2 - 2x + 7y = 0$.

Vale anche quest'altro risultato, che classifica le coniche da un punto di vista diverso.

Teorema 9

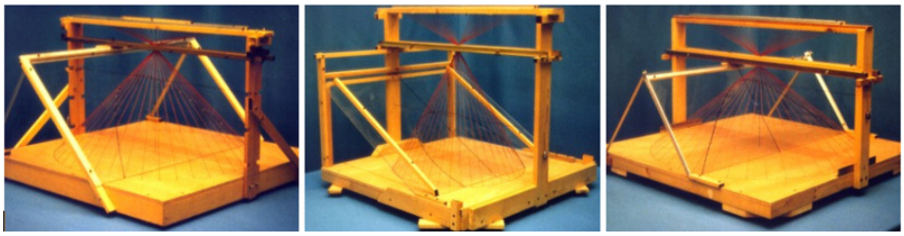
Il luogo dei punti del piano cartesiano ortogonale per cui la distanza da un punto fisso, detto fuoco, è ε volte la distanza da una retta fissa, detta direttrice, è una conica. In particolare se ε < 1 abbiamo un'ellisse, se ε = 1 una parabola, se ε > 1 un'iperbole. ε si chiama eccentricità della conica.
Dimostrazione Omessa

Il precedente teorema è quello che giustifica il nome dato alle tre coniche.
Infatti consideriamo la figura seguente, in cui in ogni conica abbiamo tracciato il segmento parallelo alla direttrice e congiungente il fuoco con un punto della conica. Tale segmento veniva chiamato dagli antichi (in effetti era il suo doppio, ma non cambia nulla per il senso di quel che vogliamo mostrare) *latus rectum*. Abbiamo poi segnato anche il segmento condotto dal detto punto sulla conica perpendicolarmente alla direttrice. Si nota facilmente che nel caso della parabola i due segmenti sono uguali, per l'ellisse il *latus rectum* è minore dell'altro, per l'iperbole è maggiore. Nell'angolo storico forniamo altre informazioni.

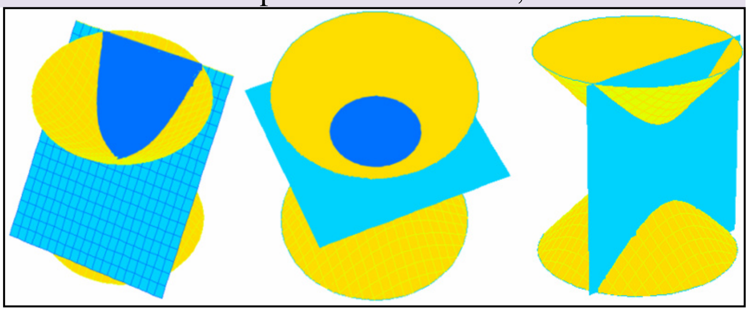


L'angolo storico

Il nome di coniche, o più propriamente sezioni coniche, dato alle curve di secondo grado dipende dalla loro interpretazione geometrica, che è probabilmente quella originale. L'inventore di tali curve è considerato Menecmo (vissuto attorno al 350 a. C.), che le definì appunto come le sezioni piane di un cono. In seguito Aristeo (attivo attorno al 320 a. C.) le definì come sezioni di un cono circolare retto (generato cioè dalla rotazione di un triangolo rettangolo attorno a un suo cateto), con piani perpendicolari a una sua generatrice. A seconda del fatto che la sezione con un piano che contiene il vertice del cono fosse un triangolo acutangolo, rettangolo o ottusangolo, si ottenevano rispettivamente ellissi, parabole, iperbole. In greco si usavano le parole *ortotome, oxitome, amblitome*.



Abbiamo proposto tre foto riferite a degli strumenti che illustrano la costruzione delle tre coniche mediante le idee di Menecmo. Tali strumenti sono custoditi presso il Laboratorio di Matematica del Museo Universitario di Storia Naturale e della Strumentazione Scientifica dell'Università di Modena e Reggio Emilia.
Fu poi Apollonio di Perga (vissuto nel III secolo a. C.) a definire le tre sezioni rispetto a uno stesso cono, anche obliquo, dando loro anche i nomi che ancora oggi usiamo. In particolare le parole greche da egli usate erano *paraballeiu*, per la parabola, vocabolo che significa uguagliare; *elleipeiu*, per l'ellisse, che significa lasciare; *uperballeiu*, per l'iperbole, il cui significato è sorpassare. Il riferimento dei vocaboli è a quanto detto prima relativamente al *latus rectum*. Di seguito tre immagini che visualizzano le definizioni di Apollonio. Per un lungo periodo le coniche furono in qualche modo messe in disparte in matematica, anche se furono usate, come vedremo, dai fisici in diverse applicazioni, dall'ottica alla meccanica. Grazie alla nascita della geometria analitica esse furono riprese e studiate appunto con metodi più potenti quali quelli dell'algebra e successivamente dell'analisi. Il primo a discutere la generica equazione di una conica è stato Leonhard Euler in un lavoro del 1748.



I Protagonisti

Menecmo nacque verso il 380 a. C. ad Alopeconneso, nell'attuale Turchia. È ricordato non solo perché pare sia stato il primo a osservare che sezionando un cubo con un piano si ottengono particolari curve, ma anche perché usò due di queste curve, un'iperbole e una parabola per risolvere, in modo però non consentito dalle *regole*, uno dei tre problemi classici della geometria: quello della duplicazione del cubo. Fu allievo di Eudosso ma sembra anche che abbia fatto parte dell'accademia di Platone. Egli fu anche maestro di Alessandro Magno alla richiesta del quale di avere un'esposizione della geometria più semplice dato che egli era un re, pare che abbia risposto, «*Mio re, nel tuo regno vi sono strade per re e strade per gli altri, ma nel regno della geometria la strada è uguale per tutti*». Aneddoti simili a questo sono comunque riportati anche per altri matematici dell'antichità, Talete è uno di questi. Morì intorno al 320 a. C.
Apollonio nacque a Perga, odierna Turchia, presumibilmente nel 262 a. C. ma studiò ad Alessandria. Poi si stabilì a Pergamo in cui vi era un'università e una biblioteca paragonabili al famoso Museo di Alessandria. Fu qui che scrisse le *Coniche* in otto tomi, di cui si conservano solo i primi 7 e quelli dal 5 al 7 sono solo in una versione araba molto posteriore. Universalmente noto per la sua opera geometrica, paragonabile agli *Elementi* di Euclide, si occupò però anche di astronomia, con importanti risultati. Diverse sono le sue opere, anche se poche sono quelle che sono giunte fino ai giorni nostri. Morì ad Alessandria intorno al 190 a.C.

L'Antologia

Renée Descartes *La geometrie,* 1637

> *Sulla natura delle linee curve.*
> *Gli antichi erano familiari con il fatto che i problemi di geometria possono essere divisi in tre classi, cioè, piani, solidi e lineari. Il che è equivalente a dire che alcuni problemi richiedono solo cerchi e rette per la loro costruzione, mentre altri richiedono una sezione conica e ancora altri richiedono curve più complesse. Sono stupito che essi non siano andati oltre, distinguendo fra differenti gradi di queste curve più complesse, né capisco perché essi chiamavano queste ultime curve meccaniche piuttosto che geometriche.*

Nell'antichità, prima di Cartesio naturalmente, venivano chiamate curve meccaniche quelle che non potevano essere descritte con il solo uso della riga, non graduata, e del compasso. Cartesio stesso lo spiega.

> *Se diciamo che le chiamavano meccaniche perché era richiesto qualche specie di strumento per descriverle, allora dovremmo, per essere coerenti, rifiutare anche i cerchi e le rette, poiché non possono essere costruiti senza l'uso del compasso o della riga, che sono anch'essi degli strumenti.*

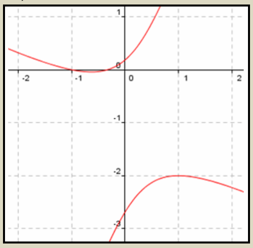
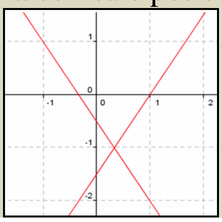
Cartesio continua cercando di capire le ragioni degli antichi. Poi passa alla trattazione delle coniche e soprattutto alle curve più complesse.

> *Probabilmente la corretta spiegazione del rifiuto da parte degli antichi geometri di accettare curve più complesse delle sezioni coniche* [anch'esse non sempre accettate, come Cartesio stesso dice prima]*, sta nel fatto che le prime curve che hanno attirato la loro attenzione sono state la spirale e la quadratice e curve simili, che in verità appartengono solo alla meccanica e non solo fra quelle curve che io ritengo debbano essere incluse fra le curve geometriche.*

Queste curve di cui parla Cartesio sono in effetti costruite con strumenti molto sofisticati e soprattutto sono ottenute mediante composizione di movimenti fisici.
I passi riportati sono tradotti dall'Autore.

Verifiche

Lavoriamo insieme

- *Studiare la conica di equazione* $3x^2 + 5xy - 2y^2 + 4x - 5y + 1 = 0$.
  Cominciamo a stabilire se è o no spezzata; grazie al Teorema 6 dobbiamo calcolare il determinante:
  $$\begin{vmatrix} 3 & \frac{5}{2} & \frac{4}{2} \\ \frac{5}{2} & -2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{4}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{vmatrix} = \left| \begin{matrix} 3 & \frac{5}{2} & 2 \\ \frac{5}{2} & -2 & -\frac{5}{2} \\ 2 & -\frac{5}{2} & 1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -2 \\ 2 & -\frac{5}{2} \end{matrix} = -6 - \frac{25}{2} - \frac{25}{2} + 8 - \frac{75}{4} - \frac{25}{4} = -48 \neq 0$$
  Abbiamo usato la regola di Sarrus. Pertanto la conica non è spezzata. Vediamo adesso che tipo di conica è. $\Delta = 52 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 49 > 0$, Abbiamo a che fare con un'iperbole, che abbiamo disegnato con il software Geogebra.
  
- *Verificare se la conica* $9x^2 - 4y^2 - 6x - 8y - 3 = 0$ *è spezzata*.
  $$\left| \begin{matrix} 9 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & -4 \\ -3 & -4 & -3 \end{matrix} \right| \begin{matrix} 9 & 0 \\ 0 & -4 \\ 3 & -4 \end{matrix} = 108 + 36 - 144 = 0$$
  La conica è spezzata. Determiniamo le rette in cui si spezza.
  $$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 36y^2 + 72y + 27}}{9} = \frac{3 \pm \sqrt{36y^2 + 72y + 36}}{9} = \frac{3 \pm \sqrt{(6y+6)^2}}{9} = \frac{3 \pm (6y+6)}{9} = \begin{cases} \frac{2y+3}{3} \\ -\frac{2y+1}{3} \end{cases}$$
  Quindi la conica si spezza nelle rette $3x - 2y - 3 = 0$ e $3x + 2y + 1 = 0$, come mostrato in figura, sempre ottenuta con Geogebra. Il discriminante della conica è positivo, quindi è un'iperbole degenere.
  

Determinare quali fra le seguenti coniche sono spezzate; per quelle che lo sono determinare le rette in cui si spezzano. Determinare infine il tipo di ognuna delle coniche

Livello 1

1. $4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ [Parabola reale spezzata nella retta $2x - y + 1 = 0$]
2. $12x^2 - 7xy + y^2 + 13x - 4y + 2 = 0$ [Iperbole non degenere]
3. $6x^2 + 7xy - 5y^2 + 3x + 5y + 1 = 0$ [Iperbole non degenere]
4. $x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0$ [Parabola immaginaria non degenere]
5. $x^2 - 4xy + 4y^2 - x + 2y - 12 = 0$ [Parabola reale spezzata in $x - 2y + 3 = 0$ e $x - 2y - 4 = 0$]
6. $20x^2 + xy - y^2 + 23x + 8y - 7 = 0$ [Iperbole spezzata in $4x + y - 1 = 0$ e $5x - y + 7 = 0$]
7. $4x^2 + y^2 + 2 = 0$ [Ellisse immaginaria non degenere]
8. $10x^2 - 29xy + 10y^2 + 17x - 11y + 3 = 0$ [Iperbole spezzata in $5x - 2y + 1 = 0$ e $2x - 5y + 3 = 0$]
9. $13x^2 + 10xy + 2y^2 - 8x - 4y - 16 = 0$ [Ellisse reale non degenere]
10. $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 8x + 6y + 1 = 0$ [Parabola reale non degenere]
11. $16x^2 + 8xy + y^2 - 9 = 0$ [Parabola spezzata in $4x + y - 3 = 0$ e $4x + y + 3 = 0$]

12. $20x^2 - 13xy + 2y^2 + 31x - 10y + 12 = 0$ [Iperbole spezzata in $4x - y + 3 = 0$ e $5x - 2y + 4 = 0$]

Determinare le rette in cui si spezzano le ellissi immaginarie seguenti

13. $16x^2 + y^2 - 6y + 9 = 0$ [$4x + i \cdot (y - 3) = 0$ e $4x - i \cdot (y - 3) = 0$]
14. $5x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y + 1 = 0$ [$(1 - 2i) \cdot x - y + 1 = 0$ e $(1 + 2i) \cdot x - y + 1 = 0$]
15. $9x^2 + y^2 + 6x + 1 = 0$ [$3x - iy + 1 = 0$ e $3x + iy + 1 = 0$]

Livello 2

Determinare l'eventuale punto comune alla retta complessa seguente e alla sua coniugata

16. $(1 - i)\cdot x + y - i = 0$; $2x + 3y - 1 - 2i = 0$; $(1 + 2i)\cdot x - 2iy - 1 + i = 0$ $\left[(-1;1);\varnothing;\left(1;\frac{3}{2}\right)\right]$

17. $(2 - i)\cdot x - (2 - 3i)\cdot y - 2i = 0$; $3x + iy - 2 = 0$; $(-2 + i)\cdot x + 2(1 - i)\cdot y - 1 + i = 0$ $\left[(1;1);\left(\frac{2}{3};0\right);\left(0;\frac{1}{2}\right)\right]$

Livello 3

Giustificare le risposte ai seguenti quesiti

18. Se una conica è spezzata in due rette coincidenti di che tipo è? [Parabola]
19. Se una conica è spezzata in due rette distinte di che tipo è?
[Parabola se le rette sono parallele, o iperbole se non lo sono]
20. Se una conica è spezzata in due rette immaginarie e coniugate di che tipo è?
[Parabola se le rette sono parallele, o ellisse se non lo sono]

Lavoriamo insieme

Determinare la conica passante per i punti (–1; 1), (1; 1), (0; 2), (0; –1), (–2; 0).

Impostiamo il sistema sulla generica equazione $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$: $\begin{cases} a-b+c-d+e+f=0 \\ a+b+c+d+e+f=0 \\ 4c+2e+f=0 \\ c-e+f=0 \\ 4a-2d+f=0 \end{cases}$,

che ha soluzioni $\left(a=-f;b=\frac{3}{2}f;c=-\frac{1}{2}f;d=-\frac{3}{2}f;e=\frac{1}{2}f\right)$, pertanto possiamo porre $f = 1$ e gli altri parametri variano di conseguenza. Quindi la conica ha equazione $2x^2 - 3xy + y^2 + 3x - y - 2 = 0$. Per inciso notiamo che la conica è spezzata nelle rette $x - y + 2 = 0$ e $2x - y - 1 = 0$.

Determinare le coniche passanti per i punti indicati

Livello 2

21. (–1; 2), (1; 1), (0; 2), (0; –1), (–2; 0) [$x^2 + y^2 + x - y - 2 = 0$]
22. (–1; 2), (2; 2), (0; 3), (0; 0), (–2; 0) [$2x^2 - 3xy + 2y^2 + 4x - 6y = 0$]
23. (–3; 2), (3; 1), (0; 3), (0; 0), (–1; 1) [$2x^2 + 8xy + 3y^2 - 12x - 9y = 0$]
24. (–3; 1), (2; 3), (–1; 3), (–1; 4), (1; 1) [$6x^2 - 9xy - 4y^2 + 21x + 19y - 33 = 0$]
25. (0; 0), (3; 3), (0; 2), (1; 2), (1; 1) [$xy - y^2 - 2x + 2y = 0$]

Posizioni reciproche di retta e conica e di due coniche

Il problema

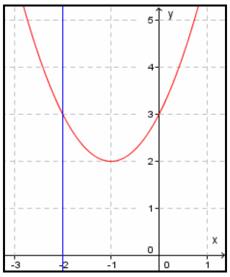
Date una retta e una conica o due coniche, quanti punti possono avere in comune al massimo?

Il problema può essere affrontato al solito da due diversi punti di vista, quello puramente algebrico e quello analitico. Più semplice è la risoluzione del primo problema, dato che una retta rispetto a una conica può avere con essa 0, 1, 2 o infiniti punti in comune. Il caso infinito si ha naturalmente quando la conica è spezzata e una delle rette componenti è quella in considerazione.
Il problema risolto analiticamente equivale alla determinazione del numero di soluzioni che può avere il sistema $\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \\ y = mx + p \end{cases}$, che è di grado due, quindi può avere appunto 1 o 2 soluzioni se determinato, 0 se impossibile e infiniti, di ordine 1, se indeterminato. Poniamo allora una definizione.

Definizione 14

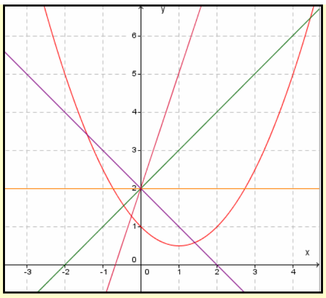
Una retta e una conica si dicono
- **esterne** se hanno 0 punti in comune;
- **tangenti** se hanno 2 punti coincidenti in comune;
- **secanti** se hanno 1 o 2 punti in comune.

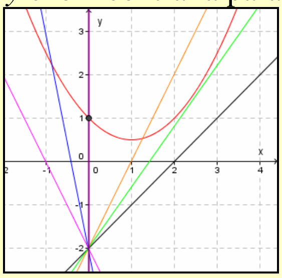
Può esserci una prima questione sul perché abbiamo detto che retta e conica sono tangenti se hanno in comune 2 punti coincidenti e non 1 punto. Per comprenderlo basta considerare la figura seguente, in cui la retta e la parabola hanno un solo punto in comune, ma certamente nessuno dirà che essi sono tangenti.



Esempio 17

- Consideriamo la parabola di equazione $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$ e il fascio di rette di equazione $y = mx + 2$, vogliamo studiare, al variare del parametro m le reciproche posizioni fra la retta e la parabola. Risolviamo il sistema parametrico formato dalle due equazioni: $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1 \\ y = mx + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mx + 2 = \frac{1}{2}x^2 - x + 1 \\ y = mx + 2 \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} 2mx + 4 = x^2 - 2x + 2 \\ y = mx + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2 \cdot (1 + m)x - 2 = 0 \\ y = mx + 2 \end{cases}$. Come si vede abbiamo ottenuto un'equazione di secondo grado parametrica; al variare del parametro l'equazione può avere 0, 1 o 2 soluzioni reali, che corrispondono alle tre possibilità che la retta sia esterna, tangente o secante la parabola. Ciò dipende naturalmente dal discriminante dell'equazione, cioè dal valore del discriminante: $\frac{\Delta}{4} = (1 + m)^2 + 8$. In questo caso esso è sempre positivo, il che vuol dire che nel fascio tutte le rette sono secanti. L'interpretazione geometrica è la seguente: Cioè il fascio di rette ha centro in un punto interno alla parabola, quindi tutte le rette devono essere secanti.



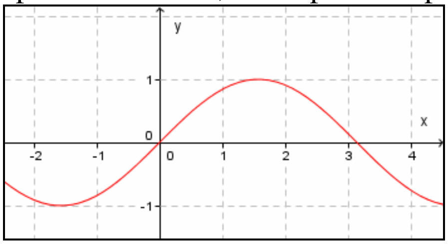
- Supponiamo invece che il fascio abbia equazione $y = mx - 2$, il cui centro si ricava facilmente essere un punto esterno alla parabola, $C \equiv (0; -2)$. Il sistema diviene: $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1 \\ y = mx - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mx - 2 = \frac{1}{2}x^2 - x + 1 \\ y = mx - 2 \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} 2mx - 4 = x^2 - 2x + 2 \\ y = mx - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2 \cdot (1+m)x + 6 = 0 \\ y = mx - 2 \end{cases}$. Il discriminante dell'equazione risolvente è $\frac{\Delta}{4} = (1+m)^2 - 6$, e si ha: $\frac{\Delta}{4} = 0 \Rightarrow$ $(1 + m)^2 - 6 = 0$ $\Rightarrow 1 + m = \pm\sqrt{6} \Rightarrow$ $\Rightarrow m = -1 \pm \sqrt{6}$; da cui: $\frac{\Delta}{4}\begin{cases} > 0 & m < -1-\sqrt{6} \vee m > -1+\sqrt{6} \\ < 0 & -1-\sqrt{6} < m < -1+\sqrt{6} \end{cases}$. Ecco i valori di m per cui si hanno, nell'ordine, rette tangenti, secanti, esterne, in particolare l'asse y che incontra la parabola nel punto (0; 1) è secante e non tangente alla parabola. In figura verifichiamo: 

Con la tecnica vista in precedenza possiamo determinare per quali valori di un parametro in un fascio di rette vi sono rette secanti, tangenti, esterne a una data conica. Naturalmente a seconda del tipo di equazione possiamo avere calcoli più o meno laboriosi. Invece può essere importante, come visto nel precedente esercizio, stabilire la posizione del centro del fascio rispetto alla conica. Come può farsi ciò? Vediamo un esempio.

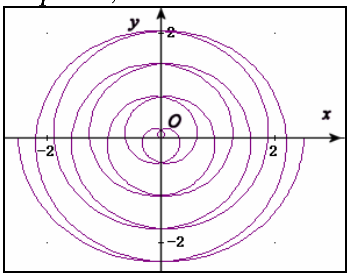
Esempio 18

- Nell'esempio precedente potevamo stabilire subito che il centro del fascio, $C \equiv (0; 2)$, era interno alla parabola di equazione $y = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$. Scriviamo $y - \frac{1}{2}x^2 + x - 1 = 0$ e sostituiamo all'espressione a primo membro le coordinate del punto: $\Rightarrow 2 - \frac{1}{2} \cdot 0 - 0 - 1 = 1 > 0$.
- Invece se il centro fosse stato $C \equiv (0; -2)$, che è un punto esterno alla parabola, avremmo avuto: $-2 - \frac{1}{2} \cdot 0 - 0 - 1 = -3 < 0$.
- Infine se il centro fosse stato $C \equiv (0; 1)$, che è un punto della parabola, avremmo: $1 - \frac{1}{2} \cdot 0 - 0 - 1 = 0$.

I risultati ottenuti nell'esempio, unitamente alle informazioni che abbiamo sui tre centri sembrano suggerirci che se la sostituzione fornisce un numero positivo il punto è *interno* alla parabola, se negativo è *esterno*, se nullo è *sulla* parabola. Per il momento sappiamo che se un punto $P \equiv (x_P; y_P)$ appartiene a una curva di equazione $f(x; y) = 0$, allora per definizione deve aversi $f(x_P,y_P) = 0$, quindi se non vi appartiene deve essere $f(x_P,y_P) \neq 0$, cioè $f(x_P,y_P) > 0$ oppure $f(x_P,y_P) > 0$. Naturalmente se una curva è in qualche modo *chiusa* come l'ellisse, possiamo parlare di dentro o fuori. Anche per la parabola e l'iperbole potremmo parlare di *dentro* e *fuori*, considerando il fatto che in qualche modo le linee continuate all'infinito sembrano *racchiudere* una parte di piano. Per altre curve ciò non può essere fatto, come per esempio per la seguente curva in figura.



In ogni caso però una curva divide il piano in tre *zone*, i punti che stanno sulla curva, quelli che stanno *da una parte* e quelli che stanno *dall'altra parte*, anche se talvolta può essere molto difficile stabilire ciò, come



nella successiva figura.

Per determinare la tangente a una conica in un suo punto possiamo applicare un risultato più semplice, stabilito dal seguente teorema che non dimostriamo.

Teorema 10

Data la conica Γ di equazione $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ e il punto $P \equiv (x_P; y_P)$ a essa appartenente, l'equazione della tangente a Γ e passante per P è: $(2a \cdot x_P + b \cdot y_P + d) \cdot x + (b \cdot x_P + 2c \cdot y_P + e) \cdot y + d \cdot x_P + e \cdot y_P + 2f = 0$

Verifichiamo la formula stabilita dal teorema.

Esempio 19

Consideriamo la conica di equazione $x^2 - xy + y^2 - 2x + 3y - 7 = 0$ e il punto $P \equiv (1; 2)$. Verifichiamo intanto che P è un punto della conica: $1^2 - 1 \cdot 2 + 2^2 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 7 = 0$. Applichiamo la formula: $(2 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 - 2) \cdot x + (-1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 3) \cdot y - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-7) = 0 \Rightarrow -2x + 6y - 10 = 0 \Rightarrow x - 3y + 5 = 0$. Verifichiamo algebricamente la tangenza risolvendo il sistema $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 - 2x + 3y - 7 = 0 \\ x - 3y + 5 = 0 \end{cases}$, ottenendo:

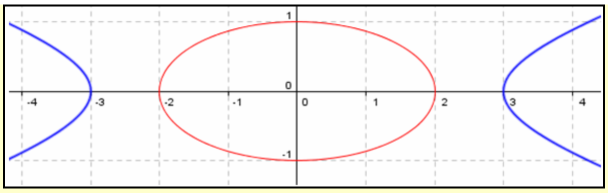
$$\begin{cases} (3y-5)^2 - (3y-5) \cdot y + y^2 - 2 \cdot (3y-5) + 3y - 7 = 0 \\ x = 3y - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9y^2 - 30y + 25 - 3y^2 + 5y + y^2 - 6y + 10 + 3y - 7 = 0 \\ x = 3y - 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7y^2 - 28y + 28 = 0 \\ x = 3y - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y-2)^2 = 0 \\ x = 3y - 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases} \wedge \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

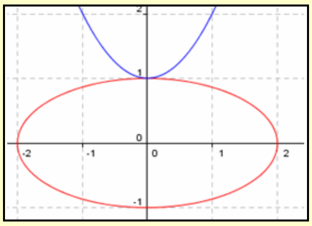
Vediamo cosa accade per le intersezioni di due coniche. Visto che le relative equazioni hanno grado 2, il sistema risolvente avrà grado 4, quindi vi possono essere 0, 1, 2, 3, 4 o infinite soluzioni; le infinite soluzioni possono essere di due diversi gradi, nel senso che le coniche sono entrambe degeneri e si spezzano in due rette, una delle quali è comune, ∞^1 soluzioni oppure sono la stessa conica, ∞^2 soluzioni.

Esempio 20

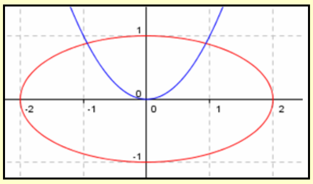
- Le coniche di equazioni $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \frac{x^2}{9} - y^2 = 1$, non hanno punti in comune, come si vede facilmente risolvendo il sistema formato dalle loro equazioni. Rappresentiamole con Geogebra per visualizzare i risultati ottenuti analiticamente.



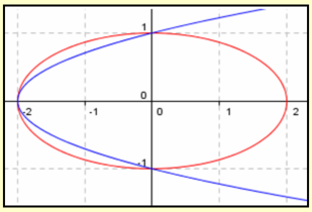
- Le coniche di equazioni $\frac{x^2}{4}+y^2=1$, $y=x^2+1$, hanno 1 punto in comune.



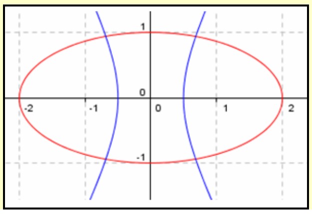
- Le coniche di equazioni $\frac{x^2}{4}+y^2=1$, $y=x^2$, hanno 2 punti in comune



- Le coniche di equazioni $\frac{x^2}{4}+y^2=1$, $x=2y^2-2$, hanno 3 punti in comune.



- Le coniche di equazioni $\frac{x^2}{4}+y^2=1, 4x^2-y^2=1$, hanno 4 punti in comune.



Del resto già sappiamo che una conica è individuata da 5 suoi punti a 3 a 3 non allineati, quindi il massimo numero finito di punti che possono avere in comune due coniche deve essere 4. Nel caso in cui vi sono meno di 4 punti reali in comune, i *contatti* tra le coniche possono essere di tipo diverso, a seconda del numero di volte che un dato valore si trova come soluzione. Chiariamo meglio con degli esempi.

Esempio 21

- Il sistema $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=x^2+1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{x^2}{4}+\left(x^2+1\right)^2=1\\ y=x^2+1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{x^2}{4}+x^4+2x^2+1=1\\ y=x^2+1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2+4x^4+8x^2=0\\ y=x^2+1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4x^4+9x^2=0\\ y=x^2+1\end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases}x^2\cdot\left(x^2+9\right)=0\\ y=x^2+1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases} \wedge \begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}$, ha una soluzione che in qualche modo *vale per* due, diciamo che è una soluzione doppia.
- Il sistema $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\ x^2+y^2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{x^2}{4}+1-x^2=1\\ y^2=1-x^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{x^2}{4}-x^2=0\\ y^2=1-x^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2-4x^2=0\\ y^2=1-x^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-3x^2=0\\ y^2=1-x^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2=0\\ y^2=1-x^2\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y^2=1 \end{cases} \wedge \begin{cases} x=0 \\ y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \wedge \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \wedge \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \wedge \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$, ha due soluzioni doppie.

- Il sistema $\begin{cases} x^2+xy-x=0 \\ y=x^2-x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+x\cdot\left(x^2-x+1\right)-x=0 \\ y=x^2=x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+x^3-x^2+x-x=0 \\ y=x^2-x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3=0 \\ y=x^2-x+1 \end{cases} \Rightarrow$, $\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \wedge \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \wedge \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$, in questo caso è formato da una conica spezzata (la prima) e da una irriducibile, ed ha una soluzione tripla.

Adeguandoci allora alla risoluzione algebrica, noi distinguiamo le varie possibilità di *contatto* fra le coniche, associando loro dei nomi particolari.

Definizione 15

A seconda del numero di soluzioni reali che il sistema formato dalle equazioni di due coniche, una almeno delle quali non degenere, hanno in comune, le coniche si dicono

- **esterne** se non hanno soluzioni reali
- **iperosculanti** se hanno 1 soluzione reale quadrupla
- **osculanti** se hanno 2 soluzioni reali, una tripla e una singola
- **bitangenti** se hanno 2 soluzioni reali e distinte entrambe doppie
- **tangenti** se hanno 3 soluzioni reali, una doppia e due singole
- **secanti** se hanno 4 soluzioni reali singole

Nelle verifiche considereremo altri esempi.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Determinare la reciproca posizione della parabola di equazione $y = 3x^2 - x + 1$ *e della retta* $2x - y + 1 = 0$.

Risolviamo il sistema: $\begin{cases} y = 3x^2 - x + 1 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x^2 - x + 1 \\ 2x - 3x^2 + x - 1 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x^2 - x + 1 \\ 3x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x^2 - x + 1 \\ 3x \cdot (x-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} y = 3x^2 - x + 1 \\ x = 0 \vee x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 3 \\ x = 1 \end{cases}$. Quindi le due curve sono secanti nei punti $A \equiv (0; 1)$ e $B \equiv (1; 3)$.

Determinare le reciproche posizioni fra retta e conica.

Livello **1**

1. $y = x^2 - 2x + 1;\ x - y + 1 = 0$ [Secanti in $A \equiv (0; 1)$; $B \equiv (3; 4)$]
2. $x = -y^2 + 3y;\ 3x - 2y + 4 = 0$ $\left[\text{Secanti in } A \equiv (2;1), B \equiv \left(\frac{20}{9}; \frac{4}{3}\right)\right]$
3. $x^2 + y^2 - x - 2y - 3 = 0;\ x + 5y - 1 = 0$ $\left[\text{Secanti in } A \equiv \left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right), B \equiv \left(\frac{28}{13}; -\frac{3}{13}\right)\right]$
4. $3x^2 + 3y^2 - y - 1 = 0;\ 3x + 2y = 0$ $\left[\text{Secanti in } A \equiv \left(\frac{\sqrt{165}-3}{39}; \frac{3-\sqrt{165}}{26}\right) \text{ e } B \equiv \left(\frac{\sqrt{165}-3}{39}; \frac{3+\sqrt{165}}{26}\right)\right]$
5. $3x^2 + 2y^2 - 1 = 0;\ x + y - 3 = 0;\quad y^2 - 2x^2 - 4 = 0;\ 4x - 3y + 2 = 0$ [Esterne ; Tangenti in $A \equiv (4; 6)$]
6. $x^2 + 4y^2 - 2 = 0;\ 3x + 5y + 4 = 0$ $\left[\text{secanti in } A \equiv \left(\frac{5\cdot\sqrt{58}-48}{61}; -\frac{20+3\cdot\sqrt{58}}{61}\right) \text{ e } B \equiv \left(-\frac{5\cdot\sqrt{58}+48}{61}; \frac{3\cdot\sqrt{58}-20}{61}\right)\right]$
7. $x^2 - y^2 - 5 = 0; 2x - y + 7 = 0$ $\left[\text{secanti in } A \equiv \left(\frac{\sqrt{34}-14}{3}; \frac{2\cdot\sqrt{34}-7}{3}\right) \text{ e } B \equiv \left(-\frac{\sqrt{34}+14}{3}; -\frac{2\cdot\sqrt{34}+7}{3}\right)\right]$
8. $xy = 1;\ x - 3y + 2 = 0;\ 3xy = -4;\ x - 7y + 2 = 0$ $\left[\text{Secanti in } A \equiv (-1;1), B \equiv \left(-3; -\frac{1}{3}\right); \text{Esterne}\right]$

Lavoriamo insieme

Determinare l'equazione della tangente all'ellisse $2x^2 + 2y^2 + 2x + 7y - 4 = 0$, *nel suo punto di ascissa positiva in cui essa interseca l'asse delle ascisse.*

Cominciamo a determinare le coordinate dei punti di tangenza: $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 2x + 7y - 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2x - 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 \pm 3}{2} \\ y = 0 \end{cases}$. Le intersezioni sono i punti: $P \equiv (1; 0)$ e $Q \equiv (-2; 0)$, quello da noi cercato è P. Scriviamo le equazioni del fascio di rette di centro P: $y = m \cdot (x - 1)$. Intersechiamo il fascio con l'ellisse: $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 2x + 7y - 4 = 0 \\ y = m \cdot (x-1) \end{cases}$, risolviamo:

$\begin{cases} 2x^2 + 2 \cdot m^2 \cdot (x-1)^2 + 2x + 7m \cdot (x-1) - 4 = 0 \\ y = m \cdot (x-1) \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2 \cdot m^2 x^2 - 4m^2 x + 2m^2 + 2x + 7mx - 7m - 4 = 0 \\ y = m \cdot (x-1) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot (1+m^2) \cdot x^2 - (4m^2 - 7m - 2) \cdot x + 2m^2 - 7m - 4 = 0 \\ y = m \cdot (x-1) \end{cases}$. Abbiamo ottenuto un'equazione parametrica di secondo grado. Dato che stiamo cercando la retta tangente imponiamo che tale equazione abbia una sola soluzione, ossia che il suo discriminante sia zero: $\Delta = (4m^2 - 7m - 2)^2 - 8 \cdot (1 + m)^2 \cdot (2m^2 - 7m - 4) = 0 \Rightarrow 49m^2 + 84m + 36 = (6 + 7m)^2 = 0 \Rightarrow m = -6/7$. Possiamo perciò dire che la tangente cercata ha equazione: $y = -6/7 \cdot (x - 1) \Rightarrow 6x + 7y - 6 = 0$. Un procedimento meno laborioso consiste nell'utilizzare la formula stabilita dal Teorema 10: $(2\cdot 2\cdot 1 + 0\cdot 0 + 2) \cdot x + (0\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 0 + 7) \cdot y + 2\cdot 1 + 7\cdot 0 + 2\cdot(-4) = 0 \Rightarrow 6x + 7y - 6 = 0$.

Determinare le equazioni delle tangenti alle date coniche nei punti di seguito indicati

Livello 2

9. $2x^2 + 2y^2 - 3x - 14y + 15 = 0$, nei suoi punti di ascissa -1 $[7x + 6y - 5 = 0,\ 7x - 6y + 37 = 0]$
10. $2x^2 + 2y^2 - 9x - 55y + 57 = 0$, nei suoi punti di ordinata 1 $[7x - 51y + 23 = 0,\ 14x + 102y - 109 = 0]$
11. $y = -15x^2 - 17x + 4$, nei suoi punti di ordinata 0 $[115x + 5y - 23 = 0,\ 69x - 3y + 92 = 0]$
12. $x = 28y^2 + y$, nei suoi punti di ascissa 2 $[7x + 105y + 16 = 0,\ 4x - 60y + 7 = 0]$
13. $2x^2 + 5y^2 - 7 = 0$, nei suoi punti di ordinata 1 $[2x + 5y - 7 = 0,\ 2x - 5y + 7 = 0]$
14. $x^2 + 5y^2 - 24 = 0$, nei suoi punti di ascissa -2 $[x + 5y + 12 = 0,\ x - 5y + 12 = 0]$
15. $x^2 - 2y^2 + 2 = 0$, nei suoi punti di ordinata -3 $[2x + 3y + 1 = 0,\ 2x - 3y - 1 = 0]$
16. $-2x^2 + 3y^2 - 10 = 0$, nei suoi punti di ascissa -1 $[x - 3y - 5 = 0,\ x + 3y - 5 = 0]$
17. $xy = 2$, nel suo punto di ascissa $\sqrt{2}$ $\left[x + y - 2\cdot\sqrt{2} = 0\right]$
18. $2xy = -1$, nel suo punto di ordinata $1-\sqrt{3}$ $\left[\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot x - 4\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)\cdot y + 4 = 0\right]$

Lavoriamo insieme

Determinare l'equazione delle tangenti all'ellisse di equazione $3x^2 + y^2 - 4 = 0$, *che risultano parallele alla retta di equazione* $3x - 2y + 1 = 0$.

Dobbiamo considerare il fascio di rette parallele alla data retta, cioè $3x - 2y + h = 0$, dopodiché imponiamo la condizione di tangenza. Cominciamo a intersecare le due curve: $\begin{cases} 3x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ 3x - 2y + h = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ x = \dfrac{2y-h}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\cdot\left(\dfrac{2y-h}{3}\right)^2 + y^2 - 4 = 0 \\ x = \dfrac{2y-h}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{3}^1\cdot\dfrac{4y^2-4hy+h^2}{\cancel{9}^3} + y^2 - 4 = 0 \\ x = \dfrac{2y-h}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y^2 - 4hy + h^2 + 3y^2 - 12 = 0 \\ x = \dfrac{2y-h}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} 7y^2 - 4hy + h^2 - 12 = 0 \\ x = \dfrac{2y-h}{3} \end{cases}$. Imponiamo la condizione di tangenza: $\Delta/4 = 4h^2 - 7h^2 + 84 = 0 \Rightarrow -3h^2 = -84 \Rightarrow h^2 = 28 \Rightarrow h = \pm\sqrt{28}$. Infine le rette cercate hanno equazioni: $3x - 2y + \sqrt{28} = 0,\ 3x - 2y - \sqrt{28} = 0$.

Livello 2

Determinare le equazioni delle tangenti alle coniche indicate che risultano parallele o perpendicolari alle rette indicate

19. $y = x^2 + x - 2$, parallele a $2x - y + 1 = 0$ $[8x - 4y - 9 = 0]$
20. $x = y^2 - 2y + 4$, perpendicolari a $x + 3y = 0$ $[36x - 12y - 95 = 0]$
21. $4x^2 + 4y^2 + y - 2 = 0$, parallele a $2x - 5y = 0$ $\left[16x - 40y + \sqrt{957} - 5 = 0,\ 16x - 40y - \sqrt{957} - 5 = 0\right]$
22. $x^2 + y^2 + 3x - 5 = 0$, perpendicolari a $x + 3y = 0$ $\left[6x - 2y + 9 + \sqrt{290} = 0,\ 6x - 2y + 9 - \sqrt{290} = 0\right]$
23. $3x^2 + 2y^2 - 1 = 0$, parallele a $3x + y = 0$ $\left[6x + 2y - \sqrt{14} = 0,\ 6x + 2y + \sqrt{14} = 0\right]$
24. $5x^2 + y^2 - 2 = 0$, perpendicolari a $x + 4y = 0$ $\left[20x - 5y + \sqrt{210} = 0,\ 20x - 5y - \sqrt{210} = 0\right]$
25. $x^2 - y^2 - 3 = 0$, parallele a $x + 7y = 0$ [Non ne esistono]
26. $-7x^2 + y^2 - 3 = 0$, perpendicolari a $x - 2y = 0$ $\left[14x + 7y + 3\cdot\sqrt{7} = 0,\ 14x + 7y - 3\cdot\sqrt{7} = 0\right]$

27. $xy - 3 = 0$, parallele a $2x + 7y = 0$ $\left[2x+7y+2\cdot\sqrt{42}=0,\ 2x+7y-2\cdot\sqrt{42}=0\right]$

28. $5xy + 4 = 0$, perpendicolari a $7x - y = 0$ [Non ne esistono]

Livello 3

Determinare le equazioni della tangente alle coniche seguenti in un loro punto $P \equiv (x_P; y_P)$. Applicare poi le formule trovate per verificare i risultati degli esercizi dal n. 11 al n. 18

29. $y = ax^2 + bx + c$ $[y - (2ax_P + b)x + bx_P + 2c - y_P = 0]$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $[b^2x_Px + a^2y_Py - a^2b^2 = 0]$

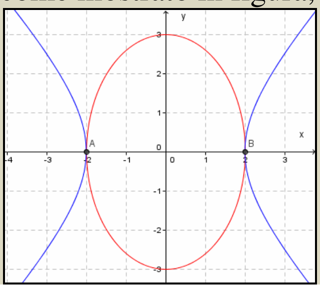
30. $x = ay^2 + by + c$ $[x - (2ay_P + b)x + by_P - 2c + x_P = 0]$ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $[b^2x_Px - a^2y_Py - a^2b^2 = 0]$

31. $x^2 - y^2 = a^2$ $[x_Px + y_Py - a^2 = 0]$ $xy = k$ $[y_Px + x_Px - 2k = 0]$ $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ $[b^2x_Px + a^2y_Py + a^2b^2 = 0]$

Lavoriamo insieme

Determinare le eventuali intersezioni fra l'ellisse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ *e l'iperbole* $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.

Dobbiamo risolvere il sistema $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\\ \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}9x^2+4y^2=36\\ 5x^2-4y^2=20\end{cases}$. Adesso si faccia particolare attenzione al fatto che il nostro sistema, anche se di secondo grado può essere risolto come uno di primo grado nelle incognite x e y, infatti in esso le incognite appaiono come potenze di esponente 2, pertanto avrà soluzioni che differiranno fra loro solo per il segno. Abbiamo così: $\begin{cases}9x^2+4y^2=36\\ 5x^2-4y^2=20\end{cases} \Rightarrow x^2 = \frac{\begin{vmatrix}36 & 4\\ 20 & -4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}9 & 4\\ 5 & -4\end{vmatrix}} =$ $= \frac{-144-80}{-36-20} = \frac{-224}{-56} = 4,\ y^2 = \frac{\begin{vmatrix}9 & 36\\ 5 & 20\end{vmatrix}}{-56} = \frac{180-180}{-56} = \frac{0}{-56} = 0$. Quindi, per quanto detto le due curve si incontrano in due punti: $A \equiv (-2; 0)$, $B \equiv (2; 0)$, come mostrato in figura, cioè le curve sono tangenti esternamente.



Determinare le eventuali intersezioni fra le seguenti coniche

Livello 2

32. $(x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0,\ x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0)$; $(x^2 - y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 5)$ $[(-1; 2) ; \varnothing]$

33. $(xy = -3,\ x^2 - y^2 = 4)$; $\left(x^2+y^2=7, \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\right)$ $\left[A\equiv\left(\sqrt{2+\sqrt{13}};-\sqrt{\sqrt{13}-2}\right), B\equiv\left(-\sqrt{2+\sqrt{13}};\sqrt{\sqrt{13}-2}\right);\varnothing\right]$

34. $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{5}=1, \frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$ $\left[A\equiv\left(\frac{\sqrt{105}}{5};\sqrt{2}\right), B\equiv\left(\frac{\sqrt{105}}{5};-\sqrt{2}\right), C\equiv\left(-\frac{\sqrt{105}}{5};\sqrt{2}\right), D\equiv\left(-\frac{\sqrt{105}}{5};-\sqrt{2}\right)\right]$

35. $\left(\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{11}=1, \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{10}=1\right)$; $(xy = k,\ xy = h,\ h > 0\ k > 0)$ $\left[A\equiv\left(\sqrt{3};0\right),\ B\equiv\left(-\sqrt{3};0\right);\varnothing\right]$

36. $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{5}=1, \frac{y^2}{5}-\frac{x^2}{12}=1; \frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{4}=1, \frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{3}=1$ $\left[A_{1,2,3,4}\equiv\left(\pm 4\cdot\sqrt{3};\pm 5\right); B_{1,2}\equiv\left(\pm\sqrt{7};0\right)\right]$

37. $x^2-\frac{y^2}{4}=1, \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{11}=1$ $\left[\begin{array}{l} A\equiv\left(-\frac{2\sqrt{1290}}{43};-\frac{2\sqrt{3311}}{43}\right), B\equiv\left(-\frac{2\sqrt{1290}}{43};\frac{2\sqrt{3311}}{43}\right), \\ C\equiv\left(\frac{2\sqrt{1290}}{43};-\frac{2\sqrt{3311}}{43}\right), D\equiv\left(\frac{2\sqrt{1290}}{43};\frac{2\sqrt{3311}}{43}\right)\end{array}\right]$

38. $xy=\frac{1}{2}, x^2+y^2=2$ $\left[A\equiv\left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2};\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right), B\equiv\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right), C\equiv\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2};\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right), D\equiv\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\right]$

Dopo avere individuato il tipo di poligono intersezione fra le seguenti coniche, determinarne il perimetro
Livello 3

39. $(xy = 12,\ x^2 + y^2 = 25)$; $\left(\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1, x^2+y^2=5\right)$ $\left[\text{Rettangolo}, 16\sqrt{2}; \text{Rettangolo}, \frac{4\cdot\sqrt{105}+5\cdot\sqrt{5}}{5}\right]$

40. $\left(xy=5, \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1\right); \left(xy=-4; \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1\right)$ [Nessun poligono; Parallelogramma, $\frac{10}{3}\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{15}\right)$]

41. $(xy = 1,\ y = -2x^2 + x + 2)$; $\left(\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{3}=1; x^2+y^2=4\right)$ $\left[\text{Triangolo}, \frac{4\cdot\sqrt{2}+3\cdot\sqrt{5}}{2}; \text{Rettangolo}, \frac{8\cdot\sqrt{15}+8\cdot\sqrt{10}}{5}\right]$

42. $\left(\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{7}=1, y=3x^2\right); \left(\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{5}=1, \frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{8}=1\right)$ $\left[\text{Nessun poligono; Rettangolo}, \frac{8\cdot\sqrt{1443}+8\cdot\sqrt{1110}}{37}\right]$

43. Rappresentiamo i grafici $y = ax^2 + bx + c$ e $y = a\cdot(-x)^2 + b\cdot(-x) + c$, in uno stesso riferimento cartesiano ortogonale. Se tutti i coefficienti sono non nulli, in quanti e quali punti si incontrano i due grafici? [1 punto di coordinate $(0; c)$]

Lavoriamo insieme

Date la conica di equazione $x^2 + y^2 = 1$ e le coniche di equazione $x^2 - y^2 = a$, con a parametro reale, studiare le reciproche posizioni delle due curve al variare del parametro.

Risolviamo il sistema parametrico formato dalle due equazioni: $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2-y^2=a \end{cases} \Rightarrow 2x^2=1+a \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1+a}{2}} \Rightarrow$.

$\Rightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{\frac{1+a}{2}} \\ y=\pm\sqrt{\frac{1-a}{2}} \end{cases}$. Il primo passaggio si ottiene sommando membro a membro le due equazioni del sistema.

Il sistema non ha soluzioni se $\begin{cases} 1+a<0 \\ 1-a<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a<-1 \\ a>1 \end{cases} \Rightarrow a<-1 \vee a>1$, quindi le coniche sono esterne; ha due soluzioni se $a = \pm 1$, $\begin{cases} x=0 \\ y=\pm 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=0 \end{cases}$, perciò le coniche sono tangenti; ha quattro soluzioni se $-1 < a < 1$; perciò le coniche sono secanti.

Studiare, al variare del parametro reale non nullo h, le reciproche posizioni delle coniche di equazioni seguenti
Livello 3

44. $x^2+y^2=h,\ \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=1,\ h>0$ $\left[\begin{cases} h>\sqrt{2} & \text{esterne} \\ h=\sqrt{2} & \text{tangenti in 2 punti} \\ 0<h<\sqrt{2} & \text{secanti in 4 punti} \end{cases}\right]$

45. $x^2+y^2=2,\ y^2-\dfrac{x^2}{h}=1,\ h>0$ $\left[\begin{cases} -2<h<0 & \text{esterne} \\ h=-2 & \text{tangenti in 2 punti} \\ h<-2 \vee h>0 & \text{secanti in 4 punti} \end{cases}\right]$

46. $(xy=h,\ x^2+y^2=1)$; $(xy=-1,\ x^2+y^2=h,\ h>0)$ $\left[\begin{cases} h<-\dfrac{1}{2} \vee h>\dfrac{1}{2} & \text{esterne} \\ h=\pm\dfrac{1}{2} & \text{tang. in 2 punti ; sec. in 2 punti} \\ -\dfrac{1}{2}<h<\dfrac{1}{2} & \text{sec.in 4 punti} \end{cases}\right]$

47. $\left(xy=h, \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1\right)$; $(xy=1,\ x^2+y^2=h,\ h>0)$ $\left[\text{secanti in 2 punti;}\begin{cases} 0<h<\sqrt{2} & \text{esterne} \\ h=\sqrt{2} & \text{tangenti in 2 punti} \\ h>\sqrt{2} & \text{secanti in 4 punti} \end{cases}\right]$

48. $\left(xy=h, \dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{6}=1\right)$;$\left(xy=h, \dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x^2}{9}=1\right)$ $\left[\begin{cases} h<-\dfrac{\sqrt{30}}{2} \vee h>\dfrac{\sqrt{30}}{2} & \text{esterne} \\ h=\pm\dfrac{\sqrt{30}}{2} & \text{tang. in 2 punti ; Secanti in 2 punti} \\ -\dfrac{\sqrt{30}}{2}<h<\dfrac{\sqrt{30}}{2} & \text{sec. in 4 punti} \end{cases}\right]$

49. $\left(xy=2, \dfrac{y^2}{5}-\dfrac{x^2}{h}=1, h>0\right)$;$\left(xy=-3; \dfrac{x^2}{h}+y^2=1, h>0\right)$ $\left[\text{Secanti in 2 punti;}\begin{cases} 0<h<36 & \text{esterne} \\ h=36 & \text{tangenti} \\ h>36 & \text{sec.in 4 punti} \end{cases}\right]$

50. $\left(xy=-2,\ x^2-\dfrac{y^2}{h}=1,\ h>0\right)$; $\left(xy=3, x^2+\dfrac{y^2}{h}=1, h>0\right)$ [Secanti in 2 punti; Secanti in un punto]

51. $(xy=h,\ y=x^2)$; $(x^2+y^2=h,\ x^2-y^2=1,\ h>0)$ $\left[\begin{cases} 0<h<1 & \text{esterne} \\ h=1 & \text{tang. in 2 punti} \\ h>1 & \text{sec. in 4 punti} \end{cases};\begin{cases} 0<h<4 & \text{esterne} \\ h=1 & \text{tang. in 2 punti} \\ h>1 & \text{sec. in 4 punti} \end{cases}\right]$

52. $\left(x^2+y^2=h, \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1, h>0\right)$;$\left(y=hx^2, \dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x^2}{3}=1\right)$ $\left[\begin{cases} 0<h<2 & \text{esterne} \\ h=2 & \text{tang. in 2 punti ; Secanti in 2 punti} \\ h>2 & \text{sec. in 4 punti} \end{cases}\right]$

53. $x^2+y^2=h,\ \dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x^2}{9}=1,\ h>0$ $\left[\begin{cases} h<\sqrt{2} \vee h>\sqrt{3} & \text{esterne} \\ h=\sqrt{2} \vee h=\sqrt{3} & \text{tangenti in 2 punti} \\ \sqrt{2}<h<\sqrt{3} & \text{secanti in 4 punti} \end{cases}\right]$

54. $x^2+y^2=3,\ x^2-\dfrac{y^2}{h}=1,\ h>0$ $\left[\begin{cases} 0<h<2 & \text{circonferenza interna} \\ h=2 & \text{tangenti in 2 punti} \\ h>2 & \text{secanti in 4 punti} \end{cases}\right]$

55. $\left(x^2+y^2=4, x^2+\frac{y^2}{h}=1, h>0\right)$; $\left(y=hx^2, \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1\right)$ $\left[\begin{cases} 0<h<\sqrt{5} & \text{ellisse interna} \\ h=\sqrt{5} & \text{tang. in 2 punti; Sec. in 2 punti} \\ h>\sqrt{5} & \text{sec. in 4 punti} \end{cases}\right]$

56. $x^2+y^2=5, \frac{x^2}{h}+y^2=1, h>0$ [Secanti in 2 punti] $x^2+y^2=h, y-x^2=0, h>0$ [Secanti in 2 punti]

57. $(y=hx^2, x^2+y^2=1)$; $\left(y=hx^2, \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1\right)$ $\left[\begin{cases} h<-\frac{1}{4} \vee h>\frac{1}{4} & \text{esterne} \\ h=\pm\frac{1}{4} & \text{tangenti in 2 punti; Secanti in 2 punti} \\ -\frac{1}{4}<h<\frac{1}{4} & \text{secanti in 4 punti} \end{cases}\right]$

58. $\left(y=hx^2, y^2-\frac{x^2}{h}=1\right)$; $\left(y=hx^2, x^2+\frac{y^2}{h}=1, h>0\right)$ [Secanti in 2 punti; Secanti in 2 punti]

L'angolo di Geogebra

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%204/4-1/4-1-3.exe si avvia un'applicazione che mostra come trattare le coniche in Geogebra.
Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%204/4-1/4-1-3.zip si scarica il relativo file Geogebra.

Fasci di coniche

Le *ordinarie operazioni dell'algebra sono sufficienti a risolvere tutti i problemi nella teoria delle curve.*

Joseph Louis Lagrange, Théorie des fonctions analytiques (1797)

Il problema

Consideriamo un'equazione parametrica di secondo grado in due incognite, essa rappresenta infinite coniche, al variare del parametro. Vogliamo studiare le eventuali proprietà comuni a tutte le coniche.

Naturalmente ci rendiamo conto che stiamo ripetendo quanto già visto per le rette, stiamo cioè considerando i cosiddetti **fasci di coniche**. Cominciamo con qualche esempio.

Esempio 22

Sia il fascio di coniche $2 \cdot (k + 1) \cdot x^2 + (5 - 7k) \cdot xy + (5k + 3) \cdot y^2 + (k - 1) \cdot x - k \cdot y - 3 = 0$, cominciamo con l'indagare sul tipo di coniche che si possono ottenere al variare del parametro k nell'insieme dei numeri reali. Calcoliamo quindi il discriminante: $\Delta = (5 - 7k)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (k + 1) \cdot (5k + 3) = 9k^2 - 134k + 1$, che si annulla per $k = \frac{67 \pm 8 \cdot \sqrt{70}}{9}$ e quindi si hanno parabole, si hanno ellissi per $\frac{67 - 8 \cdot \sqrt{70}}{9} < k < \frac{67 + 8 \cdot \sqrt{70}}{9}$, ed iperboli per $k < \frac{67 - 8 \cdot \sqrt{70}}{9} \vee k > \frac{67 + 8 \cdot \sqrt{70}}{9}$. Adesso possiamo stabilire se nel fascio vi sono coniche degeneri, calcoliamo quindi il determinante: $\begin{vmatrix} 2 \cdot (k+1) & \frac{5-7k}{2} & \frac{k-1}{2} \\ \frac{5-7k}{2} & 5k+3 & -\frac{k}{2} \\ \frac{k-1}{2} & -\frac{k}{2} & -3 \end{vmatrix} = 5k^2 - 99k$. Annulliamo il determinante ottenendo le due soluzioni reali $k = 0$, $k = \frac{99}{5}$. Quindi nel fascio ci sono solo due coniche degeneri reali, quelle di equazioni che si ottengono per:

$k = 0 \Rightarrow 2x^2 + 5xy + 3y^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow (2x + 3y - 3) \cdot (x + y + 1) = 0$; $k = \frac{99}{5} \Rightarrow 208x^2 - 668xy + 510y^2 + 94x - 99y - 15 = 0 \Rightarrow (8x - 10y - 1) \cdot (26x - 51y + 15) = 0$. Naturalmente sono entrambe iperboli, come si nota facilmente calcolando i discriminanti, che risultano essere positivi. Come nel caso dei fasci di rette anche in quelli di coniche può esservi una conica che non si ottiene per alcun valore del parametro. Per determinarla scriviamo il fascio nel modo seguente: $2x^2 + 5xy + 3y^2 - x - 3 + k \cdot (2x^2 - 7xy + 5y^2 + x - y) = 0$, la conica "mancante" è il fattore di k, cioè $2x^2 - 7xy + 5y^2 + x - y = 0$, dobbiamo controllare se è degenere. Invece di usare il determinante possiamo calcolare il suo discriminante, considerata come equazione in una sola incognita, per esempio la x: $2x^2 - (7y - 1) \cdot x + 5y^2 - y = 0$. Che è fattorizzabile se il suo discriminante è un quadrato di monomio o di binomio. Si ha: $(7y - 1)^2 - 8 \cdot (5y^2 - y) = 9y^2 - 6y + 1 = (3y - 1)^2$. La conica è spezzata in: $x = \frac{(7y-1) \pm \sqrt{(3y-1)^2}}{4} = \begin{cases} y \\ \frac{5y-1}{2} \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot (x - y) \cdot \left(x - \frac{5y-1}{2} \right) = 0 \Rightarrow (x - y) \cdot (2x - 5y + 1) = 0$.

Quindi vi è una terza conica degenere nel fascio.

In vista del precedente esempio poniamo una definizione ed enunciamo un risultato.

Definizione 16

Nel fascio di coniche $(ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f) + h \cdot (a'x^2 + b'xy + c'y^2 + d'x + e'y + f') = 0$, le coniche $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ e $a'x^2 + b'xy + c'y^2 + d'x + e'y + f' = 0$ si chiamano **generatrici del fascio**.

Teorema 11

In un fascio di coniche vi sono al massimo 3 coniche spezzate o tutte le coniche del fascio sono spezzate.

Vediamo un'altra questione

Esempio 23

- Consideriamo ancora il fascio precedente, vogliamo vedere se vi sono coniche passanti per un certo punto, per esempio per $P \equiv (2; -3)$. Come visto più volte dobbiamo imporre la condizione di appartenenza: $2 \cdot (k + 1) \cdot 2^2 + (5 - 7k) \cdot 2 \cdot (-3) + (5k + 3) \cdot (-3)^2 + (k - 1) \cdot 2 - k \cdot (-3) - 3 = 0 \Rightarrow 100k = 0 \Rightarrow k = 0$. Vi è perciò una conica passante per P, che si ottiene per $k = 0$, quindi è la conica degenere che avevamo già trovato.
- Se il punto è $R \equiv \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. $2 \cdot (k+1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (5k-7) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + (5k+3) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - k \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 3 = 0$ $\Rightarrow 0 = 0$. Stavolta R appartiene a tutte le coniche del fascio, dato che abbiamo ottenuto un'identità.

In vista dell'ultimo risultato dell'esempio precedente poniamo la seguente definizione

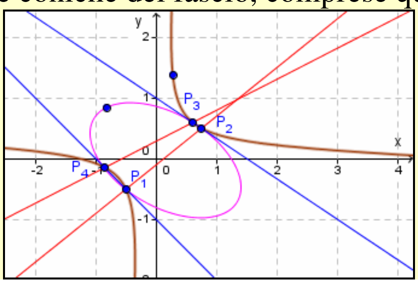
Definizione 17

Un punto appartenente a tutte le coniche di un fascio si chiama **punto base del fascio**.

Come possiamo determinare i punti base di un fascio?

Esempio 24

Sempre nel fascio di equazione $2 \cdot (k + 1) \cdot x^2 + (5 - 7k) \cdot xy + (5k + 3) \cdot y^2 + (k - 1) \cdot x - k \cdot y - 3 = 0$, vogliamo trovare tutti i punti base, come possiamo fare? Chiediamoci quale proprietà verifica un punto base. Abbiamo detto che appartiene a tutte le coniche del fascio, quindi deve essere un punto che con le sue coordinate annulla l'equazione del fascio, *indipendentemente* dal parametro k. Scriviamo allora l'equazione del fascio in modo da mettere in evidenza il parametro: $2x^2 + 5xy + 3y^2 - x - 3 + k \cdot (2x^2 - 7xy + 5y^2 + x - y) = 0$
I punti base annullano sia il coefficiente del parametro sia il termine senza parametro, sono quindi le soluzioni del sistema: $\begin{cases} 2x^2 - 7xy + 5y^2 + x - y = 0 \\ 2x^2 + 5xy + 3y^2 - x - 3 = 0 \end{cases}$, cioè $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}; \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{cases}; \begin{cases} x = -\frac{6}{7} \\ y = -\frac{1}{7} \end{cases}$ (lasciamo i calcoli per esercizio). Quindi $P_1 \equiv \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), P_2 \equiv \left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right), P_3 \equiv \left(\frac{3}{5}; \frac{3}{5}\right)$, $P_4 \equiv \left(-\frac{6}{7}; -\frac{1}{7}\right)$ sono i punti base del fascio.
Nella figura seguente tracciamo alcune coniche del fascio, comprese quelle spezzate e i quattro punti base.



In vista del precedente esempio non è difficile accettare la verità del seguente teorema che non dimostriamo.

Teorema 12

Ogni fascio di coniche ha al massimo 4 punti base reali.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Studiare il fascio di equazione $(1 + h) \cdot x^2 - 3xy + 2x - 5y + h = 0$.
Cominciamo a vedere il tipo di coniche reali. Calcoliamo il discriminante: $b^2 - 4ac = 9$, quindi abbiamo solo iperboli, dato che il valore ottenuto non dipende dal parametro. Vediamo se vi sono coniche spezzate, calcoliamo perciò il determinante: $\left|\begin{matrix} 1+h & -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \\ 1 & -\frac{5}{2} & h \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1+h & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{5}{2} \end{matrix} = 0 \Rightarrow 15/4 + 15/4 - 25/4 \cdot (1 + h) - 9/4h = 0 \Rightarrow$ $-17/2h = -5/4 \Rightarrow h = 5/34$. Quindi vi è una sola conica spezzata: $(1 + 5/34)\, x^2 - 3xy + 2x - 5y + 5/34 = 0 \Rightarrow$ $39x^2 - 102xy + 68x - 170y + 5 = 0 \Rightarrow \quad (3x + 5) \cdot (13x - 34y + 1) = 0$. Come nel caso dei fasci di rette anche in quelli di coniche può esservi una conica che non si ottiene per alcun valore del parametro. Per determinarla scriviamo il fascio nel modo seguente $x^2 - 3xy + 2x - 5y + h \cdot (x^2 + 1) = 0$. La conica "mancante" è la parabola immaginaria $x^2 + 1 = 0$, che non è spezzata nei reali. Vi sono punti base reali nel fascio? Dato che il fascio ha una conica immaginaria, ovviamente non può avere punti base reali.

Studiare i seguenti fasci di coniche. Nelle risposte: [Iperboli; Coniche spezzate; Punti base]

Livello 2

1. $hx^2 - xy + y^2 + x - y = 0$ $\quad [h < 1/4;\ x^2 = 0,\ (x - y) \cdot (1 - y) = 0;\ (0; 0), (0; 1)]$
2. $4x^2 + (3h + 4) \cdot xy + y^2 + (6h - 4) \cdot x - (2 + h) \cdot y - 2h + 1 = 0$
$\left[h < -\frac{8}{3} \vee h > 0;\ (2x + y - 1)^2 = 0,\ (3x - 1) \cdot (y + 2) = 0;\ \left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right),\left(\frac{3}{2};-2\right)\right]$
3. $(1 - h) \cdot x^2 - (1 + h) \cdot y^2 + x - y + 1 = 0$ $\quad \left[-1<h<1; h=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4};(x+iy)\cdot(x-iy)=0;\varnothing\right]$
4. $x^2 - (1 + h) \cdot xy + y^2 + (1 - 2h) \cdot x - 2 = 0$
$\left[h<-3\vee h>1; h=\frac{4\pm\sqrt{2}}{2}, x\cdot(y+2)=0;(-2;2),(-1;2),\left(0;\pm\sqrt{2}\right)\right]$
5. $hx^2 + xy - (2 + h) \cdot y^2 + 2x - 1 = 0$ $\quad \left[h<\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\vee h>\frac{-1+\sqrt{3}}{2}; x^2-y^2=0;(1;1)\right]$
6. $x^2 - 2hxy + 2y^2 + (1 + 3h) \cdot x - 2y + 1 = 0$ $\quad \left[h<-\sqrt{2}\vee h>\sqrt{2}; 5x-y+4\pm i\cdot(7y-3)=0;\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right),(0;1)\right]$
7. $(1 - 2h) \cdot x^2 - (3 + h) \cdot y^2 + h = 0$
$\left[-3<h<\frac{1}{2};1-7y^2=0, 7x^2-3=0, x^2-3y^2=0;\left(\frac{\pm\sqrt{21}}{7};\frac{\sqrt{7}}{7}\right),\left(\frac{\pm\sqrt{21}}{7};-\frac{\sqrt{7}}{7}\right)\right]$
8. $(1 + 2h) \cdot x^2 - hxy + (2 - h) \cdot y^2 + y = 0$
$\left[h<\frac{2-2\cdot\sqrt{3}}{3}\vee>\frac{2+2\cdot\sqrt{3}}{3}; y\cdot(x+5y+2)=0, 7(x-y)\cdot(2x+y)=0;\left(\frac{2}{9};-\frac{4}{9}\right),\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right),(0;0)\right]$
9. $(2h - 1) \cdot x^2 + (2h - 1) \cdot xy + hy^2 + 2x - 3y - 1 = 0$ $\quad \left[-\frac{1}{2}<h<\frac{1}{2}; h=\frac{-17\pm\sqrt{353}}{4};\varnothing\right]$
10. $x^2 - xy + y^2 + (h + 2) \cdot x - (1 - h) \cdot y + h = 0$ $\quad [\text{Tutte ellissi};\ x - y + 1 = 0;\ (-2; -1), (0; 1)]$

Lavoriamo insieme

Costruire un fascio di coniche a partire dalle sue coniche spezzate.
Per esempio quale fascio contiene la conica spezzata negli assi coordinati e quella spezzata nelle due bisettrici degli assi? La prima conica ha equazione $xy = 0$, la seconda ha equazione $(x + y) \cdot (x - y) = 0$, cioè $x^2 - y^2 = 0$. Facilmente il fascio ha equazione: $xy + h \cdot (x^2 - y^2) = 0$. E poiché si incontrano nell'origine questo è ovviamente un punto base del fascio, anzi è l'unico punto base del fascio. Inoltre poiché il discriminante è $1 + 4h^2$, che è positivo per ogni valore di h, il fascio è tutto formato da iperboli.

Scrivere l'equazione del fascio di coniche aventi come generatrici le coniche spezzate nelle rette date, quindi studiarlo al variare del parametro (Nelle risposte [Eq fascio; Eventuale altra conica spezzata, Iperbole; Punti base])

Livello 2

11. L'asse x contato due volte; l'asse y contato due volte. $[x^2 + h \cdot y^2 = 0;\ h < 0; (0; 0)]$
12. L'asse x contato due volte; la prima bisettrice contata due volte. $[x^2 - 2xy + (h + 1) \cdot y^2 = 0; h < 0; (0; 0)]$
13. La retta per $A \equiv (1; 2)$ e $B \equiv (-1; 2)$ contata due volte; La retta per $C \equiv (2; 1)$ e $D \equiv (-2; 1)$, contata due volte. $[(1 + h^2) \cdot y^2 - 2 \cdot (2 + h) \cdot y + 2 + h = 0;$ Tutte parabole; $\varnothing]$
14. La retta per $A \equiv (2; 3)$ e $B \equiv (-4; 1)$ contata due volte; Le rette per $C \equiv (1; -3)$ e $D \equiv (-2; 0)$ e per $E \equiv (0; 1)$ e $F \equiv (3; -1)$. $\left[(6h - 4) \cdot x^2 + (15h + 24) \cdot xy + (9h - 36) \cdot y^2 + (3h - 56) \cdot x + (9h + 198) \cdot y - 18h - 196 = 0; h < -192 \vee h > 0; \left(-\frac{13}{4}; \frac{5}{4}\right), \left(-\frac{4}{3}; \frac{17}{9}\right)\right]$
15. Le rette parallele all'asse x passanti per $A \equiv (2; 1)$ e per $B \equiv (-3; 2)$; Le rette parallele all'asse y passanti per $C \equiv (3; 2)$ e per $D \equiv (4; -1)$. $[hx^2 + y^2 - 7hx - 3y + 12h + 2 = 0; (x + y - 5) \cdot (x - y - 2) = 0; h < 0; (4; 2), (4; 1), (3; 2), (3; 1)]$
16. Le rette passanti per $A \equiv (2; 1)$ di coefficienti angolari $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$; Le rette per $B \equiv (0; 1)$ e coefficiente angolare $\frac{3}{5}$ e la sua perpendicolare in A. $[15 \cdot (3 - 8h) \cdot x^2 + 2 \cdot (64h - 75) \cdot xy + 120 \cdot (h + 1) \cdot y^2 + 2 \cdot (56h - 15) \cdot x + 20 \cdot (3 - 32h) \cdot y + 520h = 0; \forall h \in \mathbb{R}; (-10; -5), (10; 7), (2; 1)]$
17. Le rette passanti per $A \equiv (3; 0)$ di coefficiente angolare $-\frac{2}{3}$ contata due volte; Le rette per $B \equiv (-2; 4)$ e coefficiente angolare $-\frac{3}{4}$ contata due volte. $[(64 + 81h) \cdot x^2 + 24 \cdot (9h + 8) \cdot xy + 144 \cdot (h + 1) \cdot y^2 - 12 \cdot (45h + 32) \cdot x - 144 \cdot (5h + 4) \cdot y + 36 \cdot (25h + 16) = 0; h < 0; (6; -2)]$
18. Le rette del fascio di centro (0;1) che formano un triangolo di area 1 con gli assi coordinati; del fascio di centro $C \equiv (0; -2)$ che formano un triangolo di area 2 con gli assi coordinati. $\left[(4h + 1) \cdot x^2 - (4h + 1) \cdot y^2 + 2 \cdot (1 - 8h)y - 16h - 1 = 0;\ h \neq -\frac{1}{4}; \left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)\right]$

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia navale) Senza fare calcoli dire quanti sono i punti del piano cartesiano le cui coordinate verificano tutte e tre le seguenti condizioni: $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 2 = 0 \\ xy < 0 \end{cases}$.
2. (Ingegneria 1999) Fissato nel piano un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, il luogo dei punti le cui coordinate (x,y) soddisfano l'equazione $x \cdot (2x + y - 1) = 0$ è
A) una parabola B) una retta o un punto C) una retta
D) una coppia di rette E) una circonferenza
3. (Ingegneria 2000) Fissato nel piano un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, il luogo dei punti le cui coordinate $(x; y)$ soddisfano l'equazione $|x^2 - y^2| = 1$ è costituito da
A) una circonferenza B) un'iperbole C) una coppia di iperboli
D) una coppia di rette E) una coppia di circonferenze

Per svolgere un Test finale di* 14 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_3_4.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	2	3
Uno: $\left(\frac{\sqrt{\sqrt{17}-1}}{2};\frac{\sqrt{17}-1}{4}\right)$	D	C

4. Geometria delle coniche

4.2. Le circonferenze

Prerequisiti

- Il piano cartesiano
- Concetto di funzione
- Concetto di luogo geometrico
- Concetto di equazione e sua risoluzione
- Equazione della retta
- Fasci di rette
- Trasformazioni geometriche e loro leggi
- Matrici e determinanti
- Le coniche

Obiettivi

- Comprendere il concetto di luogo di punti del piano cartesiano
- Comprendere il concetto di appartenenza di un punto a una curva del piano cartesiano
- Riconoscere una circonferenza dall'equazione a essa associata
- Sapere risolvere problemi analitici sulla circonferenza

Contenuti

- Equazione della circonferenza
- Fasci di circonferenze

Parole Chiave

Corda – Diametro – Raggio

Equazione della circonferenza

Il problema

La circonferenza è o no una conica? Dato che non abbiamo usato il suo nome per *battezzare* le coniche sembrerebbe di no. Ma è proprio così?

Per cercare di risolvere il precedente problema determiniamo l'equazione di una circonferenza di dato centro e dato raggio.

