

Carmelo Di Stefano

Dal problema al modello matematico

Volume secondo

Per il biennio



Dal Problema al modello matematico

Volume 2

Questo libro è rilasciato con licenza
Creative Commons BY–NC–ND
Attribuzione – Non Commerciale – Non opere derivate
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/it/deed.it>

Attribuzione — Devi attribuire la paternità dell'opera nei modi indicati dall'autore o da chi ti ha dato l'opera in licenza e in modo tale da non suggerire che essi avallino te o il modo in cui tu usi l'opera.

Non commerciale — Non puoi usare quest'opera per fini commerciali.

Non opere derivate — Non puoi alterare o trasformare quest'opera, né usarla per crearne un'altra.

Se vuoi contribuire a migliorare questo testo, invia segnalazioni di errori, mancanze, integrazioni all'autore carmelodst@alice.it. I proprietari di immagini, o di altri contenuti, che sono stati utilizzati impropriamente e inavvertitamente in questo libro, se ritengono di non essere stati citati correttamente sono pregati di mettersi in contatto con l'autore per gli interventi che si riterranno necessari; si fa presente che questo libro non ha scopo di lucro.

Presentazione

Nel corso della lettura dei volumi troverai diverse cose, che di seguito ti spiego brevemente.

- All'inizio di alcune unità trovi un breve ripasso di argomenti svolti negli anni precedenti che ti risultano utili per affrontare serenamente la stessa unità. Vanno sotto il nome di **Richiamiamo le Conoscenze**. In alcune unità vi sono anche argomenti di approfondimento, denominati con il titolo *Quelli che ... voglio-no sapere di più*
- Le definizioni, i teoremi, i corollari e simili enti matematici, sono contenuti all'interno di appositi box di un uguale colore (verde per le definizioni, celeste per i teoremi e così via)
- Ogni tanto troverai anche un box che ti spiega il significato di alcuni vocaboli, si intitola **Che cosa significa?**
- Poi ci sono tre diversi tipi di box con diverse informazioni storiche, precisamente ci sono quelli intitolati **I Protagonisti**, che contengono informazioni relativamente a famosi matematici citati nelle stesse pagine; invece ne **L'angolo storico** ci sono informazioni di varia natura, su quando per la prima volta si sono incontrate le nozioni di cui si sta parlando e simili informazioni; infine in quelli dal titolo **L'antologia** sono riportati e commentati passi di famose opere matematiche.
- Vi sono anche dei box chiamati **Intervallo matematico** o **Giochiamo alla matematica**, che si riferiscono, i primi ad applicazioni della matematica e gli altri alla cosiddetta matematica ricreativa.
- Tenuto conto delle ultime riforme scolastiche, in particolare della prova multidisciplinare dell'Esame di Stato, che riguarda la matematica e la fisica, ogni tanto troverai anche **L'angolo della MateFisica**, in cui sono trattati argomenti di fisica attinenti quelli di matematica sviluppati nell'unità.
- Alla fine di ogni argomento vi sono le relative verifiche. In esse sono presenti esercizi di tre livelli di difficoltà, opportunamente indicati. Il **Livello 1** è relativo a esercizi che sono spesso semplice applicazione di quanto detto nella teoria; quelli di **Livello 2** o contengono calcoli più complicati, o hanno bisogno di un impegno maggiore; infine quelli di **Livello 3** riguardano quesiti che devono essere impostati usando la fantasia e non in modo ripetitivo. Questi ultimi sono riferiti ai più volenterosi. Per quelli a cui piace veramente ragionare e impegnarsi, alla fine di ogni unità sono presenti alcuni esercizi molto complessi, che vanno sotto il nome di **La sfida**. Invece per aiutarti all'inizio di ogni gruppo di esercizi di livello 1 o 2 vi sono alcuni esercizi simili svolti. Inoltre, in alcuni casi è presente **L'angolo delle correzioni**, in cui vengono mostrati esercizi errati da correggere.
- Sono talvolta presenti box legati a importanti software matematici, quasi tutti di libero uso. In essi sono presenti dei link a delle applicazioni che descrivono come usare il software per comprendere meglio gli argomenti trattati o dei files che puoi usare solo se hai il software installato.
- Sono riportati quesiti assegnati nelle prove INVALSI e nelle prove OCSE PISA ((Programme for International Student Assessment) degli ultimi anni. In particolare si ricorda che le prove INVALSI dal 2003 al 2007, in via sperimentale furono assegnate agli alunni di prima superiore, successivamente, dal 2011 in poi a quelli di seconda superiore.
- Sono anche presenti dei quesiti tratti da gare matematiche italiane ed internazionali, alcuni quesiti sono anche enunciati in lingua inglese.
- Alla fine di ogni unità vi sono le attività di recupero, formate essenzialmente da una serie di esercizi svolti, da completare e da svolgere interamente.
- Infine sono proposti dei test in formato multimediale, almeno 10 di numero, relativi ai più importanti argomenti dell'unità didattica, essi sono utilizzabili solo on line dal sito <http://mathinterattiva.altervista.org>.
- Un altro sito da cui puoi scaricare molto materiale didattico gratuito è <http://matdidattica.altervista.org>.
- Vi sono anche diversi collegamenti multimediali che ti portano a pagine web o a files di qualcuno dei software liberi che sono descritti nel libro, o ancora delle applicazioni che mostrano meglio come si fa una certa procedura o come si dimostra un teorema o altro ancora.

Buon lavoro da Carmelo Di Stefano

Indice

5 Algebra non lineare

5.1 I numeri irrazionali

Richiamiamo le conoscenze	Pag. 2
Operazione di estrazione di radice n -esima	4
Verifiche	6
Enigmi matematici	10
Operazioni con i radicali	11
Verifiche	15
Notazione esponenziale dei radicali	23
Verifiche	24
Razionalizzazione di una espressione irrazionale	26
Verifiche	29
Quelli che vogliono sapere di più ...	35
Costruzione dei numeri irrazionali	
Per la prova Invalsi	37
La sfida	38
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali	38
Questions in english	39
Attività di recupero	40

5.2 Equazioni e sistemi di grado superiore al primo

Richiamiamo le conoscenze	Pag. 50
Verifiche	52
Equazioni binomie	53
Verifiche	55
Equazioni di secondo grado	58
L'angolo storico. Il metodo del completamento dei quadrati	64
Verifiche	65
Equazioni trinomie	70
Verifiche	73
Relazioni fra i coefficienti di una equazione trinomia e le sue soluzioni	75
Verifiche	76
Equazioni parametriche di II grado	78
Verifiche	79
Equazioni fratte	82
Verifiche	83
Equazioni irrazionali	85
Verifiche	87
Sistemi di equazioni non lineari	90
Verifiche	92
Quelli che vogliono sapere di più ...	95
Regola dei segni di Cartesio	
Verifiche	98
Quelli che vogliono sapere di più ...	
Particolari equazioni di grado superiore al secondo. Equazioni reciproche	100
Verifiche	104
L'Antologia	113

Per la prova Invalsi	116
La sfida	117
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali	117
Questions in english	120
Attività di recupero	122

5.3 Disequazioni non lineari

Disequazioni non lineari	Pag.132
Verifiche	136
Sistemi di disequazioni non lineari	141
Verifiche	143
Per la prova Invalsi	145
La sfida	145
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali	146
Questions in english	146
Attività di recupero	147

5.4 Problemi non lineari

Problemi non lineari	Pag.154
Verifiche	155
L'Antologia	161
Per la prova Invalsi	162
La sfida	163
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali	163
Questions in english	165
Attività di recupero	166

6. Geometria del piano seconda parte

6.1 La Circonferenza

La circonferenza e le sue parti	Pag.170
Verifiche	173
Posizione reciproche di retta e circonferenza	176
Verifiche	183
Enigmi matematici	188
Posizioni reciproche di due circonferenze	189
Verifiche	191
Poligoni inscritti e circoscritti a una circonferenza	194
L'Antologia	198
Verifiche	200
Per la prova Invalsi	201
La sfida	203
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali	203
Questions in english	205
Attività di recupero	207

6.2. La Similitudine

Richiamiamo le conoscenze. Le proporzioni	Pag.213
Verifiche	216
Concetto di similitudine	219
Verifiche	222
Teorema di Talete	224
Verifiche	228
Criteri di similitudine	232
Verifiche	236
Importanti teoremi sulla similitudine	243
Verifiche	248
Quelli che vogliono sapere di più ...	
Retta di Eulero e cerchio dei 9 punti	252
Nozioni di trigonometria	254
Verifiche	256
Per la prova Invalsi	259
La sfida	261
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali	262
Questions in english	264
Attività di recupero	267

6.3 L'Equiestensione

Nozione di equiestensione ed area dei poligoni elementari	Pag.276
Verifiche	286
Intervallo matematico	294
Enigmi matematici	295
Teorema di Pitagora	296
Verifiche	304
Teoremi di Euclide	315
Verifiche	318
Superficie del cerchio	320
Verifiche	323
L'Antologia	327
Quelli che vogliono sapere di più ...	
Incommensurabilità di segmenti nel piano	329
Generalizzazioni del Teorema di Pitagora	330
Verifiche	332
Per la prova Invalsi	333
La sfida	339
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali	340
Questions in english	344
Attività di recupero	348

7. La Matematica dell'incertezza

7.1 Il Calcolo delle Probabilità

Concetto di evento aleatorio. Probabilità secondo Laplace di eventi semplici	Pag.359
Verifiche	363
L'Antologia	367
Unione di eventi elementari	371
Verifiche	374
Estrazioni con e senza rigenerazione. Eventi indipendenti. Probabilità condizionata	378
Verifiche	380
Enigmi matematici	384
Per la prova Invalsi	384
La sfida	388
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali	388
Questions in english	390
Attività di recupero	392

7.2 La Statistica descrittiva

Prime nozioni	Pag.400
Verifiche	403
Rappresentazioni grafiche	406
Verifiche	409
Indici centrali	413
Verifiche	419
Variabilità	427
Verifiche	430
Per la prova Invalsi	431
La sfida	442
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali	442
Questions in english	444
Attività di recupero	447

5. Algebra non lineare

5.1 I numeri irrazionali

Prerequisiti

- Numeri razionali e relative operazioni
- Relazioni di equivalenza
- Geometria euclidea
- Concetto di elevamento a potenza
- Insiemistica
- Numeri razionali
- Calcolo polinomiale
- Diseguaglianze e disequazioni di primo grado o a esse riconducibili

Obiettivi

- Acquisire il concetto di numero irrazionale
- Acquisire familiarità con le operazioni aritmetiche con i radicali
- Determinare, almeno in linea di principio, un valore approssimato di un radicale irriducibile
- Comprendere il concetto di esponente frazionario
- Distinguere i valori approssimati da quelli esatti

Contenuti

- Richiamiamo le conoscenze: I numeri reali
- Operazione di estrazione di radice n -esima
- Operazioni con i radicali
- Notazione esponenziale dei radicali
- Razionalizzazione di una espressione irrazionale

Quelli che vogliono sapere di più

Costruzione dei numeri irrazionali

Parole chiave

Approssimazione per difetto – Approssimazione per eccesso – Indice – Irrazionale – Radicale – Radicando – Incommensurabile – Radicale apparente – Radicale irriducibile

Simbologia

- $\mathbb{I}$ Indica l'insieme dei numeri irrazionali
- $\sqrt[n]{R}$ Indica la radice n -esima del numero R

Richiamiamo le conoscenze

I numeri reali

Definizione A

- Chiameremo insieme dei numeri **reali** l'insieme dei numeri che possono essere scritti premettendo il segno $+$ o $-$ a un numero intero, facendolo poi seguire da una virgola e da altre cifre in numero qualsiasi.
- Chiameremo sua **parte intera** il numero che precede la virgola.
- Chiameremo sua **parte decimale** le infinite cifre che seguono la virgola.

Notazione A

L'insieme dei numeri reali si indica con il simbolo $\mathbb{R}$.

Notazione B

Quando scriviamo i numeri reali positivi possiamo anche omettere il segno $+$. Se a partire da una certa cifra in poi tutte le altre sono zero conveniamo di non scriverle; se tutta la parte decimale è composta da infiniti zeri non scriveremo nemmeno la virgola.

Esempio A

L'insieme $\mathbb{R}$ risulta infinito e comprende come sue parti

- l'insieme $\mathbb{N}$: i numeri naturali sono quelli che sono preceduti dal segno $+$ e hanno parte decimale tutta formata da zeri;
- l'insieme $\mathbb{Z}$: gli interi relativi si comportano come i naturali ma possono essere preceduti anche dal segno $-$ o essere il numero 0;
- l'insieme $\mathbb{Q}$: i numeri razionali che hanno la parte decimale che contiene infiniti zeri a partire da una determinata posizione (numeri decimali limitati), oppure la parte decimale formata ripetendo all'infinito le prime n cifre (numeri periodici semplici), o infine la ripetizione all'infinito di gruppi di cifre tutti uguali a partire non dalla prima cifra dopo la virgola ma dopo un certo numero di altre cifre (numeri periodici misti).

Così i seguenti sono esempi di numeri reali: 123; 12,31; 14,2323232323... ; 0,12345678... In particolare nell'ultimo numero sottintendiamo di scrivere uno dietro l'altro tutti i numeri naturali.

Vediamo adesso due importanti proprietà dei numeri reali.

Definizione B

- Dato un insieme numerico se fra due suoi elementi qualunque, a e b , con $a < b$, esiste sempre un numero c tale che si abbia $a < c < b$, l'insieme si dirà **denso**.
- Dato un insieme numerico denso, se fra due suoi elementi qualunque, a e b , con $a < b$, esistono **solo** numeri dello stesso insieme, esso si dirà **continuo**.