Esempio 1

Vogliamo scrivere l'equazione della circonferenza che ha il centro nel punto $C \equiv (2; -5)$ e raggio che misura 4 unità. Un generico punto $P \equiv (x, y)$ appartiene alla detta circonferenza se verifica la seguente equazione $\overline{PC} = 4 \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y+5)^2} = 4$. Cerchiamo di scrivere la precedente equazione in modo più semplice, cominciando con l'eliminare la radice quadrata.

$$\left(\sqrt{(x-2)^2 + (y+5)^2}\right)^2 = 4^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 10y + 25 = 16 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$$

Effettivamente abbiamo ottenuto un'equazione di secondo grado in due variabili, cioè una conica. Prima di stabilire che tipo di conica è, determiniamo la generica equazione.

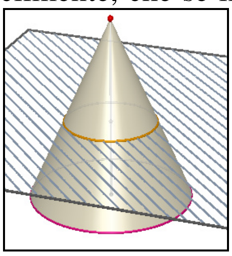
Teorema 1

L'equazione della circonferenza di centro $C \equiv (x_C; y_C)$ e raggio lungo R, è $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2$.
La precedente equazione può anche scriversi nella forma $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, in cui

$$a = -2x_C,\ b = -2y_C,\ c = x_C^2 + y_C^2 - R^2.$$

Dimostrazione. Per esercizio, basta sviluppare le espressioni.

Per stabilire che tipo di conica è una circonferenza, calcoliamone il discriminante, facendo attenzione a non fare confusione con i simboli, ricordiamo che $\Delta = b^2 - 4ac$, dove a, b e c sono i coefficienti dei termini di II grado, ossia in questo caso: $0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4 < 0$. Quindi una circonferenza altri non è che un'ellisse. Del resto pensando alla definizione dell'ellisse come sezione di un cono ci rendiamo conto facilmente, che se il piano sezione è perpendicolare all'asse del cono, otterremo proprio una circonferenza.



Il teorema precedente ci permette di stabilire delle condizioni affinché un'equazione di secondo grado in due variabili rappresenti una circonferenza.

Definizione 1

Diciamo **circonferenza** la totalità dei punti del piano cartesiano soluzioni dell'equazione di secondo grado in due variabili: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

Esempio 2

Quali fra le seguenti equazioni rappresentano circonferenze?

$$2x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0 \qquad (1)$$
$$x^2 - y^2 + x + 3y + 3 = 0 \qquad (2)$$
$$x^2 + y^2 + 3x + 5y = 0 \qquad (3)$$
$$x^2 + y^2 + xy + x - 2y - 3 = 0 \qquad (4)$$
$$5x^2 + 5y^2 + y = 0 \qquad (5)$$

Prima di rispondere alla domanda dobbiamo capire quali sono le condizioni che devono essere verificate da un'equazione affinché essa possa rappresentare una circonferenza. Considerando la Definizione 1, esse *sembrano* le seguenti:

a) *i coefficienti dei termini di secondo grado sono entrambi uguali a* 1;

b) *manca il termine* xy;

Non vi sono altre condizioni, dato che a, b e c rappresentano parametri reali, possono quindi essere anche tutti e tre nulli.

Sulla base della condizione a) possiamo dire che le equazioni segnate da (1), (2) e (5) non dovrebbero rappresentare circonferenze. Ma possiamo anche riscrivere l'equazione (5) come $x^2 + y^2 + \frac{y}{5} = 0$, pertanto essa rappresenta l'equazione di una circonferenza Sulla base della condizione b) non rappresenta una circonferenza l'equazione (4). Quindi rappresenta certamente una circonferenza l'equazione (3).

Alla luce del precedente esempio possiamo affermare che una circonferenza ha un'equazione senza il termine xy e con gli altri coefficienti di secondo grado fra loro uguali. Naturalmente anche le circonferenze possono essere spezzate o immaginarie.

Esempio 3

- L'equazione $x^2 + y^2 + 2 = 0$ rappresenta una circonferenza immaginaria, dato che non esistono numeri reali che verificano l'equazione, come facilmente si comprende. Essa non è degenere perché il determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$ è non nullo.
- L'equazione $x^2 + y^2 = 0$ rappresenta una circonferenza degenere, come si vede facilmente dato che può scriversi come il prodotto delle due rette immaginarie $x + iy = 0$ e $x - iy = 0$, che si incontrano nell'origine, che è il centro della circonferenza.

Vogliamo trovare un metodo più semplice per stabilire se una circonferenza è o no reale. Non è difficile capire che tutto sta nello stabilire se la circonferenza ha o no il raggio, o meglio se ha un raggio reale. Nell'esempio precedente abbiamo infatti visto che l'ultima circonferenza aveva il centro ma non era reale, quindi non aveva il raggio.

Esempio 4

Nell'Esempio 1 avevamo visto che l'equazione della circonferenza con centro in $C \equiv (2; -5)$ e raggio che misura 4 unità è $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$. Visto come abbiamo ottenuto questa equazione, possiamo rifare il percorso al contrario, arrivando così alle coordinate di C e alla misura di R. In effetti il Teorema 1 ci dice come fare, in tale teorema abbiamo infatti detto che si ha: $a = -2x_C$, $b = -2y_C$, $c = x_C^2 + y_C^2 - R^2$. Cioè nel nostro caso: $-4 = -2x_C$, $10 = -2y_C$, $13 = x_C^2 + y_C^2 - R^2$. Dalle prime due otteniamo facilmente le coordinate del centro: $x_C = 2$, $y_C = -5$. Sostituiamo questi valori nella terza equazione: $13 = 2^2 + (-5)^2 - R^2$, quindi risolviamo rispetto a R: $R^2 = 16 \Rightarrow R = 4$.

Possiamo ripetere quanto visto nell'esempio precedente, ottenendo il seguente risultato generale.

Teorema 2

Una circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, è reale solo se $a^2 + b^2 - 4c > 0$. In questo caso ha il centro nel punto $C \equiv \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$ e il raggio che misura $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$.

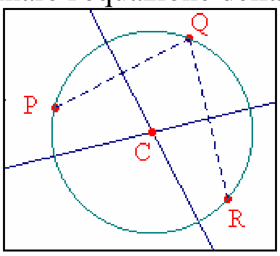
Dimostrazione Per esercizio

Facciamo attenzione nell'applicazione del precedente teorema.

Esempio 5

- Applichiamo le formule stabilite dal Teorema 2 alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 3x - 5y + 1 = 0$. Intanto vediamo se è o no una circonferenza reale. $a^2 + b^2 - 4c = 3^2 + (-5)^2 - 4 \cdot 1 = 9 + 25 - 4 = 30 > 0$. È reale, calcoliamone la misura del raggio e le coordinate del centro: $R = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2} = \dfrac{\sqrt{30}}{2}$, $C \equiv \left(-\dfrac{a}{2}, -\dfrac{b}{2}\right) \equiv \left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{-5}{2}\right) \equiv \left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$. Verifichiamo che effettivamente la circonferenza con questo centro e questo raggio ha questa equazione:
$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{30}}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2+3x+\frac{9}{4}+y^2-5y+\frac{25}{4}=\frac{30}{4} \Rightarrow x^2+y^2+3x-5y+1=0$$
- Possiamo applicare le formule precedenti alla circonferenza di equazione: $2x^2 + 2y^2 + x - 4y + 5 = 0$? No, perché i coefficienti dei termini di secondo grado non sono uguali a 1. Dobbiamo quindi prima trasformare l'equazione dividendo per 2: $x^2+y^2+\dfrac{1}{2}x-2y+\dfrac{5}{2}=0$. La circonferenza non è reale, infatti abbiamo: $a^2 + b^2 - 4c = \dfrac{1}{4}+4-4\cdot\dfrac{5}{2}<0$.

Un'altra questione che vogliamo risolvere riguarda il numero di punti che determinano una circonferenza. Dalla geometria euclidea sappiamo che *per tre punti non allineati passa una e una sola circonferenza*, anzi sappiamo anche come si può costruire una tale circonferenza. Basta costruire gli assi di due dei tre segmenti che si ottengono unendo i detti punti, tale intersezione è il centro, per il raggio basta considerare la distanza fra il centro e uno qualsiasi dei tre punti dati. In figura abbiamo l'esemplificazione grafica. Questa costruzione ci suggerisce anche un modo per determinare l'equazione della circonferenza passante per 3 punti.



Esempio 6

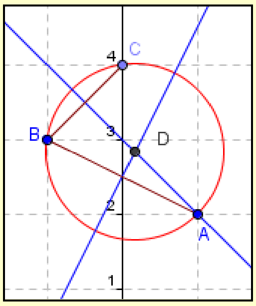
Vogliamo scrivere l'equazione della circonferenza passante per $A \equiv (1; 2)$, $B \equiv (-1; 3)$, $C \equiv (0; 4)$. Intanto stabiliamo che i punti non sono allineati, verificando che il seguente determinante non è nullo, come abbiamo mostrato nell'Unità 3.1: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_1+R_2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5-8=-3\neq 0$.

Adesso scriviamo le equazioni degli assi dei segmenti AB e BC, utilizzando una formula stabilita nella stessa Unità 3.1: $2 \cdot (x_B - x_A) + 2 \cdot (y_B - y_A) - x_A^2 + x_B^2 - y_A^2 + y_B^2 = 0$, in cui x_A, x_B, y_A, y_B sono le coordinate degli estremi del segmento. Asse di AB: $2 \cdot (1 + 1)x + 2 \cdot (3 - 2)y - 1^2 + 1^2 - 2^2 + 3^2 = 0 \Rightarrow 4x - 2y + 5 = 0$; asse di BC: $2 \cdot (0 + 1)x + 2 \cdot (4 - 3)y - 0^2 + 1^2 - 4^2 + 3^2 = 0 \Rightarrow 2x + 2y - 6 = 0 \Rightarrow x + y - 3 = 0$. Determiniamo adesso l'intersezione delle due rette, $\begin{cases} 4x-2y+5=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{6} \\ y=\dfrac{17}{6} \end{cases}$, che è appunto il centro della circonferenza cercata. Ora calcoliamo la misura del raggio come distanza dal centro a uno qualsiasi dei tre punti dati:
$$\sqrt{\left(1-\frac{1}{6}\right)^2+\left(2-\frac{17}{6}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(-\frac{5}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{36}+\frac{25}{36}}=\frac{5}{6}\cdot\sqrt{2}$$
Infine troviamo l'equazione della circonferenza passante per i tre punti

$$\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\left(y-\frac{17}{6}\right)^2=\left(\frac{5}{6}\cdot\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{36}+y^2-\frac{17}{3}y+\frac{289}{36}=\frac{25}{36}\cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36x^2+36y^2-12x-154y+240=0 \Rightarrow 3x^2+3y^2-x-17y+20=0$$

Rappresentiamo graficamente il tutto per ulteriore conferma.



In effetti il precedente problema poteva risolversi in modo completamente analitico, anche nell'impostazione, cioè cercando il valore dei tre parametri a, b e c. Il che ci conferma anche analiticamente che una circonferenza è perfettamente determinata da tre suoi punti non allineati.

Esempio 7

Cerchiamo l'equazione della circonferenza passante per i punti $A \equiv (1; 2)$, $B \equiv (-1; 3)$, $C \equiv (0; 4)$, in altro modo. Vogliamo trovare i valori di a, b e c nell'equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Dato che le incognite sono 3 anche le condizioni devono essere 3. Dato che noi conosciamo appunto tre punti della circonferenza, le condizioni sono sufficienti. Dobbiamo però *tradurre* in termini analitici il fatto che un punto appartenga a una circonferenza. Più in generale già sappiamo che un punto appartiene a una curva se le proprie coordinate verificano l'equazione della curva. Se la curva fosse data la questione sarebbe stata appunto una semplice verifica, l'equazione è soddisfatta quindi il punto appartiene alla curva, altrimenti non vi appartiene. Avendo invece dei parametri otteniamo un'equazione, così se A appartiene alla generica circonferenza deve essere: $1^2 + 2^2 + a \cdot 1 + b \cdot 2 + c = 0 \Rightarrow 5 + a + 2b + c = 0$. Analoghe considerazioni valgono per l'appartenenza degli altri due punti: B: $(-1)^2 + 3^2 + a \cdot (-1) + b \cdot 3 + c = 0 \Rightarrow 10 - a + 3b + c = 0$; C: $0^2 + 4^2 + a \cdot 0 + b \cdot 4 + c = 0 \Rightarrow 16 + 4b + c = 0$. Adesso basta risolvere il seguente sistema: $\begin{cases} 5+a+2b+c=0 \\ 10-a+3b+c=0 \\ 16+4b+c=0 \end{cases}$, con il metodo che preferiamo, in ogni caso i valori dei parametri sono: $\begin{cases} a=-\dfrac{1}{3} \\ b=-\dfrac{17}{3} \\ c=\dfrac{20}{3} \end{cases}$. Perciò l'equazione della circonferenza per i tre punti è $x^2+y^2-\frac{1}{3}x-\frac{17}{3}y+\frac{20}{3}=0 \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 - x - 17y + 20 = 0$, che coincide con quella trovata nel modo precedente.

Verifiche

Con il simbolo ^{CAS} ***indichiamo quegli esercizi per i quali risulta opportuno utilizzare nei calcoli un software di tipo Computer Algebra System, come Derive o una calcolatrice simbolica***

Lavoriamo insieme

Determinare l'equazione della circonferenza che ha centro in $C \equiv \left(\frac{3}{2}, \sqrt{5}\right)$ *e raggio* $R = \sqrt{13}$.

Basta applicare l'equazione stabilita dal Teorema 2: $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \sqrt{5}\right)^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2 \Rightarrow x^2 - 3x + 9/4 + y^2 - 2\cdot\sqrt{5}y + 5 - 13 = 0 \Rightarrow 4x^2 + 4y^2 - 12x - 8\cdot\sqrt{5}y - 23 = 0$.

Determinare le equazioni delle circonferenze date le coordinate del centro e la misura del raggio

Livello **1**

1. a) (–1; 2), 1; b) (1; –2), 1 [a) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$; b) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$]
2. a) (3; 4), 4; b) (1/4 ; –3) ; 3/2 [a) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$; b) $16x^2 + 16y^2 - 8x + 96y + 109 = 0$]
3. a) (1/3 ; –3/2), 4/5; b) (1; 0), 1 [a) $900x^2 + 900y^2 - 600x + 2700y + 1549 = 0$; b) $x^2 + y^2 - 2x = 0$]
4. a) (–4/3 ; 5/6), 3; b) (–2; 1), $\sqrt{2}$ [a) $36x^2 + 36y^2 + 96x - 60y - 235 = 0$; b) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$]
5. a) (–4; 0), $\sqrt{3} - 1$; b) (0; 0), 1 [a) $x^2 + y^2 + 8x + 12 + 2\cdot\sqrt{3} = 0$; b) $x^2 + y^2 - 1 = 0$]
6. a) (–7/2 ; –5/4), $\sqrt{3}$; b) (0; 0), 2 [a) $16x^2 + 16y^2 + 112x + 40y + 173 = 0$; b) $x^2 + y^2 - 4 = 0$]
7. a) (–1/3 ; –2) $\sqrt{5} - 2$; b) (0; 1), 2 [a) $9x^2 + 9y^2 + 6x + 36y + 36\cdot\sqrt{5} - 44 = 0$; b) $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$]
8. a) $\left(\sqrt{2};-1\right)$, 2/5; b) (1; 2), 1 [a) $25x^2 + 25y^2 - 50\cdot\sqrt{2}\,x + 50y + 71 = 0$; b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$]
9. a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-2\right)$, 7/3; b) (2; –3), 4 [a) $18x^2 + 18y^2 - 18\cdot\sqrt{2}\,x + 72y - 17 = 0$; b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$]
10. a) $\left(-1-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$, 2; b) $\left(1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right)$, 5
[a) $x^2 + y^2 + 2\cdot\sqrt{3}\ x - 2\cdot\sqrt{3}\,y + 3 + 2\cdot\sqrt{3} = 0$; b) $x^2 + y^2 + 2\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)x - 2\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)y - 19 = 0$]

Lavoriamo insieme

- *Data l'equazione* $x^2 + y^2 + 6x - 12y + 5 = 0$, *verificare se rappresenta una circonferenza reale e in caso affermativo determinare le coordinate del suo centro e la misura del raggio.*
  Intanto dobbiamo calcolare il segno di $a^2 + b^2 - 4c = 6^2 + (-12)^2 - 4 \cdot 5 = 36 + 144 - 20 = 160 > 0$; la circonferenza esiste, anzi il suo raggio è $R = \frac{\sqrt{160}}{2} = \frac{4\cdot\sqrt{10}}{2} = 2\cdot\sqrt{10}$. Le coordinate del suo centro sono: $C \equiv \left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right) \equiv (-3; 6)$.
- *Lo stesso di prima con l'equazione* $4x^2 + 4y^2 + x - 3y + 6 = 0$.
  Stavolta non possiamo applicare immediatamente quanto stabilito dal Teorema 2, poiché i coefficienti dei termini di secondo grado non sono unitari. Dobbiamo quindi prima renderli unitari: $x^2 + y^2 + 1/4x - 3/4y + 3/2 = 0$. La circonferenza non è reale, poiché: $a^2 + b^2 - 4c = (1/4)^2 + (-3/4)^2 - 4\cdot 3/2 = -43/8 < 0$.

Stabilire quali fra le seguenti equazioni rappresentano circonferenze reali; per quelle che lo sono determinarne le coordinate del centro e la misura del raggio

Livello **1**

11. a) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 12 = 0$; b) $x^2 + y^2 - 2x + 2 = 0$; c) $4x^2 + 4y^2 + x - 7y + 15 = 0$
$\left[\text{a)}\left(3;4\right),\sqrt{13};\text{b)}\varnothing;\text{c)}\varnothing\right]$

12. a) $x^2 + y^2 - x + y + 1 = 0$; b) $x^2 + y^2 + 4x - 3y + 1 = 0$; c) $x^2 + y^2 + 7x - 2y = 0$

$$\left[\text{a)}\varnothing;\text{b)}\left(-2;\frac{3}{2}\right),\frac{\sqrt{21}}{2};\text{c)}\left(-\frac{7}{2};1\right),\frac{\sqrt{53}}{2}\right]$$

13. a) $6x^2 + 6y^2 + 12x - 24y - 3 = 0$; b) $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 20 = 0$; c) $x^2 + y^2 + 4x + 2 = 0$

$$\left[\text{a)}(-1;2),\frac{\sqrt{22}}{2};\text{b)}\varnothing;\text{c)}(-2;0),\sqrt{2}\right]$$

14. a) $x^2 + y^2 + 6y - 3 = 0$; b) $x^2 + y^2 + x + y + 7 = 0$; c) $5x^2 + 5y^2 + 3x - 1 = 0$

$$\left[\text{a)}(0;-3),2\cdot\sqrt{3};\text{b)}\varnothing;\text{c)}\left(-\frac{3}{10};0\right),\frac{\sqrt{29}}{10}\right]$$

15. a) $3x^2 + 3y^2 - \frac{1}{2}x + \frac{4}{5}y + 5 = 0$; b) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}y^2 - x + 2y - 1 = 0$; c) $10x^2 + 10y^2 - 1 = 0$

$$\left[\text{a)}\varnothing;\text{b)}\left(\frac{3}{2};-3\right),\frac{\sqrt{57}}{2};\text{c)}(0;0),\frac{1}{\sqrt{10}}\right]$$

16. a) $x^2 + y^2 + \sqrt{3}\,x - \sqrt{3}\,y - 3 = 0$; b) $x^2 + y^2 - \frac{1}{6}x - \frac{8}{5}y - \sqrt{3} = 0$; c) $5x^2 + 5y^2 + \sqrt{2}\,x - 2 = 0$

$$\left[\text{a)}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2};\text{b)}\left(\frac{1}{12};\frac{4}{5}\right),\frac{\sqrt{3600\cdot\sqrt{3}+2329}}{60};\text{c)}\left(-\frac{\sqrt{2}}{10};0\right),\frac{\sqrt{42}}{10}\right]$$

17. a) $\sqrt{2}\,x^2 + \sqrt{2}\,y^2 + y - 3 = 0$; b) $6x^2 + 6y^2 + y - 2 = 0$; c) $4x^2 + 4y^2 + x - y + 1 = 0$

$$\left[\text{a)}\left(0;-\frac{\sqrt{2}}{4}\right),\sqrt{\frac{1+12\sqrt{2}}{8}};\text{b)}\left(0;-\frac{1}{12}\right),\frac{7}{12};\text{c)}\varnothing\right]$$

18. a) $\left(1-\sqrt{3}\right)x^2 + \left(1-\sqrt{3}\right)y^2 + x + y + 2 = 0$; b) $\frac{1}{\sqrt{7}}x^2 + \frac{1}{\sqrt{7}}y^2 - 2x + 3y + 1 = 0$; c) $x^2 + y^2 - 16 = 0$

$$\left[\text{a)}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4};\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right),\frac{\sqrt{6+5\cdot\sqrt{3}}}{2};\text{b)}\left(\sqrt{7};-\frac{3\cdot\sqrt{7}}{2}\right),\frac{\sqrt{91-4\cdot\sqrt{7}}}{2};\text{c)}(0;0),4\right]$$

Livello 2

19. Determinare una condizione relativa a uno solo dei tre coefficienti a, b e c dell'equazione di una circonferenza, che sia sufficiente a garantire che essa sia reale. [$c < 0$]
20. L'appartenenza del centro di una circonferenza al I quadrante è una condizione necessaria o sufficiente, affinché l'intera circonferenza appartenga al I quadrante? Giustificare la risposta. [Necessaria]
21. L'appartenenza dell'intera circonferenza al I quadrante è una condizione necessaria o sufficiente, affinché il suo centro appartenga al I quadrante? Giustificare la risposta. [Sufficiente]
22. Determinare una condizione sui segni dei coefficienti dell'equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, che assicuri che essa rappresenta sempre una circonferenza reale il cui centro appartiene al III quadrante. [a, b e c tutti e tre negativi]

Lavoriamo insieme

Scrivere l'equazione della circonferenza cha ha il segmento di estremi $A \equiv (-3; 1)$, $B \equiv (4; 0)$, *per diametro.*
Dire che il segmento AB è uno dei diametri della circonferenza, equivale a dire che il suo punto medio è il centro della circonferenza, mentre la metà della sua misura è la misura del raggio.

Il centro è $C \equiv \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ e il raggio $R = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-3-4)^2+(1-0)^2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{49+1} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{50} = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot\sqrt{2} = \frac{5}{2}\cdot\sqrt{2}$.

Quindi l'equazione cercata è: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 - x - y - 12 = 0.$

Livello 2

23. Scrivere le equazioni della circonferenze aventi per diametro i segmenti di estremi dati
a) (1; 3), (–1; –3) ; b) (–2; –2), (3; 4) ; c) (0; 0), (–6; –4) ; d) (1; 4), (–5; 0)
[a) $x^2 + y^2 - 10 = 0$; b) $x^2 + y^2 - x - 2y - 14 = 0$; c) $x^2 + y^2 + 6x + 4y = 0$; d) $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 5 = 0$]

24. Scrivere l'equazione della circonferenza concentrica a $x^2 + y^2 - 2x + y - 4 = 0$ e raggio 3.
$$\left[x^2+y^2-2x+y-\frac{31}{4}=0\right]$$

25. Scrivere l'equazione della circonferenza concentrica a $x^2 + y^2 + x - 5y + 1 = 0$ passante per $A \equiv (2, -4)$.
[$x^2 + y^2 + x - 5y - 42 = 0$]

Lavoriamo insieme

Determinare l'equazione della tangente alla circonferenza $2x^2+2y^2+ 2x + 7y - 4 = 0$ *nel suo punto* $P \equiv (1; 0)$.
Sappiamo dalla geometria elementare che una retta è tangente a una circonferenza in suo punto se è perpendicolare alla retta diametrale passante per lo stesso punto. Determiniamo le coordinate del centro, riscrivendo l'equazione nella forma adatta per potere applicare la nota formula: $x^2 + y^2 + x + 7/2y - 2 = 0$. Possiamo allora dire che il centro è $C \equiv (-1/2; -7/4)$. Adesso scriviamo l'equazione della retta per C e P, imponendo l'appartenenza di C al fascio di centro P: $-7/4 = m \cdot (-1/2 - 1) \Rightarrow m = 7/6$. Infine determiniamo la tangente come retta perpendicolare alla retta per C e P, che perciò ha coefficiente angolare $-1/m = -6/7$, e passante per P: $y = -6/7 \cdot (x - 1) \Rightarrow 6x + 7y - 6 = 0$.

Livello 2

26. Determinare le equazioni delle circonferenze di cui si conosce il centro e che sono tangenti alle rette date a) (2; –4), $x + y = 0$; b) (1; 5), $2x + 5y - 3 = 0$; c) (–4; 3), $3x - 7y + 1 = 0$
[a) $x^2+y^2 -4x + 8y + 18 = 0$; b) $29x^2+29y^2 -58x -290y + 178 = 0$; c) $29x^2+29y^2 + 232x -174y + 213 = 0$]

27. Scrivere l'equazione della circonferenza concentrica alla circonferenza $x^2 + y^2 + 5x - 7y - 2 = 0$ e tangente la retta di equazione $3x - y + 2 = 0$. [$5x^2 + 5y^2 + 25x - 35y + 52 = 0$]

28. Scrivere le equazioni delle circonferenze tangenti la retta di equazione $4x - 3y + 5 = 0$, di raggio 2 e il cui centro appartiene alla retta di equazione $x - y + 4 = 0$. Suggerimento: se il centro appartiene alla detta retta le sue coordinate sono: $(h; h + 4), h \in \mathbb{R}$.[$x^2 + y^2 -34x -42y+726 = 0$; $x^2 + y^2+6x - 2y+ 6 = 0$]

29. Determinare l'equazione della circonferenza tangente alle rette di equazioni $x = 4$ e $x = 8$ e aventi il centro in un punto di ordinata 3. *Suggerimento*: se la circonferenza è tangente alle rette allora il suo centro appartiene alla ... [$x^2 + y^2 - 12x - 6y + 41 = 0$]

30. Determinare l'equazione della circonferenza tangente alle rette di equazioni $y = 1$ e $y = 5$ e di raggio 3.
[Impossibile, tutte le circonferenze tangenti alle dette rette hanno raggio 2]

31. Se nel problema precedente eliminiamo il dato sul raggio, vogliamo trovare le equazioni delle circonferenze passanti per $P \equiv (0; 4)$. [$x^2 + y^2 \pm 4x - 6y + 9 = 0$]

32. Determinare le equazioni delle circonferenze tangenti alle rette $x = 0$ e $12x - 5y + 1 = 0$, con il centro sulla retta $x + y - 2 = 0$. [$16x^2 + 16y^2 - 72x + 8y + 1 = 0$; $100x^2 + 100y^2 - 60x - 340y + 289 = 0$]

33. CAS Determinare le equazioni delle circonferenze di raggio 1, tangenti alla retta $x + 2y - 1 = 0$ e il cui centro appartiene alla retta $x - y + 3 = 0$. $\left[9x^2+9y^2+6\cdot\left(5\pm\sqrt{5}\right)\cdot x-6\cdot\left(4\mp\sqrt{5}\right)\cdot y+42\mp 2\cdot\sqrt{5}=0\right]$

34. Determinare l'equazione della circonferenza passante per $A \equiv (1; -3)$ e tangente la retta di equazione $2x - y + 4 = 0$ nel suo punto di ascissa 3. [$9x^2 + 9y^2 - 400x - 7y + 289 = 0$]

35. Determinare l'equazione della circonferenza passante per $A \equiv (0; 1)$, $B \equiv (2; -3)$ e tangente in A all'asse delle ordinate. [$x^2 + y^2 - 10x - 2y + 1 = 0$]

36. Nel fascio di rette di equazione $(1 + m) \cdot x - my + 1 = 0$, determinare quella retta, che passa per il centro della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$. [$2x - y + 1 = 0$]

37. Determinare i punti d'intersezione delle due circonferenze aventi centro in $C_1 \equiv (-1; 3)$, $C_2 \equiv (3; -1)$, i cui raggi misurano rispettivamente 2 e 5. $\left[A\equiv\left(\frac{\sqrt{391}-5}{16};\frac{\sqrt{391}+37}{16}\right),B\equiv\left(\frac{-\sqrt{391}-5}{16};\frac{-\sqrt{391}+37}{16}\right)\right]$

38. Determinare i punti d'intersezione delle due circonferenze aventi centro nei punti (2; –2), (4; –3), di

raggi che misurano rispettivamente 3 e 4. $\left[A \equiv \left(\frac{8+2\cdot\sqrt{11}}{5}; \frac{4\cdot\sqrt{11}-9}{5}\right), B \equiv \left(\frac{8-2\cdot\sqrt{11}}{5}; \frac{-9-4\cdot\sqrt{11}}{5}\right)\right]$

39. Determinare i punti d'intersezione delle due circonferenze aventi centro nei punti (–2; 3), (–1; –3), di raggi che misurano rispettivamente 5 e 2. $\left[A \equiv \left(\frac{12\cdot\sqrt{21}-45}{37}; \frac{2\cdot\sqrt{21}-63}{37}\right), B \equiv \left(\frac{45-12\cdot\sqrt{21}}{37}; \frac{63-2\cdot\sqrt{21}}{37}\right)\right]$

Livello 3

40. Determinare l'equazione della circonferenza che stacca sull'asse x un segmento lungo $4\cdot\sqrt{2}$, ha il centro sulla retta $y = x - 2$ ed è tangente all'asse y. $[x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0]$
41. La retta $x + y = a$ e la circonferenza $x^2 + y^2 = a$ sono tangenti. Determinare a. [2]
42. Determinare le equazioni delle circonferenze passanti per $A \equiv (-1; 2)$ e $B \equiv (2; -3)$ e tangenti alla retta $7x - 11y - 51 = 0$. $\left[x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}y - \frac{17}{2}; x^2 + y^2 - \frac{2317}{722}x - \frac{235}{722}y - \frac{5457}{722}\right]$
43. CAS Determinare le equazioni delle circonferenze tangenti alle rette $3x - 4y + 1 = 0$ e $5x + 12y + 2 = 0$ e aventi il centro in un punto di ascissa 2.
$[12544x^2 + 12544y^2 - 50176x - 6944y + 33713 = 0 ; 64x^2 + 64y^2 - 256x + 241y + 5633 = 0]$
44. **CAS** Determinare le equazioni delle circonferenze tangenti alle rette $x + y - 2 = 0$ e $x - y + 1 = 0$ e aventi raggio 1.
$\left[2x^2 + 2y^2 - 2\cdot\left(1 \pm 2\cdot\sqrt{2}\right)\cdot x - 6y + 7 \pm 2\cdot\sqrt{2} = 0; \vee 2x^2 + 2y^2 - 2x - 2\cdot\left(3 \pm 2\cdot\sqrt{2}\right)\cdot y + 7 \pm 6\cdot\sqrt{2} = 0\right]$
45. **CAS** Determinare le equazioni delle circonferenze tangenti alle rette $x - 1 = 0$, $y = 3$ e $x + y = 0$.
$$\left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 + 2\cdot\left(3 \pm 2\cdot\sqrt{2}\right)\cdot x + 2\cdot\left(1 \pm 2\cdot\sqrt{2}\right)\cdot y + 2 = 0; \\ x^2 + y^2 - 2\cdot\left(1 \pm 2\cdot\sqrt{2}\right)\cdot x - 2\cdot\left(3 \pm 2\cdot\sqrt{2}\right)\cdot y + 18 \pm 8\cdot\sqrt{2} = 0 \end{array}\right]$$
46. Determinare le equazioni delle circonferenze di area 2π tangenti agli assi coordinati.
$\left[x^2 + y^2 \pm 2\cdot\sqrt{2}\cdot x \pm 2\cdot\sqrt{2}\cdot y + 2 = 0\right]$
47. Risolvere il problema precedente per l'area che vale πr^2. $[x^2 + y^2 \pm 2rx \pm 2ry + r^2 = 0]$
48. Dato l'insieme A = $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$, determinare l'equazione della circonferenza in esso inscritta. $[x^2 + y^2 - 1 = 0]$
49. Dato l'insieme A = $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$, determinare l'equazione della circonferenza in esso inscritta. $[2x^2 + 2y^2 - 1 = 0]$
50. Data la circonferenza Γ di centro l'origine e raggio 4, sia il fascio di rette di centro $P \equiv (-2; 6)$ e siano A e B le intersezioni della generica retta del fascio con Γ, con $\overline{PA} > \overline{PB}$. Si determini l'equazione del luogo tracciato dai punti medi del segmento PA. $[(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4]$
51. Generalizzare il problema precedente per $P \equiv (2a; 2b)$ e il raggio della circonferenza $2r$, con P esterno a Γ. $[(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2]$
52. Determinare geometricamente le soluzioni del sistema: $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 < 25 \end{cases}$.
[Il segmento di estremi $A \equiv (-3; 4)$, $B \equiv (4; -3)$, esclusi A e B]
53. Determinare geometricamente le soluzioni del sistema: $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 \leq 16 \end{cases}$.
[Il segmento di estremi $A \equiv \left(\frac{\sqrt{31}-1}{2}; \frac{\sqrt{31}+1}{2}\right), B \equiv \left(\frac{-\sqrt{31}-1}{2}; \frac{-\sqrt{31}+1}{2}\right)$]

Lavoriamo insieme

Dato il punto $P \equiv (2; -3)$ e la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$, stabilire se P appartiene o no alla circonferenza e in caso negativo se è a essa interno o esterno.
Sostituiamo le coordinate di P alle incognite dell'equazione: $2^2 + (-3)^2 + 2 \cdot 2 - 4 \cdot (-3) + 1 > 0$. Dato che

l'equazione non è verificata possiamo dire che P non appartiene alla circonferenza. Abbiamo ottenuto un numero positivo, cosa significa ciò? Ricordiamo che il cerchio è la parte di piano racchiusa dalla circonferenza o anche il *luogo dei punti del piano la cui distanza dal centro è minore del raggio*. Quindi se P appartenesse al cerchio di centro $(x_C; y_C)$ e raggio R, dovremmo avere: $(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2 < R^2 \Rightarrow (x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2 - R^2 < 0$, cioè sostituendo le coordinate di P nell'equazione della circonferenza dovremmo ottenere un numero negativo, dato che abbiamo ottenuto un numero positivo, vuol dire che P è esterno alla data circonferenza.

***Livello* 1**

Stabilire se i dati punti sono interni, esterni o appartenenti alla circonferenza indicata

54. a) (0; 0), $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$; b) (0; 0), $x^2 + y^2 + x - 3 = 0$; c) (1; 1), $x^2 + y^2 + x - 3y + 2 = 0$
[a) appartiene ; b) interno ; c) esterno]

55. a) (–1; 2), $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$; b) (2; 1), $x^2 + y^2 + x - 2y - 7 = 0$; c) (4; –1), $2x^2 + 2y^2 - y - 5 = 0$
[a) interno ; b) interno ; c) esterno]

56. a) (1/2; –1), $x^2 + y^2 - 3x + y - 4 = 0$; b) (–1 ; 2/3), $3x^2 + 3y^2 - x + 5y - 1 = 0$ [a) interno ; b) esterno]

57. a) $\left(\sqrt{3};-2\right), \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 3x + 5y - 8 = 0$; b) $\left(1+\sqrt{2};0\right), \sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}y^2 - 4x + y - 2 = 0$
[a) interno ; b) interno]

Lavoriamo insieme

Scrivere l'equazione della circonferenza passante per i punti $A \equiv (1; 1)$, $B \equiv (-1; 2)$, $C \equiv (0; -1)$.

- Il problema equivale a quello di scrivere l'equazione della circonferenza circoscritta a un triangolo di vertici assegnati. Imponiamo l'appartenenza dei punti alla generica circonferenza $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, ottenendo il sistema $\begin{cases} 1^2+1^2+a\cdot 1+b\cdot 1+c=0 \\ (-1)^2+2^2+a\cdot(-1)+b\cdot 2+c=0 \\ 0^2+(-1)^2+a\cdot 0+b\cdot(-1)+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2+a+b+c=0 \\ 5-a+2b+c=0 \\ 1-b+c=0 \end{cases}$, che risolto fornisce le soluzioni: $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-2 \end{cases}$. Pertanto la circonferenza cercata ha equazione: $x^2 + y^2 + x - y - 2 = 0$.
- Vi è anche un metodo più schematico, consistente nell'applicare la formula: $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_A^2+y_A^2 & x_A & y_A & 1 \\ x_B^2+y_B^2 & x_B & y_B & 1 \\ x_C^2+y_C^2 & x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Verifichiamo: $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 1^2+1^2 & 1 & 1 & 1 \\ \left(-1^2\right)+2^2 & -1 & 2 & 1 \\ 0^2+\left(-1\right)^2 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x^2 + 5y^2 + 5x - 5y - 10 = 0$.

Naturalmente il fattore comune 5 può eliminarsi.

Scrivere le equazioni delle circonferenze passanti per i punti di seguito indicati

***Livello* 1**

58. a) (0; 0), (4; 0), (0; 6) ; b) (0; 0), (1; –3), (–1; 0) ; c) (1; 2), (–1; 0), (0; –3)
[a) $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$; b) $3x^2 + 3y^2 + 3x + 11y = 0$; c) $2x^2 + 2y^2 - 7x + 3y - 9 = 0$]

59. a) (2; –1), (–1; 2), (–2; –3) ; b) (–2;1), (–1;2), (12;11) ; c) (2; –1), (4; –1), (1; 2)
[a) $3x^2 + 3y^2 + 4x + 4y - 19 = 0$; b) $x^2 + y^2 - 65x + 65y - 200 = 0$; c) $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0$]

60. a) (1; –1), (–1; 1), (2; –3); b) (1; 0), (0; 2), (3; –3) ; c) (1/2 ; –1), (–1; 0), (2/3; –2)
[a) $x^2 + y^2 + 11x + 11y - 2 = 0$; b) $x^2 + y^2 - 43x - 23y + 42 = 0$; c) $48x^2 + 48y^2 + 106x + 171y + 58 = 0$]

61. a) (1/2; 1/2), (–1/2; 1/4), (1; –1/2); b) (1/3; –1/3), (–1/3; 1), (1/6; –1/2); c) (1; 1/2), (1/3; 0), (–1/4; –2)
[a) $24x^2 + 24y^2 - 8x + 14y - 15 = 0$; b) $9^2 + 9y^2 + 6x - 3y - 5 = 0$; c) $12x^2 + 12y^2 - 49x + 38y + 15 = 0$]

62. a) $\left(\sqrt{2};0\right),\left(-\sqrt{2};1\right)$, (0; –1); b) $\left(\sqrt{5};1\right),\left(1;-\sqrt{5}\right)$, (2; 0)

$\left[\text{a) } x^2+y^2-y-2=0;\ \text{b) } x^2+y^2+\left(7+3\sqrt{5}\right)x-\left(3+\sqrt{5}\right)y-18-6\sqrt{5}=0\right]$

Livello 2

63. Se i tre punti sono allineati, cosa otteniamo applicando la formula $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_A^2+y_A^2 & x_A & y_A & 1 \\ x_B^2+y_B^2 & x_B & y_B & 1 \\ x_C^2+y_C^2 & x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}=0$?

[L'equazione della retta a cui appartengono i punti]

64. Determinare l'equazione della circonferenza passante per $A \equiv (4; 0)$, $B \equiv (–1; 2)$ e il cui centro appartiene alla retta di equazione $5x – 2y + 3 = 0$. [Impossibile]

65. Determinare l'equazione della circonferenza passante per $A \equiv (1; 0)$, $B \equiv (–2; 1)$ e il cui centro appartiene alla retta di equazione $2x – 3y – 1 = 0$. [$x^2 + y^2 + 2x + 2y – 3 = 0$]

66. Determinare le equazioni delle circonferenze di raggio 1, passanti per $A \equiv (1; –2)$, $B \equiv (–3; 4)$. [$\varnothing$]

67. Fornire una giustificazione geometrica dell'impossibilità del precedente problema.

[AB maggiore del diametro]

68. Determinare le equazioni delle circonferenze passanti per $A \equiv (–1; 0)$, $B\equiv (2; –3)$ e aventi area 9π.

[$x^2 + y^2 – 4x – 5 = 0$; $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$]

69. Con riferimento al problema precedente, sia πr^2 la misura dell'area, per quali valori di r il problema ha soluzione? [$r > 9/2$]

70. Con riferimento al problema di determinare l'equazione di una circonferenza passante per 2 punti e avente raggio assegnato, spiegare cosa accade geometricamente quando il problema non ha soluzione.

[Il centro deve appartenere all'asse del segmento di estremi i due punti; se questo segmento è maggiore o uguale al diametro non vi è soluzione]

71. Determinare l'equazione della circonferenza di centro il punto $C \equiv (2; –3)$ e tale che la retta di equazione $2x – 5y – 9 = 0$ intercetti su di essa una corda di lunghezza $\frac{8}{\sqrt{29}}$. [$x^2 + y^2 – 4x + 6y + 9 = 0$]

72. Determinare le equazioni delle circonferenze passanti per i punti $A \equiv (1; –1)$, $B \equiv (–3; 2)$ e tali che la retta di equazione $3x – 4y = 0$ intercetti su di esse una corda di lunghezza $\frac{\sqrt{1241}}{5}$.

[$x^2 + y^2 + 5x + 3y – 4 = 0$; $144x^2 + 144y^2 – 249x – 860y – 899 = 0$]

73. Determinare per quali valori del parametro reale m le rette di equazioni $y = mx$ sono secanti la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 – 2x – y + 1 = 0$. [$0 < m < 4/3$]

74. Che tipo di figura è l'intersezione della retta $x + y = 1$ con l'interno della circonferenza di centro nell'origine e raggio che misura 5 unità? [Il segmento di estremi (–3; 4), (4; –3), estremi esclusi]

Lavoriamo insieme

- *Determinare la circonferenza circoscritta al triangolo di vertici $A \equiv (–1; 2)$, $B \equiv (3; –2)$, $C \equiv (1; 4)$.*
Ciò naturalmente equivale a trovare l'equazione di una circonferenza passante per 3 punti. Qualunque sia il procedimento applicato troviamo l'equazione $x^2 + y^2 – 4x – 2y – 5 = 0$.
- *Determinare l'equazione della circonferenza inscritta nello stesso triangolo precedente.*
Dobbiamo determinare intanto le coordinate dell'incentro, che ricordiamo è il punto d'incontro delle bisettrici dei lati. Quindi cominciamo a trovare le equazioni dei lati: r_{AB}: $x + y – 1 = 0$; r_{AC}: $x – y + 3 = 0$; r_{BC}: $3x + y – 7 = 0$. Di equazioni delle bisettrici ne otteniamo quattro, due riferite agli angoli interni e due agli esterni. Dopo una breve indagine che può essere facilitata dall'uso di un software come Geoegbra o da una calcolatrice grafica, scegliamo quelle giuste: $y – 2 = 0$ e $\left(34+\sqrt{5}\right)x+\left(1+\sqrt{5}\right)y-7-\sqrt{5}=0$.
Intersechiamo le precedenti rette, ottenendo l'incentro: $I\equiv\left(5-2\sqrt{5};2\right)$. Adesso troviamo il raggio, come distanza di I da uno dei lati: $R=\frac{\left|5-2\cdot\sqrt{5}+2-1\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{6-2\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{6\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{10}}{2}=3\cdot\sqrt{2}-\sqrt{10}$. Infine

l'equazione della circonferenza inscritta in *ABC*: $x^2 + y^2 + \left(4\sqrt{5}-10\right)x - 4y + 21 - 8\cdot\sqrt{5} = 0$.

Livello 2

Determinare l'equazione delle circonferenze inscritta e circoscritta ai seguenti triangoli di cui sono dati i vertici

75. a) (10; 0), (–2; 4), (–5; –5); b) (–1; 7), (2; 1), (–6; –3);
[a) $x^2 + y^2 - 5x + 5y - 50 = 0$; $x^2 + y^2 - 10 = 0$; b) $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$; $x^2 + y^2 + 7x - 4y - 15 = 0$]

76. a) (11; 0), (–1; 4), (–4; –5); b) (–6; 1), (9; 6), (6; –3)
[a) $x^2 + y^2 - 2x - 9 = 0$; $x^2 + y^2 - 7x + 5y - 44 = 0$; b) $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$; $x^2 + y^2 - 3x - 7y + 48 = 0$]

Lavoriamo insieme

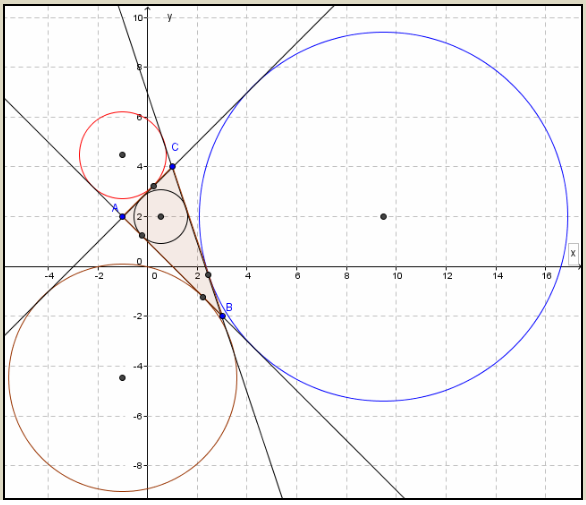
Il precedente procedimento permette di trovare soluzioni a più problemi, infatti quando calcoliamo le equazioni delle bisettrici, abbiamo già visto che ne otteniamo due, una relativa all'angolo interno, l'altra a quello esterno. Ciò implica un'ulteriore indagine per stabilire quale dobbiamo considerare.

Cambiamo tecnica. Calcoliamo il centro della circonferenza inscritta come punto equidistante dalle tre rette dei lati, cioè risolviamo il sistema seguente: $\begin{cases} \dfrac{|x+y-1|}{\sqrt{2}} = \dfrac{|x-y+3|}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{|x+y-1|}{\sqrt{2}} = \dfrac{|3x+y-7|}{\sqrt{10}} \end{cases}$, troviamo ben 4 soluzioni, cioè non solo l'incentro, ma anche gli excentri (centri delle circonferenze exinscritte):

$$\begin{cases} x+y-1 = x-y+3 \\ \sqrt{5}\left(x+y-1\right) = 3x+y-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5+2\cdot\sqrt{5} \\ y = 2 \end{cases};\ \begin{cases} x+y-1 = -x+y-3 \\ \sqrt{5}\left(x+y-1\right) = 3x+y-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2\cdot\sqrt{5} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x+y-1 = x-y+3 \\ -\sqrt{5}\left(x+y-1\right) = 3x+y-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5-2\cdot\sqrt{5} \\ y = 2 \end{cases};\ \begin{cases} x+y-1 = -x+y-3 \\ -\sqrt{5}\left(x+y-1\right) = 3x+y-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2\cdot\sqrt{5} \end{cases}.$$

Non ci resta che determinare i raggi delle circonferenze exinscritte: $R_1 = 3\cdot\sqrt{2}+\sqrt{10}; R_2 = \sqrt{2}+\sqrt{10}$; $R_3 = \sqrt{10}-\sqrt{2}$. Le equazioni delle circonferenze exinscritte: $x^2+y^2-\left(4\cdot\sqrt{5}+10\right)\cdot x-4y+21+8\cdot\sqrt{5}=0$; $x^2+y^2+2x+4\cdot\sqrt{5}y+9-4\cdot\sqrt{5}=0$; $x^2+y^2+2x-4\cdot\sqrt{5}y+9+4\cdot\sqrt{5}=0$. Rappresentiamo in figura.



Determinare l'equazione delle circonferenze exinscritte nei triangoli definiti negli esercizi a cui si fa riferimento

Livello 3

77. Esercizio 75a [$x^2 + y^2 - 20x + 40y + 140 = 0$; $x^2 + y^2 - 20x - 20y + 110 = 0$; $x^2 + y^2 + 20x + 60 = 0$]

78. Esercizio 75b [$x^2 + y^2 - 8x - 14y + 45 = 0$; $x^2 + y^2 + 32x - 14y + 125 = 0$; $x^2 + y^2 + 2x + 16y + 20 = 0$]

79. Esercizio 76a [$x^2 + y^2 + 18x + 41 = 0$; $x^2 + y^2 - 22x + 40y + 161 = 0$; $x^2 + y^2 - 22x - 20y + 131 = 0$]

80. Esercizio 76b [$x^2 + y^2 - 28x - 2y + 157 = 0$; $x^2 + y^2 + 12x + 18y + 27 = 0$; $x^2 + y^2 + 12x - 42y + 117 = 0$]

81. Con i dati dell'esercizio 75a, verificare la proprietà secondo la quale l'area di un triangolo è data dal prodotto fra il semiperimetro per il raggio del cerchio inscritto.

82. Con i dati dell'esercizio 75a, verificare la proprietà secondo la quale il raggio del cerchio circoscritto a un triangolo è dato dal semiprodotto dei lati diviso per il quadruplo dell'area.

83. Con i dati dell'esercizio 75b, verificare la proprietà secondo la quale il quadrato dell'area di un triangolo è dato dal prodotto dei raggi della circonferenza inscritta e delle circonferenze exinscritte.

84. Con i dati dell'esercizio 75b, verificare la proprietà secondo la quale il reciproco del raggio della circonferenza inscritta in un triangolo è dato dalla somma dei reciproci dei raggi delle circonferenze exinscritte.

Lavoriamo insieme

Determinare l'equazione del luogo dei punti del piano per i quali la somma dei quadrati delle distanze dalle bisettrici dell'angolo formato dalle rette $4x + 3y = 0$ e $6x - 8y + 1 = 0$ *è uguale a* 5.

Indichiamo con $P \equiv (x; y)$ il generico punto del luogo. Determiniamo le equazioni delle bisettrici:

$$\frac{|4x+3y|}{\sqrt{16+9}}=\frac{|6x-8y+1|}{\sqrt{36+64}}\Rightarrow\frac{|4x+3y|}{5}=\frac{|6x-8y+1|}{10}\Rightarrow 2\cdot|4x+3y|=|6x-8y+1|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x+6y=6x-8y+1 \wedge 8x+6y=-6x+8y-1\Rightarrow 2x+14y-1=0 \wedge 14x-2y+1=0$$

Imponiamo le condizioni del luogo:

$$\left(\frac{|2x+14y-1|}{\sqrt{4+196}}\right)^2+\left(\frac{|14x-2y+1|}{\sqrt{196+4}}\right)^2=5\Rightarrow 100x^2+100y^2+12x-16y-499=0$$

Abbiamo scritto solo il risultato finale, che si riconosce essere l'equazione di una circonferenza.

Livello 3

Verificare che i seguenti luoghi sono tutti formati da circonferenze

85. Dato il triangolo equilatero due dei cui vertici sono $O \equiv (0; 0)$ e $A \equiv (1; 0)$, determinare il luogo dei punti del piano per cui la somma dei quadrati delle distanze dai vertici del triangolo equilatero è 2. [$3x^2 + 3y^2 - 3x \pm \sqrt{3}\, y = 0$]

86. Con riferimento al problema precedente, diciamo a la somma dei quadrati delle distanze dai vertici del triangolo equilatero. Studiare per quali valori di a il problema ha soluzione. [Solo se $a > 1$]

87. Con riferimento al problema 86, consideriamo $A \equiv (a; 0)$ e diciamo b la somma dei quadrati delle distanze dai vertici del triangolo equilatero. Studiare per quali valori di a e b il problema ha soluzione. [Solo se $b > a^2$]

88. Con riferimento al problema 86, le circonferenze trovate che particolarità hanno? E se la somma è diversa da 2, la circonferenze trovate verificano sempre la stesse proprietà? [Sono le circonferenze circoscritte ai due triangoli; no]

89. Data la famiglia di triangoli OAB di vertici $O \equiv (0; 0)$, $A \equiv (1; 0)$, $B \equiv (x; y)$, in cui la mediana BM misura 2,5,determinare l'equazione del luogo generato dal vertice C. [$(x + 1)^2 + y^2 = 25$]

90. Il luogo dei punti le cui distanze da due punti dati P e Q, hanno un dato rapporto k è il cosiddetto cerchio di Apollonio. Trovarlo per $P \equiv (2; -3)$, $Q \equiv (4; -1)$, $k = 2$. [$3x^2 + 3y^2 - 28x + 2y + 55 = 0$]

91. Il luogo dei punti per cui la somma dei quadrati delle distanze da due punti dati P e Q, è costante e vale k è il cosiddetto cerchio di Roberval. Trovarlo per $P \equiv (1; 2)$, $Q \equiv (0; -4)$, $k = 3$. [$x^2 + y^2 - x + 2y + 9 = 0$]

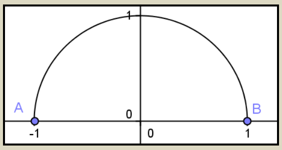
92. La precedente circonferenza non è reale, quanto deve valere k, con gli stessi P e Q, affinché sia reale? [$k > 37/2$]

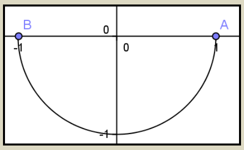
93. Luogo dei punti per i quali è 4 la somma dei quadrati delle distanze dalle rette di equazioni $4x + y = 0$ e $x - 4y + 1 = 0$. [$17x^2 + 17y^2 + 2x - 8y - 67 = 0$]

94. Luogo del baricentro del triangolo di vertici $A \equiv (1; 0)$, $B \equiv (-2; 1)$ e C variabile sulla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$. [$9x^2 + 9y^2 + 6x - 6y + 1 = 0$]

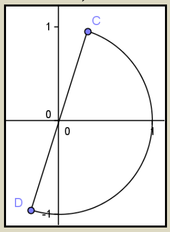
Lavoriamo insieme

Una circonferenza non è una funzione, infatti in genere, data un'ascissa vi sono 2 punti della circonferenza che hanno quell'ascissa; una funzione è invece una legge che a un elemento associa al più un elemento.
Può risultare una funzione invece una semicirconferenza, del resto se risolviamo l'equazione della circonferenza rispetto a *y*, per esempio l'equazione $x^2 + y^2 = 1$, otteniamo: $y = \pm\sqrt{1-x^2}$, ossia due distinte funzioni: $y = \sqrt{1-x^2} \wedge y = -\sqrt{1-x^2}$, entrambe definite per $-1 \le x \le 1$. Mostriamo la loro rappresentazione grafica.





Ovviamente queste due semicirconferenze sono le uniche, fra le infinite ottenibili dalla date circonferenza, ad essere funzioni, e ciò perché sono le uniche il cui diametro è parallelo all'asse delle ascisse, come mostrato nella figura seguente di una semicirconferenza non funzione.



Livello 2

Dalle seguenti equazioni delle circonferenze ricavare le equazioni delle funzioni semicirconferenze, quindi rappresentarle graficamente

95. $x^2 + y^2 = 4$; $x^2 + y^2 = 15$; $(x-2)^2 + y^2 = 1$ $\left[y = \pm\sqrt{4-x^2}; y = \pm\sqrt{15-x^2}; y = \pm\sqrt{-x^2+4x-3}\right]$

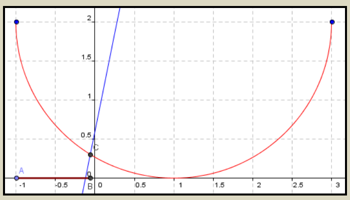
96. $x^2 + (y+4)^2 = 2$; $2x^2 + 2y^2 - 3x + y - 4 = 0$ $\left[y = -4 \pm\sqrt{2-x^2}; y = \dfrac{-1\pm\sqrt{-16x^2+24x+33}}{4}\right]$

97. $x^2 + y^2 - x = 0$; $x^2 + y^2 + x - y = 0$; $5x^2 + 5y^2 - 4x + 3y - 2 = 0$
$\left[y = \pm\sqrt{-x^2+x}; y = \pm\dfrac{1\pm\sqrt{-4x^2-4x+1}}{2}; y = \pm\dfrac{-3\pm\sqrt{-100x^2+80x+49}}{10}\right]$

98. $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 3$; $(2x-5)^2 + (2y+3)^2 = 5$ $\left[y = 2\pm\sqrt{-x^2-6x-6}; y = \pm\dfrac{-3\pm 2\cdot\sqrt{-x^2+5x-5}}{2}\right]$

Lavoriamo insieme

Risolvere graficamente la disequazione irrazionale: $2-\sqrt{-x^2+2x+3} \ge 5x+1$.
In pratica vogliamo utilizzare quanto sappiamo sulla geometria analitica della circonferenza e della retta. Abbiamo appena visto che la funzione $y = 2-\sqrt{-x^2+2x+3}$, rappresenta una semicirconferenza, precisamente quella associata alla circonferenza $(y-2)^2 = -x^2 + 2x + 3 \Rightarrow (y-2)^2 + (x-1)^2 = 4$, ossia una semicirconferenza di centro (1; 2) e raggio 2. D'altro canto la funzione $y = 5x + 1$ rappresenta invece una retta. Stiamo perciò confrontando le ordinate dei punti della semicirconferenza e quelli della retta, con uguale ascissa, cercando quelli della semicirconferenza che hanno ordinata maggiore. Rappresentando graficamente possiamo perciò dire che le soluzioni sono tutte le ascisse comprese tra i punti *A* e *B* in figura.



Naturalmente non siamo in grado di determinare la soluzione algebrica corretta, ma solo una sua valutazione, aiutandoci con Derive, con cui abbiamo rappresentato i grafici, possiamo dire che la soluzione approssimata è $-1 \le x \le -0{,}13$. Se volessimo ottenere le soluzioni esatte basterebbe ottenere l'ascissa di *B* come soluzione minore dell'equazione $2-\sqrt{-x^2+2x+3}=5x+1$. Da cui: $-\sqrt{-x^2+2x+3}\ge 5x+1-2 \Rightarrow$ $-x^2 + 2x + 3 \ge (5x - 1)^2 \Rightarrow 26x^2 - 12x - 2 = 0 \Rightarrow 13x^2 - 6x - 1 = 0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9+13}}{13}=\frac{3\pm\sqrt{22}}{13}$. La soluzione minore è ovviamente quella in cui scegliamo il segno meno. Quindi la soluzione esatta della disequazione data è $-1\le x\le\frac{3-\sqrt{22}}{13}$.

Livello 2

Risolvere graficamente le seguenti disequazioni

99. $2+\sqrt{-x^2+7x-6}\ge x-1$; $2-\sqrt{-x^2+7x-6}<x-1$; $1-\sqrt{-x^2+4x+12}\le 11-3x$ $\left[1\le x\le 5;\frac{3}{2}<x<6;-2\le x\le\frac{22}{5}\right]$

100. $1+\sqrt{-x^2+4x+12}>11-3x$; $-2+\sqrt{-x^2+x+6}<x-3$; $-2-\sqrt{-x^2+x+6}>x-3$ $\left[2<x\le 6;\frac{5}{2}<x\le 3;-2\le x\le -1\right]$

101. $-3-\sqrt{-x^2+10x-21}\le 1-\sqrt{-x^2+2x+19}$; $-1+\sqrt{-x^2+9x-14}\le\frac{1}{3}x-4$; $-1-\sqrt{-x^2+9x-14}>\frac{1}{3}x-4$ $\left[3\le x\le 1+2\sqrt{5};\varnothing;2<x<3\vee\frac{69}{10}<x\le 7\right]$

102. $\sqrt{-x^2+12x-31}\ge 3-\sqrt{-x^2+14x-44}$; $-3+\sqrt{-x^2+10x-21}>1+\sqrt{-x^2+2x+19}$ $[5 \le x \le 8; \varnothing]$

103. $\sqrt{-x^2+14x-44}>3-\sqrt{-x^2+14x-41}$; $-\sqrt{-x^2+13x-36}>1-\sqrt{-x^2+12x-26}$ $[5 < x < 9; 4 \le x < 5]$

104. $\sqrt{-x^2+13x-36}<1+\sqrt{-x^2+12x-26}$; $-\sqrt{-x^2+14x-44}<3+\sqrt{-x^2+14x-41}$ $\left[4\le x\le 9;7-\sqrt{5}\le x\le 7+\sqrt{5}\right]$

105. $-\sqrt{-x^2+12x-31}\le 3+\sqrt{-x^2+14x-44}$ $\left[7-\sqrt{5}\le x\le 6+\sqrt{5}\right]$

Livello 3

106. $3+\sqrt{-x^2-2x+8}\ge 7x+2$; $\sqrt{10x-20-x^2}-2\le 3x+1$ $\left[-4\le x\le\frac{6+\sqrt{386}}{50};5-\sqrt{5}\le x\le 5+\sqrt{5}\right]$

107. $3-\sqrt{-x^2-8x-15}\ge 2x-3$; $-\sqrt{-x^2-4x-1}-5\le 4x-3$; $\sqrt{-x^2-12x+32}\le 3-x$ $\left[-5\le x\le -3;-\frac{10+\sqrt{15}}{17}\le x\le\sqrt{3}-2;\frac{\sqrt{55}-3}{2}\le x\le 2\cdot\sqrt{17}-6\vee -2\cdot\sqrt{17}-6\le x\le -\frac{\sqrt{55}+3}{2}\right]$

108. $3-\sqrt{5-x^2}\ge 6-2x$; $\sqrt{2x+39-x^2}-4\ge 2-x$; $4+\sqrt{-x^2-20x-23}\ge 3x-5$ $\left[2\le x\le\sqrt{5};\frac{7-\sqrt{55}}{2}\le x\le 1+2\sqrt{10};-\sqrt{77}-10\le x\le\sqrt{77}-10\right]$

109. $3-\sqrt{-x^2+14x-36}<\frac{\sqrt{-16x^2+192x-431}-5}{4}$; $3+\sqrt{-x^2+14x-36}>\frac{-\sqrt{-16x^2+192x-431}+5}{4}$ $\left[4<x<\frac{2682}{305};7-\sqrt{13}\le x\le\frac{24+\sqrt{145}}{4}\right]$

110. $\frac{3-\sqrt{-16x^2+128x-191}}{4}\le -1+\sqrt{-x^2+4x}$; $\frac{3-\sqrt{-16x^2+128x-191}}{4}\ge -1-\sqrt{-x^2+4x}$ $\left[\frac{16-\sqrt{65}}{4}\le x\le 4;\frac{16-\sqrt{65}}{4}\le x\le\frac{450}{113}\right]$

Trasformazioni geometriche sulla circonferenza

Lavoriamo insieme

Provare che il centro della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$ *è centro di simmetria per la stessa circonferenza.*

Il centro è $C \equiv (-2; -3)$. Applichiamo alla circonferenza la simmetria di centro C: $s_C: \begin{cases} x' = -4 - x \\ y' = -6 - y \end{cases}$.

Sappiamo che per le trasformazioni involutorie, quindi per le simmetrie, non è necessario ricavare le trasformazioni inverse per sostituirne le leggi alle incognite. Abbiamo allora: $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0 \xrightarrow{s_C} (-4 - x)^2 + (-6 - y)^2 + 4 \cdot (-4 - x) + 6 \cdot (-6 - y) = 0 \Rightarrow 16 + 8x + x^2 + 36 + 12y + y^2 - 16 - 4x - 36 - 6y + 9 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$. Dato che la curva trasformata coincide con la circonferenza di partenza possiamo dire che C è centro di simmetria.

Livello 2

Determinare le equazioni delle trasformate delle seguenti circonferenze, secondo le trasformazioni indicate (con ω indichiamo un'omotetia, con α una dilatazione)

111. $x^2 + y^2 = 1$, $s_{\left(\frac{1}{2};-2\right)}$; $x^2 + y^2 = 1 = 0$, $s_{x=2}$; $x^2 + y^2 = 2$, $s_{y=3}$; $x^2 + y^2 - x = 0$, $s_{x=y}$
[$x^2 + y^2 - 2x + 8y + 16 = 0$; $x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$; $x^2 + y^2 - 12y + 34 = 0$; $x^2 + y^2 - y = 0$]
112. $x^2 + y^2 + x - y = 0$, $s_{x=-y}$; $x^2 + y^2 - 5 = 0$, $s_{x+3y-1=0}$; $x^2 + y^2 - 1 = 0$, $t_{(-3;\,1)}$; $x^2 + y^2 - 1 = 0$, $r_{90°,(1;\,-2)}$
[$x^2 + y^2 + x - y = 0$; $5x^2 + 5y^2 - 2x - 6y - 23 = 0$; $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 9 = 0$; $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 9 = 0$]
113. $x^2 + y^2 - 2 = 0$, $r_{270°,(-2;\,3)}$; $x^2 + y^2 - 1 = 0$, $\omega_{\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right),2}$ [$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 24 = 0$; $2x^2 + 2y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$]
114. $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$, omotetia di centro coincidente con quello della circonferenza e rapporto uguale al suo raggio. [$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$]
115. Con relazione al precedente esercizio in che relazione sono fra loro i centri e i raggi delle due circonferenze? [I centri coincidono, il rapporto dei raggi è $|k|$]
116. $x^2 + y^2 - 1 = 0$, similitudine di leggi $\begin{cases} x' = 4x + 4y + 1 \\ y' = 4x - 4y - 2 \end{cases}$ [$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 27 = 0$]
117. $x^2 + y^2 - 9 = 0$, similitudine di leggi $\begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = -x + y + 1 \end{cases}$ [$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 16 = 0$]
118. Determinare le coordinate del centro della simmetria che trasforma la circonferenza $x^2 + y^2 - 9 = 0$ nella circonferenza $x^2 + y^2 - 8x + 14y + 56 = 0$. [(2; –7/2)]
119. Determinare le coordinate del centro della simmetria che trasforma la circonferenza $x^2 + y^2 - 1 = 0$ nella circonferenza $x^2 + y^2 + 4x - 12y + 38 = 0$. [$\varnothing$]
120. Perché il precedente quesito non ha soluzione? [Le circonferenze hanno raggi diversi]
121. Una circonferenza ha assi di simmetria? Se sì dire quali sono, giustificando la risposta. [Qualsiasi retta per il centro]
122. Determinare gli assi di simmetria delle circonferenze di centro l'origine. [$y = mx$, $\forall m \in \mathbb{R}$; $x = 0$]
123. Determinare la retta di equazione $x = h$, per cui la simmetria di asse tale retta trasforma la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 9 = 0$ nella circonferenza $x^2 + y^2 - 8x + 7 = 0$. [$x = -2$]
124. Determinare la retta di equazione $y = h$, per cui la simmetria di asse tale retta trasforma la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 7 = 0$ nella circonferenza $x^2 + y^2 + 20y + 93 = 0$. [$y = 5$]
125. Determinare la retta di equazione $ax + by + c = 0$, per cui la simmetria di asse tale retta trasforma la circonferenza $x^2 + y^2 - 3 = 0$ nella circonferenza $5x^2 + 5y^2 - 24x - 12y + 21 = 0$. [$2x + y - 3 = 0$]
126. Trovare l'equazione della circonferenza passante per $A \equiv (2; -3)$ e tangente internamente in $B \equiv (0; 3)$ alla circonferenza di centro l'origine e raggio 3. *Suggerimento*: il centro della circonferenza è l'intersezione dell'asse di AB con ... [$3x^2 + 3y^2 + 2y - 33 = 0$]
127. Con riferimento all'esercizio precedente determinare l'equazione della circonferenza tangente esternamente. [$3x^2 + 3y^2 - 38y + 87 = 0$]
128. Determinare le componenti del vettore che trasforma la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4$ nella circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 25 = 0$. [(2; 5)]

129. Determinare il vettore che trasforma la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ in $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$. [$\varnothing$]

130. Determinare il centro della rotazione di 90° che trasforma la circonferenza $x^2 + y^2 - 3 = 0$ nella circonferenza $x^2 + y^2 + 6x + 10y + 31 = 0$. [(1; –4)]

131. Determinare il centro della rotazione di 270° che trasforma la circonferenza $x^2 + y^2 = 6$ nella circonferenza $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 12 = 0$. [(0; 3)]

132. Determinare il centro dell'omotetia di rapporto $k = -2$ che trasforma la circonferenza $x^2 + y^2 = 3$ nella circonferenza $x^2 + y^2 - 6x + 18y + 78 = 0$. [(1; –3)]

133. Determinare il rapporto dell'omotetia di centro (0; –4) che trasforma la circonferenza $x^2 + y^2 = 8$ nella circonferenza $4x^2 + 4y^2 + 16y + 8 = 0$. [$k = 1/2$]

Livello 3

Determinare l'equazione della trasformata della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = r^2$, secondo la trasformazione indicata.

134. $s_{(a;\, b)}$; $s_{x = h}$; $s_{y = h}$
[$x^2 + y^2 - 4ax - 4by + 4a^2 + 4b^2 - r^2 = 0$; $x^2 + y^2 - 4hx + 4h^2 - r^2 = 0$; $x^2 + y^2 - 4hy + 4h^2 - r^2 = 0$]

135. $t_{(v_x;v_y)}$; $s_{ax + by + c = 0}$
[$(x - v_x)^2 + (y - v_y)^2 - r^2 = 0$; $(a^2 + b^2)\, x^2 + (a^2 + b^2)\, y^2 + 4acx + 4bcy + 4c^2 - (a^2 + b^2)\, r^2 = 0$]

136. $r_{90°,(a;\, b)}$; $r_{270°,(a;\, b)}$ [$(x - a - b)^2 + (y - b + a)^2 - r^2 = 0$; $(x - a + b)^2 + (y - a - b)^2 - r^2 = 0$]

137. Provare che il centro di una qualsiasi circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ è centro di simmetria per la stessa circonferenza.

138. Provare che ogni circonferenza è unita per la rotazione di 90° o 270° rispetto al proprio centro.

139. Determinare la figura omotetica di una circonferenza con centro nell'origine e raggio 1, secondo una omotetia di centro l'origine e rapporto $k \neq 0$. Che tipo di curva si ottiene?
[Una circonferenza di centro l'origine e raggio $|k|$]

140. Determinare la figura omotetica di una circonferenza con centro nell'origine e raggio 1, secondo una omotetia di centro (a; b) e rapporto $k \neq 0$.[$x^2 + y^2 + 2a(k - 1)x + 2b(k - 1)y + (k - 1)^2 \cdot (a^2 + b^2) - k^2 = 0$]

141. Determinare la figura simile della circonferenza con centro nell'origine e raggio 1, secondo la similitudine di leggi $\begin{cases} x' = k \cdot (x + y) + c \\ y' = k \cdot (x - y) + f \end{cases}$. [$x^2 + y^2 - 2cx - 2fy + c^2 + f^2 - 2k^2 = 0$]

L'angolo di Derive

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%204/4-2/4-2-1.exe puoi scaricare un'applicazione che ti mostra il trattamento delle circonferenze con Derive. Invece su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%204/4-2/4-2-1.dfw ti scarichi il relativo file Derive.

Attività

1. Scrivere una funzione per determinare le coordinate del centro e la misura del raggio di una circonferenza, di cui è data l'equazione.
2. Verificare gli esercizi assegnati nel paragrafo.

Fasci di circonferenze

Il problema

Cosa dobbiamo intendere per fascio di circonferenze? E, come per i fasci di rette, anche i fasci di circonferenze hanno punti base?

Abbiamo visto che un fascio di rette si otteneva a partire da due rette generatrici, pensiamo quindi di fare lo stesso considerando due circonferenze generatrici. Abbiamo perciò la seguente definizione.

Definizione 2

Date due circonferenze reali di equazioni $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ e $x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0$, e un parametro reale k, diciamo **fascio di circonferenze generato dalle due circonferenze,** la totalità dei punti del piano che verificano l'equazione $(x^2 + y^2 + ax + by + c) + k \cdot (x^2 + y^2 + a'x + b'y + c')= 0$, nonché la circonferenza $x^2 + y^2 + a'x+ b'y + c' = 0$.

Ancora una volta, come nel caso delle rette, dobbiamo aggiungere una delle generatrici, quella che viene moltiplicata per il parametro, perché diversamente non la troveremmo per nessun valore del parametro.
Vale il seguente risultato.

Teorema 3

Dato un fascio di circonferenze, esso può essere espresso mediante due qualsiasi delle circonferenze di cui è formato.
Dimostrazione Omessa

Piuttosto che dimostrare il risultato precedente consideriamo un esempio, a partire dal quale può effettuarsi la dimostrazione.

Esempio 8

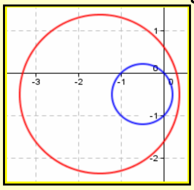
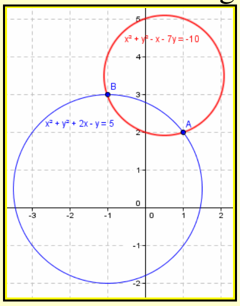
Il fascio di circonferenze di equazione $(x^2 + y^2 + x + y) + k \cdot (x^2 + y^2 + 3x + y - 1) = 0$, si può esprimere anche come il fascio $(2x^2 + 2y^2 + 4x + 2y - 1) + k \cdot (3x^2 + 3y^2 + 7x + 3y - 2) = 0$, formato dalle circonferenze che si ottengono assegnando nel fascio iniziale a k i valori rispettivi 1 e 2. Il primo fascio contiene per esempio la circonferenza $(x^2 + y^2 + x + y) + (-2)\cdot (x^2 + y^2 + 3x + y - 1) = 0$, cioè $-x^2 - y^2 - 5x - y + 2 = 0$, che può anche scriversi $x^2 + y^2 + 5x + y - 2= 0$. Perché si possa ottenere questa equazione nel secondo fascio, intanto lo riscriviamo nel modo seguente: $(2 + 3k)\, x^2 + (2 + 3k)\, y^2 + (4 + 7k)\, x + (2 + 3k)\, y - 1 - 2k = 0$, o meglio: $x^2 + y^2 + \frac{4+7k}{2+3k}x + y - \frac{1+2k}{2+3k} = 0$, deve allora esistere un valore di k per cui i coefficienti delle stesse incognite siano uguali. Deve essere quindi: $\begin{cases} \frac{4+7k}{2+3k} = 5 \\ \frac{1+2k}{2+3k} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -\frac{3}{4} \\ k = -\frac{3}{4} \end{cases}$. Poiché abbiamo ottenuto lo stesso valore di k, abbiamo provato quello che volevamo dimostrare.

Abbiamo visto che i fasci di rette possono avere un centro o essere formati da rette tutte fra loro parallele, cosa accadrà per le circonferenze? Un fatto analogo, ossia se le generatrici sono secanti tutte le circonferenze del fascio lo saranno e negli stessi punti, se sono tangenti ugualmente e analogo risultato se non hanno punti comuni.

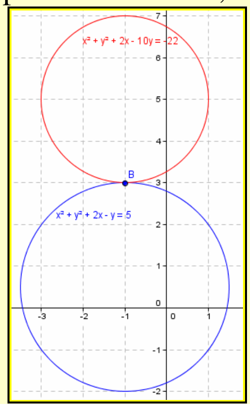
Definizione 3

Gli eventuali punti comuni a tutte le circonferenze di un fascio si chiamano **punti base del fascio**.

Esempio 9

- Il fascio di circonferenze di equazione $(x^2 + y^2 + x + y) + k \cdot (x^2 + y^2 + 3x + y - 1) = 0$, non ha punti base perché le circonferenze generatrici, come mostrato nel grafico, o come può vedersi risolvendo un sistema,  non hanno punti in comune.
- Il fascio di circonferenze di equazione $(x^2 + y^2 - x - 7y + 10) + k \cdot (x^2 + y^2 + 2x - y - 5) = 0$ ha come punti base $A \equiv (1; 2)$ e $B \equiv (-1; 3)$, perché le circonferenze generatrici, come mostrato nel grafico, o come può 

vedersi risolvendo un sistema, hanno tali punti in comune.
- Il fascio di circonferenze di equazione $(x^2 + y^2 + 2x - 10y + 22) + k \cdot (x^2 + y^2 + 2x - y - 5) = 0$ ha un solo punto base $B \equiv (-1; 3)$, perché le circonferenze generatrici, come mostrato nel grafico, o come può vedersi risolvendo un sistema, hanno tale punto in comune, cioè sono un fascio di circonferenze tangenti.



Osserviamo anche che, sia che le circonferenze abbiano uno o due punti base, i centri delle circonferenze sono allineati, perché nel caso di due punti base sappiamo che l'asse di una qualsiasi corda passa per il centro. Nel caso delle circonferenze tangenti sappiamo che la retta tangente è perpendicolare al diametro passante per il punto di tangenza. Se le circonferenze non hanno punti base reali o i centri sono allineati o le circonferenze sono concentriche. Nel secondo caso infatti dato che abbiamo detto che il fascio è determinato da due qualsiasi sue circonferenze se i centri non fossero allineati potremmo generare fasci a partire da circonferenze che hanno centri su diverse rette e perciò possono avere punti in comune.

Definizione 4

La retta cui appartengono i centri delle circonferenze di un fascio di circonferenze non concentriche si chiama **asse centrale del fascio**.

Ogni fascio di circonferenze secanti contiene una circonferenza che degenera nella retta passante per i punti base. Lo stesso accade per un fascio di circonferenze tangenti, la cui circonferenza degenere è la retta tangente comune.

Esempio 10

- Abbiamo già visto che il fascio di equazione $(x^2 + y^2 - x - 7y + 10) + k \cdot (x^2 + y^2 + 2x - y - 5) = 0$ ha punti base $(1; 2)$ e $(-1; 3)$. Esso può scriversi $(1 + k) \cdot x^2 + (1 + k) \cdot y^2 + (2k - 1) \cdot x - (7 + k) \cdot y + 10 - 5k = 0$, in tal modo si vede subito che la sua circonferenza degenere si ottiene annullando i termini di secondo grado, cioè ponendo $k = -1$, ed è perciò $3x + 6y - 15 = 0$, o $x + 2y - 5 = 0$. Questa retta ovviamente contiene i punti base, e perciò poteva trovarsi come retta per i detti punti.

- Il fascio di circonferenze di equazione $(1 + k) \cdot x^2 + (1 + k) \cdot y^2 + 2 \cdot (k + 1) \cdot x - (10 + k) \cdot y + 22 - 5k = 0$, ha il solo punto base $(-1; 3)$. La sua circonferenza degenere si ottiene per $k = -1$, ed è $y = 3$, che è la retta tangente a tutte le circonferenze del fascio. Osserviamo che il centro della generica circonferenza del fascio ha coordinate $\left(1; \frac{10+k}{2+2k}\right)$, quindi la retta diametrale passante per il punto base ha equazione $x = 1$, che è perpendicolare alla retta precedente.
- Il fascio di circonferenze di equazione $(1 + k) \cdot x^2 + (1 + k) \cdot y^2 + (3k + 1) \cdot x + (1 + k) \cdot y - k = 0$ non ha punti base. La sua circonferenza degenere è $4x + 1 = 0$, mentre l'asse centrale è $y = -\frac{1}{2}$ e le due rette sono perpendicolari.

Possiamo porre un'ulteriore definizione.

Definizione 5

La circonferenza degenere di un fascio di circonferenze non concentriche si chiama **asse radicale del fascio**, essa è perpendicolare all'asse centrale.

Teorema 4

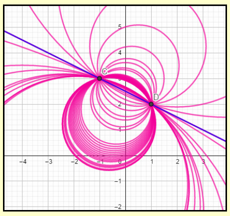
L'asse radicale del fascio di circonferenze $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ e $x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0$, ha equazione $(a - a')\, x + (b - b')\, y + c - c' = 0$.
Se le circonferenze sono

- secanti, è la retta che contiene i punti base;
- tangenti, è la tangente comune alle circonferenze;

Dimostrazione Per esercizio.

Esempio 11

Per il fascio di equazione $(x^2 + y^2 - x - 7y + 10) + k \cdot (x^2 + y^2 + 2x - y - 5) = 0$, grazie al teorema precedente possiamo dire che l'asse radicale ha equazione $(-1 - 2) \cdot x + (-7 + 1) \cdot y + 10 + 5 = 0$, cioè $3x + 6y + 15 = 0$, che si semplifica in $x + 2y - 5 = 0$. Questo risultato coincide con quello già trovato in altro modo nell'esempio 10. In figura mostriamo quel che accade:

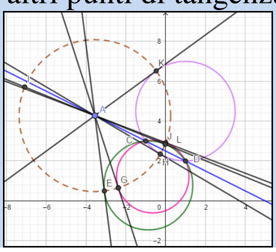


Vale il seguente risultato più generale.

Teorema 5

L'asse radicale di un fascio di circonferenze è il luogo dei punti del piano per cui i segmenti di tangenza condotti a una qualsiasi delle circonferenze del fascio sono uguali.

Dimostrazione Omessa. Mostriamo solo una figura, in cui abbiamo tracciato la circonferenza che ha centro in un punto dell'asse radicale e passante per uno dei punti di tangenza con una qualsiasi circonferenze del fascio, verifichiamo che passa anche per gli altri punti di tangenza con tre circonferenze del fascio.



Verifiche

Lavoriamo insieme

Studiare il fascio di coniche di equazione: $(3k + 1) \cdot x^2 + (3k + 1) \cdot y^2 - 2 \cdot (k - 1) \cdot x + 4y - k = 0$.

È facile riconoscere che abbiamo a che fare con circonferenze, dato che sono verificate le condizioni che caratterizzano tale conica, ossia l'uguaglianza dei coefficienti dei termini di secondo grado e la mancanza del termine xy. Osserviamo però che se $3k + 1 = 0$, cioè se $k = -1/3$, non abbiamo una circonferenza ma una retta: $-2\cdot\left(-\frac{1}{3}-1\right)x+4y-\left(-\frac{1}{3}\right)=0 \Rightarrow 8x + 12y + 1 = 0$, ossia otteniamo una conica degenere, l'unica del fascio. Sappiamo inoltre che vi è una condizione da verificare affinché si ottengano solo circonferenze reali. Scriviamo intanto l'equazione nella forma adatta ad applicare la formula, ossia con i coefficienti direttori unitari: $x^2+y^2-2\cdot\frac{k-1}{3k+1}\cdot x+\frac{4}{3k+1}\cdot y-\frac{k}{3k+1}=0$. Si deve verificare:

$$\left(-2\cdot\frac{k-1}{3k+1}\right)^2+\left(\frac{4}{3k+1}\right)^2-4\cdot\frac{-k}{3k+1}>0\Rightarrow\frac{4\cdot(k-1)^2}{(3k+1)^2}+\frac{16}{(3k+1)^2}+\frac{4k\cdot(3k+1)}{(3k+1)^2}>0\Rightarrow$$

$$4k^2-8k+4+16+12k^2+4k>0\Rightarrow16k^2-4k+20>0\Rightarrow4k^2-k+5>0\Rightarrow\Delta<0\Rightarrow\forall k\in\mathbb{R}.$$

Si hanno sempre circonferenze reali.

- *Vediamo adesso se nel fascio ci sono circonferenze passanti per il punto* $P \equiv (-3; 1)$.
  Imponiamo che P stia sul fascio: $(3k + 1) \cdot (-3)^2 + (3k + 1) \cdot 1^2 - 2 (k - 1) \cdot (-3) + 4 - k = 0 \Rightarrow 35k + 8 = 0 \Rightarrow k=-\frac{8}{35}$. Otteniamo così la circonferenza $11x^2 + 11y^2 + 86x + 140y + 8 = 0$.
- *Vi sono circonferenze con centro in un punto di ascissa* 2?
  La generica ascissa del centro è $\frac{k-1}{3k+1}$, deve perciò essere $\frac{k-1}{3k+1}=2\Rightarrow k=-\frac{3}{5}$, quindi: $4x^2 + 4y^2 - 16x - 20y - 3 = 0$.
- *Infine stabiliamo se vi sono punti base reali*.
  Per far ciò raccogliamo il parametro k: $(3x^2 + 3y^2 - 2x - 1) \cdot k + (x^2 + y^2 + 2x + 4y) = 0$.Affinché un punto appartenga a questa generica circonferenza dobbiamo trovare i valori, se esistono, che annullano il coefficiente di k e l'altro termine, ossia l'eventuale soluzione reale del sistema: $\begin{cases}3x^2+3y^2-2x-1=0\\x^2+y^2+2x+4y=0\end{cases}$.
  Lasciamo per esercizio la risoluzione, che conduce ai seguenti risultati: $\begin{cases}x=\frac{10-3\cdot\sqrt{79}}{52}\\y=-\frac{11-2\cdot\sqrt{79}}{52}\end{cases}\wedge$ $\begin{cases}x=\frac{10+3\cdot\sqrt{79}}{52}\\y=-\frac{11+2\cdot\sqrt{79}}{52}\end{cases}$, che sono perciò le coordinate dei punti base.

Nei seguenti fasci di circonferenze determinare i valori del parametro reale k per i quali si hanno circonferenze: a) che degenerano in rette; b) reali; c) passanti per un punto dato P; d) con un centro C di cui è nota una sola coordinata; e) trovare infine gli eventuali punti base reali del fascio.

Livello 2

1. $(5k + 1) \cdot x^2 + (5k + 1) \cdot y^2 - 6 \cdot (k + 1) \cdot x - 2y + k = 0$, $P \equiv (2; -1)$, $C \equiv (x; -2)$
$$\left[\text{a) } k=-\frac{1}{5};\ \text{b) } k<-\frac{17+\sqrt{129}}{8}\vee k>\frac{\sqrt{129}-17}{8}\wedge k\neq-\frac{1}{5};\text{c) } k=\frac{5}{14};\ \text{d) } k=-\frac{3}{10};\ \text{e) }\varnothing\right]$$

2. $(3k-1)\cdot x^2+(3k-1)\cdot y^2-2\cdot(k-1)\cdot x+4y-k=0$, $P\equiv(0;3)$, $C\equiv(-3;y)$

$$\left[\text{a) } k=\frac{1}{3};\ \text{b) } \forall k\in\mathbb{R};\text{c) } k=-\frac{3}{26};\ \text{d) } k=\frac{2}{5};\ \text{e) } \left(\frac{13\pm 3\cdot\sqrt{71}}{40};\frac{-1\mp\sqrt{71}}{40}\right)\right]$$

3. $(2k+1)\cdot x^2+(2k+1)\cdot y^2-2x+(k+3)\cdot y+3k=0$, $P\equiv(1;1)$, $C\equiv(0;y)$

$$\left[\text{a) } k=-\frac{1}{2};\ \text{b) } -\frac{37+\sqrt{5789}}{170}<k<\frac{\sqrt{5789}-37}{170}\wedge k\neq-\frac{1}{2};\text{c) } k=-\frac{3}{8};\text{ d) }\varnothing;\text{ e) }\varnothing\right]$$

4. $(5k-2)\cdot x^2+(5k-2)\cdot y^2-(k-1)\cdot x-4\cdot(k-2)\cdot y+k=0$; $P\equiv(-2;0)$; $C\equiv(x;-3)$.

$$\left[\text{a) } k=\frac{2}{5};\ \text{b) } -\frac{29+2\cdot\sqrt{259}}{3}<k<\frac{2\cdot\sqrt{259}-29}{3}\wedge k\neq\frac{2}{5};\text{c) } k=\frac{10}{23};\ \text{d) } k=\frac{10}{17};\text{ e) }\varnothing\right]$$

5. $(k+5)\cdot x^2+(k+5)\cdot y^2-8\cdot(k-3)\cdot x-k-1=0$, $P\equiv(-1;2)$, $C\equiv(x;0)$

$$\left[\text{a) } k=-5;\ \text{b) } \forall k\in\mathbb{R};\text{c) } k=0;\ \text{d) } \forall k\in\mathbb{R}\setminus\{-5\};\text{ e) }\left(-\frac{1}{16};\pm\frac{\sqrt{127}}{16}\right)\right]$$

Lavoriamo insieme

Scrivere un'equazione che rappresenti tutte le circonferenze che hanno il centro in $C\equiv(1;3)$.
Facilmente otteniamo $(x-1)^2+(y-3)^2=r^2$, ossia un fascio di circonferenze concentriche, in cui otteniamo ciascuna circonferenza assegniamo a r qualsiasi numero reale positivo.

Costruire i fasci di circonferenze aventi le circonferenze generatrici indicate, determinarne poi asse centrale e asse radicale

Livello 1

6. $x^2+y^2-1=0$ e $x^2+y^2-2=0$ $[\varnothing;\varnothing]$
7. $x^2+y^2+y+1=0$ e $x^2+y^2-x=0$ $[2x-2y-1=0;\ x+y+1=0]$
8. $x^2+y^2+x-y+1=0$ e $x^2+y^2-2=0$ $[x+y=0;\ x-y+3=0]$
9. $x^2+y^2+x-y+1=0$ e $x^2+y^2-x+y-1=0$ $[x+y=0;\ x-y+1=0]$
10. $2x^2+2y^2+3x-4=0$ e $3x^2+3y^2-2x=0$ $[y=0;\ 13x-12=0]$
11. $x^2+y^2+3x-2y=0$ e $3x^2+3y^2-x+4y-5=0$ $[2x+2y+1=0;\ 2x-2y+1=0]$

Livello 2

12. Circonferenza di centro O e $R=2$; Circonferenza di centro $(1;2)$ e $R=2$. $[2x-y=0;\ 2x+4y-5=0]$
13. Circonferenze passanti per $(1;2)$ e $(2;1)$ e raggio $\sqrt{5}$. $[x+y=0;\ x-y-3=0]$
14. Circonferenze tangenti esternamente in $(1;2)$, e raggi 1 e 2. $[x=1;\ y=2]$
15. Circonferenze tangenti internamente in $(1;2)$, e raggi 1 e 2. $[x=1;\ y=2]$
16. Circonferenze di centro O e raggi 2 e 3. $[\varnothing;\varnothing]$

Scrivere le equazioni dei fasci di circonferenze che verificano quanto richiesto (le risposte non sono "assolute", ma possono avere forme diverse, a seconda delle circonferenze generatrici scelte)

Livello 3

17. Con centro in $(-3;1)$ $[x^2+y^2+6x-2y+h=0,\ h<10]$
18. Di raggio 3 e centro in un punto di ordinata 4 $[x^2+y^2+2hx-8y+7+h^2=0]$
19. Con centro appartenente all'asse delle ascisse e raggio 2 $[x^2+y^2+2hy+h^2-4=0]$
20. Passanti per l'origine degli assi e raggio 3 $[(1+h)x^2+(1+h)y^2-6hx-6y=0]$
21. Con centro appartenente all'asse delle ordinate e passante per l'origine $[x^2+y^2+ax=0]$
22. Passanti per i punti $(-3;0)$ e $(3;-1)$ $[3x^2+3y^2+(h+9)x+3(2h+19)y+3h=0]$
23. Con centro in un punto di ascissa 2 e avente la retta $y=x-2$ come una delle sue tangenti. $[8x^2+8y^2-32x+8hy+h^2+32=0]$
24. Passanti per $(3;-2)$ e aventi il centro sulla retta di equazione $2x-3y+1=0$. $[5x^2+5y^2-(3h+43)x-2(h+16)y+5h=0]$
25. Verificare che l'asse radicale dei fasci di circonferenze degli esercizi da 7 a 11, verificano quanto affermato dal Teorema 5.

L'angolo della MateFisica

Il moto circolare uniforme è il movimento di un punto materiale con velocità di modulo costante, la cui traiettoria è appunto una circonferenza. Quindi si ha: $v = \frac{2\pi r}{T}$, in cui ***r*** è il raggio della circonferenza e ***T*** è il cosiddetto *periodo*, ossia il tempo costante, che il corpo impiega per compiere un giro completo della circonferenza. Tale velocità viene anche detta *tangenziale*. Possiamo anche parlare di *velocità angolare* ω, ossia del rapporto fra l'arco di circonferenza tracciato (misurato in radianti) e il tempo in cui esso viene tracciato: $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Facilmente abbiamo la seguente relazione fra le due velocità: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}$.

Nonostante la costanza del modulo della velocità possiamo ugualmente parlare di un'accelerazione, dato che abbiamo la variazione, a ogni istante, della direzione della detta velocità. Tale accelerazione si chiama *centripeta*, perché la sua direzione è quella della retta diametrale che passa per il punto, quindi è diretta verso il centro. In effetti possiamo anche parlare di un'accelerazione *centrifuga*, ossia che *fugge dal centro*, che però, finché il corpo si mantiene sulla traiettoria è perfettamente equilibrata da quella centripeta.

Del resto una semplice esperienza ci convince del fatto. Prendiamo un laccio e a un'estremità leghiamo un sasso o comunque un oggetto di massa non trascurabile, e lo facciamo girare velocemente, tenendolo per l'altra estremità. Se la velocità è *notevole*, abbiamo la sensazione che il laccio voglia *fuggire* dalla nostra mano; viceversa, se giriamo troppo lentamente, il laccio tende a ricadere verso la nostra mano, che rappresenta appunto il centro della circonferenza.

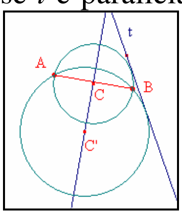
Il valore del modulo di tali accelerazioni è in ogni caso pari a $|a_c| = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$, in cui ***v*** è il modulo costante della velocità e ***r*** è il raggio della circonferenza descritta.

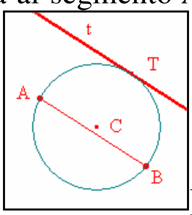
Attività

1. Calcolare il modulo della velocità tangenziale e angolare e dell'accelerazione centripeta, di un corpo che percorre a velocità costante una circonferenza di raggio $r = 4{,}2\ m$ in $5{,}4\ s$.
[$\boldsymbol{v_t} \approx 4{,}9\ m/s$; $\boldsymbol{\omega} \approx 1{,}2\ rad/s$; $\boldsymbol{a_c} \approx 5{,}7\ m/s^2$]
2. La Terra compie un'orbita ellittica nel suo moto attorno al Sole, per semplicità la consideriamo circolare di raggio $1{,}5 \cdot 10^{11}\ m$. Calcolare il modulo della velocità tangenziale e dell'accelerazione centripeta.
[$\boldsymbol{v} \approx 3{,}0 \cdot 10^5\ m/s$; $\boldsymbol{a_c} \approx 5{,}9 \cdot 10^{-3}\ m/s^2$]
3. Supponiamo circolare il moto di rivoluzione della Luna attorno alla Terra. Se il modulo della sua accelerazione centripeta è $\boldsymbol{a_c} \approx 2{,}7 \cdot 10^{-3}\ m/s^2$ e il periodo è di circa 27, 3 giorni, calcolare il raggio dell'orbita. [$\boldsymbol{r} \approx 3{,}84 \cdot 10^8\ m$]
4. Calcolare la velocità angolare e tangenziale della lancetta dei minuti di un orologio analogico,il cui quadrante ha un raggio di circa $1{,}4\ cm$. [$\boldsymbol{\omega} \approx 0{,}0017\ rad/s$; $\boldsymbol{v_t} \approx 2{,}4 \cdot 10^{-5}\ m/s$]
5. La centrifuga di una lavatrice ha un cestello di diametro $60\ cm$, se il modulo dell'accelerazione centripeta di un punto che si trova sul bordo del cestello è $\boldsymbol{a_c} \approx 6{,}5 \cdot 10^3\ m/s^2$, calcolare quanti giri al minuto compie. [circa 1406]

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi

1. Risolvere geometricamente il problema di determinare la circonferenza passante per due punti A e B e tangente a una retta t, al variare delle reciproche posizioni di A, B e t.
[Se A e B non appartengono entrambi a uno dei semipiani determinati da t il problema non ha soluzioni; diversamente, se t è parallela al segmento AB, c'è una sola circonferenza, se non è parallela ci sono 2 circonferenze 



]

2. Sulla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 1 = 0$, siano $A \equiv (0; 1)$ e $B \equiv \left(h; \pm\sqrt{1-h^2}\right), -1 \le h \le 1$, due suoi punti. Si determini il luogo dei punti medi della corda AB al variare di B sulla circonferenza.
[$x^2 + y^2 - y = 0$]

3. Data la circonferenza Γ di equazione $x^2 + y^2 - 4 = 0$, sia il punto $A \equiv (1; 2)$ esterno a essa, $B \in \Gamma$. Si determini il luogo dei punti medi del segmento AB al variare di B su Γ. [$4x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 1 = 0$]

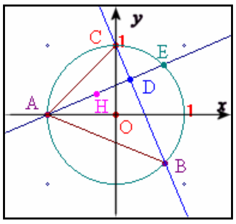
4. CAS Determinare l'equazione del luogo dei punti le cui distanze dai punti $P \equiv (x_P; y_P)$, $Q \equiv (x_Q; y_Q)$, hanno un dato rapporto $k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\}$. Tale cerchio si chiama cerchio di Apollonio.
[$(k^2 - 1) \cdot x^2 + (k^2 - 1) \cdot y^2 + 2 \cdot (x_P - k^2 x_Q) \cdot x + 2 \cdot (y_P - k^2 y_Q) \cdot y + k^2 \cdot (x_Q^2 + y_Q^2) - x_P^2 - y_P^2 = 0$]

5. CAS Determinare l'equazione del cerchio di Roberval luogo dei punti per cui la somma dei quadrati delle distanze da due punti dati $P \equiv (x_P; y_P)$, $Q \equiv (x_Q; y_Q)$,è costante e vale k.
[$2x^2 + 2y^2 - 2 \cdot (x_P + x_Q) \cdot x - 2 \cdot (y_P + y_Q) \cdot y - k + x_Q^2 + y_Q^2 + x_P^2 + y_P^2 = 0$]

6. CAS Luogo dei punti per i quali è uguale a k la somma dei quadrati delle distanze dalle rette di equazioni $ax + by + c = 0$ e $bx - ay + d = 0$.
[$(a^2 + b^2)\, x^2 + (a^2 + b^2)\, y^2 + 2\, (ac + bd)\, x + 2\, (bc - ad)\, y - k\, (a^2 + b^2) + c^2 + d^2 = 0$]

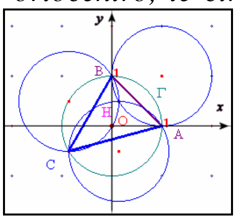
Verificare la validità dei seguenti teoremi

7. *Dato un triangolo ABC, sia H il suo ortocentro, e Γ la circonferenza a esso circoscritta. Sia r la retta contenente una qualsiasi altezza di ABC, per esempio quella passante per A.Siano D ed E le intersezioni rispettive di r con la retta contenente il lato opposto BC, e con Γ. Allora D è punto medio di HE.*



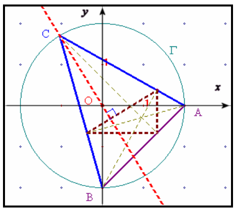
Usare i dati:$A \equiv (-1;0)$, $C \equiv (0; 1)$, $\Gamma : x^2 + y^2 = 1$, B variabile su Γ

8. CAS *Dato un triangolo ABC, sia H il suo ortocentro, le circonferenze circoscritte ai triangoli ABC, HBC, HAC, HAB, hanno lo stesso raggio.*



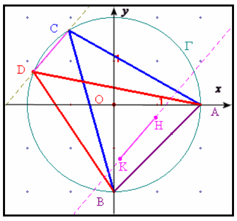
Usare i dati: $A \equiv (1; 0)$, $B \equiv (0; 1)$, Γ: $x^2 + y^2 = 1$, C variabile su Γ

9. *Il raggio della circonferenza Γ circoscritta ad ABC, avente per estremo uno dei vertici è perpendicolare al corrispondente lato del triangolo ortico (Il triangolo ortico ha per vertici i piedi delle altezze di ABC).*



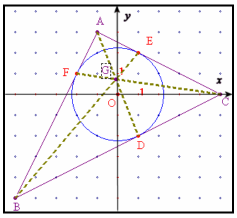
Usare i dati: $A \equiv (2; 0)$, $B \equiv (0; 2)$, $\Gamma : x^2 + y^2 = 4$, C variabile su Γ

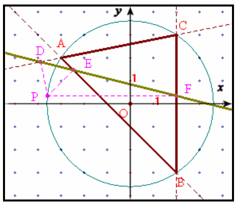
10. CAS *Dati due triangoli ABC e BCD, inscritti nella stessa circonferenza Γ, di ortocentri H e K. Allora i segmenti HK e AD sono uguali e paralleli.*



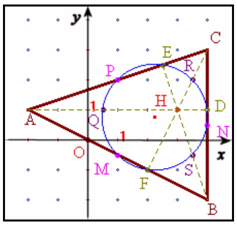
Usare i dati $A \equiv (2; 0)$, $B \equiv (0; -2)$, $\Gamma : x^2 + y^2 = 4$, C e D variabili su Γ

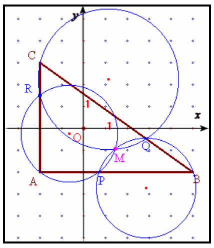
11. CAS *Dato un triangolo ABC, siano D, E e F i punti dei segmenti AB, AC e BC rispettivamente, che sono comuni al cerchio inscritto in ABC*. I segmenti AD, BE e CF si incontrano in punto, detto di Gergonne.

 Usare i dati: $A \equiv (-1; 3)$, $B \equiv (-5; -5)$, $C \equiv (0; 5)$

12. CAS *Dato un triangolo ABC, sia P un qualsiasi punto della circonferenza Γ circoscritta ad ABC. Verificare che D, E, F, proiezioni di P sui lati di ABC o sui loro prolungamenti, sono allineati. La retta che li contiene si chiama di Wallace.* 

Usare i dati: $B \equiv (0; -3)$, $C \equiv (0; 3)$, $\Gamma : x^2 + y^2 = 4$, A variabile su Γ

13. CAS *Consideriamo un triangolo ABC; detti D, E e F i piedi delle sue altezze, M, N e P i punti medi dei suoi lati e Q, R, S i punti medi dei segmenti che hanno per estremi i vertici e l'ortocentro, vogliamo far vedere che i nove punti precedenti stanno su una stessa circonferenza, detta circonferenza di Eulero o anche di Feuerbach.*  Usare i dati: $A \equiv (-2; 0)$, $B \equiv (4; -2)$, $C \equiv (4; 3)$

14. CAS *Dato il triangolo ABC, si scelgano sui suoi lati tre punti a caso, P, Q, R (rispettivamente su AB, BC, AC), allora le circonferenze circoscritte ai triangoli APR, BPQ, CPR, si incontrano in uno stesso punto.*  Usare i dati: $A \equiv (-2; -2)$, $B \equiv (5; -2)$, $C \equiv (-2; 3)$

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi

1. (Liceo scientifico 1980/81) In un sistema di assi cartesiani ortogonali si scrivano le equazioni delle due circonferenze passanti per l'origine O ed aventi i centri rispettivamente in $C' \equiv (2; 0)$ e $C''\left(-\frac{1}{2};0\right)$
Condotte per il punto O due rette mutuamente ortogonali, delle quali la prima incontra le due circonferenze, oltre che nel punto O, nei punti A e B rispettivamente e la seconda nei punti C e D, esprimere l'area del quadrilatero $ACBD$ mediante il coefficiente angolare m di una delle due rette.
$$\left[f(m) = \frac{25m}{2\cdot\left(1+m^2\right)},\ m>0\right]$$

2. (Liceo scientifico 1990/91) Si considerino due circonferenze di centri A e A', e, rispettivamente, di raggi 9 e 1, tangenti esternamente nel punto O. Sia r la tangente comune in O e s una retta tangente a entrambe le circonferenze rispettivamente nei punti B e B'. Detto C il punto d'intersezione delle rette r

e *s*, si dimostri che i triangoli *ACA′* e *BOB′* sono rettangoli e si calcoli il rapporto delle loro aree. $\left[\frac{25}{9}\right]$

3. (Liceo scientifico suppletiva 1990/91) In un piano ortogonale *Oxy* si consideri nel primo quadrante la circonferenza di raggio unitario tangente ai due assi coordinati. Detta *r* una retta passante per l'origine e secante la circonferenza nei punti *A* e *B*, si determini, in funzione del coefficiente angolare *m* di *r*, l'area del triangolo *ABC*, essendo *C* il centro della circonferenza. $\left[\frac{\sqrt{2m}\cdot|m-1|}{1+m^2}\right]$

4. (Liceo scientifico 1991/92) Data una circonferenza γ di raggio unitario e centro *O*, tracciare una semiretta *s* uscente da *O* e intersecante γ in un punto *Q*. Indicato con *P* un generico punto di *s* esterno alla circonferenza γ, tracciare da esso le due tangenti alla circonferenza: siano *A* e *B* i punti di tangenza. Indicata con *x* la lunghezza del segmento *PQ*, trovare il valore del rapporto $k=\frac{\overline{AQ}+\overline{QB}}{\overline{AB}}$. $\left[\sqrt{\frac{2\cdot(1+x)}{x+2}}\right]$

5. (Liceo scientifico suppletiva 1991/92) Dati i due punti $A \equiv (-1; 0)$ e $B \equiv (1; 0)$ determinare il luogo dei punti $P \equiv (x; y)$ tali che $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=K$, con $K > 0$. Descrivere le caratteristiche delle curve trovate come luogo. Trovato, per $K \neq 1$, il centro *C* di tali curve in funzione di *K*, studiare l'andamento dell'ascissa del centro di tali curve al variare di *K*. $\left[x^2+y^2+2\cdot\frac{1+K^2}{1-K^2}x+1=0; C\equiv\left(\frac{1+K^2}{K^2-1};0\right)\right]$

6. (Liceo scientifico suppletiva PNI 1991/92) Si consideri in un piano cartesiano ortogonale *Oxy* la circonferenza di centro $A \equiv (1; 0)$, passante per l'origine degli assi. Detta *r* la retta di equazione $y = mx$, sia *OPQ* il triangolo rettangolo inscritto nella circonferenza il cui cateto *OP* appartiene alla retta *r*. Si determini l'area *f*(*m*) del rettangolo avente come lati i cateti del triangolo *OPQ*. $\left[f(m)=\frac{4m}{m^2+1}\right]$

7. (Maturità magistrale PNI 1993/94) In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy* si considerino la circonferenza *C* di equazione $x^2 + y^2 - 2y = 0$ e la curva *C*', ottenuta come trasformata mediante l'omotetia *T* di equazione: $\begin{cases} X=2x+2 \\ Y=2y \end{cases}$. Sia *P* il punto d'intersezione di *C* e *C*' appartenente all'asse delle ordinate. Si conduca per *P* una retta *r* e siano *PQ* e *PR* le corde intercettate da *r* su *C* e su *C*'. Si determini, la quarta parte della somma dei quadrati delle misure delle due corde. Si determinino il centro e il valore del rapporto dell'omotetia *T*. $\left[f(x)=\frac{x^2+4}{x^2+1}; C\equiv(-2;0); k=2\right]$

8. (Liceo scientifico 1993/94) Considerato un triangolo *ABC*, isoscele sulla base *BC*, indicare con *D* il piede della sua altezza condotta per *C* e costruire il triangolo *ECD*, isoscele sulla base *CD* e simile a quello dato, in modo che il punto *E* cada dalla stessa parte di *A* rispetto a *BC*. Sia: $\overline{BC}=4$ e $\overline{CD}=2\cdot\sqrt{3}$ Dimostrare che l'angolo $E\hat{C}B$ è retto. Riferito il piano della figura a un conveniente sistema di assi cartesiano ortogonali, trovare l'equazione della circonferenza *K* passante per i punti *A*, *C*, *D*. Spiegare perché *K* passa pure per *E*. Detto *F* il punto in cui *K* seca ulteriormente *CB*, calcolare le aree delle due regioni piane in cui il minore degli archi *DF* di *K* divide il quadrilatero *ABCE*. Si usi il sistema in cui le ascisse sono la retta per *BC* e le ordinate la retta per l'asse di *BC*.
$\left[(x-1)^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2-4=0; 2\cdot\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi; 4\cdot\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi\right]$

9. (Liceo scientifico suppletiva 1996/97) Data una semicirconferenza di centro *O* e diametro $\overline{AB}=2$, si tracci la tangente *t* a detta semicirconferenza nel punto *A*. Preso un punto *P* sulla semicirconferenza, si tracci la perpendicolare *PH* alla retta *t*. Dimostrare che la semiretta *PA* è bisettrice dell'angolo $H\hat{P}O$. Posto $\overline{PH}=x$ esprimere in funzione di *x* l'area *y* del quadrilatero *AOPH*. $\left[f(x)=\frac{1}{2}\cdot(x+1)\cdot\sqrt{2x-x^2}\right]$

10. (Liceo scientifico suppletiva 1996/97) Due circonferenze concentriche γ_1, γ_2 di centro *C* hanno raggio

rispettivamente uguale a x e a 1 , con $x < 1$. Da un punto P di γ_2 tracciare le tangenti a γ_1. Siano Q e R i due punti di tangenza. Determinare la funzione $y = f(x)$ che rappresenta l'area del triangolo PQR in funzione di x. $\left[y = x \cdot \sqrt{\left(1-x^2\right)^3}\right]$

11. (Liceo scientifico PNI 1996/97) In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy sia r la retta di equazione $x - 1 = 0$ e P un suo punto. Siano A e B i punti d'intersezione della retta OP con la circonferenza di centro P e raggio $2 \cdot \sqrt{2}$. Il candidato determini i luoghi descritti da A e da B, rispettivamente, al variare del punto P su r. $\left[f_1(x) = \frac{x}{x+1} \cdot \sqrt{-x^2+2x+7}\ ; f_2(x) = \frac{x}{x-1} \cdot \sqrt{-x^2+2x+7}\right]$

12. (Liceo scientifico PNI 1999/2000) Nel piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnati i punti: $A \equiv (0; 2)$, $B \equiv (1; 1)$, $C \equiv (1; 0)$. a) Trovare l'equazione della circonferenza γ inscritta nel triangolo OAB. $\left[x^2 + y^2 + 2 \cdot \left(1-\sqrt{2}\right) x - 2y + 1 = 0\right]$ b) Determinare le equazioni dell'affinità α che ha come punti uniti i punti O e C e trasforma il punto B nel punto A. $\left[\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2y \end{cases}\right]$ c) Calcolare l'area del triangolo CAA', dove A' è il punto trasformato di A nell'affinità α. [1] d) Stabilire se l'affinità α ha altri punti uniti, oltre ad O e C, e trovare le sue rette unite. [(x; 0), $x + y + k = 0$] e) Stabilire quali, fra le rette unite trovate, risultano tangenti o esterne a γ.

[Tangenti per $k \le 2$, esterne per $k \ge 2 \cdot \left(1-\sqrt{2}\right)$]

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.

AHSME = Annual High School Mathematics Examination

MT = Mathematics Teacher, rivista della NCTM

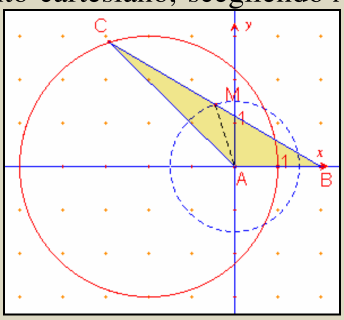
HSMC = A&M University High School Mathematics Contest

OMI = Olimpiadi della Matematica.

Lavoriamo insieme

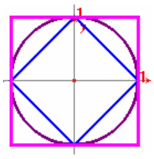
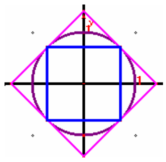
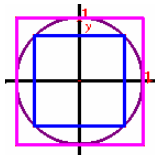
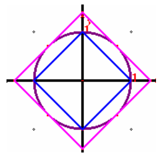
Consideriamo un quesito assegnato agli AHSME del 1950. *Un triangolo ha un lato AB lungo* 2. *La mediana relativa a BC è lunga* 1,5. *Che figura è il luogo descritto dal terzo vertice*?

Rappresentiamo il tutto su un riferimento cartesiano, scegliendo $A \equiv (0; 0)$ e $B \equiv (2; 0)$. Il terzo vertice ha coordinate generiche: $C \equiv (x; y)$.



Quindi il punto medio di BC sarà $M \equiv \left(\frac{x}{2}+1; \frac{y}{2}\right)$, e la mediana $AM = \sqrt{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+4x+4}}{2}$. Il luogo quindi si ha per AM = 1,5. Ed ha equazione $\frac{x^2+y^2+4x+4}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$, che rappresenta la circonferenza di centro (–2; 0) e raggio 3.

1. (AHSME 1973) Quale delle seguenti figure è la rappresentazione in un piano cartesiano ortogonale delle soluzioni delle disuguaglianze $|x|+|y| \le \sqrt{2\cdot\left(x^2+y^2\right)} \le 2\cdot max(|x|,|y|)$. [B]

A)  B)  C)  D)  E) Nessuno dei precedenti

2. (AHSME 1979) Determinare l'area della minore fra le regioni limitate dalla curve di equazioni $y = |x|$ e $x^2 + y^2 = 4$. [π]
3. (AHSME 1994) Il punto $P \equiv (x; 15)$ appartiene alla circonferenza che ha per diametro il segmento di estremi $A \equiv (-5; 0)$, $B \equiv (25; 0)$. Determinare x. [10]
4. (AHSME 1996) Nel piano cartesiano quanto misura il cammino più breve tra i punti (0; 0) e (12; 16) che non attraversa la circonferenza $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 25$? $\left[10\cdot\sqrt{3}+\frac{5\pi}{3}\right]$
5. (AHSME 1996) x e y verificano l'uguaglianza $x^2 + y^2 = 14x + 6y + 6$, qual è il massimo valore possibile per $3x + 4y$? [73]
6. (OMI1996) Sia D il dominio del piano cartesiano determinato dal sistema di disequazioni a fianco. Qual è l'area di D? $\begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ (x-1)^2+(y-1)^2 \ge 1 \\ (x+1)^2+(y+1)^2 \ge 1 \end{cases}$. [2]
7. (AHSME 1998) I grafici di $x^2 + y^2 = 4 + 12x + 6y$ e $x^2 + y^2 = k + 4x + 12y$, si incontrano solo quando si ha $a \le k \le b$. Determinare $b - a$. [140]

Questions in English

Working together

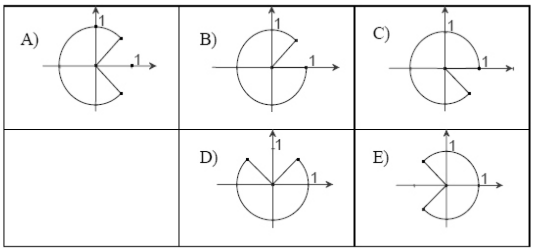
This is a question assigned at HSMC in 1999. *Find the smallest value of $x^4 + y^4$ for points $(x; y)$ on the circle of radius $\sqrt{10}$ centred at the origin.*
The equation of the circle is: $x^2 + y^2 = 10$. We write: $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = 10^2 - 2x^2y^2 = 100 - 2x^2y^2$ we have the minimum when $2x^2y^2$ is maximum, namely when $x = y$. In this case we have: $x^2 + x^2 = 10 \Rightarrow 2x^2 = 10 \Rightarrow x^2 = 5$. At last, the minimum is $100 - 2 \cdot 5 \cdot 5 = 100 - 50 = 50$.

8. (MT1996) A circular disk rests in a right angle, touching both sides. A point on the circumference of the disk is 8 *cm* from one side of the angle and 9 *cm* form the other side. Find the diameter of the disk. [10 *cm* or 58 *cm*]
9. (HSMC2000) Two circles are placed in the xy-plane. One of the circles has center[1] (1; 1) and radius 1. The other circle has center (0;–1) and is tangent to the circle centred at (1; 1). What are the possible radii of the circle centered at (0;–1)? $\left[\sqrt{5}\pm 1\right]$
10. (HSMC2000) A circle is placed in the xy-plane and a line L is drawn through the centre of the circle. Suppose P is a point interior to the circle which is 6 units from the circle, 6 units from the line L and 10 units from the closest intersection point of the line L with the circle. What is the area of the circle? [256π square units]
11. (HSMC2001) Let C be the circle in the xy-plane which is centered at (1; 2) and passes through (4; 3). Let S be the set of all points in the xy-plane that are within a distance 1 from the circle. What is the area of S? $\left[4\pi\cdot\sqrt{10}\right]$
12. (Rice 2010) Given two regions described by the inequalities $(x-1)^2 + y^2 \le 4$ and $(x+1)^2 + y^2 \le 4$, respectively, find the area of the intersection of the 2 regions. $\left[\frac{8}{3}\pi - 2\cdot\sqrt{3}\right]$

[1] In Americano si scrive center, in Inglese britannico centre, così come l'americano centered, in britannico è centred

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia navale) Scrivere le equazioni delle circonferenze tangenti all'asse delle x e tangenti nel punto T ≡ (1; 1) alla retta r: $x - y = 0$.
2. (Accademia navale) Facendo uso di un opportuno parametro reale, scrivere l'equazione delle circonferenze aventi il centro sulla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ e tangenti l'asse x.
3. (Accademia navale) Nel piano cartesiano rappresentare graficamente il luogo dei centri delle circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2kx - \frac{k}{|k|}y = 0$.
4. (Accademia Navale) Si individui il luogo geometrico dei punti di intersezione delle coppie di rette corrispondenti a uno stesso valore del parametro a dei fasci di equazioni $x + a \cdot y = 0$ e $a \cdot (x - 1) - y = 0$.
5. (Accademia navale) Servendosi dell'interpretazione geometrica discutere la risolubilità del sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0 \\ y = m \cdot (x+2) \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$.
6. (Accademia navale) Individuare il luogo dei centri delle circonferenze passanti per il punto $A \equiv (3; 2)$ e tangenti all'asse delle x.
7. (Ingegneria 1999) Fissato nel piano un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, siano c e c' le due circonferenze di equazione, $x^2 + y^2 = 9$, $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, rispettivamente. Quante sono le rette tangenti comuni a c e c'? A) Due B) Infinite C) Più di due, ma in numero finito D) Nessuna E) Una
8. (Veterinaria 2000) Per quali valori dei parametri a, b, c, $ax^2 + by^2 + c = 0$ rappresenta una circonferenza non degenere? A) $a = b$, $c < 0$ B) $a = b$, $c > 0$ C) $a = b$, $c = 0$ D) $a = c$, $b < 0$ E) $c = b$, $a > 0$
9. (Ingegneria 2000) Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, quale delle seguenti è l'equazione di una circonferenza reale?
   A) $x^2 + y^2 - 2xy - 1 = 0$ B) $4x^2 - 3x + 4y^2 - 5y - 1 = 0$ C) $x^2 + y^2 + 1 = 0$
   D) $(x - 1)^2 - (y - 2)^2 - 1 = 0$ E) $x^4 + y^4 - 1 = 0$
10. (Odontoiatria 2002) La retta $x - 2 = 0$ e la circonferenza $x^2 + y^2 = 5$
    A) non hanno intersezioni B) sono tangenti in un punto di ascissa nulla C) sono secanti
    D) sono tangenti nel punto (2;0)E) nessuna delle precedenti è corretta
11. (Ingegneria 2002) Consideriamo i punti $P \equiv (5; 0)$, $Q \equiv (5; -5)$, $R \equiv (0; -5)$; $S \equiv (-3; -4)$ e $T \equiv (-5;5)$. Quale di queste terne è formata da punti appartenenti alla medesima circonferenza che ha centro nell'origine? A) P, R, S B) Q, S, T C) P, Q, R D) Q, R, T E) P, R, T
12. (Ingegneria 2002) Siano A e B due punti distinti del piano, d la loro distanza ed r un intero positivo assegnato. Allora
    A) esiste una circonferenza di raggio r passante per A e B solo se $d = 2r$
    B) esiste sempre una circonferenza di raggio r passante per A e B
    C) esiste una circonferenza di raggio r passante per A e B solo se $d \geq 2r$
    D) se $d < 2r$ allora esistono due circonferenze di raggio r passanti per A e B
    E) se $d \leq 2\,r$ allora esiste un'unica circonferenza di raggio r passante per A e B
13. (Ingegneria 2002) Consideriamo le circonferenze c di centro O e raggio 2 e c' di centro O' e raggio 3. Le circonferenze c e c' si incontrano in due punti. tra i seguenti punti, quale può essere O'?
    A) (–4; 4) B) (3; 4) C) $\left(1;\frac{9}{2}\right)$ D) $\left(\frac{11}{3};\frac{11}{3}\right)$ E) (5; –2)
14. (Veterinaria 2005) Uno solo fra i seguenti settori circolari costituisce l'insieme dei punti del piano per



i quali si ha $\begin{cases} |y| \ge x \\ x^2 + y^2 \le 1 \end{cases}$. Di quale si tratta?

15. (Veterinaria 2006) Data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$, stabilire se il punto di coordinate $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ è A) il suo centro B) esterno ad essa C) interno ad essa ma diverso dal centro D) appartenente ad essa e alla retta $x + 2y = 0$ E) appartenente ad essa ma non appartenente alla retta $x + 2y = 0$
16. (Architettura 2010) Ad un disegnatore si richiede di tracciare in un piano una circonferenza tangente nei punti A e B a due rette che si intersecano nel punto P, e tale che le distanze di A e B da P siano rispettivamente, 8 *cm* e 6 *cm*. Quale delle seguenti affermazioni è vera?
A) È impossibile tracciare una tale circonferenza
B) Il problema è risolubile solo se le due rette sono perpendicolari
C) Il raggio della circonferenza è di 12*cm*
D) Il centro di questa circonferenza si trova sulla bisettrice di uno degli angoli formati dalle due rette
E) Il raggio della circonferenza è di 10*cm*
17. (Guida Bocconi) Qual è il centro della circonferenza che passa per i punti (1;–2), (4;1),(1;4)?
A) (–1; 1) B) (0; 1) C) (1; 1) D) (0; 0) E) (1; 0)
18. (Scuola superiore di Catania) Con riferimento a un sistema cartesiano ortogonale x, y si dimostri che: i) sulla circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{7}$ non possono esserci punti le cui coordinate siano entrambe numeri razionali; ii) sulla circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{17}$ vi sono infiniti punti le cui coordinate sono entrambe numeri razionali.
19. (Ingegneria 2009) In un piano cartesiano la circonferenza di centro C (1; 1) e tangente all'asse delle x ha equazione
A) $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$ B) $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ C) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$
D) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ E) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$

Per svolgere un Test finale di* 18 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_3_4.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	**2**	**3**
$x^2 + y^2 \pm 2\cdot\sqrt{2}x - \left(4 \pm 2\cdot\sqrt{2}\right)y + 2 = 0$	$x^2 + y^2 + hx \pm \sqrt{4 - h^2}\, y + \frac{h^2}{4} = 0$	$\begin{cases} y = \frac{1}{2} & x > 0 \\ y = -\frac{1}{2} & x < 0 \end{cases}$
4	**5**	**6**
$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$	ha soluzioni per $-\frac{\sqrt{3}}{3} \le m \le \frac{\sqrt{3}}{3}$	$x^2 - 6x - 4y + 13 = 0$
7	**8**	**9**
D	A	B
10	**11**	**12**
C	A	E
13	**14**	**15**
C	A	B
16	**17**	**19**
A	C	C

4. Geometria delle coniche

4.3. Le ellissi

Prerequisiti

- Il piano cartesiano
- Concetto di funzione
- Concetto di luogo geometrico
- Concetto di equazione e sua risoluzione
- Equazione della retta
- Fasci di rette
- Trasformazioni geometriche e loro leggi
- Matrici e determinanti
- Le coniche
- La circonferenza

Obiettivi

- Riconoscere che una circonferenza è una particolare ellisse
- Sapere dilatare una circonferenza per ottenere un'ellisse
- Riconoscere le principali proprietà di un'ellisse in forma canonica
- Riconoscere ellissi traslate rispetto alle canoniche
- Risolvere semplici questioni relative ai fasci di ellissi

Contenuti

- Equazione dell'ellisse
- Fasci di ellissi

Parole Chiave

Eccentricità – Ellisse – Fuoco – Vertice

Equazione dell'ellisse

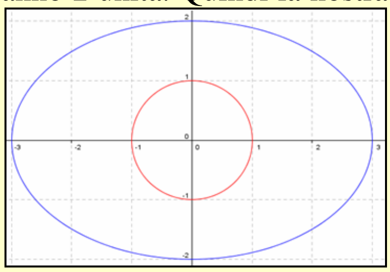
Il problema

Trasformando isometricamente una circonferenza otteniamo ancora una circonferenza, se vi applichiamo invece una trasformazione non isometrica di quelle note (similitudine, affinità), che tipo di curva otteniamo?

Il problema posto cerca di determinare, partendo da equazioni di curve note, come appunto quella della circonferenza, equazioni di curve che in qualche modo possano considerarsi *dedotte* da quelle. In particolare pensiamo che dalla circonferenza riusciamo a trovare l'equazione di un'ellisse, dato che abbiamo già visto che la circonferenza è appunto una particolare ellisse. Dobbiamo però stare particolarmente attenti alle trasformazioni che applichiamo, poiché potremmo trovare equazioni particolarmente complicate da trattare.
Proprio per evitare le complicazioni di calcolo conviene partire da equazioni particolarmente semplici e da leggi di trasformazioni altrettanto semplici.

Esempio 1

Fra tutte le circonferenze quella che ha l'equazione più semplice è certamente quella che ha centro nell'origine, infatti se il raggio misura R, l'equazione cercata è $x^2 + y^2 = R^2$, cioè un'equazione che ha solo tre termini, anzi ponendo $R = 1$, non contiene neanche parametri: $x^2 + y^2 = 1$. Fra tutte le affinità quella più semplice è certamente la dilatazione, le cui leggi sono: $\delta_{a,b}:\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$. Prima di applicare le leggi della trasformazione cerchiamo di capire cosa accadrà. Abbiamo visto nell'unità 3.2 che dilatare equivale a cambiare l'unità di misura sugli assi, in modo tale che un segmento lungo 1 sull'asse x verrà a misurare a, e uno analogo sull'asse y verrà a misurare b. Così se scegliamo per esempio la dilatazione $\delta_{3,2}:\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 2y \end{cases}$, tutte le componenti x saranno triplicate, quelle y saranno raddoppiate. Dal punto di vista della circonferenza vorrà dire allora che i raggi paralleli all'asse x misureranno 3 unità, quelli paralleli all'asse y misureranno 2 unità. Quindi la nostra circonferenza trasformata avrà la forma mostrata nella figura.



Adesso stabiliamo che equazione ha questa nostra curva. Ricaviamo le trasformazioni inverse: $\delta^{-1}{}_{3,2}:\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}x' \\ y = \dfrac{1}{2}y' \end{cases}$. Applichiamole all'equazione della circonferenza: $\left(\dfrac{1}{3}x'\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}y'\right)^2 = 1 \Rightarrow \dfrac{x'^2}{9} + \dfrac{y'^2}{4} = 1$.
Naturalmente i simboli usati sono del tutto convenzionali, possiamo quindi eliminare gli apici. L'ellisse ha perciò la seguente equazione: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$.

Quanto appena visto si generalizza facilmente nel risultato seguente.

Teorema 1

La circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$, è trasformata dalla dilatazione di leggi $\delta_{a,b}:\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$, nell'ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.
Dimostrazione. Per esercizio.

Abbiamo detto che la curva trasformata è un'ellisse senza averlo verificato, dato che però nella detta equazione manca il termine xy e i coefficienti degli altri termini di secondo grado hanno uguale segno è semplice calcolare il discriminante della conica $\Delta = -\frac{4}{a^2b^2} < 0, \forall a, b \neq 0$, che ci conferma che abbiamo effettivamente un'ellisse. Quella che abbiamo determinato è naturalmente un'ellisse molto particolare.

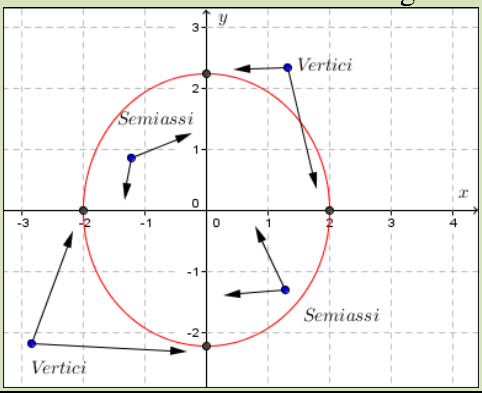
Definizione 1

L'equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b \neq 0$ rappresenta una conica detta **ellisse in forma canonica**.

L'ellisse, come la circonferenza ha un centro di simmetria, che per l'ellisse in forma canonica è l'origine. Inoltre non ha più i raggi, dato che le rette passanti per il centro intersecano l'ellisse in segmenti che in generale non sono fra loro uguali, tranne nel caso in cui l'ellisse risulti una circonferenza, cioè quando $a = b$. Fra tutti questi segmenti ne individuiamo due particolari, che sono quelli più direttamente coinvolti nella dilatazione, ossia quelli paralleli agli assi coordinati.

Definizione 2

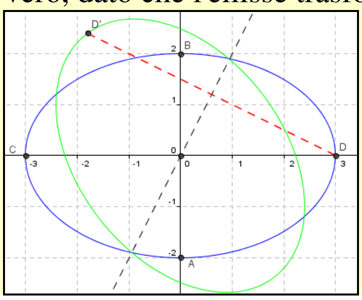
I punti di coordinate (a; 0), ($-a$; 0), (0; b), (0; $-b$), intersezioni dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con gli assi coordinati, si chiamano **vertici**. I segmenti che congiungono fra loro due vertici appartenenti allo stesso asse si chiamano **assi**; i segmenti che congiungono fra loro un vertice con l'origine si chiamano **semiassi**.



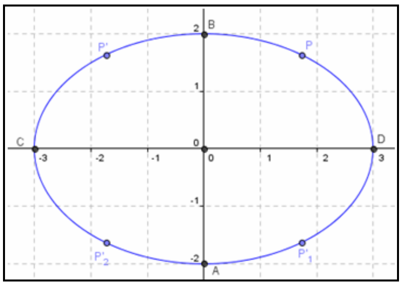
In questo processo di dilatazione alcune proprietà della circonferenza sono perse, altre sono conservate. Per esempio sia la circonferenza che l'ellisse sono curve chiuse, cioè contengono una parte di piano; sono entrambe simmetriche rispetto a un punto, l'origine degli assi cartesiani nel caso della forma canonica; sono simmetriche rispetto agli assi cartesiani. Vi sono però delle proprietà che non si conservano.

Esempio 2

Consideriamo l'ellisse precedente, la cui equazione è $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$. Consideriamo una qualsiasi retta per il centro, per esempio quella di equazione $y = 2x$, vogliamo vedere se l'ellisse è simmetrica rispetto a questa retta. La figura seguente, ottenuta con Geogebra mostra che la simmetrica dell'ellisse data rispetto alla retta di equazione $y = 2x$, ci mostra che non è vero, dato che l'ellisse trasformata è quella colorata di verde.



Un'altra proprietà della circonferenza è quella di essere un luogo geometrico, anche l'ellisse lo sarà? E se la risposta è positiva, quale sarà la proprietà che verificherà? Nella circonferenza il centro è equidistante dai punti della circonferenza, nell'ellisse ciò non accade certamente perché le distanze del centro dai punti dell'ellisse sono tutte diverse tra loro, almeno limitatamente a un solo quadrante, dato che per le simmetrie già dette, scelto un punto sull'ellisse ve ne sono altri tre, negli altri quadranti, che hanno la stessa distanza dal centro. Per capire meglio consideriamo un caso particolare, per esempio l'ellisse in figura i cui semiassi misurano 2 e 3. Le predette distanze variano da un minimo di 2 a un massimo di 3.



Pensiamo che la proprietà delle distanze debba essere conservata anche se modificata. In cosa può consistere questa modifica? Visto che abbiamo dilatato la figura, possiamo pensare che il centro si sia *sdoppiato* in due punti che si trovano in posizione simmetrica rispetto all'origine. Quindi pensiamo che la distanza conservata non sia quella dal centro, bensì la somma delle distanze da questi due punti. Vediamo se questa nostra idea è corretta.

Esempio 3

Ci riferiamo sempre all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$. Vogliamo trovare due punti, che indichiamo con F_1e F_2, posti sull'asse x in posizioni simmetriche rispetto all'origine, tali che $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}$ risulti costante, qualunque punto P scegliamo sull'ellisse. Perciò devono essere $F_1 \equiv (h; 0)$ e $F_2 \equiv (-h; 0)$, con h numero reale positivo minore di 3. La prima questione che dobbiamo risolvere consiste nello stabilire quanto deve essere questo valore costante. Abbiamo detto che la proprietà deve essere vera per ogni punto dell'ellisse, quindi anche per il vertice $A \equiv (3; 0)$. Ma è evidente che in questo caso si ha: $\overline{AF_1}+\overline{AF_2}=(3-h)+(3+h)=6$. Quindi il valore costante deve essere la misura dell'asse maggiore. Adesso dobbiamo stabilire quanto deve essere h. Applichiamo la condizione della distanza al vertice $B \equiv (0; 2)$. Si ha: $\overline{BF_1}+\overline{BF_2}=6 \Rightarrow \sqrt{h^2+4}+\sqrt{h^2+4}=6 \Rightarrow 2\cdot\sqrt{h^2+4}=6 \Rightarrow \sqrt{h^2+4}=3 \Rightarrow h^2+4=9 \Rightarrow h^2=5$. Quindi i punti cercati dovrebbero essere $F_1 \equiv \left(\sqrt{5}; 0\right), F_2 \equiv \left(-\sqrt{5}; 0\right)$. Non ci rimane che verificare che quanto detto valga effettivamente per ogni punto dell'ellisse. Consideriamo quindi il generico punto dell'ellisse $P \equiv \left(x; \frac{2}{3}\cdot\sqrt{9-x^2}\right)$ e calcoliamo: $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=\sqrt{\left(x-\sqrt{5}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\cdot\sqrt{9-x^2}\right)^2}+\sqrt{\left(x+\sqrt{5}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\cdot\sqrt{9-x^2}\right)^2}=$

$$=\sqrt{x^2+2\cdot\sqrt{5}x+5+\frac{4}{9}\cdot\left(9-x^2\right)}+\sqrt{x^2-2\cdot\sqrt{5}x+5+\frac{4}{9}\cdot\left(9-x^2\right)}=\sqrt{\frac{9x^2+18\cdot\sqrt{5}x+45+36-4x^2}{9}}+$$

$$+\sqrt{\frac{9x^2-18\cdot\sqrt{5}x+45+36-4x^2}{9}}=\sqrt{\frac{5x^2+6\cdot\sqrt{5}x+81}{9}}+\sqrt{\frac{5x^2+6\cdot\sqrt{5}x+81}{9}}=\sqrt{\frac{\left(9+\sqrt{5}x\right)^2}{9}}+\sqrt{\frac{\left(9-\sqrt{5}x\right)^2}{9}}=$$

$=\frac{9+\sqrt{5}x}{3}+\frac{9-\sqrt{5}x}{3}=\frac{18}{3}=6$. Effettivamente la nostra idea è corretta.

Tenuto conto dell'esempio precedente possiamo enunciare il seguente risultato.

Teorema 2

Il luogo geometrico dei punti del piano per cui la somma delle distanze da due punti fissi F_1 e F_2 è costante e maggiore di F_1F_2 è un'ellisse.

Dimostrazione. Omessa solo perché è molto laboriosa nei calcoli.

Definizione 3

I punti fissi che definiscono l'ellisse come luogo di punti si chiamano **fuochi**, l'asse a cui essi appartengono si chiama **asse focale**.

Piuttosto che dimostrare il Teorema 2, che si riduce a una serie di calcoli laboriosi, che potrebbero benissimo essere eseguiti con l'aiuto di un apposito software, vediamo un esempio.

Esempio 4

Vogliamo verificare che il luogo dei punti del piano per i quali $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=10$, in cui si ha $F_1 \equiv (1; -3)$ e $F_2 \equiv (4; 2)$, è un'ellisse reale. Consideriamo un generico punto $P \equiv (x; y)$ e imponiamo le condizioni del luogo: $\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}=10$. Manipoliamo l'equazione per eliminare le radici.

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2}=10-\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} \Rightarrow \left(\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2}\right)^2=\left(10-\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=100+(x-4)^2+(y-2)^2-20\cdot\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} \Rightarrow\Rightarrow \cancel{x^2}-2x+1+\cancel{y^2}+6y+9=$$

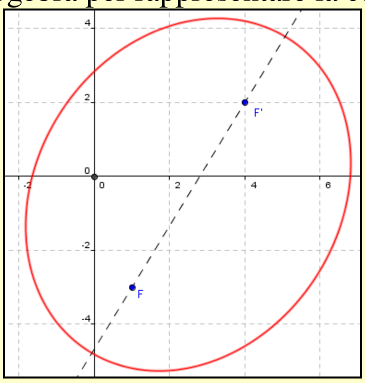
$$100+\cancel{x^2}-8x+16+\cancel{y^2}-4y+4-20\cdot\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} \Rightarrow 6x+10y-110=-20\cdot\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} \Rightarrow$$

$3x+5y-55=-10\cdot\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}$. Ne abbiamo eliminata una, vediamo di eliminare anche quella rimanente: $(3x+5y-55)^2=\left(-10\cdot\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}\right)^2 \Rightarrow 9x^2+25y^2+30xy-330x-550y+3025=$

$$=100x^2-800x+100y^2-400y+2000 \Rightarrow 91x^2-30xy+75y^2-470x+150y-1025=0.$$

Non ci rimane che provare che effettivamente quest'ultima equazione rappresenta un'ellisse. Calcoliamo il suo discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac = 30^2 - 4 \cdot 91 \cdot 75 < 0$.

Per conferma ci facciamo aiutare da Geogebra per rappresentare la curva e i suoi fuochi.



Verifichiamo che il punto medio del segmento che ha per estremi i fuochi, cioè $M \equiv \left(\frac{4+1}{2}; \frac{2-3}{2}\right) \equiv \left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ è centro di simmetria per l'ellisse. Le leggi della simmetria centrale in questo caso sono: $s_M: \begin{cases} x' = 2\cdot\frac{5}{2}-x \\ y' = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-y \end{cases} \equiv \begin{cases} x' = 5-x \\ y' = -1-y \end{cases}$. Applichiamole all'equazione dell'ellisse: $91 \cdot (5-x)^2 - 30 \cdot (5-x) \cdot (-1-y) + 75 \cdot (-1-y)^2 - 470 \cdot (5-x) + 150 \cdot (-1-y) - 1025 = 0 \Rightarrow 91x^2 - 30xy + 75y^2 + 470x - 150y - 1025 = 0$. Abbiamo riottenuto la stessa equazione, quindi effettivamente M è centro di simmetria.

Perché nel Teorema 2 abbiamo inserito la clausola che la somma costante fosse maggiore della distanza focale? Perché è una conseguenza della disuguaglianza triangolare secondo la quale in ogni triangolo un lato è minore della somma degli altri due. Cosa succede allora se ciò non accade?

Esempio 5

Riconsideriamo l'esempio 4, imponendo che sia $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=\overline{F_1F_2}$, intanto calcoliamo la distanza focale: $\overline{F_1F_2}=\sqrt{(1-4)^2+(-3-2)^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$. Poi semplifichiamo, scrivendo solo il risultato finale:

$$(x-1)^2+(y+3)^2=34+(x-4)^2+(y-2)^2-2\cdot\sqrt{34\cdot\left[(x-4)^2+(y-2)^2\right]}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25x^2-30xy+9y^2-140x+84y+196=0\Rightarrow(5x-3y-14)^2=0$$

Si ottiene cioè un'ellisse spezzata, come era facile capire. Spezzata ovviamente nell'asse focale contato due volte. Se invece avessimo posto $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}<\overline{F_1F_2}$, avremmo ottenuto un'iperbole. Per esempio per $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=5$ si ottiene $64x^2 - 120xy - 380x + 300y + 775 = 0$, che ha $\Delta = 120^2 - 4 \cdot 64 \cdot 0 > 0$, e quindi è un'iperbole.

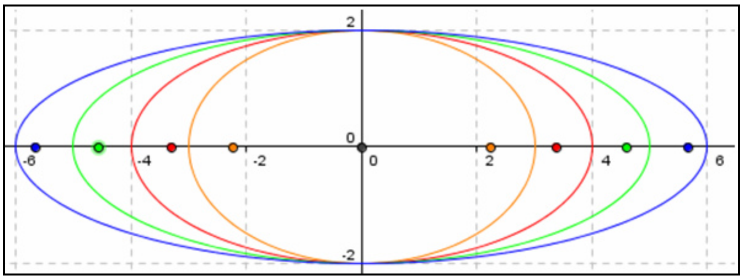
Allo stesso modo potrebbe provarsi, con calcoli più laboriosi, che la retta contenente i fuochi e l'asse del segmento focale sono assi di simmetria per l'ellisse.

Teorema 3

Nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, i fuochi sono i punti $\begin{cases} F_1\equiv\left(\sqrt{a^2-b^2};\,0\right), F_2\equiv\left(-\sqrt{a^2-b^2};0\right) & a>b \\ F_1\equiv\left(0;\,\sqrt{b^2-a^2}\right), F_2\equiv\left(0;-\sqrt{b^2-a^2}\right) & a<b\end{cases}$

Dimostrazione. Per esercizio.

Una certa ellisse può essere più o meno *schiacciata*, nella figura a lato abbiamo rappresentato con Geogebra, alcune ellissi che hanno lo stesso semiasse minore, di misura 2, e semiassi maggiori di misura che varia, per valori interi, da 3 a 6 unità. Abbiamo tracciato anche i fuochi, usando lo stesso colore della relativa ellisse. Chiaramente l'ellisse più schiacciata è quella che ha il più grande asse maggiore. La questione che vogliamo risolvere è allora come misurare il grado di *schiacciamento*. Non è difficile osservare dalla figura che, a maggiore schiacciamento corrispondono dei fuochi sempre più lontani dal centro. Quindi un modo di misurare questo schiacciamento è quello di calcolare il rapporto fra la distanza dei fuochi e la misura dell'asse maggiore, ossia il rapporto fra il semiasse focale e il semiasse maggiore.



Definizione 4

Il rapporto fra la semidistanza focale e il semiasse maggiore di un'ellisse, si chiama **eccentricità** dell'ellisse.

Se l'ellisse ha equazione canonica $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, si ha: $e=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} & a>b \\ \dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{b} & a<b\end{cases}$.

Evidentemente, per la stessa definizione l'eccentricità di un'ellisse è un numero sempre non negativo e minore di 1, in accordo con quanto detto dal Teorema 4 dell'unità 4.1. In particolare se l'eccentricità è nulla, vuol dire che i semiassi sono uguali, quindi che i fuochi coincidono, ossia che l'ellisse è una circonferenza. Pertanto più l'eccentricità è prossima a zero più è *arrotondata* l'ellisse, più è vicina a 1 e più è *schiacciata*.

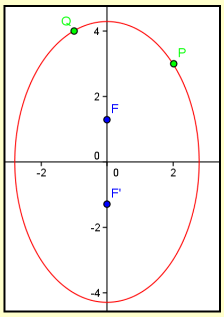
Esempio 6

Calcoliamo l'eccentricità dell'ellisse $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$, per la definizione 4 si ha: $e=\frac{\sqrt{9-4}}{3}=\frac{\sqrt{5}}{3}$, ovviamente anche l'ellisse $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$, che ha asse focale su y, ha la stessa eccentricità.

Visto che l'equazione di un'ellisse in forma canonica contiene due parametri, per determinarla bastano appunto solo due condizioni. Vediamo allora qualche esempio.

Esempio 7

Vogliamo trovare l'ellisse in forma canonica passante per i punti $P \equiv (2; 3)$ e $Q \equiv (-1; 4)$. Basta imporre le condizioni di appartenenza di ciascun punto all'ellisse. Passaggio per P: $\frac{2^2}{a^2}+\frac{3^2}{b^2}=1$; passaggio per Q: $\frac{(-1)^2}{a^2}+\frac{4^2}{b^2}=1$. Le soluzioni sono perciò quelle del sistema: $\begin{cases}\frac{4}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1\\ \frac{1}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1\end{cases}$. Si stia molto attenti a risolvere il precedente sistema, poiché potremmo complicarne molto lo svolgimento. Il sistema è di grado 16 nella variabili a e b. Ma a noi non interessa conoscere i valori di a e b, ci basta conoscere solo quelli di a^2 e b^2, anzi ancor meglio di $\frac{1}{a^2}$ e $\frac{1}{b^2}$. Quindi ponendo per esempio $\frac{1}{a^2}=m$ e $\frac{1}{b^2}=p$, il precedente sistema diviene: $\begin{cases}4m+9p=1\\ m+16p=1\end{cases} \Rightarrow m=\frac{\begin{vmatrix}1 & 9\\ 1 & 16\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4 & 9\\ 1 & 16\end{vmatrix}}=\frac{16-9}{64-9}=\frac{7}{55}\Rightarrow a^2=\frac{55}{7}$, $\quad p=\frac{\begin{vmatrix}4 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{55}=\frac{4-1}{55}=\frac{3}{55}\Rightarrow b^2=\frac{55}{3}$. Condizione necessaria per l'accettabilità delle soluzioni è che siano positive, dato che stiamo parlando di quadrati, quindi le soluzioni sono accettabili. L'equazione dell'ellisse è perciò: $\frac{x^2}{\frac{55}{7}}+\frac{y^2}{\frac{55}{3}}=1\Rightarrow 7x^2+3y^2=55$. Essa ha asse focale y, dato che si ha: $\frac{55}{3}>\frac{55}{7}$, i suoi fuochi sono $F_{12}\equiv\left(0;\pm\sqrt{\frac{55}{3}-\frac{55}{7}}\right)\equiv\left(0;\pm\sqrt{\frac{220}{21}}\right)$ e la sua eccentricità



è: $\frac{\sqrt{\frac{\cancel{220}^{\,4}}{\cancel{21}_{\,7}}}}{\sqrt{\frac{\cancel{55}}{\cancel{3}}}}=\sqrt{\frac{4}{7}}$. In figura la abbiamo rappresentata con Geogebra.

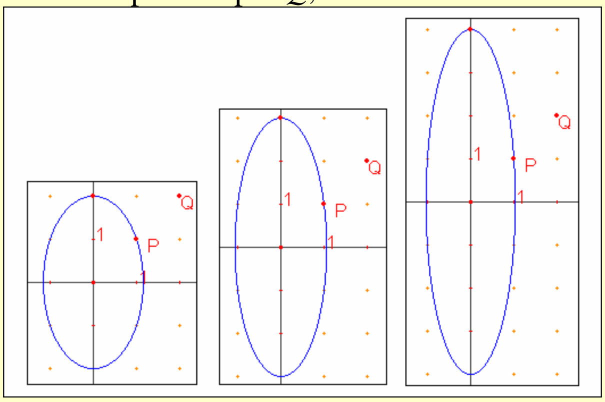
Non sempre il passaggio per due punti individua un'ellisse, seppure in forma canonica.

Esempio 8

- La conoscenza dei punti $P \equiv (1; 3)$, $Q \equiv (-1; -3)$ non è sufficiente a determinare l'ellisse che li contiene. Dato che per quanto detto più volte sulle simmetrie dell'ellisse canonica, conoscendo P, conosciamo non solo Q ma anche $R \equiv (1; -3)$ e $S \equiv (-1; 3)$. Quindi otteniamo non una ma infinite ellissi passanti per P e Q.