Esempio B

- L'insieme $\mathbb{N}$ non è denso, per esempio fra i numeri naturali 2 e 3 non vi sono altri numeri naturali. Lo stesso succede per $\mathbb{Z}$.
- Invece sia $\mathbb{Q}$ che $\mathbb{R}$ sono densi. Per esempio fra 1,2 e 1,3 c'è il numero razionale 1,25. Fra 0,123... format da tutti i numeri naturali scritti uno dietro l'altro e 0,13579... scrivendo solo i numeri dispari vi è per esempio il numero reale 0,124567...
- Invece $\mathbb{Q}$ non è continuo perché per esempio fra 3,14 e 3,15 c'è il numero π che non è un numero razionale. Invece $\mathbb{R}$ è un insieme **continuo**, fra due numeri reali ci sono solo numeri reali.

Definizione C

Diciamo insieme dei numeri **irrazionali** l'insieme differenza $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Notazione C

L'insieme dei numeri irrazionali si indica con il simbolo $\mathbb{I}$.

Che cosa significa?

Numero irrazionale letteralmente vuol dire che sfugge alla ragione. Per la prima volta Michel Stiefel nella *Arithmetica integra* del 1544 parla di *numeri irrationales* riferendosi ai rapporti di grandezze geometriche incommensurabili, ossia che non possono essere espresse nella stessa unità di misura.

Esempio B

I numeri irrazionali sono tutti quei numeri esprimibili con una parte decimale infinita ma non periodica. Il numero $\sqrt{2} = 1,4142\dots$ e il numero $\pi = 3,1415\dots$ sono due fra i numeri irrazionali più utilizzati. Non ci si lasci ingannare dalle ellissi: esse compaiono qui perché le cifre sono infinite, non perché esse verificano qualche particolare condizione. Infatti la quinta e la sesta cifra decimale di $\sqrt{2} = 1,4142\dots$ non sono 4 e 3 mentre invece esse sono 1 e 3. Lo stesso discorso vale per π e per altri numeri irrazionali.

Operazione di estrazione di radice n-esima

In fondo, anche se in questo testo non abbiamo mai parlato di radici quadrate, queste sono note allo studente sin dalla scuola media, in particolare dall'applicazione del teorema di Pitagora. Queste conoscenze sono però intuitive e poco rigorose, adesso è venuto il momento di renderle più precise.

Definizione 1

Dato un numero reale non negativo a , diciamo sua **radice quadrata** il numero reale positivo r il cui quadrato è uguale ad a .

Notazione 1

Per indicare la radice quadrata di a scriviamo $\sqrt{a}$.

L'angolo storico

Il simbolo $\sqrt{}$ ha avuto una lunga storia nel corso dei secoli. Già in un papiro egiziano compare il simbolo di una squadra posta in piedi. In seguito, durante il medioevo, in Europa i simboli più usati furono **R**, con il significato di **radix**; **l**, con il significato di **latus**, e il segno $\sqrt{}$. Quest'ultimo segno ebbe origine in Germania e probabilmente è una deformazione della lettera r. Il simbolo più vicino a quello attuale si trova nei lavori di Christoff Rudolff, un matematico tedesco vissuto nei primi del 1500. Dopo l'acquisizione di tale simbolo per la radice quadrata dovettero passare secoli perché lo stesso simbolo, con un indice numerico, indicasse, anche le radici terze, quarte e così via

Nella definizione abbiamo detto che a non deve essere negativo; ciò è motivato dal fatto che, considerate le regole dei segni per la moltiplicazione di due numeri relativi, il quadrato di un numero reale è sempre un numero non negativo. Potrebbe però sorgere il dubbio se, qualunque sia il numero reale non negativo a , esista sempre la sua radice quadrata. Nel seguente esempio proponiamo una strategia che ci aiuta a capire che la risposta al quesito è sempre positiva e che ci permette di calcolare un valore approssimato di tale radice.

Esempio 1

Si voglia calcolare la radice quadrata di 73. Cominciamo a chiederci: esistono numeri interi il cui quadrato uguagli 73? La risposta è negativa, infatti $8^2 < 73 < 9^2$. Proprio queste disuguaglianze ci fanno capire che il numero $\sqrt{73}$ è del tipo $8, a_1 a_2 a_3 \dots$, con $a_1 a_2 a_3$ cifre da determinare. Se vogliamo determinare a_1 possiamo considerare che tale cifra può essere uguale a una qualunque delle dieci cifre 0, 1, ..., 9. Consideriamo allora i quadrati dei numeri 8,0; 8,1; ...; 8,9 o meglio solo quei quadrati, dei numeri precedenti, che non superano 73. Così troviamo $8,5^2 = 72,25 < 73 < 73,96 = 8,6^2$. Ciò significa che 8,5 è un'approssimazione per difetto di $\sqrt{73}$, 8,6 un'approssimazione per eccesso. Quindi $a_1 = 5$. Con analoghi ragionamenti possiamo determinare quante altre cifre vogliamo (in linea teorica tutte). Per esempio, possiamo trovare le seguenti prime sei cifre esatte: 8,544003.

Precisiamo quanto visto nell'esempio precedente.

Definizione 2

Dato un numero irrazionale r e un numero razionale a , che approssima r , il numero $|r - a|$ si chiama **errore commesso** considerando il numero a come approssimazione di r .

Esempio 2

La civiltà babilonese, vissuta nella regione mesopotamica dal 2000 al 600 a.C., aveva calcolato il numero 1,414222 come valore approssimato di $\sqrt{2}$. Dato che il valore esatto di $\sqrt{2}$, calcolato fino alla sesta cifra decimale è 1,414213, possiamo dire che l'errore commesso dai babilonesi è $|1,414213\dots - 1,414222| = 0.000009\dots$

Definizione 3

Dato un numero reale a , se esiste un numero reale r , dello stesso segno di a , la cui potenza ennesima è uguale ad a , diciamo che r è la **radice ennesima** di a .

Notazione 2

La radice ennesima di un numero reale a , se esiste, si indica con il simbolo $\sqrt[n]{a}$. n si chiama **indice**, a si chiama **radicando** e $\sqrt[n]{a}$ si chiama **radicale**.

Si conviene di non scrivere l'indice se esso è uguale a 2, cioè $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.

Se l'indice è uguale a 1, per la definizione 3 si ha che $\sqrt[1]{a} = a$, mentre, se l'indice è uguale a zero, alla scrittura $\sqrt[0]{a}$ non si attribuisce alcun significato.

Esempio 3

Calcolare il valore di $\sqrt[3]{32}$ con tre cifre decimali esatte. Lavorando con il procedimento utilizzato per le radici quadrate, costruiamo le seguenti catene di disuguaglianze: $3^3 = 27$; $4^3 = 64 \Rightarrow 3 < \sqrt[3]{32} < 4$. Quindi la parte intera è 3. $3,1^3 = 29,791$; $3,2^3 = 32,768 \Rightarrow 3,1 < \sqrt[3]{32} < 3,2$. La prima cifra decimale esatta è 1. Passiamo alla seconda: $3,17^3 = 31,85\dots$; $3,18^3 = 32,15\dots \Rightarrow 3,17 < \sqrt[3]{32} < 3,18$. La seconda è 7. Per la terza: $3,174^3 = 31,97\dots$; $3,175^3 = 32,005\dots \Rightarrow 3,174 < \sqrt[3]{32} < 3,175$. Quindi $\sqrt[3]{32} \approx 3,174$ e tutte e tre le cifre decimali sono esatte.

Nella definizione 3, abbiamo scritto *se esiste*, infatti non sempre è possibile risolvere il problema proposto.

Esempio 4

- Determinare la radice quarta del numero 16. Dobbiamo cercare un numero reale che innalzato alla quarta potenza uguali il numero 16. È facile vedere che $2^4 = 16$, quindi si ha: $\sqrt[4]{16} = 2$.
- Se avessimo voluto determinare la radice quarta di -16 il problema sarebbe stato privo di soluzioni, poiché nessun numero reale innalzato a una potenza pari è negativo.
- Poiché anche $(-4)^2 = 16$ saremmo tentati di dire che anche $\sqrt{16} = -4$. Ma questa uguaglianza è certamente falsa, dato che il primo membro è positivo, mentre il secondo è negativo. Pertanto possiamo dire che le uguaglianze corrette sono: $\sqrt{16} = +4$ e $-\sqrt{16} = -4$.

Precisiamo quanto osservato nell'esempio precedente, enunciando il seguente

Teorema 1

- La radice ennesima di indice dispari di qualsiasi numero reale è sempre un numero reale dello stesso segno del radicando.
- La radice ennesima di indice pari di un numero reale è un numero reale solo per radicandi non negativi e, in questo caso, rappresenta sempre un numero non negativo.

Esempio 5

- Il numero reale $\sqrt{9}$ rappresenta il numero 3 poiché $3^2 = 9$. In questo caso è come se avessimo effettuato la seguente semplificazione: $\sqrt{3^2} = 3$.
- Con lo stesso ragionamento non potremmo però scrivere $\sqrt{(-3)^2} = -3$, poiché il primo membro è un numero positivo mentre il secondo è un numero negativo, quindi, nel momento in cui si effettua la semplificazione (solo per i radicali con indice pari), deve tenersi conto del segno dell'intera espressione. Pertanto la corretta uguaglianza è: $\sqrt{(-3)^2} = 3$.

Sulla base dell'esempio precedente, ci chiediamo se sia possibile effettuare la seguente semplificazione:

$\sqrt[6]{7^4} = \sqrt[3]{7^2}$? La risposta è fornita dal seguente risultato.

Teorema 2 (proprietà di semplificazione dei radicali)

Valgono le seguenti uguaglianze:

- se m e n sono entrambi dispari allora: $\sqrt[m \cdot n]{a^m} = \sqrt[n]{a}$;
- se m è pari allora $\sqrt[m \cdot n]{a^m} = \sqrt[n]{|a|}$;
- se m è dispari e n è pari allora $\sqrt[m \cdot n]{a^m} = \sqrt[n]{a}$ nell'ipotesi che il primo membro abbia significato.

Prima di dimostrare il teorema, presentiamone un'applicazione a valori particolari.

Esempio 6

Vogliamo verificare che effettivamente si ha $\sqrt[6]{7^4} = \sqrt[3]{7^2}$.

Posto $r = \sqrt[3]{7^2}$, innalziamo alla terza potenza entrambi i membri: $r^3 = 7^2$. Posto $s = \sqrt[6]{7^4}$, innalziamo alla sesta potenza entrambi i membri: $s^6 = 7^4$. Ora osserviamo che $s^6 = 7^4 = (r^3)^2 = r^6 \Rightarrow s = r$. Abbiamo così provato che le due scritte, diverse, in realtà rappresentano lo stesso numero.

Dimostrazione

Consideriamo il caso in cui entrambi i numeri m e n siano dispari.

- Indichiamo con $r = \sqrt[n]{a}$ e $s = \sqrt[m \cdot n]{a^m}$ e proponiamoci di provare che $s = r$. Per la definizione di radicale le precedenti uguaglianze possono scriversi come $a = r^n$ e $a^m = s^{m \cdot n}$. Innalziamo la prima di queste ultime due uguaglianze alla m -esima potenza, ottenendo: $a^m = r^{m \cdot n}$. Per la proprietà transitiva dell'uguaglianza possiamo scrivere: $s^{m \cdot n} = r^{m \cdot n}$ da cui si ottiene la tesi, poiché r e s hanno lo stesso segno di a .
- Se m è pari allora il primo membro dell'uguaglianza $s = \sqrt[m \cdot n]{a^m}$ è non negativo, quindi per ripetere il ragionamento precedente è necessario considerare il valore assoluto dell'altro radicando per far sì che anche $r = \sqrt[n]{|a|}$ sia non negativo.
- Se m è dispari e n è pari allora $\sqrt[m \cdot n]{a^m}$ ha significato solo se a è non negativo, quindi lo sono anche $s = \sqrt[m \cdot n]{a^m}$ e $r = \sqrt[n]{a}$.

Esempio 7

Grazie al teorema 2 possiamo scrivere le seguenti uguaglianze:

- $\sqrt[35]{(-3)^5} = \sqrt[7]{-3}$ (m e n sono entrambi dispari);
- $\sqrt[6]{(-3)^2} = \sqrt[3]{|-3|}$ (m è pari);
- Invece $\sqrt[6]{(-3)^3}$ non ha significato (m è dispari e n è pari), come visto nell'ultimo caso della dimostrazione precedente.
- Infine $\sqrt{a^2} = |a|$, dato che non abbiamo informazioni su a e non sappiamo quindi se è positivo o negativo.

Anche se un radicando non si può semplificare nella sua totalità può farsi "parzialmente.

Esempio 8

Il radicale $\sqrt[4]{a^5}$, ovviamente non può semplificarsi, però può scriversi come $\sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{a}$, in questo modo il primo fattore si semplifica: $a^2 \cdot \sqrt[4]{a}$

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo trovare un valore approssimato di $\sqrt{157}$. Cominciamo a trovare la parte intera. Abbiamo $12^2 = 144$ e $13^2 = 169$, quindi la parte intera è 12. Passiamo alla prima cifra decimale: $12,5^2 = 156,25$; $12,6^2 = 158,76$. Quindi la prima cifra decimale è 5. Continuando questo procedimento possiamo trovare per esempio le prime 4 cifre decimali esatte: 12,5299.

Trovare, utilizzando un metodo di approssimazioni successive, il valore approssimato delle radici quadrate dei seguenti numeri, con quattro cifre decimali esatte.