Del resto il sistema risolvente: $\begin{cases} \frac{1}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1 \\ \frac{1}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1 \end{cases}$, è evidentemente indeterminato.

- Invece la conoscenza dei i punti $P \equiv (1; 3)$, $Q \equiv (1; 2)$ non determina alcuna ellisse, perché stavolta non è possibile che un'ellisse canonica passi per due punti di uguale ascissa e diversa ordinata positiva. Il sistema risolvente sarà stavolta impossibile: $\begin{cases} \frac{1}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1 \\ \frac{1}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1 \\ \frac{1}{a^2}=1-\frac{4}{b^2} \end{cases} \Rightarrow 1-\frac{4}{b^2}+\frac{9}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{5}{b^2}=0$.
- Lo stesso accade se consideriamo i punti $P \equiv (1; 1)$, $Q \equiv (2; 2)$, perché l'ellisse canonica ha la proprietà di essere una curva decrescente nel primo quadrante, pertanto non può contenere due punti come quelli dati. Rappresentiamoli graficamente. Come si vede non riusciamo mai a passare per Q, dato che "a destra" di P ci sono sempre punti di ordinata minore.



Ancora qualche esempio.

Esempio 9

- Vogliamo determinare l'equazione dell'ellisse canonica passante per $P \equiv (2; –3)$ e avente fuoco in $F \equiv (0; 4)$. La prima condizione la conosciamo già: $\frac{4}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1$. Per la seconda dobbiamo utilizzare le formule stabilite dal Teorema 2 nell'ipotesi $a < b$, dato che F appartiene all'asse y; si ha: $\sqrt{b^2-a^2}=4 \Rightarrow b^2 - a^2 = 4$. Il sistema risolvente è perciò $\begin{cases} \frac{4}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1 \\ b^2-a^2=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{m}+\frac{9}{p}=1 \\ p-m=16 \end{cases}$. Stavolta abbiamo posto $a^2 = m$, $b^2 = p$, e non siamo riusciti, né è possibile farlo, a far divenire il sistema lineare. Risolviamolo allora con il metodo di sostituzione: $\begin{cases} \frac{4}{m}+\frac{9}{m+16}=1 \\ p=m+16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{m}+\frac{9}{p}=1 \\ p-m=16 \end{cases} \Rightarrow \frac{4\cdot(m+16)+9m}{m\cdot(m+16)} = = \frac{m\cdot(m+16)}{m\cdot(m+16)} \Rightarrow 4m + 64 + 9m = m^2 + 16m \Rightarrow m^2 + 3m - 64 = 0 \Rightarrow m=\frac{-3\pm\sqrt{9+256}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{265}}{2}$. Diciamo intanto che abbiamo eliminato il denominatore senza porre alcuna condizione, poiché già sappiamo che deve essere $m > 0$. Questa stessa condizione ci fa accettare solo la soluzione positiva dell'equazione $\begin{cases} m=\frac{-3+\sqrt{265}}{2} \\ p=\frac{-3+\sqrt{265}}{2}+16 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} m = \dfrac{-3+\sqrt{265}}{2} \\ p = m = \dfrac{-3+\sqrt{265}+32}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{-3+\sqrt{265}}{2} \\ p = m = \dfrac{29+\sqrt{265}}{2} \end{cases}$. L'equazione è quindi: $\dfrac{x^2}{\dfrac{-3+\sqrt{265}}{2}} + \dfrac{y^2}{\dfrac{29+\sqrt{265}}{2}} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{2x^2}{-3+\sqrt{265}} + \dfrac{2y^2}{29+\sqrt{265}} = 1$.

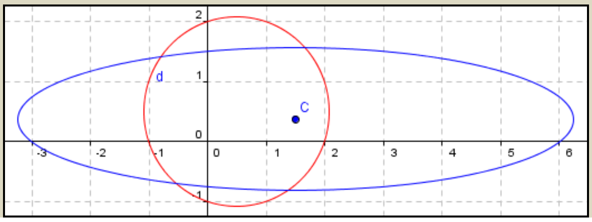
- Infine vogliamo determinare l'ellisse canonica passante per $P \equiv (-1; 5)$ e avente eccentricità $\dfrac{2}{3}$. Stavolta dobbiamo considerare i due casi, ossia asse focale l'asse x o asse focale quello y, dato che non abbiamo informazioni che ci permettano di stabilirlo. Quindi dobbiamo risolvere i seguenti due sistemi: $\begin{cases} \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{25}{b^2} = 1 \\ \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \dfrac{2}{3} \\ a > b \end{cases} \vee \begin{cases} \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{25}{b^2} = 1 \\ \dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{b} = \dfrac{2}{3} \\ b > a \end{cases}$. Lasciamo la risoluzione per esercizio: $\begin{cases} a^2 = 46 \\ b^2 = \dfrac{230}{9} \end{cases} \vee \begin{cases} a^2 = \dfrac{134}{5} \\ b^2 = \dfrac{134}{9} \end{cases}$. Quindi le equazioni delle due ellissi sono: $\dfrac{x^2}{46} + \dfrac{9y^2}{230} = 1 \wedge \dfrac{9x^2}{134} + \dfrac{5y^2}{134} = 1$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Data la circonferenza di equazione: $x^2 + y^2 - x - y - 2 = 0$, *applicargli le dilatazioni* $\delta: \begin{cases} x' = 3x \\ y' = \frac{3}{4}y \end{cases}$, *e stabilire che tipo di conica si ottiene.*

Ricaviamo intanto le leggi della dilatazione inversa: $\delta^{-1}: \begin{cases} x = \frac{1}{3}x' \\ y = \frac{4}{3}y' \end{cases}$. Sostituiamo nell'equazione della circonferenza: $\left(\frac{1}{3}x'\right)^2 + \left(\frac{4}{3}y'\right)^2 - \left(\frac{1}{3}x'\right) - \left(\frac{4}{3}y'\right) - 2 = 0 \Rightarrow x'^2 + 16y'^2 - 3x' - 12y' - 18 = 0$. L'equazione ottenuta non è certamente quella di una circonferenza, dato che i coefficienti dei termini di secondo grado sono diversi. Calcoliamone il discriminante per stabilire che tipo di conica è: $b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 < 0$. Un'ellisse, anche se non in forma canonica. Disegniamola tenendo conto che il centro è la dilatazione di quello della circonferenza, $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, e quindi è $\left(\frac{3}{2};\frac{3}{8}\right)$. Allo stesso modo i semiassi si ottengono dilatando il raggio della circonferenza, che era lungo $\frac{\sqrt{1+1+8}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$. Quindi i semiassi saranno lunghi $\left(\frac{3\cdot\sqrt{10}}{2}, \frac{3\cdot\sqrt{10}}{8}\right)$. Ecco il grafico costruito con Geogebra.



Determinare le equazioni delle ellissi trasformate delle date circonferenze secondo le dilatazioni indicate e disegnarle

Livello 2

1. $x^2 + y^2 = \frac{3}{2}, \begin{cases} x' = -\frac{5}{4}x \\ y' = -\frac{2}{7}y \end{cases}$; $x^2 + y^2 = 2, \begin{cases} x' = \sqrt{3}x \\ y' = y \end{cases}$; $3x^2 + 3y^2 - 4x - 1 = 0, \begin{cases} x' = \frac{2}{3}x \\ y' = -\frac{3}{2}y \end{cases}$; $x^2 + y^2 = 1, \begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3y \end{cases}$
[$64x^2 + 1225y^2 = 150$; $x^2 + 3y^2 = 6$; $81x^2 + 16y^2 + 32x - 12 = 0$; $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$]

2. $x^2 + y^2 = \sqrt{2}, \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x \\ y' = \frac{2}{3}y \end{cases}$; $x^2 + y^2 - x + y - 1 = 0, \begin{cases} x' = -3x \\ y' = \frac{3}{2}y \end{cases}$; $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}, \begin{cases} x' = -\sqrt{2}x \\ y' = \sqrt{2}y \end{cases}$
[$16x^2 + 9y - 4 \cdot \sqrt{2} = 0$; $x^2 + 4y^2 - 3x + 6y - 9 = 0$; $x^2 + y^2 = 1$]

3. $2x^2 + 2y^2 - 3x - 2y + 1 = 0, \begin{cases} x' = \frac{4}{5}x \\ y' = -2y \end{cases}$; $x^2 + y^2 - 3x - 2 = 0, \begin{cases} x' = 5x \\ y' = -5y \end{cases}$; $x^2 + y^2 = 4, \begin{cases} x' = -x \\ y' = 2y \end{cases}$
[$25x^2 + 4y^2 - 30x + 8y + 8 = 0$; $x^2 + y^2 - 15x - 50 = 0$; $4x^2 + y^2 - 4 = 0$]

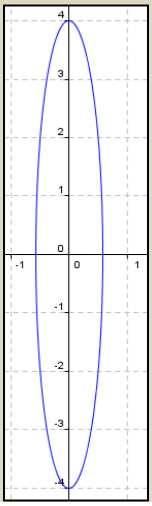
Lavoriamo insieme

Determinare le misure dei semiassi e l'eccentricità dell'ellisse di equazioni: $49x^2 + y^2 - 16 = 0$.

Per risolvere il problema conviene scrivere l'equazione nella forma canonica $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Trasportiamo il termine noto dall'altra parte del segno di uguale e dividiamo tutti i termini per tale valore: $49\cdot\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=1$.

Manipoliamo ulteriormente l'equazione: $\frac{x^2}{\frac{16}{49}}+\frac{y^2}{16}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{4}{7}\right)^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$. Possiamo facilmente dire che gli assi misurano: $a = 4/7$ e $b = 4$. Dato che è $b > a$, l'eccentricità si determina con la formula: $e=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$. Perciò $e=\frac{\sqrt{4^2-\left(\frac{4}{7}\right)^2}}{4}=\frac{\sqrt{16-\frac{16}{49}}}{4}=\frac{\sqrt{\frac{16\cdot 49-16}{49}}}{4}=\frac{\sqrt{\frac{16}{49}\cdot(49-1)}}{4}=\frac{\frac{\cancel{4}}{7}\cdot\sqrt{48}}{\cancel{4}}=\frac{1}{7}\cdot\sqrt{48}=\frac{4\cdot\sqrt{3}}{7}\approx 0,99$.

Un'eccentricità molto vicina a 1, indica un'ellisse particolarmente *schiacciata*, come mostriamo nella seguente immagine ottenuta con Geogebra.



Disegnare le seguenti ellissi in forma canonica, determinando le misure dei semiassi e dell'eccentricità

Livello 1

4. $\frac{x^2}{25}+y^2=1$; $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$; $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$; $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{49}=1$
$$\left[\left(a=5,b=1,e=\frac{2\sqrt{6}}{5}\right);\left(a=4,b=2,e=\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\left(a=2,b=3,e=\frac{\sqrt{5}}{3}\right);\left(a=9,b=7,e=\frac{4\cdot\sqrt{2}}{9}\right)\right]$$

5. $\frac{x^2}{7}+y^2=1$; $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{5}=1$; $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=3$; $\frac{4x^2}{9}+\frac{9y^2}{4}=1$
$$\left[\left(a=\sqrt{7},\ b=1,\ e=\sqrt{\frac{6}{7}}\right);\left(a=\sqrt{3},\ b=\sqrt{5},\ e=\sqrt{\frac{2}{5}}\right);\left(a=2\cdot\sqrt{6},b=3\cdot\sqrt{2},\ e=\frac{1}{2}\right);\left(a=\frac{3}{2},b=\frac{2}{3},e=\frac{\sqrt{65}}{9}\right)\right]$$

6. $\frac{x^2}{11}+3y^2=2$; $\frac{3x^2}{4}+\frac{2y^2}{5}=3$; $4x^2 + 9y^2 = 1$
$$\left[\left(a=\sqrt{22},\ b=\frac{\sqrt{6}}{3},\ e=\frac{4\cdot\sqrt{66}}{33}\right);\left(a=2,\ b=\frac{\sqrt{30}}{2},\ e=\frac{\sqrt{105}}{15}\right);\left(a=\frac{1}{2},b=\frac{1}{3},e=\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right]$$

7. $16x^2 + 4y^2 = 1$; $x^2 + y^2 = 9$; $4x^2 + 4y^2 = 1$ $\left[\left(a=\frac{1}{4},b=\frac{1}{2},e=\frac{\sqrt{3}}{2}\right);(a=b=3,e=0);\left(a=b=\frac{1}{2},e=0\right)\right]$

8. $3x^2 + 5y^2 = 1$; $x^2 + 4y^2 = 16$; $2x^2 + 3y^2 = 6$

$$\left[\left(a=\frac{\sqrt{3}}{3}, b=\frac{\sqrt{5}}{5},\ e=\frac{\sqrt{10}}{5}\right);\left(a=4, b=2, e=\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\left(a=\sqrt{3}, b=\sqrt{2},\ e=\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$$

9. $7x^2 + 8y^2 = 1$; $8x^2 + 7y^2 = 1$; $7x^2 + 8y^2 = 3$

$$\left[\left(a=\frac{\sqrt{7}}{7},\ b=\frac{\sqrt{2}}{4},\ e=\frac{\sqrt{2}}{4}\right);\left(a=\frac{\sqrt{2}}{4}, b=\frac{\sqrt{7}}{7},\ e=\frac{\sqrt{2}}{4}\right);\left(a=\sqrt{\frac{3}{7}},\ b=\sqrt{\frac{3}{8}},\ e=\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right]$$

Lavoriamo insieme

- *Scrivere l'equazione dell'ellisse in forma canonica in cui l'asse maggiore appartiene all'asse x e misura 3 unità e la cui eccentricità è* 1/2.

  L'equazione generica è $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, quindi dobbiamo determinare i valori di a e di b. Abbiamo appunto due condizioni che equivalgono al sistema: $\begin{cases} a=3 \\ \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{1}{2} \end{cases}$. Risolviamolo: $\begin{cases} a=3 \\ \frac{\sqrt{9-b^2}}{3}=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$

  $\Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ 9-b^2=\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=9 \\ b^2=\frac{15}{2} \end{cases}$. Quindi l'equazione cercata è $\frac{x^2}{9}+\frac{2y^2}{15}=1$.

- *Determinare l'equazione dell'ellisse canonica passante per* $A \equiv (1; 3)$ e $B \equiv (-2; 4)$.

  Imponiamo le condizioni di appartenenza: $\begin{cases} \frac{1}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1 \\ \frac{4}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1 \end{cases}$, per semplificare lo riduciamo al seguente sistema di primo grado: $\begin{cases} p+9q=1 \\ 4p+16q=1 \end{cases}$, $p=\frac{1}{a^2}$, $q=\frac{1}{b^2}$, per cui: $p=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 16 \end{vmatrix}}=\frac{16-9}{16-36}=\frac{7}{-20}$;

  $q=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{-20}=\frac{1-4}{-20}=\frac{3}{20}$. Tali soluzioni non sono accettabili perché $p < 0$. Pertanto non esiste ellisse canonica passante per i punti dati.

Scrivere, se esistono, le equazioni delle ellissi reali in forma canonica verificanti le richieste seguenti (e indica l'eccentricità, F uno dei fuochi, a e b i semiassi)

Livello 1

10. Ha i semiassi che misurano 2 e 3 unità; Ha i semiassi che misurano 3/4 e $\sqrt{3}$ unità

$$\left[\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \vee \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\right);\left(\frac{16x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1 \vee \frac{x^2}{3}+\frac{16y^2}{9}=1\right)\right]$$

11. ($b = 2$, $e = 3/8$); (Passa per (2; –5), $a = 2$); (Passa per (1; –2), $a = 4$)

$$\left[\left(\frac{16x^2}{55}+\frac{y^2}{4}=1 \vee \frac{55x^2}{256}+\frac{y^2}{4}=1\right);\varnothing;\frac{x^2}{16}+\frac{15y^2}{64}=1\right]$$

12. (Passa per (–3; –2), $b = 2$); ($a = 3$, $F \equiv (2; 0)$); ($a = 1$, $e = 1/2$) $\left[\varnothing; \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1; x^2+\frac{4y^2}{3}=1\right]$

13. ($F \equiv (1; 0)$, $e = 4/5$); ($b = 7$, $F \equiv (0; –3)$); (Passa per $\left(0;\sqrt{5}\right)$ e (3; –2)); (Passa per (1; 0) e (–2; 2)) $\left[\frac{16x^2}{25}+\frac{16y^2}{9}=1; \frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{49}=1; \frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{5}=1; \varnothing\right]$

14. (Passa per $\left(\sqrt{2};0\right)$ e (–1; –3)); ($F \equiv (0; –2)$, $e = 1/3$); ($a + b = 5$, $a – b = 2$); ($a + b = 4$, $a – b = –5$) $\left[\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{18}=1; \frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{36}=1; \frac{4x^2}{49}+\frac{4y^2}{9}=1; \varnothing\right]$

15. Data l'ellisse canonica di semiassi che misurano 5 e 4, determinare la misura dell'area del rombo che ha per vertici i fuochi e i vertici dell'asse minore. [12]

16. Data l'ellisse canonica di semiassi che misurano 2 e 3, determinare la misura del perimetro del quadrilatero avente i vertici coincidenti con quelli dell'ellisse. $\left[4\cdot\sqrt{13}\right]$

Livello 2

17. (Passa per (–2; 1) e (2; –1)); (Passa per (–1; 3), $e = 5/8$); (Passa per (–2; 1), $e = 3/5$)
$$\left[\text{Indeterminato}; \left(\frac{169x^2}{2665}+\frac{64y^2}{615}=1 \vee \frac{64x^2}{415}+\frac{39y^2}{16185}=1\right); \left(\frac{25x^2}{116}+\frac{4y^2}{29}=1 \vee \frac{16x^2}{89}+\frac{25y^2}{89}=1\right)\right]$$

18. $b – a = 3,\ e = \frac{1}{2}$; Passa per (1; 2), $e = 1/2$; Passa per (2; 2), (4; –1)
$$\left[\frac{x^2}{\left(9+6\sqrt{3}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(12+6\sqrt{3}\right)^2}=1; \left(\frac{3x^2}{19}+\frac{4y^2}{19}=1 \vee \frac{x^2}{4}+\frac{3y^2}{16}=1\right); \frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1\right]$$

19. Passa per (1; 2), (3; 1); Passa per $\left(\frac{3}{\sqrt{10}};-1\right)$, $F \equiv (1; 0)$; Passa per $\left(1;\frac{6\sqrt{39}}{13}\right)$, $F \equiv (0; –2)$
$$\left[\frac{3x^2}{35}+\frac{8y^2}{35}=1; \frac{2x^2}{11+\sqrt{85}}+\frac{2y^2}{9\sqrt{85}}=1; \frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{9}=1\right]$$

20. $a + b = 2$, $F \equiv (2/3; 0)$; $b – a = 4$, $F \equiv (0; –3/7)$; $a + b = 3,\ e = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$$\left[\frac{81x^2}{100}+\frac{81y^2}{64}=1; \varnothing; \left(\frac{x^2}{4}+y^2=1 \vee x^2+\frac{y^2}{4}=1\right)\right]$$

21. Data l'ellisse di equazione $x^2 + 8y^2 = 9$, determinare la misura del perimetro dell'esagono in essa inscritto i cui vertici sono punti reticolo. $\left[4+4\cdot\sqrt{5}\right]$

22. Data l'ellisse canonica di semiassi che misurano 4 e 5, determinare la misura del perimetro dei triangoli non degeneri che hanno come vertici i fuochi e un punto scelto a caso sull'ellisse. [16]

23. Con riferimento al precedente quesito, qual è il massimo valore che può assumere l'area del detto triangolo? [12]

24. Con riferimento al quesito 22, determinare le coordinate del terzo vertice del triangolo in modo che esso abbia area 10. $\left[\left(\pm\frac{10}{3};\pm\frac{5\cdot\sqrt{11}}{6}\right)\right]$

Livello 3

25. Determinare l'equazione dell'ellisse canonica, passante per il punto $\left(\sqrt{3};-2\right)$ e tale che la retta di equazione $x – 2y = 0$ intercetti su di essa una corda di lunghezza $3\cdot\sqrt{2}$. $\left[\frac{x^2}{27}+\frac{6}{27}y^2=1\right]$

26. Determinare l'equazione dell'ellisse canonica, avente un fuoco nel punto $\left(0;\sqrt{5}\right)$ e tale che la retta di equazione $3x - 2y = 0$ intercetti su di essa una corda di lunghezza $\sqrt{26}$. $\left[\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\right]$

27. [CAS] Determinare le equazioni delle ellissi canoniche, avente eccentricità $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$ e tali che la retta di equazione $3x - 2y = 0$ intercetti su di esse una corda di lunghezza $\frac{2\cdot\sqrt{51}}{3}$. $\left[\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1 \vee \frac{2x^2}{11}+\frac{y^2}{11}=1\right]$

28. Determinare le equazioni delle tangenti all'ellisse in forma canonica, i cui semiassi misurano 2 e 3 unità, condotte per i suoi punti di ascissa 1. $\left[3x\pm 2\cdot\sqrt{3}y-12=0\right]$

29. Determinare le equazioni delle tangenti all'ellisse in forma canonica, i cui semiassi misurano 1 e 4 unità, condotte per i suoi punti di ordinata –2. $\left[\pm 4\sqrt{3}x-y-8=0\right]$

30. (Liceo scientifico suppletiva 1990/91) In un piano cartesiano ortogonale Oxy si considerino il punto $A \equiv (-1; 0)$ e la circonferenza C di centro $B \equiv (1; 0)$ e raggio $r > 2$. Si determini il luogo del punto P appartenente al raggio BT, al variare di T sulla circonferenza, tale che sia $\overline{PT}=\overline{PA}$. Dopo aver dimostrato che detto luogo è un'ellisse di fuochi A e B, si calcoli per quale valore di r la parte di piano da essa limitata è equivalente a 1/16 del cerchio assegnato. $\left[\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{\left(r^2-4\right)}-\frac{1}{4}=0; r=\frac{8}{\sqrt{15}}\right]$

Scrivere, se esistono, le equazioni delle ellissi reali in forma canonica verificanti le richieste seguenti

31. Ha $a + b = 3$, $b \in \mathbb{N}$ e passa per $\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\left[\frac{x^2}{4}+y^2=1\right]$

32. Ha $a - b = 1$, $b \in \mathbb{Q}$ e passa per $\left(\frac{3\cdot\sqrt{3}}{4};\frac{1}{4}\right)$ $\left[\frac{4x^2}{9}+4y^2=1\right]$

33. Ha un fuoco sulla retta $x + y - 5 = 0$, passa per $\left(12;-\frac{60}{13}\right)$ e $a > b$ $\left[\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1\right]$

Lavoriamo insieme

Di un'ellisse canonica conosciamo un suo punto $P \equiv (2; -3)$ e l'equazione, $x - 2y - 8 = 0$, della tangente a essa in P, vogliamo trovare l'equazione dell'ellisse.

Conviene sfruttare il risultato trovato nell'unità 4.1, cioè che l'equazione della tangente a un'ellisse canonica in un suo punto $P \equiv (x_P; y_P)$ è $b^2x_Px + a^2y_Py - a^2b^2 = 0$. Con i dati in nostro possesso deve perciò essere $2b^2x - 3a^2y - a^2b^2 = 0$, che deve essere equivalente all'equazione $x - 2y - 8 = 0$, deve cioè esistere un coefficiente di proporzionalità k, per il quale si ha che il rapporto fra i coefficienti omonimi delle due equazioni sono nella stessa proporzione. Dobbiamo perciò risolvere il sistema seguente: $\begin{cases} 2b^2 = k \\ -3a^2 = -2k \\ -a^2b^2 = -8k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{1}{2}k \\ a^2 = \frac{2}{3}k \\ \frac{1}{2}k\cdot\frac{2}{3}k = 8k \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{1}{2}k \\ a^2 = \frac{2}{3}k \\ k = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{1}{2}\cdot 24 \\ a^2 = \frac{2}{3}\cdot 24 \\ k = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 12 \\ a^2 = 16 \\ k = 24 \end{cases}$. Possiamo allora dire che l'ellisse cercata è: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.

Verifichiamo: $\frac{2^2}{16} + \frac{(-3)^2}{12} = 1 \Rightarrow \frac{4}{16} + \frac{9}{12} = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$, P appartiene all'ellisse. Inoltre $\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 \\ x - 2y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{(2y+8)^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1 \\ x = 2y+8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12y^2 + 96y + 192 + 4y^2 - 48 = 0 \\ x = 2y+8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16y^2 + 96y + 144 = 0 \\ x = 2y+8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (4y+12)^2 = 0 \\ x = 2y+8 \end{cases}$; la retta è tangente all'ellisse. Non è necessario continuare la risoluzione del sistema, poiché è evidente che esso ha una sola soluzione.

Livello 3

34. Data l'ellisse canonica di semiassi che misurano 2 e 5, e i suoi punti $A \equiv (-2; 0)$ e $B \equiv (0; -5)$, determinare le coordinate di un suo punto P in modo che il triangolo ABP abbia area 8. [(–8/5; 3)]
35. Data l'ellisse canonica di semiassi che misurano 12 e 13, determinare le coordinate di un suo punto P in modo che il triangolo F_1F_2P abbia area 6 (F_1 e F_2 sono i fuochi). $\left[P_1 \equiv \left(-\frac{2\cdot\sqrt{3}}{5}; \frac{13\cdot\sqrt{897}}{30}\right), P_2 \equiv \left(\frac{2\cdot\sqrt{3}}{5}; \frac{13\cdot\sqrt{897}}{30}\right)\right]$
36. Il triangolo di vertici uno dei fuochi e gli estremi dell'asse minore di un'ellisse è rettangolo, determinare l'eccentricità dell'ellisse. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
37. Determinare l'ellisse canonica passante per (1; 1) e ivi tangente alla retta $3x + y - 4 = 0$. $\left[\frac{3x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1\right]$
38. Determinare l'ellisse canonica con un vertice in (0; 4) e tangente a $2x + \sqrt{5}y - 10 = 0$. $\left[\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{16} = 1\right]$
39. Determinare l'ellisse canonica avente un fuoco in (–2; 0) e tangente a $2x + \sqrt{7}y - 7 = 0$. $\left[\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{3} = 1\right]$
40. Determinare le ellissi canoniche di eccentricità 2/3, tangenti alla retta $5\cdot\sqrt{2}x + 3\cdot\sqrt{5}y - 15 = 0$. $\left[\frac{x^2}{3} + \frac{3y^2}{5} = 1; \frac{131}{225}x^2 + \frac{131}{405}y^2 = 1\right]$
41. Un cerchio di raggio r è inscritto in un'ellisse di semiassi a e b, con $a > b$. Sapendo che l'ellisse ha area doppia del cerchio, determinare in che relazione stanno a, b ed r. Si ricordi che l'area dell'ellisse è $\pi \cdot a \cdot b$. [$a = 2b$, $b = r$]
42. Un cerchio di raggio r è inscritto in un'ellisse di semiassi a e b, con $a > b$. Sapendo che l'area del cerchio è uguale a quella di ciascuna delle altre due zone esterne al cerchio ma interne all'ellisse, determinare l'eccentricità dell'ellisse. $\left[\frac{2\cdot\sqrt{2}}{3}\right]$
43. Qual è il poligono regolare con il maggior numero di lati può essere inscritto in un'ellisse? Giustificare la risposta. [Quadrato, infatti ogni poligono regolare è inscrivibile in una circonferenza e una circonferenza e un ellisse non possono avere più di 4 punti in comune]
44. Sapendo che la retta di equazione $y = mx + 1$, incontra l'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 1$, esattamente in un punto, quanto vale m^2? [3/4]

Lavoriamo insieme

Trovare l'ellisse avente come fuochi i punti $F_1 \equiv (2; -1)$ e $F_2 \equiv (-1; 3)$ *e asse maggiore che misura* 12.

Consideriamo un generico punto $P \equiv (x; y)$ e imponiamo le condizioni del luogo:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 12 \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} = 12$$

Adesso dobbiamo effettuare delle operazioni che ci consentano di semplificare l'equazione eliminando le radici. $\left(\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2}\right)^2 = \left(12 - \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2}\right)^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 144 + x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 - 24 \cdot \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} \Rightarrow -6x + 8y - 149 = -24 \cdot \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} \Rightarrow (-6x + 8y - 149)^2 = \left(24 \cdot \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2}\right)^2 \Rightarrow 36x^2 + 64y^2 + 22201 - 96xy + 1788x - 2384y = 576x^2 + 576y^2 + 1152x + 576 - 3456y + 5760 \Rightarrow 540x^2 + 512y^2 + 96xy - 636x - 1072y - 16441 = 0$.

Determinare le equazioni delle ellissi di cui forniamo le coordinate dei fuochi e la misura dell'asse maggiore a

Livello 3

45. $F_1 \equiv (0; 1)$, $F_2 \equiv (1; 2)$, $a = 3$ [$32x^2 - 8xy + 32y^2 - 20x - 92y + 11 = 0$]
46. $F_1 \equiv (2; -1)$, $F_2 \equiv (0; 4)$, $a = 6$ [$128x^2 + 80xy + 44y^2 - 376x - 212y + 95 = 0$]
47. $F_1 \equiv (1; -1)$, $F_2 \equiv (-2; 2)$, $a = 2$ [$\varnothing$]
48. $F_1 \equiv (1; -1)$, $F_2 \equiv (2; 1)$, $a = 4$ [$60x^2 - 16xy + 48y^2 - 180x + 24y - 41 = 0$]
49. $F_1 \equiv (3; -2)$, $F_2 \equiv (-1; 1)$, $a = 6$ [$80x^2 + 96xy + 108y^2 - 112x + 12y - 337 = 0$]

Determinare le equazioni dei seguenti luoghi, verificando che sono ellissi

Livello 3

50. Luogo dei punti per i quali la somma dei quadrati delle distanze dalle rette di equazioni $4x + 2y - 3 = 0$ e $x + y + 5 = 0$ è 2. [$26x^2 + 36xy + 14y^2 + 76x + 88y + 219 = 0$]
51. Luogo dei punti per i quali è 3 il rapporto fra la distanza dalla retta di equazione $x + y - 1 = 0$ e la distanza dal punto $(-1; 4)$. [$17x^2 - 2xy + 17y^2 + 38x - 142y + 305 = 0$]
52. Luogo descritto dal vertice A del triangolo il cui perimetro è $4+\sqrt{2}$ e i cui altri due vertici sono $(1; 0)$, $(0; 1)$. [$15x^2 + 2xy + 15y^2 - 16x - 16y - 48 = 0$]
53. Luogo dei punti $P \equiv (x; y)$ le cui distanze PH e PK, dalle bisettrici degli assi coordinati verificano la relazione $2 \cdot \overline{PH}^2 + 3 \cdot \overline{PK}^2 = 4$. [$5x^2 \pm 2xy + 5y^2 - 8 = 0$]

Lavoriamo insieme

Anche per l'ellisse possiamo ripetere quanto già visto per la circonferenza, nel senso che essa non è una funzione, ma possiamo ricavare dalla sua equazione quella di due funzioni, che sono semiellissi.

Così a partire dall'ellisse canonica di equazione $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, ricaviamo: $y^2 = 9 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \Rightarrow y = \pm 3 \cdot \sqrt{\frac{4-x^2}{4}} \Rightarrow y = \pm\frac{3}{4} \cdot \sqrt{4-x^2}$, ossia le due distinte funzioni: $y = -\frac{3}{4} \cdot \sqrt{4-x^2} \wedge y = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{4-x^2}$, entrambe definite per $-2 \le x \le 2$.

Dalle seguenti equazioni delle ellissi ricavare le equazioni delle funzioni semiellissi, quindi rappresentarle graficamente

Livello 2

54. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$; $\frac{x^2}{25} + y^2 = 1$; $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$ $\left[y = \pm\frac{4 \cdot \sqrt{9-x^2}}{3}; y = \pm\frac{\sqrt{25-x^2}}{5}; y = \pm\frac{3 \cdot \sqrt{25-5x^2}}{5}\right]$

55. $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{49}=3$; $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{11}=2$; $3x^2+2y^2=1$ $\left[y=\pm\frac{7\cdot\sqrt{243-x^2}}{9}; y=\pm\frac{\sqrt{1078-77x^2}}{7}; y=\pm\frac{\sqrt{2-6x^2}}{2}\right]$

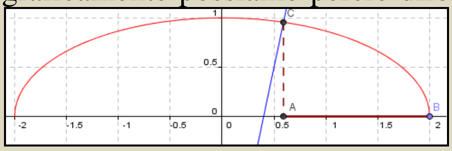
56. $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{5}=4$; $7x^2+5y^2=2\sqrt{2}$; $x^2+y^2=34$; $x^2+\sqrt{3}\,y^2=1+\sqrt{2}$

$$\left[y=\pm\frac{\sqrt{3380-65x^2}}{13}; y=\pm\frac{\sqrt{10-35x^2}}{5}; y=\pm\sqrt{3-\sqrt{2}\cdot x^2}; y=\pm\frac{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{1+\sqrt{2}-4x^2}}{3}\right]$$

Lavoriamo insieme

Risolvere graficamente la disequazione irrazionale $\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\le 5x-2$.

Intanto ricaviamo l'equazione dell'ellisse associata all'espressione irrazionale: $y=\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\Rightarrow y^2=\frac{4-x^2}{4}\Rightarrow\frac{x^2}{4}+y^2=1$, rappresentiamo perciò la semiellisse e la retta e confrontiamo le ascisse le ordinate dei punti della semiellisse e quelli della retta, con uguale ascissa, cercando quelli della semiellisse che hanno ordinata minore. Rappresentando graficamente possiamo perciò dire che le soluzioni



sono tutte le ascisse comprese tra i punti *A* e *B* in figura.

Una soluzione approssimata è $0,6 \le x \le 2$. Per i valori esatti dobbiamo determinare l'ascissa di *A*, risolvendo l'equazione $\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}=5x-2\Rightarrow 4-x^2=100x^2-80x+16\Rightarrow 101x^2-80x+12=0\Rightarrow x=\frac{40\pm\sqrt{1600-1212}}{101}=$ $=\frac{40\pm 2\sqrt{97}}{101}$. Ovviamente accettiamo la soluzione maggiore, cioè quella con il segno positivo, pertanto la soluzione esatta della disequazione è: $\frac{40+2\cdot\sqrt{97}}{101}\le x\le 2$.

Risolvere graficamente le seguenti disequazioni

Livello 2

57. $\frac{\sqrt{48-3x^2}}{6}\le\frac{1}{6}x+\frac{2}{3}$; $-6\cdot\sqrt{1-x^2}\ge 4-3x$; $\frac{\sqrt{48-3x^2}}{3}\ge x$ $[x=-4 \vee 2\le x\le 4 ; \varnothing ; -4\le x\le 2]$

58. $\frac{3\cdot\sqrt{4-x^2}}{2}\ge 5x+3$; $\frac{\sqrt{9-x^2}}{8}\le-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$; $\sqrt{12-3x^2}\ge 2-x$ $\left[-2\le x\le 0; x=3\vee 3\le x\le\frac{9}{5}; -1\le x\le 2\right]$

59. $-\frac{3\cdot\sqrt{49-x^2}}{7}\le 4-7x$; $\frac{4\cdot\sqrt{25-x^2}}{5}\ge 3x-4$; $\frac{\sqrt{252-21x^2}}{6}\ge 3-5x$

$$\left[-7\le x\le\frac{1372+63\cdot\sqrt{266}}{2410}; -5\le x\le\frac{600}{241}; \frac{180-2\cdot\sqrt{6258}}{307}\le x\le 2\cdot\sqrt{3}\right]$$

60. $\frac{\sqrt{36-9x^2}}{2}\le\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$; $-\frac{\sqrt{36-4x^2}}{3}\le x-1$; $-\frac{2\cdot\sqrt{75-15x^2}}{5}\le -4+x$

$$\left[\frac{\sqrt{71}-1}{6}\le x\le 2; \frac{9-12\cdot\sqrt{3}}{13}\le x\le 3; \frac{20-2\cdot\sqrt{15}}{17}\le x\le\frac{20+2\cdot\sqrt{15}}{17}\right]$$

Trasformazioni geometriche sull'ellisse

Lavoriamo insieme

Trovare le coordinate dell'ellisse di equazione $x^2 + 2y^2 = 2$, *traslata rispetto al vettore* (5; –1).

Le leggi della traslazione, sono: $t: \begin{cases} x' = x+5 \\ y' = y-1 \end{cases}$; le leggi della traslazione inversa: $t^{-1}: \begin{cases} x = x'-5 \\ y = y'+1 \end{cases}$. Sostituiamo nell'equazione, trascurando gli apici: $(x-5)^2 + 2 \cdot (y+1)^2 = 2 \Rightarrow x^2 + 2y^2 - 10x + 4y - 25 = 0$

Determinare le equazioni delle trasformate delle seguenti ellissi, secondo le trasformazioni indicate. (con ω indichiamo un'omotetia, con α una dilatazione)

Livello 2

61. $x^2 + 4y^2 = 1$, $t_{(-3;\,1)}$; $5x^2 + y^2 = 1$, $t_{\left(\frac{1}{2};-4\right)}$ [$x^2 + 4y^2 + 6x - 8y + 12 = 0$; $20x^2 + 4y^2 - 20x + 32y + 65 = 0$]

62. $3x^2 + 7y^2 = 2$, $t_{\left(\sqrt{2};-\sqrt{3}\right)}$; $7x^2 + y^2 = 9$, $s_{x=y}$ [$3x^2 + 7y^2 - 6\cdot\sqrt{2}\,x + 14\cdot\sqrt{3}\,y + 25 = 0$; $7x^2 + y^2 = 9$]

63. $x^2 + 2y^2 = 1$, $s_{\left(\frac{1}{2};-2\right)}$; $3x^2 + 10y^2 = 15$, $s_{x=-y}$ [$x^2 + 2y^2 - 2x + 16y + 32 = 0$; $3x^2 + 10y^2 = 15$]

64. $7x^2 + y^2 = 3$, $s_{\left(-\frac{2}{3};\frac{5}{2}\right)}$; $4x^2 + 3y^2 = 5$, $s_{\left(1-\sqrt{2};0\right)}$

$$\left[63x^2 + 9y^2 + 168x - 90y + 364 = 0; 4x^2 + 3y^2 + 16\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot x - 32\cdot\sqrt{2} + 53 = 0\right]$$

65. $8x^2 + 11y^2 = 2$, $s_{y=3}$; $3x^2 + 5y^2 = 1$, $s_{x=2}$ [$8x^2 + 11y^2 - 132x + 394 = 0$; $3x^2 + 5y^2 - 24x + 47 = 0$]

66. Ellisse in forma canonica i cui semiassi misurano rispettivamente 1 e 2, rotazione di 90° di centro l'origine [L'ellisse è unita]

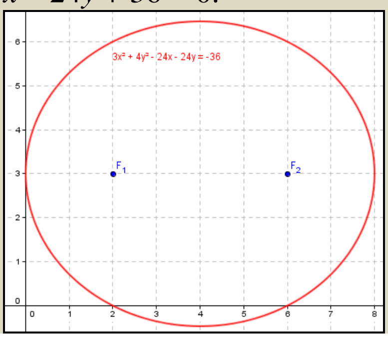
Livello 3

67. $4x^2 + 3y^2 = 5$, $s_{x+3y-1=0}$; $3x^2+2y^2 = 1$, $r_{90°,(1;-2)}$; $5x^2+y^2 = 2$, $r_{270°,(-2;3)}$
[$91x^2 - 24xy + 84y^2 - 22x - 96y - 94 = 0$; $2x^2 + 3y^2 + 4x + 18y + 28 = 0$; $x^2 + 5y^2 - 2x - 50y + 124 = 0$]

Lavoriamo insieme

Trovare l'ellisse che ha per fuochi i punti $F_1 \equiv (2; 3)$, $F_2 \equiv (6; 3)$ *e ha semiasse maggiore di misura* 4.

Intanto verifichiamo di avere a che fare con un'ellisse, ossia che l'asse maggiore sia più lungo di quello focale, cosa che è perché si ha: 8 > 4. Adesso osserviamo che i fuochi hanno la stessa ordinata, quindi l'asse focale è stato semplicemente traslato. Determiniamo il centro di simmetria, che è ovviamente il punto medio fra i fuochi, cioè $C \equiv (4; 3)$. Quindi abbiamo traslato secondo il vettore di componenti uguali a quelle di C. Ciò vuol dire che i fuochi prima della traslazione erano $F'_1 \equiv (2-4; 3-3) \equiv (-2; 0)$ e $F'_2 \equiv (2; 0)$ Poiché in una traslazione le misure rimangono inalterate l'ellisse cercata è traslazione dell'ellisse canonica di semiasse maggiore 4 e semiasse minore che si ottiene dall'equazione $4^2 - b^2 = 2^2 \Rightarrow b^2 = 12$. Quindi l'ellisse cercata è la traslata di $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$, secondo il vettore $v \equiv (4; 3)$, quindi la sua equazione è $\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{12} = 1$, che possiamo anche scrivere: $3x^2 + 4y^2 - 24x - 24y + 36 = 0$.



Determinare le equazione delle ellissi che hanno per fuochi i punti seguenti e semiasse maggiore di misura indicata

Livello 2

68. (4;1), (12;1), 5 ; (1;3), (1;5) 4 [$9x^2 + 25y^2 - 144x - 50y + 376 = 0$; $16x^2 + 15y^2 - 32x - 120y + 16 = 0$]
69. (3; 0), (8; 0), 7 ; (0; 1), (0; –5), 4 ; (2; 4), (–4; 4), $s = 8$
[$684x^2 + 784y^2 - 7524x - 12825 = 0$; $16x^2 + 7y^2 + 28y - 84 = 0$; $55x^2 + 64y^2 + 110x - 512y - 2441 = 0$]

70. Determinare l'equazione dell'ellisse che ha per vertici i punti (3; 0), (3; 10) e ha semiasse minore di misura 2. [$25x^2 + 4y^2 - 150x - 40y + 225 = 0$]

Le seguenti sono equazioni di ellissi il cui centro di simmetria è stato traslato rispetto all'origine degli assi, disegnarle, determinando centro e misure dei semiassi

71. $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$; $\frac{x^2-4x+4}{9}+y^2+2y=0$ [(–1; 3), a = 2, b = 3; (2; –1), a = 3, b = 1]
72. $x^2+6x+8+\frac{y^2}{16}=0$; $\frac{x^2}{4}+\frac{3}{2}x+\frac{y^2}{25}+\frac{161}{100}-\frac{6}{25}y=0$ [(–3; 0), a = 1, b = 4; (–3; 3), a = 2, b = 5]
73. $y^2+10y+24+\frac{x^2}{16}=0$; $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+x-\frac{2}{3}y+1=0$ [(–5; 0), a = 4, b = 1; (–2; 3), a = 2, b = 3]
74. $400x^2 - 1200x + 225y^2 + 360y - 2256 = 0$; $6x^2 + 20x + 3y^2 - 4y = 0$
$$\left[\left(\frac{3}{2};-\frac{4}{5}\right), a=\frac{\sqrt{33}}{2}, b=2\cdot\sqrt{\frac{11}{3}}; \left(-\frac{5}{3};\frac{2}{3}\right), a=\sqrt{3}, b=\sqrt{6}\right]$$
75. $36x^2 + 252x + 90y^2 + 240y + 421 = 0$; $144x^2 - 360x + 576y^2 - 384y + 1441 = 0$
$$\left[\left(-\frac{7}{2};-\frac{4}{3}\right), a=\sqrt{5}, b=\sqrt{2}; ellisse\, immaginaria\right]$$

Lavoriamo insieme

Trovare l'equazione dell'asse della simmetria che muta l'ellisse di equazione $x^2 + 3y^2 = 5$ nell'ellisse $x^2 + 3y^2 + 12x + 31 = 0$, sapendo che tale asse è parallelo a quello delle ordinate.
Applichiamo la simmetria di asse generico $x - h = 0$ all'ellisse di partenza, applicando le leggi $s_{x-h=0}:\begin{cases} x'=2h-x \\ y'=y \end{cases}$, ottenendo $(2h - x)^2 + 3y^2 = 5 \Rightarrow 4h^2 - 4hx + x^2 + 3y^2 - 5 = 0$. Imponiamo che le due equazioni coincidano: $x^2 + 3y^2 + 12x + 31 = 0 \equiv 4h^2 - 4hx + x^2 + 3y^2 - 5 = 0 \Rightarrow 12x + 31 = 0 \equiv 4h^2 - 4hx - 5 = 0$; da cui $\begin{cases} 12=-4h \\ 31=4h^2-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h=-3 \\ h=-3 \end{cases}$. Visto che il sistema ammette un'unica soluzione concludiamo che l'asse ha equazione $x = -3$.

Livello 2

76. Determinare il vettore della traslazione che trasforma $2x^2 + 3y^2 = 4$ in $2x^2 + 3y^2 - 8x + 4 = 0$. [(2; 0)]
77. Determinare il vettore della traslazione che trasforma $x^2 + 4y^2 = 5$ in $4x^2 + y^2 + x - 4y + 1 = 0$. [$\varnothing$]
78. Determinare il centro della simmetria che trasforma $3x^2 + y^2 = 1$ in $3x^2 + y^2 + 12x - 8y + 27 = 0$. [(–2; 4)]
79. Determinare il centro della simmetria che trasforma $4x^2 + 3y^2 = 2$ in $3x^2 + 4y^2 + x - 1 = 0$. [$\varnothing$]
80. Determinare la retta di equazione $x = h$, per cui la simmetria di asse tale retta trasforma $2x^2 + 3y^2 = 7$ in $2x^2 + 3y^2 - 40x + 193 = 0$. [$x = -5$]
81. Determinare la retta di equazione $y = h$, per cui la simmetria di asse tale retta trasforma $5x^2 + 2y^2 = 7$ in $5x^2 + 2y^2 + 32y + 121 = 0$. [$y = 4$]

Livello 3

82. CAS Determinare la retta di equazione $ax + by = 0$, per cui la simmetria di asse tale retta trasforma l'ellisse $8x^2 + 9y^2 = 3$ nell'ellisse $216x^2 + 209y^2 - 24xy - 75 = 0$. [$x - 2y = 0$]
83. Determinare le coordinate del centro della rotazione di 90° che trasforma l'ellisse $5x^2 + 2y^2 = 3$ nell'ellisse $2x^2 + 5y^2 + 16x + 40y + 109 = 0$. [(0; –4)]
84. Determinare le coordinate del centro della rotazione di 270° che trasforma l'ellisse $4x^2 + 5y^2 = 6$

nell'ellisse $5x^2 + 4y^2 + 10x + 24y + 35 = 0$. [(1; –2)]

Lavoriamo insieme

Trasformare l'ellisse di equazione $5x^2 + 7y^2 = 3$, mediante un'omotetia di costante $k = 2$ e centro $C \equiv (-2; 3)$.

Le leggi sono: $\sigma_{(-2,3),2}: \begin{cases} x' = 2x+2 \\ y' = 2y-3 \end{cases}$. Ricaviamo le leggi inverse: $\sigma^{-1}{}_{(-2,3),2}: \begin{cases} x = \frac{1}{2}x'-1 \\ y = \frac{1}{2}y'+\frac{3}{2} \end{cases}$ e applichiamole all'ellisse senza usare gli apici: $5\cdot\left(\frac{1}{2}x-1\right)^2 + 7\cdot\left(\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}\right) = 3 \Rightarrow 5\cdot\left(\frac{1}{4}x^2 - x + 1\right) +$ $+7\cdot\left(\frac{1}{4}y^2+\frac{3}{2}y+\frac{9}{4}\right) - 3 = 0 \Rightarrow \frac{5}{4}x^2 - 5x + 5 + \frac{7}{4}y^2 + \frac{21}{2}y + \frac{63}{4} - 3 = 0 \Rightarrow 5x^2 + 7y^2 - 20x + 42y + 71 = 0$.

Livello 2

85. Trasformare l'ellisse di equazione $4x^2 + y^2 = 1$ secondo l'omotetia di centro (–1/2; 3/2) e rapporto k = 3. [$4x^2 + y^2 - 8x + 6y + 4 = 0$]

86. Trasformare l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{5}=2$, secondo l'omotetia di centro (0: 0) e rapporto k = –4/5. [$25x^2 + 15y^2 = 96$]

87. Determinare le coordinate del centro dell'omotetia di rapporto k = 1/2 che trasforma l'ellisse di equazione $5x^2 + 2y^2 = 3$ nell'ellisse di equazione $5x^2 + 2y^2 + 5x + 6y + 5 = 0$. [(–1; –3)]

88. Determinare il rapporto dell'omotetia di centro (0; –4) che trasforma l'ellisse $7x^2 + 3y^2 = 2$ nell'ellisse di equazione $14x^2 + 6y^2 + 72y + 215 = 0$. [$k$ = –1/2]

89. Trasformare l'ellisse in forma canonica, di semiassi che misurano 3 e 4 unità, secondo la dilatazione di leggi $\alpha: \begin{cases} x' = 2x \\ y' = -3y \end{cases}$. Si ottiene ancora un'ellisse in forma canonica? [$4x^2 + y^2 = 144$; Sì]

Trasformare la generica ellisse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ secondo le trasformazioni accanto indicate

Livello 3

90. $t_{(v_x;v_y)}$; $\omega_{O,k}$; $\alpha_{m,n}$ $\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{2v_x}{a^2}\cdot x-\frac{2v_y}{b^2}\cdot y+\frac{v_x^2}{a^2}+\frac{v_y^2}{b^2}-1=0; \frac{x^2}{a^2\cdot k^2}+\frac{y^2}{b^2k^2}=1; \frac{x^2}{m^2\cdot k^2}+\frac{y^2}{n^2k^2}=1\right]$

91. $s_{(xC;\,yC)}$ $\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{4x_C}{a^2}\cdot x-\frac{4y_C}{b^2}\cdot y-\frac{4x_C^2}{a^2}-\frac{4y_C^2}{b^2}+1=0\right]$

92. $s_{x=h}$; $s_{y=h}$ $\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{4h}{a^2}\cdot x+\frac{4h^2}{a^2}-1=0; \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{4h}{b^2}\cdot y+\frac{4h^2}{b^2}-1=0\right]$

93. Trasformiamo l'ellisse in forma canonica, di semiassi che misurano 1 e 2 unità, secondo la similitudine di leggi $\sigma: \begin{cases} x' = 3\cdot(x-y) \\ y' = 3\cdot(x+y) \end{cases}$. $\left[\frac{5x^2}{144}-\frac{1}{24}xy+\frac{5y^2}{144}-1=0\right]$

94. Determinare i valori dei parametri a e b in modo che la trasformata dell'ellisse $3x^2 + 2y^2 = 5$, secondo la similitudine di leggi $\sigma: \begin{cases} x' = ax-by \\ y' = ax+by \end{cases}$, sia $14x^2 - 4xy + 11y^2 - 500 = 0$. [$a$ = 4, b = –2]

95. Determinare il più piccolo valore positive di b per cui l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{b^2}=1$, sia simile all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{27}=1$. [4]

Lavoriamo insieme

Trovare le coordinate del centro di simmetria dell'ellisse $x^2 + 2y^2 + x - y - 2 = 0$.

Applichiamo una simmetria rispetto al generico centro $C \equiv (x_C; y_C)$: $(2x_C - x)^2 + 2(2y_C - y)^2 + (2x_C - x) - (2y_C - y) - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 2y^2 - (4x_C + 1)x - (8y_C - 1)y + 4x_C^2 + 2x_C + 8y_C^2 - 2y_C - 2 = 0$. Affinché C sia centro di simmetria la curva trasformata deve coincidere con quella di partenza, devono perciò essere verificate le seguenti condizioni: $\begin{cases} 4x_C + 1 = 1 \\ 8y_C - 1 = 1 \\ 4x_C^2 + 2x_C + 8y_C^2 - 2y_C - 2 = -2 \end{cases}$. Risolviamo le prime due equazioni e sostituiamo nella terza per stabilire se la verifica: $\begin{cases} x_C = 0 \\ y_C = \frac{1}{4} \\ 4 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{4} - 2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 0 \\ y_C = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$. Concludiamo che il centro dell'ellisse è $C \equiv \left(0; \frac{1}{4}\right)$.

Trovare le coordinate del centro di simmetria delle seguenti ellissi

Livello 3

96. $4x^2 + y^2 + x - 2 = 0$; $3x^2 + 2y^2 + 4x - 2y = 0$; $x^2 + 6y^2 + y - 1 = 0$; $5x^2 + 3y^2 + 2x - 4y - 1 = 0$
$\left[\left(-\frac{1}{8};0\right);\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{2}\right);\left(0;-\frac{1}{12}\right);\left(-\frac{1}{5};\frac{2}{3}\right)\right]$

97. $7x^2 + y^2 + 3x - 2 = 0$; $x^2 + 4y^2 + x - 1 = 0$; $x^2 + 2xy + 3y^2 + x - 4y - 5 = 0$; $8x^2 + 3xy + y^2 + 2y + 1 = 0$
$\left[\left(-\frac{3}{14};0\right);\left(-\frac{1}{2};0\right);\left(-\frac{7}{4};\frac{5}{4}\right);\left(\frac{6}{23};\frac{32}{23}\right)\right]$

Fasci di ellissi

Adesso parliamo dei fasci di ellissi.

Definizione 5

Date due ellissi reali di equazioni $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ e un parametro reale k, diciamo **fascio di ellissi generato dalle due ellissi,** la totalità dei punti del piano che verificano l'equazione $f(x, y) + k \cdot g(x, y) = 0$, nonché l'ellisse $g(x, y) = 0$.

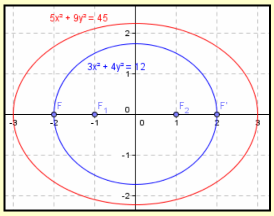
Anche stavolta aggiungiamo una delle generatrici, quella moltiplicata per il parametro, sempre perché diversamente non la troveremmo per nessun valore del parametro. Anche le ellissi di un fascio possono avere punti comuni.

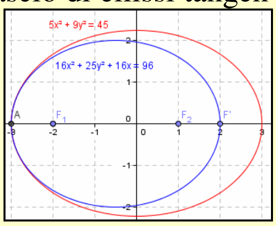
Definizione 6

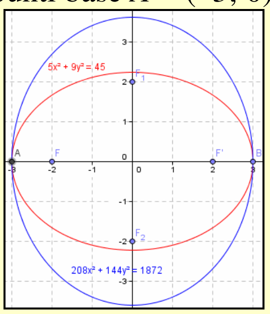
Gli eventuali punti comuni a tutte le ellissi di un fascio si chiamano **punti base del fascio**.

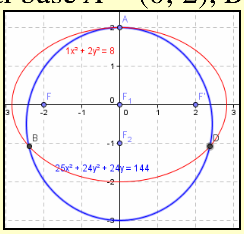
Esempio 10

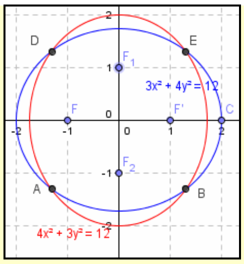
Negli esempi seguenti mostriamo un grafico, ma potremmo anche risolvere un sistema.

- Il fascio di ellissi di equazione $(5x^2 + 9y^2 - 45) + k \cdot (3x^2 + 4y^2 - 12) = 0$ non ha punti base perché le ellissi generatrici, come mostrato nel grafico (in cui segniamo anche i fuochi), o come può vedersi risolvendo 

un sistema, non hanno punti in comune.
- Il fascio di ellissi di equazione $(5x^2 + 9y^2 - 45) + k \cdot (16x^2 + 25y^2 + 16x - 96) = 0$ ha un solo punto base $A \equiv (-3; 0)$, perché le ellissi generatrici hanno tale punto in comune, cioè sono un fascio di ellissi tangen- 

ti.
- Il fascio di ellissi di equazione $(5x^2 + 9y^2 - 45) + k \cdot (208x^2 + 144y^2 - 1872) = 0$ ha punti base $A \equiv (-3; 0)$ 

e $B \equiv (3; 0)$, perché le ellissi generatrici hanno tali punti in comune.
- Il fascio di ellissi di equazione $(x^2 + 2y^2 - 8) + k \cdot (25x^2 + 24y^2 - 24y - 144) = 0$ ha punti base $A \equiv (0; 2)$, B 
e D, perché le ellissi generatrici hanno tali punti in comune.
- Il fascio di ellissi di equazione $(3x^2 + 4y^2 - 12) + k \cdot (4x^2 + 3y^2 - 12) = 0$ ha quattro punti base, perché le



ellissi generatrici hanno i punti A, B, C, e D in comune.

L'esempio precedente ci permette di enunciare il seguente risultato.

Teorema 4

In un fascio di ellissi vi sono al più 4 punti base.

Vediamo qualche caso particolare di fasci di ellissi.

Esempio 11

- Il fascio di equazione $\frac{x^2}{k^2+7}+\frac{y^2}{3k^2+1}=1$, è chiaramente un fascio di ellissi canoniche sempre reali, dato che i denominatori sono sempre numeri reali positivi per qualsiasi valore assegniamo al parametro k. Possiamo allora stabilire per esempio per quali valori del parametro le ellissi hanno asse focale l'asse x, quando l'asse y e quando sono circonferenze. Cominciamo proprio con quest'ultimo caso: $k^2 + 7 = 3k^2 + 1 \Rightarrow 2k^2 - 6 = 0 \Rightarrow k^2 = 3$. Mediante esso possiamo stilare il seguente schema: $\begin{cases} asse\ \ focale\ \vec{x} & 0 \le k^2 < 3 \\ circonferenza & k^2 = 3 \\ asse\ \ focale\ \vec{y} & k^2 > 3 \end{cases}$.
- Vogliamo sapere se vi sono ellissi di eccentricità $\frac{1}{2}$. Dobbiamo considerare i due casi a seconda dell'asse focale, quindi dobbiamo risolvere i seguenti sistemi: $\begin{cases} \frac{\sqrt{k^2+7-\left(3k^2+1\right)}}{\sqrt{k^2+7}}=\frac{1}{2} \\ 0 \le k^2 < 3 \end{cases} \vee \begin{cases} \frac{\sqrt{3k^2+1-\left(k^2+7\right)}}{\sqrt{3k^2+1}}=\frac{1}{2} \\ k^2 > 3 \end{cases}$.

Risolviamo nell'incognita k^2: $\begin{cases} \frac{\sqrt{-2k^2+6}}{\sqrt{k^2+7}}=\frac{1}{2} \\ 0 \le k^2 < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-2k^2+6}{k^2+7}=\frac{1}{4} \\ 0 \le k^2 < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8k^2+24=k^2+7 \\ 0 \le k^2 < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k^2=\frac{17}{9} \\ 0 \le k^2 < 3 \end{cases}$;

$\begin{cases} \frac{\sqrt{2k^2-6}}{\sqrt{3k^2+1}}=\frac{1}{2} \\ k^2 > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2k^2-6}{3k^2+1}=\frac{1}{4} \\ k^2 > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8k^2-24=3k^2+1 \\ k^2 > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5k^2=25 \\ k^2 > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k^2=5 \\ k^2 > 3 \end{cases}$. Le soluzioni sono entrambe accettabili, quindi nel fascio ci sono le seguenti due ellissi che verificano quanto richiesto:

$$\frac{x^2}{\frac{17}{9}+7}+\frac{y^2}{3\cdot\frac{17}{9}+1}=1 \Rightarrow \frac{9x^2}{80}+\frac{9y^2}{60}=1;\ \frac{x^2}{5+7}+\frac{y^2}{3\cdot 5+1}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Verifiche

Lavoriamo insieme

Studiare il fascio di ellissi di equazione: $\dfrac{x^2}{4k^2+3}+\dfrac{y^2}{5k^2+1}=1$.

Possiamo dire che abbiamo a che fare sempre con ellissi canoniche poiché i denominatori sono quantità sempre positive. Non possiamo dire invece su quale asse si trova il fuoco poiché nessuno dei due denominatori è sempre maggiore dell'altro. Si ha infatti: $5k^2 + 1 \geq 4k^2 + 3 \Rightarrow k^2 \geq 2$. Quindi possiamo dire che si ha: $\begin{cases} k<-\sqrt{2} \vee k>\sqrt{2} & \text{ellissi asse foc. } y \\ k=\pm\sqrt{2} & \text{circonferenze} \\ -\sqrt{2}<k<\sqrt{2} & \text{ellissi asse foc. } x \end{cases}$. A questo proposito risulta particolarmente interessante determinare, nel fascio, ellissi che hanno una data eccentricità, per esempio e = 3/4. Infatti dobbiamo distinguere i casi a seconda di quale dei due assi coordinati sia quello focale. Pertanto dobbiamo risolvere i sistemi:

$$\begin{cases} \dfrac{5k^2+1-4k^2-3}{5k^2+1}=\dfrac{9}{16} \\ k<-\sqrt{2} \vee k>\sqrt{2} \end{cases} \wedge \begin{cases} \dfrac{4k^2+3-5k^2-1}{4k^2+3}=\dfrac{9}{16} \\ -\sqrt{2}<k<\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{k^2-2}{5k^2+1}=\dfrac{9}{16} \\ k<-\sqrt{2} \vee k>\sqrt{2} \end{cases} \wedge \begin{cases} \dfrac{2-k^2}{4k^2+3}=\dfrac{9}{16} \\ -\sqrt{2}<k<\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 16k^2-32=45k^2+9 \\ k<-\sqrt{2} \vee k>\sqrt{2} \end{cases} \wedge \begin{cases} 32-16k^2=36k^2+27 \\ -\sqrt{2}<k<\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -29k^2=41 \\ k<-\sqrt{2} \vee k>\sqrt{2} \end{cases} \wedge \begin{cases} -52k^2=-5 \\ -\sqrt{2}<k<\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \varnothing \wedge \begin{cases} k=\pm\sqrt{\dfrac{5}{52}} \\ -\sqrt{2}<k<\sqrt{2} \end{cases}$$

Possiamo perciò dire che vi sono due valori di k, ma una sola ellisse del fascio, che ha la data eccentricità.

Nei seguenti fasci di ellissi canoniche determinare, se esistono, i valori del parametro reale k per i quali si hanno ellissi: a) che degenerano in circonferenze; b) passanti per un punto dato P; c) con un semiasse di una data misura, s; d) con un dato fuoco F; e) con una data eccentricità e.

Livello 2

1. $\dfrac{x^2}{2k^2+3}+\dfrac{y^2}{3k^2+4}=1$; $P \equiv (2; 3)$; $s = 5$; $F\equiv (0; 2)$; $e = 2/5$

$$\left[\text{a) } \varnothing;\text{ b) } k^2=\frac{13+\sqrt{913}}{12};\text{ c) } k^2=7 \vee k^2=11;\text{ d) } k^2=3;\text{e) } \varnothing\right]$$

2. $\dfrac{x^2}{3k^2+5}+\dfrac{y^2}{k^2+2}=1$; $P \equiv (-1; 1)$; $s = 3$; $F\equiv\left(-\sqrt{11};0\right)$; $e=\sqrt{\dfrac{13}{20}}$

[a) $\varnothing$; b) $\varnothing$; c) $k^2 = 4/3 \vee k^2 = 7$; d) $k^2 = 4$; e) $k^2 = 5$]

3. $\dfrac{x^2}{2k^2+1}+\dfrac{y^2}{k^2+4}=1$; $P\equiv (1; -1)$; $s = 3$; $F\equiv\left(0;\sqrt{5}\right)$; $e = 8/7$

$$\left[\text{a) } k^2=3;\text{ b) } k^2=\frac{\sqrt{11}-3}{2};\text{ c) } k^2=4 \vee k^2=5;\text{ d)}\varnothing;\text{ e) } \varnothing\right]$$

4. $\dfrac{x^2}{8k^2+1}+\dfrac{y^2}{3k^2+7}=1$; $P \equiv (-1; -2)$; $s = 1$; $F \equiv (3; 0)$; $e = 4/5$

$$\left[\text{a) } k^2=\frac{6}{5};\text{ b) } k^2=\frac{\sqrt{15}-3}{6};\text{ c) } k=0;\text{ d) } k^2=3;\text{ e) } k^2=\frac{38}{173}\right]$$

5. $\dfrac{x^2}{2k^2+1}+\dfrac{y^2}{k^2+5}=1$; $P \equiv (0 ; 3)$; $s = 4$; $F \equiv (1; 0)$; $e = 4/7$

$$\left[\text{a) } k^2=4;\text{ b) } k^2=4;\text{ c) } k^2=\frac{15}{2} \vee k^2=11;\text{ d) } k^2=5;\text{ e) } k^2=\frac{212}{17} \vee k^2=\frac{116}{65}\right]$$

6. $\frac{x^2}{7k^2+2}+\frac{y^2}{4k^2+3}=1$; $P\equiv(3; 2)$; $s = 7$; $F\equiv\left(0;-\sqrt{2}\right)$; $e = 2/5$

$\left[\text{a) } k^2=\frac{1}{3};\ \text{b) } k^2=\frac{35+3\cdot\sqrt{497}}{56};\ \text{c) } k^2=\frac{23}{2}\vee k^2=\frac{47}{7};\text{d) }\varnothing\ ;\text{e) } k^2=\frac{1}{7}\vee k^2=\frac{33}{47}\right]$

Livello 3

7. Considerato il fascio di ellissi di equazione $\frac{x^2}{5k^2+4}+\frac{y^2}{4k^2+3}=1$, riducendo al minimo i calcoli spiegare perché ciascuna delle ellissi con la seguente caratteristica non appartiene al fascio.
ha il fuoco in (0; 3) [I fuochi stanno tutti sull'asse x]
ha l'asse minore lungo 1 unità [Tutti gli assi minori sono lunghi almeno $\sqrt{3}$]
ha l'asse maggiore lungo 1,3 unità [Tutti gli assi maggiori sono lunghi almeno 2]
ha l'eccentricità 2 [L'eccentricità di un'ellisse è minore di 1]
ha l'eccentricità e = 0,3. $\left[\frac{1}{5}<e\le\frac{1}{4}\right]$

8. Con riferimento al fascio dell'esercizio 4. Per quali valori reali di z esistono ellissi reali che hanno come uno dei loro fuochi $F\equiv(z; 0)$ e per quali $F\equiv(0; z)$? $\left[\forall z\in\mathbb{R};-\sqrt{8}<z\le\sqrt{8}\right]$

9. Con riferimento al fascio dell'esercizio 6. Per quali valori reali di z esistono ellissi reali che hanno eccentricità z? $\left[\text{Af}x:0\le z<\frac{\sqrt{21}}{7};\text{Af}y:0\le z<\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

Scrivere le equazioni dei fasci di ellissi canoniche che verificano quanto richiesto:

Livello 2

10. Con i fuochi sull'asse delle ascisse e il diametro maggiore lungo 3 $\left[\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1, 0<b<3\right]$

11. Con i fuochi sull'asse delle ordinate e il diametro minore lungo 5 $\left[\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ b>5\right]$

12. Aventi fuoco in (3; 0) ; Passanti per (2; –3) $\left[\frac{x^2}{m+9}+\frac{y^2}{m}=1,\ m>0;\frac{(p-9)^2}{16p^2}\cdot x^2+\frac{y^2}{p^2}=1\right]$

13. Aventi i fuochi sull'asse delle ordinate ed eccentricità 1/3 $\left[\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{4m}=1,\ m>0\right]$

14. I cui semiassi misurano complessivamente 7 $\left[\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{7-m}=1,\ 0<m<7\vee\frac{x^2}{7-m}+\frac{y^2}{m}=1,\ 0<m<7\right]$

15. Aventi il fuoco sulla retta $3x - 2y + 1 = 0$ $\left[\frac{x^2}{m^2}+\frac{16y^2}{(4m+1)^2}=1\vee\frac{81x^2}{(9m-1)^2}+\frac{y^2}{m^2}=1\right]$

16. Aventi la retta di equazione $x = 2y - 3$ come tangente $\left[\frac{x^2}{9-4b}+\frac{y^2}{b}=1,\ 0<b<\frac{9}{4}\right]$

L'angolo di Derive

Sul link http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%204/4-3/4-3-1.exe si scarica un'applicazione per l'uso di Derive per lo studio delle ellissi e su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%204/4-3/4-3-1.dfw si scarica il relativo file Derive.

Attività

1. Verificare gli esercizi assegnati nel paragrafo.

L'angolo di Geogebra

Sul link http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%204/4-3/4-3-2.exe si scarica un'applicazione per l'uso di Geogebra per lo studio delle ellissi e su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%204/4-3/4-3-2.rar si scarica il relativo file Geogebra.

Attività

1. Verificare gli esercizi assegnati nel paragrafo.

L'angolo della MateFisica

L'ellisse trova diverse applicazioni nelle scienze fisiche. Una di esse, forse la più importante è contenuta nelle cosiddette leggi di Keplero (1571 – 1648). Per quasi duemila anni ciò che era stato enunciato da Aristotele (384 – 322 a. C.) nelle più diverse branche del sapere, dalla filosofia al teatro, dalla medicina all'astronomia, fu considerato come dogma indiscutibile. In effetti vi è da dire che Aristotele aveva ben poco dello scienziato, almeno come lo consideriamo ai giorni nostri. Egli sosteneva che i pianeti del sistema solare (ai suoi tempi ne erano conosciuti solo 6) si muovessero con un moto circolare uniforme. La sua giustificazione era alquanto discutibile*: i pianeti sono corpi perfetti, quindi devono avere la forma perfetta sferica, e proprio perché corpi perfetti dovevano muoversi con movimenti perfetti, quindi circolari*. Vi è da dire che in seguito altri studiosi avanzarono altre teorie che però mantenevano in ogni caso l'assioma che i movimenti fossero circolari. Al massimo consideravano composizioni di moti circolari, come proposto da Ipparco di Nicea (160 – 125 a. C.), il quale teorizzava che ogni pianeta si muovesse lungo una circonferenza che a sua volta rotolava attorno a un'altra circonferenza. Un'altra teoria universalmente accettata era quella geocentrica, secondo la quale la terra è il centro dell'universo, quindi tutti gli altri pianeti vi girano intorno. Una teoria poco accettata era invece quella eliocentrica di Aristarco di Samo.
Finalmente nel XVI secolo nasce la scienza sperimentale come la intendiamo oggi, ossia una scienza che teorizza a seguito di osservazioni e che continua a sperimentare per cercare di confermare o eventualmente di rigettare la stessa teoria. L'iniziatore di questo nuovo punto di vista è universalmente riconosciuto nel nostro Galileo Galilei (1564 – 1642), il quale però subì le persecuzioni della chiesa proprio per aver osato sostenere tesi che andavano contro i dogmi cattolici. In questo nuovo mondo, che da una parte sfida l'ignoto, dall'altro deve stare attento che i risultati ottenuti non siano contrari ai pareri dominanti, nasce Johannes Kepler (1571 – 1630), il quale sfrutta l'enorme massa di dati astronomici che Tycho Brahe (1546 – 1601), un astronomo danese, è riuscito a ottenere grazie ai nuovi moderni e potenti strumenti. In particolare questi dati sono in contrasto con la teoria del moto circolare. Keplero grazie a un vero e proprio atto di coraggio intellettuale teorizza che i moti dei pianeti avvengano intorno al sole e non intorno alla terra; che la traiettoria ha forma ellittica e non circolare; che il sole occupa uno dei fuochi di questa ellisse; che il moto non è uniforme, dato che il pianeta si muove con velocità inversamente proporzionale alla sua distanza dal sole. Keplero riesce anche a calcolare l'eccentricità delle traiettorie ellittiche di alcuni pianeti, quella della terra viene calcolata in 0,016,valore prossimo a zero, ecco perciò perché la traiettoria della terra può anche considerarsi circolare senza che ciò possa essere distinto dagli inevitabili errori nei calcoli e nelle osservazioni. Ciò invece non accade per quella di Marte, che fu proprio quella che pose il problema, dato che l'eccentricità è 0,093, ancor più con Mercurio per cui si ha e = 0,2. I valori dell'eccentricità dei rimanenti pianeti del sistema solare sono: Venere: 0,01: Giove: 0,05; Saturno: 0,06; Urano: 0,05; Nettuno: 0,01; Plutone: 0,25.

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi

1. Una ellisse può essere spezzata in due rette parallele? E in due rette incidenti? E in due rette immaginarie? Giustificare le risposte. [No; sì; sì]
2. Siano le circonferenze di centro l'origine e raggi rispettivi 1 e 2. Sia una generica retta per l'origine che incontra le due circonferenze nei punti P e Q; si traccino le rette per P parallela all'asse y e per Q parallela all'asse x che si incontrano nel punto T. Determinare il luogo tracciato da T al variare della retta. [$4x^2 + y^2 - 4 = 0$]
3. CAS Determinare le coordinate del centro di simmetria della conica $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$. $\left[\left(\dfrac{be-2cd}{4ac-b^2}, \dfrac{bd-2ae}{4ac-b^2}\right)\right]$
4. Con riferimento al precedente esercizio possiamo concludere che qualsiasi conica non degenere ha un centro di simmetria? Giustificare la risposta. [No solo ellissi e iperboli hanno un centro di simmetria]
5. Tenuto conto che una affinità muta cerchi in ellissi e che conserva il rapporto delle aree, determinare una formula per calcolare l'area di una ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Suggerimento. Applicare le leggi $\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$ alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ e a un quadrato di lato 1. [πab]
6. CAS Studiare le intersezioni fra l'ellisse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ e la circonferenza $x^2+y^2-2\cdot\dfrac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2-b^2}\cdot x=0$, per $a > b$. [Sempre tangenti in due punti]

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia navale) Tra le circonferenze aventi il centro sull'ellisse canonica di semiassi lunghi rispettivamente 2 e 5, trovare quelle tangenti a entrambi gli assi coordinati.
2. (Accademia navale) Verificare che l'equazione $\dfrac{x^2}{1+b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, rappresenta una famiglia di ellissi aventi tutti gli stessi fuochi, al variare del parametro reale non nullo b. riconoscere che per un punto P del piano passa un'ellisse della famiglia soltanto se $|x| > 1$ oppure $|x| \le 1$ (con $y \neq 0$).
3. (Accademia militare) In un riferimento cartesiano, l'equazione $4x^2 + 3y^2 = 8$ rappresenta una:
   A) ellisse B) parabola C) iperbole D) retta
4. (Accademia militare) Quanto misurano gli assi dell'ellisse $3x^2 + y^2 = 27$?
   A) $\left(3;3\cdot\sqrt{3}\right)$ B) (18; 6) C) (6; 2) D $\left(\sqrt{3};9\right)$
5. (Scuola superiore di Catania) Nel piano cartesiano è data la circonferenza γ: $x^2 + y^2 - 2x = 0$ e siano $O \equiv (1; 0)$ il suo centro, $A \equiv (0; 0)$, $B \equiv (2; 0)$ i punti in cui γ incontra l'asse x. Sia ora C un punto generico di γ e sia T il punto in cui la parallela per C all'asse x incontra l'asse y; si determini il luogo descritto dal punto comune alle rette OC e BT al variare di C su γ. Si provi che tale luogo contiene una ellisse e si determinino i suoi vertici.

Per svolgere un Test finale di* 18 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_3_4.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	3	4	4	5
$x^2+y^2\pm\dfrac{20}{\sqrt{29}}\cdot x\mp\dfrac{20}{\sqrt{29}}\cdot y+\dfrac{100}{29}=0$ $x^2+y^2\pm\dfrac{20}{\sqrt{29}}\cdot x\pm\dfrac{20}{\sqrt{29}}\cdot y+\dfrac{100}{29}=0$	A	A	A	$4y^2+3x^2-4x=0$ $(0;0),\left(\dfrac{4}{3};0\right),\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

4. Geometria delle coniche

4.4. Le iperboli

Prerequisiti

- Il piano cartesiano.
- Concetto di funzione
- Concetto di luogo geometrico
- Concetto di equazione e sua risoluzione
- Equazione della retta
- Fasci di rette
- Trasformazioni geometriche e loro leggi
- Matrici e determinanti
- Le coniche
- L'ellisse

Obiettivi

- Comprendere il concetto di luogo di punti del piano cartesiano
- Comprendere il concetto di appartenenza di un punto a una curva del piano cartesiano
- Risolvere semplici questioni relative alle iperboli
- Risolvere semplici questioni relative ai fasci di iperbole

Contenuti

- Equazione dell'iperbole
- Fasci di iperboli

Parole Chiave

Asintoto – Asse non trasverso – Asse trasverso – Iperbole

Equazione dell'iperbole

Il problema

Come possiamo ottenere l'equazione di un'iperbole in forma canonica, partendo dall'equazione canonica dell'ellisse?

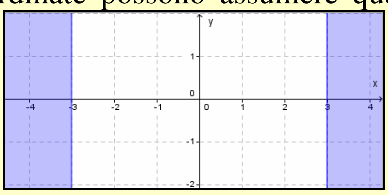
Il problema posto è di facile risoluzione, infatti il passaggio dall'ellisse canonica all'iperbole dipende solo dal segno di un coefficiente, dato che ciò basta a variare il segno del discriminante della conica.

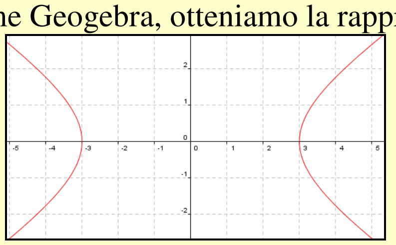
Definizione 1

Un'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \vee \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$, con a e b numeri reali non nulli, si chiama **iperbole in forma canonica**.

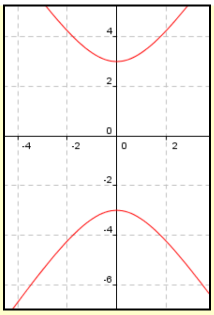
Abbiamo scritto due equazioni per l'iperbole invece che una, come nel caso dell'ellisse perché stavolta *scambiare* i nomi delle variabili comporta un cambiamento, cosa che non accadeva per l'ellisse perché la somma gode della proprietà commutativa. Anche le iperboli canoniche, come l'ellisse canonica, hanno l'origine come centro di simmetria, e sono simmetriche rispetto agli assi cartesiani. Solo che però mentre non abbiamo avuto grossi problemi a comprendere qual è la *forma* dell'ellisse, qualche difficoltà abbiamo per l'iperbole. Intanto l'ellisse, essendo dilatazione di una circonferenza manteneva la proprietà di *curva chiusa* della circonferenza. Accade lo stesso per l'iperbole?

Esempio 1

- Consideriamo l'iperbole canonica di equazione $\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$. Vogliamo vedere per quali valori di x e di y otteniamo corrispondenti valori per l'altra coordinata. Cominciamo a risolvere rispetto a y: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow y^2=4\cdot\frac{x^2-9}{9} \Rightarrow y=\pm\frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^2-9}$, visto che all'interno della radice quadrata vi è una quantità incognita dobbiamo fare in modo che essa risulti non negativa. Perciò: $x^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow x \leq -3 \vee x \geq 3$, cioè l'iperbole esiste solo per valori dell'ascissa non superiori a -3 o non inferiori a 3. Per l'ordinata: $\frac{x^2}{9}=\frac{4+y^2}{4} \Rightarrow x^2=\frac{9\cdot\left(y^2+4\right)}{4} \Rightarrow x=\pm\frac{3}{2}\cdot\sqrt{y^2+4}$. Quindi la funzione è crescente per $x > 3$, cioè all'aumentare dell'ascissa aumenta anche la corrispondente ordinata. Stavolta il radicando è una quantità sempre positiva, anzi sempre maggiore o uguale a 2. Quindi le ordinate possono assumere qualsiasi valore e la curva si trova nelle zone colorate mostrate in figura.  Se ci facciamo aiutare da un software come Geogebra, otteniamo la rappresentazione seguente.



- Se avessimo considerato l'iperbole canonica di equazione $\frac{y^2}{3^2}-\frac{x^2}{2^2}=1$, ci saremmo resi conto facilmente che essa è la simmetrica rispetto alla prima bisettrice della precedente curva, quindi ha questa

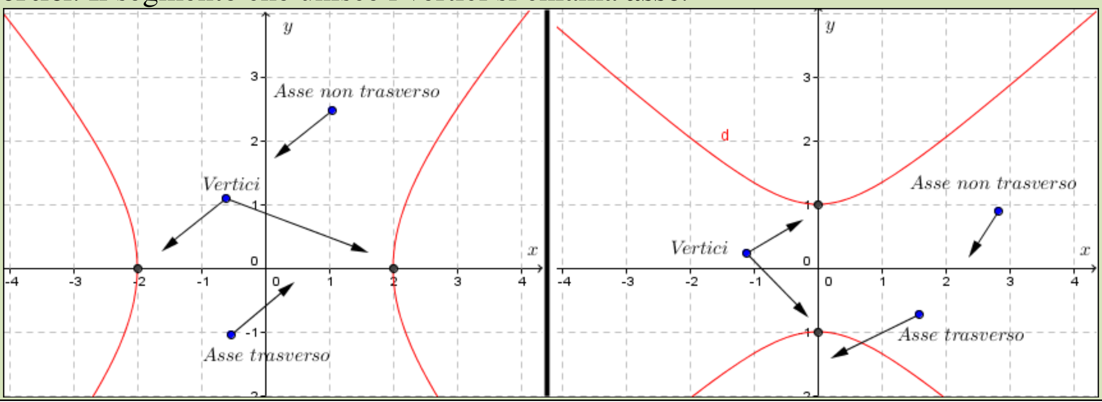


rappresentazione grafica.

Adesso dobbiamo cercare di estendere la terminologia usata per le ellissi alle iperboli. Solo che non sempre è possibile, dato che per esempio l'iperbole canonica non incontra entrambi gli assi coordinati, come invece fa l'ellisse, ma solo uno.

Definizione 2

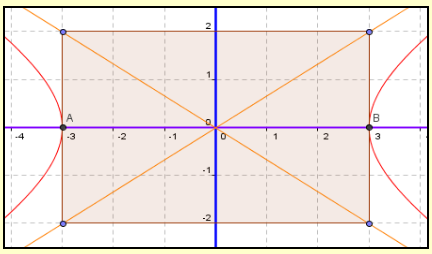
L'unico asse coordinato che incontra l'iperbole canonica si chiama **asse trasverso**, l'asse coordinato che non incontra l'iperbole si chiama **asse non trasverso**. I punti intersezione dell'iperbole con l'asse trasverso (l'asse delle x, per l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; l'asse delle y per l'iperbole di equazione $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$), si chiamano **vertici**. Il segmento che unisce i vertici si chiama **asse**.



Come si vede abbiamo dato in qualche modo un significato a uno solo dei due parametri a e b, a differenza di quel che è invece successo per l'ellisse. Tentiamo di dare un significato al secondo parametro anche per l'iperbole.

Esempio 2

Sia ancora l'iperbole canonica di equazione $\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$. Abbiamo visto che 3 misura la distanza dall'origine a uno qualsiasi dei due vertici, cosa misura invece il numero 2? Consideriamo questa particolare iperbole spezzata: $\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{2^2}=0 \Rightarrow \left(\frac{x}{3}-\frac{y}{2}\right)\cdot\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{2}\right)=0$ e tracciamo le due rette insieme con l'iperbole di partenza.



Evidentemente le due coniche non hanno alcun punto in comune. Abbiamo però individuato un rettangolo le cui dimensioni sono 2 · 3 e 2 · 2, cioè il doppio dei parametri. Questo rettangolo è quello all'interno del quale risulta inscritta l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$, cioè quella dalla quale abbiamo derivato la nostra iperbole. I vertici di questo rettangolo giacciono sulla conica spezzata. Inoltre le due rette in cui si spezza l'iperbole degenere sono una specie di "frontiera", nel senso che tutte le rette a esse interne non incontrano l'iperbole, tutte le altre si.

Infatti risolviamo il sistema $\begin{cases} \frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{2^2}=1 \\ y=mx \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{3^2}-\frac{m^2x^2}{2^2}=1 \Rightarrow \left(4-9m^2\right)\cdot x^2=36 \Rightarrow \Rightarrow x=\pm\frac{6}{\sqrt{4-9m^2}}$, le soluzioni sono reali solo se $4 - 9m^2 > 0$, cioè $-\frac{2}{3}<m<\frac{2}{3}$.

Quanto visto nell'esempio precedente si può generalizzare.

Teorema 1

Data l'iperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, le rette $y = mx$ sono a essa secanti solo se $-\frac{b}{a}<m<\frac{b}{a}$;

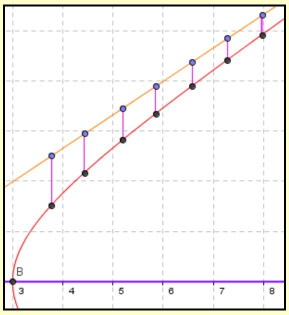
Data l'iperbole $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$, le rette $y = mx$ sono a essa secanti solo se $m<-\frac{b}{a} \vee m>\frac{b}{a}$;

Dimostrazione Sulla falsariga dell'Esempio.

Le rette che nell'esempio precedente formano la conica degenere hanno una proprietà molto importante. Abbiamo infatti già osservato che non incontrano l'iperbole, però sembrano quasi toccarla.

Esempio 3

Sempre con l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$, tracciamo la retta di equazione $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1 \Rightarrow y=\frac{2x-6}{3}$.
Consideriamo i punti, uno sull'iperbole e uno sulla retta aventi la stessa ascissa, notiamo che la differenza fra le ordinate di questi due punti, che in qualche modo misura la distanza fra la retta e l'iperbole, diviene sempre più piccola, come si vede in figura.



Confermiamolo analiticamente. Per ricavare l'ordinata mediante l'ascissa dell'iperbole abbiamo già visto che è: $y=\pm\frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^2-9}$. In effetti i punti sull'iperbole sono 2, ma noi consideriamo solo quello di ordinata positiva. Quindi $y=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^2-9}$. Per la retta invece abbiamo: $y=\frac{2}{3}x$. Quanto distano questi due punti? Basta semplicemente sottrarre all'ordinata maggiore, quella del punto sulla retta, la minore.

$$\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^2-9}=\frac{2x-2\cdot\sqrt{x^2-9}}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2-\left(x^2-9\right)}{x+\sqrt{x^2-9}}=\frac{2}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{9}^3}{x+\sqrt{x^2-9}}=\frac{6}{x+\sqrt{x^2-9}}$$

Adesso costruiamo una tabella con alcuni valori calcolati della precedente espressione.

x	$\frac{2x-2\cdot\sqrt{x^2-9}}{3}$
4	$\frac{8-2\cdot\sqrt{7}}{3}\approx 0.9$
5	$\frac{2}{3}\approx 0.67$
6	$4+2\cdot\sqrt{3}\approx 0.53$
10	$\frac{20-2\cdot\sqrt{91}}{3}\approx 0.31$
50	$\frac{100-2\cdot\sqrt{2491}}{3}\approx 0.06$

Effettivamente la sensazione è corretta, al crescere di x la frazione tende a zero.

Definizione 3

Le rette di equazione $y=\pm\frac{b}{a}x$, per l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ e le rette $y=\pm\frac{a}{b}x$, per l'iperbole di equazione $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$, si dicono **asintoti dell'iperbole**.

Che cosa significa?

Asintoto. Alcuni vocaboli che iniziano per A, usano questa vocale nel suo significato cosiddetto privativo, nel senso che in questo modo si nega in qualche modo il significato del vocabolo seguente. Così per esempio acefalo significa senza testa, amorfo senza forma e così via. In questo caso perciò asintoto significa senza sintesi, cioè privo di unione, nel senso che la retta e l'iperbole non si toccano.

Sempre tenendo conto del fatto che abbiamo derivato l'equazione dell'iperbole da quella dell'ellisse, non è difficile comprendere la proprietà di luogo che verifica l'iperbole. Infatti consideriamo il luogo dei punti del piano per cui la somma delle distanze da $F_1 \equiv (2; 0)$, $F_2 \equiv (-2; 0)$ è 3, tale luogo è rappresentato dall'equazione $\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x+2)^2+y^2}=3$, che si semplifica in: $\frac{4}{9}x^2-\frac{4}{7}y^2=1$. Dovrebbe essere un'ellisse, ma invece è un'iperbole e ciò perché come avevamo già osservato nell'unità 4.3., la somma costante dell'ellisse come luogo deve essere sempre maggiore della distanza focale, mentre in questo caso è minore (3 < 4). Possiamo perciò enunciare il seguente risultato.

Teorema 2

Il luogo geometrico dei punti del piano per cui il valore assoluto della differenza delle distanze da due punti fissi F_1 e F_2 è costante e minore di $\overline{F_1F_2}$ è un'iperbole.

Dimostrazione Omessa solo perché è molto laboriosa nei calcoli.

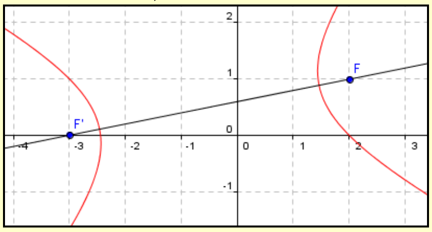
Definizione 4

I punti fissi che definiscono l'iperbole come luogo di punti si chiamano **fuochi**, l'asse a cui essi appartengono si chiama **asse focale**.

Anche la dimostrazione del precedente teorema, come quella dell'analogo per l'ellisse, si riduce a una serie di calcoli, consideriamo quindi solo un esempio.

Esempio 4

Vogliamo verificare che il luogo dei punti del piano per i quali la differenza delle distanze da $F_1 \equiv (2; 1)$ e $F_2 \equiv (-3; 0)$ è 4 unità, è un'iperbole. Consideriamo un generico punto $P \equiv (x; y)$ e imponiamo le condizioni del luogo: $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 4 \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} - \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 4$. Adesso ripetiamo quanto già visto per l'ellisse: $\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = 4 + \sqrt{(x+3)^2 + y^2} \Rightarrow \left(\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}\right)^2 = \left(4 + \sqrt{(x+3)^2 + y^2}\right)^2 \Rightarrow$ $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 16 + (x+3)^2 + y^2 + 8 \cdot \sqrt{(x+3)^2 + y^2} \Rightarrow \cancel{x^2} - 4x + 4 + \cancel{y^2} - 2y + 1 = 16 + \cancel{x^2} + 6x + 9 + {}$ $+ \cancel{y^2} + 8 \cdot \sqrt{(x+3)^2 + y^2} \Rightarrow -10x - 2y - 20 = 8 \cdot \sqrt{(x+3)^2 + y^2} \Rightarrow 5x + y + 10 = -4 \cdot \sqrt{(x+3)^2 + y^2} \Rightarrow$ $(5x + y + 10)^2 = 16 \cdot (x^2 + 6x + 9 + y^2) \Rightarrow 25x^2 + y^2 + 100 + 10xy + 100x + 20y = 16x^2 + 16y^2 + 96x + 144 \Rightarrow$ $9x^2 - 15y^2 + 10xy + 4x + 20y - 44 = 0$. Verifichiamo che è un'iperbole: $b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-15) = 100 + 540 > 0$. Rappresentiamo graficamente la curva, i fuochi e l'asse trasverso.



Anche in questo caso come per l'ellisse, si verifica che il punto medio del segmento focale è centro di simmetria per l'iperbole; l'asse focale e l'asse del segmento focale sono assi di simmetria.

Come per le ellissi, la clausola del Teorema 2 che la somma costante sia minore della distanza focale è una conseguenza della disuguaglianza triangolare secondo la quale in ogni triangolo un lato è maggiore della differenza degli altri due. Cosa accade allora se ciò non è? Quello che abbiamo già visto per le ellissi, ossia se la differenza è uguale all'asse si ottiene un'iperbole spezzata nell'asse focale contato due volte, se è maggiore si ottiene un'ellisse. Abbiamo anche i seguenti risultati.

Teorema 3

Nell'iperbole di equazione $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, i fuochi sono i punti $F_1 \equiv \left(\sqrt{a^2 + b^2}; 0\right), F_2 \equiv \left(-\sqrt{a^2 + b^2}; 0\right)$

Nell'iperbole di equazione $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$, i fuochi sono $F_1 \equiv \left(0; \sqrt{a^2 + b^2}\right), F_2 \equiv \left(0; -\sqrt{a^2 + b^2}\right)$.

Dimostrazione Per esercizio

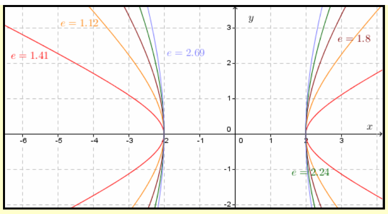
Quale sarà il significato dell'eccentricità per un'iperbole, definendola in modo analogo al caso dell'ellisse?

Definizione 5

In un'iperbole il rapporto fra la semidistanza focale e la semidistanza fra i vertici si chiama **eccentricità**. Per un'iperbole canonica di equazione $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \vee \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$, si ha: $e = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$.

In questo caso l'eccentricità è un numero sempre maggiore di 1. In particolare più è lontana da 1 e più l'iperbole è *aperta*, come è facile verificare graficamente.

Esempio 5



Per vedere come l'eccentricità incida sulla forma dell'iperbole, abbiamo rappresentato le iperboli di equazioni $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, 1\le b\le 5, b\in\mathbb{N}$ con i relativi fuochi; abbiamo scritto anche le relative eccentricità. Perciò un'eccentricità maggiore implica un'iperbole più *aperta*, una minore più *schiacciata*.

Abbiamo visto che l'ellisse può divenire una circonferenza se i suoi due parametri sono uguali. Anche nel caso dell'iperbole usiamo una particolare terminologia per questo caso.

Definizione 6

Un'iperbole canonica di equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1 \Leftrightarrow x^2-y^2=a^2 \vee \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 \Leftrightarrow y^2-x^2=a^2$, si chiama **iperbole equilatera in forma canonica**.

La motivazione dell'aggettivo equilatero consiste nel fatto che in questo caso il rettangolo che abbiamo evidenziato nell'esempio 2, diviene un quadrato. Vale anche questo teorema di immediata dimostrazione.

Teorema 4

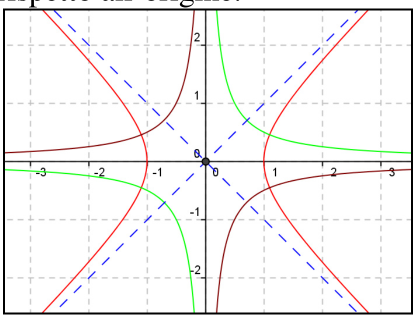
In un'iperbole canonica equilatera gli asintoti sono rette fra loro perpendicolari.
Dimostrazione Per esercizio

Utilizziamo il precedente risultato per definire un'iperbole equilatera in generale.

Definizione 7

Un'iperbole con gli asintoti perpendicolari si chiama **iperbole equilatera**.

Un caso particolarmente interessante si ha quando gli asintoti di un'iperbole equilatera sono gli assi coordinati; essa si ottiene ruotando di 45° o di 135° un'iperbole equilatera canonica rispetto all'origine degli assi. Nella figura seguente la curva verde è la ruotata di quella rossa di 45°, mentre quella marrone è la ruotata di 135°, entrambe le rotazioni rispetto all'origine.



Definizione 8

Un'iperbole equilatera i cui asintoti sono gli assi coordinati si chiama **iperbole riferita ai propri assi.**

Visto che gli assi coordinati hanno equazioni $x = 0$ e $y = 0$, non è difficile capire la verità del seguente risultato.

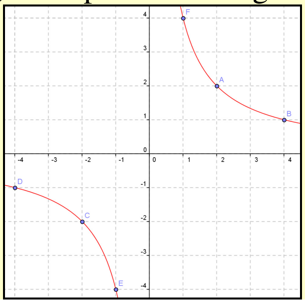
Teorema 5

Un'iperbole riferita ai proprio assi, rotazione dell'iperbole equilatera $x^2 – y^2 = a^2$, rispetto ad O e di angolo α, ha equazione $xy=\frac{a^2}{2}$, se $\alpha = 45°$, $xy=-\frac{a^2}{2}$, se $\alpha = 135°$
Dimostrazione Omessa

Per comodità preferiamo scrivere l'equazione nella forma $xy = k$, con k numero reale non nullo.

Esempio 6

Tracciamo l'iperbole di equazione $xy = 4$. Naturalmente essa appartiene al primo e terzo quadrante, dato che si può anche definire come il *luogo geometrico dei punti del piano aventi prodotto delle coordinate costante*. Se perciò tale prodotto, come nell'esempio, è positivo l'iperbole giace nel primo e terzo quadrante, se è negativo nel secondo e quarto quadrante. Tale iperbole ha anche un numero finito di punti reticolo, dato che la questione è puramente aritmetica e consiste nel determinare quante coppie di numeri interi danno per prodotto la costante. Così in questo nostro esempio dobbiamo determinare quante coppie di numeri interi danno per prodotto 4. Essi sono: $1 \cdot 4$, $(-1) \cdot (-4)$, $2 \cdot 2$, $(-2) \cdot (-2)$. Naturalmente ogni coppia, se formata da elementi diversi, genera due punti reticolo. Quindi la nostra iperbole ha solo i seguenti sei punti reticolo: $(1; 4)$, $(4; 1)$, $(-1; -4)$, $(-4; -1)$, $(2; 2)$, $(-2; -2)$. Tali punti sono segnati nel grafico seguente.



Osserviamo che l'iperbole riferita ai propri assi è la curva che descrive i problemi di proporzionalità inversa, ossia quelli in cui vi sono due grandezze legate dalla proprietà: se la prima grandezza si moltiplica per un fattore la seconda si divide per lo stesso fattore. Come esempio di grandezze del genere possiamo considerare un contenitore pieno di un certo liquido nel quale viene praticato un foro. Allora la superficie del foro è inversamente proporzionale al tempo necessario a svuotare il contenitore, così per esempio se il foro ha superficie 1 e sono necessari 10 secondi per svuotare il contenitore, raddoppiando la superficie del foro si dimezza il tempo di svuotamento. Ovviamente per queste iperboli l'asse focale diventa una delle due bisettrici dei quadranti.

Teorema 6

L'asse focale dell'iperbole $xy = k$ è $\begin{cases} y = x & k > 0 \\ y = -x & k < 0 \end{cases}$, i fuochi sono: $\begin{cases} F_1 \equiv (-k;-k), F_2 \equiv (k;k) & k > 0 \\ F_1 \equiv (-k;k), F_2 \equiv (k;-k) & k < 0 \end{cases}$.

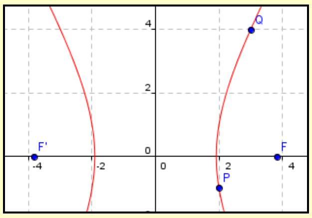
Dimostrazione

Che l'asse focale sia una delle bisettrici è immediata conseguenza della rotazione. Per dimostrare che i dati punti sono effettivamente fuochi dell'iperbole, verifichiamo che il valore assoluto della differenza delle distanze da essi da un generico punto dell'iperbole misura quanto l'asse. Prima dobbiamo determinare la misura di tale asse. Per un'iperbole equilatera $x^2 - y^2 = a^2$, i vertici hanno coordinate $(a; 0)$ e $(-a; 0)$, quindi la distanza focale è $2a$ $(a > 0)$. Ovviamente la rotazione è una trasformazione isometrica, quindi anche la distanza focale di $xy = \frac{a^2}{2}$ è $2a$. Poniamo $k = \frac{a^2}{2} \Rightarrow a^2 = 2k \Rightarrow a = \sqrt{2k} \Rightarrow 2a = 2 \cdot \sqrt{2k}$. Dobbiamo allora verificare che dato un qualsiasi punto di $xy = k$, le cui coordinate generiche sono $\left(x; \frac{k}{x}\right)$, deve aversi: $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2 \cdot \sqrt{2k} \Rightarrow \left|\sqrt{(x+k)^2 + \left(\frac{k}{x}+k\right)^2} - \sqrt{(x-k)^2 + \left(\frac{k}{x}-k\right)^2}\right| = 2 \cdot \sqrt{2k}$. Non riportiamo i calcoli per la loro laboriosità, diciamo solo che alla fine si ottiene $2x^2 + 16 + \frac{8}{x^2} - 2x^2 - \frac{8}{x^2} = 16 = 4^2$. Che è ciò che volevamo provare.

Concludiamo il paragrafo risolvendo alcuni problemi sull'iperbole.

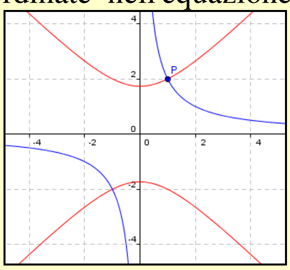
Esempio 7

- I parametri di un'iperbole canonica sono 2, quindi due condizioni sono in genere sufficienti a determinarne l'equazione. Per esempio il passaggio per i punti, $P \equiv (2; -1)$ e $Q \equiv (3; 4)$, fornisce i seguenti sistemi risolventi, in cui poniamo $\frac{1}{a^2} = m, \frac{1}{b^2} = p \Rightarrow \begin{cases} 4m - p = 1 \\ 9m - 16p = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} -4m + p = 1 \\ -9m + 16p = 1 \end{cases}$, uno solo dei due sistemi ha soluzione accettabile, $m = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 9 & -16 \end{vmatrix}} = \frac{-16+1}{-64+9} = \frac{-15}{-55} = \frac{3}{11}, ; p = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 9 & 1 \end{vmatrix}}{-55} = \frac{4-9}{-55} = \frac{-5}{-55} = \frac{1}{11}$, il primo. L'altro sistema ammette soluzioni opposte alle precedenti, quindi non accettabili perché negative. L'equazione dell'iperbole è quindi: $\frac{3x^2}{11} - \frac{y^2}{11} = 1$. L'asse focale è l'asse x, i fuochi: $F_{12} \equiv \left(\pm\sqrt{\frac{11}{3} + 11}; 0 \right) \equiv \left(\pm\sqrt{\frac{44}{3}}; 0 \right)$, mentre l'eccentricità: $e = \frac{\sqrt{\frac{44}{3}}}{\sqrt{\frac{11}{3}}} = \sqrt{\frac{44}{11}} = 2$.



- Naturalmente possiamo imporre altre condizioni. Per esempio il passaggio per $P \equiv (1; 5)$ e l'eccentricità 3. Il sistema risolvente è $\begin{cases} \frac{1}{a^2} - \frac{25}{b^2} = 1 \\ \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{m} - \frac{25}{p} = 1 \\ \frac{m+p}{m} = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p - 25m = mp \\ m + p = 9m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8m - 25m = m \cdot 8m \\ p = 8m \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} m \cdot (-8m - 17) = 0 \\ p = 8m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{17}{8} \\ p = -17 \end{cases}$. Le soluzioni non sono accettabili, supponiamo che l'asse focale sia quello delle ordinate, in questo caso otteniamo un sistema che, come già visto in precedenza, ha soluzioni opposte, quindi accettabili $\begin{cases} -\frac{1}{a^2} + \frac{25}{b^2} = 1 \\ \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{m} + \frac{25}{p} = 1 \\ \frac{m+p}{m} = 9 \end{cases} \begin{cases} m = \frac{17}{8} \\ p = 17 \end{cases}$. Infine l'equazione cercata è $\frac{y^2}{17} - \frac{x^2}{\frac{17}{8}} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{17} - \frac{8x^2}{17} = 1$.

- Per un'iperbole equilatera in forma canonica o per un'iperbole riferita ai propri assi il parametro è solo uno, quindi basta una sola condizione. Per esempio il passaggio per il punto $P \equiv (1; 2)$, determina le iperboli equilatere: $xy = 2$, ottenuta moltiplicando semplicemente fra loro le coordinate di P e $y^2 - x^2 = 3$, ottenuta sottraendo i quadrati delle coordinate, ossia sostituendo le stesse coordinate nell'equazione generale $y^2 - x^2 = a^2$. Le mostriamo nella figura a lato.



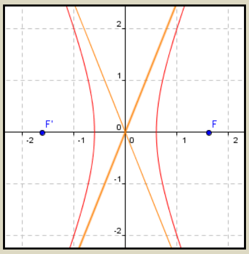
Verifiche

Lavoriamo insieme

Determinare i vertici, le coordinate dei fuochi, l'eccentricità e le equazioni degli asintoti dell'iperbole di equazioni: $25x^2 - 4y^2 - 9 = 0$.

Per risolvere il problema conviene scrivere l'equazione nella forma canonica $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, il che ci suggerisce che l'asse trasverso è quello delle ascisse. $25 \cdot \frac{x^2}{9} - 4 \cdot \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{3}{5}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1$. Abbiamo perciò: $a = \frac{3}{5}$, $b = \frac{3}{2}$. Quindi i vertici hanno coordinate $A \equiv \left(\frac{3}{5};0\right)$, $B \equiv \left(-\frac{3}{5};0\right)$. Calcoliamo le coordinate dei fuochi: $F_{12} \equiv \left(\pm\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2};0\right) \equiv \left(\pm\sqrt{\frac{9}{25} + \frac{9}{4}};0\right) \equiv \left(\pm\frac{\sqrt{261}}{10}, 0\right)$.

Adesso l'eccentricità: $e = \frac{\frac{\sqrt{261}}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{261}}{6}$ e le equazioni degli asintoti: $y = \pm\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{5}}x \Rightarrow y = \pm\frac{5}{2}x$. Rappresentiamo il tutto in figura



Disegnare le seguenti iperboli in forma canonica, determinando le coordinate dei fuochi, l'eccentricità e le equazioni degli asintoti

Livello 1

1. $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1$; $13x^2 - 5y^2 = 3$; $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$

$$\left[\left(\left(\pm\sqrt{17};0\right), \frac{\sqrt{17}}{4}, y = \pm\frac{1}{4}x\right);\left(\left(\pm\sqrt{\frac{54}{65}};0\right), \sqrt{\frac{18}{5}}, y = \pm\sqrt{\frac{13}{5}}x\right);\left(\left(\pm\sqrt{34};0\right), \frac{\sqrt{34}}{5}, y = \pm\frac{3}{5}x\right)\right]$$

2. $\frac{5y^2}{4} - \frac{x^2}{7} = 2$; $-\frac{x^2}{169} + y^2 = 1$; $\frac{y^2}{81} - \frac{x^2}{16} = 1$

$$\left[\left(\left(0;\pm\frac{\sqrt{390}}{5}\right), \frac{\sqrt{39}}{2}, y = \pm\frac{2\cdot\sqrt{35}}{35}x\right);\left(\left(0;\pm\sqrt{170}\right), \sqrt{170}, y = \pm\frac{1}{13}x\right);\left(\left(0;\pm\sqrt{97}\right), \frac{\sqrt{97}}{9}, y = \pm\frac{9}{4}x\right)\right]$$

3. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 25$; $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{121} = 36$; $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

$$\left[\left(\left(\pm\frac{\sqrt{52}}{5};0\right), \frac{\sqrt{13}}{3}, y = \pm\frac{2}{3}x\right);\left(\left(0;\pm 6\cdot\sqrt{185}\right), \frac{\sqrt{185}}{8}, y = \pm\frac{8}{11}x\right);\left(\left(\pm\sqrt{13};0\right), \frac{\sqrt{13}}{2}, y = \pm\frac{3}{2}x\right)\right]$$

4. $x^2 - 6y^2 = 21$; $-3y^2 + 5x^2 = 3$ $\left[\left(\left(\pm\frac{7\cdot\sqrt{2}}{2};0\right), \frac{\sqrt{42}}{6}, y = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}x\right);\left(\left(\pm\frac{2\cdot\sqrt{10}}{3};0\right), \frac{2\cdot\sqrt{6}}{3}, y = \pm\frac{\sqrt{15}}{3}x\right)\right]$

5. $\frac{4x^2}{11}-2y^2=1$; $5x^2-2y^2=-1$; $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{49}=1$

$$\left[\left(\left(\pm\frac{\sqrt{13}}{2};0\right),\frac{\sqrt{143}}{11},y=\pm\frac{\sqrt{22}}{11}x\right);\left(\left(0;\pm\frac{\sqrt{70}}{10}\right),\frac{\sqrt{35}}{5},y=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}x\right);\left(\left(\pm\sqrt{58};0\right),\frac{\sqrt{58}}{3},y=\pm\frac{7}{3}x\right)\right]$$

6. $-x^2+2y^2=3$; $-14x^2+3y^2=-1$; $3x^2-3y^2=1$

$$\left[\left(\left(0;\pm\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}\right),\sqrt{3},y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x\right);\left(\left(\pm\frac{\sqrt{714}}{42};0\right),\frac{\sqrt{51}}{3},y=\pm\frac{\sqrt{42}}{3}x\right);\left(\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{3};0\right),\sqrt{2},y=\pm x\right)\right]$$

7. $5x^2-2y^2=-6$; $2x^2-3y^2=-4$; $7y^2-3x^2=-1$

$$\left[\left(\left(0;\pm\frac{\sqrt{105}}{5}\right),\frac{\sqrt{35}}{5},y=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}x\right);\left(\left(0;\pm\frac{\sqrt{30}}{3}\right),\frac{\sqrt{10}}{2},y=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}x\right);\left(\left(\pm\frac{\sqrt{210}}{21};0\right),\frac{\sqrt{70}}{7},y=\pm\frac{\sqrt{21}}{7}x\right)\right]$$

Disegnando il punto e l'asintoto seguenti, stabilire se l'iperbole cui appartengono esiste e, in caso affermativo, se ha asse focale x o y

Livello 2

8. (1; 2), $y=2x$; (2; 2), $y=-\frac{2}{3}x$; (–2; 2), $y=\sqrt{2}x$; (3; –2), $y=\frac{1}{3}x$; (–1 ; 3), $y=3x$ [$\varnothing$; y ; x ; y ; $\varnothing$]

9. $\left(\frac{1}{2};1\right)$, $y=-\frac{3}{4}x$; (–1; 1), $y=-x$; $\left(1;\sqrt{2}\right)$, $y=-x$; $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $y=-3x$ [y ; $\varnothing$; y ; x]

Lavoriamo insieme

- *Scrivere l'equazione dell'iperbole in forma canonica in cui si ha a = 2 e la cui eccentricità vale* 5.

L'equazione generica è $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\vee\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$, a seconda del fatto che l'asse trasverso sia quello delle ascisse o quello delle ordinate. Già conosciamo il valore di a, dobbiamo trovare quello di b. Abbiamo allora l'equazione: $e=\frac{\sqrt{3^2+b^2}}{3}=5$, la cui soluzione, nella variabile b^2, è: $9+b^2=225\Rightarrow$ $\Rightarrow b^2=216$. Quindi le equazioni cercate sono: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{216}=1\vee\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{216}=1$.

- *Determinare l'equazione dell'iperbole canonica passante per A* ≡ (2; –2) *e B* ≡ (–1; 3). Imponiamo le condizioni di appartenenza: $\begin{cases}\frac{4}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1\\ \frac{1}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1\end{cases}\vee\begin{cases}\frac{4}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1\\ \frac{9}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1\end{cases}$. In effetti nei due sistemi le prime equazioni sono equivalenti, le seconde sono opposte, perciò i due sistemi avranno soluzioni fra loro opposte, possiamo perciò risolvere solo uno dei due sistemi, deducendo da esso le soluzioni dell'altro sistema. Utilizziamo l'artificio di porre: $\frac{1}{a^2}=p,\frac{1}{b^2}=q$. Quindi si ha: $\begin{cases}4p-4q=1\\ p-9q=1\end{cases}\Rightarrow p=\frac{\begin{vmatrix}1&-4\\1&-9\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4&-4\\1&-9\end{vmatrix}}=$ $=\frac{-9+4}{-36+4}=\frac{-5}{-32}=\frac{5}{32}$; $q=\frac{\begin{vmatrix}4&1\\1&1\end{vmatrix}}{-32}=\frac{4-3}{-32}=-\frac{3}{32}$. Le soluzioni non sono accettabili perché nessuna delle due può essere negativa o nulla. Le condizioni imposte non individuano alcuna iperbole canonica.

Scrivere, se esistono, le equazioni delle iperboli in forma canonica verificanti le richieste. Nei dati, F indica uno dei fuochi, P o Q punti appartenenti all'iperbole, l'equazione di una retta rappresenta un asintoto, e l'eccentricità

Livello 1

10. $(a = 3, b = 5)$; $\left(a=\frac{5}{2}, b=\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$; $(a = 4, e = 5)$

$$\left[\left(\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1 \vee \frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{25}=1\right);\left(\frac{4x^2}{25}-\frac{9y^2}{2}=1 \vee \frac{4y^2}{25}-\frac{9x^2}{2}=1\right);\left(\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{384}=1 \vee \frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{384}=1\right)\right]$$

11. $(b = 3, e = 7)$; $(P \equiv (3; -2), a = 5)$; $\left(a=\frac{7}{3}, e=\frac{11}{4}\right)$

$$\left[\left(\frac{16x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1 \vee \frac{16y^2}{3}-\frac{x^2}{9}=1\right);\varnothing;\left(\frac{9x^2}{49}-\frac{48y^2}{1715}=1 \vee \frac{9y^2}{49}-\frac{48x^2}{1715}=1\right)\right]$$

12. $\left(a=\sqrt{7}, e=\sqrt{11}\right)$; $(P \equiv (0; -2), e = 4)$; $(a = 4, F \equiv (6; 0))$; $(a = 4, y = 2x)$

$$\left[\left(\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{70}=1 \vee \frac{y^2}{7}-\frac{x^2}{70}=1\right);\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{60}=1;\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{20}=1;\left(\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1 \vee \frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{4}=1\right)\right]$$

13. $(P \equiv (2; -3), y=-\frac{4}{3}x)$; $(b = 7, F \equiv (0; -5))$; $(F \equiv (0; -3), e = 6)$; $\left(F \equiv (2;0), e=\frac{9}{5}\right)$; $\left(e=\frac{13}{6}, y=2x\right)$

$$\left[\frac{9y^2}{17}-\frac{16x^2}{17}=1;\varnothing;4y^2-\frac{4x^2}{35}=1;\frac{81x^2}{100}-\frac{81y^2}{224}=1;\varnothing\right]$$

14. $(e=\sqrt{5}, y = 2x)$; $\left(y=-\frac{4}{3}x, F \equiv \left(-\frac{3}{2};0\right)\right)$; $(P \equiv (-1; -4), b = 5)$

$$\left[\text{Indeterminato};\frac{100x^2}{81}-\frac{25y^2}{36}=1;\left(\frac{41x^2}{25}-\frac{y^2}{25}=1 \vee \frac{13y^2}{200}-\frac{x^2}{25}=1\right)\right]$$

Livello 2

15. $(P \equiv (1; 1), Q \equiv (-3; 2))$; $(P \equiv (-4; 3), Q \equiv (2; -1))$; $(P \equiv \left(\sqrt{2};1\right), Q \equiv (-5; -1))$; $(P \equiv (1; 2), e = 5)$

$$\left[\frac{8y^2}{5}-\frac{3x^2}{5}=1;\frac{2x^2}{5}-\frac{3y^2}{5}=1;\varnothing;\left(\frac{6x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1 \vee \frac{24y^2}{95}-\frac{x^2}{95}=1\right)\right]$$

16. $(P \equiv (2; 1), F \equiv (0; -5))$; $\left(P \equiv (-2;3), e=\frac{5}{3}\right)$; $(P \equiv (-1; 3), F \equiv (3; 0))$

$$\left[\frac{3+2\cdot\sqrt{2}}{5}\cdot y^2-\frac{\sqrt{2}-1}{10}\cdot x^2=1;\frac{4y^2}{27}-\frac{x^2}{12}=1;\frac{19+5\cdot\sqrt{13}}{18}\cdot x^2-\frac{1+5\cdot\sqrt{13}}{162}\cdot y^2=1\right]$$

17. $(a + b = 3, a - b = 4)$; $(P \equiv \left(4;\sqrt{5}\right), (3; -1))$; $(a + b = 6, a - b = -2)$

$$\left[\varnothing;\frac{4x^2}{29}-\frac{7y^2}{29}=1;\left(\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{16}=1 \vee \frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{16}=1\right)\right]$$

18. $(P \equiv (-2; 3), e = 3)$; $\left(a+b=5, e=\frac{\sqrt{13}}{2}\right)$; $\left(b-a=7, e=\frac{12}{5}\right)$

$$\left[\left(\frac{8x^2}{23}-\frac{y^2}{23}=1 \vee \frac{2y^2}{17}-\frac{x^2}{68}=1\right);\left(\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1 \vee \frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1\right);\left(\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1 \vee \frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{144}=1\right)\right]$$

19. $\left(a+b=\frac{29}{14}, F\equiv\left(\frac{\sqrt{505}}{14};0\right)\right)$;$(b - a = 4, F\equiv\left(0; -\sqrt{58}\right))$; $\left(a+b=11, y=-\frac{8}{3}x\right)$; $(b - a = 2,\ y=\sqrt{3}x)$

$\left[\frac{4x^2}{9}-\frac{49y^2}{16}=1; \frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{49}=1; \left(\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{64}=1 \vee \frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{64}=1\right); \frac{2-\sqrt{3}}{2}\cdot x^2-\frac{2-\sqrt{3}}{6}\cdot y^2=1\right]$

20. Spiegare, non algebricamente, perché il secondo esercizio 11 è impossibile.
21. Spiegare, non algebricamente, perché l'ultimo esercizio 13 è impossibile.
22. Spiegare, non algebricamente, perché il primo esercizio 14 è indeterminato.
23. Determinare l'eccentricità di un'iperbole canonica che ha la retta $y = 2x$ come asintoto. $\left[\frac{\sqrt{5}}{2}\vee\sqrt{5}\right]$
24. Determinare le equazioni degli asintoti di un'iperbole canonica con $e = 5$. $\left[y=\pm\sqrt{24}x\vee y=\pm\frac{1}{\sqrt{24}}x\right]$
25. Determinare l'equazione dell'iperbole canonica, con asse focale quello delle ascisse, passante per il punto $A\equiv\left(5;2\cdot\sqrt{7}\right)$ e tale che la retta di equazione $x + y + 2 = 0$ intercetti su di essa una corda di lunghezza $2\cdot\sqrt{105}$. $\left[\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{7}=1\right]$
26. Determinare l'equazione dell'iperbole equilatera riferita all'origine, tale che la retta $2x + 3y = 0$ intercetti su di essa una corda di lunghezza $2\cdot\sqrt{26}$. $[x^2 - y^2 = 10]$
27. CAS Determinare l'equazione dell'iperbole canonica, avente un fuoco nel punto $F\equiv\left(0;-\sqrt{11}\right)$, i semiassi i cui quadrati sono interi e tale che la retta di equazione $x + y - 3 = 0$ intercetti su di essa una corda di lunghezza $\frac{16\cdot\sqrt{3}}{5}$. $\left[\frac{y^2}{8}-\frac{x^2}{3}=1\right]$
28. Determinare l'equazione dell'iperbole canonica, con asse focale sulle ordinate, avente eccentricità $e=\frac{5}{\sqrt{12}}$ e tale che la retta di equazione $2x + y = 0$ intercetti su di essa una corda di lunghezza $\sqrt{78}$. $\left[\frac{y^2}{12}-\frac{x^2}{13}=1\right]$
29. Determinare l'equazione dell'iperbole canonica, con asse focale quello delle ascisse, avente come uno dei suoi asintoti la retta $y = 3x$ e tale che la retta di equazione $3x + 2y = 0$ intercetti su di essa una corda di lunghezza $\frac{2\cdot\sqrt{39}}{3}$. $\left[x^2-\frac{y^2}{9}=1\right]$
30. Determinare l'equazione dell'iperbole equilatera riferita agli assi cartesiani, tale che la retta di equazione $5x - 2y + 1 = 0$ intercetti su di essa una corda di lunghezza $\frac{11\cdot\sqrt{29}}{10}$. $[xy = 3]$
31. Determinare le equazioni delle tangenti all'iperbole in forma canonica, con asse focale sulle ascisse i cui semiassi misurano 2 e 3 unità, condotte per i suoi punti di ordinata –1. $\left[\pm3\cdot\sqrt{10}x+2y-18=0\right]$
32. Determinare le equazioni delle tangenti all'iperbole in forma canonica, con asse focale sulle ordinate, i cui semiassi misurano 4 e 1 unità, condotte per i suoi punti di ascissa 3. $\left[12x\pm\sqrt{10}\cdot y+4=0\right]$

Livello 3

33. Dato il punto P $(h; k)$, che proprietà devono verificare h e k, affinché esistano iperboli di equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ passanti per P? $[h < - a \vee h > a, k < - b \vee k > b]$
34. Determinare l'eccentricità di un'iperbole canonica con i fuochi su x, e asintoto $y = mx$. $\left[\sqrt{1+m^2}\right]$

35. Determinare l'eccentricità di un'iperbole canonica con i fuochi su y, e asintoto $y = mx$. $\left[\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}\right]$

36. Determinare gli asintoti con i fuochi su x di un'iperbole canonica di eccentricità e. $\left[y = \pm\sqrt{e^2-1}\cdot x\right]$

37. Determinare gli asintoti con i fuochi su y di un'iperbole canonica di eccentricità e. $\left[y = \pm\frac{1}{\sqrt{e^2-1}}\cdot x\right]$

38. Determinare l'equazione dell'iperbole canonica che ha un fuoco sulla retta $x + y - 2 = 0$ e passa per $A \equiv \left(\frac{4}{3};\frac{\sqrt{21}}{3}\right)$. $\left[x^2-\frac{y^2}{3}=1 \vee \frac{73+\sqrt{2305}}{168}\cdot y^2-\frac{1+\sqrt{2305}}{128}\cdot x^2=1\right]$

39. Quanto vale l'eccentricità di un'iperbole equilatera? $\left[\sqrt{2}\right]$

40. Determinare l'iperbole canonica con un vertice in $(0; -1)$ tangente alla retta $x - 3y + 1 = 0$. $\left[y^2-\frac{x^2}{8}=1\right]$

41. Determinare l'iperbole canonica passante per $(2; -3)$ ivi tangente alla retta $7x + 3y - 5 = 0$. $\left[\frac{7}{10}x^2-\frac{y^2}{5}=1\right]$

42. Determinare l'iperbole canonica con un fuoco in $(3;0)$ e tangente la retta $4x-\sqrt{2}y-6=0$. $\left[\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1\right]$

43. Determinare l'iperbole canonica avente la retta di equazione $y=-\frac{3}{4}x$, come uno dei suoi asintoti e tangente alla retta di equazione $5x - 4y - 16 = 0$. $\left[\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1\right]$

44. Determinare le iperboli equilatere riferite all'origine, tangenti alla retta $5x - 2y + 1 = 0$. $\left[x^2-y^2=\frac{1}{21}\right]$

45. Determinare le iperboli equilatere riferite agli assi, tangenti alla retta $7x - 4y + 2 = 0$. $[\varnothing]$

Lavoriamo insieme

- *Quanti punti reticolo appartengono all'iperbole equilatera di equazione xy* = 12? Abbiamo osservato più volte che un punto appartiene a una curva se con le proprie coordinate verifica l'equazione associata alla curva. Il problema consiste quindi nel trovare tutti i numeri interi il cui prodotto è 12. Ma questo è un problema aritmetico che sappiamo risolvere. Calcoliamo tutti i divisori di 12, che sono: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Dobbiamo anche considerare gli stessi valori preceduti dal segno meno. Ora consideriamo tutte le coppie di divisori che moltiplicati danno 12 e risolviamo il problema. I punti sono:
  (1; 12), (2; 6), (3; 4), (4; 3), (6; 2), (12; 1), (–1; –12), (–2; –6), (–3; –4), (–4; –3), (–6; –2), (–12; –1).
- *Lo stesso problema può essere considerato per l'iperbole equilatera* $9x^2-9y^2=1$. Stavolta scriviamo nel seguente modo: $3 \cdot (x - y) \cdot (x + y) = 1$. Dato che 1 non ha divisori diversi da sé stesso il problema è privo di soluzioni. Non ci sono punti con le coordinate entrambe intere che appartengono alla data iperbole.

Determinare le coordinate dei fuochi delle seguenti iperboli equilatere

Livello 1

46. $xy = 1$; $xy = 4$; $xy = 2$; $xy = -2$; $xy = 5$; $xy = -3$

$[(\pm1; \pm1); (\pm4; \pm4); (\pm2; \pm2); (\pm2; \mp2); (\pm5; \pm5); (\pm3; \mp3)]$

Scrivere le equazioni delle iperboli riferite ai propri assi che hanno come uno dei fuochi i punti seguenti

47. $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$; $\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$; $\left(\sqrt{2}-1;1-\sqrt{2}\right)$; $\left(\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(\sqrt{2}+1;\sqrt{2}-1\right)$

$\left[2xy+1=0; xy=\sqrt{2}; xy=1-\sqrt{2}; 4xy-3=0; 2xy=\sqrt{2}; \varnothing\right]$

Dopo aver disegnato per punti le seguenti iperboli, determinare quanti e quali punti reticolo appartengono a ciascuna curva

Livello 2

48. $xy = -6$; $xy = -4$; $xy = 2$; $xy = 8$; $xy = 10$; $xy = 18$ [8 ; 6 ; 4 ; 8 ; 8 ; 12]

49. $xy = 9$; $xy = 16$; $xy = -25$; $2xy = -5$; $xy = -\sqrt{5}$; $3xy = 10$ [6 ; 10 ; 6 ; 0 ; 0 ; 0]

Livello 3

50. $x^2 - y^2 = 9$; $x^2 - y^2 = -1$; $x^2 - y^2 = 4$; $4x^2 - 4y^2 = 9$; $4y^2 - 4x^2 = 1$ [6 ; 2 ; 2 ; 0 ; 0]

51. $16x^2 - 25y^2 = -4$; $-x^2 + y^2 = 36$; $12x^2 - 15y^2 = 1$; $81x^2 - 64y^2 = -1$ [0 ; 6 ; 0 ; 0]

Lavoriamo insieme

Applicando la definizione come luogo di punti vogliamo trovare l'equazione dell'iperbole i cui fuochi sono i punti $F_1 \equiv (1; -1)$ e $F_2 \equiv (-2; 4)$ e il cui asse trasverso misura 5. Sia un generico punto $P \equiv (x; y)$ e imponiamo le condizioni del luogo: $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 5 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} - \sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2} = 5$. Adesso semplifichiamo: $\left(\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}\right)^2 = \left(5 + \sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2}\right)^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 25 + x^2 + 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 + 10\cdot\sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2} \Rightarrow -6x + 10y - 43 = 10\cdot\sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2} \Rightarrow (6x - 10y - 43)^2 = \left(10\cdot\sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2}\right)^2 \Rightarrow 64x^2 + 120xy - 116x + 60y + 151 = 0$.

Determinare le equazioni delle iperboli di cui forniamo le coordinate dei fuochi e la misura dell'asse trasverso a

Livello 3

52. (0; 2), (1; 3), 1 ; (1; –2), (–1; 2), 3 ; (2; –1), (2; 2), 2
[$8xy - 20x - 4y + 9 = 0$; $20x^2 + 64xy - 28y^2 + 99 = 0$; $16x^2 - 64x - 20y^2 + 20y + 79 = 0$]

53. (3; –1), (0; 1), 3 ; (5; –1), (2; 5), 4
[$12xy + 5y^2 - 18y + 9 = 0$; $28x^2 + 144xy - 484x - 80y^2 - 184y + 1495 = 0$]

Lavoriamo insieme

A partire dall'equazione dell'iperbole, come già visto per la circonferenza e l'ellisse, vogliamo otteniamo le equazioni di due funzioni. Per esempio dall'iperbole canonica di equazione $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$, ricaviamo:

$$y^2 = 4\cdot\left(\frac{x^2}{25} - 1\right) \Rightarrow y = \pm 2\cdot\sqrt{\frac{x^2 - 25}{25}} \Rightarrow y = \pm\frac{2}{5}\cdot\sqrt{x^2 - 25}$$

ossia le due funzioni: $y = -\frac{2}{5}\cdot\sqrt{x^2 - 25} \wedge y = \frac{2}{5}\cdot\sqrt{x^2 - 25}$, entrambe definite per $x \le -5 \vee x \ge 5$.

Ricavare le equazioni delle funzioni semi-iperboli, quindi rappresentarle graficamente

Livello 2

54. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{36} = 1$; $\frac{y^2}{16} - x^2 = 1$; $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{8} = 1$; $xy = 3$; $3xy = 1 - \sqrt{2}$

$$\left[y = \pm 3\cdot\sqrt{x^2 - 4}; y = \pm 4\cdot\sqrt{x^2 + 1}; y = \pm\frac{\sqrt{6x^2 - 72}}{3}; y = \frac{3}{x}; y = \frac{1 - \sqrt{2}}{3x}\right]$$

55. $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{14} = -3$; $\frac{y^2}{18} - \frac{x^2}{9} = 2$; $4x^2 - 5y^2 = -6$; $\frac{x^2}{\sqrt{2}} - \frac{y^2}{\sqrt{3}} = 1$; $2x^2 - y^2 = 3$

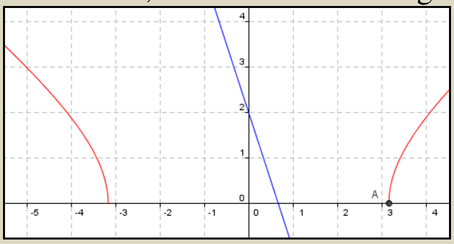
$$\left[y = \pm\frac{\sqrt{42x^2 + 1512}}{6}; y = \pm\sqrt{2x^2 + 36}; y = \pm\frac{\sqrt{20x^2 + 30}}{5}; y = \pm\frac{\sqrt[4]{24}\cdot\sqrt{x^2 - \sqrt{2}}}{2}; y = \pm\sqrt{2x^2 - 3}\right]$$

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere graficamente la seguente disequazione irrazionale: $\frac{\sqrt{15x^2-150}}{5} \ge 2-3x$. Cominciamo a ricavare l'equazione dell'iperbole associata all'espressione irrazionale:

$$y = \frac{\sqrt{15x^2-150}}{5} \Rightarrow y^2 = \frac{15x^2-150}{25} \Rightarrow y^2 - \frac{3x^2}{5} = 6 \Rightarrow \frac{y^2}{6} - \frac{x^2}{10} = 1$$

rappresentiamo perciò la semi iperbole e la retta, confrontando come già visto altre volte, le ordinate.



Facilmente notiamo che le soluzioni si ottengono per tutte le ascisse a partire dal punto *A* tracciato, ossia all'intersezione della semi iperbole con l'asse delle ascisse. Possiamo dire che la soluzione esatta è $x \ge \sqrt{10}$.

Risolvere graficamente le seguenti disequazioni

Livello 2

56. $\frac{2\cdot\sqrt{x^2-9}}{3} \ge 4x-1$; $\frac{\sqrt{x^2-4}}{5} \ge \frac{1}{3}x$; $\frac{2\cdot\sqrt{5x^2-150}}{5} \ge 3x-5$; $\frac{\sqrt{35x^2-525}}{7} \le 3x-11$

$\left[x \le 3; x \le 2; x \le -\sqrt{30}; x \ge \sqrt{15}\right]$

57. $\sqrt{x^2-1} \ge x+1$; $\frac{\sqrt{4x^2-36}}{7} \ge \frac{4-3x}{8}$; $\frac{\sqrt{3x^2+16}}{4} \ge 2x+6$; $\frac{\sqrt{3x^2+4}}{2} \ge 4x-6$

$\left[x \le -1; x \ge 3; x \le -\frac{140}{61}; x \le 2\right]$

58. $\sqrt{5x^2+4} \le -6x-3$; $\frac{\sqrt{5x^2+16}}{2} \ge -2x-1$; $\frac{3}{x} \ge 2x-1$; $\frac{9}{4x} \ge \frac{x}{2}+1$

$\left[x \le -1; x \ge -2; \left(0 < x \le \frac{3}{2} \vee x \le -1\right); \left(x \le -\frac{1+\sqrt{22}}{2} \vee 0 < x \le \frac{-1+\sqrt{22}}{2}\right)\right]$

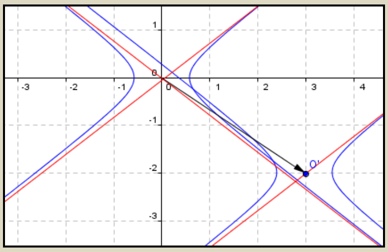
59. $\frac{x+4}{2} \le \frac{16}{x}$; $\frac{7}{2x} \le -3x+\frac{5}{4}$; $-\frac{16}{25x} \le -\frac{4}{5}-\frac{3}{5}x$; $\frac{8}{x} \ge x-2$

$\left[(x \le -8 \vee 0 < x \le -4)\left(x \le -\frac{10+2\cdot\sqrt{85}}{15} \vee 0 < x \le \frac{-10+2\cdot\sqrt{85}}{15}\right); x < 0; (x \le -2 \vee 0 < x \le 4)\right]$

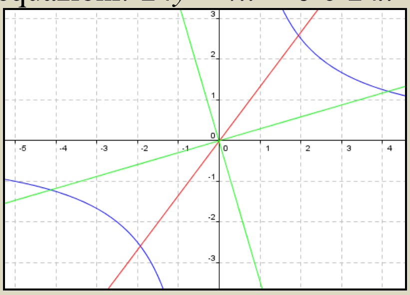
Trasformazioni geometriche sull'iperbole

Lavoriamo insieme

- *Trasliamo l'iperbole di equazione* $3x^2 - 5y^2 = 1$, *in modo da portare l'origine nel punto* $O' \equiv (3; -2)$. Determiniamo le leggi della traslazione inversa, quella cioè di vettore $(-3; 2)$: $t_{(-3;2)}: \begin{cases} x = x' - 3 \\ y = y' + 2 \end{cases}$, l'iperbole si trasforma quindi (trascuriamo al solito di mettere gli indici nelle incognite) in: $3 \cdot (x - 3)^2 - 5 \cdot (y + 2)^2 = 1 \Rightarrow 3x^2 - 5y^2 - 18x - 20y + 8 = 0$. Il nuovo centro di simmetria è $O' \equiv (3; -2)$, gli asintoti, che avevano equazione $y = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}x$, hanno equazioni: $y + 2 = \pm\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot (x - 3)$.



- *All'iperbole* $xy = -5$, *applicare la simmetria rispetto la retta di equazione* $4x - 3y = 0$. Determiniamo le leggi della simmetria e sostituiamo le leggi nell'equazione dell'iperbole.
$s_{4x-3y=0}: \begin{cases} x' = \dfrac{24y - 7x}{25} \\ y' = \dfrac{24x + 7y}{25} \end{cases}$, $\dfrac{24y - 7x}{25} \cdot \dfrac{24x + 7y}{25} + 5 = 0 \Rightarrow \dfrac{576xy + 168y^2 - 168x^2 - 49xy}{625} + 5 = 0 \Rightarrow$
$168x^2 - 168y^2 + 527xy + 3125 = 0$. Naturalmente otteniamo ancora un'iperbole ma non riferita ai propri assi. Gli asintoti sono le rette perpendicolari di equazioni: $24y - 7x = 0$ e $24x + 7y = 0$, cioè l'iperbole trasformata è rimasta equilatera.



Determinare le equazioni delle trasformate delle seguenti iperboli, secondo le trasformazioni indicate (con ω indichiamo un'omotetia, con α una dilatazione)

Livello 2

60. $7x^2 - 4y^2 = 1$, $t_{(-4;-1)}$; $x^2 - y^2 = 4$, $t_{\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{4}\right)}$; $17y^2 - 13x^2 = 4$, $t_{(2;4)}$
[$7x^2 - 4y^2 + 56x - 8y + 107 = 0$; $16x^2 - 16y^2 - 48x - 8y - 29 = 0$; $17y^2 - 13x^2 + 52x - 136y + 216 = 0$]
61. $xy = 13$, $t_{(3;-5)}$; $x^2 - y^2 = -1$, $s_{x=2}$; $xy = 1$, $s_{x=-3}$; $4x^2 - 4y^2 = 5$, $s_{x=y}$; $x^2 - y^2 = -\frac{1}{4}$, $s_{(-1;2)}$
[$xy + 5x - 3y - 28 = 0$; $x^2 - y^2 - 8x + 17 = 0$; $xy + 6y - 3 = 0$; $4x^2 - 4y^2 = 5$; $4x^2 - 4y^2 + 16x + 32y - 49 = 0$]
62. $3x^2 - 2y^2 = 4$, $s_{y=-5}$; $4y^2 - x^2 = 2$, $s_{x=1}$; $x \cdot y = -3$, $s_{x+y+1=0}$; $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$, $s_{3x+2y=0}$
[$3x^2 - 2y^2 - 40y - 204 = 0$; $x^2 - 4y^2 - 4x + 6 = 0$; $xy + x + y + 4 = 0$; $238x^2 - 480xy - 238y^2 + 169 = 0$]
63. $5x^2 - 7y^2 = 1$, $s_{5x+y-2=0}$; $xy = 4$, $r_{90°,O}$; $8y^2 - 12x^2 = 3$, $r_{270°,(-2;4)}$
[$883x^2 + 1440xy - 545y^2 - 1580x - 940y + 849 = 0$; $xy = -4$; $8x^2 - 12y^2 - 32x + 144y - 403 = 0$]
64. $xy = -5$, $s_{(1;-2)}$; $5x^2 - 7y^2 = 8$, $s_{(4;-1)}$; $2y^2 - 5x^2 = -4$, $s_{(0;-3)}$; $x^2 - y^2 = -2$, $r_{90°,O}$
[$xy + 4x - 2y - 3 = 0$; $5x^2 - 7y^2 - 80x - 28y + 300 = 0$; $2y^2 - 5x^2 + 24y + 68 = 0$; $x^2 - y^2 - 2 = 0$]
65. $6x^2 - 3y^2 = 4$, $r_{90°,(2;-1)}$; $xy = 6$, $r_{90°,(0;-3)}$; $3x^2 - y^2 = -5$, $r_{270°,(-3;3)}$; $xy = -4$, $r_{270°,(3;-1)}$
[$3x^2 - 6y^2 - 6x - 36y - 47 = 0$; $xy + 3x + 3y + 15 = 0$; $x^2 - 3y^2 + 36y - 113 = 0$; $xy + 4x - 2y - 12 = 0$]

Livello 3

66. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ t_{(v_x;v_y)}$; $x^2 - y^2 = 1$, $\omega_{O,k}$ $\left[\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-2\cdot\frac{v_x}{a^2}\cdot x-2\cdot\frac{v_y}{b^2}\cdot y+\frac{v_x^2}{a^2}+\frac{v_y^2}{b^2}-1=0; x^2-y^2=k^2\right]$

67. $xy=k,\ t_{(v_x;v_y)}$; $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $\alpha_{m,n}$ $\left[xy-v_yx-v_xy+v_xv_y-k=0;\frac{x^2}{a^2m^2}-\frac{y^2}{b^2n^2}=1\right]$

All'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = a^2$***, applicare le trasformazioni accanto indicate***

68. $s_{x=m}$; $s_{y=m}$ [$x^2 - y^2 - 4mx - a^2 + 4m^2 = 0$; $x^2 - y^2 - 4my - a^2 + 4m^2 = 0$]

69. $s_{(p;\,q)}$; $r_{90°,\,O}$ [$x^2 - y^2 - 4px + 4qy + a^2 + 4p^2 - 4q^2 = 0$; $y^2 - x^2 = a^2$]

All'iperbole di equazione $xy = m$***, applicare le trasformazioni accanto indicate***

70. $s_{x=p}$; $s_{y=p}$; $s_{(p;\,q)}$ [$xy - 2py + m = 0$; $xy - 2px + m = 0$; $xy - 2qx - 2py - m + 4pq = 0$]

71. $r_{90°,\,O}$; $\omega_{O,\,k}$; $\alpha_{p,q}$ [$xy = -m$; $xy - mk^2 = 0$; $xy - kpq = 0$]

72. Determinare l'equazione dell'iperbole equilatera i cui asintoti sono $x = 2$, $y = -1$ e passante per (5; 0). [$xy + x - 2y - 5 = 0$]

73. Determinare l'equazione dell'iperbole equilatera i cui asintoti sono $y = -4$, $x = 3$ e passante per (0; 4). [$xy - 3x + 4y - 16 = 0$]

Lavoriamo insieme

All'iperbole di equazione $2x^2 - y^2 = 7$, *applichiamo una rotazione di* 270° *rispetto a un centro* $C \equiv (a, b)$, *ottenendo l'iperbole di equazione*: $16x^2 - 32y^2 + 24x - 112y + 23 = 0$. Vogliamo stabilire se con questi dati è possibile determinare le coordinate del centro. Determiniamo le leggi della rotazione: $r_{(a,b),270}:\begin{cases}x'=y+a+b\\ y'=-x+b-a\end{cases}$. Determiniamo le leggi inverse: $r^{-1}{}_{(a,b),270}:\begin{cases}x=-y'+b-a\\ y=x'-a-b\end{cases}$. Applichiamole all'iperbole data, sempre tralasciando gli apici: $2\cdot(-y+b-a)^2-(x-a-b)^2=7 \Rightarrow 2y^2-x^2+2\cdot(a+b)\cdot x - 4\cdot(b-a)\cdot y+a^2-6ab+b^2-7=0$. L'ultima espressione deve coincidere con l'equazione dell'iperbole, perciò conviene moltiplicarla per -16: $-32y^2+16x^2-32(a+b)x+64(b-a)y-16a^2+96ab-16b^2+112=0$.

Uguagliamo i coefficienti omonimi: $\begin{cases}-32\cdot(a+b)=24\\ 64\cdot(b-a)=-112\\ -16a^2+96ab-16b^2+112=23\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a+b=-\frac{3}{4}\\ b-a=-\frac{7}{4}\\ -16a^2+96ab-16b^2=-89\end{cases} \Rightarrow$

risolviamo le prime due equazioni: $\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=-\frac{5}{4}\end{cases}$. Il sistema è determinato, il centro è $C\equiv\left(\frac{1}{2};-\frac{5}{4}\right)$.

Determinare le componenti delle trasformazioni indicate che trasformano la prima iperbole nella seconda

Livello 3

74. $x^2-3y^2=4 \xrightarrow{t} 36x^2+12x-108y^2+432y-287=0$ $\left[\left(-\frac{1}{6};2\right)\right]$

75. $8y^2-5x^2=2 \xrightarrow{t} 360y^2-225x^2+270x-480y+169=0$ $\left[\left(\frac{3}{2};\frac{2}{3}\right)\right]$

76. $3x^2-3y^2=2 \xrightarrow{t} 48x^2-48y^2+24x+96y-13=0$ $\left[\left(-\frac{1}{4};1\right)\right]$

77. $xy=8 \xrightarrow{t} xy-\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot x+\sqrt{2}y-\sqrt{6}-\sqrt{2}-8=0$ $\left[\left(-\sqrt{2};1+\sqrt{3}\right)\right]$

78. $7x^2 - 9y^2 = 1 \xrightarrow{s_{x=h}} 7x^2 - 9y^2 + 84x + 251 = 0$ $[x = 3]$

79. $y^2 - 4x^2 = 8 \xrightarrow{s_{y=h}} 9y^2 - 36x^2 + 12y - 68 = 0$ $\left[y = \frac{1}{3}\right]$

80. $xy = 1 \xrightarrow{s_{x=h}} 5xy - 4y + 5 = 0$; $xy = 5 \xrightarrow{s_{y=h}} 2xy + 7x + 10 = 0$ $\left[x = -\frac{2}{5}; y = \frac{7}{4}\right]$

81. $2x^2 - 9y^2 = 1 \xrightarrow{s_C} 2x^2 - 9y^2 + 8x - 36y - 27 = 0$ $[(-1; -1)]$

82. $3y^2 - 2x^2 = 1 \xrightarrow{s_C} 108y^2 - 72x^2 + 192x + 108y - 65 = 0$ $\left[\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{4}\right)\right]$

83. $8x^2 - 8y^2 = 1 \xrightarrow{s_C} 8x^2 - 8y^2 + 16x + 16y + 1 = 0$ $\left[\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)\right]$

84. $xy = -7 \xrightarrow{s_C} xy - 2\cdot\sqrt{2}y + 7 = 0$; $x^2 - 3y^2 = 2 \xrightarrow{r_{C,90°}} 3x^2 - y^2 - 18x - 6y + 20 = 0$ $\left[\left(\sqrt{2}; 0\right); (3; 0)\right]$

85. $y^2 - 2x^2 = 5 \xrightarrow{r_{C,90°}} 18y^2 - 9x^2 - 6x - 84y + 142 = 0$ $\left[\left(-\frac{4}{3}; 1\right)\right]$

86. $x^2 - y^2 = 4 \xrightarrow{r_{C,270°}} x^2 - y^2 - x + 5y - 2 = 0$ $\left[\left(-1; \frac{3}{2}\right)\right]$

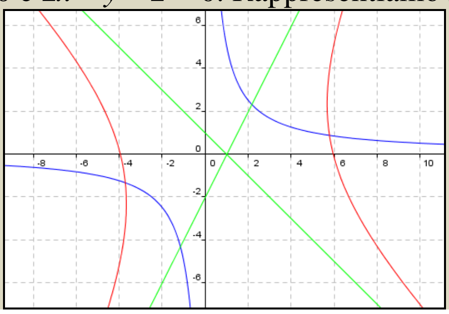
87. $xy = 2 \xrightarrow{r_{C,270°}} 9xy + 3\cdot\left(1 + 3\cdot\sqrt{3}\right)\cdot x + 3\cdot\left(1 - 3\cdot\sqrt{3}\right)\cdot y - 8 = 0$ $\left[\left(\sqrt{3}; -\frac{1}{3}\right)\right]$

88. CAS $6x^2 - y^2 = 1 \xrightarrow{s_{2x+by+c=0}} 38x^2 - 168xy + 87y^2 + 384x - 612y + 803 = 0$ $[2x - y + 3 = 0]$

89. CAS $xy = 4 \xrightarrow{s_{ax+4y+c=0}} 120x^2 + 161xy - 120y^2 - 104x + 94y + 1140 = 0$ $[x + 4y - 1 = 0]$

Lavoriamo insieme

Applicreo l'affinità di leggi $\alpha: \begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = 2x + y \end{cases}$, *all'iperbole di equazione xy* = 5. Determiniamo le leggi inverse dell'affinità: $\alpha^{-1}: \begin{cases} x = \dfrac{x' + y' - 1}{3} \\ y = -\dfrac{2x' - y' - 2}{3} \end{cases}$. Calcoliamo l'equazione della trasformata (sempre senza scrivere gli apici): $\frac{x + y - 1}{3}\cdot\frac{2x - y - 2}{3} = 5 \Rightarrow 2x^2 - xy - 2x + 2xy - y^2 - 2y - 2x + y - 2 - 45 = 0 \Rightarrow 2x^2 + xy - y^2 - 4x - y - 47 = 0$. Abbiamo ottenuto ancora un'iperbole, anche se non equilatera né riferita ai propri assi. Gli asintoti sono le rette: $x + y - 1 = 0$ e $2x - y - 2 = 0$. Rappresentiamo il grafico.