Solo per controllare i risultati usare la calcolatrice

Livello 1

- 12; 37; 48; 73; 91; 101; 125; 179; 245; 678
- 1002; 1258; 2674; 5842; 7496; 10245; 23574; 35678; 73145;
- 99999; 124578; 314256; 456789; 676767; 987654

Livello 2

- In effetti i babilonesi usarono come approssimazione di $\sqrt{2}$, la somma $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$, dato che usavano un sistema numerico a base 60. Verificare che tale valore coincide fino alle prime 5 cifre decimali con $\sqrt{2}$.
- Nel testo indicano del III-IV secolo a.C., *Sulva-Sutras*, è usata come approssimazione di $\sqrt{2}$, la somma $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$. Stabilire quante cifre decimali coincidono con quelle di $\sqrt{2}$. [5]
- Quale dei due valori approssimati precedenti è più “vicino” a quello di $\sqrt{2}$? [Il primo]

Lavoriamo insieme

Vogliamo determinare le prime quattro cifre decimali esatte del numero irrazionale $\sqrt[4]{321}$. Cominciamo a determinare la sua parte intera. Avvalendoci di un foglio elettronico come Excel o anche di una semplice

N	N ⁴
1	1
2	16
3	81
4	256
5	625

calcolatrice costruiamo la seguente catena di potenze quarte: Ci siamo fermati a 5^4 perché è il primo valore che supera 321. Possiamo quindi dire che la parte intera di $\sqrt[4]{321}$ è 4. Continuiamo con la prima cifra

N	N ⁴
4,1	282,5761
4,2	311,1696
4,3	341,8801

decimale: Dato che $4,2^4 < 321$ e $4,3^4 > 321$, possiamo dire che la prima cifra decimale esatta è

N	N ⁴
4,21	314,1437
4,22	317,1391
4,23	320,1559
4,24	323,1941

2. Procediamo con le altre cifre; proponiamo le relative tabelle senza commento. La seconda

N	N ⁴
4,2321	320,7921
4,2322	320,8224
4,2323	320,8528
4,2324	320,8831
4,2325	320,9134
4,2326	320,9437
4,2327	320,9741
4,2328	321,0044

cifra decimale è 3. La terza cifra è 2. Il numero con 4 decimali esatti è 4,2327

Livello 1

Calcolare il valore dei seguenti radicali numerici con tre cifre decimali esatte. Controllare il risultato con la calcolatrice

$$7. \quad \sqrt[3]{38}; \sqrt[4]{35}; \sqrt[5]{-745}; \sqrt[6]{12345}; \sqrt[7]{-127}$$

Trovare le formule inverse delle seguenti formule geometriche o fisiche, relativamente alle grandezze con esponenti

Livello 1

$$8. \quad A = l^2; V = l^3; V = \frac{4}{3}\pi r^3; V = \frac{l^2 \cdot h}{3}; a^2 = b^2 + c^2; V = \pi \cdot r^2 \cdot h; S = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$\left[l = \sqrt{A}; l = \sqrt[3]{V}; r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}; l = \sqrt{\frac{3V}{h}}; b = \sqrt{a^2 - c^2}; r = \sqrt{\frac{V}{\pi}}; r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{S}{\pi}} \right]$$

$$9. \quad A = \pi \cdot r^2; s = \frac{1}{2}a \cdot t^2; s = s_0 + \frac{1}{2}a \cdot t^2; E = \frac{1}{2}m \cdot v^2; s = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2a}$$

$$\left[r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}; t = \sqrt{\frac{2s}{a}}; t = \sqrt{\frac{2 \cdot (s - s_0)}{a}}; v = \sqrt{\frac{2E}{m}}; v_f = \sqrt{2as + v_i^2}; v_i = \sqrt{v_f^2 - 2as} \right]$$

Lavoriamo insieme

- Vogliamo semplificare i seguenti radicali $\sqrt{64}; \sqrt[3]{-125}; \sqrt[4]{36}$. Scomponiamo in fattori i rispettivi radicandi e poi dividiamo per il massimo comune divisore fra l'indice e gli esponenti del radicando, se tale MCD è diverso da 1: $\sqrt{64} = \sqrt{2^6} = 2^3 = 8$; $\sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{(-5)^3} = -5$; $\sqrt[4]{36} = \sqrt[4]{2^2 \cdot 3^2} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$.
- Invece il seguente radicale non è semplificabile: $\sqrt[5]{96} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 3}$, dato che $\text{MCD}(5, 5, 1) = 1$, però può scriversi $\sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{3} = 2 \cdot \sqrt[5]{3}$.

Semplificare, ove possibile, i seguenti radicali

Livello 1

$$10. \quad \sqrt[3]{64}; \sqrt{128}; \sqrt[4]{12}; \sqrt[4]{64}; \sqrt[3]{81}; \sqrt[5]{243} \quad \left[4; \sqrt{128}; \sqrt[4]{12}; \sqrt{8}; \sqrt[3]{81}; 3 \right]$$

$$11. \quad \sqrt[7]{128}; \sqrt{48}; \sqrt[3]{54}; \sqrt[3]{144}; \sqrt[4]{162}; \sqrt[4]{12544} \quad \left[2; 4 \cdot \sqrt{3}; 3 \cdot \sqrt[3]{2}; 2 \cdot \sqrt[3]{9}; 3 \cdot \sqrt[4]{2}; 4 \cdot \sqrt{7} \right]$$

$$12. \quad \sqrt[3]{-\frac{64}{27}}; \sqrt[6]{\frac{1331}{2197}}; \sqrt[4]{\frac{2401}{6561}}; \sqrt{\frac{16}{27}}; \sqrt[3]{\frac{42}{8}}; \sqrt[4]{\frac{729}{25}} \quad \left[-\frac{4}{3}; \frac{\sqrt{143}}{13}; \frac{7}{9}; \frac{\sqrt{48}}{9}; \frac{\sqrt[3]{42}}{2}; \frac{\sqrt{135}}{5} \right]$$

$$13. \quad \sqrt{144+25}; \sqrt{144-25}; \sqrt[3]{27+64}; \sqrt{36 \cdot 64}; \sqrt[3]{125 \cdot 343}; \sqrt[6]{64 \cdot 81} \quad \left[13; \sqrt{119}; \sqrt[3]{91}; 48; 35; \sqrt[6]{5184} \right]$$

Livello 2

$$14. \quad \sqrt{a^2+b^2}; \sqrt{a^4}; \sqrt[3]{b^6}; \sqrt{a^2b}; \sqrt[3]{(-a^2b^3)^{12}}; \sqrt[6]{x^2y^3} \quad \left[\sqrt{a^2+b^2}; a^2; b^2; \sqrt{a^2b}; a^8b^4; \sqrt[6]{x^2y^3} \right]$$

$$15. \quad \sqrt{a^3b^2c^4}; \sqrt{x^3y^2z}; \sqrt[3]{m^4n^5}; \sqrt{a^6b^4c^8}; \sqrt[5]{-32x^{12}y^{31}}; \sqrt[6]{128x^{24}y^{32}} \quad \left[|b| \cdot c^2 \sqrt{a^3}; |y| \cdot \sqrt{x^3z}; mn \cdot \sqrt[3]{mn^2}; |a^3|b^2c^4; -2x^2y^6 \cdot \sqrt[5]{x^2y}; 2x^4y^5 \cdot \sqrt[6]{2y} \right]$$

Livello 3

$$16. \quad \sqrt[12]{x^6y^{10}}; \sqrt{49z^2m^4n}; \sqrt{18a^3b^5}; \sqrt[3]{27x^9z^{15}}; \sqrt[7]{m^{23}n^{14}p^{21}}; \sqrt{72t^6w^{13}} \quad \left[\sqrt{|x|} \cdot \sqrt[6]{|y^5|}; 7m^2 \cdot |z| \cdot \sqrt{n}; 3 \cdot \sqrt{2a^3b^5}; 3x^3z^5; m^3n^2p^3 \cdot \sqrt[7]{m^2}; 6|t^3| \cdot \sqrt{2w^{13}} \right]$$

$$17. \quad \sqrt[5]{a^{10}b^5}; \sqrt[4]{a^6b^8z^{12}}; \sqrt[6]{6a^6b^6}; \sqrt{16x^4}; \sqrt[4]{64m^6}; \sqrt[12]{216a^6p^9} \quad \left[a^2b; \sqrt{|a^3|b^2|z^3|}; \sqrt[6]{6} \cdot |ab|^6; 4x^2; \sqrt{8|m|^3}; \sqrt[4]{6p^3} \cdot \sqrt{|a|} \right]$$

$$18. \sqrt[3]{\frac{m^6 n^9}{p^{12} q^{15}}}; \sqrt[4]{\frac{a^4 b^2}{c^6 d^8}}; \sqrt[6]{\frac{x^6 y^5 z^6}{u^4}}; \sqrt[12]{4x^6 y^{12} z^{18}}; \sqrt[5]{5a^5 b^{10}}; \sqrt[18]{16r^4 s^6 t^2}$$

$$\left[\frac{m^2 n^3}{p^4 q^5}; \frac{|a| \cdot \sqrt{|b|}}{\sqrt[3]{|c|^3 d^2}}; \frac{|xz| \sqrt[6]{y^5}}{\sqrt[3]{u^2}}; |y| \cdot |z| \cdot \sqrt[6]{2} \cdot \sqrt{|xz|}; \sqrt[5]{5} \cdot ab^2; \sqrt[9]{4r^2} \cdot \sqrt[3]{|s|} \cdot \sqrt[9]{|t|} \right]$$

Lavoriamo insieme

- Semplificare $\sqrt{x^4 + 2x^2 y + y^2}$. Poiché il radicando è un quadrato perfetto, possiamo scrivere: $\sqrt{(x^2 + 2y)^2}$. Saremmo tentati di semplificare esponente e indice del radicale ma ciò può farsi solo se siamo certi che il radicando non è negativo, pertanto utilizziamo il valore assoluto della base, ottenendo: $|x^2 + 2y|$.
- Semplificare $\sqrt{m^4 + 2m^2 + 1}$. Ancora una volta il radicando è un quadrato perfetto, quindi: scriviamo $\sqrt{(m^2 + 1)^2}$. In questo caso siamo certi che il radicando ha una base positiva, perché somma di un quadrato e di un numero positivo, quindi non abbiamo bisogno di utilizzare il valore assoluto. Il risultato è perciò $m^2 + 1$.
- Semplificare $\sqrt{a^2 + 2ab - b^2}$. Il radicando non è un quadrato perfetto, quindi non possiamo semplificare in alcun modo il radicale.

Semplificare, ove possibile, i seguenti radicali

Livello 2

$$19. \sqrt{p^2 - 2p + 1}; \sqrt[3]{b^3 - 3b^2 + 3b - 1}; \sqrt{5m^4 + 10m^2 + 5} \quad \left[|p-1|; b-1; (m^2+1) \cdot \sqrt{5} \right]$$

$$20. \sqrt{\frac{a^2 - 2a + 1}{a^2 - 6a + 9}}; \sqrt[3]{\frac{(b+c)^6}{(b-c)^9}}; \sqrt[10]{x^5 + 32} \quad \left[\frac{|a-1|}{|a-3|}; \frac{(b+c)^2}{(b-c)^3}; \sqrt[10]{x^5 + 32} \right]$$

$$21. \sqrt{\frac{4m^2 + 20mn^2 + 25n^4}{49u^4 - 84u^2 z^3 - 36z^6}}; \sqrt{\frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 + 6x - 9}}; \sqrt[3]{\frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}}$$

$$\left[\frac{|m+5n^2|}{\sqrt{49u^4 - 84u^2 z^3 - 36z^6}}; \frac{|x-5|}{\sqrt{x^2 + 6x - 9}}; \frac{\sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}}{x-1} \right]$$

$$22. \sqrt[4]{\frac{(x^4 - 81) \cdot (x^2 - 9)}{x^2 + 9}}; \sqrt[3]{\frac{m^3 + n^3}{m^3 - n^3}}; \sqrt[3]{\frac{(x+y)^4}{(x-y)^3}} \quad \left[\sqrt{|x^2 - 9|}; \sqrt[3]{\frac{m^3 + n^3}{m^3 - n^3}}; \frac{(x+y) \cdot \sqrt[3]{x+y}}{x-y} \right]$$

Livello 3

$$23. \sqrt{1 - \frac{1}{x^2 + 1}}; \sqrt[3]{1 + \frac{3ab \cdot (b-a)}{a^3 - b^3}}; \sqrt[12]{\frac{(x+1)^2 - (y-2)^2}{x+y-1}}; \sqrt[4]{\frac{(x^4 - y^8) \cdot (x+y^2)}{(x-y^2)^3 \cdot (x^2 + y^4)}}$$

$$\left[\frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 1}}; \sqrt[3]{\frac{(a-b)^2}{a^2 + ab + b^2}}; \sqrt[12]{x-y+3}; \sqrt{\frac{x+y^2}{x-y^2}} \right]$$

Lavoriamo insieme

- Per quali numeri reali r il simbolo $\sqrt{6r-5}$ rappresenta un numero reale? Il radicando non deve essere negativo, ossia deve essere $6r-5 \geq 0$, da cui $r \geq \frac{5}{6}$.

- Per quali numeri reali a ha significato il simbolo $\sqrt[6]{a^2 + 2a + 1}$? Dato che possiamo scrivere: $\sqrt[6]{a^2 + 2a + 1} = \sqrt[6]{(a+1)^2}$; il radicando è un quadrato perfetto, quindi è sempre un numero non negativo per qualsiasi valore assegnato alla variabile a . Il radicale ha sempre senso.