Determinare l'equazione delle trasformate delle seguenti iperboli rispetto alla trasformazione indicata

Livello 2

90. $5x^2 - 3y^2 = 7$, $\omega_{\left(\frac{3}{2}; -2\right), -\frac{1}{4}}$; $12y^2 - x^2 = 3$, $\omega_{\left(-\frac{1}{2}; \frac{2}{5}\right), \frac{4}{3}}$

$[320x^2 - 192y^2 - 1200x - 960y - 103 = 0 ; 900x^2 - 10800y^2 - 300x - 2880y + 4633 = 0]$

91. $4x^2 - 4y^2 = 17,\ \omega_{\left(0;-\frac{5}{4}\right),-\frac{3}{2}}$; $xy = 11,\ \omega_{\left(\sqrt{2};-1\right),-\sqrt{3}}$

$$\left[64x^2-64y^2-400y-1237=0; xy+\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot x-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cdot y-4\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{6}-33=0\right]$$

92. CAS $x^2 - y^2 = 1, \zeta:\begin{cases}x'=\frac{1}{2}\cdot(x-y)\\ y'=\frac{1}{2}\cdot(x+y)\end{cases}$; CAS $xy = -2, \zeta:\begin{cases}x'=\frac{2}{3}\cdot(x-y)\\ y'=\frac{2}{3}\cdot(x+y)\end{cases}$; CAS $14x^2 - 11y^2 = 1, \alpha:\begin{cases}x'=3y-1\\ y'=x+y+1\end{cases}$

[$4xy + 1 = 0$; $9x^2 - 9y^2 - 32 = 0$; $x^2 + 22xy - 33y^2 - 20x + 88y - 57 = 0$]

93. CAS $2x^2 - y^2 = 3,\ \zeta:\begin{cases}x'=2x+y\\ y'=x-2y+1\end{cases}$; CAS $10y^2 - 3x^2 = 2,\ \zeta:\begin{cases}x'=-x+3y-2\\ y'=3x+y\end{cases}$

[$2x^2 + 12xy - 7y^2 - 12x + 14y + 68 = 0$; $87x^2 + 78x - 17y^2 + 348x + 156y + 148 = 0$]

94. CAS $x^2 - y^2 = 5, \alpha:\begin{cases}x'=x-2y+1\\ y'=x+y-1\end{cases}$; CAS $xy = 4,\ \alpha:\begin{cases}x'=2x-y-1\\ y'=2x+y+1\end{cases}$; CAS $7x^2 - 8y^2 = 1,\ \alpha:\begin{cases}x'=2x\\ y'=-2y+3\end{cases}$

[$y^2 + 2xy + 2x - 16 = 0$; $x^2 - y^2 + 2x - 2y - 32 = 0$; $7x^2 - 8y^2 + 48y - 76 = 0$]

Lavoriamo insieme

Abbiamo applicato un'omotetia all'iperbole di equazione $4x^2 - 3y^2 = 5$, *ottenendo l'iperbole di equazione* $36x^2 - 27y^2 - 120x - 180y - 220 = 0$, *vogliamo determinare le leggi dell'omotetia*. Applichiamo una generica omotetia di leggi: $\sigma_{(a,b),k}:\begin{cases}x'=kx+(1-k)\cdot a\\ y'=ky+(1-k)\cdot b\end{cases}$ alla data iperbole. Determiniamo l'omotetia inversa: $\sigma^{-1}_{(a,b),k}:\begin{cases}x=\frac{1}{k}x'+\frac{k-1}{k}\cdot a\\ y=\frac{1}{k}y'+\frac{k-1}{k}\cdot b\end{cases}$. L'iperbole diviene quindi: $4\cdot\left(\frac{1}{k}x'+\frac{k-1}{k}\cdot a\right)^2-3\cdot\left(\frac{1}{k}y'+\frac{k-1}{k}\cdot b\right)^2-5=0 \Rightarrow$

$4x^2 - 3y^2 + 8a \cdot (k - 1)\, x + 6b \cdot (1 - k)\, y + (4a^2 - 3b^2) \cdot (k - 1)^2 - 5k^2 = 0$.

Per imporre l'identità dell'ultima espressione con l'iperbole trasformata, moltiplichiamo la precedente espressione per 9: $36x^2 - 27y^2 + 72a \cdot (k - 1)\, x + 54b \cdot (1 - k)\, y + 9 \cdot (4a^2 - 3b^2) \cdot (k - 1)^2 - 45k^2 = 0$.

Uguagliamo i coefficienti omonimi: $\begin{cases}-120=72a\cdot(k-1)\\ -180=54b\cdot(1-k)\\ -220=9\cdot\left(4a^2-3b^2\right)\cdot(k-1)^2-45k^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3a\cdot(1-k)=5\\ 3b\cdot(k-1)=10\\ -220=9\cdot\left(4a^2-3b^2\right)\cdot(k-1)^2-45k^2\end{cases}$.

Ricaviamo a e b dalle prime due equazioni: $\begin{cases}a=\frac{5}{3\cdot(1-k)}\\ b=\frac{10}{3\cdot(k-1)}\end{cases}$ e sostituiamo nella terza:

$-220=9\cdot\left[4\cdot\left(\frac{5}{3\cdot(1-k)}\right)^2-3\cdot\left(\frac{10}{3\cdot(k-1)}\right)^2\right]\cdot(k-1)^2-45k^2$. Risolviamola nell'incognita k:

$$-220=9\cdot\left[\frac{100}{9\cdot(1-k)^2}-\frac{100}{3\cdot(k-1)^2}\right]\cdot(k-1)^2-45k^2\Rightarrow-220=9\cdot\left[\frac{100}{9\cdot(k-1)^2}-\frac{100}{3\cdot(k-1)^2}\right]\cdot(k-1)^2-45k^2\Rightarrow$$

$$-220=\cancel{9}^1\cdot\frac{100-300}{\cancel{9}^1}-45k^2\Rightarrow-220=-200-45k^2\Rightarrow45k^2=20\Rightarrow k=\pm\sqrt{\frac{20}{45}}\Rightarrow k=\pm\sqrt{\frac{4}{9}}\Rightarrow k=\pm\frac{2}{3}$$

Quindi vi sono due possibili valori per il rapporto dell'omotetia. Determiniamo i centri:

$$\begin{cases} a=\dfrac{5}{3\cdot\left(1-\dfrac{2}{3}\right)} \\ b=\dfrac{10}{3\cdot\left(\dfrac{2}{3}-1\right)} \\ k=\dfrac{2}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} a=\dfrac{5}{3\cdot\left(1+\dfrac{2}{3}\right)} \\ b=\dfrac{10}{3\cdot\left(-\dfrac{2}{3}-1\right)} \\ k=-\dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-10 \\ k=\dfrac{2}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ k=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Determinare, se esistono, le omotetie $\sigma:\begin{cases} x'=kx \\ y'=ky \end{cases}$***, che trasformano la prima iperbole nella seconda***

Livello 3

95. $x^2-y^2=13 \to x^2-y^2=17$; $4x^2-y^2=9 \to x^2-y^2=17$; $3y^2-2x^2=3 \to 3x^2-2y^2=5$; $xy=16 \to xy=4$ $\left[k=\pm\frac{\sqrt{221}}{13};\varnothing;k=\pm\frac{\sqrt{15}}{3};k=\pm\frac{1}{2}\right]$

CAS ***Determinare centro e rapporto delle omotetie che trasformano la prima iperbole nella seconda***

96. $7x^2-y^2=2 \to 175x^2-25y^2-840x-30y+991=0$ $\left[(4;-1),\frac{2}{5}\vee\left(\frac{12}{7};-\frac{3}{7}\right),-\frac{2}{5}\right]$

97. $xy=4 \to 49xy+112y-36=0$ $\left[(-4;0),\frac{3}{7}\vee\left(-\frac{8}{5};0\right),-\frac{3}{7}\right]$

98. $x^2-y^2=3 \to 3x^2-3y^2+8xy-75=0$ $[\varnothing]$

CAS ***Determinare le similitudini di leggi*** $\zeta:\begin{cases} x'=ax+by \\ y'=bx-ay \end{cases}$***, che trasformano la prima iperbole nella seconda***

99. $y^2-5x^2=1 \to x^2-5y^2=9$ $[(a=0\wedge b=1)\vee(a=0\wedge b=-1)]$
100. $4x^2-y^2=2 \to 3x^2+4xy=10$ $[(a=2\wedge b=1)\vee(a=-2\wedge b=-1)]$
101. $xy=5 \to x^2-y^2-\sqrt{2}xy-45\cdot\sqrt{2}=0$ $\left[\left(a=\sqrt{2}\wedge b=1\right)\vee\left(a=-\sqrt{2}\wedge b=-1\right)\right]$

CAS ***Determinare le affinità di leggi indicate, che trasformano la prima iperbole nella seconda.***

102. $\alpha:\begin{cases} x'=ax \\ y'=by \end{cases}$, $x^2-y^2=4 \to 4x^2-9y^2=4$ $\left[\left(a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{3}\right)\vee\left(a=-\frac{1}{2},b=\frac{1}{3}\right)\right]$

103. $\alpha:\begin{cases} x'=ax \\ y'=by \end{cases}$, $xy=3 \to 2xy+9=0$ $\left[\left(a=2,b=-\frac{3}{4}\right)\vee\left(a=-2,b=\frac{3}{4}\right)\right]$

104. $\alpha:\begin{cases} x'=x+y-a \\ y'=-y+2x-3b \end{cases}$, $2x^2-y^2=1 \to 7x^2-10xy+y^2-72x+153=0$ $[a=-3,\ b=1]$

105. $\alpha:\begin{cases} x'=ay+1 \\ y'=x-by+2 \end{cases}$, $xy+3=0 \to 8x^2-4x^2-8x+4y+9=0$ $\left[a=1,b=\frac{3}{2}\right]$

Lavoriamo insieme

Le iperboli, come le ellissi, hanno un centro di simmetria. Vogliamo trovare le coordinate del centro di simmetria dell'iperbole di equazione $x^2+5xy-4y^2+2x-3y-1=0$. Come già visto nel caso dell'ellisse, applichiamo una simmetria rispetto al generico centro $C\equiv(x_C;y_C)$:

$$(2x_C-x)^2+5\cdot(2y_C-y)\cdot(2x_C-x)-4\cdot(2y_C-y)^2+2\cdot(2x_C-x)-3\cdot(2y_C-y)-1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+5xy-4y^2-(4x_C+10y_C+2)\cdot x-(10x_C-16y_C-3)\cdot y+4x_C^2+20x_Cy_C-16y_C^2+4x_C-6y_C+1=0$$

Affinché C sia centro di simmetria la curva trasformata deve coincidere con quella di partenza, deve perciò essere: $\begin{cases} 4x_C + 10y_C + 2 = -2 \\ 10x_C - 16y_C - 3 = 3 \\ 4x_C^2 + 20x_C y_C - 16y_C^2 + 4x_C - 6y_C + 1 = -1 \end{cases}$. Risolviamo le prime due equazioni e sostituiamo nella terza per stabilire se la verifica; otteniamo: $\begin{cases} x_C = -\frac{1}{41} \\ y_C = -\frac{16}{41} \end{cases}$. Il centro dell'iperbole è $C \equiv \left(-\frac{1}{41}; -\frac{16}{41}\right)$.

Trovare le coordinate del centro di simmetria delle seguenti iperboli

Livello 3

106. $3x^2 - y^2 + 4x - 2y = 0$; $x^2 - 2y^2 + x - y - 2 = 0$; $x^2 - 3y^2 + x + y - 1 = 0$; $4x^2 - y^2 + 3y = 0$

$\left[\left(-\frac{2}{3}; -1\right); \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right); \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{6}\right); \left(0; \frac{3}{2}\right)\right]$

107. $2y^2 - 3x^2 + x - 2y + 1 = 0$; $y^2 - xy + 3x - y - 2 = 0$; $x^2 + xy - 3y + 2 = 0$; $y^2 - 3xy - x^2 + 5x - y + 3 = 0$

$\left[\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right); (5;3); (3;-6); \left(\frac{7}{5}; \frac{13}{5}\right)\right]$

Fasci di iperboli

Avendo già trattato i fasci di altre coniche, passiamo direttamente a definizioni ed esempi.

Definizione 9

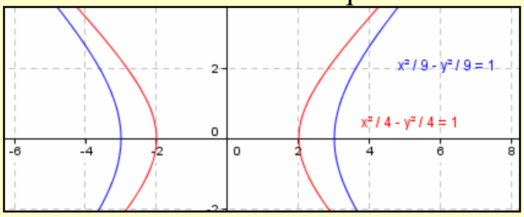
Date due iperboli reali di equazioni $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ e un parametro reale k, diciamo **fascio di iperboli generato dalle due iperboli,** la totalità dei punti del piano che verificano l'equazione $f(x, y) + k \cdot g(x, y) = 0$, nonché l'ellisse $g(x, y) = 0$.

Definizione 10

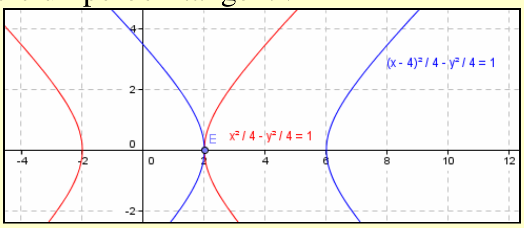
Gli eventuali punti comuni a tutte le iperboli di un fascio si chiamano **punti base del fascio**.

Esempio 8

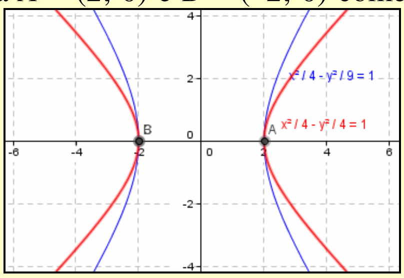
- Il fascio di iperboli $(x^2 - y^2 - 9) + k \cdot (x^2 - y^2 - 1) = 0$ non ha punti base perché le iperboli generatrici, come mostrato nel grafico, o come può vedersi risolvendo il sistema formato dalle due equazioni delle generatrici, non hanno punti in comune.



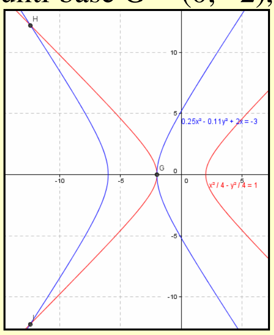
- Il fascio di iperboli $(x^2 - y^2 - 4) + k \cdot (x^2 - y^2 - 8x + 12) = 0$ ha un solo punto base $E \equiv (2; 0)$, perché le iperboli generatrici hanno tale punto in comune, cioè sono un fascio di iperboli tangenti.



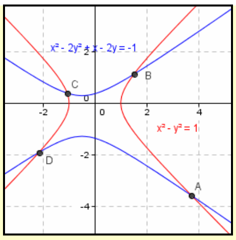
- Il fascio di iperboli di equazione $(x^2 - y^2 - 4) + k \cdot (9x^2 - 4y^2 - 36) = 0$ ha $A \equiv (2; 0)$ e $B \equiv (-2; 0)$ come punti base, perché le iperboli generatrici hanno tali punti in comune.



- Il fascio di iperboli di equazione $(x^2 - y^2 - 4) + k \cdot (9x^2 - 4y^2 + 72x + 108) = 0$ ha 3 punti base $G \equiv (0; -2)$, H e I, perché le iperboli generatrici hanno tali punti in comune.



- Il fascio di iperboli di equazione $(x^2 - 2y^2 + x - 2y + 1) + k \cdot (x^2 - y^2 - 1) = 0$ ha quattro punti base, perché



le iperboli generatrici, come mostrato nel grafico, hanno A, B, C, e D in comune.

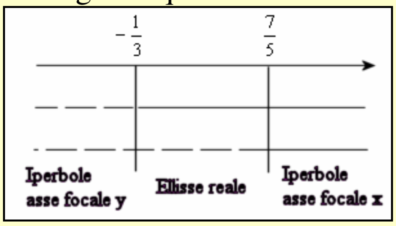
L'esempio precedente ci permette di enunciare il seguente risultato.

Teorema 7

In un fascio di iperboli vi sono al più 4 punti base.

Esempio 9

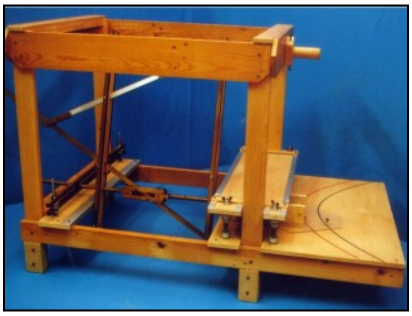
Il fascio di equazione $\frac{x^2}{3k+1}-\frac{y^2}{5k-7}=1$, è formato da iperboli canoniche o da ellissi canoniche, dato che i denominatori non sono sempre numeri reali positivi. Studiamo allora i segni di questi denominatori: $3k + 1 > 0 \Rightarrow k > -\frac{1}{3}$, $5k - 7 > 0 \Rightarrow k > \frac{7}{5}$. Mettiamo il tutto in un grafico.

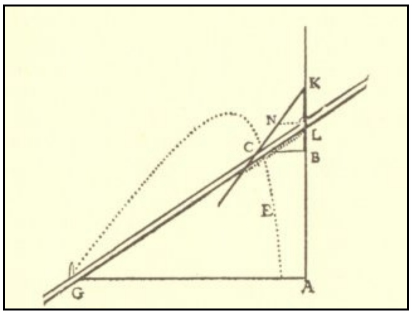


Chiariamo le scelte effettuate. Il grafico di permette di dire che se $k < -\frac{1}{3}$, allora entrambi i denominatori sono numeri negativi, quindi l'equazione del fascio può scriversi nella forma: $\frac{x^2}{-a^2}-\frac{y^2}{-b^2}=1 \Rightarrow -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, che è appunto l'equazione di un'iperbole canonica con asse focale quello delle ordinate. Se invece si ha $-\frac{1}{3}<k<\frac{7}{5}$, il primo denominatore è positivo e il secondo negativo, quindi possiamo scrivere: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{-b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, che rappresenta un'ellisse canonica. Infine se $k > \frac{7}{5}$, allora entrambi i denominatori sono numeri positivi e l'equazione del fascio diviene: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, cioè un'iperbole canonica con asse focale quello delle ascisse. Nel fascio ci sono circonferenze o iperboli equilatere? Uguagliamo i valori assoluti dei denominatori: $3k + 1 = 5k - 7 \Rightarrow 2k = 8 \Rightarrow k = 4$; $3k + 1 = -5k + 7 \Rightarrow 8k = 6 \Rightarrow k = \frac{3}{4}$. Abbiamo così le seguenti due coniche: $\frac{x^2}{3\cdot 4+1}-\frac{y^2}{5\cdot 4-7}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{13}-\frac{y^2}{13}=1$, e l'altra: $\frac{x^2}{3\cdot\frac{3}{4}+1}-\frac{y^2}{5\cdot\frac{3}{4}-7}=1 \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{4x^2}{13}+\frac{4y^2}{13}=1 \Rightarrow x^2+y^2=\frac{13}{4}$; la prima è un'iperbole equilatera, l'altra una circonferenza. Il valore trovato nell'equazione ci permette anche di stabilire quando il primo denominatore è, in valore assoluto, maggiore del secondo. In particolare si ha: $3k + 1 > 5k - 7 \Rightarrow k < 4$; $3k + 1 > -5k + 7 \Rightarrow k > \frac{3}{4}$. Allora, dato che vi sono ellissi reali per $-\frac{1}{3}<k<\frac{7}{5}$ e che $-\frac{1}{3}<\frac{3}{4}<\frac{7}{5}$, possiamo dire che se $-\frac{1}{3}<k<\frac{3}{4}$, le ellissi hanno asse focale quello delle ordinate; mentre se $\frac{3}{4}<k<\frac{7}{5}$, allora l'asse focale è x.

L'Antologia

Le coniche vengono usate anche nella applicazioni scientifiche. Del resto lo stesso nome fuoco ricorda delle applicazioni alle lenti, poiché il fuoco è il punto dove una lente fa convergere i raggi provenienti da una sorgente luminosa. A questo proposito ricordiamo i famosi e fantomatici specchi ustori che si dice Archimede abbia costruito per incendiare le navi romane che assediavano Siracusa.
Se Archimede sia effettivamente riuscito in questa impresa che la leggenda gli associa non è certo, quel che la storia ci riporta è invece l'interesse di scienziati come Cartesio che nel 1600 progetta lenti iperboliche, allo scopo di evitare le aberrazioni di sfericità. Naturalmente ha bisogno di una macchina che riesca a costruire un'iperbole. Di seguito proponiamo un modello di uno strumento del genere, custodito nel museo di Modena di cui abbiamo già parlato; riportiamo anche il disegno originale e la descrizione del perché il detto strumento *funzioni*.





Renée Descartes, *La géométrie,* 1637

Se voglio sapere di quale genere è la linea EC descritta –così suppongo– mediante la intersezione del regolo GL e della figura piana CNKL, il cui lato KN è prolungato indefinitamente verso C e che, essendo mosso in linea retta nel piano verso la parte sottostante (in modo cioè che il suo diametro KL giaccia sempre lungo la linea BA prolungata nell'una e nell'altra direzione) fa ruotare questo regolo GL intorno al punto G , dato che gli è unito in modo da passare sempre per il punto L, scelgo una retta come AB per riferire ai suoi diversi punti tutti quelli della curva EC, e , lungo questa retta AB , scelgo un punto A per iniziare da esso tale calcolo.

La traduzione è riportata dal CD curato dal Museo Universitario di Storia Naturale, dal quale abbiamo tratto le immagini. Adesso, dallo stesso CD, riportiamo anche la spiegazione in italiano corrente.

Cartesio dunque prende A come origine, AB come asse delle ascisse e utilizza ordinate parallele senza tracciare però l'asse delle ordinate. Pone poi: AB = x, CB = y (parallelo a GA) come quantità indeterminate; AG = a, KL = b, NC = c (parallelo a GA), come quantità determinate.

Dai triangoli simili NLK, CBK si ha NK:LK= CB:BK ossia BK = $\frac{by}{c}$*. Ma BL = BK – LK, quindi BL =* $\frac{by}{c}$ *– b, AL = AB + BL quindi AL = x +* $\frac{by}{c}$ *– b. Dai triangoli simili CBL, GAL si ha BC:BL = AG: AL, ossia BC·AL = AG · BL. Dall'ultima uguaglianza, sostituendo:* $y\cdot\left(x+\frac{by}{c}-b\right)=a\cdot\left(\frac{by}{c}-b\right)$*. Che si può anche scrivere:* $y^2=cy-\frac{c}{b}xy+ay-ac$ *, che si riconosce essere l'equazione di un'iperbole.*

Verifiche

Lavoriamo insieme

Il fascio di coniche di equazione: $\frac{x^2}{k^2+4}-\frac{y^2}{3k^2+2}=1$, *è tutto formato da iperboli canoniche con asse focale sulle ascisse, dato che i denominatori sono sempre positivi.*

- *Stabiliamo se nel fascio ci sono iperboli equilatere*: $k^2 + 4 = 3k^2 + 2 \Rightarrow - 2k^2 = - 2 \Rightarrow k^2 = 1$. Vi è quindi una sola iperbole equilatera, anche se vi sono due diversi valori di k: $\frac{x^2}{1+4}-\frac{y^2}{3\cdot 1+2}=1\Rightarrow \frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{5}=1$.
- *Vogliamo sapere se vi sono iperboli che hanno la retta di equazione $y = 3x$ come uno dei suoi asintoti.* Dobbiamo risolvere la seguente equazione: $\frac{3k^2+2}{k^2+4}=9\Rightarrow 3k^2+2=9k^2+36\Rightarrow -6k^2=34$. Ossia non vi sono iperboli con la data retta come asintoto. In generale la retta di equazione $y = mx$ è asintoto della generica iperbole del fascio se: $\frac{3k^2+2}{k^2+4}=m^2 \Rightarrow 3k^2 + 2 = m^2 \cdot (k^2 + 4) \Rightarrow (3 - m^2) \cdot k^2 = 4m^2 - 2 \Rightarrow$ $k^2=\frac{4m^2-2}{3-m^2}$. Perché l'equazione abbia soluzioni il secondo membro deve essere non negativo come il primo, deve cioè essere: $\frac{4m^2-2}{3-m^2}\ge 0\Rightarrow \begin{cases}4m^2-2\ge 0\\ 3-m^2>0\end{cases} \vee \begin{cases}4m^2-2\le 0\\ 3-m^2<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2m^2-1\ge 0\\ m^2-3<0\end{cases} \vee \begin{cases}2m^2-1\le 0\\ m^2-3>0\end{cases} \Rightarrow$ $-\sqrt{3}<m\le -\frac{1}{\sqrt{2}} \vee \frac{1}{\sqrt{2}}\le m<\sqrt{3}$. Le soluzioni ottenute sono solo del primo sistema, il secondo non ha soluzioni. Come si vede effettivamente $m = 3$ non è una delle soluzioni.

Nei seguenti fasci di iperboli canoniche, determinare, se esistono, i valori del parametro reale k per i quali si hanno iperboli: a) equilatere; b) passanti per un punto dato P; c) con un dato fuoco F; d) con una data eccentricità e; e) con una data retta per asintoto.

Livello 2

1. $\frac{x^2}{9k^2+1}-\frac{y^2}{4k^2+5}=1;\ P\equiv(3;2);\ F\equiv\left(\sqrt{7};0\right);\ e=\frac{11}{5};\ y=-\frac{5}{4}x$
$\left[\text{a) } k^2=\frac{4}{5};\ \text{b) } k^2=\frac{\sqrt{7585}-49}{72};\ \text{c) } k^2=\frac{1}{13};\ \text{d) } k^2=\frac{29}{764};\ \text{e) } k^2=\frac{55}{161}\right]$
2. $\frac{y^2}{3k^2+7}-\frac{x^2}{5k^2+1}=1;\ P\equiv(3;-5);\ F\equiv(0;-3);\ e=\sqrt{2};\ y=\sqrt{5}x$
$\left[\text{a) } k^2=3;\ \text{b) } k^2=3\vee k^2=1;\ \text{c) } k^2=\frac{1}{8};\ \text{d) } k^2=3;\ \text{e) } k^2=\frac{1}{11}\right]$
3. $\frac{y^2}{k^2+2}-\frac{x^2}{k^2+1}=1;\ P\equiv(-1;3);\ F\equiv(0;-5);\ e=\frac{4}{5};\ y=-\frac{1}{3}x$
$\left[\text{a) } \varnothing;\ \text{b) } k^2=\frac{5+3\cdot\sqrt{5}}{2};\ \text{c) } k^2=11;\ \text{d) } \varnothing;\ \text{e) } \varnothing\right]$
4. $\frac{y^2}{2k^2+5}-\frac{x^2}{3k^2+4}=1;\ P\equiv(2;-3);\ F\equiv\left(0;\sqrt{11}\right);\ e=\sqrt{2};\ y=2x$
[a) $k^2 = 1$; b) $\varnothing$; c) $k^2=\frac{2}{5}$; d) $k^2 = 1$; e) $\varnothing$]
5. $\frac{x^2}{3k^2+1}-\frac{y^2}{k^2+7}=1;\ P\equiv\left(\frac{1}{2};1\right);\ F\equiv\left(0;\sqrt{5}\right);\ e=\frac{7}{2};\ y=\frac{3}{2}x$ [a) $k^2 = 3$; b) $\varnothing$; c) $\varnothing$; d) $\varnothing$; e) $k^2=\frac{19}{23}$]

6. $\frac{x^2}{6k^2+1}-\frac{y^2}{9k^2+2}=1;\ P\equiv(3;-2);\ F\equiv\left(\sqrt{7};0\right);\ e=\frac{5}{3};\ y=\frac{13}{10}x$

$\left[\text{a) }\varnothing;\text{ b) }k^2=\frac{1+\sqrt{3}}{3};\ \text{c) }k^2=\frac{4}{15};\ \text{d) }k^2=\frac{2}{15};\ e)\ k^2=\frac{31}{114}\right]$

Livello 3

7. Con riferimento al problema 5, per quali valori dell'eccentricità il quesito d) ha soluzioni? $\left[\frac{1}{4}\le e<\frac{1}{3}\right]$

8. Con riferimento al problema 3, perché il quesito e) non ha soluzione?

[L'asintoto $y = mx$, ha sempre $m < -1 \vee m > 1$]

9. Con riferimento al problema 4, per quali valori del coefficiente angolare m dell'asintoto il quesito e) ha soluzioni? $\left[\frac{1}{3}\le m<7\right]$

Scrivere le equazioni dei fasci di iperboli canoniche che verificano quanto richiesto (e indica l'eccentricità, F uno dei fuochi, a e b i semiassi, l'equazione di una retta un asintoto)

Livello 2

10. Aventi uno dei vertici in (3; 0) ; $F \equiv (0; a)$ e passanti per (3; –2) ; $F \equiv (0; 2)$; $F \equiv (a; 0)$, $e = 4$

$\left[\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{b^2}=1;\frac{y^2}{m^2}-\frac{(m-4)^2\cdot x^2}{81m^2}=1;\frac{y^2}{m}-\frac{x^2}{4-m}=1,\ 0<m<4;\frac{x^2}{m}-\frac{y^2}{3m}=1\right]$

11. $y = 3x$; $F \in x - y + 1 = 0$; Aventi la retta $3x - 2y + 1 = 0$ come tangente

$\left[\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{9a^2}=1\vee\frac{y^2}{9b^2}-\frac{x^2}{b^2}=1\right);\left(\frac{x^2}{1-b^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\vee\frac{y^2}{1-b^2}-\frac{x^2}{b^2}=1\right);\left(\frac{9x^2}{4m+1}-\frac{y^2}{m}=1\vee\frac{4y^2}{9m+1}-\frac{x^2}{m}=1,\ m>0\right)\right]$

Determinare le equazioni dei seguenti luoghi, verificando che sono iperboli

Livello 3

12. Punti per i quali è $\frac{3}{4}$ il rapporto fra la distanza dalla retta di equazione $2x + 7y - 2 = 0$ e la distanza dal punto (–3; 1). [$413x^2 - 448xy - 307y^2 + 2990x - 506y + 4706 = 0$]

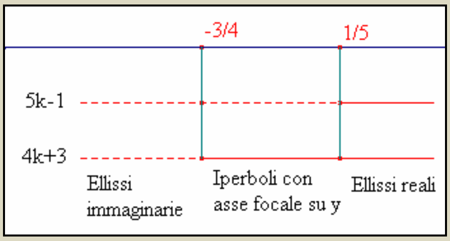
13. Punti per i quali la differenza dei quadrati delle distanze dalle rette $x + 3y + 1 = 0$ e $2x - y - 2 = 0$ è 5.

[$7x^2 - 14xy - 7y^2 - 18x + 2y + 57 = 0$]

14. Punti $P \equiv (x; y)$ le cui distanze PH e PK, dalle bisettrici degli assi verificano la relazione $\overline{PH}^2-4\cdot\overline{PK}^2=5$. [$3x^2 - 10xy + 3y^2 + 10 = 0$]

Lavoriamo insieme

Consideriamo la seguente famiglia di coniche: $\frac{x^2}{5k-1}+\frac{y^2}{4k+3}=1$. Stavolta non possiamo dire che abbiamo a che fare sempre con delle ellissi canoniche, dato che i denominatori non hanno un segno costante. Studiamo appunto tali segni. $5k - 1 > 0 \Rightarrow k>\frac{1}{5}$; $4k + 3 > 0 \Rightarrow k>-\frac{3}{4}$. Rappresentiamo graficamente i segni dei due denominatori. Spieghiamo cosa accade. Per $k<-\frac{3}{4}$ entrambi i denominatori sono negativi, abbiamo quindi un'equazione del tipo: $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, che rappresenta appunto un'ellisse immaginaria. Invece per $-\frac{3}{4}<k<\frac{1}{5}$, il primo denominatore è negativo, il secondo positivo, l'equazione è perciò del tipo: $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, cioè un'iperbole con asse focale sulle ordinate. Infine se $k>\frac{1}{5}$, i denominatori sono entrambi positivi, l'equazione è del tipo: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, è quindi un'ellisse reale.

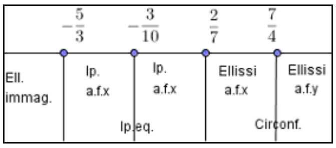


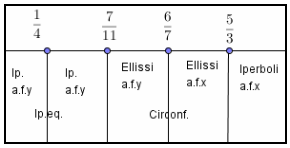
I denominatori possono essere uguali fra loro, ciò accade se $5k - 1 = 4k + 3 \Rightarrow k = 4$, visto che per tale valore si hanno ellissi, possiamo dire che per $k = 4$ vi è una circonferenza, l'unica del fascio, di equazione $\frac{x^2}{5\cdot 4-1}+\frac{y^2}{4\cdot 4+3}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{19}+\frac{y^2}{19}=1 \Rightarrow x^2+y^2=19$. Per ragioni analoghe possiamo dire anche che se $k > 4$ il primo denominatore è maggiore del secondo, quindi le ellissi hanno i fuochi sull'asse x, se $\frac{1}{5} < k < 4$, i fuochi sono sull'asse delle ordinate. Ma i denominatori possono anche essere opposti, se $5k - 1 = - 4k - 3 \Rightarrow 9k = -2 \Rightarrow k = -\frac{2}{9}$, in questo caso si ottengono iperboli, quindi per tale valore abbiamo l'unica iperbole equilatera, di equazione: $\frac{x^2}{5\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)-1}+\frac{y^2}{4\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)+3}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{-\frac{19}{9}}+\frac{y^2}{\frac{19}{9}}=1 \Rightarrow y^2-x^2=-\frac{9}{19}$.

Nelle seguenti famiglie di coniche centro, determinare per quali valori del parametro k si ottengono ellissi reali, ellissi immaginarie, iperboli, circonferenze, iperboli equilatere

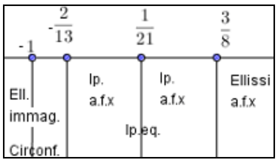
Livello 2

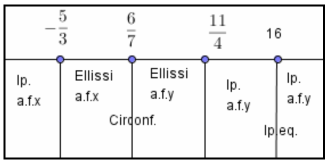
15. a) $\frac{x^2}{3k+5}+\frac{y^2}{7k-2}=1$; b) $\frac{x^2}{11k-7}+\frac{y^2}{-3k+5}=1$



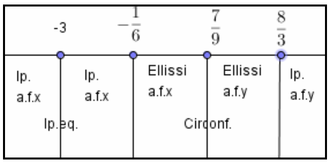


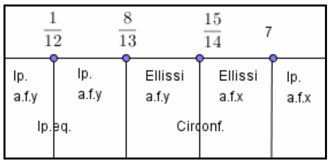
16. a) $\frac{x^2}{13k+2}+\frac{y^2}{8k-3}=1$; b) $\frac{x^2}{-4k+11}+\frac{y^2}{3k+5}=1$



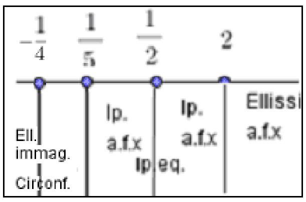


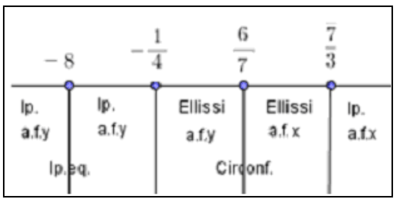
17. a) $\frac{x^2}{-3k+8}+\frac{y^2}{6k+1}=1$; b) $\frac{x^2}{13k-8}+\frac{y^2}{-k+7}=1$

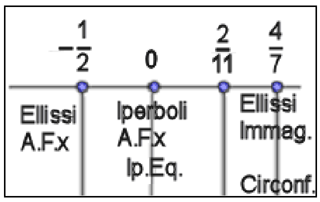




18. a) $\frac{x^2}{5k-1}-\frac{y^2}{2-k}=1$; b) $\frac{x^2}{4k+1}-\frac{y^2}{3k-7}=1$; c) $\frac{x^2}{2-11k}-\frac{y^2}{4k+2}=1$







Livello 3

Con riferimento ai quesiti precedenti, determinare se esistono, le coniche richieste che verificano quanto rihiesto

19. 15a, ellissi di eccentricità $\frac{1}{2}$; 15b, iperboli con asintoto $y = 2x$; 16a, ellissi con fuoco in (3; 0)

$$\left[\left(\frac{19x^2}{164}+\frac{19y^2}{123}=1\vee\frac{3x^2}{41}+\frac{9y^2}{164}=1\right);\frac{41x^2}{136}-\frac{41y^2}{34}=1;\frac{5x^2}{62}+\frac{5y^2}{17}=1\right]$$

20. 16b, iperboli con fuoco in (0; 1) ; 17a, iperboli di eccentricità $\sqrt{2}$; 17b, ellissi con fuoco in (2; 0)

$$\left[\varnothing;\frac{x^2}{17}-\frac{y^2}{17}=1;\frac{14x^2}{135}+\frac{14y^2}{79}=1\right]$$

21. 18a, ellissi di eccentricità $\frac{3}{\sqrt{10}}$; 18b, iperboli con asintoto $y=\sqrt{3}x$; 18c, iperboli di eccentricità 4

$$\left[\frac{x^2}{18}+\frac{5y^2}{9}=1;\frac{3y^2}{31}-\frac{9x^2}{31}=1;\frac{169x^2}{30}-\frac{169y^2}{450}=1\right]$$

Intervallo matematico

Importanti applicazioni fisiche delle iperboli si hanno in termologia e termodinamica. In particolare ciò si ottiene studiando la cosiddetta legge dei gas perfetti, secondo la quale il prodotto fra pressione e volume di un dato gas perfetto è costante, in simboli PV = k. Quindi in un sistema di riferimento in cui le ascisse (o le ordinate) sono i valori della pressione P di un gas, e le ordinate (o ascisse) registrano i valori del volume dello stesso gas, la legge dei gas perfetti rappresenta un'iperbole equilatera. In effetti da un punto di vista fisico non ha senso considerare pressioni e volumi negativi, quindi abbiamo a che fare con un solo ramo di iperbole, quello posto nel primo quadrante. Vi è una legge più generale che lega fra loro le tre grandezze termodinamiche, pressione, volume e temperatura: PV = mT. con m costante reale. A seconda di quale delle tre grandezze fisiche risulta costante abbiamo a che fare con delle trasformazioni fisiche che si chiamano isobare (P costante), isocore o isovolumiche (V costante) oppure isoterme (T costante). Le leggi espresse mediante le due grandezze variabili divengono perciò: PV = k ; P = kT; V = kT.
Quindi solo le isoterme sono rappresentate da un ramo di iperbole equilatera riferita a i propri assi; isobare (in un sistema VT) e isocore (in un sistema PT) sono invece rette passanti per l'origine.

L'angolo di Derive

Il link http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%204/4-3/4-3-1.exe mostra un'applicazione per usare Derive nello studio delle iperboli.
Il relativo file Derive lo scarichi da
http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%204/4-3/4-3-1.dfw

L'angolo di Geogebra

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%204/4-3/4-3-2.exe si avvia un'applicazione che mostra come Geogebra tratta le iperboli. Per il relativo file Geogebra clicca su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%204/4-3/4-3-2.ggb .

L'angolo della MateFisica

La rappresentazione grafica dell'iperbole equilatera riferita ai propri assi: $xy = k$, non è altri che la legge dell'inversa proporzionalità, che ha tanti applicazioni in Fisica. In particolare, per $x > 0$, $y > 0$ e $k > 0$, non è altri che la cosiddetta *Legge di Boyle*, valida per le cosiddette trasformazioni termodinamiche isoterme, ossia a temperatura costante. Essa vale per i cosiddetti gas perfetti ed afferma appunto che il prodotto della pressione e del volume del gas è costante: $P \cdot V = k$. La legge talvolta è nota anche con il nome di Boyòle-Mariotte, dato che fu enunciata per la prima volta nel 1662 da Robert Boyle (1627-1691), ma successivamente, nel 1676, Edme Mariotte (1620-1684), aggiunse che essa valeva solo per trasformazioni isoterme.
Tale legge è un caso particolare della cosiddetta *Equazione di stato dei gas perfetti*, che mette in relazione le tre grandezze fondamentali della termodinamica: $P \cdot V = nRT$. In tale legge, n è il numero di moli del gas perfetto; R è una costante che vale circa 8,31 $J/(mol \cdot K)$.

Attività
1. Spiegare perché la rappresentazione grafica della legge di Boyle è data da uno solo dei rami dell'iperbole equilatera.
2. Qual è il significato fisico degli asintoti dell'iperbole?
3. Se raddoppiamo la pressione di un gas a temperatura costante, quanto diviene il suo volume? [Dimezza]
4. Alla pressione di X Pa una certa quantità di gas occupa un volume di V m^3, mantenendo costante la temperatura, la pressione del gas diviene Y Pa, quanto vale adesso il nuovo volume occupato dal gas? $\left[\dfrac{X \cdot V}{Y} m^3\right]$

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi

1. Un'iperbole può essere spezzata in due rette parallele? E in due rette incidenti? E in due rette immaginarie? Giustificare le risposte. [No; sì; sì]
2. Sia l'iperbole equilatera di equazione $xy = k$, con $k \in \mathbb{N}$. È possibile che non vi siano punti reticolo appartenenti alla curva? Giustificare la risposta. In caso di risposta negativa quanti sono il numero minimo di punti reticolo appartenenti a una curva del genere? In questo caso qual è l'equazione dell'iperbole? [No; 2 per $xy = 1$, $xy = -1$]
3. Sia l'iperbole equilatera di equazione $xy = k$, con $k \in \mathbb{N}$. È possibile che vi siano un numero dispari di punti reticolo appartenenti alla curva? Giustificare la risposta. [No, sempre in numero pari perché per ogni coppia di divisori di k vi sono sempre 2 punti reticolo]
4. Sia l'iperbole equilatera di equazione $xy = k$, con $k \in \mathbb{N}$ numero primo. Quanti punti reticolo appartengono alla curva? Giustificare la risposta. [4: $(1; k)$, $(-1; -k)$, $(k, 1)$, $(-k, -1)$]
5. Sia l'iperbole equilatera di equazione $xy = k^2$ con $k \in \mathbb{N}$ numero primo. Quanti punti reticolo appartengono alla curva? Giustificare la risposta. [6: $(1; k^2)$, $(-1; -k^2)$, $(k^{2;}\ 1)$, $(-k^{2;}\ -1)$, (k, k), $(-k, -k)$]
6. Determinare quanti punti della curva di equazione $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2004}$, hanno entrambe le coordinate rappresentate da numeri interi positivi. Sugg. Cerca di scrivere l'equazione in un altro modo. [45]
7. Dato il triangolo di vertici $\left(\dfrac{13}{2}; -\dfrac{11}{2}\right), (-4; 2), \left(\dfrac{7}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$ e l'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 12$, verificare la validità del seguente teorema: *L'ortocentro di ogni triangolo inscritto in un'iperbole equilatera appartiene alla stessa iperbole.* $\left[\left(\dfrac{49}{4}; \dfrac{47}{4}\right)\right]$
8. Verificare il teorema del precedente esercizio, con il triangolo di vertici $(1; -9)$, $(-3; 3)$, $(9; -1)$ e per l'iperbole di equazione $xy = -9$. [$(3; -3)$]

9. Data l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ e la retta di equazione $x + 4y - 3 = 0$, verificare la validità del seguente teorema: *Data una retta che incontra un'iperbole nei punti A e B e i relativi asintoti nei punti A' e B', allora i segmenti AA' e BB' sono uguali.* $\left[\overline{AA'} = \overline{BB'} = \frac{\sqrt{357} - 3\cdot\sqrt{17}}{6}\right]$

10. Data l'iperbole di equazione $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$, e il suo punto di ordinata 4, verificare la validità del seguente teorema: *Il parallelogramma che ha due lati appartenenti agli asintoti di un'iperbole e altri due appartenenti alle parallele agli asintoti per un punto qualsiasi dell'iperbole ha area costante.*

11. Data l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, verificare la validità del seguente teorema: *Il triangolo che ha due lati appartenenti agli asintoti di un'iperbole e il terzo lato appartenente alla tangente all'iperbole per un suo punto qualsiasi ha area costante.*

12. CAS Verificare la validità del seguente teorema: *L'iperbole di equazione* $x^2 + 2mxy - y^2 - (a+b)\cdot x + \left(\frac{c^2 - ab}{c}\right)\cdot y + ab = 0$, *passa per i punti* $A \equiv (a; 0)$, $B \equiv (b; 0)$, $C \equiv (0; c)$ *e per l'ortocentro di ABC, quali che siano i parametri reali a, b, c, m.*

13. Dimostrare che l'unica coppia di numeri reali la cui somma è uguale al proprio prodotto è (2; 2).

Temi di esame assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi

Lavoriamo insieme

Il seguente quesito fu assegnato negli esami di Liceo scientifico nel 1990. *Determinare il luogo dei centri delle circonferenze tangenti la retta di equazione* $y = \frac{37}{12}$ *e passanti per* $A \equiv \left(0; \frac{19}{12}\right)$ *e il luogo dei centri delle circonferenze tangenti la circonferenza* $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 8 = 0$ *e passanti per il punto* $B \equiv (2; 2)$.

Consideriamo il fascio delle circonferenze verificanti le prime due condizioni. La generica circonferenza ha equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, stabiliamo la condizione di tangenza. $\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ y = \frac{37}{12} \end{cases} \Rightarrow$

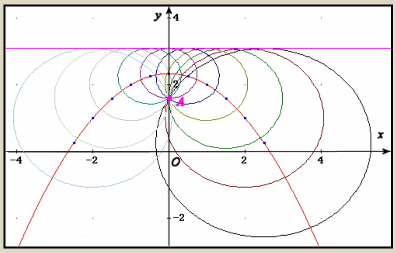
$x^2 + \frac{1369}{144} + ax + \frac{37}{12}b + c = 0 \Rightarrow 144x^2 + 144ax + 444b + 144c + 1369 = 0$. Calcoliamo il discriminante: $\frac{\Delta}{4} = 0 \Rightarrow (72a)^2 - 144\cdot(444b + 144c + 1369) = 0 \Rightarrow 36a^2 - 444b - 144c - 1369 = 0$. Adesso mettiamo a sistema con la condizione di passaggio per A.

$$\begin{cases} 36a^2 - 444b - 144c - 1369 = 0 \\ \left(\frac{19}{12}\right)^2 + \frac{19}{12}b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 36a^2 - 444b - 144c - 1369 = 0 \\ \frac{361}{144} + \frac{19}{12}b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 36a^2 - 444b - 144c - 1369 = 0 \\ 361 + 228b + 144c = 0 \end{cases}$$

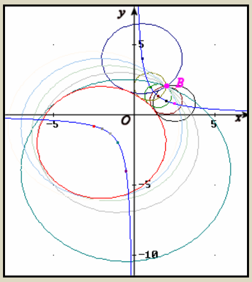
Dato che a è l'unica delle 3 incognite a essere presente con un termine di secondo grado, risolviamo il sistema in funzione di tale parametro: $\begin{cases} 36a^2 - 444b + 361 + 228b - 1369 = 0 \\ 144c = -361 - 228b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 36a^2 - 216b - 1008 = 0 \\ 144c = -361 - 228b \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} b=\dfrac{36a^2-1008}{216} \\ 144c=-361-228b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\dfrac{a^2-28}{6} \\ 144c=-361-228\cdot\dfrac{a^2-28}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\dfrac{a^2-28}{6} \\ 144c=-361-38a^2+1064 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\dfrac{a^2-28}{6} \\ c=\dfrac{-38a^2+703}{144} \end{cases}$$

Quindi il fascio di circonferenze ha equazione: $x^2+y^2+ax+\dfrac{a^2-28}{6}y-\dfrac{38a^2-703}{144}=0$. Il suo generico centro ha coordinate: $C\equiv\left(-\dfrac{a}{2};\dfrac{28-a^2}{12}\right)$. Per determinare l'equazione del luogo richiesto risolviamo il sistema parametrico: $\begin{cases} x=-\dfrac{a}{2} \\ y=\dfrac{28-a^2}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2x \\ y=\dfrac{28-4x^2}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2x \\ y=\dfrac{7-x^2}{3} \end{cases}$. L'ultima espressione è proprio l'equazione del luogo, ossia una parabola. Ecco il grafico relativo



Con un procedimento analogo a quello qui visto, si trova che il secondo fascio di circonferenze ha equazione: $x^2+y^2+ax+\dfrac{8}{a}y-\dfrac{2a^2+8a+16}{a}=0$, quindi il luogo si ottiene risolvendo il sistema parametrico:, che è l'iperbole $y=\dfrac{2}{x}$. Ed ecco il grafico



1. (Liceo scientifico suppletiva 1970/71) In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy è data l'iperbole di equazione $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. Condotta per il punto (–1; 1) la retta di coefficiente angolare m, si dica per quali valori di m una delle sue intersezioni con la curva appartiene: a) al primo b) al quarto c) al terzo quadrante. $\left[a)-\dfrac{1}{2}<m<0;b)-2<m<-\dfrac{1}{2};c)m<-2\right]$

2. (Liceo scientifico suppletiva PNI 1994/95) In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy è assegnato il punto $A \equiv (a; -a)$. Il candidato: a) scriva l'equazione della circonferenza Γ di centro A che stacca sull'asse delle ascisse un segmento lungo $2\cdot\sqrt{2}$ $[(x-a)^2+(y+a)^2=2+a^2]$ b) intersechi Γcon l'iperbole Σ $xy-1=0$ e, osservando che l'equazione risolvente del sistema delle due equazioni delle due curve è il quadrato di un trinomio, deduca che al variare di a le curve Γe Σ sono bitangenti tra loro in due punti distinti B e C. $[(x^2-ax-1)^2=0]$ c) individui le circonferenze Γ_1e$\Gamma_2$che si ottengono per quei valori di a per cui il segmento BC dista dal centro della circonferenza di cui è corda i $\dfrac{3}{10}$ del segmento stesso. $[\Gamma_1$: $x^2+y^2-3x+3y+\dfrac{1}{4}=0$; Γ_2: $x^2+y^2+3x-3y+\dfrac{1}{4}=0]$

3. (Liceo scientifico 2006/2007) Si considerino i triangoli la cui base è $AB = 1$ e il cui vertice C varia in modo che l'angolo $C\hat{A}B$si mantenga doppio dell'angolo $A\hat{B}C$. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto da C. Si rappresenti γ, tenendo conto delle prescritte condizioni geometriche. $[3x^2-y^2-4x+1=0]$

4. (Liceo scientifico 2014/2015) Il piano tariffario proposto da un operatore telefonico prevede, per le telefonate all'estero, un canone fisso di 10 euro al mese, più 10 centesimi per ogni minuto di conversazione. Indicando con x i minuti di conversazione effettuati in un mese, con $f(x)$ la spesa totale nel mese e con $g(x)$ il costo medio al minuto: a) individua l'espressione analitica delle funzioni e rappresentale graficamente; verifica che la funzione $g(x)$ non ha massimi né minimi relativi e dai la tua interpretazione dell'andamento delle due funzioni alla luce della situazione concreta che esse rappresentano. b) Detto x_0 il numero di minuti di conversazione già effettuati nel mese corrente, determina x_1 tale che: $g(x_1) = \frac{g(x_0)}{2}$ Traccia il grafico della funzione che esprime x_1 in funzione di x_0 e discuti il suo andamento. Che significato ha il suo asintoto verticale?

[a) Il costo aumenta all'aumentare dei minuti di conversazione, mentre il costo medio al minuto tende a 0,1 euro, il costo di un minuto; b) Rappresenta il costo al minuto]

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia navale) Data l'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 4$, scrivere l'equazione dell'iperbole avente gli stessi fuochi dell'ellisse e passante per il punto (1; 0).
2. (Ingegneria 2000) Fissato nel piano un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, l'insieme delle soluzioni (x, y) del sistema $\begin{cases} xy > 1 \\ x = y \end{cases}$ è A) una retta B) due punti C) un segmento D) una semiretta E) una coppia di semirette
3. (Ingegneria 2009) L'insieme $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, \frac{y}{x} > 2\right\}$ è costituito da
   A) una delle parti di piano delimitata da una iperbole B) una corona circolare
   C) due angoli opposti al vertice D) un semipiano E) due semipiani

Per svolgere un Test finale di* 18 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_3_4.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	**2**	**3**
$2x^2 - y^2 = 2$	E	D

4. Geometria delle coniche

4.5. Le parabole

Prerequisiti

- Il piano cartesiano
- Concetto di funzione
- Concetto di luogo geometrico
- Concetto di equazione e sua risoluzione
- Equazione della retta
- Fasci di rette
- Trasformazioni geometriche e loro leggi
- Matrici e determinanti
- Le coniche

Obiettivi

- Comprendere il concetto di luogo di punti del piano cartesiano
- Risolvere semplici questioni relative alle parabole
- Risolvere semplici questioni relative ai fasci di parabole
- Risolvere problemi di massimo e minimo con le parabole

Contenuti

- L'equazione della parabola
- Fasci di parabole

Parole Chiave

Asse di simmetria – Fuoco – Direttrice – Parabola – Vertice

L'equazione della parabola

Il problema

Determinare un'equazione semplice, cioè un'equazione canonica, per la parabola.

Abbiamo detto che, fra le coniche, la parabola è quella che ha il discriminante nullo, che equivale a dire che il trinomio dei termini di secondo grado è un quadrato di binomio. Vediamo di cercare allora un'equazione che verifichi appunto questa proprietà.

Esempio 1

- La seguente equazione rappresenta certamente una parabola: $x^2 + 2xy + y^2 + x - y + 1 = 0$ Infatti possiamo scriverla nel seguente modo: $(x + y)^2 + x - y + 1 = 0$.
- Per ottenerne una più semplice potremmo eliminare qualcuno dei termini non di secondo grado, non tutti perché allora otterremo una parabola spezzata in due rette coincidenti, $x^2 + 2xy + y^2 = 0 \Rightarrow (x + y)^2 = 0$.
- Se lasciamo il termine noto $x^2 + 2xy + y^2 + 1 = 0 \Rightarrow (x + y)^2 + 1 = 0$, la parabola è ancora spezzata in due rette parallele, che però non sono reali.
- Lasciamo allora un solo termine di primo grado $x^2 + 2xy + y^2 + x = 0 \Rightarrow (x + y)^2 + x = 0$, che certamente non è una parabola degenere.

Nel precedente esempio abbiamo ottenuto un'equazione abbastanza semplice, che vogliamo però cercare di migliorare. Infatti noi abbiamo detto che il discriminante deve essere nullo, quindi che i termini di secondo grado debbono formare un quadrato di binomio, ma è anche vero che un caso particolare di quadrato di binomio è il quadrato di monomio. Spieghiamoci meglio con un esempio.

Esempio 2

- Consideriamo l'equazione finale immessa nell'esempio precedente, ma stavolta annulliamo due dei tre termini di secondo grado $y^2 + x = 0$, anche questa rappresenta una parabola non degenere, ma con un'equazione molto più semplificata.
- Un'altra equazione semplice, ottenuta sempre dalla nostra equazione iniziale, è $x^2 + y = 0$.

Osserviamo che le equazioni, anch'esse semplificate, $y^2 + a = 0$ e $y^2 + ay = 0$, rappresentano parabole spezzate in due rette distinte (reali o complesse e coniugate).

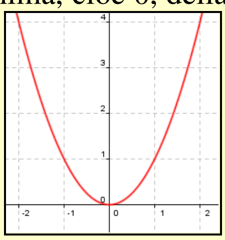
Definizione 1

Una conica di equazione $y = ax^2$, oppure $x = ay^2$, con a numero reale non nullo, si chiama **parabola in forma canonica**.

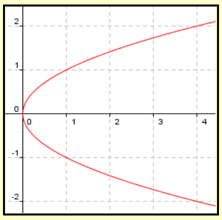
Quali sono le caratteristiche e la forma di una parabola?

Esempio 3

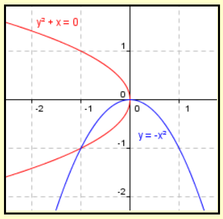
- Vogliamo studiare la parabola di equazione $y = x^2$. La curva passa per l'origine ed è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate dato che, per esempio, sia $P \equiv (1; 1)$ che $P' \equiv (-1; 1)$ fanno entrambi parte della parabola. Ciò è naturalmente vero per ogni generico punto di coordinate $(x; y)$ a essa appartenente, in questo caso anche il suo simmetrico $(-x; y)$ appartiene alla parabola. Osserviamo inoltre che tutti i punti della parabola hanno ordinata non negativa, quindi anche che l'origine è il punto di ordinata minima, cioè 0, della parabola. Rappresentiamo questa parabola sulla base di quel che abbiamo detto.



- Considerando l'equazione $x = y^2$, possiamo facilmente trovare le sue caratteristiche, perché simili a quelle determinate in precedenza. Quindi possiamo dire che essa passa per l'origine ed è simmetrica rispetto all'asse delle ascisse; tutti i suoi punti hanno ascissa non negativa; l'origine è il punto di ascissa minima della parabola.



- Naturalmente semplicemente cambiando il segno del coefficiente di secondo grado otteniamo le simmetriche delle precedenti parabole, con l'origine che ha rispettivamente il massimo delle ordinate e il massimo delle ascisse, come mostrato in figura.



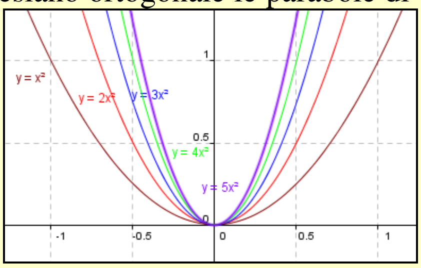
Definizione 2

- L'asse delle ordinate per la parabola $y = ax^2$ e l'asse delle ascisse per la parabola $x = ay^2$, si chiama **asse di simmetria**.
- L'origine, punto di intersezione della parabola con l'asse di simmetria, si chiama **vertice**.

Adesso vogliamo studiare cosa accade variando il parametro a nell'equazione canonica della parabola.

Esempio 4

Di seguito abbiamo tracciato nello stesso piano cartesiano ortogonale le parabole di equazione $y = ax^2$ con a che assume tutti i valori dell'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.



Notiamo, e non era difficile capirlo, che al diminuire del valore del parametro a otteniamo parabole sempre più *ampie*. Del resto nel caso limite in cui fosse $a = 0$, la parabola degenererebbe nella retta $y = 0$, cioè nell'asse delle x. Chiaramente se a assume valori negativi, come abbiamo già osservato, la parabola risulta rivolta verso il semiasse negativo delle ordinate.

Che tipo di luogo è la parabola? Basta considerare il risultato del Teorema 4 dell'unità 4.1, cioè

Teorema 1

Il luogo geometrico dei punti del piano la cui distanza da un punto fisso è uguale alla distanza da una retta fissa è una parabola.

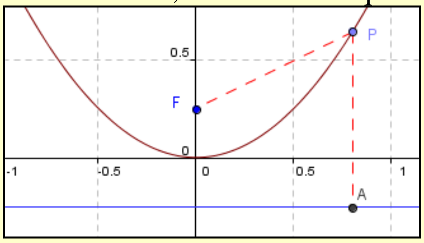
Dimostreremo in seguito il teorema precedente, adesso poniamo qualche definizione.

Definizione 3

Il punto fisso e la retta fissa che definiscono la parabola come luogo di punti si chiamano rispettivamente **fuoco** e **direttrice**.

Esempio 5

Consideriamo la parabola di equazione $y = x^2$, quale sarà il suo fuoco? Esso ovviamente appartiene all'asse di simmetria, quindi in questo caso ha coordinate $F \equiv (0; m)$. E la direttrice che retta è? Consideriamo il vertice, che in questo caso è l'origine, esso dista da F evidentemente m, una retta di equazione semplice che di-

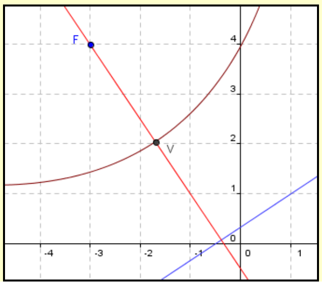


sta anch'essa m da V è quella di equazione $y = -m$. Vediamo se ciò può esser possibile e quanto deve essere il valore di m. Consideriamo un qualsiasi punto della parabola, le cui coordinate sono perciò $P \equiv (x; x^2)$ e imponiamo che la sua distanza da F coincida con quella della retta, cioè $\sqrt{x^2+\left(x^2-m\right)^2}=x^2+m$. Innalziamo al quadrato per semplificare l'equazione: $x^2 + (x - m)^2 = (x + m)^2 \Rightarrow$ $x^2 + x^4 - 2mx^2 + m^2 = x^4 + 2mx^2 + m^2 \Rightarrow x^2 - 4mx^2 = 0 \Rightarrow 1 - 4m = 0 \Rightarrow m=\frac{1}{4}$. Quindi in effetti esistono il punto $F\equiv\left(0;\frac{1}{4}\right)$ e la retta di equazione $y=-\frac{1}{4}$, che verificano la condizione stabilita dal Teorema 1.

Nel caso precedente abbiamo considerato una parabola molto particolare, vediamo adesso un esempio sulla determinazione dell'equazione di una parabola di fuoco e direttrice generici.

Esempio 6

Vogliamo verificare che il luogo dei punti del piano per i quali la distanza dal punto $F \equiv (-3; 4)$ è uguale alla distanza dalla retta di equazione $2x - 3y + 1 = 0$, è una parabola. Imponiamo le condizioni del luogo, considerando un generico punto $P \equiv (x; y)$: $\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2}=\frac{|2x-3y+1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}$. Semplifichiamo l'equazione ottenuta: $\sqrt{(x+3)^2+(y-4)^2}=\frac{|2x-3y+1|}{\sqrt{4+9}}\Rightarrow(x+3)^2+(y-4)^2=\frac{(2x-3y+1)^2}{13}\Rightarrow x^2+6x+9+y^2-8y+16=\frac{4x^2-12xy+9y^2+4x-6y+1}{13}\Rightarrow 13x^2 + 78x + 13y^2 - 104y + 325 = 4x^2 - 12xy + 9y^2 + 4x - 6y + 1 \Rightarrow$ $9x^2 + 12xy + 4y^2 + 74x - 98y + 324 = 0$. Notiamo facilmente che i termini di secondo grado sono un quadrato di binomio, quindi abbiamo un'effettiva parabola, che riproduciamo, con l'aiuto di Geogebra, segnando fuoco, vertice, asse di simmetria e direttrice. Ovviamente l'asse di simmetria è la retta perpendicolare alla direttrice e passante per il fuoco, mentre il vertice è l'intersezione fra l'asse di simmetria e la parabola.



Adesso possiamo anche dimostrare il Teorema 1.

Esempio 7

Vogliamo verificare che il luogo dei punti del piano per i quali la distanza dal punto $F \equiv (x_F; y_F)$ è uguale alla distanza dalla retta di equazione $ax + by + c = 0$, è una parabola. La condizione di luogo è la seguente:

$\left(x-x_F\right)^2+\left(y-y_F\right)^2=\dfrac{\left(ax+by+c\right)^2}{a^2+b^2}$. Non svolgiamo tutti i calcoli, ma solo quelli che producono termini di secondo grado: $(a^2 + b^2) \cdot (x^2 + y^2) = a^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy \Rightarrow a^2y^2 + b^2x^2 + 2abxy = 0 \Rightarrow (ay + bx)^2 = 0$. Dato che i termini di secondo grado sono un quadrato di binomio, abbiamo un'effettiva parabola.

Possiamo anche determinare le coordinate del fuoco e l'equazione della direttrice della generica parabola in forma canonica.

Teorema 2

- La parabola di equazione $y = ax^2$, ha fuoco in $F\equiv\left(0;\dfrac{1}{4a}\right)$ e per direttrice la retta $y=-\dfrac{1}{4a}$.
- La parabola di equazione $x = ay^2$, ha fuoco in $F\equiv\left(\dfrac{1}{4a};0\right)$ e per direttrice la retta $x=-\dfrac{1}{4a}$.

Dimostrazione

Consideriamo solo il primo caso, lasciando il secondo per esercizio. Il fuoco è un punto dell'asse delle y, quindi ha coordinate $(0; h)$; la direttrice è parallela all'asse delle x e distante da tale asse quanto dista F, quindi la sua equazione è $y = -h$. Imponendo la condizione di luogo avremo:

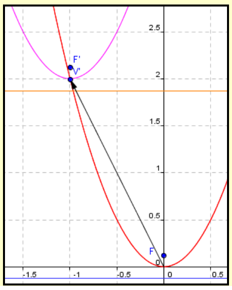
$$x^2 + (y - h)^2 = (y + h)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2hy + h^2 = y^2 + 2hy + h^2 \Rightarrow x^2 - 2hy = 2hy \Rightarrow h=\frac{x^2}{4y}.$$

Tenuto conto che $y = ax^2$, avremo: $h=\dfrac{x^2}{4ax^2}\Rightarrow h=\dfrac{1}{4a}$, che è proprio la tesi cercata.

Anche se abbiamo sempre cercato di semplificare le equazioni delle coniche, vogliamo in qualche modo generalizzare l'equazione della parabola al caso in cui l'asse di simmetria non per forza debba essere l'asse delle ordinate o delle ascisse, ma una retta a essi paralleli. In questo caso infatti basta applicare all'equazione canonica una traslazione.

Esempio 8

Consideriamo la parabola di equazione $y = 2x^2$, vogliamo traslarla spostandone il vertice in $V \equiv (-1; 2)$. Le leggi da applicare sono perciò $t_{(-1;2)}:\begin{cases}x'=x-1\\y'=y+2\end{cases}$, dalle quali ricaviamo le inverse da sostituire nell'equazione canonica: $t^{-1}_{(-1;2)}:\begin{cases}x=x'+1\\y=y'-2\end{cases}$, che perciò diviene: $y' - 2 = 2(x' + 1)^2 \Rightarrow y' = 2x'^2 + 4x' + 4$.



Con la stessa tecnica vista nel precedente esempio si prova il seguente teorema.

Teorema 3

La parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$, ha

- l'asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate di equazione $x=-\dfrac{b}{2a}$;
- il vertice $V\equiv\left(-\dfrac{b}{2a};\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$;

- il fuoco $F \equiv \left(-\frac{b}{2a};\frac{1+4ac-b^2}{4a}\right)$;
- la direttrice di equazione $y=\frac{-1+4ac-b^2}{4a}$.

La parabola di equazione $x = ay^2 + by + c$, ha

- l'asse di simmetria parallelo all'asse delle ascisse di equazione $y=-\frac{b}{2a}$;
- il vertice $V \equiv \left(\frac{4ac-b^2}{4a};-\frac{b}{2a}\right)$;
- il fuoco $F \equiv \left(\frac{1+4ac-b^2}{4a};-\frac{b}{2a}\right)$;
- la direttrice di equazione $x=\frac{-1+4ac-b^2}{4a}$.

Dimostrazione

Consideriamo solo il primo caso, lasciando il secondo per esercizio.

Basta tenere conto che applichiamo una traslazione per portare l'origine in un punto $V \equiv (x_V;\ y_V)$. In questo modo applichiamo la traslazione $t:\begin{cases} x'=x+x_V \\ y'=y+y_V \end{cases}$ alla parabola canonica $y = ax^2$, ottenendo perciò

$$y - y_V = a\cdot(x-x_V)^2 \Rightarrow y = ax^2 - 2ax_Vx + y_V + ax_V^2.$$

Uguagliando i coefficienti con quelli della parabola generica $y = ax^2 + bx + c$, otteniamo:

$$\begin{cases} b=-2ax_V \\ c=y_V+ax_V^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_V=-\frac{b}{2a} \\ y_V=c-a\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_V=-\frac{b}{2a} \\ y_V=\frac{4ac-b^2}{4a} \end{cases}$$

Quindi proprio la tesi cercata, come facilmente si vede applicando tale traslazione a vertice, fuoco, asse e direttrice della parabola canonica $y = ax^2$.

Vediamo delle applicazioni delle precedenti formule.

Esempio 9

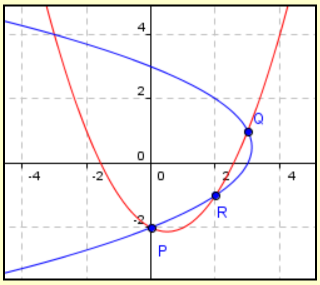
La parabola di equazione $x = 2y^2 - 3y + 4$, ha l'asse di simmetria parallelo all'asse delle x, di equazione $y=-\frac{-3}{2\cdot 2}\Rightarrow y=\frac{3}{4}$; il suo vertice ha coordinate $V \equiv \left(\frac{4\cdot 2\cdot 4-(-3)^2}{4\cdot 2};\frac{3}{4}\right)\equiv\left(\frac{32-9}{8};\frac{3}{4}\right)\equiv\left(\frac{23}{8};\frac{3}{4}\right)$. Avremmo potuto ottenere lo stesso risultato sostituendo il valore dell'ordinata nell'equazione della parabola, dato che il vertice è un punto della parabola. Verifichiamo:

$$x=2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2-3\cdot\frac{3}{4}+4=\cancel{2}^1\cdot\frac{9}{\cancel{16}_8}-\frac{9}{4}+4=\frac{9-18+32}{8}=\frac{23}{8}.$$

Per determinare le coordinate del fuoco applichiamo le formule $F \equiv \left(\frac{1+4ac-b^2}{4a};-\frac{b}{2a}\right)$, ma in modo intelligente, cioè cercando di non ripetere calcoli già svolti. Scriviamo perciò: $F \equiv \left(\frac{1}{4a}+\frac{4ac-b^2}{4a};-\frac{b}{2a}\right)$. In questo modo l'ordinata è già calcolata perché è la stessa del vertice, l'ascissa si ottiene semplicemente aggiungendo a quella del vertice la quantità $\frac{1}{4a}$. Quindi si ha: $F \equiv \left(\frac{1}{4\cdot 2}+\frac{23}{8};\frac{3}{4}\right)\equiv\left(\frac{1+23}{8};\frac{3}{4}\right)\equiv\left(3;\frac{3}{4}\right)$. Analogamente facciamo per l'equazione della direttrice: $x=-\frac{1}{4a}+\frac{4ac-b^2}{4a}\Rightarrow x=-\frac{1}{8}+\frac{23}{8}\Rightarrow x=\frac{11}{4}$.

Concludiamo con qualche esempio di problemi sulla determinazione di parabole con asse di simmetria parallelo agli assi coordinati.

Esempio 10

- I parametri nell'equazione di una parabola con asse di simmetria parallelo a uno degli assi coordinati sono 3, quindi abbiamo bisogno di 3 condizioni. Supponiamo prima che siano noti 3 punti della parabola. Imponiamo le ben note condizioni di appartenenza di un punto all'equazione generica: $y = ax^2 + bx + c$ oppure $x = ay^2 + by + c$. Siano per esempio i punti $P \equiv (0; -2)$, $Q \equiv (3; 1)$ e $R \equiv (2; -1)$. I sistemi risolventi sono: $\begin{cases}-2=c\\1=9a+3b+c\\-1=4a+2b+c\end{cases}\vee\begin{cases}0=4a-2b+c\\3=a+b+c\\2=a-b+c\end{cases}$, le cui soluzioni sono (lasciamo i dettagli per esercizio): $\left(a=\frac{1}{2};b=-\frac{1}{2};c=-2\right)\vee\left(a=-\frac{1}{2};b=\frac{1}{2};c=3\right)$. Le due parabole hanno perciò equazioni rispettive:


$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-2;\quad x=-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y+3$.
- Possiamo risolvere il problema anche conoscendo solo due punti, purché uno di questi sia il vertice, dato che esso in qualche modo *vale doppio*. Così, se la parabola passa per $P \equiv (–1; –3)$ e ha vertice $V \equiv (–2; 4)$, i sistemi risolventi sono: $\begin{cases}-3=a-b+c\\4=4a-2b+c\\-\frac{b}{2a}=-2\end{cases}\vee\begin{cases}-1=9a-3b+c\\-2=16a+4b+c\\-\frac{b}{2a}=4\end{cases}$. I sistemi sembrano non lineari, ma possiamo eliminare senza problemi il denominatore nella terza equazione. Le soluzioni sono: $(a=-7;b=-28;c=-24)\vee\left(a=\frac{1}{49};b=-\frac{8}{49};c=-\frac{82}{49}\right)$ e le equazioni rispettive:
$$y=-7x^2-28x-24;\ x=\frac{1}{49}y^2-\frac{8}{49}y-\frac{82}{49}.$$

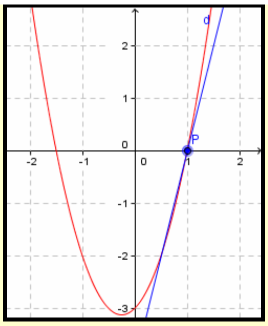
Altri problemi riguarderanno la conoscenza del fuoco o della direttrice e saranno svolti nelle attività di verifica. Può essere utile enunciare anche il seguente risultato.

Teorema 4

La retta tangente alla parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$, nel suo punto di ascissa x_0 ha coefficiente angolare $m = 2ax_0 + b$, quindi la sua equazione è $y – ax_0^2 – bx_0 – c = (2ax_0 + b) \cdot (x – x_0)$.
Dimostrazione omessa perché laboriosa nei calcoli

Esempio 11

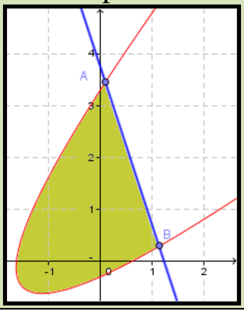
L'equazione della tangente alla parabola $y = 2x^2 + x – 3$, nel suo punto di ascissa $x = 1$ ha coefficiente angolare $m = 2\cdot2\cdot1 + 1 = 5$ e la sua equazione è $y – 0 = 5 \cdot (x – 1) \Rightarrow y = 5x – 5$.

Con Geogebra confermiamo il risultato. 

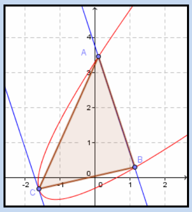
Chiudiamo con un importante risultato, premettendo una definizione.

Definizione 4

Diciamo **segmento parabolico** la parte di piano compresa tra una parabola e una retta a essa secante.

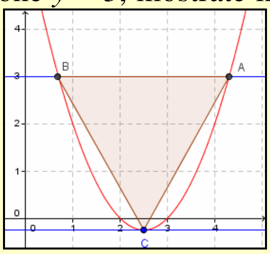


Teorema 5 (di Archimede)

L'area di un segmento parabolico è uguale a $\frac{4}{3}$ l'area del triangolo *ABC* (*A* e *B* intersezioni fra retta e parabola, *C* il punto della parabola la cui tangente è parallela ad *AB*). 

Dimostrazione Omessa

Esempio 12

Sia la parabola di equazione $y = x^2 - 5x + 6$ e la retta di equazione $y = 3$, mostrate in figura, in cui abbiamo evidenziato il triangolo *ABC*, in cui ovviamente *C* è il vertice.  Per calcolare l'area del segmento parabolico usiamo il Teorema di Archimede. L'area di *ABC* si trova facilmente moltiplicando la misura del segmento *AB* per la distanza di *C* dalla retta, che altri non è che la somma dei valori assoluti delle ordinate dei punti *C* e uno fra *A* o *B*. Determiniamo le coordinate di *A* e *B*:

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x + 6 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 3 \Rightarrow x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Quindi abbiamo: $\overline{AB} = \frac{5+\sqrt{13}}{2} - \frac{5-\sqrt{13}}{2} = \sqrt{13}$. Abbiamo poi, ricordando che *C* è il vertice: $C \equiv \left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{4}\right)$, l'area di *ABC* è $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{13} \cdot \left(3 + \frac{1}{4}\right) = \frac{13}{8} \cdot \sqrt{13}$. L'area del segmento parabolico è $\frac{\cancel{4}^{1}}{3} \cdot \frac{13}{\cancel{8}_{2}} \cdot \sqrt{13} = \frac{13}{6} \cdot \sqrt{13}$.

Verifiche

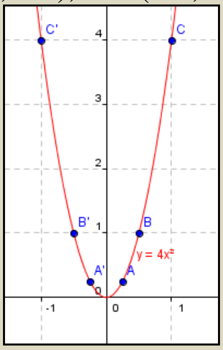
Lavoriamo insieme

Disegnare la parabola di equazione $y = 4x^2$.

Naturalmente il disegno avverrà per punti, sarà perciò di tipo qualitativo. Sappiamo che il vertice è l'origine ed è il punto di minore ordinata della parabola, inoltre l'asse delle y è asse di simmetria per la parabola, quindi trovando un certo punto $P \equiv (x; y)$ sulla parabola, sappiamo che anche il punto $P' \equiv (-x; y)$ sta sulla parabola. Nella tabella a lato abbiamo calcolato le coordinate di alcuni punti della parabola.

x	$4x^2$
¼	$4 \cdot (¼)^2 = ¼$
½	$4 \cdot (½)^2 = 1$
1	$4 \cdot 1^2 = 4$
3/2	$4 \cdot (3/2)^2 = 9$

Perciò appartengono alla parabola i punti $A \equiv (1/4; 1/4)$, $A' \equiv (-1/4; 1/4)$, $B \equiv (1/2; 1)$, $B' \equiv (-1/2; 1)$, $C \equiv (1; 4)$, $C' \equiv (-1; 4)$, $D \equiv (3/2; 9)$, $D' \equiv (-3/2; 9)$. Rappresentiamoli.



Disegnare per punti le parabole associate alle seguenti equazioni

Livello 1

1. $y = 3x^2$; $y = -2x^2$; $y = 2/3x^2$; $y = -x^2$; $y = 2x^2$; $y = 1/4x^2$; $x = -3y^2$; $x = 1/2y^2$; $x = -4/3y^2$
2. $x = 2y^2$; $x = -2y^2$; $x = 5y^2$; $x = -\sqrt{2}y^2$; $y = -\sqrt{3}x^2$; $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}y^2$

Lavoriamo insieme

Applicando la definizione di parabola come luogo di punti trovare l'equazione della parabola che ha il fuoco in $F \equiv \left(-\frac{1}{2}; 3\right)$ e la direttrice r di equazione $2x - y + 3 = 0$.

Imponiamo le condizioni di luogo: $\overline{PF} = d(P, r) \Rightarrow \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + (y-3)^2} = \frac{|2x-y+3|}{\sqrt{2^2+1^2}}$, al generico punto $P \equiv (x; y)$. Svolgiamo i calcoli:

$$\left(\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + (y-3)^2}\right)^2 = \left(\frac{|2x-y+3|}{\sqrt{2^2+1^2}}\right)^2 \Rightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 - 6y + 9 = \frac{4x^2 + y^2 + 9 - 4xy + 12x - 6y}{5}$$

$20x^2 + 20x + 5 + 20y^2 - 120y + 180 - 16x^2 - 4y^2 - 36 + 16xy - 48x + 24y = 0 \Rightarrow 4x^2 + 16xy + 16y^2 - 28x - 96y + 149 = 0$. Notiamo che abbiamo a che fare effettivamente con una parabola, dato che il trinomio dei termini di secondo grado è un quadrato perfetto: $(2x + 4y)^2$.

Determinare le equazioni delle parabole date le coordinate del fuoco e l'equazione della direttrice

Livello 2

3. $(0; 2)$, $x - y + 1 = 0$; $(3; -1)$, $x + 5 = 0$; $(2; 0)$, $x + y - 2 = 0$
[$x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 6y + 7 = 0$; $y^2 - 16x + 2y - 15 = 0$; Parabola degenere]
4. $(7; -2)$, $y + 3 = 0$; $(3 ; -2)$, $x - y + 4 = 0$; $(1/2; -1/2)$, $x - 4y = 0$
[$x^2 - 14x - 2y + 44 = 0$; $x^2 + 2xy + y^2 - 20x + 16y + 10 = 0$; $32x^2 + 16xy + 2y^2 - 34x + 34y + 17 = 0$]

5. (3; 1), $2x - 3y + 5 = 0$; (–3, –1), $2x + y - 2 = 0$

[$9x^2 + 12xy + 4y^2 - 98x + 4y + 105 = 0$; $x^2 - 4xy + 4y^2 + 38x + 14y + 46 = 0$]

Livello 3

6. Determinare vertice e asse di simmetria delle parabole dell'esercizio 4.

[(7; –5/2), $x = 7$; (3/4 ; 1/4), $x + y - 1 = 0$; (29/68 ; –7/34), $8x + 2y - 3 = 0$]

7. In cosa degenera la parabola dell'esercizio 3 e perché?

[Nella direttrice perché il fuoco appartiene a tale retta]

8. Determinare l'equazione della direttrice della parabola di vertice $V \equiv (1; 2)$ e fuoco $F \equiv (3; -1)$.

[$2x + 3y - 17 = 0$]

9. Determinare l'equazione della direttrice della parabola di vertice il punto $V \equiv (3; 1)$ e asse di simmetria $x - 3y = 0$. [Indeterminato]

Lavoriamo insieme

Determinare l'equazione di una parabola dato il fuoco, $F \equiv (-2; 3)$, e il vertice, $V \equiv (1; 4)$.

L'asse di simmetria è la retta per VF, cioè: $\dfrac{x+2}{1+2} = \dfrac{y-3}{4-3} \Rightarrow x - 3y + 11 = 0$. La direttrice è perpendicolare a questa retta, quindi ha equazione $y = -3x + p$. Inoltre il vertice è equidistante dalla direttrice e dal fuoco, pertanto la direttrice passa per un punto P tale che $\overline{PF} = \overline{PV}$, quindi: $P \equiv (x; y): \begin{cases} \dfrac{x-2}{2} = 1 \\ \dfrac{y+3}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$. Quindi la direttrice ha equazione: $y - 5 = -3 \cdot (x - 4) \Rightarrow 3x + y - 17 = 0$. Il problema è ricondotto al caso generale già trattato. L'equazione è perciò: $\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} = \dfrac{|3x + y - 17|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} \Rightarrow x^2 - 6xy + 9y^2 + 142x - 26y - 159 = 0$.

Osserviamo che i termini di secondo grado, come deve essere, rappresentano un quadrato di binomio.

Determinare le equazioni delle parabole di cui forniamo le coordinate del fuoco e quelle del vertice

Livello 2

10. ($V \equiv (1; 2)$, $F \equiv (-1; 3)$) ; ($V \equiv (0; 1)$, $F \equiv (-2; 5)$) ; ($V \equiv (-3; 0)$, $F \equiv (2; 0)$)

[$x^2 + 4xy + 4y^2 + 30x - 40y + 25 = 0$; $4x^2 + 4xy + y^2 + 36x - 82y + 81 = 0$; $y^2 - 20x - 60 = 0$]

11. ($V \equiv (4; 0)$, $F \equiv (1; -1)$) ; ($V \equiv (1/2; -1)$, $F \equiv (2/3; -2)$)

[$108x^2 + 36xy + 3y^2 - 146x + 432y + 493 = 0$; $x^2 - 6xy + 9y^2 + 112x + 64y - 464 = 0$]

Determinare le equazioni dei seguenti luoghi, verificando che sono parabole

Livello 3

12. Luogo dei centri delle circonferenze tangenti l'asse delle ascisse e passanti per $P \equiv (4; -1)$.

[$x^2 - 8x + 2y + 17 = 0$]

13. Luogo dei centri delle circonferenze tangenti l'asse delle ordinate e passanti per $P \equiv (-2; 5)$.

[$y^2 + 4x - 10y + 29 = 0$]

14. Luogo dei centri delle circonferenze tangenti la retta di equazione $4x + 3y - 1 = 0$ e passanti per il punto $P \equiv (-1; -3)$. [$9x^2 - 24xy + 16y^2 + 58x + 156y + 249 = 0$]

15. Luogo dei punti P per i quali è 4 la somma delle distanze da (–3; 1) e dalla retta $3x - y - 5 = 0$.

$$\left[x^2 - 6xy + 9y^2 + 6 \cdot \left(15 \pm 4 \cdot \sqrt{10}\right) \cdot x - 2 \cdot \left(15 \pm 4 \cdot \sqrt{10}\right) \cdot y - 85 = 0\right]$$

Lavoriamo insieme

Determinare il vertice della parabola di equazione $y = 3x^2 + 2x - 1$.

Sappiamo che la formula da applicare per la generica parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ è $V \equiv \left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$. In questo caso si ha: $a = 3$, $b = 2$, $c = -1$: $V \equiv \left(-\dfrac{2}{2 \cdot 3}; -\dfrac{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}{4 \cdot 3}\right)$

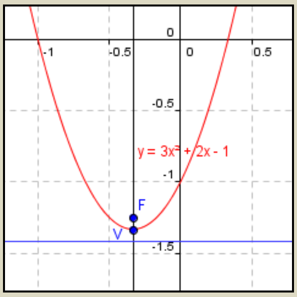
$\equiv\left(-\frac{1}{3};-\frac{4+12}{12}\right)\equiv\left(-\frac{1}{3};-\frac{4}{3}\right)$. In effetti avremmo potuto rendere più semplice il calcolo dell'ordinata tenendo conto che il vertice appartiene alla parabola, quindi soddisfa con le proprie coordinate l'equazione, pertanto, determinata l'ascissa basta sostituirne il valore nell'equazione per trovare l'ordinata:

$$y=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2+2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-1=\cancel{3}^1\cdot\frac{1}{\cancel{9}^3}-\frac{2}{3}-1=\frac{1-2-3}{3}=-\frac{4}{3}.$$

Determiniamo adesso le coordinate del fuoco, applicando le formule:

$$F\equiv\left(-\frac{b}{2a};\frac{1+4ac-b^2}{4a}\right)\equiv\left(-\frac{b}{2a};\frac{1}{4a}+\frac{-b^2+4ac}{4a}\right)\equiv\left(x_V;\frac{1}{4a}+y_V\right)$$

abbiamo scritto le formule in modo da sfruttare i calcoli già noti sulle coordinate(x_V; y_V), del vertice. $F\equiv\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{4\cdot 3}-\frac{4}{3}\right)\equiv\left(-\frac{1}{3};\frac{1-16}{12}\right)\equiv\left(-\frac{1}{3};-\frac{15}{12}\right)\equiv\left(-\frac{1}{3};-\frac{5}{4}\right)$. L'asse di simmetria ha evidentemente equazione $x=-\frac{1}{3}$. Per la direttrice abbiamo: $y=\frac{-1+4ac-b^2}{4a}\Rightarrow y=-\frac{1}{4a}+\frac{4ac-b^2}{4a}\Rightarrow y=-\frac{1}{4a}+y_V$, cioè: $y=-\frac{1}{12}-\frac{4}{3}\Rightarrow y=\frac{-1-16}{12}\Rightarrow y=-\frac{17}{12}$. Rappresentiamo graficamente.



Determinare le coordinate del vertice e del fuoco, l'equazione della direttrice e disegnare per punti le parabole associate alle seguenti equazioni

***Livello* 1**

16. $y=-2x^2+3x$; $y=\sqrt{2}x^2-x+1$; $y=2/3x^2-x+1$

$$\left[\left(\frac{3}{4};\frac{9}{8}\right),\left(\frac{3}{4};1\right),y=\frac{5}{4};\left(\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{8-\sqrt{2}}{8}\right),\left(\frac{\sqrt{2}}{4};1\right),y=\frac{4-\sqrt{2}}{4};\left(\frac{3}{4};\frac{5}{8}\right),\left(\frac{3}{4};1\right),y=\frac{1}{4}\right]$$

17. $y=x^2-5x-6$; $y=-x^2-7x+10$; $y=-4x^2+1$

$$\left[\left(\frac{5}{2};-\frac{49}{4}\right),\left(\frac{5}{2};-12\right),y=-\frac{25}{2};\left(-\frac{7}{2};\frac{89}{4}\right),\left(-\frac{7}{2};22\right),y=\frac{45}{2};(0;1),\left(0;\frac{15}{16}\right),y=\frac{17}{16}\right]$$

18. $y=3x^2-5x$; $y=1/3x^2+2x-3$; $y=-2/3x^2-5x+1$

$$\left[\left(\frac{5}{6};-\frac{25}{12}\right),\left(\frac{5}{6};-2\right),y=-\frac{13}{6};(-3;-6),\left(-3;-\frac{21}{4}\right),y=-\frac{27}{4};\left(-\frac{15}{4};\frac{83}{8}\right),\left(-\frac{15}{4};10\right),y=\frac{43}{4}\right]$$

19. $x=-y^2+y-1$; $x=3y^2+1$; $x=-4y^2+y-5$

$$\left[\left(-\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right),\left(-1;-\frac{1}{2}\right),x=-\frac{1}{2};(1;0),\left(\frac{13}{12};0\right),x=\frac{11}{12};\left(-\frac{81}{16};-\frac{1}{8}\right),\left(-5;-\frac{1}{8}\right),x=-\frac{41}{8}\right]$$

20. $x=-3/2y^2-y+2$; $x=2/3y^2-1/2y$ $\left[\left(\frac{13}{6};-\frac{1}{3}\right),\left(2;-\frac{1}{3}\right),x=\frac{7}{3};\left(-\frac{32}{3};\frac{3}{8}\right),\left(\frac{9}{32};\frac{3}{8}\right),x=-\frac{15}{32}\right]$

21. $x=3y^2-4/3y-2$; $x=-\sqrt{3}y^2-2y-3$

$$\left[\left(-\frac{58}{27};\frac{2}{9}\right),\left(-\frac{223}{108};\frac{2}{9}\right),x=-\frac{241}{108};\left(\frac{\sqrt{3}-9}{3};-\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\left(\frac{\sqrt{3}-12}{4};-\frac{\sqrt{3}}{3}\right),x=\frac{5\cdot\sqrt{3}-36}{12}\right]$$

22. $y=3x^2$; $x=y^2-\sqrt{2}y+\sqrt{2}$ $\left[(0;0),\left(0;\frac{1}{12}\right),y=-\frac{1}{12};\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{4\sqrt{2}-1}{4};\frac{\sqrt{2}}{2}\right),x=\frac{4\cdot\sqrt{2}-3}{4}\right]$

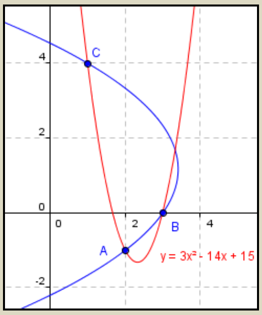
Lavoriamo insieme

Scrivere l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle y, passante per i punti seguenti: A ≡ (2; –1), B ≡ (3; 0), C ≡ (1; 4).

Dobbiamo cercare un'equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$. Imponiamo le condizioni di appartenenza dei tre punti: $\begin{cases} -1 = a\cdot 4 + b\cdot 2 + c \\ 0 = a\cdot 9 + b\cdot 3 + c \\ 4 = a\cdot 1 + b\cdot 1 + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = -1 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ a + b + c = 4 \end{cases}$. Risolviamo il sistema con uno dei metodi a nostro piacere, ottenendo la soluzione: $a = 3$, $b = -14$, $c = 15$, che dà luogo all'equazione $y = 3x^2 - 14x + 15$. Verifichiamo se il risultato è corretto, imponendo l'appartenenza dei tre punti alla parabola.

$$-1 = 3\cdot 2^2 - 14\cdot 2 + 15 \Rightarrow -1 = -1;\ 0 = 3\cdot 3^2 - 14\cdot 3 + 15 \Rightarrow 0 = 0;\ 4 = 3\cdot 1^2 - 14\cdot 1 + 15 \Rightarrow 4 = 4.$$

Nulla sarebbe cambiato se l'asse di simmetria fosse stato parallelo all'asse x, tranne il fatto che l'equazione di riferimento sarebbe: $x = ay^2 + by + c$. Così sempre riferendoci ai tre punti precedenti, il sistema sarebbe diventato: $\begin{cases} 2 = a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c \\ 3 = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c \\ 1 = a\cdot 4^2 + b\cdot 4 + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b + c = 2 \\ c = 0 \\ 16a + 4b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3/10 \\ b = 7/10 \\ c = 3 \end{cases}$. Perciò l'equazione cercata è: $x = -3/10y^2 + 7/10y + 3$. Rappresentiamo le parabole nello stesso grafico.



Scrivere le equazioni delle parabole con asse di simmetria parallelo all'asse y o all'asse x e passanti per i punti indicati

Livello 2

23. ((–1; 2), (0; 1), (3; 0)) ; ((2; 0), (–4; 1), (2; 2)) ; ((0; 1), (–1; 2), (1; 3))
$$\left[\left(y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{6}x + 1; x = y^2 - 4y + 3\right); \left(\varnothing; x = 6y^2 - 12y + 2\right); \left(y = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1; x = \frac{3}{2}y^2 - \frac{11}{2}y + 4\right)\right]$$

24. ((1/2 ; –1), (–2; 1/2), (–1; 1)) ; ((3; –2), (–1; –3), (3; 1/2))
$$\left[\left(y = -\frac{11}{15}x^2 - \frac{17}{10}x + \frac{1}{30}; x = \frac{11}{6}y^2 - \frac{3}{4}y - \frac{25}{12}\right); \left(\varnothing; x = -\frac{8}{7}y^2 - \frac{12}{7}y + \frac{29}{7}\right)\right]$$

25. $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{3}{2}\right), \left(\sqrt{2}; 1\right)$, (0; 0) $\left[y = \frac{90 - 93\cdot\sqrt{2}}{56}x^2 + \frac{93 - 31\cdot\sqrt{2}}{28}x;\ x = \frac{18\cdot\sqrt{2} - 8}{45}y^2 + \frac{8 + 27\cdot\sqrt{2}}{45}y\right]$

26. $\left(-\frac{1}{4}; 3\right), \left(\sqrt{3}; -2\right), \left(-\sqrt{3}; 0\right)$ $\left[y = \frac{12\cdot\sqrt{3} - 64}{141}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{145 - 4\cdot\sqrt{3}}{47};\ x = \frac{16\cdot\sqrt{3} - 1}{60}y^2 - \frac{14\cdot\sqrt{3} + 1}{30}y - \sqrt{3}\right]$

27. $\left(1 + \sqrt{2}; 0\right), \left(0; 1 - \sqrt{2}\right)$, (2; –2)
$$\left[y = \frac{15 - 12\cdot\sqrt{2}}{14}x^2 + \frac{51 - 31\cdot\sqrt{2}}{14}x + 1 - \sqrt{2};\ x = \frac{12\cdot\sqrt{2} + 15}{14}y^2 + \frac{51 + 31\cdot\sqrt{2}}{14}y + \sqrt{2} + 1\right]$$

28. $\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; 1\right), \left(0; \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$, (2; –3)
$$\left[y = -\frac{14 + 2\cdot\sqrt{5}}{2}x^2 + \frac{21 + 9\cdot\sqrt{5}}{4}x + \frac{1 - \sqrt{5}}{2};\ x = \frac{18 + \sqrt{5}}{44}y^2 + \frac{39 + 15\cdot\sqrt{5}}{88}y + \frac{27\cdot\sqrt{5} - 31}{88}\right]$$

29. Determinare la somma dei coefficienti della parabola con asse parallelo a uno degli assi coordinati, che passa per i punti (1; 12), (0; 5), (2; –3). [0]

Lavoriamo insieme

- *Scrivere l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, passante per il punto A ≡ (–1; 6) e avente il vertice nel punto V ≡ (1; 2).*

  Apparentemente le condizioni fornite sono 2, in realtà il vertice è un punto particolare e fornisce due informazioni. La prima informazione è la stessa del punto *A*, ossia il vertice è un punto della parabola. La seconda informazione è il vertice, quindi ha coordinate che verificano la formula $V \equiv \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

  Pertanto il sistema da risolvere stavolta è il seguente: $\begin{cases} 6 = a - b + c \\ 2 = a + b + c \\ 1 = -\frac{b}{2a} \end{cases}$. Stiamo attenti perché, così come è scritto il sistema non è lineare, non può quindi essere risolto con il metodo di Cramer – Leibniz. Volendo, nel precedente sistema potevamo sostituire la terza equazione con la formula dell'ordinata del vertice, cioè con $\frac{4ac-b^2}{4a} = 2$. Il sistema ammette le soluzioni: $a = 1$, $b = -2$ e $c = 3$. Pertanto l'equazione della parabola è $y = x^2 - 2x + 3$.
- *Lo stesso di prima con la parabola che ha asse parallelo all'asse delle x.*

  Il sistema diventa: $\begin{cases} -1 = 36a + 6b + c \\ 1 = 4a + 2b + c \\ 2 = -\frac{b}{2a} \end{cases}$, che ha soluzioni: $a = -1/8$, $b = 1/2$ e $c = 1/2$. L'equazione cercata sarebbe stata allora: $x = 1/8y^2 + 1/2y + 1/2$.

Scrivere le equazioni delle parabole con assi di simmetria paralleli all'asse y o all'asse x, aventi il vertice nel punto V e passanti per il punto P appresso indicato

Livello 2

30. $V \equiv (1; 3)$, $P \equiv (-2; 1)$ $\left[y = -\frac{2}{9}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{25}{9}; x = -\frac{3}{4}y^2 + \frac{9}{2}y - \frac{23}{4}\right]$

31. $V \equiv (-1; 0)$, $P \equiv (2; -3)$ $\left[y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}; x = \frac{1}{3}y^2 - 1\right]$

32. $V \equiv (-1; -2)$, $P \equiv (-3; -1)$ $\left[y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}; x = -2y^2 - 8y - 9\right]$

33. $V \equiv (0; 2)$, $P \equiv (2; 0)$ $\left[y = -\frac{1}{3}x^2 + 2; x = \frac{1}{3}y^2 - 2y + 2\right]$

34. $V \equiv \left(\frac{1}{4}; 1\right), P \equiv \left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ $\left[y = \frac{16}{9}x^2 - \frac{8}{9}x + \frac{10}{9}; x = -\frac{3}{4}y^2 + \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}\right]$

35. $V \equiv \left(0; -\frac{2}{3}\right), P \equiv \left(-\frac{3}{2}; 2\right)$ $\left[y = \frac{32}{27}x^2 - \frac{2}{3}; x = -\frac{27}{128}y^2 - \frac{9}{32}y - \frac{3}{32}\right]$

36. $V \equiv (1; 1)$, $P \equiv (-1; 2)$ $\left[y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}; x = -2y^2 + 4y - 1\right]$

37. $V \equiv \left(\frac{1}{3}; -2\right), P \equiv \left(-\frac{3}{4}; 1\right)$ $\left[y = \frac{432}{169}x^2 - \frac{288}{169}x - \frac{290}{169}; x = -\frac{13}{108}y^2 - \frac{13}{27}y - \frac{4}{27}\right]$

38. $V \equiv \left(1+\sqrt{2};0\right)$, $P \equiv \left(-\frac{1}{3};1\right)$

$$\left[y = 4\cdot\left(17-12\cdot\sqrt{2}\right)\cdot x^2 + 8\cdot\left(7-5\cdot\sqrt{2}\right)\cdot x + 4\cdot\left(3-2\cdot\sqrt{2}\right);\ x = -\frac{3+2\cdot\sqrt{2}}{2}y^2 + \sqrt{2}+1\right]$$

39. $V \equiv \left(\sqrt{3};-2\right)$, $P \equiv \left(-\sqrt{3};2\right)$ $\left[y = \frac{1}{3}x^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}x - 1;\ x = -\frac{\sqrt{3}}{8}y^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

Lavoriamo insieme

Scrivere l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, con vertice $V \equiv (2; 3)$ e fuoco $F \equiv (2; -1)$.

Le condizioni da imporre sono quelle già viste in precedenza per il vertice e una condizione per il fuoco, ossia che la sua ordinata verifichi la formula $\frac{1+4ac-b^2}{4a} = -1$, perciò il sistema risolvente non è lineare ed è alquanto laborioso da risolvere. Possiamo però utilizzare un artificio che evita la risoluzione di tale sistema. Sappiamo infatti che l'ordinata del vertice si determina mediante la formula $y_V = \frac{4ac-b^2}{4a}$, quindi l'ordinata del fuoco può riferirsi a quella del vertice nel seguente modo: $y_F = \frac{1}{4a} + y_V$. Ciò significa che possiamo sostituire la terza equazione del nostro sistema con una equazione riconducibile a una lineare.

$$\begin{cases} 3 = 4a+2b+c \\ b = -4a \\ \frac{1}{4a} = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = 4a+2b+c \\ b = -4a \\ 4a = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = -\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+c \\ b = \frac{1}{4} \\ a = -\frac{1}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 3+\frac{1}{4}-\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{4} \\ a = -\frac{1}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{16} \\ b = \frac{1}{4} \\ c = \frac{11}{4} \end{cases}$$

Pertanto l'equazione cercata è: $y = -\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{11}{4}$.

Livello 2

40. Scrivere l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse delle y, avente vertice in (2; –1) e fuoco in (2; –3). $[y = -1/8x^2 + 1/2x - 3/2]$

41. Scrivere l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse delle x, avente vertice in (4; 1) e fuoco in (–3; 1). $[x = -1/28y^2 + 1/14y + 111/28]$

42. Scrivere le equazioni delle parabole con asse parallelo all'asse delle y, aventi fuoco in (0; –2) e passanti per (–3; 1). $\left[y = \frac{1+\sqrt{2}}{6}\cdot x^2 - \frac{1+3\cdot\sqrt{2}}{2} \vee y = \frac{1-\sqrt{2}}{6}\cdot x^2 - \frac{1-3\cdot\sqrt{2}}{2}\right]$

43. Scrivere le equazioni delle parabole con asse parallelo all'asse delle x, aventi fuoco in (5; 1) e passanti per (2; –1). $\left[x = \frac{\sqrt{13}-3}{8}\cdot y^2 + \frac{3-\sqrt{13}}{4}\cdot y + \frac{25-3\cdot\sqrt{13}}{8} \vee x = \frac{\sqrt{13}-3}{8}\cdot y^2 + \frac{3+\sqrt{13}}{4}\cdot y + \frac{25+3\cdot\sqrt{13}}{8}\right]$

44. Scrivere l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse delle y, avente fuoco in (0; –2) e per direttrice la retta di equazione $y = -4$. $[y = 1/4x^2 - 3]$

45. Scrivere l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse delle x, avente fuoco in (2; –2) e per direttrice la retta di equazione $x = 1$. $[x = 1/2y^2 + 2y + 7/2]$

46. La conoscenza di un punto e della direttrice di una parabola con asse parallelo a uno degli assi coordinati, sono sufficienti a determinarne l'equazione? Giustificare la risposta. [No, manca un'informazione]

Livello 3

47. Determinare la misura della corda congiungente i punti di ascisse –6 e 6 della parabola $y = x^2 - x - 6$.[3]

Lavoriamo insieme

Determinare l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle y, passante per i punti (1; 2) *e* (–3; 1), *e tale che la retta di equazione* $y = x - 2$ *intercetti su di essa una corda di lunghezza* $\sqrt{194}$.

L'equazione della parabola da determinare è $y = ax^2 + bx + c$. Le prime due condizioni ci forniscono le seguenti due condizioni, insufficienti a risolvere il problema: $\begin{cases} 2 = a + b + c \\ 1 = 9a - 3b + c \end{cases}$. Vediamo allora di utilizzare anche la terza informazione. Intersechiamo perciò retta e parabola:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = x - 2 \end{cases} \Rightarrow ax^2 + bx + c = x - 2 \Rightarrow ax^2 + (b-1)\cdot x + c + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{1 - b \pm \sqrt{(1-b)^2 - 4a\cdot(c+2)}}{2a} = \frac{1 - b \pm \sqrt{1 - 2b + b^2 - 4ac - 8a}}{2a} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1 - b \pm \sqrt{1 - 2b + b^2 - 4ac - 8a}}{2a} \\ y = \dfrac{1 - b \pm \sqrt{1 - 2b + b^2 - 4ac - 8a}}{2a} - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1 - b \pm \sqrt{1 - 2b + b^2 - 4ac - 8a}}{2a} \\ y = \dfrac{1 - b \pm \sqrt{1 - 2b + b^2 - 4ac - 8a} - 4a}{2a} \end{cases}$$

Abbiamo così determinato le coordinate delle generiche intersezioni fra retta e parabola, determiniamo allora la misura della corda, indicando, per comodità, con $R = \sqrt{1 - 2b + b^2 - 4ac - 8a}$.

Gli estremi della corda sono perciò: $P \equiv \left(\frac{1-b-R}{2a}; \frac{1-b-4a-R}{2a}\right)$, $Q \equiv \left(\frac{1-b+R}{2a}; \frac{1-b-4a+R}{2a}\right)$

Quindi la corda è lunga: $PQ = \sqrt{\left(\frac{1-b-R}{2a} - \frac{1-b+R}{2a}\right)^2 + \left(\frac{1-b-4a-R}{2a} - \frac{1-b-4a+R}{2a}\right)^2} =$

$$= \sqrt{\left(\frac{1-b-R-1+b-R}{2a}\right)^2 + \left(\frac{1-b-4a-R-1+b+4a-R}{2a}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-2R}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-2R}{2a}\right)^2} = \sqrt{2\cdot\left(-\frac{R}{a}\right)^2} =$$

$= \frac{R}{a}\cdot\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1 - 2b + b^2 - 4ac - 8a}}{a}$. Come si vede un'espressione alquanto laboriosa. Imponiamo che questa valga $\sqrt{194}$ e abbiamo così trovato la terza condizione: $\begin{cases} a + b + c = 2 \\ 9a - 3b + c = 1 \\ 2\cdot(1 - 2b + b^2 - 4ac - 8a)/a^2 = 194 \end{cases}$. Il sistema ha due soluzioni: $\left(a = -\frac{1}{4}, b = -\frac{1}{4}, c = \frac{5}{2}\right) \vee \left(a = \frac{1}{36}, b = \frac{11}{36}, c = \frac{5}{3}\right)$. Quindi sono due le parabole che risolvono la questione: $y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{5}{2} \ \vee \ y = \frac{1}{36}x^2 + \frac{11}{36}x + \frac{5}{3}$.

Livello 2

48. Determinare le equazioni delle parabole con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate, passanti per i punti (2; –1) e (0; 3) e tali che la retta $x - 3y + 1 = 0$ intercetti su di esse una corda di lunghezza $\frac{\sqrt{3370}}{27}$. [$y = 3x^2 - 8x + 3$; $y = -147/13x^2 + 268/13x + 3$]

49. Determinare le equazioni delle parabole con asse di simmetria parallelo all'asse delle ascisse, passanti per i punti (0; 2) e (3; 1) e tali che la retta $y = 2x - 1$ intercetti su di esse una corda di lunghezza $\frac{\sqrt{785}}{11}$. [$x = 539/338y^2 - 2631/338y + 1553/169 \vee x = -11/6y^2 + 5/2y + 7/3$]

50. Determinare le equazioni delle parabole con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate, aventi il vertice in $V \equiv \left(\frac{1}{2}; \frac{25}{12}\right)$ e tali che la retta $x + y - 1 = 0$ intercetti su di esse una corda lunga $2 \cdot \sqrt{14}$.
[$y = 3/28x^2 - 3/28x + 709/336 \vee y = -1/3x^2 + 1/3x + 2$]

Livello 3

51. In che relazione sono la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a}$ e l'asse x? [Tangenti]
52. Sapendo che la retta di equazione $y = mx$ è tangente nell'origine alla parabola $y = ax^2 + bx + c$, determinare b e c. [$b = m$, $c = 0$]
53. Determinare l'equazione della parabola avente $x = 2$ come asse di simmetria, passante per (1; –2) ed ivi tangente alla retta di coefficiente angolare 2. [$y = -x^2 + 4x - 5$]
54. Determinare l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate, avente vertice in (2; –3), e tangente alla retta di equazione $2x - 3y + 1 = 0$. [$y = -1/42x^2 + 2/21x - 65/21$]
55. Determinare l'equazione della parabola avente l'asse di simmetria parallelo all'asse y, il vertice sulla retta $3x + 2y - 4 = 0$ e tangente nell'origine alla retta $y = 2x$. [$y = -5/4x^2 + 2x$]
56. Determinare l'equazione della parabola avente l'asse di simmetria parallelo all'asse y, tangente nell'origine alla retta di equazione $y = 4x$ e passante per (1; –2). [$y = -6x + 4$]
57. Determinare l'equazione della parabola avente $y = -1$ come asse di simmetria, passante per (4; –3) ed ivi tangente alla retta di coefficiente angolare 3. [$x = -1/12y^2 + 1/6y + 17/4$]
58. Determinare l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ascisse, avente vertice in (–1; 2), e tangente alla retta di equazione $x - 4y + 3 = 0$. [$x = -2/3y^2 + 8/3y + 11/3$]
59. Determinare l'equazione della parabola avente l'asse di simmetria parallelo all'asse x, il vertice sulla retta $2x + y - 1 = 0$ e tangente nell'origine alla retta $y = 3x$. [$x = -2/9y^2 + 1/3y$]
60. Determinare l'equazione della parabola avente l'asse di simmetria parallelo all'asse x, tangente la retta di equazione $y = -x + 1$ e con fuoco in (–1; 2). [Nessuna soluzione]

Lavoriamo insieme

Scrivere tutte le parabole con asse parallelo alle ordinate, che hanno vertice $V \equiv (-1; 4)$.
All'equazione generale $y = ax^2 + bx + c$, imponiamo le condizioni che caratterizzano il vertice, ottenendo il seguente sistema di due equazioni in 3 incognite: $\begin{cases} 4 = a - b + c \\ -b = -2a \end{cases}$, risolviamo tale sistema in funzione di uno dei parametri, per esempio a: $\begin{cases} 4 = a - 2a + c \\ b = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = -a + c \\ b = 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = a + 4 \\ b = 2a \end{cases}$. Possiamo allora dire che l'equazione cercata ha la forma $y = ax^2 + 2ax + a + 4$, che rappresenta perciò il fascio di parabole con vertice in V. Oppure potevamo prendere $y = x^2 + 2x + 5$ e $y = 2x^2 + 4x + 6$, cioè due qualsiasi parabole che hanno il vertice in V e utilizzarle come generatrici, ottenendo il fascio: $x^2 + 2x + 5 - y + k \cdot (2x^2 + 4x + 6 - y) = 0$.

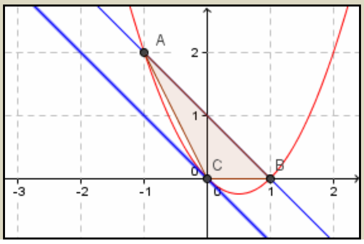
Scrivere le equazioni dei fasci di parabole canoniche che verificano quanto richiesto:

Livello 2

61. Con asse parallelo a y e con vertice in (4; 0) $\left[y = \frac{c}{16}x^2 - \frac{c}{2}x + c\right]$
62. Con asse parallelo a x e passanti per (1; 2) e (–3; 0) $\left[x = \frac{2-b}{2}y^2 + by - 3\right]$
63. Con asse parallelo a x e con fuoco in (3; –1) [$(4k + 1) y^2 - 2 \cdot (4k + 1) y + 2 (2k + 1) x + 7k + 4 = 0$]
64. Con asse la retta di equazione $x = -3$ e passanti per (0; 3) [$bx^2 + 6bx + 18 - 6y = 0$]
65. Con asse parallelo a y, passanti per (3; 0) e con il vertice sull'asse x [$y + cx^2 - 9c = 0$]
66. Con asse parallelo a x, passanti per O e aventi il fuoco sulla retta $2x - y = 0$ [$x = ay^2 \vee x = ay^2 + y$]
67. Con asse parallelo a y,aventi la retta di equazione $x - y + 1 = 0$ come tangente e passanti per (0; –1) $\left[y = -\frac{b+1}{8}x^2 + bx - 1\right]$

Lavoriamo insieme

Calcolare l'area del segmento parabolico intercettato dalla parabola $y = x^2 - x$ e dalla retta $x + y - 1 = 0$.
Calcoliamo l'equazione della tangente sfruttando il risultato del Teorema 4. Per trovare il punto di tangenza dobbiamo imporre che il coefficiente angolare generico della tangente, $2x - 1$, sia uguale a quello della retta, cioè $2x - 1 = -1$, perciò $x = 0$, quindi il punto di tangenza è $O \equiv (0; 0)$ e l'equazione della tangente: $y + x = 0$. Rappresentiamo il tutto in figura. Facilmente si vede che $A \equiv (-1; 2)$ e $B \equiv (1; 0)$, quindi $\overline{AB} = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2}$, per determinare l'altezza relativa ad AB basta calcolare la distanza di O dalla retta: $\frac{|0+0-1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Infine l'area del segmento parabolico misura $\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = \frac{4}{3}$.



Calcolare le aree dei segmenti parabolici determinati dalle parabole e rette seguenti

Livello 1

68. $(y = x^2, y = 4)$; $(y = x^2, x - y + 2 = 0)$; $(y = -x^2 + 2x, x - y + 2 = 0)$ [32/3 ; 9/2 ; 9/2]
69. $(y = -x^2, x - y - 2 = 0)$; $(y = -x^2 - 4x + 1, y = 1)$; $(y = -x^2 - 4x - 1, 2x + y + 4 = 0)$ [9/2 ; 32/3 ; 32/3]
70. $(y = -x^2 - 4x + 1, x - y + 5 = 0)$; $(y = 2x^2 + x - 1, x - y + 1 = 0)$; $(y = -2x^2 + 4x, x = y)$ [9/2 ; 8/3 ; 9/8]
71. $(x = -y^2, x = -4)$; $(x = y^2 + y - 1, x = 2)$; $(x = -y^2 + 1, x + y = 0)$ $\left[\frac{32}{3}; \frac{13 \cdot \sqrt{13}}{6}; \frac{5 \cdot \sqrt{5}}{6}\right]$
72. $(x = y^2, x = 3)$; $(x = -4y^2 + y + 2, x = 1)$; $(x = y^2 + 2, x + y - 8 = 0)$ $\left[4 \cdot \sqrt{3}; \frac{17 \cdot \sqrt{17}}{96}; \frac{125}{6}\right]$

Livello 2

73. Determinare una formula per il calcolo dell'area di un segmento parabolico limitato dalla parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ e da una corda AB, mediante le ascisse x_A e x_B. $\left[\frac{|a| \cdot |x_A - x_B|^3}{6}\right]$
74. Determinare una formula per il calcolo dell'area di un segmento parabolico limitato dalla parabola di equazione $x = ay^2 + by + c$ e da una corda AB, mediante le ordinate y_A e y_B. $\left[\frac{|a| \cdot |y_A - y_B|^3}{6}\right]$
75. Mediante le formule precedenti rifare gli esercizi del Livello 1.

Livello 3

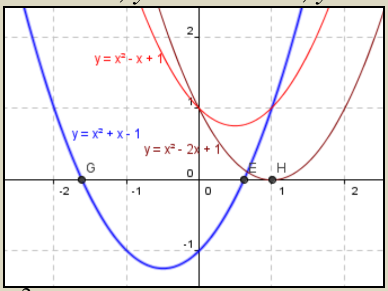
Stabilire per quali valori di k il segmento parabolico determinato dalla parabola e retta indicate misura quanto richiesto

76. $(y = x^2, y = k, 2)$; $(x = y^2, x = 2k, 1)$; $(y = x^2 + k, y = x, 3)$ $\left[\frac{\sqrt[3]{18}}{2}; \frac{\sqrt[3]{36}}{8}; \frac{1 - 3 \cdot \sqrt[3]{12}}{4}\right]$
77. Usando il teorema di Archimede determinare l'area comune alle parabole di equazione $y = x^2$ e $x = y^2$. [1/3]

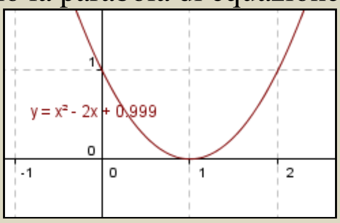
Lavoriamo insieme

Risolvere graficamente equazioni o disequazioni di secondo grado.

Risolvere l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, equivale a trovare le ascisse delle eventuali intersezioni della parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ con l'asse delle ascisse. Così nel grafico seguente, ottenuto con Geogebra, abbiamo rappresentato le parabole: $y = x^2 - x - 1$, $y = x^2 + x - 1$, $y = x^2 - 2x + 1$.



Il grafico ci suggerisce che l'equazione $x^2 - x - 1 = 0$, associata alla parabola che non incontra l'asse delle ascisse è priva di soluzioni reali; l'equazione $x^2 + x - 1 = 0$, a cui corrisponde la parabola che incontra l'asse delle ascisse in due punti, ha due soluzioni reali e distinte, i cui valori sono approssimativamente vicini a –2 e a 1. Già questa deduzione ci suggerisce che la rappresentazione grafica è sempre di tipo qualitativo e mai di tipo quantitativo. Ma anche l'informazione qualitativa non è sempre certa, per esempio la parabola associata all'equazione $x^2 -2x + 1 = 0$, dà l'impressione di avere una sola soluzione reale, prossima a 1. In effetti nessuno ci assicura, dal punto di vista grafico, che vi siano due soluzioni, entrambe prossime a 1. Per renderci conto di quanto detto rappresentiamo la parabola di equazione $y = x^2 - 2x + 0{,}999$.



Nonostante abbiamo utilizzato una rappresentazione migliore, la sensazione che la parabola sia tangente all'asse x, quindi che l'equazione associata abbia una sola soluzione reale permane. In realtà l'equazione ha due soluzioni distinte: 0,99 e 1,01. Procedure analoghe potranno applicarsi per le disequazioni.

Determinare graficamente delle soluzioni approssimate delle seguenti equazioni

Livello 2

78. CAS $x^2 - 12x + 5 = 0$; $7x^2 - 3x - 1 = 0$; $3x^2 - 14x + 8 = 0$; $x^2 - 4x + 5 = 0$
[$(0 < x_1 < 1 ; 11 < x_2 < 12)$; $(0 < x_1 < 1 ; -1 < x_2 < 0)$; $(0 < x_1 < 1 ; x_2 \approx 4)$; $\varnothing$]

79. $0{,}1x^2 -2x+ 1 = 0$; $3x^2 - 4x + 1 = 0$; $7x^2 + x + 1 = 0$; $9x^2 - 6x + 1 = 0$
[$(0 < x_1 < 1 ; 19 < x_2 < 20)$; $(0 < x_1 < 1 ; x_2 \approx 1)$; $\varnothing$; $0 < x_1 < 1$]

80. CAS $16x^2 - 8x + 1 = 0$; $3x^2 - 6x - 1 = 0$; $0{,}01x^2 + 4x + 4 = 0$; $0{,}04x^2 - x + 25 = 0$
[$0 < x_1 < 1$; $(2 < x_1 < 3; -1 < x_2 < 0)$; $(-2 < x_1 < -1; -399 < x_2 < -398)$; $\varnothing$]

Lavoriamo insieme

Le parabole canoniche con asse parallelo all'asse y sono funzioni, non lo sono però quelle con asse parallelo all'asse delle ascisse. Quindi da esse possiamo ricavare due funzioni.

Sia la parabola di equazione $x = 1/3y^2 - 3/2y + 2$. Risolviamo rispetto a y: $2y^2 - 9y + 6x + 12 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \dfrac{9 \pm \sqrt{81 + 48x - 96}}{4} \Rightarrow y = \dfrac{9 \pm \sqrt{48x - 15}}{4}$, ottenendo due distinte funzioni:

$y = \dfrac{9 - \sqrt{48x - 15}}{4} \wedge y = \dfrac{9 + \sqrt{48x - 15}}{4}$, definite per $48x - 15 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5/16$.

Dalle seguenti equazioni di parabole canoniche con assi paralleli a quelli delle ascisse, ricavare le equazioni delle funzioni semiparabole, quindi rappresentarle graficamente

Livello 2

81. $x = y^2 - y + 1$; $x = \frac{1}{4}y^2 - 2$; $x = -\frac{2}{3}y^2 - 3y$ $\left[y = \frac{1 \pm \sqrt{4x-3}}{2}; y = \pm 2 \cdot \sqrt{x+2}; y = \frac{-9 \pm \sqrt{81-24x}}{4}\right]$

82. $x = -\frac{2}{5}y^2 - \frac{3}{2}y + 1$; $x = 3y^2 - \frac{4}{5}y - 3$; $x = -\frac{1}{3}y^2 - \frac{5}{4}y + 1$

$\left[y = \frac{-15 \pm \sqrt{375-160x}}{8}; y = \frac{2 \pm \sqrt{75x+229}}{15}; y = \frac{-15 \pm \sqrt{417-192x}}{8}\right]$

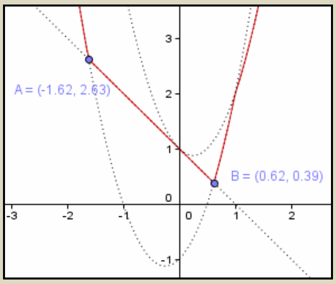
83. $x = -y^2 + 3y - \frac{4}{3}$; $x = -\frac{3}{2}y^2 - 1$; $x = \sqrt{2}y^2 - 2y + 3$; $x = 3y^2 - \sqrt{3}y + 1$

$\left[y = \frac{18 \pm \sqrt{33-36x}}{6}; y = \pm\frac{\sqrt{-6x-6}}{3}; y = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2x-6+\sqrt{2}}}{2}; y = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{4 \cdot \sqrt{3}x - 3}}{6}\right]$

Lavoriamo insieme

Rappresentare graficamente la funzione $y = |x^2 - |x - 1|| + x^2$.

Anche in questo caso ci vengono in aiuto le parabole. Infatti se $x - 1 \geq 0$ l'espressione diventa $y = |x^2 - x + 1| + x^2$, mentre se $x < 1$ diventa: $y = |x^2 + x - 1| + x^2$. Studiamo adesso il segno di $x^2 - x + 1$, con $x \geq 1$. Poiché il delta dell'equazione associata è negativo, l'espressione è sempre positiva, pertanto possiamo dire che se $x \geq 1$, l'equazione iniziale è: $y = x^2 - x + 1 + x^2 \Rightarrow y = 2x^2 - x + 1$. Vediamo adesso invece il segno di $x^2 + x - 1$, in questo caso invece si hanno le soluzioni: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, quindi $x^2 + x - 1 > 0$ si ha per valori esterni, cioè per $x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Non dobbiamo però dimenticare che siamo nell'ipotesi $x < 1$, cioè $x^2 + x - 1 > 0$ se $x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \vee \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < x < 1$. Perciò per questi valori l'equazione iniziale è equivalente a $y = 2x^2 + x - 1$. Mentre se $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, diverrà $y = -x^2 - x + 1 + x^2 \Rightarrow y = -x + 1$. Infine l'equazione iniziale equivale a $y = \begin{cases} 2x^2 + x - 1 & x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ -x + 1 & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ 2x^2 - x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$. Perciò, come confermato da Geogebra,



la funzione iniziale è formata da tre archi di due diverse parabole e da un segmento di retta. Abbiamo tracciato le parabole e la retta in tratteggio, mentre la funzione è stata tracciata con segno continuo, in rosso.

Rappresentare graficamente le funzioni seguenti

Livello 2

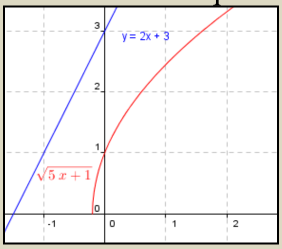
84. $y = |x^2 - |x|| + x^2$ $\quad$ $y = |2x^2 - |x + 1|| + x$ $\quad$ $y = |x^2 + |2x - 1|| + 2x$

85. $y = |x^2 + |x^2 - 1|| - x^2$ $\quad$ $y = |-x^2 - |x - x^2|| + 1$ $\quad$ $y = |2x^2 - |3x - 2|| + x$

86. $y = |3x^2 - |x^2 - 5x + 6|| + x - 1$ $\quad$ $y = |x^2 - x + |x - x^2|| + 1 - x$ $\quad$ $y = |1 + x^2 - |x - 1|| + 1$

Lavoriamo insieme

Risolvere graficamente la disequazione irrazionale: $\sqrt{5x+1} \le 2x+3$.

L'equazione $y = \sqrt{5x+1}$, si ottiene dall'equazione della parabola: $y^2 = 5x + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{5}y^2 - \frac{1}{5}$. Rappresentiamo le curve. Facilmente si nota che qualsiasi punto della semiparabola ha ordinata inferiore al corrispondente punto sulla retta, 

quindi le soluzioni si ottengono per tutti i valori dell'insieme di esistenza, cioè per $5x + 1 \ge 0 \Rightarrow x \ge -1/5$

Risolvere graficamente le seguenti disequazioni

Livello 2

87. $\sqrt{2x-1} \ge 3x+1$; $\sqrt{5x+3} \le 3-2x$; $\frac{\sqrt{2x-1}}{3} \le \frac{1}{4}x + \frac{2}{3}$ $\left[-\frac{1}{2} \le x < 0; -\frac{3}{5} \le x \le \frac{17-\sqrt{193}}{8}; x \ge \frac{1}{2}\right]$

88. $\frac{\sqrt{5-2x}}{7} \ge 2x - \frac{4}{3}$; $\frac{\sqrt{-3x-2}}{5} \ge \frac{1}{2}x + \frac{3}{5}$; $\frac{\sqrt{-5x-7}}{4} \ge -x+3$ $\left[x \le \frac{389+\sqrt{6477}}{588}; x \le -\frac{22}{25}; \varnothing\right]$

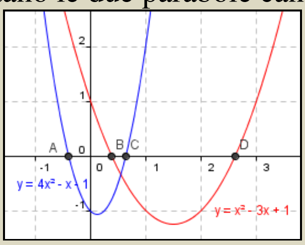
89. $3-\sqrt{4+x} \ge \frac{2}{3}x - 1$; $\frac{11-\sqrt{-2x-1}}{3} \ge 5x + \frac{1}{4}$; $5+\sqrt{2x-1} \ge -3x+8$; $\frac{3-\sqrt{4x+5}}{2} \le -4x-3$

$\left[-4 \le x \le \frac{9}{4}; x \le \frac{1}{2}; x \ge \frac{10-\sqrt{10}}{9}; -\frac{5}{4} \le x \le -1\right]$

Lavoriamo insieme

Risolvere graficamente la disequazione $\frac{x^2-3x+1}{4x^2-x-1} > 0$.

$y = x^2 - 3x + 1$ e $y = 4x^2 - x - 1$, rappresentano le due parabole canoniche in figura.



Abbiamo evidenziato le intersezioni delle parabole con l'asse delle ascisse. A noi interessano i valori di x per cui le due parabole si trovano in semipiani *opposti*. Piuttosto che valutare approssimativamente le intersezioni con l'asse x, le determiniamo risolvendo le equazioni $x^2 - 3x + 1 = 0$ e $4x^2 - x - 1 = 0$, le cui rispettive soluzioni sono: $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}; x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8}$. Le soluzioni della disequazione sono: $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{17}}{8}$ (entrambe le parabole sono negative), $x < \frac{1-\sqrt{17}}{8} \vee x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ (entrambe le parabole sono positive).

Risolvere graficamente le seguenti disequazioni

Livello 2

90. $\frac{2x-3}{x^2-5x+6} > 0$; $\frac{x^2-6x+9}{x^2-7x+10} \le 0$; $\frac{3x^2+x+1}{7x+1} > 0$ $\left[\left(\frac{3}{2} < x < 2 \vee x > 3\right); 2 < x < 5; x > -\frac{1}{7}\right]$

91. $\dfrac{2x^2-3}{x-\sqrt{2}}>0$; $\dfrac{x+1}{x^2-x+1}\le 0$; $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}\ge 0$ $\left[\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2}<x<\dfrac{\sqrt{6}}{2}\vee x>\sqrt{2}\right);x\le -1;(x\le 1\vee x>2)\right]$

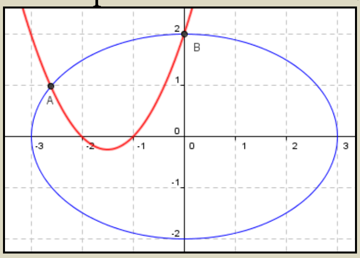
92. $\dfrac{16x^2+24x+9}{-x^2+7x+13}\le 0$; $\dfrac{x^2+x+13}{x^2+7x+19}>0$; $\dfrac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}>0$; $\dfrac{2x^2+2x+1}{4x^2-x+3}\le 0$

$\left[\left(x=-\dfrac{3}{4}\vee x<\dfrac{7-\sqrt{101}}{2}\vee x>\dfrac{7+\sqrt{101}}{2}\right);\forall x\in\mathbb{R};\left(x<-\dfrac{3}{2}\vee -1<x<\dfrac{2}{3}\vee x>1\right);\varnothing\right]$

Lavoriamo insieme

Risolvere il sistema: $\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\\ y=x^2+3x+2\end{cases}$.

Riconosciamo che la prima equazione rappresenta l'ellisse in forma canonica, i cui assi misurano 3 e 2 unità, la seconda rappresenta invece la parabola di vertice $V \equiv (-3/2; -1/4)$. Rappresentandole graficamente troviamo il seguente grafico,



che ci suggerisce le seguenti due soluzioni approssimate, che sono le coordinate dei punti A ($x \approx -2,4$; $y \approx 1$) e B ($x = 0$; $y = 2$). Per confermare l'esattezza della seconda soluzione basta una semplice verifica. Per la prima invece, utilizzando Derive troviamo le seguenti soluzioni meglio approssimate: ($x \approx -2,611177961$; $y \approx 0,9847164627$).

Risolvere graficamente i seguenti sistemi di equazioni e disequazioni.

Livello 3

93. $\begin{cases}4x+y-2=0\\ y-x^2+2x+5=0\end{cases}$; $\begin{cases}x+y=5\\ y^2+x^2=13\end{cases}$

[($x \approx 1,8 \vee y \approx -5,3$; $x = -3,8 \vee y \approx 17,3$) ;($x = 2 \vee y = 3$, $x = 3 \vee y = 2$)]

94. $\begin{cases}xy=48\\ x^2+y^2=100\end{cases}$; $\begin{cases}x^2-y^2=16\\ y^2+x^2=16\end{cases}$ [($x = \pm 6 \vee y = \pm 8$; $x = \pm 8 \vee y = \pm 6$) ; ($x = \pm 4 \vee y = 0$)]

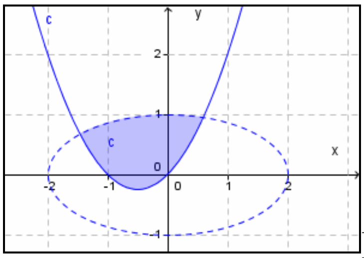
95. $\begin{cases}x^2+y^2-4x-2y+4=0\\ xy-4=0\end{cases}$; $\begin{cases}4x^2+9y^2=1\\ y-x^2-3x=3\end{cases}$ [($x = 2 \vee y = 2$; $x \approx 2,9 \vee y \approx 1,4$) ; $\varnothing$]

96. $\begin{cases}x^2+y^2+2x-6y=-6\\ y+x^2-2=0\end{cases}$; $\begin{cases}\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1\\ x=y^2-1\end{cases}$ [($x = -1 \vee y = 1$, $x \approx 0,5 \vee y \approx 1,7$) ; ($x \approx 6,9 \vee y \approx \pm 2,8$)]

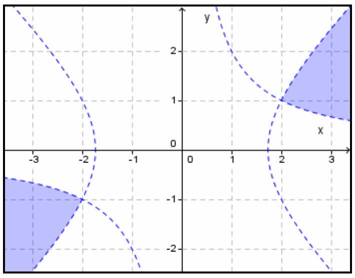
97. $\begin{cases}x^2-4x+y^2+4y=9\\ y^2+x^2+2y-8=0\end{cases}$; $\begin{cases}x^2-x+3<0\\ x^2-13x+42\ge 0\end{cases}$ [($x \approx 0,7 \vee y \approx 1,9$; $x \approx -1,9 \vee y \approx -3,3$) ; $\varnothing$]

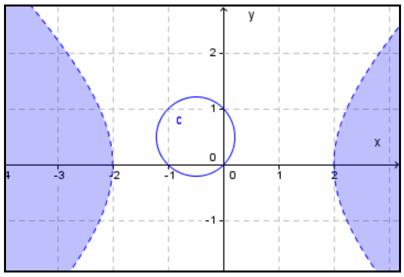
98. $\begin{cases}x^2-y^2=1\\ xy-1=0\end{cases}$; $\begin{cases}3x+5>0\\ x^2-5x-14>0\end{cases}$ [($x \approx 1,3 \vee y \approx 0,8$; $x \approx -1,3 \vee y \approx -0,8$) ; $x > 7$]

99. $\begin{cases}x=y^2-2y+1\\ \dfrac{x^2}{9}+y^2=1\end{cases}$; $\begin{cases}x^2+5x+13<0\\ x^2-2x+1\ge 0\end{cases}$ [($x = 0 \vee y = 1$, $x \approx 2,5 \vee y \approx -0,6$) ; $\varnothing$]

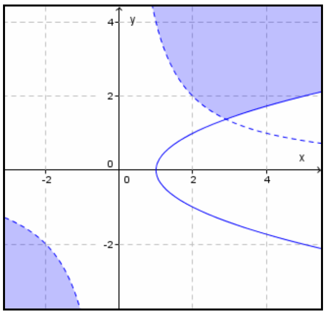
100. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{25} = 1 \\ \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{16} = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} y - x^2 - x \geq 0 \\ \dfrac{x^2}{4} + y^2 < 1 \end{cases}$ [$(x \approx \pm 2{,}5 \vee y \approx \pm 3{,}5$; $x \approx \pm 2{,}5 \vee y \approx \mp 3{,}5)$ ]

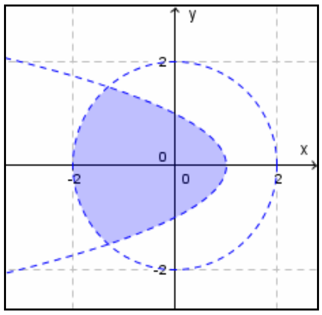
101. $\begin{cases} xy > 2 \\ x^2 - y^2 > 3 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 + y^2 + x - y \geq 0 \\ \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} > 1 \end{cases}$





102. $\begin{cases} x - y^2 - 1 \leq 0 \\ xy - 4 > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 < 0 \\ x + y^2 < 1 \end{cases}$





Trasformazioni geometriche della parabola

Lavoriamo insieme

Traslare la parabola $y = -2x^2$, in modo che il suo vertice, $O \equiv (0; 0)$ divenga il punto $V \equiv (4;-1)$.

Determiniamo le leggi della traslazione che porta l'origine nel punto *V*: $t_{(4;-1)} : \begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = y - 1 \end{cases}$; quindi quelle della traslazione inversa: $t^{-1}_{(4;-1)} : \begin{cases} x = x' - 4 \\ y = y' + 1 \end{cases}$. Sostituiamo nell'equazione: $y' + 1 = -2(x' - 4)^2 \Rightarrow y' + 1 = -2x'^2 + 16x' - 33$.

Determinare le traslate delle seguenti parabole canoniche secondo i vettori assegnati:

Livello 1

103. $y = x^2$, $(-1; 0)$; $y = -x^2$, $(0; 3)$; $y = 3/4x^2$, $(-1; 1)$ [$y = x^2 + 2x + 1$; $y = -x^2 + 3$; $y = 3/4x^2 + 3/2x + 7/4$]

104. $y = x^2$, $(3/2 ; -1)$; $y = -3x^2$, $(-1; 4/3)$; $x = y^2$, $(4; 0)$ [$y = 2x^2 - 6x + 7/2$; $y = -3x^2 - 6x - 5/3$; $x = y^2 + 4$]

105. $y = \sqrt{2}x$, $(1; -2)$; $y = -1/2x^2$, $(-2; 1/4)$ $\left[y = \sqrt{2}x^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot x + \sqrt{2} - 2; y = -\dfrac{1}{2}x^2 - 2x - \dfrac{7}{4}\right]$

106. $x = \dfrac{1}{4}y^2, \left(\sqrt{3}; -2\right)$; $x = -y^2$, $(0; -1/3)$ $\left[x = \dfrac{1}{4}y^2 + y + \sqrt{3} + 1; x = -y^2 - \dfrac{2}{3}y - \dfrac{1}{9}\right]$

107. $y = -\dfrac{5}{4}x^2, \left(1 - \sqrt{2}; 0\right)$; $x = 1/3y^2$, $(-2; 3)$ $\left[y = -\dfrac{5}{4}x^2 + 5 \cdot \dfrac{1 - \sqrt{2}}{2} \cdot x + 5 \cdot \dfrac{2 \cdot \sqrt{2} - 3}{4}; x = \dfrac{1}{3}y^2 - 2y + 1\right]$

Lavoriamo insieme

Utilizzando le nozioni sulle simmetrie assiali provare che la retta di equazione $x = -2$ è asse di simmetria per la parabola di equazione $y = x^2 + 4x + 3$.

Cominciamo a scrivere le leggi della simmetria assiale rispetto al predetto asse: $\sigma_{x=-2}: \begin{cases} x' = -4 - x \\ y' = y \end{cases}$. Applichiamole all'equazione della parabola:

$$y = x^2 + 4x + 3 \xrightarrow{\sigma_{x=-2}} y = (-4 - x)^2 + 4 \cdot (-4 - x) + 3 \Rightarrow y = x^2 - 4x + 3.$$

Date le seguenti parabole, determinare le trasformate secondo le trasformazioni indicate, (con ω indichiamo un'omotetia, con α una dilatazione

Livello 2

108. $y = x^2 - 5x + 6$, $s_{x=-1}$; $y = 2x^2 - x + 1$, $s_{y=2}$; $y = -x^2 + 3x - 2$, $s_{x+y=0}$; $y = -2x^2 + 1$, $s_{x-y=0}$
[$y = x^2 + 9x + 20$; $y = -2x^2 + x + 3$; $x = y^2 + 3y + 2$; $x = -2y^2 + 1$]
109. $y = 3x^2 - x$, $s_{2x-3y+1=0}$; $x = 2y^2 - 3$, $s_{x-y=0}$; $x = 2y^2 + 3y - 1$, $s_{x=3}$; $x = -y^2 - 3y + 2$, $s_{y=-4}$
[$75x^2 + 360xy + 432y^2 - 341x - 379y + 22 = 0$; $y = 2x^2 - 3$; $x = -2y^2 - 3y + 7$; $x = -y^2 - 13y - 38$]
110. $x = 5y^2 + y$, $s_{x+y=0}$; $y = -x^2 + x - 3$, $s_{(2;-1)}$; $x = -3y^2 - 2y + 2$, $s_{x+4y-3} = 0$;
[$y = -5x^2 + x$; $y = x^2 - 7x + 13$; $192x^2 + 720xy + 675y^2 - 169x - 2806y + 2068 = 0$]
111. $y = 3x^2 + 6x - 2$, s_V (V è il vertice) ; $x = -y^2 + 3y$, s_V ; $x = 2y^2 + 3y - 1$, $s_{(0;-4)}$; $y = -4x^2 + 1$, $r_{90°, O}$
[$y = -3x^2 - 6x - 8$; $x = y^2 - 9y + 18$; $x = -2y^2 - 29y - 103$; $x = 4y^2 + 1$]
112. $y = 3x^2 + x$, $r_{270°, O}$; $y = x^2 + x - 1$, $r_{90°,(-1;2)}$; $y = -x^2 + 2x + 3$, $r_{270°,(-3;1)}$; $x = -y^2 + 3y$, $r_{90°, O}$
[$x = 3y^2 - y$; $x = -y^2 + 5y - 6$; $x = -y^2 + 6y - 13$; $y = -x^2 - 3x$]
113. $x = 3y^2 + y - 2$, $r_{270, O}$; $x = 2y^2 + 3y - 1$, $r_{90°,(1;-3)}$; $x = -3y^2 + 4$, $r_{270°,(2;0)}$
[$y = -3x^2 - x - 2$; $y = 2x^2 + 5x - 1$; $y = 3x^2 - 12x + 14$]

Lavoriamo insieme

Determinare il centro di simmetria che trasforma la parabola $y = x^2 + x + 2$ in $y = -x^2 + 13x - 52$.
Applichiamo una generica simmetria alla parabola iniziale:

$$2y_C - y = (2x_C - x)^2 + 2x_C - x + 2 \Rightarrow -y = -2y_C + 4x_C^2 - 4x_C x + x^2 + 2x_C - x + 2 \Rightarrow$$
$$y = -x^2 + (4x_C + 1) \cdot x + 2y_C - 4x_C^2 - 2x_C - 2$$

Adesso uguagliamo i coefficienti di questa equazione con quella della parabola trasformata, ottenendo il seguente sistema: $\begin{cases} 4x_C + 1 = 13 \\ 2y_C - 4x_C^2 - 2x_C - 2 = -52 \end{cases}$, che andiamo a risolvere: $\begin{cases} x_C = 3 \\ 2y_C - 4 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 + 2 = -52 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x_C = 3 \\ 2y_C - 36 - 6 + 2 = -52 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 3 \\ y_C = -6 \end{cases}$. Quindi il centro di simmetria ha coordinate (3; –4).

Livello 2

Determinare le componenti incognite nelle trasformazioni seguenti

114. $y = -3x^2 + 1 \xrightarrow{t} y = -3x^2 - 24x - 44$; $x = 3y^2 - 2y + 1 \xrightarrow{t} x = 3y^2 - 32y + 86$ [(–4; 3) ; (0; 5)]
115. $y = 2x^2 - x + 1 \xrightarrow{s(x=h)} y = 2x^2 - 23x + 67$; $y = -x^2 + 2x \xrightarrow{s(y=h)} y = 2x^2 - 2x - 4$ [$x = 3$; $\varnothing$]
116. $x = -y^2 + 3y + 2 \xrightarrow{s(x=h)} x = -y^2 - 3y - 4$; $x = -3y^2 + 1 \xrightarrow{s(y=h)} x = -3y^2 + 24y - 47$ [$\varnothing$; $y = -2$]
117. CAS $x = y^2 + y + 2 \xrightarrow{s(x+by+c=0)} y = -x^2 + 3x - 3$ [$x + y - 1 = 0$]
118. CAS $y = x^2 + 1 \xrightarrow{s(ax-y+c=0)} y = 9x^2 - 24x + 16x^2 + 52x - 111y + 139 = 0$ [$2x - y + 3 = 0$]
119. $x = 2y^2 + y \xrightarrow{s_C} x = -2y^2 + 25y - 82$; $y = 3x^2 + 3 \xrightarrow{s_C} y = -3x^2 - 24x + 3$ [(–2; 3) ; (–2; 2)]
120. $x = -2y^2 + y - 3 \xrightarrow{r_{90°,C}} x = -2y^2 + 7y - 1$; $y = 3x^2 + x + 1 \xrightarrow{r_{90°,C}} x = -y^2 + 2y + 1$ [(–1; 3) ; $\varnothing$]
121. $x = 2y^2 + 3y \xrightarrow{r_{270°,C}} y = 2x^2 + x + 1$; $y = 5x^2 + 2 \xrightarrow{r_{270°,C}} x = 5y^2 - 30y + 40$ [$\varnothing$; (–3; 0)]

122. Determinare le coordinate del vertice della parabola $y = x^2 - 7x + 10$, sfruttando il fatto che esso è intersezione della parabola con il suo asse di simmetria. [$V \equiv (7/2; -9/4)$]

Lavoriamo insieme

Determinare la trasformata della parabola $x = 2y^2 - y + 1$, *secondo l'omotetia di centro il vertice e* $k = -\frac{2}{3}$.

Cominciamo a determinare le coordinate del vertice: $V \equiv \left(2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + 1; \frac{1}{4}\right) \equiv \left(\frac{1-2+8}{8}; \frac{1}{4}\right) \equiv \left(\frac{7}{8}; \frac{1}{4}\right)$; adesso scriviamo le leggi dell'omotetia: $\sigma_{V,-2/3}: \begin{cases} x' = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{8} \\ y' = -\frac{2}{3}y + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{4} \end{cases} \equiv \begin{cases} x' = -\frac{2}{3}x + \frac{35}{24} \\ y' = -\frac{2}{3}y + \frac{5}{12} \end{cases}$. Determiniamo le leggi inverse: $\sigma^{-1}{}_{V,-2/3}: \begin{cases} \frac{2}{3}x = \frac{35}{24} - x' \\ \frac{2}{3}y = \frac{5}{12} - y' \end{cases} \equiv \begin{cases} x = \frac{35}{16} - \frac{3}{2}x' \\ y = \frac{5}{8} - \frac{3}{2}y' \end{cases}$. Adesso sostituiamo questi ultimi valori nell'equazione della parabola, trascurando gli apici: $35/16 - 3/2x = 2 \cdot (5/8 - 3/2y)^2 - (5/8 - 3/2y) + 1 \Rightarrow 35/16 - 3/2x = 2 \cdot (25/64 - 15/8y + 9/4y^2 - 5/8 + 3/2y + 1 \Rightarrow 35/16 - 3/2x - 25/32 + 15/4y - 9/2y^2 + 5/8 - 3/2y - 1 = 0 \Rightarrow 70 - 48x - 25 + 120y - 144y^2 + 20 - 48y - 32 = 0 \Rightarrow -48x + 33 + 72y - 144y^2 = 0 \Rightarrow x = -3y^2 + 3/2y + 11/6$.

Determinare le trasformate delle seguenti parabole secondo le trasformazioni indicate (con V si indica il vertice della parabola di partenza)

Livello 2

123. $y = x^2 - 5x + 6$, $\omega_{(-1;\,2),-2}$; $y = x^2 - 5x + 6$, $\omega_{V,-\frac{3}{4}}$; $x = -3y^2 + y - 2$, $\omega_{(1;-3),\frac{1}{4}}$

$$\left[y = -\frac{1}{2}x^2 - 8x - \frac{51}{2}; y = -\frac{4}{3}x^2 - \frac{127}{3}x - \frac{7787}{24}; x = -12y^2 - 53y - \frac{233}{4}\right]$$

124. CAS $y = -x^2 - x + 2$, $\zeta: \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x - 2y + 1 \end{cases}$; $x = -3y^2$, $\zeta: \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + y \\ y' = -2x + \frac{1}{2}y \end{cases}$

$[4x^2 + 4xy + y^2 - 19x + 3y + 46 = 0 ; 24x^2 - 24xy + 6y^2 + 5x - 10y = 0]$

125. $x = -3y^2 + y - 2$, $\omega_{V,\frac{4}{3}}$; $y = x^2$, $\delta_{2,3}$; $y = x^2 + x - 3$, $\delta_{-1,\frac{2}{3}}$

$$\left[x = -\frac{9}{4}y^2 + \frac{69}{16}y - \frac{3619}{768}; y = \frac{3}{4}x^2; y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 2\right]$$

126. $x = 3y^2$, $\delta_{-\frac{1}{4},1}$; $x = 2y^2 + y + 1$, $\delta_{-\frac{3}{2},\frac{1}{3}}$; CAS $y = 2x^2$, $\zeta: \begin{cases} x' = x - 3y - 1 \\ y' = 3x + y \end{cases}$

$$\left[x = -\frac{3}{4}y^2; x = -27y^2 - \frac{9}{2}y - \frac{3}{2}; x^2 - 6xy + 9y^2 + 17x - y + 16 = 0\right]$$

127. CAS $x = y^2 + 5y - 1$, $\zeta: \begin{cases} x' = x - 4y - 1 \\ y' = 4x + y + 1 \end{cases}$; $x = y^2 - 5$, $\alpha: \begin{cases} x' = x - y \\ y' = -x + 2y - 1 \end{cases}$

$[16x^2 + 8xy + y^2 - 333x - 147y - 484 = 0 ; x^2 + 2xy + y^2 + y - 5 = 0]$

128. CAS $x = -y^2 + 4y - 2$, $\alpha: \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + y - 1 \\ y' = 2x + 1 \end{cases}$; $y = -2x^2 - 1$, $\alpha: \begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = 3x - y \end{cases}$; $y = -x^2 - x + 2$, $\alpha: \begin{cases} x' = x - 2y - 1 \\ y' = -x + 3y \end{cases}$

$[16x^2 - 8xy + y^2 - 24x + 14y - 31 = 0 ; y = 2x^2 + 11x + 15 ; [9x^2 + 12xy + 4y^2 + 22x + 15y + 11 = 0]$

Lavoriamo insieme

Determinare le leggi della dilatazione che trasformano la parabola $y = -2x^2 + 3x - 4$, *in* $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{82}x + 1$.