Determinare per quali valori del parametro a i seguenti radicali hanno significato:

Livello 2

$$24. \sqrt{\frac{a-5}{a+4}}; \sqrt[3]{a^2-1}; \sqrt[6]{\frac{a^2-4a+4}{(a-1) \cdot (a-4)^2}}; \sqrt{a^2-7a+10}$$

$$[a < -4 \vee a \geq 5; \forall a \in \mathbb{R}; a > 1, a \neq 4; a \leq 2 \vee a \geq 5]$$

$$25. \sqrt[4]{\frac{-49}{a^2-10a+25}}; \sqrt{\frac{5}{a^2-10a+25}}; \sqrt[8]{\frac{(a^2-9)^2}{(a^2+2a+1)^2}}; \sqrt[3]{a^3+4a^2-1} \quad [\emptyset; a \neq 5; a \neq -1; \forall a \in \mathbb{R}]$$

$$26. \sqrt[6]{\frac{(a-2)^6}{(a-3)^3 \cdot (a+2)^{12}}}; \sqrt{\frac{a^2-1}{a+1}}; \sqrt[8]{\frac{(2a-7)^3}{(2a-7)^2}}; \sqrt[6]{\frac{-a}{a-1}} \quad \left[a = 0 \vee a > 3; a \geq 1; a \geq \frac{7}{2}; 0 \leq a < 1 \right]$$

$$27. \sqrt[6]{\frac{a^2-14a+49}{(a-7) \cdot (4-a)}}; \sqrt[6]{\frac{(a-1) \cdot (a-2)}{a+3}}; \sqrt{\frac{a^2-5a+6}{a^2+5a-6}}$$

$$[4 < a \leq 7; -3 < a \leq 1 \vee a \geq 2; a < -6 \vee 1 < a \leq 2 \vee a \geq 3]$$

L'angolo delle correzioni

Correggere i seguenti procedimenti errati

$$1. \sqrt{121} = \sqrt{11}; \sqrt[4]{(-12)^4} = -12; \sqrt[6]{6} = 1; \sqrt{2a^2} = 2a.$$

$$2. \sqrt[5]{x^6 y^7 z^8} = xy^2 z^3; \sqrt{4+9} = 2+3=5; \sqrt{x^2+y^2} = x+y; \sqrt[3]{\frac{x^3 y^3}{y}} = \frac{xy}{y^3} = \frac{x}{y^2}$$

$$3. \sqrt{x^2 y^2 z^3} = xyz^2; \sqrt{(x+5)^2-1} = x+5-1 = x+4; \sqrt{\frac{x^2-2x+1}{x^2+2x-1}} = \sqrt{\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}} = \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$$

$$4. \sqrt[3]{\frac{m^3-3m^2-3m-1}{m^3+3m^2+3m+1}} = \sqrt[3]{\frac{(m-1)^3}{(m+1)^3}} = \frac{m-1}{m+1}; \sqrt{m^2+2mn+n^2} = \sqrt{(m+n)^2} = \sqrt{m+n}$$

$$5. \sqrt[8]{[-(x^2+1)]^2} = \sqrt[4]{-(x^2+1)}; \sqrt[3]{\frac{(m-n)^2(m+n)}{m+n}} = \frac{m-n}{m+n}$$

Enigmi matematici

Se nell'estrazione di radice quadrata, in generale di indice pari, non si tiene conto del segno del radicando, si possono realizzare diversi trucchi per provare fatti effettivamente impossibili.

Seguiamo per esempio la seguente procedura.

Consideriamo l'identità $2^2 = (-2)^2$. Se estraiamo la radice quadrata di entrambi i membri abbiamo ancora un'identità: $\sqrt{2^2} = \sqrt{(-2)^2}$ e, semplificando i radicali, l'assurdo risultato: $2 = -2$. Esso deriva dall'errore commesso nella seconda semplificazione: il secondo membro positivo, dopo la semplificazione errata, diviene negativo, il che è impossibile.

Il trucco riesce ancor meglio se ai valori noti sostituiamo variabili. Scrivendo, per esempio, $(x-y)^2 = (y-x)^2 \Rightarrow \sqrt{(x-y)^2} = \sqrt{(y-x)^2} \Rightarrow x-y = y-x$, e sostituendo alle variabili valori a piacere, si trovano contraddizioni come quella che si ottiene per $x=3$ e $y=4 \Rightarrow 3-4 = 4-3$.

Operazioni con i radicali

Abbiamo chiamato radicale una particolare forma di numero reale. Ciò significa che le operazioni con i radicali possono effettuarsi allo stesso modo di quelle fra numeri reali. Il problema è che questi numeri hanno infinite cifre e perciò non sappiamo come operare con essi. Per esempio quanto fa $1,234567... + 2,345678...$ (questi ultimi due sono ottenuti scrivendo sequenze di numeri naturali consecutivi)? Se i numeri avessero cifre finite sommeremmo cifra a cifra partendo dalle ultime con eventuale riporto, ma qui non vi è un'ultima cifra.

Lo stesso problema era sorto nelle operazioni fra numeri razionali periodici e lo avevamo superato definendo le operazioni fra i simboli, cioè fra le frazioni, anche in questo caso definiremo le operazioni fra radicali limitatamente ai simboli. In questo caso, l'operazione aritmetica che appare più semplice e immediata da effettuare fra i radicali è quella di moltiplicazione. Vediamo un esempio.

Esempio 9

Vogliamo effettuare la seguente moltiplicazione: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$ è un numero, chiamiamolo x , che verifica l'uguaglianza $x^2 = 2$, analogamente l'altro fattore, $\sqrt{3}$, è un numero, y , per cui si ha $y^2 = 3$. Moltiplichiamo membro a membro le due uguaglianze precedenti: $x^2 \cdot y^2 = (x \cdot y)^2 = 6$. Possiamo dire che, grazie alla definizione di radice quadrata, deve aversi: $x \cdot y = \sqrt{6}$. Ricordando i valori numerici di x e y possiamo scrivere infine la corretta uguaglianza: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$.

I risultati del precedente esempio ci conducono a enunciare il seguente teorema

Teorema 3

Il prodotto (o il rapporto con divisore diverso da zero) di due radicali con lo stesso indice, è un radicale con lo stesso indice, il cui radicando è il prodotto (o il rapporto) dei due radicandi.

Esempio 10

Si è detto che, per esempio, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$. Questa è una uguaglianza vera, ma ciò non significa che il prodotto di due valori approssimati con uno stesso numero di cifre decimali esatte dei primi due fattori, coincida con il risultato della moltiplicazione approssimato con lo stesso numero di cifre. Infatti, supponiamo di considerare l'approssimazione con quattro decimali esatti. Si ha: $\sqrt{2} \approx 1,4142$; $\sqrt{3} \approx 1,7320$ e $\sqrt{6} \approx 2,4494$, mentre $1,4142 \cdot 1,7320 \approx 2,4493944$, che, se scritto con quattro decimali esatti (quindi senza approssimazione), è 2,4493, un numero leggermente diverso da quello ottenuto prima.

Vediamo ancora un esempio.

Esempio 11

- Vogliamo effettuare l'operazione $\sqrt{2} \cdot \sqrt[5]{3}$. Ripetendo il procedimento dell'esempio precedente, otteniamo le uguaglianze: $x^2 = 2$ e $y^5 = 3 \Rightarrow x^2 \cdot y^5 = 6$. Stavolta quindi non riusciamo a porre $x \cdot y$ come base di un'unica potenza. Come rimediare? Trasformando gli esponenti in modo che siano uguali, ossia scrivendo $x^{10} = 2^5$ e $y^{10} = 3^2$, da cui $(x \cdot y)^{10} = 2^5 \cdot 3^2$. Infine $\sqrt{2} \cdot \sqrt[5]{3} = \sqrt[10]{2^5} \cdot \sqrt[10]{3^2} = \sqrt[10]{2^5 \cdot 3^2}$. Quindi, per moltiplicare fra loro due radicali di diverso indice, basta semplicemente ridurli allo stesso indice, il che può farsi cercando un loro multiplo comune, in particolare il loro minimo comune multiplo.
- Vogliamo effettuare l'operazione $\sqrt{5} \cdot \sqrt[5]{-3}$. Stavolta avremo: $x^2 = 5$ e $y^5 = -3 \Rightarrow x^2 \cdot y^5 = -15$. Ciò provoca un problema, dato che in questo modo innalzando al quadrato avremo: $x^{10} = 5^5$ e $y^{10} = (-3)^2$, da cui $(x \cdot y)^{10} = 5^5 \cdot 3^2$, ciò naturalmente è in contrasto con l'espressione iniziale che è invece negativa. Per evitare quindi scriveremo: $\sqrt{5} \cdot \sqrt[5]{-3} = \sqrt[10]{5^5} \cdot \sqrt[10]{-3^2} = \sqrt[10]{5^5 \cdot 3^2}$.

Visti i risultati dell'esempio precedente possiamo enunciare il seguente teorema.

Teorema 4

Il prodotto (o il rapporto con divisore diverso da zero) di due radicali di diverso indice è un radicale, il cui segno è dato dal prodotto dei segni dei radicali, il cui indice è il minimo comune multiplo degli indici e il cui radicando è il prodotto (o il rapporto) dei due radicandi dei radicali ridotti al minimo comune indice.

Consideriamo ora la somma di due radicali, partendo dapprima da quella di due radicali con uguale indice.

Esempio 12

Supponiamo di voler effettuare la seguente somma: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. Se utilizziamo il procedimento usato per la moltiplicazione di radicali, supponendo che valga l'uguaglianza: $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$, siamo in errore perché non è vero che $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$ se a e b sono entrambi non nulli, come mostra il seguente controesempio $\sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5 \neq \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.

Visto l'esempio precedente, dobbiamo tentare un'altra strada per determinare come sommare due radicali. Forse dovremmo prima chiederci se è possibile effettuare sempre tale somma e se questa è sempre un radicale. Per rispondere a queste domande vediamo ancora un esempio.

Esempio 13

- Si esegua la somma: $\sqrt{2} + \sqrt{2}$. In questo caso vogliamo sommare due enti matematici uguali: il simbolo $\sqrt{2}$, qualsiasi numero esso rappresenti, è lo stesso simbolo in entrambi gli addendi. La somma di due quantità uguali è il doppio della quantità stessa, cioè $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2}$. In pratica $a + a = 2a$.
- Semplificare l'espressione $\sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt[3]{2} - 4 \cdot \sqrt{2} + 5 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{3}$. Notiamo la presenza di tre classi di radicali con lo stesso radicando: $\sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt[3]{2} - 4 \cdot \sqrt{2} + 5 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{3} = (1-4) \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt[3]{2} + (5+2) \cdot \sqrt{3} = -3 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt[3]{2} + 7 \cdot \sqrt{3}$. L'ultima espressione non è ulteriormente semplificabile.

Prima di continuare, stabiliamo alcuni concetti.

Definizione 5

Un radicale in cui il radicando, scomposto in fattori primi, presenta fattori che sono tutti potenze con esponente minore dell'indice, si dice **radicale irriducibile**.

Definizione 6

Un radicale in cui il radicando può esprimersi come una potenza di esponente multiplo dell'indice, si dice **radicale apparente**.

In pratica un radicale apparente è una espressione razionale, come per esempio $\sqrt{16}$ oppure $\sqrt[3]{a^3 b^6 c^9}$, che sono rispettivamente uguali a 4 e al monomio ab^2c^3 .

Definizione 7

Due radicali si dicono **simili** fra loro se ridotti a radicali irriducibili hanno lo stesso indice e lo stesso radicando, ciascuno moltiplicato per un numero razionale.

Ora nasce un problema: siamo sicuri di saper riconoscere sempre due radicali simili?

Esempio 14

- Consideriamo i radicali $\sqrt{2}$ e $\sqrt{50}$. Secondo la definizione 7 i due radicali non sono simili, ma è anche vero che il secondo radicale non è irriducibile: $\sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5^2} = \sqrt{2} \cdot 5 = 5 \cdot \sqrt{2}$. Adesso lo è ed effettivamente possiamo dire che i due radicali sono simili.
- Semplificare $\sqrt{18} + 3 \cdot \sqrt{24} - 2 \cdot \sqrt{50} + \sqrt{242} + 4 \cdot \sqrt{147} - \sqrt{162}$. Apparentemente non vi è neanche una coppia di radicali simili, trasformiamo in modo da ottenere solo radicali irriducibili.

$\sqrt{2 \cdot 3^2} + 3\sqrt{2^3 \cdot 3} - 2\sqrt{2 \cdot 5^2} + \sqrt{2 \cdot 11^2} + 4\sqrt{3 \cdot 7^2} - \sqrt{2 \cdot 3^4} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3^2} + 3 \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2 \cdot 3} - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5^2} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{11^2} + 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{7^2} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3^4} =$
 $= 3 \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 3} - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{2} + 11 \cdot \sqrt{2} + 4 \cdot 7 \cdot \sqrt{3} - 3^2 \cdot \sqrt{2}$. Abbiamo ottenuto tre classi di radicali simili e quindi possiamo effettuare le somme: $(3 - 10 + 11 - 9) \cdot \sqrt{2} + 6 \cdot \sqrt{6} + 28 \cdot \sqrt{3} = -5 \cdot \sqrt{2} + 6 \cdot \sqrt{6} + 28 \cdot \sqrt{3}$.

- Semplificare $(9 - 5 \cdot \sqrt{3}) \cdot (9 + 5 \cdot \sqrt{3}) + 4 \cdot \sqrt{7} \cdot (2 \cdot \sqrt{3} - 3) + (4 \cdot \sqrt{7} - \sqrt{3})^2$. Dato che un radicale può considerarsi come un particolare monomio, per esso valgono tutte le regole viste su monomi e polinomi, quindi anche quelle sui prodotti notevoli. L'espressione viene così sviluppata:

$$81 - 25\sqrt{3^2} + 8\sqrt{21} - 12\sqrt{7} + 16\sqrt{7^2} - 8\sqrt{21} + \sqrt{3^2} = 81 - 75 - 12\sqrt{7} + 112 + 3 = 121 - 12\sqrt{7}$$

Vediamo un'altra questione. Che cosa significa estrarre la radice da un radicale, ossia quale senso attribuire a scritte del tipo: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$? Vale il seguente risultato.

Teorema 5

La radice di indice m di un radicale di indice n equivale a un radicale di indice $m \cdot n$ e uguale radicando.

Dimostrazione

Poniamo $x = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ e, applicando le consuete regole, scriviamo $x^n = \sqrt[m]{a} \Rightarrow x^{n \cdot m} = a$, quindi $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$.

Vediamo degli esempi.

Esempio 15

- Esprimere in forma più semplice il seguente radicale: $\sqrt[5]{4\sqrt[3]{\sqrt{k}}}$. Per il Teorema 5, possiamo dire che il radicale è equivalente a $\sqrt[120]{k}$.
- Semplificare il radicale: $\sqrt[3]{2^5\sqrt[4]{8}}$. Dobbiamo esprimere il nido di radicali con un solo indice, ma, per poter applicare il Teorema 5, dobbiamo eliminare i fattori intermedi. A tal proposito ricordiamo come si poteva portar fuori dal segno di radice un fattore il cui esponente fosse multiplo dell'indice: ripetiamo il procedimento in senso inverso. Poiché $\sqrt{2 \cdot 3^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3^2} = 3 \cdot \sqrt{2}$ è anche $3 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 3^2}$. Quindi nel nostro caso avremo, partendo dal radicale più interno:

$$\sqrt[3]{2^5\sqrt[4]{8}} = \sqrt[3]{2^5\sqrt[4]{8 \cdot 4^4}} = \sqrt[3]{2^5\sqrt[4]{2^3 \cdot 2^8}} = \sqrt[3]{2^5\sqrt[4]{2^{11}}} = \sqrt[3]{2^{20}\sqrt[4]{2^{11}}} = \sqrt[60]{2^{20} \cdot 2^{11}} = \sqrt[60]{2^{31}}.$$

Il teorema 5 evidentemente non permette di semplificare il seguente radicale $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$. Non è detto però che tutti i radicali del tipo $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ possano essere scritti in modo più semplice. Chiediamoci intanto quando il radicale più esterno può essere eliminato; ripensando ai radicali apparenti ciò può farsi se il radicando è un quadrato perfetto. Vediamo qualche esempio.

Esempio 16

- Semplificare il radicale $\sqrt{5 + 2 \cdot \sqrt{6}}$. Vogliamo scrivere $5 + 2 \cdot \sqrt{6}$ come quadrato di un binomio del tipo $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, cioè $5 + 2 \cdot \sqrt{6} = x + y + 2 \cdot \sqrt{xy}$. Dovremmo quindi risolvere il seguente sistema di 2° grado $\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$, che non abbiamo ancora affrontato. Se però lo guardiamo attentamente, ci rendiamo conto che tale sistema risolve un problema ben noto: quello di determinare due numeri di cui conosciamo la somma e il prodotto. Se questi numeri sono interi sappiamo risolvere il problema! Nel caso particolare tali numeri sono 2 e 3. Pertanto possiamo scrivere:

$$\sqrt{5 + 2 \cdot \sqrt{6}} = \sqrt{2 + 3 + 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 3}} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2} = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

- Semplificare, se possibile, il radicale $\sqrt{5 + \sqrt{6}}$. Stavolta il sistema da risolvere è il seguente:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2 \cdot \sqrt{xy} = \sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ 4xy = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Il sistema non ha soluzioni intere, dato che il prodotto di due numeri interi non può avere denominatore 2. Esso potrebbe avere soluzioni razionali o reali, che, allo stato attuale delle nostre conoscenze, non siamo in grado di determinare. Ci limitiamo pertanto a dire che il problema non ha soluzioni in $\mathbb{Z}$.

- Semplificare, se possibile, il radicale $\sqrt[3]{3 + 3 \cdot \sqrt[3]{2} + 3 \cdot \sqrt[3]{4}}$. Cerchiamo di provare che il radicando è un cubo perfetto. Vogliamo cioè determinare due numeri interi x e y per cui si ha:

$$(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})^3 = x + y + 3 \cdot \sqrt[3]{x^2 y} + 3 \cdot \sqrt[3]{x y^2} = 3 + 3 \cdot \sqrt[3]{2} + 3 \cdot \sqrt[3]{4}$$

Dobbiamo allora risolvere in $\mathbb{Z}$, il seguente sistema:
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 y = 2 \\ xy^2 = 4 \end{cases}$$
 Considerando le possibili soluzioni

interi della prima equazione e sostituendole nelle altre due, l'unica soluzione del sistema, in $\mathbb{Z}$, è $x = 1$, $y = 2$. Pertanto: $\sqrt[3]{3 + 3 \cdot \sqrt[3]{2} + 3 \cdot \sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{(1 + \sqrt[3]{2})^3} = 1 + \sqrt[3]{2}$.

I precedenti esempi ci hanno mostrato che è complicato cercare di semplificare un'espressione del tipo: $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$. Enunciamo allora il seguente risultato senza dimostrazione.

Teorema 6

L'espressione $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ si può semplificare come somma di radicali semplici solo se $a^2 - b$ è un quadrato perfetto ed in tal caso si ha:
$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}.$$

Esempio 17

- Riprendiamo il radicale $\sqrt{5 + 2 \cdot \sqrt{6}}$, che scriviamo nella forma $\sqrt{5 + \sqrt{24}}$, dato che $5^2 - 24 = 1$, che è un quadrato perfetto, possiamo dire che $\sqrt{5 + \sqrt{24}} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{1}}{2}} + \sqrt{\frac{5 - \sqrt{1}}{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, che coincide con il risultato trovato prima.
- Per $\sqrt{5 + \sqrt{6}}$ invece si ha $5^2 - 6 = 19$, che non è un quadrato perfetto, quindi non possiamo semplificarlo.

Definizione 8

Un radicale del tipo $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$, per cui si ha: $a^2 - b$ quadrato perfetto si dice **radicale doppio**.

Verifiche

Lavoriamo insieme

- Le prime 4 cifre decimali esatte di $\sqrt{249}$ sono 15,7797; quelle di $\sqrt{157}$ invece: 12,5299. Se sommiamo i due valori con queste cifre decimali otteniamo: $\sqrt{157} + \sqrt{249} = 28,3096$. E in effetti questo valore è corretto fino al quarto decimale.
- Se moltiplichiamo otteniamo: 197,7180 mentre calcolando con il metodo delle approssimazioni $\sqrt{157 \cdot 249}$ otteniamo 197,7194 che coincide con il precedente valore solo fino alle prime due cifre decimali.
- Dividendo avremo: $\frac{12,5299}{15,7797} \approx 0,7940$, e $\sqrt{\frac{157}{249}} \approx \sqrt{0,6305} \approx 0,7940$. Come si vede, non sempre l'operazione fra approssimazioni è una buona approssimazione. Il risultato non dipende dall'operazione, bensì dai singoli valori.

Livello 2

- Indichiamo con a, b, c rispettivamente i valori approssimati con 4 cifre decimali esatte dei numeri irrazionali $\sqrt{14}, \sqrt{24}, \sqrt{38}$. Controllare la validità dell'uguaglianza $a + b = c$.
- Indichiamo con a, b, c rispettivamente i valori approssimati con 4 cifre decimali esatte dei numeri irrazionali $\sqrt{72}, \sqrt{35}, \sqrt{37}$. Controllare la validità dell'uguaglianza $a - b = c$.
- Indichiamo con a, b, c rispettivamente i valori approssimati con 4 cifre decimali esatte dei numeri irrazionali $\sqrt{75}, \sqrt{15}, \sqrt{5}$. Controllare la validità dell'uguaglianza $a : b = c$. (Per l'uguaglianza si considerino solo le prime quattro cifre decimali del quoziente)
- Indichiamo con a, b, c rispettivamente i valori approssimati con 4 cifre decimali esatte dei numeri irrazionali $\sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{21}$. Controllare la validità dell'uguaglianza $a \cdot b = c$. (Naturalmente il prodotto avrà 8 cifre decimali, per l'uguaglianza si considerino solo le prime quattro)

Lavoriamo insieme

Vogliamo ridurre a un solo radicale il seguente prodotto di radicali: $\sqrt{18} \cdot \sqrt{16} \cdot \sqrt{44} \cdot \sqrt{11} \cdot \sqrt{28}$. Cominciamo con lo scomporre i radicandi in fattori primi: $\sqrt{2 \cdot 3^2} \cdot \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{2^2 \cdot 11} \cdot \sqrt{11} \cdot \sqrt{2^2 \cdot 7}$. Semplifichiamo, dove possibile, i radicali e moltiplichiamo fra loro i radicandi e i fattori fuori dalla radice, dato che tutti i radicali hanno lo stesso indice: $\sqrt{2 \cdot 3^2} \cdot 2^2 \cdot \sqrt{2^2 \cdot 11} \cdot \sqrt{11} \cdot \sqrt{2^2 \cdot 7} = 4 \cdot \sqrt{2^5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11^2}$. A questo punto siamo riusciti a scrivere il prodotto di partenza come un solo radicale e lo scopo è raggiunto. Possiamo però semplificare ulteriormente, spezzando il radicale in altri due, contenenti ciascuno un radicando, uno formato solo da potenze pari, l'altro solo da potenze di esponente 1: $4 \cdot \sqrt{2^5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11^2} = 4 \cdot \sqrt{2^4 \cdot 11^2} \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7}$. In questo modo il primo radicale diventa un prodotto di numeri interi, il secondo rimane: $4 \cdot 2^2 \cdot 11 \cdot \sqrt{42} = 176 \cdot \sqrt{42}$.

Ridurre a un solo radicale le seguenti espressioni

Livello 1

- $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{32} \cdot \sqrt{128}; \sqrt{50} \cdot \sqrt{24} \cdot \sqrt{72} \cdot \sqrt{32} \cdot \sqrt{45}; \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt{24}$ $\left[256; 2880 \cdot \sqrt{15}; 432 \right]$
- $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{81}; \sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{18} \cdot \sqrt[3]{48} \cdot \sqrt[3]{45}; \frac{\sqrt{24} \cdot \sqrt{32} \cdot \sqrt{40}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{18}}$ $\left[9 \cdot \sqrt[3]{3}; 36 \cdot \sqrt[3]{20}; \frac{16}{3} \right]$
- $\frac{\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{14} \cdot \sqrt[4]{18}}{\sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[4]{10} \cdot \sqrt[4]{6}}; \frac{\sqrt[3]{28} \cdot \sqrt[3]{17} \cdot \sqrt[3]{19}}{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{34} \cdot \sqrt[3]{38}}; \frac{\sqrt{30} \cdot \sqrt{42} \cdot \sqrt{68}}{\sqrt{54} \cdot \sqrt{28} \cdot \sqrt{34}}$ $\left[\sqrt[4]{3}; 1; \frac{\sqrt{15}}{3} \right]$

$$4. \quad \sqrt{ab} \cdot \sqrt{ac} \cdot \sqrt{bc}; \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt[3]{x^5}; \sqrt{ab^3} \cdot \sqrt{a^2b} \cdot \sqrt{a^5b^3} \cdot \sqrt{a^7} \cdot \sqrt{ab} \quad \left[|a| \cdot |b| \cdot |c|; x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}; a^8b^4 \right]$$

Lavoriamo insieme

- Semplificare la seguente espressione: $\sqrt[3]{\frac{b^2-9}{b+1}} \cdot \sqrt[3]{\frac{b^2+2b+1}{b^2+5b+6}} \cdot \sqrt[3]{b^2+4b+4}$. Visto che i radicali hanno lo stesso indice basta effettuare le operazioni fra i radicandi, scrivendo il risultato sotto un'unica radice di indice tre. Otteniamo così: $\sqrt[3]{\frac{(b-3) \cdot (b+3)}{b+1} \cdot \frac{(b+1)^2}{(b+2) \cdot (b+3)} \cdot \frac{1}{(b+2)^2}} = \sqrt[3]{\frac{(b-3)}{(b+2)^3}} = \frac{\sqrt[3]{b-3}}{b+2}$. L'ultimo passaggio è motivato dal fatto che, se il rapporto di due radicali con lo stesso indice dispari può essere scritto come unico radicale, è possibile svolgere l'operazione anche al contrario.

- Vogliamo ridurre a un solo radicale la seguente frazione contenente radicali: $\frac{\sqrt[3]{ab^2} \cdot \sqrt[4]{a^2b}}{ab \cdot \sqrt{ab}}$. Innanzitutto dobbiamo ridurre tutti i radicali allo stesso indice che è $mcm(3, 4, 2) = 12$. Perciò scriviamo:

$$\frac{\sqrt[3]{ab^2} \cdot \sqrt[4]{a^2b}}{ab \cdot \sqrt{ab}} = \frac{\sqrt[12]{(ab^2)^4} \cdot \sqrt[12]{(a^2b)^3}}{\sqrt[12]{(ab)^{12}} \cdot \sqrt[12]{(ab)^6}} = \frac{\sqrt[12]{a^4b^8} \cdot \sqrt[12]{a^6b^3}}{\sqrt[12]{a^{12}b^{12}} \cdot \sqrt[12]{a^6b^6}}$$

A questo punto possiamo scrivere tutto all'interno di un solo radicale e semplificare la frazione ottenuta:

$$\frac{\sqrt[12]{a^4b^8} \cdot \sqrt[12]{a^6b^3}}{\sqrt[12]{a^{12}b^{12}} \cdot \sqrt[12]{a^6b^6}} = \sqrt[12]{\frac{a^4b^8 \cdot a^6b^3}{a^{12}b^{12} \cdot a^6b^6}} = \sqrt[12]{\frac{a^{10}b^{11}}{a^{18}b^{18}}} \Rightarrow \sqrt[12]{\frac{a^{10}b^{11}}{a^{18}b^{18}}} = \sqrt[12]{\frac{1}{a^8b^7}}$$

Dato che nessuna delle potenze del radicando ha esponente maggiore o uguale all'indice, 12, il radicale ottenuto è irriducibile ed è quello richiesto.