Consideriamo le leggi di una generica dilatazione: $\delta_{a,b}: \begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases}$ e quelle della rispettiva inversa: $\delta_{a,b}^{-1}: \begin{cases} x = x'/a \\ y = y'/b \end{cases}$. Applichiamole alla parabola iniziale: $y'/b = -2\cdot(x'/a)^2 + 3\cdot(x'/a) - 4 \Rightarrow y' = -2bx'^2/a^2 + 3bx'/a - 4b$. Trascuriamo la presenza degli apici e uguagliamo i coefficienti delle due equazioni, ottenendo il seguente sistema: $\begin{cases} -2b/a^2 = 1/8 \\ 3b/a = -3/8 \\ -4b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\cdot(-1/4)/a^2 = 1/8 \\ -1/(4a) = -1/8 \\ b = -1/4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{8} \\ \frac{1}{a} = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ a = -2 \\ b = -1/4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \pm 2 \\ a = -2 \\ b = -1/4 \end{cases}$.

Solo $a = -2$, $b = 1/4$ è accettabile:

Determinare il rapporto delle omotetie, di dato centro, che trasformano le prime parabole nelle seconde

Livello 3

129. a) (0; 0), $x = 2y^2 - 3y + 1 \to x = 6y^2 - 3y + 1$; b) (0; 0), $x = y^2 \to x = 3/5y^2$ [a) ∅; b) $k = -3/5$]
130. a) (0; 0), $y = x^2 + 3x + 2 \to y = -4x^2 + 3x - 1/2$; b) (0; 0), $y = -2x^2 \to y = -7x^2$ [a) $k = -1/4$; b) $k = 2/7$]

Determinare centro e rapporto delle omotetie che trasformano le prime parabole nelle seconde

131. a) CAS $x = -y^2 + 2 \to x = -5y^2 + 16/2y - 82/45$; b) CAS $y = 4x^2 + x \to y = -8x^2 - 15x - 47/8$
[a) $C \equiv (-1; 2/3)$, $k = 1/5$; b) $C \equiv (-2/3 ; 3/4)$,$k = -1/2$]

Data i parametri della dilatazione che trasforma la prima parabola nella seconda

132. $x = -2y^2 + 1 \to x = 32\cdot\sqrt{2}y^2 - \sqrt{2}$; $y = x^2 \to y = \frac{16}{9}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)x^2$ $\left[\left(a = -\sqrt{2}, b = \frac{1}{4}\right);\left(a = -\frac{3}{4}, b = \sqrt{3}+1\right)\right]$

Determinare le similitudini di leggi $\zeta: \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = bx - ay \end{cases}$***, che trasformano la prima parabola nella seconda***

133. CAS $x = 3y^2 \to 12x^2 + 12xy + 3y^2 - 5x + 10y = 0$ [$a = 1$, $b = -2$]
134. CAS $y = -x^2 + 1 \to 4x^2 - 4xy + y^2 - 5x - 10y - 25 = 0$ [$a = 2$, $b = -1$]
135. CAS $x = -y^2 + y + 2 \to 7\ 2x^2 + 96xy + 32y^2 + 130x + 130y + 169 = 0$ [$a = -1/2$, $b = 3/4$]
136. CAS $y = x^2 + 2x - 1 \to 144x^2 + 960xy + 1600y^2 - 1744x + 10028y - 11881 = 0$ [$a = 3/4$, $b = 5/2$]

Lavoriamo insieme

Un'interessante applicazione delle parabole si ha in certi problemi di massimo. Consideriamo il seguente problema. *Un'azienda produce ferri da stiro e ha una capacità di produzione mensile di 5000 pezzi. L'azienda è interessata a stabilire quanti ferri da stiro deve produrre mensilmente e a che prezzo li dovrà poi vendere per ottenere il massimo guadagno. Per questo motivo incarica un'agenzia specializzata in indagini di mercato. L'agenzia ha determinato una legge empirica, secondo la quale la quantità Q di ferri da stiro che riescono a vendersi dipende dal prezzo P di vendita, espresso in euro, secondo la seguente legge:* $Q = 5000{,}00 - 30 \cdot P$. *Viene inoltre stabilito che, indipendentemente dal numero di ferri prodotti vi è una spesa fissa di € 200,00 per l'avvio della produzione, a tale valore dobbiamo sommare le spese di €12,00 per ciascun ferro prodotto e infine una spesa di trasporto pari a un fisso di € 50,00 più € 0,50 ogni ferro. Sulla base di tali informazioni si vuol sapere qual è il numero ottimale di ferri da produrre, in modo da rendere massimo il guadagno.*

Per risolvere il problema dobbiamo capire il significato dei dati. Cosa significa la legge empirica della vendita? Che se un ferro da stiro viene venduto a € 5,00, ne saranno venduti $5000 - 30 \cdot 5 = 4850$; se il prezzo è di € 20,00 invece si venderanno $5000 - 30 \cdot 20 = 4400$ pezzi. Ovviamente vi sarà un prezzo massimo per il quale vi sono ancora potenziali clienti ed è quello per cui 5000,00 – 30· P > 0, cioè $P < \frac{5000,00}{30} \approx$ €166,67. Ma in questo modo si venderebbero 5000 – 30 · 166,67 ≈ 0 ferri da stiro, quindi in effetti deve essere 5000,00 – 30· P ≥ 1, cioè $P \le \frac{4999,00}{30} \approx$ € 166,63. Ricordiamo che la legge è empirica, i dati statistici non danno mai una sicurezza, comunque la legge è indicativa.

Cosa significa la legge sui costi necessari per la produzione? Intanto trasformiamola in una formula matematica: $C(Q) = 200,00 + 12,00 \cdot Q + 50,00 + 0,50 \cdot Q \Rightarrow C(Q) = 250,00 + 12,50 \cdot Q$, in cui Q rappresenta il numero di pezzi prodotti. Per comodità la legge dei costi la facciamo dipendere dal prezzo e non dalla quantità venduta, sostituendo a Q la legge empirica:

$C(P) = 250,00 + 12,50 \cdot (5000,00 - 30 \cdot P) \Rightarrow C(P) = 250,00 + 62500,00 - 375 \cdot P \Rightarrow C(P) = 62750,00 - 375 \cdot P$.

Vendendo Q pezzi il ricavo è $R(P) = P \cdot Q \Rightarrow R(P) = P \cdot (5000,00 - 30 \cdot P) \Rightarrow R(P) = 5000,00 \cdot P - 30 \cdot P^2$.

Il guadagno presumibile è perciò dato dalla differenza fra ricavi e costi, cioè

$$G(P) = R(P) - C(P) = 5000,00 - 30 \cdot P^2 - (62750,00 - 375P) \Rightarrow G(P) = -30\,P^2 + 5375\,P - 62750,00$$

Adesso possiamo procedere con la risoluzione del problema. Per far ciò potremmo costruire una tabella elencando tutti i valori possibili dei prezzi da € 1,00 fino a € 166,50. Il procedimento però in questo modo sarebbe noioso, lungo e poco elegante. Per la lunghezza potremmo ricorrere a un elaboratore, ma dovremmo poi programmarlo in modo da calcolare il valore massimo del guadagno, se no, dobbiamo in ogni caso valutare tutti i valori ottenuti. Un modo migliore c'è. Se consideriamo la legge del guadagno, ci accorgiamo che essa rappresenta l'equazione di una parabola nell'incognita P. Tale parabola volge la concavità verso il basso, dato che il suo primo coefficiente è negativo. Ma allora il massimo del guadagno è dato proprio dall'ordinata del vertice, mentre l'ascissa del vertice ci dice qual è il prezzo di vendita che rappresenta tale guadagno. Basta quindi determinare le coordinate del vertice. Facilmente abbiamo: $V \equiv (1075/12; 4272125/24)$. Naturalmente 1075/12 non è un prezzo *reale*, dobbiamo quindi determinare un suo valore approssimato, che è € 89,58. In questo caso il guadagno diviene: $G(P) = -30 \cdot (89,58)^2 + 5375 \cdot 89,58 - 62750 \approx$ € 178005,21. Il numero di ferri prodotti e venduti sarà $Q = 5000 - 30 \cdot 89,58 = 2312,6$. Anche questo non è un valore *reale*, i ferri si vendono in numeri interi, dobbiamo quindi considerare una sua approssimazione, oppure scegliere il prezzo più vicino a 89,58 che ci assicuri un numero intero di ferri prodotti, come per esempio 89,50, nel qual caso i pezzi prodotti sono 2315 e il guadagno G = € 178005,00.

Livello 2

137. La funzione di domanda del prodotto è: $Q = 200 - 0,4 \cdot P$. la funzione di costo è $C = 1000 + 10 \cdot Q$ determinare qual è il prezzo di vendita che permette il massimo profitto, nonché il profitto ottenuto. [€ 255; € 23010]
138. Come nel precedente esempio, ma con: $Q = 180 - 0,3 \cdot P$ e $C = 8500 + 12 \cdot Q$. [€ 306; € 17430,80]
139. Un'impresa ha una spesa fissa di € 3000,00 aumentata di € 5,00 per ogni unità di prodotto. Sapendo che la funzione di domanda è $Q = 450 - 12 \cdot P$, determinare il prezzo di vendita che massimizza il profitto e lo stesso profitto. [€ 21,25; € 168,75]
140. Una ditta spende un fisso di € 1000,00 e € 2,50 per ogni unità di prodotto. Si è valutata empiricamente la seguente legge della domanda: $f(P) = \begin{cases} 1000 - 60 \cdot P & se\ P \ge 10 \\ 800 - 40 \cdot P & se\ 0 < P < 10 \end{cases}$. Determinare il prezzo di vendita che massimizza l'utile e lo stesso utile. [€ 8,31; ≈ € 3145,86]
141. Un'azienda produce un bene per il quale spende un fisso di € 500,00 e € 1,40 per unità di prodotto. Il bene viene venduto a € 4,50. Si è stabilito che se si spendono in pubblicità € x per ogni unità prodotta, le vendite sono di circa 20000x unità. Stabilire quanto spendere in pubblicità unitaria per massimizzare il profitto e quanto vale tale profitto. [€ 1,55; € 47550,00]
142. Un'azienda produttrice di cioccolatini, da un indagine di mercato determina la legge della domanda del numero Q di confezioni da 10 scatole di cioccolatini rispetto al prezzo P di vendita, espresso in euro, come segue: $Q = 75 - P$. Tenuto conto che le sue spese sono formate da un fisso di € 15,00 e da € 3,00 per ogni confezione da 10 scatole, determinare il prezzo ottimale per ottenere il massimo guadagno. [€ 39,00]
143. Un'azienda produttrice di penne, da un indagine di mercato determina in $Q = 1200 - 4 \cdot P$, la legge della domanda del numero di confezioni Q da 1000 penne rispetto al prezzo di vendita, espresso in

euro. Tenuto conto che le sue spese sono formate da un fisso di € 250,00 e da € 4,00 per ogni confezione, determinare qual è il massimo numero di penne che gli conviene produrre per ottenere il massimo guadagno. [592000]

144. Un fornaio produce dei biscotti particolarmente curati e costosi. La sua ventennale esperienza gli ha permesso di determinare la seguente legge della domanda mensile di biscotti in relazione al prezzo di vendita, espresso in euro: $Q = 140 - 3 \cdot P$. Se le spese sono date da un fisso di € 40,00 e da € 1,00 per ogni chilogrammo di biscotti, determinare qual è il massimo numero di chili di biscotti che gli conviene produrre per ottenere il massimo guadagno. [24]

145. Un industria dolciaria ha determinato la seguente legge della domanda di dolci in relazione al prezzo di vendita per quintale, espresso in euro: $Q = 3500 - 8 \cdot P$. Sappiamo che le spese sono formate da un fisso di € 475,00 e da € 5,00 per ogni quintale di dolci. Determinare il prezzo a cui vendere un quintale di dolci per ottenere il massimo guadagno. [€ 221,25]

Lavoriamo insieme

Fra i rettangoli che hanno un dato perimetro, quali di essi hanno la massima area?
Indichiamo con $2p$ la misura del perimetro comune, con x e y le lunghezze dei lati. Abbiamo $2x + 2y = 2p$, quindi $y = p - x$. L'area di un rettangolo di lati lunghi x e $p - x$ è $x \cdot (p - x)$. Dobbiamo quindi trovare il valore massimo della funzione $f(x) = -x^2 + px$, cioè di una parabola che volge la concavità verso il basso, che sappiamo coincide con l'ascissa del vertice, ossia con $x = p/2$, da cui $y = p - p/2 = p/2$. Abbiamo così provato che il massimo si ha se il rettangolo è un quadrato, fatto abbastanza intuitivo.

Livello 2

146. Fra tutti i rettangoli di data area, a^2, determinare quello di minimo perimetro. [Quadrato]

147. Determinare la coppia di numeri positivi aventi la stessa somma s, che ha il prodotto massimo. [$(s/2; s/2)$]

148. Determinare la coppia di numeri positivi aventi la stessa differenza d, che ha il prodotto minimo. [$(d/2; d/2)$]

Fasci di parabole

Essendo già noto il concetto di fascio di coniche, iniziamo subito con una definizione e proseguiamo con alcuni esempi.

Definizione 5

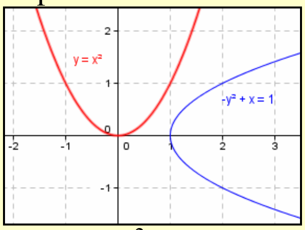
Date due parabole reali di equazioni $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ e un parametro reale k, diciamo **fascio di parabole generato dalle due parabole,** la totalità dei punti del piano che verificano l'equazione $f(x, y)+k\cdot g(x, y)=0$, nonché la parabola $g(x, y) = 0$.

Definizione 6

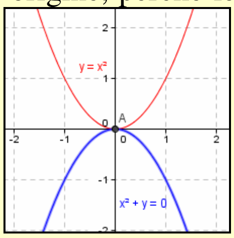
Gli eventuali punti comuni a tutte le parabole di un fascio si chiamano **punti base del fascio**.

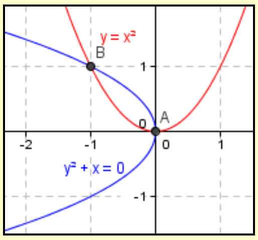
Esempio 13

- Il fascio di parabole di equazione $(x^2 – y) + k \cdot (y^2 – x + 1) = 0$ non ha punti base perché le parabole generatrici, come mostrato nel grafico, o come può vedersi risolvendo un sistema, non hanno punti in comune.

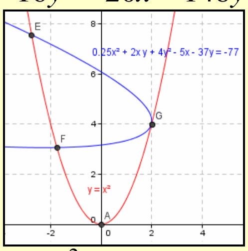


- Il fascio di parabole di equazione $(x^2 – y) + k \cdot (x^2 + y) = 0$ ha come punto base solo l'origine, perché le parabole generatrici sono tangenti nel loro vertice

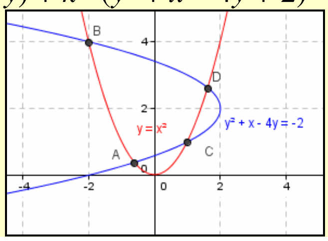




- Il fascio di parabole di equazione $(x^2 – y) + k \cdot (y^2 + x) = 0$ ha due punti base
- Il fascio di parabole $(x^2– y) + k \cdot (x^2 + 8xy + 16y^2 – 20x – 148y + 308) = 0$ ha tre punti base



- Il fascio di parabole di equazione $(x^2 – y) + k \cdot (y^2 + x – 4y + 2) = 0$ ha quattro punti base



Verifiche

Lavoriamo insieme

Determinare i punti base del fascio di parabole di equazione: $y = (k - 3)x^2 + 3 \cdot (2k + 1)x - k + 4$.
Raccogliamo il parametro k: $y = (x^2 + 6x - 1)k - 3x^2 + 3x + 4$, a questo punto annulliamo il coefficiente di k: $x^2+6x-1=0 \Rightarrow x=-3\pm\sqrt{9+1}=-3\pm\sqrt{10}$. Queste sono le ascisse dei due punti base reali del fascio, sostituiamo per determinare le relative ordinate:

$$y=-3x^2+3x+4 \Rightarrow y=-3\cdot\left(-3\pm\sqrt{10}\right)^2+3\cdot\left(-3\pm\sqrt{10}\right)+4 \Rightarrow$$

$$y=-3\cdot\left(9+10\mp6\cdot\sqrt{10}\right)-9\pm3\cdot\sqrt{10}+4=-57\pm18\cdot\sqrt{10}-5\pm3\cdot\sqrt{10}=-62\pm21\cdot\sqrt{10}$$

Pertanto i punti base sono: $\left(-3\pm\sqrt{10},\ -62\pm21\cdot\sqrt{10}\right)$.

Nei seguenti fasci di parabole determinare i valori del parametro reale k per i quali si hanno parabole: a) che degenerano in rette; b) passanti per un punto dato P; c) con un vertice V di cui è nota una sola coordinata; d) con un fuoco F di cui è nota una sola coordinata; e) trovare infine gli eventuali punti base reali del fascio

Livello 2

1. $x = (3k + 1) \cdot y^2 - 3 \cdot (k + 1) \cdot y - k + 1$; $P \equiv (2; -1)$; $V \equiv (x; -3)$; $F \equiv (-3; y)$
$$\left[\text{a) } k=-\frac{1}{3};\ \text{b) } k=-\frac{3}{5};\text{c) } k=-\frac{3}{7};\ \text{d) } k=\frac{13\pm\sqrt{337}}{21};\ \text{e) }\left(\frac{1\pm\sqrt{21}}{3};\frac{3\mp\sqrt{21}}{6}\right)\right]$$

2. $y = (3k - 1) \cdot x^2 + 2 \cdot (k - 1) \cdot x - k$; $P \equiv (0; 1)$; $V \equiv (0; y)$; $F \equiv (x; 1)$
$$\left[\text{a) } k=\frac{1}{3};\ \text{b) } k=-1;\text{c) } k=1;\ \text{d) } k=\pm\frac{1}{4};\ \text{e) }\left(\frac{1}{3};-\frac{7}{9}\right),(-1;1)\right]$$

3. $y = (2k - 1) \cdot x^2 + 5 \cdot (k + 1) \cdot x - k + 2$; $P \equiv (3; 0)$; $V \equiv (x; 3)$; $F \equiv (x; 8)$
$$\left[\text{a) } k=\frac{1}{2};\ \text{b) } k=-\frac{1}{4};\text{c) } k=-\frac{7}{11}\vee k=-1;\ \text{d) } k=-\frac{94}{3}\vee k=0;\ \text{e) }\left(\frac{-5\pm\sqrt{33}}{4};\frac{-63\mp15\cdot\sqrt{33}}{8}\right)\right]$$

4. $x = (5k + 3) \cdot y^2 - 3 \cdot (k + 2) \cdot y - k + 1$; $P \equiv (-2; 1)$; $V \equiv (-2 ; y)$; $F \equiv (3; y)$
$$\left[\text{a) } k=-\frac{3}{5};\ \text{b) } k=0;\text{c) } k=\frac{12}{9}\vee k=0;\ \text{d) } k=-\frac{59}{29}\vee k=-1;\ \text{e) }\left(\frac{17\pm21\cdot\sqrt{29}}{50};\frac{3\mp\sqrt{29}}{10}\right)\right]$$

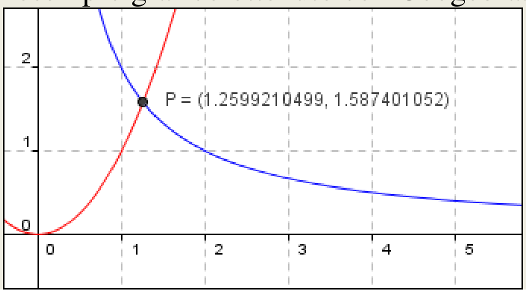
5. $y = (3k - 4) \cdot x^2 + 7 \cdot (k - 1) \cdot x - 3k + 5$; $P \equiv (3; 1)$; $V \equiv (-2; y)$; $F \equiv (x; -7)$
$$\left[\text{a) } k=\frac{4}{3};\ \text{b) } k=\frac{53}{45};\text{c) } k=\frac{9}{5};\ \text{d) } k=\frac{24}{17}\vee k=2;\ \text{e) }\left(\frac{-7\pm\sqrt{85}}{6};\frac{-31\mp7\cdot\sqrt{85}}{18}\right)\right]$$

6. $x = (8k - 3) \cdot y^2 + 6 \cdot (k - 7) \cdot y - k + 2$; $P \equiv (1; 1)$; $V \equiv (x; 2)$; $F\equiv\left(-\frac{255}{4};y\right)$
$$\left[\text{a) } k=\frac{3}{8};\ \text{b) } k=\frac{44}{13};\text{c) } k=\frac{27}{19};\ \text{d) } k=1\vee k=\frac{638}{17};\ \text{e) }\left(\frac{529\pm159\cdot\sqrt{17}}{32};\frac{-3\mp\sqrt{17}}{8}\right)\right]$$

Intervallo matematico

Abbiamo già visto nell'unità precedente due dei tre problemi classici della geometria euclidea: la trisezione dell'angolo e la quadratura del cerchio. In questa scheda vogliamo considerare il terzo problema: la duplicazione del cubo. Tale problema è stato associato a diverse leggende, varianti di poco fra loro, ma tutte con la stessa conclusione. Vediamo una di queste *versioni*. Durante una terribile peste, gli abitanti di Atene si recarono dall'oracolo chiedendo di sapere cosa doveva farsi affinché la peste fosse debellata. L'oracolo rispose che si doveva raddoppiare l'altare dedicato al dio, che era di forma cubica. I cittadini pensarono che ciò equivalesse a raddoppiare il lato dell'altare, ma la peste non cessò. Infatti questo procedimento fornisce un cubo che è $2^3 = 8$ volte il volume del cubo iniziale, mentre il cubo da costruirsi doveva avere il lato $\sqrt[3]{2}$ volte la misura iniziale. Perciò questo problema equivale a costruire un segmento che misuri $\sqrt[3]{2}$.
Il problema non è risolvibile con il solo uso di riga e compasso. Vediamo un procedimento che usa le coniche, che, tranne la circonferenza, sappiamo non essere costruibili elementarmente.
Esso è dovuto a Menecmo, che abbiamo già visto nella scheda storica come uno dei primi a interessarsi delle coniche. Menecmo osservò che intersecando una parabola e un'iperbole il problema era risolto.
Ricordiamo che Menecmo non conosceva la geometria analitica. Noi mostriamo la procedura invece usando tale strumento. Siano infatti la parabola di equazione $y = x^2$e l'iperbole equilatera di equazione $xy = 2$. Determiniamo le loro intersezioni: $\begin{cases} y = x^2 \\ xy = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt[3]{4} \\ x = \sqrt[3]{2} \end{cases}$

Pertanto le due curve hanno in comune il punto $P \equiv \left(\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{4}\right)$e l'ascissa del punto P ci fornisce il valore cercato. Di seguito proponiamo un esempio grafico ottenuto con Geogebra.



L'angolo di Derive

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%204/4-5/4-5-1.exe puoi vedere un'applicazione che riguarda come con Derive possiamo risolvere diversi problemi sulla parabola.
Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%204/4-5/4-5-1.dfw ti scarichi il relativo file Derive.

L'angolo di Geogebra

Clicca su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%204/4-5/4-5-2.exe per vedere come usare Geogebra pe rlo studio delle parabole. Mentre su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Terzo%20volume/Capitolo%204/4-5/4-5-2.ggb scarichi il relativo file Geogebra.

L'angolo della MateFisica

Galileo ha mostrato che la legge del moto uniformemente accelerato è $s(t) = s_0 + v_0 t + 1/2at^2$, in cui s è lo spazio percorso nel tempo t, s_0 è l'eventuale spazio che il corpo ha già percorso prima dell'inizio dell'osservazione, v_0 è l'eventuale velocità iniziale che il corpo ha all'inizio dell'osservazione, a è l'accelerazione costante del corpo. Se sostituiamo s con y e t con x, l'equazione è proprio quella di una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle y. Quindi possiamo usare le proprietà trovate per risolvere semplici problemi di cinematica.

Per esempio lanciamo da un'altezza di 3 metri dal suolo un corpo verso l'alto con una velocità iniziale di 2 m/s. Sappiamo che nel luogo dell'esperienza l'accelerazione di gravità è 9.8 m/s^2, vogliamo trovare la massima altezza raggiunta. La legge in questo caso è $s = 3 + 2 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot t^2 \Rightarrow s = -4.9t^2 + 2t + 3$, il segno meno è giustificato dal fatto che l'accelerazione di gravità, in questo caso ostacola il movimento del corpo verso l'alto. Determinare la massima altezza equivale a determinare l'ordinata del vertice, la cui ascissa è invece il tempo necessario a raggiungere tale altezza. Si ha così: $V \equiv \left(\frac{4 \cdot (-4.9) \cdot 3 - 2^2}{4 \cdot (-4.9)}; -\frac{2}{2 \cdot (-4.9)} \right) \approx (3,2;\ 0,2)$. Quindi il corpo raggiunge un'altezza complessiva rispetto al suolo di 3,2 m in 0,2 secondi. In pratica in questo breve intervallo di tempo riesce a percorrere solo 0,2 metri verso l'alto prima di ricadere. Dopo quanto tempo toccherà il suolo? In questo caso vogliamo sapere quanto vale l'ascissa quando l'ordinata è nulla. Dobbiamo quindi risolvere l'equazione $-4.9t^2 + 2t + 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 14.7}}{-4.9} = \frac{-1 \pm \sqrt{15.7}}{-4.9} \prec \begin{matrix} \approx -0,6 \\ \approx 1,01 \end{matrix}$. Naturalmente non accettiamo la soluzione negativa, fisicamente inaccettabile. Il suolo è perciò toccato dopo circa 1,01 secondi dal lancio.

Attività

1. Il moto di un sasso lanciato verso l'alto è uniformemente accelerato con velocità iniziale $v_0 = 5$ m/s; su di esso agisce, contraria al moto, l'accelerazione di gravità $g = -9,8$ m/s^2. Determinare la massima altezza raggiunta dal sasso, tenuto conto che viene lanciato a un'altezza pari a 1 m dal suolo. [≈ 2,28m]
2. Dopo quanti secondi il sasso dell'esercizio precedente raggiunge la massima altezza? Dopo quanti secondi raggiunge il suolo? [≈ 0,51s ; ≈ 1,19s]
3. Con riferimento al problema 1, quanto deve essere la velocità iniziale affinché la massima altezza raggiunta sia 10 m? In questo caso dopo quanti secondi il sasso raggiungerà il suolo? [≈ 13,28m/s; ≈ 1,36s]
4. Lanciamo un oggetto verso l'alto con una velocità iniziale di 3m/s e da un'altezza di 7 m dal suolo. Trascurando le forze di attrito e ogni altra forza *perturbatrice*, determinare la massima altezza raggiunta e il tempo necessario a raggiungerla, dal momento del lancio. [7,4 m; ≈0,3 s]
5. Un sasso è lanciato verso l'alto con velocità iniziale $v_0 = 8$ m/s, su di esso agisce, contraria al moto, l'accelerazione di gravità g. Sapendo che la massima altezza raggiunta dal sasso è 4 m e che il sasso è lanciato a un'altezza pari a 1 m dal suolo, determinare il valore dell'accelerazione di gravità nel posto in cui avviene l'esperienza. [≈ – 10,66 m/s^2]
6. Un sasso è lanciato verso l'alto con velocità iniziale $v_0 = 12$ m/s, su di esso agisce, contraria al moto, l'accelerazione di gravità g. Sapendo che raggiunge la massima altezza dopo 1,2 s, determinare il valore dell'accelerazione di gravità nel posto in cui avviene l'esperienza. [–10 m/s^2]
7. Un oggetto viene lanciato percorrendo una traiettoria parabolica il cui massimo è 16 m, sapendo che la distanza fra il punto di lancio e quello in cui ripassa per la stessa quota di lancio è 40m, determinare l'altezza raggiunta dall'oggetto quando si trovava a 5m dal punto di massima altezza. *Suggerimento*: scegliere un opportuno sistema di riferimento cartesiano per descrivere la traiettoria. [15m]

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi

1. Una parabola può essere spezzata in due rette parallele? E in due rette incidenti? E in due rette immaginarie? Giustificare le risposte. [Sì; no; sì]
2. Una dilatazione trasforma una parabola canonica in una parabola canonica dello stesso tipo? Giustificare la risposta. [Sì]
3. Un'omotetia trasforma una parabola canonica in una parabola canonica dello stesso tipo? Giustificare la risposta. [Sì]
4. Una similitudine trasforma una parabola canonica in una parabola canonica dello stesso tipo? Giustificare la risposta. [No, vedi esercizi precedenti]
5. Un'affinità trasforma una parabola canonica in una parabola canonica dello stesso tipo? Giustificare la risposta. [No, vedi esercizi precedenti]
6. L'omotetia di centro $C \equiv (a; -a^2)$ e rapporto $k = 1/2$, trasforma la parabola di equazione $y = x^2$ in che tipo di parabola? [Passante per l'origine, qualunque sia il valore di a]
7. Con riferimento all'esercizio precedente, per quali valori di a il vertice della parabola trasformata appartiene al terzo quadrante? Per quali al II quadrante? [$a < 0$; nessuno]
8. Quanti punti a coordinate entrambe intere appartengono alla regione delimitata dal semiasse positivo delle ascisse, dalla retta parallela all'asse y passante per i punti di ascissa 4 e dalla parabola di equazione $y = x^2$? Escludere dal conteggio i punti sul bordo della regione. [26]
9. Cosa accade se il fuoco appartiene alla direttrice?
[La parabola si spezza nell'asse di simmetria contato due volte]
10. Verificare la validità del seguente teorema: *la tangente alla parabola di equazione $y = x^2$, in un suo punto P diverso da O, interseca l'asse x nel punto simmetrico rispetto a O, della proiezione ortogonale di P sull'asse x.*
11. Sia la parabola di equazione $x = y^2$, e $P \equiv (x_P; y_P)$, $Q \equiv (x_Q; y_Q)$ due suoi punti, determinare le coordinate dell'intersezione delle tangenti alla parabola per P e Q. $\left[\left(y_P y_Q; \dfrac{y_P + y_Q}{2}\right)\right]$
12. Tenuto conto del problema precedente, determinare una relazione fra l'area di un triangolo i cui vertici A, B, C appartengono alla parabola e quella del triangolo i cui lati sono tangenti alla parabola negli stessi punti. [La prima è doppia della seconda]

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato agli esami di Liceo scientifico suppletiva dell'a.s. 1973/74.
Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = ax^2 + bx + c$ in modo che la parabola da essa rappresentata sia tangente alle tre rette rispettivamente di equazione: $2x + y - 3 = 0$, $4x - y - 12 = 0$, $y = 0$. *Detti A, B, C i rispettivi punti di contatto si determini sull'arco ACB il punto P tale che risulti massima l'area del triangolo APB*.
Imponiamo le condizioni di tangenza con ciascuna delle 3 rette:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ 4x - y - 12 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 - 2x = ax^2 + bx + c \\ y = 3 - 2x \end{cases}; \quad \begin{cases} 4x - 12 = ax^2 + bx + c \\ y = 4x - 12 \end{cases}; \quad \begin{cases} 0 = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases}$$

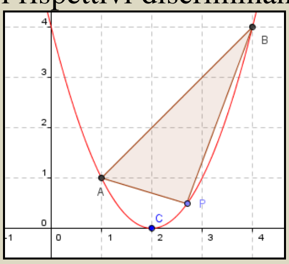
Consideriamo le equazioni risolutive: $ax^2 + (b + 2)\,x + c - 3 = 0$; $ax^2 + (b - 4)\,x + c + 12 = 0$; $ax^2 + bx + c = 0$
Imponiamo la condizione di tangenza, ossia che i discriminanti siano nulli:
$(b + 2)^2 - 4a\cdot (c - 3) = 0$; $(b - 4)^2 - 4a\cdot (c + 12) = 0$; $b^2 - 4ac = 0$. Ecco quindi il sistema risolvente:

$$\begin{cases} b^2 + 4b + 4 - 4ac + 12a = 0 \\ b^2 - 8b + 16 - 4ac - 48a = 0 \\ b^2 - 4ac = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4b + 4 + 12a = 0 \\ -8b + 16 - 48a = 0 \\ b^2 - 4ac = 0 \end{cases}.$$

Nella prima e seconda equazione abbiamo eliminato $b^2 - 4ac$, poiché per la terza equazione tale espressione è nulla. Continuiamo nella risoluzione:

$$\begin{cases} b + 1 + 3a = 0 \\ b - 2 + 6a = 0 \\ b^2 - 4ac = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 - 3a \\ -1 - 3a - 2 + 6a = 0 \\ b^2 - 4ac = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 - 3a \\ 3a = 3 \\ b^2 - 4ac = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -4 \\ a = 1 \\ 16 - 4c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -4 \\ a = 1 \\ c = 4 \end{cases}$$

Quindi la parabola cercata ha equazione: $y = x^2 - 4x + 4$. Determiniamo adesso le coordinate dei punti di tangenza: $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 4 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}; \begin{cases} y = x^2 - 4x + 4 \\ x^2 - 8x + 16 = 0 \end{cases}; \begin{cases} y = x^2 - 4x + 4 \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 - 4x + 4 \\ (x - 1)^2 = 0 \end{cases}; \begin{cases} y = x^2 - 4x + 4 \\ (x - 4)^2 = 0 \end{cases};$

$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 4 \\ (x - 2)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = 4 \\ x = 4 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \end{cases}$. Come c'era da attendersi abbiamo ottenuto dei trinomi quadrati di binomio, dato che i rispettivi discriminanti sono nulli. Abbiamo: $A \equiv (1; 1)$; B $(4; 4)$; $C \equiv (2; 0)$. Visualizziamo la situazione. 

Con P abbiamo indicato un generico punto sull'arco ABC, in modo da costruire il triangolo tratteggiato ABP, dobbiamo stabilire per quale valore di P il detto triangolo ha la massima area. P appartiene alla parabola ha quindi coordinate che ne verificano l'equazione, detta perciò x la sua generica ascissa, con $1 < x < 4$, la sua ordinata è $x^2 - 4x + 4$. Troviamo l'area del generico triangolo ABP. $\frac{1}{2}\cdot abs\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ x & x^2 - 4x + 4 & 1 \end{vmatrix}\right) = \frac{1}{2}\cdot abs\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ x & x^2 - 4x + 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \\ x & x^2 - 4x + 4 \end{matrix}\right) =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| 4 + x + 4x^2 - 16x + 16 - 4x - x^2 + 4x - 4 - 4 \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| 3x^2 - 15x + 12 \right| = \frac{3}{2} \cdot \left| x^2 - 5x + 4 \right|$$

Abbiamo messo il valore assoluto perché l'area deve essere positiva. Abbiamo ottenuto un'espressione variabile che potrebbe essere anche negativa. Vediamo se e quando accade ciò. $x^2 - 5x + 4 > 0$, il trinomio si annulla per $x = 1$ e $x = 4$, quindi è positivo per $x < 1$ o $x > 4$, dato che noi consideriamo invece valori di x tali che $1 < x < 4$, in questo intervallo l'espressione è negativa, possiamo perciò eliminare il valore assoluto cambiando i segni del trinomio. La generica area quindi è: $f(x) = 3/2 \cdot (-x^2 + 5x - 4)$, che rappresenta una parabola che volge la concavità verso il basso, perciò il suo massimo è l'ordinata del vertice, cioè 1/4.

1. (Liceo scientifico 1971/72) Si scriva l'equazione della circonferenza passante per i punti $A \equiv (-2; 0)$, $B \equiv (4; 0)$ e avente il centro sulla retta $y = 4$ e si calcolino le coordinate degli estremi del diametro parallelo all'asse delle x. Si determinino poi i coefficienti dell'equazione $y = ax^2 + bx + c$, in modo che le parabole da essa rappresentate abbiano in comune il punto $C \equiv (0; 4)$ e siano tangenti all'asse delle ascisse. Tra queste parabole si trovino quelle che passano per l'uno o per l'altro degli estremi del diametro suddetto. [$x^2 + y^2 - 2x - 8y - 8 = 0$, $(-4; 4)$; $(6; 4)$ $y = x^2 + 4x + 4$; $y = 4/9x^2 - 8/3x + 4$]
2. (Liceo scientifico sup.1971/72) Date le due parabole rappresentate dalle equazioni $y = x^2 - 7x + 12$, $y = 4x^2 - 25x + 36$, si determinino: le coordinate dei punti comuni; [$(2; 2)$, $(4; 0)$] le equazioni delle tangenti comuni e le coordinate dei punti di contatto.
[$y = 3x - 13$, $y = -5x + 11$; $(5; 2)$, $(7/2; -5/2)$; $(1; 6)$, $(5/2; -3/2)$]
3. (Liceo scientifico suppletiva 1972/73) In un riferimento cartesiano ortogonale xOy siano date la parabola di equazione $y = -2/3x^2 + 27/8$ e la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2ky = 0$, essendo k un parametro reale. Delle predette circonferenze si consideri quella che risulta tangente alla parabola e appartiene al semipiano $y \geq 0$. Si scrivano le equazioni delle rette tangenti comuni alla parabola stessa e alla circonferenza, e si dica qual è l'ampiezza dell'angolo formato dalle due tangenti.
$$\left[x^2 + y^2 - 3y = 0; y = \pm\sqrt{3}x + \frac{9}{2}; 60° \right]$$
4. (Liceo scientifico suppletiva 1975/76) In un sistema di assi cartesiani si considerino le parabole rappresentate dalle equazioni: $y = ax^2 - 2x + 2$, $y = 2ax^2 - 2x + 1$, si esprima, mediante il valore del parametro reale a, la distanza tra i due vertici. $\left[\frac{\sqrt{2a^2 - 2a + 1}}{\left|\sqrt{2}a\right|} \right]$
5. (Liceo scientifico suppletiva 1975/76) In un sistema di assi cartesiani si determinino l'equazione della circonferenza e quella della parabola con asse parallelo all'asse y passanti per i punti (0;1), (1;0),(–1;0).
[$x^2 + y^2 = 1$, $y = -x^2 + 1$]
6. (Liceo scientifico 1976/77) In un sistema di assi coordinati cartesiani si considerino le parabole rappresentate dalle equazioni: $y = 3x - x^2$, $y = x^2 - 2x$. Nella regione finita di piano delimitata dalle due curve si esprima l'area del triangolo avente un vertice nel punto comune alle due curve diverso dall'origine e il lato sulla retta di equazione $x = k$, mediante k. $\left[A(k) = k^3 - 5k^2 + \frac{25}{4}k \right]$
7. (Liceo scientifico suppletiva 1976/77) Date le parabole del tipo $y = -1/4x^2 + c$, con $c > 0$ si esprima, mediante c, la distanza di un loro generico punto P dall'origine O degli assi cartesiani di riferimento.
$$\left[f(c) = \frac{1}{16}x^4 + \frac{2-c}{2}x^2 + c^2 \right]$$
8. (Liceo scientifico 1977/78) In un sistema di assi coordinati cartesiani si considerino le parabole rispettivamente di equazione: C′) $y = 2x - x^2$, C′′) $y = x - x^2$. Nella regione finita di piano delimitata dalle due curve si conducano: la retta di equazione $y = k$, con $k > 1/4$ sulla quale C' intercetta la corda AB; la retta tangente a C'' nel suo vertice, sulla quale la stessa C' intercetta la corda CD. Si determinino, in funzione di k, le misure delle corde AB e CD. $\left[\overline{AB} = \sqrt{1-2k}, \overline{CD} = \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$
9. (Liceo scientifico suppletiva 1977/78) In un sistema di assi coordinati si considerino: la parabola di equazione $y = 2x - x^2$ che incontra l'asse delle ascisse nei punti O e C; la retta di equazione $y = k$ (con

$0 < k < 1$) che incontra la parabola nei punti A e B. Si esprima, mediante il parametro k, il volume del solido generato dal trapezio $OABC$ in una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse.

$$\left[V(k)=\frac{2}{3}\pi k^2\cdot\left(1+2\cdot\sqrt{1-k}\right)\right]$$

10. (Liceo scientifico 1977/78) Tra le parabole di equazione $y = 1/2x^2 - 3x + k$, si individui quella sulla quale la retta di equazione $2y = x + 2$ intercetta una corda AB lunga $l=\frac{5}{2}\cdot\sqrt{5}$. Condotte in A e in B le rette tangenti alla parabola trovata, si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dall'arco di parabola AB e dalle due tangenti. [$k = 4$; $S = 125/4$]
11. (Liceo scientifico suppletiva 1977/78) In un sistema di assi coordinati si considerino $O \equiv (0; 0)$ e $A \equiv (2; 2)$ e la circonferenza avente per diametro OA. Si determinino i coefficienti della funzione $y = ax^2 + bx + c$ in modo che la parabola che la rappresenta passi per i due punti dati e abbia in A come tangente la retta tangente alla circonferenza. Si calcolino le aree delle due regioni finite di piano delimitate dalle due curve. [$y = -x^2 + 3x$; $S_{1,2} = \pi \pm 4/3$]
12. (Liceo scientifico 1978/79) Data in un sistema di assi cartesiani ortogonali la parabola di equazione $y = x^2 + 2x + 1$, determinare l'area del triangolo formato dalla retta tangente alla curva e dagli assi stessi. $\left[S(h)=\frac{h^3-h^2-h+1}{4}\right]$
13. (Liceo scientifico 1978/79) Data la funzione $y=x^2+\frac{1}{x^2}$, si scrivano l'equazione della parabola avente come asse l'asse delle ordinate, vertice nel punto (0; 1) e tangente alla curva e quella della parabola a questa simmetrica rispetto alla congiungente i due punti di contatto. [$y = 3/4x^2 + 1$; $y = -3/4x^2 + 4$]
14. (Liceo scientifico 1979/80) In un sistema di assi coordinati cartesiani si consideri la parabola di equazione $y=x^2+\sqrt{3}\cdot x+1$. Condotte per l'origine O le due rete tangenti a essa, si scriva l'equazione della circonferenza passante per O e per i due punti di contatto e si calcolino le aree delle due regioni finite di piano delimitate dalle due curve. $\left[x^2+y^2-4y=0;2\pi+\frac{4}{3},2\pi-\frac{4}{3},\frac{3\cdot\sqrt{3}-2-\pi}{3}\right]$
15. (Liceo scientifico suppletiva 1979/80) Si scriva l'equazione della parabola α avente l'asse di simmetria parallelo all'asse delle y, passante per i punti P (0; 3), Q (2; 3) e il cui vertice V stia sulla parabola β di equazione $y = -x^2 + 3x$. Detto W l'ulteriore punto comune alle due curve, si scrivano l'equazione della retta tangente ad α in W e quella della retta tangente a β in V e si calcoli l'area del trapezio mistilineo delimitato da queste due rette e dalle due parabole. [α: $y = x^2 - 2x + 3$; $y = x + 3/4$; $y = x + 1$; 7/24]
16. (Liceo scientifico 1982/83) Una parabola passante per gli estremi di un diametro di una circonferenza di raggio r ha le tangenti in tali punti perpendicolari fra loro e l'asse del diametro come asse di simmetria. Si scrivano, in un sistema di assi cartesiani opportunamente scelto, le equazioni della parabola e della circonferenza e si calcolino le aree delle regioni finite di piano delimitate dalle due curve.

$$\left[y=\pm\frac{1}{2r}x^2\mp\frac{r}{2};\frac{3\pi\pm 4}{6}r^2\right]$$

Lavoriamo insieme

Il seguente problema è stato assegnato agli esami di Liceo scientifico PNI dell'a.s. 1993/94.

Si consideri la trasformazione T che muta i punti $A \equiv (1; 0)$, $B \equiv (0; 1)$, $C \equiv (-1; 0)$ di un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, rispettivamente nei punti $A' \equiv (0; 1)$, $B' \equiv (2; -1)$, $C' \equiv (0; -1)$. Si studi la natura di T e si determinino gli elementi che restano uniti nella trasformazione e il rapporto tra le aree dei triangoli corrispondenti ABC e $A'B'C'$.

Consideriamo una generica affinità: $T:\begin{cases}x'=ax+by+c\\y'=dx+ey+f\end{cases}$, per determinare i 6 parametri reali, determiniamo i trasformati di A, B e C e poniamo uguali ai dati A', B', C'. Abbiamo perciò: $T(1; 0) = (a + c; d + f) = (0; 1)$,

$T(0; 1) = (b + c; e + f) = (2; –1)$; $T(–1; 0) = (–a + c; –d + f) = (0; –1)$. Si ha:

$$\begin{cases} a+c=0 \\ d+f=1 \\ b+c=2 \\ e+f=-1 \\ -a+c=0 \\ -d+f=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-c \\ d=1-f \\ b=2-c \\ e=-1-f \\ c+c=0 \\ -1+f+f=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ d=1-f \\ b=2 \\ e=-1-f \\ c=0 \\ 2f=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ d=1 \\ b=2 \\ e=-1 \\ c=0 \\ f=0 \end{cases}$$. Quindi la trasformazione cercata ha leggi:

$T: \begin{cases} x'=2y \\ y'=x-y \end{cases}$, che è un'affinità di rapporto 2. Determiniamo adesso gli eventuali elementi uniti. Dobbiamo risolvere l'equazione $T(x; y) = (x; y)$, cioè il sistema: $\begin{cases} x=2y \\ y=x-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y \\ 2y=x \end{cases}$. Quindi tutti i punti della retta di equazione $x= 2y$ sono uniti. Il rapporto di affinità è già stato determinato, dato che ABC è più piccolo di $A'B'C'$, il loro rapporto sarà l'inverso, cioè 1/2. Il problema continua con altre richieste.

Detta K la circonferenza per i punti A, B, C e P la parabola di equazione $y = –2x^2 + 1$, si dimostri che i loro punti comuni sono vertici di un triangolo equilatero. Si considerino le figure K' e P' ottenute da K e P mediante la trasformazione T e la figura Q' ottenuta trasformando il quadrato Q, circoscritto a K e con i lati paralleli agli assi coordinati. Avvalendosi della trasformazione T si dica la natura di K', P' e Q' e si determinino: le coordinate dei punti in cui Q' è tangente a K'; le coordinate dei punti d'intersezione di K' è P'; l'area delle tre regioni finite di piano delimitate da K' e P'. Determiniamo la circonferenza per A, B, C:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 1^2+0^2 & 1 & 0 & 1 \\ 0^2+1^2 & 0 & 1 & 1 \\ (-1)^2+0^2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{R_2+R_4} \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \xrightarrow{C_1-C_4}$$

$$\xrightarrow{C_2-C_4} \begin{vmatrix} x^2+y^2-1 & x & y & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(x^2+y^2-1\right) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x^2+y^2-1=0$$

I vertici comuni alle due coniche sono:

$$\begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ y=-2x^2+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ x^2=\frac{1-y}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1-y}{2}+y^2-1=0 \\ x^2=\frac{1-y}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y^2-y-1=0 \\ x^2=\frac{1-y}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4} \\ x^2=\frac{1-y}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y=-\frac{1}{2} \\ x^2=\frac{1+\frac{1}{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=0 \end{cases} \vee \begin{cases} y=-\frac{1}{2} \\ x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

La verifica che i tre punti sono vertici di un triangolo equilatero è per esercizio.

Per determinare i trasformati delle coniche consideriamo l'affinità inversa: $T^{-1}: \begin{cases} y=\frac{x'}{2} \\ x=y'+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{x'}{2} \\ x=y'+\frac{x'}{2} \end{cases}$

Quindi le coniche trasformate sono:

$x^2 + y^2 – 1 = 0 \xrightarrow{T} \left(y+\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2-1=0 \Rightarrow y^2 + xy + \frac{x^2}{4}+\frac{x^2}{4} = 0 \Rightarrow \Rightarrow x^2 + 2y^2 + 2xy = 0;$

$y = – 2x^2 + 1 \xrightarrow{T} \frac{x}{2}=-2\cdot\left(y+\frac{x}{2}\right)^2+1 \Rightarrow \frac{x}{2}+2y^2+2xy+\frac{x^2}{2}-1=0 \Rightarrow x^2 + 4y^2 + 4xy + x – 2 = 0.$

17. (Liceo scientifico suppletiva 1982/83) Sulla semiretta asse di simmetria di una parabola assegnata si fissi un punto Q. Si determinino, in un sistema di assi cartesiani opportunamente scelto, si esprima il quadrato della distanza di un punto P della parabola da Q. $[f(x) = a^2x^4 + (1 - 2ab)\, x^2 + b^2,\ a, b\in\mathbb{R}]$
18. (Liceo scientifico suppletiva 1983/84) Si considerino le parabole di equazioni $y = x^2/2$, $y^2 = - x + a^2$. Nella regione finita di piano compresa fra le due curve e l'asse delle ascisse si inscriva il rettangolo con i lati paralleli agli assi coordinati, si determini il volume del cilindro ottenuto in una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse del predetto rettangolo, in funzione della retta di equazione $y = h$. $[V(h) = \pi\, (-3h^4 + a^2h^2)]$
19. (Liceo scientifico 1984/85) In un sistema di assi coordinati cartesiani si consideri la parabola di equazione $y = 3x - x^2$. Si scrivano l'equazione della parabola a essa simmetrica rispetto all'asse delle ordinate e le equazioni delle due parabole a esse simmetriche rispetto alla retta congiungente i loro vertici. Si trovi il perimetro del quadrato in essa inscritto con i lati tangenti alle parabole stesse. $$\left[y=-3x-x^2,\ y=x^2-3x+\frac{9}{2},\ y=x^2+3x+\frac{9}{2}, 5\cdot\sqrt{2}\right]$$
20. (Liceo scientifico PNI 1989/90) In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy è assegnata la parabola di equazione $y = x^2 - x + 6$. Siano P un suo punto, H la proiezione di P sull'asse delle ascisse, P' e H' rispettivamente i simmetrici di P e H rispetto all'asse delle ordinate. Esprimere in funzione dell'ascissa x di P il semiperimetro p del rettangolo $PP'H'H$. $[p = 2 \cdot |x| + |x^2 + x - 6|]$
21. (Liceo scientifico 1991/92) Presi due vettori $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ non paralleli e con lo stesso punto di applicazione O, sia $\overrightarrow{OA}=2\cdot\vec{a}$ e $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Tracciare il vettore $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$ e congiungere O con C. Il punto P divida il segmento OC in due parti tali che $\overrightarrow{OP}=2\cdot\overrightarrow{PC}$. Dimostrare che i punti A, P e B sono allineati (è allo scopo sufficiente dimostrare che i due vettori $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{PB}$ sono multipli di uno stesso vettore. Posto $\vec{a}\perp\vec{b}$ e $\left|\vec{a}\right|=1$ e fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali di centro O con ascissa parallela ed equiversa ad $\vec{a}$ e ordinata parallela ed equiversa a $\vec{b}$, trovare $\left|\vec{b}\right|$ affinché i due segmenti OC e AB siano perpendicolari. Trovare, in questo caso, le due parabole con asse parallelo all'asse delle y e passanti rispettivamente la prima per O, P e A e la seconda per B, P e C. Verificare che le due parabole sono fra loro tangenti in P. $\left[\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2};\ y=\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2+x\right);\ y=\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}\cdot\left(x^2-x+\frac{2}{3}\right)\right]$
22. (Liceo scientifico PNI 1991/92) In un piano cartesiano ortogonale Oxy si considerino le parabole C e C' di equazione rispettivamente: $y = x^2$, $y^2 + 8x - 6y - 3 = 0$. Si verifichi che C e C' sono tangenti in $A \equiv (1; 1)$ e che hanno in comune un ulteriore punto B. Detto P un punto della retta AB sia QQ' la corda intercettata da C sulla parallela per P all'asse delle ascisse, RR' la corda intercettala da C' sulla parallela per P all'asse delle ordinate e S la proiezione di P sulla retta di equazione $y + 2 = 0$. Si determini: $\dfrac{8\cdot\overline{PS}^2}{\overline{QQ'}\cdot\overline{RR'}}$. $\left[\dfrac{\left(x_P+2\right)^2}{x_P}\right]$
23. (Liceo scientifico PNI 1994/95) In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy si consideri la parabola Γ di equazione $y = -1/2x^2 + 1/2x$ e sia P il punto di Γ di ascissa λ. Il candidato: a) scriva l'equazione della parabola passante per l'origine O e avente il vertice nel punto P; b) determini l'equazione della curva Σ, luogo geometrico del fuoco della parabola al variare di λ. $\left[\text{a) } y=\dfrac{\lambda-1}{2\lambda}x^2+\left(1-\lambda\right)x;\ \text{b) } \Sigma: \dfrac{x^2\cdot\left(2-x\right)}{2\cdot\left(x-1\right)}\right]$
24. (Liceo scientifico suppletiva 1994/95) È assegnata l'equazione: $y = ax^2 + bx + c$, dove i coefficienti a, b, c sono numeri reali non negativi. Determinare tali coefficienti sapendo che la parabola p, che rappresenta l'equazione in un piano cartesiano ortogonale Oxy, interseca l'asse x nei punti O, A e ha vertice nel punto V in modo che il triangolo OAV sia rettangolo. $[y = -ax^2 + 2x]$
25. (Liceo scientifico 1996/97) In un piano sono assegnate una circonferenza k di raggio di lunghezza nota r e una parabola p che seca k nei punti A e B e passa per il suo centro C. Inoltre l'asse di simmetria

della parabola è perpendicolare alla retta *AC* e la corda *AB* è lunga quanto il lato del triangolo equilatero inscritto in *k*. Dopo aver riferito il piano a un conveniente sistema di assi cartesiani *Oxy*: a) determinare l'equazione della parabola *p*; b) considerata la retta *t*, tangente alla parabola *p* e parallela alla retta *AB*, trovare la distanza delle rette *t* e *AB*. *Sugg*erimento: usare il sistema di riferimento in cui $O \equiv C$, *AC* è l'asse *x* e *B* sta nel II quadrante $\left[\text{a) } y = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \left(x^2 - x\right); \text{b) } \frac{9}{16}\right]$

26. (Liceo scientifico suppletiva 1996/97) Data l'equazione $y = ax^2 + bx + c$, rappresentata in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali da parabole con asse parallelo all'asse delle *y*, determinare, in funzione del coefficiente *a*, i coefficienti *b* e *c* che individuano la famiglia Γ delle parabole per i punti (1; 1) e (2; 0). Determinare il luogo dei vertici delle parabole della famiglia Γ.
$\left[b = 1 - 3a, c = 2a + 2, y = \frac{(x-2)^2}{3-2x}\right]$

27. (Liceo scientifico PNI 1996/97) In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy* siano dati la parabola γ: $y = x^2$, un suo punto *P* di ascissa $\lambda \neq 0$ e la parallela *r* per *P* all'asse *y*. Siano γ_1 e γ_2 le parabole con asse la retta *r*, vertice in *P* e stessa distanza focale di γ. Il candidato: a) scriva in funzione di λ le equazioni di γ_1 e γ_2, essendo γ_1 la parabola che incontra γ solo in *P*; b) scriva le equazioni delle trasformazioni che mutano γ in γ_1 e γ in γ_2; c) dica la natura di dette trasformazioni precisando se si tratta di trasformazioni dirette o inverse e se hanno elementi che si trasformano in se stessi; fissato $\lambda = 1$ e dette T, T_1, T_2 le rispettive intersezioni di γ, γ_1 e γ_2 con la retta di equazione $x - h = 0$, determini l'espressione $z = \frac{\overline{TT_1} + \overline{T_1T_2}}{\overline{TT_2}}$, in funzione di *h*. Si ricordi che distanza fuoco – direttrice per la parabola $y = ax^2 + bx + c$ è $\frac{1}{2 \cdot |a|}$.

$\left[\text{a) } \gamma_1: y = x^2 - 2\lambda x + 2\lambda^2, \gamma_2: y = -x^2 + 2\lambda x; \text{ b) } \begin{cases} x' = x + \lambda \\ y' = y + \lambda^2 \end{cases}; \begin{cases} x' = \lambda - x \\ y' = \lambda^2 - y \end{cases}; \text{ c) } z = \frac{1 + |h-1|}{|h|}\right]$

28. (Liceo scientifico 1998/99) In un piano α sono assegnate una circonferenza *k* di raggio di lunghezza data *r* e una parabola *p* passante per gli estremi *A*, *B* di un diametro di *k* e avente come asse di simmetria l'asse del segmento *AB*. Dopo aver riferito il piano α ad un conveniente sistema di assi cartesiani *Oxy*: a) determinare l'equazione della circonferenza *k*. Considerare $A \equiv (-r; 0)$, $B \equiv (r; 0)$. b) determinare l'equazione della parabola *p*; c) trovare le coordinate dei punti comuni a *k* e *p*.
$\left[\text{a) } x^2 + y^2 = r^2; \text{ b) } y = \pm\frac{2}{r}x^2 \mp 2r; \text{ c) } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r; \pm\frac{r}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \pm\frac{r}{2}\right)\right]$

29. (Liceo scientifico PNI 1998/99) In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali *Oxy* è data la parabola γ di equazione: $y = 1/2x^2 - x$. Siano *A* un punto dell'asse *x* di ascissa λ, con λ > 0, *B* il suo simmetrico rispetto a *O*, e *A*' e *B*' i punti della parabola le cui proiezioni ortogonali sull'asse *x* sono rispettivamente *A* e *B*. Il candidato: a) verifichi che le tangenti *a* e *b* alla parabola γ, rispettivamente in *A*' e *B*', si incontrano in un punto *E* dell'asse *y*; b) detti *C* e *D* i rispettivi punti di intersezione di *a* e con l'asse *x*, esprima in funzione di λ l'area del triangolo *CED*. $\left[\text{a) } E \equiv \left(0; -\frac{\lambda^2}{2}\right); \text{ b) } \frac{\lambda^5}{4 \cdot |\lambda^2 - 1|}\right]$

30. (Liceo scientifico 2000/2001) Considerato un qualunque triangolo *ABC*, siano *D* ed *E* due punti interni al lato *BC* tali che: $\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC}$. Siano poi *M* ed *N* i punti medi rispettivamente dei segmenti *AD* ed *AE*. a) Dimostrare che il quadrilatero *DENM* è la quarta parte del triangolo *ABC*. b) Ammesso che l'area del quadrilatero *DENM* sia $45/2a^2$, dove *a* è una lunghezza assegnata, e ammesso che l'angolo $A\hat{B}C$ sia acuto e si abbia inoltre: $\overline{AB} = 13a$, $\overline{BC} = 15a$, verificare che tale quadrilatero risulta essere un trapezio rettangolo. c) Dopo aver riferito il piano della figura, di cui al precedente punto b), ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della parabola, avente l'asse perpendicolare

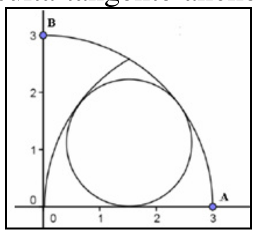
alla retta *BC* e passante per i punti *M*, *N*, *C*. Sia il sistema di riferimento in cui $O \equiv D$, $M \equiv (0; y)$, $y > 0$.
d) Calcolare, infine, le aree delle regioni in cui tale parabola divide il triangolo *ADC*.

[c) $y = -2/25x^2 + 1/5x + 6$; d) $135/8a^2$, $345/8a^2$]

31. (Liceo scientifico PNI 2006/07) Si determini l'equazione del luogo geometrico dei centri delle circonferenze del piano tangenti alla parabola $y = x^2 + 1$ nel punto (1; 2). [$y = -1/2x + 5/2$]

32. (Liceo scientifico 2010/2011) Si trovi il punto della curva $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate (4;0). $\left[\left(\frac{7}{2};\sqrt{\frac{7}{2}}\right)\right]$

33. (Liceo scientifico 2011/2012) Nel primo quadrante del sistema di riferimento *Oxy* sono assegnati l'arco di circonferenza di centro O e estremi $A \equiv (3, 0)$ e $B \equiv (0, 3)$ e l'arco *L* della parabola d'equazione $x^2 = 9 - 6y$, i cui estremi sono il punto *A* e il punto (0; 3/2). Si provi che l'arco *L* è il luogo geometrico descritto dai centri delle circonferenze tangenti internamente all'arco *AB* e all'asse *x*. Infine, tra le circonferenze di cui *L* è il luogo dei centri si determini quella che risulta tangente anche all'arco di circonferenza di centro *A* e raggio 3, come nella figura a lato.



34. (Liceo scientifico 2014/2015) Sul suo sito web un operatore telefonico ha pubblicato una mappa che rappresenta la copertura del segnale telefonico nella zona di tuo interesse. La zona è delimitata dalla curva passante per i punti A, B e C, dagli assi *x* e *y*, e dalla retta di equazione *x* = 6; la porzione etichettata con la "Z", rappresenta un'area non coperta dal segnale telefonico dell'operatore in questione. Rappresenta il margine superiore della zona con una funzione polinomiale di secondo grado, verificando che il suo grafico passi per i tre punti A, B e C. Sul sito web dell'operatore compare la seguente affermazione: "nella zona rappresentata nella mappa risulta coperto dal segnale il 96% del territorio"; verifica se effettivamente è così. [c) $y = -1/8x^2 + x + 2$; ≈ 97,6%]

35. (Liceo scientifico 2014/2015) Sia *f* la funzione, definita per tutti gli *x* reali, da $f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 + (x-5)^2$, determinare il minimo di *f*. [(3; 10)]

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
AMC = American Mathematical Contest
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
HSMC = A&M University High School Mathematics Contest

Lavoriamo insieme

Consideriamo un quesito assegnato nel 2003 agli HSMC.
Il cerchio di centro (0; 1) *e raggio* 1, *incontra la parabola di equazione* $y = ax^2$ *nell'origine. Vogliamo trovare tutti i valori reali di a per cui cerchio e parabola si incontrano solo nell'origine*.
Determiniamo le intersezione generiche delle due curve.

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2=1 \\ y=ax^2 \end{cases} \Rightarrow x^2+\left(ax^2-1\right)^2-1=0 \Rightarrow a^2x^4+(1-2a)\cdot x^2=0 \Rightarrow x^2=0 \vee x^2=\frac{2a-1}{a^2}$$

Dobbiamo imporre che la seconda equazione o non abbia soluzioni reali o abbia solo la soluzione nulla. Cioè deve essere $\frac{2a-1}{a^2} \le 0 \Rightarrow 2a-1 \le 0 \Rightarrow a \le \frac{1}{2}$.

1. (AHSME 1952) Per tracciare la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$, abbiamo costruito una tabella di valori, le cui ascisse differiscono per uno stesso valore, mentre le ordinate sono: 3844, 6969, 4096, 4227, 4356, 4489, 4624 e 4761. Quale di questi è certamente errato? [4227]
2. (AHSME 1954) In che relazione sono i grafici delle parabole $y = x^2 – 1/2x + 2$, $y = x^2 + 1/2x + 2$?
A) coincidono B) il primo grafico è più basso del secondo C) il primo grafico è più a sinistra del secondo D) il primo grafico è a destra del secondo E) il primo grafico è più in alto del secondo [D]
3. (AHSME 1957) Quanti punti reticolo appartengono alla regione limitata dall'asse x, dalla retta di equazione $x = 4$ e dalla parabola $y = x^2$? [35]
4. (AHSME 1969) Sapendo che i punti $P \equiv (1; y_1)$, $Q \equiv (–1, y_2)$ appartengono alla parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ e che $y_1 – y_2 = – 6$, determinare il valore di b. [–3]
5. (AHSME 1984) Per ogni numero reale t siano $V_t \equiv (x_t; y_t)$ le coordinate del vertice della parabola di equazione $y = ax^2 + tx + c$. Determinare l'equazione del luogo generato dai punti V_t. [$y = –ax^2 + c$]
6. (AHSME 1986) Sapendo che il vertice della parabola $y = ax^2 + bx + c$ è $V \equiv (4; 2)$ e $P \equiv (2; 0)$ appartiene alla parabola, determinare abc. [12]
7. (AHSME 1998) Una parabola ha vertice in (4; −5) e ha due intersezioni con l'asse x, una di ascissa positiva e l'altra di ascissa negativa. Se la parabola ha equazione $y = ax^2 + bx + c$, quali fra i suoi coefficienti devono essere positivi? [Solo a]
8. (AMC 2001) La parabola $y = ax^2 + bx + c$ e vertice in $(h; k)$ è riflessa rispetto alla retta $y = k$. In tal modo si ottiene la parabola di equazione $y = dx^2 + ex + f$. Quanto vale $a + b + c + d + e + f$? [$2k$]
9. (HSMC2003) La parabola di equazione $y = x^2$ è traslata lungo l'asse x, in modo che passi per il punto (3; 2). Determinare l'equazione della curva così ottenuta. $\left[y=\left(x-3\pm\sqrt{2}\right)^2\right]$
10. (HSMC2003) La circonferenza di centro in (0; 1) e raggio 1 interseca la parabola di equazione $y = ax^2$, nell'origine. Determinare tutti i valori di a per cui le due curve si incontrano solo nell'origine. [$a \le 1/2$]

Questions in English

Working together

This is a question assigned at HSMC in 2006. *For the family of parabolas* $y = a^3/3x^2 + a^2/2x – 2a$, $a \ne 0$, *the locus of vertices is a hyperbola. Find an equation for this hyperbola*.

We can write: $y+2a=\frac{a^3x^2}{3}+\frac{a^2x}{2} \Rightarrow y+2a=\frac{a^3}{3}\cdot\left(x^2+\frac{3x}{2a}\right)$. Now we complete the square inside the parenthesis: $y+2a=\frac{a^3}{3}\cdot\left(x^2+\frac{3x}{2a}+\frac{9}{16a^2}\right)-\frac{3a}{16} \Rightarrow y+2a=\frac{a^3}{3}\cdot\left(x+\frac{3}{4a}\right)^2-\frac{3a}{16} \Rightarrow y+\frac{35a}{16}=\frac{a^3}{3}\cdot\left(x+\frac{3}{4a}\right)^2$

Determine the coordinate of the vertex: $V \equiv \left(-\frac{3}{4a}; -\frac{35a}{16}\right)$.

Multiple the coordinates: $x \cdot y = -\frac{3}{4a} \cdot \left(-\frac{35a}{16}\right) \Rightarrow xy = \frac{105}{64}$, which is the equation we are looking for.

11. (HSMC1999) The graphs $y = x + 2$ and $y = ax^2$ intersect at a point A whose x–coordinate is 3. Find the value of a. [5/9]
12. (HSMC1999) Suppose $a \neq 0$ and $b > 3a^2$. If a particle travels from the point $(a; b)$ towards the point $(a; 3a^2)$ and reflects off the parabola $y = 3x^2$, then where will it cross the y–axis? [$y = 1/2$]
13. (HSMC2000) A circle and a parabola are drawn in the xy–plane. The circle has its centre at (0;5) with a radius of 4; and the parabola has its vertex at (0; 0). If the circle is tangent to the parabola at two points, give the equation of the parabola. [$y = 1/4x^2$]
14. (HSMC2001) Find all values of a for which the parabolas $y = 1 + 2x - x^2$, $y = x^2 + a$ intersect. [$a \leq 3/2$]
15. (HSMC2004) Find the number of points of intersection of the graphs of $y = x^2$ and $y = \frac{1}{2+x^2}$. [2]
16. (HSMC2007) The distance from a point on the parabola $y = x^2$ to the origin is $2 \cdot \sqrt{5}$. What is the y–coordinate of the point? [4]
17. (HSMC2007) The line $y = bx - b$ intersects the parabola $y = x^2$ in exactly one point $(x; y)$. If $b \neq 0$, what is the value of b? [4]

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia militare) Nel piano cartesiano il grafico della funzione $y = x^2 + 1$.
   A) Non interseca l'asse x B) Non interseca l'asse y
   C) interseca l'asse x nel punto di ascissa $x = -1$ D) passa per l'origine O
2. (Accademia militare) Individuare, tra i seguenti punti, il vertice della parabola: $y = -2x^2 + 6x - 7$.
   A) (–3/2; 5/2) B) (–3/2; –5/2) C) (3/2; –5/2) D) (3/2; 5/2)
3. (Architettura 2007) Per quali valori di k l'equazione $x^2 - 2x + k - 1 = 0$ ammette soluzioni reali?
   A) $k \leq 2$ B) qualsiasi valore di k C) $k \geq 5/4$ D) $k < 9/4$ E) $k > 2$
4. (Accademia navale) Tra le parabole di equazione $y = ax^2 + bx + c$, individuare quelle aventi il fuoco nel punto (2; 1) e passanti per $\left(0; \sqrt{3}\right)$. Se ne scrivano le equazioni.
5. (Accademia navale) Nel piano cartesiano rappresentare graficamente il luogo dei vertici delle parabole di equazione $y = kx^2 - 2x$, essendo k un parametro reale non nullo.
6. (Accademia navale) Individuare i fuochi delle parabole passanti per i punti (2; 1) e (3;2) ed aventi per direttrice la retta di equazione $x = 0$.
7. (Accademia navale) Individuare il luogo dei centri delle circonferenze passanti per il punto (3; 2) e tangenti all'asse delle x. (Si osservi che il luogo è dei punti equidistanti da …, quindi è una …)
8. (Accademia navale) Si interpreti geometricamente il fatto che il sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ ax^2 + y + 2 = 0 \end{cases}; a > 0$, non ha alcuna soluzione reale.
9. (Accademia navale) Discutere geometricamente la risolubilità del sistema: $\begin{cases} y = ax^2 \\ y = x \\ |x| \leq 1 \end{cases}$.
10. (Ingegneria 1999) Fissato nel piano un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, il luogo dei punti le cui coordinate $(x; y)$ soddisfano l'equazione $x \cdot (2x + y - 1) = 0$ è
    A) una parabola B) una retta o un punto C) una retta D) una coppia di rette E) una circonferenza

11. (Medicina 2003) La curva di equazione $x+3y^2-\sqrt{3}=0$: A) È una parabola con il vertice nel punto $\left(0;\sqrt{3}\right)$ B) È una parabola con il vertice nel punto $\left(\sqrt{3};0\right)$ C) Non interseca la curva $x^2 + y^2 - 3= 0$ D) Interseca la retta $y = x - 3$ in due punti E) È una circonferenza con centro sull'asse delle ordinate
12. (Medicina 2003) Se il fuoco di una parabola ha coordinate (0;–3) e la direttrice ha equazione $y = 1$, la parabola: A) non interseca l'asse delle ascisse B) ha asse di simmetria parallelo all'asse delle ascisse C) passa per l'origine degli assi cartesiani D) non interseca l'asse delle ordinate E) ha il vertice nel punto di coordinate (–2;0)
13. (Odontoiatria 2004) La parabola di equazione $y=-3x^2+\sqrt{3}$ A) ha come asse di simmetria l'asse delle ascisse B) ha come asse di simmetria l'asse delle ordinate C) ha il vertice in $\left(\sqrt{3};0\right)$ D) ha il fuoco in $\left(0;\sqrt{3}\right)$ E) ha come asse di simmetria l'asse delle ascisse
14. (Guida Bocconi) Qual è il valore minimo che assume la funzione $f(x) = x^2 - 2x$?
A) – 2 B) – 1 C) 0 D) 1 E) 2
15. (Scuola Superiore di Catania) Con riferimento a un sistema cartesiano ortogonale Oxy si scriva l'equazione di una retta r tale che la simmetria assiale rispetto ad r trasformi il punto F(0; 1) in un punto F' che appartenga all'asse x. si dimostri che l'insieme di queste rette coincide con l'insieme delle tangenti a una stessa parabola, di cui si scriva l'equazione.

Per svolgere un Test finale di* 20 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_3_4.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	**2**	**3**
A	C	A
4	**6**	**7**
$y=\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt[4]{12}+1}{8}\cdot x^2-\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt[4]{12}+1}{2}\cdot x+\sqrt{3}$	$F\equiv\left(\frac{29}{12};0\right)$	$y=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{13}{4}$
9	**10**	**11**
1 soluzione se $-1 < x < 1$ 2 soluzioni se $x \le -1$ o $x \ge 1$	D	A
12	**13**	**14**
B	B	B
15		
$r:\ 2mx-2y+1-m^2\quad p: y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$		