Ridurre a un solo radicale le seguenti espressioni

Livello 1

$$5. \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[5]{5}; \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{4}; \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[4]{5} \quad \left[\sqrt[15]{3^5 \cdot 5^3}; 2 \cdot \sqrt[3]{3}; \sqrt[30]{2^{22} \cdot 3^{15}} \right]$$

$$6. \quad \sqrt{72} \cdot \sqrt[3]{36} \cdot \sqrt[4]{144}; \sqrt{28} \cdot \sqrt[3]{42} \cdot \sqrt[4]{35}; \frac{\sqrt{38} \cdot \sqrt[3]{52}}{\sqrt{26} \cdot \sqrt[3]{78}} \quad \left[6 \cdot \sqrt[6]{6}; \frac{1}{3} \cdot \sqrt[12]{5^3 \cdot 6^8 \cdot 7^5}; \frac{1}{39} \cdot \sqrt[6]{2^2 \cdot 3^2 \cdot 247^3} \right]$$

$$7. \quad \frac{\sqrt{98} \cdot \sqrt[4]{45} \cdot \sqrt[3]{15}}{\sqrt[3]{21} \cdot \sqrt[6]{35}}; \frac{\sqrt{14} \cdot \sqrt[3]{21} \cdot \sqrt[4]{28}}{\sqrt{35} \cdot \sqrt[3]{42} \cdot \sqrt[4]{49}}; \frac{\sqrt[3]{18} \cdot \sqrt[6]{45}}{\sqrt[4]{6} \cdot \sqrt[3]{24}} \cdot \sqrt[12]{63} \cdot \frac{\sqrt{12} \cdot \sqrt[3]{36}}{\sqrt[3]{40} \cdot \sqrt[4]{20}} \quad \left[\frac{\sqrt[12]{2^6 \cdot 3^{10} \cdot 5^9 \cdot 7^6}}{15}; \frac{\sqrt[12]{2^8 \cdot 5^6 \cdot 7^9}}{35}; \frac{\sqrt[12]{2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^5 \cdot 7}}{3} \right]$$

Livello 2

$$8. \quad \sqrt{m} \cdot \sqrt[3]{m^2} \cdot \sqrt[4]{m^3}; \sqrt{pq} \cdot \sqrt[3]{pq} \cdot \sqrt[4]{pq}; \sqrt{a+b} \cdot \sqrt{a-b} \cdot \sqrt{a^2-b^2} \quad \left[m \cdot \sqrt[12]{|m|^{11}}; pq \cdot \sqrt[12]{pq}; |a^2-b^2| \right]$$

$$9. \quad \sqrt[3]{2m+n} \cdot \sqrt[3]{4m^2-2mn+n^2}; \frac{\sqrt{a^3b^4} \cdot \sqrt[3]{a^4b^3} \cdot \sqrt[6]{a^7b^7}}{\sqrt[3]{a^5b} \cdot \sqrt[4]{ab^5} \cdot \sqrt[12]{ab}} \quad \left[\sqrt[3]{8m^3+n^3}; a^2b^2 \cdot \sqrt{|b|} \right]$$

$$10. \quad \frac{\sqrt{mn^2} \cdot \sqrt[3]{m^2n}}{\sqrt[4]{m^3n} \cdot \sqrt[6]{mn^3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{mn} \cdot \sqrt[3]{m^2n}}{\sqrt{m^2n^3} \cdot \sqrt[6]{m^3n^2}}; \sqrt{\frac{a^2-5a+6}{a^2-5a+4}} \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2-1}{a^2-2a-3}} \quad \left[\frac{\sqrt[3]{m^2n}}{mn}; \sqrt[6]{\frac{(a-3) \cdot (a-2)^3}{(a-4)^3 \cdot (a-1)}} \right]$$

$$11. \quad \sqrt{\frac{(x-1)^2-y^2}{(x+1)^2-y^2}} \cdot \sqrt{\frac{(x+1-y) \cdot (x+1+y)}{(x-1+y) \cdot (x-1-y)}}; \sqrt{\frac{x^2+3x-10}{x^2-4}} \cdot \sqrt{\frac{x^2+8x+15}{x^2+5x+6}} \quad \left[1; \left| \frac{x+5}{x+2} \right| \right]$$

$$12. \sqrt{\frac{(3x-5y)^2}{(3x+5y) \cdot (x+y)}} : \sqrt[6]{\frac{(3x-5y) \cdot (x-y)}{x^2-y^2}} \cdot \sqrt[6]{\frac{(x+y)^2}{(3x-5y)^3}} ; \frac{\sqrt[4]{(q-p)^3} \cdot \sqrt[3]{(q-p)^4}}{\sqrt[5]{(q-p)^4} \cdot \sqrt[4]{(q-p)^5}} \\ \left[\sqrt[6]{\frac{(3x-5y)^2}{(x^2-y^2)^2 \cdot (3x+5y)^3}} ; \sqrt[60]{(q-p)^{17}} \right]$$

Livello 3

$$13. \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2xy}} - 1 : \sqrt[3]{\frac{x^2+y^2}{2xy}} + 1 \cdot \sqrt[5]{\frac{x^4+y^4}{2x^2y^2}} - 1 ; \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} - 1 \cdot \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} + 1 : \sqrt{\frac{(x+y)^2 - x^2y^2}{xy}} \\ \left[|x-y| \cdot \sqrt[30]{\frac{(x-y)^{12}}{2^{11}x^{17}y^{17} \cdot (x+y)^8}} ; \frac{1}{|xy| \cdot \sqrt{xy}} \right]$$

$$14. \frac{\sqrt[3]{\frac{27m^3-n^3}{27m^3+n^3}} \cdot \sqrt{\frac{9m^2+n^2-6mn}{-27m^2n+27m^3-n^3+9mn^2}}}{\sqrt{9m^2-n^2} \cdot \sqrt[6]{3m-n}} ; \frac{\sqrt[3]{\frac{x^2-6xy+9y^2}{x^2+2xy+y^2}} \cdot \sqrt{\frac{x^4-y^4}{x^2-5xy+6y^2}}}{\sqrt[4]{\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-4xy+4y^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2+y^2}{x+y}}} \\ \left[\sqrt[6]{\frac{(9m^2+3mn+n^2)^2}{(3m-n)^5 \cdot (3m+n)^3 \cdot (2m^3+n^3)^2}} ; \sqrt[6]{|x+y| \cdot |x-3y| \cdot (x^2+y^2)} \right]$$

$$15. \frac{\sqrt{x^2-2xy+y^2-1} \cdot \sqrt[3]{\frac{x-y}{x-y+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-y+1}}}{\sqrt{\frac{x-y}{x^2+y^2-2xy-2x+2y+1}} \cdot \sqrt[6]{\frac{x-y-1}{x-y}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x-y+1}}} \left[\sqrt[3]{(x-y-1)^4} \right]$$

Lavoriamo insieme

Dato il seguente radicale vogliamo semplificarlo: $\sqrt{\frac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}}$. Facciamo attenzione al fatto che abbiamo a che fare con somme e non con prodotti, pertanto non possiamo semplificare come abbiamo fatto finora. Cerchiamo perciò di trasformare le somme in prodotti, mettendo in evidenza, scriviamo perciò:

$$\sqrt{\frac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}} = \sqrt{\frac{4^{10^6} \cdot (2^{10}+1)}{\cancel{4^4} \cdot (2^4+4^7)}} = \sqrt{\frac{4^6 \cdot (2^{10}+1)}{2^4+2^{14}}} = \sqrt{\frac{2^{\cancel{12}8} \cdot (2^{10}+1)}{\cancel{2^4} \cdot (1+2^{10})}} = \sqrt{2^8} = 2^4$$

Semplificare le seguenti espressioni**Livello 3**

$$16. \sqrt{\frac{3^5+9^5}{3^9+9^4}} ; \sqrt{\frac{2^6+4^6}{2^{10}+4^3}} ; \sqrt{\frac{2^{10}+8^3}{2^6+4^2}} \left[\frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{61}{3}} ; \sqrt{\frac{65}{17}} ; 4 \cdot \sqrt{\frac{6}{5}} \right]$$

$$17. \sqrt[3]{\frac{3^5+3^7}{3^8+9^5}} ; \sqrt[4]{\frac{2^8 \cdot 3^7 + 2^{11} \cdot 3^4}{2^4 \cdot 3^{11} + 2^7 \cdot 3^8}} ; \sqrt[5]{\frac{3^{14} \cdot 5^5 + 3^{10} \cdot 5^{13}}{3^9 \cdot 5^5 + 3^5 \cdot 5^{13}}} \left[\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; 3 \right]$$

Lavoriamo insieme

Semplificare l'espressione seguente: $3 \cdot \sqrt{2} - 4 \cdot \sqrt{5} + 2 \cdot \sqrt{2} - 6 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{5}$. E' sufficiente sommare fra loro i coefficienti dei radicali simili, scrivendo perciò: $(3 + 2 - 6) \cdot \sqrt{2} + (-4 + 1) \cdot \sqrt{5} = -\sqrt{2} - 3\sqrt{5}$

Semplificare le seguenti espressioni**Livello 1**

18. $\sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot \sqrt{2}$; $\sqrt{5} + 4 \cdot \sqrt{5} - 7 \cdot \sqrt{5} + \sqrt{5}$; $2 - \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{2} - 1 + 4 \cdot \sqrt{2}$; $\sqrt[4]{4} + \sqrt{2} + \sqrt[6]{8} - \sqrt[8]{16}$
 $[0; -\sqrt{5}; 1 + 6 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{3}; 2 \cdot \sqrt{2}]$
19. $2 \cdot \sqrt{3} - 4 \cdot \sqrt{5} + 7 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{5}$; $4 \cdot \sqrt{11} - 2 \cdot \sqrt{7} + \sqrt{5} - 3 \cdot \sqrt{5} + 5 \cdot \sqrt{7} - \sqrt{11}$
 $[9 \cdot \sqrt{3} - 6 \cdot \sqrt{5}; 3 \cdot \sqrt{11} + 3 \cdot \sqrt{7} - 2 \cdot \sqrt{5}]$
20. $2 \cdot \sqrt{13} - 4 \cdot \sqrt{17} + \sqrt{16} - \sqrt{13} + 3 \cdot \sqrt{17} - \sqrt{4} - \sqrt{13} + \sqrt{17}$; $\sqrt{7} - 3 \cdot \sqrt{5} + 4 \cdot \sqrt{7} + 2 \cdot \sqrt{5} - \sqrt{35}$
 $[2; (5 - \sqrt{5}) \cdot \sqrt{7} - \sqrt{5}]$
21. $\sqrt{4} + 4 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{16} + 7 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{64}$; $3 \cdot \sqrt{2} - 4 \cdot \sqrt{3} + 4 \cdot \sqrt{5} - 2 \cdot \sqrt{3} - 4 \cdot \sqrt{5} + \sqrt{2}$ $[6 + 11 \cdot \sqrt{2}; 4 \cdot \sqrt{2} - 6 \cdot \sqrt{3}]$

Lavoriamo insieme

Semplificare l'espressione seguente: $2 \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot \sqrt{75} + 2 \cdot \sqrt{242} - \sqrt{27} + \sqrt{108}$. Apparentemente non abbiamo radicali simili, ma, se semplifichiamo quelli riducibili, otteniamo:

$$2 \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot \sqrt{3 \cdot 5^2} + 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 11^2} - \sqrt{3^3} + \sqrt{2^2 \cdot 3^3} = 2 \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{11^2} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2^2 \cdot 3^2} \cdot \sqrt{3} =$$

$$= 2 \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot 11 \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot \sqrt{2} - 15 \cdot \sqrt{3} + 22 \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot \sqrt{3} + 6 \cdot \sqrt{3}$$

Adesso possiamo procedere come nell'esempio precedente.

$$2 \cdot \sqrt{2} - 15 \cdot \sqrt{3} + 22 \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot \sqrt{3} + 6 \cdot \sqrt{3} = (2 + 22) \cdot \sqrt{2} + (-15 - 3 + 6) \cdot \sqrt{3} = 24 \cdot \sqrt{2} - 12 \cdot \sqrt{3}$$

Semplificare le seguenti espressioni**Livello 1**

22. $\sqrt[3]{27} + 5 \cdot \sqrt[3]{3} - 2 \cdot \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{64} - 3 \cdot \sqrt[3]{3}$; $\sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt[4]{9} - 3 \cdot \sqrt[3]{729}$
 $[7; 2 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2} - 27]$
23. $4 \cdot \sqrt{2} - 7 \cdot \sqrt{4} + 5 \cdot \sqrt{8} - \sqrt{16} + \sqrt{32} - \sqrt{64}$; $\sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{9} + 3 \cdot \sqrt{27} - 4 \cdot \sqrt{81} + 5 \cdot \sqrt{243}$
 $[18 \cdot \sqrt{2} - 26; 55 \cdot \sqrt{3} - 42]$
24. $-3 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{3} - 4 \cdot \sqrt{12} + 5 \cdot \sqrt{75} + \sqrt{18} + \sqrt{50}$
 $[5 \cdot \sqrt{2} + 19 \cdot \sqrt{3}]$
25. $3 \cdot \sqrt{48} - 5 \cdot \sqrt{75} + 4 \cdot \sqrt{18} - 2 \cdot \sqrt{27} - 4 \cdot \sqrt{12} + 5 \cdot \sqrt{50}$
 $[37 \cdot \sqrt{2} - 27 \cdot \sqrt{3}]$
26. $3 \cdot \sqrt{162} - 5 \cdot \sqrt{28} + 4 \cdot \sqrt{12} - 2 \cdot \sqrt{8} - 4 \cdot \sqrt{63} + 5 \cdot \sqrt{175}$
 $[23 \cdot \sqrt{2} + 8 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot \sqrt{7}]$
27. $4 \cdot \sqrt{45} - 3 \cdot \sqrt{98} + 4 \cdot \sqrt{128} + 2 \cdot \sqrt{80} - 4 \cdot \sqrt{20} + 5 \cdot \sqrt{18}$
 $[26 \cdot \sqrt{2} + 12 \cdot \sqrt{5}]$

Livello 2

28. $3 \cdot \sqrt{72} - 5 \cdot \sqrt{147} - 4 \cdot \sqrt{18} - 6 \cdot \sqrt{108} - 3 \cdot \sqrt{96} + 5 \cdot \sqrt{75}$
 $[6 \cdot \sqrt{2} - (46 + 12\sqrt{2}) \cdot \sqrt{3}]$
29. $7 \cdot \sqrt{24} - 2 \cdot \sqrt{99} + 4 \cdot \sqrt{54} + 2 \cdot \sqrt{150} - 4 \cdot \sqrt{44} + 5 \cdot \sqrt{396}$
 $[36 \cdot \sqrt{6} + 16 \cdot \sqrt{11}]$
30. $2 \cdot \sqrt{52} - 5 \cdot \sqrt{60} + 4 \cdot \sqrt{13} + 12 \cdot \sqrt{117} - 4 \cdot \sqrt{15} + 5 \cdot \sqrt{135}$
 $[15 + 44 \cdot \sqrt{13}]$
31. $\sqrt[3]{2} - 2 \cdot \sqrt[3]{4} + 3 \cdot \sqrt[3]{8} - 4 \cdot \sqrt[3]{16} + 5 \cdot \sqrt[3]{32} - 6 \cdot \sqrt[3]{64} + 7 \cdot \sqrt[3]{128}$
 $[-18 + 21 \cdot \sqrt[3]{2} + 8 \cdot \sqrt[3]{4}]$

Lavoriamo insieme

Semplificare l'espressione seguente: $\sqrt{a^2b^3c^4} - 2\sqrt{4a^4b^5c^6} + 3\sqrt{abc} + \sqrt{16a^7b^9c^3} - 5\sqrt{121a^8b^{13}}$. Si ha:
 $\sqrt{a^2b^3c^4} \cdot \sqrt{b} - 2\sqrt{2^2a^4b^4c^6} \cdot \sqrt{b} + 3\sqrt{abc} + \sqrt{2^4a^6b^8c^2} \cdot \sqrt{abc} - 5\sqrt{11^2a^8b^{12}} \cdot \sqrt{b} = abc^2 \cdot \sqrt{b} - 4a^2b^2c^3 \cdot \sqrt{b} +$
 $+ 3\sqrt{abc} + 4a^3b^4c \cdot \sqrt{abc} - 55a^4b^6 \cdot \sqrt{b} = \sqrt{b} \cdot (abc^2 - 4a^2b^2c^3 - 55a^4b^6) + \sqrt{abc} \cdot (3 + 4a^3b^4c)$

Semplificare le seguenti espressioni, ipotizzando che ciascun radicale abbia senso in $\mathbb{R}$.

Livello 2

32. $\sqrt{a} + \sqrt{a^3} - \sqrt{4a} + \sqrt{9a^5}$; $\sqrt{x^3} - 2 \cdot \sqrt[4]{x^6} + 3 \cdot \sqrt{x} - \sqrt{16x^3}$; $\sqrt[3]{27n} + 2 \cdot \sqrt[3]{8n} - 4 \cdot \sqrt[6]{n^2} + \sqrt{25n} - 2 \cdot \sqrt[3]{n^4}$
 $\left[(3a^2 + a - 1) \cdot \sqrt{a}; (-6x + 3) \cdot \sqrt{x}; (-2n + 3) \cdot \sqrt[3]{n} + 5 \cdot \sqrt{n} \right]$
33. $\sqrt{a^2b} - \sqrt{ab^2} + \sqrt{a^2b^2} - 2 \cdot a\sqrt{b} + b \cdot \sqrt{a}$; $\sqrt{ab^6} + 3 \cdot \sqrt{a^3b^4} + 3 \cdot \sqrt{a^5b^2} + \sqrt{a^7}$
 $\left[ab - a \cdot \sqrt{b}; (a + b)^3 \cdot \sqrt{a} \right]$
34. $\sqrt{y} + 2 \cdot \sqrt[6]{y^3} + 3 \cdot \sqrt[8]{y^4} - 4 \cdot \sqrt[10]{y^5} + 5 \cdot \sqrt[12]{y^6}$; $\sqrt[3]{z^2} - \sqrt[6]{z^4} + \sqrt[9]{z^6} - \sqrt[12]{z^8}$
 $\left[7 \cdot \sqrt{y}; 0 \right]$
35. $\sqrt{m^2x} + \sqrt{m^4x^3} - \sqrt{x^5} + m \cdot \sqrt{x} - m^2x \cdot \sqrt{x} + 2x^2 \cdot \sqrt{x}$; $\sqrt{a} + 2 \cdot \sqrt{a} - a \cdot \sqrt{a} + 2a \cdot \sqrt{a} - \sqrt{a^2}$
 $\left[(2m + x^2) \cdot \sqrt{x}; (3 + a) \cdot \sqrt{a} - a \right]$
36. $\sqrt[3]{ab^4c} - \sqrt[3]{a^4bc} + \sqrt[3]{abc^4} + a \cdot \sqrt[3]{abc} - 2b \cdot \sqrt[3]{abc} + 3c \cdot \sqrt[3]{abc}$
 $\left[(-b + 4c) \cdot \sqrt[3]{abc} \right]$
37. $\sqrt[3]{m^7n} + 2 \cdot \sqrt[3]{8m^4n^5} + \sqrt[3]{mn^7} + 2 \cdot \sqrt[3]{m^4n^4} - \sqrt[3]{64m^7n^2} - \sqrt[3]{mn^8}$
 $\left[(m + n)^2 \cdot \sqrt[3]{mn} - (2m - n)^2 \cdot \sqrt[3]{mn^2} \right]$
38. $\sqrt[4]{m^2n^4p^6} + 2 \cdot \sqrt{mn^2p^3} - \sqrt{mp^3} - 3n \cdot \sqrt{mp^3}$
 $\left[3 \cdot \sqrt{mn^2p^3} - (p + 3n) \cdot \sqrt{mp} \right]$

Lavoriamo insieme

Semplificare l'espressione seguente: $(4 - 2 \cdot \sqrt{2}) \cdot (4 + 2 \cdot \sqrt{2}) - 7 \cdot \sqrt{3} \cdot (\sqrt{5} - 1) + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$. È sufficiente applicare le regole che si utilizzano nel calcolo polinomiale. Abbiamo così:

$$16 - 4 \cdot \sqrt{2^2} - 7 \cdot \sqrt{15} + 7 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2^2} + \sqrt{3^2} - 2 \cdot \sqrt{6} = 16 - 4 \cdot 2 - 7 \cdot \sqrt{15} + 7 \cdot \sqrt{3} + 2 + 3 - 2 \cdot \sqrt{6} =$$

$$= 16 - 8 - 7 \cdot \sqrt{15} + 7 \cdot \sqrt{3} + 5 - 2 \cdot \sqrt{6} = 13 - 7 \cdot \sqrt{15} + 7 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{6}$$

Semplificare le seguenti espressioni

Livello 2

39. $\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2$; $\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^3 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^3$; $(\sqrt[3]{\sqrt{30} + \sqrt{3}}) \cdot (\sqrt[3]{\sqrt{30} - \sqrt{3}})$
 $\left[\sqrt{5}; 2 \cdot \sqrt{5}; 3 \right]$
40. $(\sqrt[4]{\sqrt{110} + \sqrt{46}}) \cdot (\sqrt[4]{\sqrt{110} - \sqrt{46}})$; $(7 - 5 \cdot \sqrt{3}) \cdot (7 + 5 \cdot \sqrt{3})^2 - 4 \cdot (\sqrt{7} + 1) + (\sqrt{7} - \sqrt{3})^3$
 $\left[\sqrt{8}; 12 \cdot \sqrt{7} - 154 \cdot \sqrt{3} - 186 \right]$
41. $(9 - 5 \cdot \sqrt{3}) \cdot (9 + 5 \cdot \sqrt{3}) + 4 \cdot \sqrt{7} \cdot (2 \cdot \sqrt{3} - 3) + (4 \cdot \sqrt{7} - \sqrt{3})^2$
 $\left[121 - 12 \cdot \sqrt{7} \right]$
42. $(14 - 2 \cdot \sqrt{7}) \cdot (14 + 2 \cdot \sqrt{7}) - 7 \cdot \sqrt{13} \cdot (\sqrt{28} + 5) - (\sqrt{7} + \sqrt{13})^2$
 $\left[148 - 16 \cdot \sqrt{91} - 35 \cdot \sqrt{13} \right]$
43. $(11 - 2 \cdot \sqrt{2}) \cdot (11 + 2 \cdot \sqrt{2}) + 3 \cdot \sqrt{11} \cdot (\sqrt{8} - 5) + (\sqrt{11} - 6 \cdot \sqrt{2})^2$
 $\left[196 - 6 \cdot \sqrt{22} - 15 \cdot \sqrt{11} \right]$
44. $(\sqrt{2} - 2)^2 - (\sqrt{2} + 5) \cdot (\sqrt{2} - 5)$; $(\sqrt{15} + 8) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{3}) - (-\sqrt{15} + 8) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})$
 $\left[29 - 4 \cdot \sqrt{2}; 26 \cdot \sqrt{3} \right]$

45. $(\sqrt{2}+1) \cdot (3-\sqrt{2}) + (\sqrt{3}-2) \cdot (7+2 \cdot \sqrt{3}) - 2 \cdot (\sqrt{2}-3)$ $[3 \cdot \sqrt{3}-1]$
46. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+1) \cdot (\sqrt{2}-\sqrt{3}+1) + (\sqrt{2}-\sqrt{3}-1) \cdot (\sqrt{2}+\sqrt{3}-1)$ $[0]$
47. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}) + (\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})$ $[-12]$
48. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}) \cdot (\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{7}) + (\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{7}) \cdot (\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7})$ $[2]$
49. $(5-2 \cdot \sqrt[3]{3}) \cdot (25+10 \cdot \sqrt[3]{3}+4 \cdot \sqrt[3]{9}) - 17 \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{7}-3) + (\sqrt{7}-3 \cdot \sqrt{2})^2$ $[51 \cdot \sqrt{2}-23 \cdot \sqrt{14}+126]$
50. $\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} + (\sqrt{2}+\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2}-\sqrt{3}) ; \left(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}} \right)^4 - 3 - 2 \cdot \sqrt{2}$ $[0; 0]$
51. $(\sqrt[3]{2}+1) \cdot (\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1) + (\sqrt[3]{3}-2) \cdot (\sqrt[3]{9}+2 \cdot \sqrt[3]{3}+4)$ $[-2]$

Lavoriamo insieme

Semplificare l'espressione seguente: $\sqrt{a+b} + 3 \cdot \sqrt{(a+b)^3} + \sqrt{(a^2-b^2) \cdot (a-b)} + \sqrt{a^3-5a^2b+3ab^2+9b^3}$. Si ha: $\sqrt{a+b} + 3 \cdot \sqrt{(a+b)^2} \cdot \sqrt{a+b} + \sqrt{(a-b)^2} \cdot \sqrt{a+b} + \sqrt{(a+b) \cdot (a^2-6ab+9b^2)} = \sqrt{a+b} + 3 \cdot |a+b| \cdot \sqrt{a+b} + |a-b| \cdot \sqrt{a+b} + \sqrt{(a-3b)^2} \cdot \sqrt{a+b} = \sqrt{a+b} \cdot (1+3 \cdot |a+b| + |a-b| + |a-3b|)$. Per semplificare il risultato, si potrebbero eliminare i valori assoluti, distinguendo i vari casi: evitiamo però di affrontare in questa sede tale discorso per evitare complicazioni.

Semplificare le seguenti espressioni, ipotizzando che ciascun radicale abbia senso in $\mathbb{R}$.

Livello 2

52. $\sqrt[4]{a^2+2ax+x^2} + \sqrt[6]{a^3+3a^2x+3ax^2+x^3} - 2\sqrt{a+x}$ $[0]$
53. $\sqrt{(a+b)^3} - \sqrt{(a+b) \cdot (a-b)^2} + \sqrt{(a-b) \cdot (a+b)^2}$ $[2b \cdot \sqrt{a+b} + (a+b) \cdot \sqrt{a-b}]$
54. $\sqrt{m^6-m^4n^2} - \sqrt{(m^4-n^4) \cdot (m^2+n^2)} + \sqrt{3m^2-3n^2}$ $[(-n^2+\sqrt{3}) \cdot \sqrt{m^2-n^2}]$
55. $(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}) \cdot (\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}) + (\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})^2 + (\sqrt{a+b}-2 \cdot \sqrt{a-b}) \cdot (\sqrt{a-b}+3 \cdot \sqrt{a+b})$ $[3a+7b-7 \cdot \sqrt{a^2-b^2}]$
56. $(\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}})^2 - (\sqrt{a+2 \cdot \sqrt{b}}+\sqrt{2a-\sqrt{b}}) \cdot (\sqrt{a+2 \cdot \sqrt{b}}-\sqrt{2a-\sqrt{b}}) + 2 \cdot \sqrt{a^2-b}$ $[3a-3 \cdot \sqrt{b}]$
57. $(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b}) \cdot (\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{b^2}) - (\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b})^3 - 3a \cdot \left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \right) \cdot \sqrt[3]{b}$ $[0]$
58. $(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}) \cdot (\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}) + (\sqrt{b}+2\sqrt{c})^2 - (\sqrt{a}+3\sqrt{c})^2 - 6(\sqrt{b}-\sqrt{a}) \cdot \sqrt{c}$ $[-6c]$
59. $(\sqrt{a}+b) \cdot (\sqrt{a}-b) - (\sqrt{a}+b)^2 + (\sqrt{a}-b)^2$ $[a-4b \cdot \sqrt{a-b^2}]$
60. $(\sqrt{ab^2}-\sqrt{a^2b})^2 + (\sqrt{ab^2}-\sqrt{a^2b}) \cdot (\sqrt{ab^2}+\sqrt{a^2b}) - 2ab^2 + ab \cdot \sqrt{ab}$ $[-ab \cdot \sqrt{ab}]$

Livello 3

61. Verificare la seguente identità, detta di Bhaskara in onore del matematico indiano del 1100 che la presentò in un suo lavoro: $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b+2 \cdot \sqrt{ab}}$.

Nei seguenti esercizi usare l'identità di Bhaskara

62. Calcolare le seguenti somme: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt{2}+\sqrt{8}$, $\sqrt{5}+\sqrt{7}$, $\sqrt{27}+\sqrt{243}$.
63. Provare che $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$, per a e b numeri naturali, sono due radicali simili solo se ab è un quadrato perfetto. Verificare quanto provato per $a=12$, $b=3$; $a=18$, $b=8$.

Lavoriamo insieme

- Ridurre a un unico radicale, se possibile, la seguente espressione: $\sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[4]{4}}}$. Dobbiamo portare ciascun fattore all'interno del radicale che sta moltiplicando; abbiamo così

$$\sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[4]{4}}} = \sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot 2^2}} = \sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot 2}} = \sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 3^2}} = \sqrt{2 \cdot \sqrt[6]{2 \cdot 3^2}} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 2 \cdot 3^2} = \sqrt[12]{2^7 \cdot 3^2}$$

- $\sqrt{4+3 \cdot \sqrt{2}}$. Questa volta possiamo lavorare solo sul fattore e non sull'addendo, pertanto scriviamo:
 $\sqrt{4+3 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{4+\sqrt{2 \cdot 3^2}} = \sqrt{4+\sqrt{18}}$ e non possiamo semplificare ulteriormente.

Ridurre a un unico radicale, se possibile, le seguenti espressioni

Livello 1

$$64. \quad \sqrt{2 \cdot \sqrt{3}} ; \sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{4}} ; \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{4}} ; \sqrt[4]{5 \cdot \sqrt{5}} ; \sqrt{2+2 \cdot \sqrt{2}} \quad \left[\sqrt[4]{12}; \sqrt[6]{2^5}; \sqrt[3]{4}; \sqrt[8]{5^3}; \sqrt{2+\sqrt{8}} \right]$$

$$65. \quad \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2}}} ; \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[3]{3}}} ; \sqrt{7 : \sqrt[3]{343} : \sqrt[4]{49}} \quad \left[\sqrt[8]{2^7}; \sqrt[27]{3^{13}}; \sqrt[12]{7} \right]$$

$$66. \quad \sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{3 : \sqrt[4]{4 \cdot \sqrt[6]{6}}}} ; \sqrt[3]{8 \cdot \sqrt[5]{16} : \sqrt[5]{16 \cdot \sqrt[3]{8}}} ; \frac{\sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{9 \cdot \sqrt[4]{27}}}}{\sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[4]{9 \cdot \sqrt[27]{27}}}} \quad \left[\sqrt[144]{3^{23}}; \sqrt[144]{2^{59}}; \sqrt[15]{2^4}; \sqrt[3]{3} \right]$$

Livello 2

$$67. \quad \sqrt{a \cdot \sqrt[4]{a}} ; \sqrt{b \cdot \sqrt{b \cdot \sqrt{b}}} ; \sqrt[4]{m^4 \cdot \sqrt[3]{m^2 \cdot \sqrt{m^3}}} ; \sqrt[4]{m^2 \cdot \sqrt[3]{m^4 \cdot \sqrt{m^3}}} ; \sqrt{m^4 \cdot \sqrt[3]{m^2 \cdot \sqrt[4]{m^3}}} \quad \left[\sqrt[8]{a^5}; \sqrt[8]{b^7}; m \cdot \sqrt[24]{m^7}; \sqrt[24]{m^{23}}; m \cdot \sqrt[24]{m^{11}} \right]$$

$$68. \quad \sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt{b^3}} : \sqrt[4]{a^3 \cdot \sqrt[3]{b^4}} ; \sqrt{\frac{s^2 \cdot t \cdot \sqrt{u^3}}{u \cdot \sqrt[4]{s^5 \cdot t^2}}} ; \frac{\sqrt[3]{2 \cdot f^5 \cdot \sqrt[5]{g^3}}}{\sqrt[6]{g^7 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot f^6}}} \quad \left[\sqrt[12]{\frac{b^2}{a}}; \sqrt[8]{s^3 \cdot t^2 \cdot u^2}; \sqrt[18]{2^5} \cdot \frac{f}{g} \sqrt[30]{f^{10} \cdot g} \right]$$

$$69. \quad \sqrt{a + \sqrt{b \cdot \sqrt{c + \sqrt{d}}}} ; \frac{\sqrt[3]{m^2 \cdot \sqrt[3]{m^2 \cdot \sqrt{m^3}}}}{\sqrt{m^3 \cdot \sqrt[3]{m^2 \cdot \sqrt[3]{m^2}}}} \quad \left[\sqrt{a + \sqrt{b \cdot \sqrt{c + \sqrt{d}}}} ; \frac{\sqrt[9]{m}}{m} \right]$$

Lavoriamo insieme

Riccardo dice che $\sqrt{2} + \sqrt{7} > \sqrt{33} - \sqrt{3}$, ha ragione? Per potere rispondere potremmo servirci di una calcolatrice, determinando valori approssimati delle due espressioni. Useremo invece un metodo più laborioso che però mette in gioco solo numeri interi. Supposta vera la disuguaglianza $\sqrt{2} + \sqrt{7} > \sqrt{33} - \sqrt{3}$, innalziamo al quadrato entrambi i membri. $(\sqrt{2} + \sqrt{7})^2 > (\sqrt{33} - \sqrt{3})^2 \Rightarrow 2 + 7 + 2 \cdot \sqrt{14} > 33 + 3 - 2 \cdot \sqrt{99} \Rightarrow \Rightarrow 9 + 2 \cdot \sqrt{14} > 36 - 2 \cdot \sqrt{99} \Rightarrow 9 + 2 \cdot \sqrt{14} > 36 - 2 \cdot \sqrt{3^2 \cdot 11} \Rightarrow 9 + 2 \cdot \sqrt{14} > 36 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{11} \Rightarrow 9 + 2 \cdot \sqrt{14} > 36 - 6 \cdot \sqrt{11} \Rightarrow 2 \cdot \sqrt{14} + 6 \cdot \sqrt{11} > 36 - 9 \Rightarrow 2 \cdot \sqrt{14} + 6 \cdot \sqrt{11} > 27$

Abbiamo così ottenuto una disuguaglianza più semplice, ma sulla quale non sappiamo ancora pronunciarsi. Innalziamo ancora una volta al quadrato entrambi i membri.

$$(2 \cdot \sqrt{14} + 6 \cdot \sqrt{11})^2 > 27^2 \Rightarrow 2^2 \cdot 14 + 6^2 \cdot 11 + 24 \cdot \sqrt{154} > 729 \Rightarrow 56 + 396 + 24 \cdot \sqrt{154} > 729 \Rightarrow 24 \cdot \sqrt{154} > 729 - 56 - 396 \Rightarrow 24 \cdot \sqrt{154} > 277 \Rightarrow 24^2 \cdot 154 > 277^2 \Rightarrow 576 \cdot 154 > 76729 \Rightarrow 88704 > 76729$$

Essendo vera l'ultima disuguaglianza risulta vera anche la prima, quindi Riccardo ha ragione.

Determinare il maggiore fra le seguenti coppie di numeri irrazionali

Livello 1

70. $(2 + \sqrt{5}, 1 + \sqrt{11})$; $(\sqrt{2} + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{2})$; $(2 + \sqrt[3]{7}, 4)$
 71. $(\sqrt{3} + \sqrt{17}, \sqrt{7} + \sqrt{10})$; $(\sqrt[3]{3}, \sqrt{2})$; $(\sqrt{13}, 1 + \sqrt{17})$
 72. $(2 \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}, \sqrt{2} + \sqrt{6})$; $(\sqrt{2 + \sqrt{3}}, 1 + \sqrt{5} - \sqrt{2})$
 73. $(\sqrt{7 + 4 \cdot \sqrt{3}}, 2 + \sqrt{3})$; $(\sqrt{1 + \sqrt{2}}, \sqrt{4 - \sqrt{3}})$

Lavoriamo insieme

Semplificare $\sqrt{12 + \sqrt{140}}$. Per risolvere la questione proposta possiamo cercare di scrivere il radicando principale come quadrato di binomio. Cominciamo a scomporre il secondo radicando.

$$\sqrt{12 + \sqrt{140}} = \sqrt{12 + \sqrt{2^2 \cdot 5 \cdot 7}} = \sqrt{12 + \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5 \cdot 7}} = \sqrt{12 + 2 \cdot \sqrt{7 \cdot 7}}.$$

Proprio quest'ultima "forma" di scrittura ci suggerisce come procedere.

$$\sqrt{12 + 2 \cdot \sqrt{5 \cdot 7}} = \sqrt{5 + 7 + 2 \cdot \sqrt{5 \cdot 7}} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{7})^2 + 2 \cdot \sqrt{5 \cdot 7}} = \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{7})^2} = \sqrt{5} + \sqrt{7}.$$

Oppure potevamo applicare la formula stabilita dal Teorema 6: $\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$, che in questo caso diviene:

$$\sqrt{12 + \sqrt{140}} = \sqrt{\frac{12 + \sqrt{12^2 - 140}}{2}} + \sqrt{\frac{12 - \sqrt{12^2 - 140}}{2}} = \sqrt{\frac{12 + \sqrt{4}}{2}} + \sqrt{\frac{12 - \sqrt{4}}{2}} = \sqrt{\frac{12 + 2}{2}} + \sqrt{\frac{12 - 2}{2}} = \sqrt{7} + \sqrt{5},$$

che ovviamente è lo stesso risultato.

Semplificare, ove possibile, i seguenti radicali, prima cercando un quadrato perfetto e poi verificando il risultato con la formula dei radicali doppi

Livello 1

$$74. \sqrt{3 - 2 \cdot \sqrt{2}}; \sqrt{7 - \sqrt{40}}; \sqrt{60 - 14 \cdot \sqrt{11}}; \sqrt{18 - \sqrt{260}} \quad [\sqrt{2} - 1; \sqrt{5} - \sqrt{2}; 7 - \sqrt{11}; \sqrt{13} - \sqrt{5}]$$

$$75. \sqrt{34 + 2 \cdot \sqrt{93}}; \sqrt{3 + 2 \cdot \sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2 \cdot \sqrt{2}}; \sqrt{12 + 2 \cdot \sqrt{35}} - \sqrt{12 - \sqrt{140}} \quad [\sqrt{31} + \sqrt{3}; 2; 2 \cdot \sqrt{5}]$$

Livello 2

$$76. \sqrt{a^2 + b + 2a \cdot \sqrt{b}} - \sqrt{a^2 + b - 2a \cdot \sqrt{b}}; \sqrt{10 + 2 \cdot \sqrt{6} + 2 \cdot \sqrt{10} + 2 \cdot \sqrt{15}} \quad [2 \cdot \sqrt{b}; \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}]$$

$$77. \sqrt{9 + 2 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{20} - 2 \cdot \sqrt{15}}; \sqrt{13 - 4 \cdot \sqrt{2} + 4 \cdot \sqrt{7} - \sqrt{56}} \quad [1 + \sqrt{3} - \sqrt{5}; 2 - \sqrt{2} + \sqrt{7}]$$

$$78. \sqrt[3]{-4 - 3 \cdot \sqrt[3]{5} + 3 \cdot \sqrt[3]{25}}; \sqrt[3]{19 + 9 \cdot \sqrt[3]{12} + 3 \cdot \sqrt[3]{18}} \quad [1 - \sqrt[3]{5}; 1 + \sqrt[3]{18}]$$

$$79. \sqrt{6 - \sqrt{6} - \sqrt{15} - 6 \cdot \sqrt{6}}; \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2} \cdot [11 - \sqrt{21} + \sqrt{6 \cdot (5 - \sqrt{21})}]} \quad [\sqrt{3}; \sqrt{3}]$$

$$80. \text{ I risultati dei primi esercizi 70 e 74 potrebbero scriversi rispettivamente } 1 - \sqrt{2} \text{ e } \sqrt[3]{5} - 1? \quad [\text{No}; \text{No}]$$

L'angolo delle correzioni

Correggere i seguenti procedimenti errati

$$1. \sqrt[3]{3} = 1; \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[4]{6}; \sqrt{7} + \sqrt{10} = \sqrt{17}; \sqrt{5 - \sqrt{5}} = 0; \sqrt{4 \cdot \sqrt{9}} = \sqrt{36} = 6$$

$$2. \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}; 2 \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt{2}; \sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{ab}; \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b}$$

$$3. \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{ab}; \sqrt{a} + \sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^3 + a^2}; \sqrt{a + \sqrt[3]{b}} = \sqrt[6]{a^3 + b}$$

Notazione esponenziale dei radicali

Notiamo che per i radicali abbiamo utilizzato regole simili a quelli viste per le frazioni, nel senso che

- nel prodotto di radicali abbiamo effettuato il minimo comune indice con considerazioni analoghe a quelle utilizzate per il calcolo del minimo comune denominatore di frazioni;
- nella riduzione di radicali allo stesso indice abbiamo applicato le regole valide per la riduzione di frazioni allo stesso denominatore.

Tutto ciò porta a pensare all'operazione di estrazione di radice n -sima come a un caso particolare di elevamento a potenza con esponente frazionario.

Notazione 3

Con la scritta $a^{\frac{m}{n}}$, intendiamo lo stesso numero rappresentato da $\sqrt[n]{a^m}$, qualora quest'ultima scritta abbia significato.

Esempio 18

- Con $3^{\frac{7}{5}}$ intendiamo il numero $\sqrt[5]{3^7} = \sqrt[5]{3^5} \cdot \sqrt[5]{3^2} = 3 \cdot \sqrt[5]{3^2}$. In particolare notiamo che l'uguaglianza fra il primo e l'ultimo membro è giustificata dalla nostra notazione, difatti essa equivale a: $3^{\frac{7}{5}} = 3^{1+\frac{2}{5}} = 3 \cdot 3^{\frac{2}{5}}$.
- Semplificare la seguente espressione: $\frac{3^{\frac{2}{3}} \cdot 9^{\frac{1}{5}}}{27^{\frac{3}{7}}}$. Riconduciamo le potenze alla stessa base 3, ottenendo:

$$\frac{3^{\frac{2}{3}} \cdot 9^{\frac{1}{5}}}{27^{\frac{3}{7}}} = \frac{3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{5}}}{3^{\frac{9}{7}}} = 3^{\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{9}{7}\right)} = 3^{\frac{70+42-135}{105}} = 3^{-\frac{23}{105}}. \text{ Quest'ultimo risultato equivale anche a } \frac{1}{\sqrt[105]{3^{23}}}$$

Verifiche

Lavoriamo insieme

Semplificare l'espressione: $3^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{2}{3}} \cdot 4^{\frac{-3}{4}} \cdot 18^{\frac{-3}{2}}$. Cominciamo con la scomposizione delle basi in fattori primi:

$$3^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{2}{3}} \cdot 4^{\frac{-3}{4}} \cdot 18^{\frac{-3}{2}} = 3^{\frac{1}{3}} \cdot (2 \cdot 3)^{\frac{2}{3}} \cdot (2^2)^{\frac{-3}{4}} \cdot (2 \cdot 3^2)^{\frac{-3}{2}} = 3^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{-2 \cdot \frac{3}{4}} \cdot 2^{-\frac{3}{2}} \cdot 3^{-2 \cdot \frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{-\frac{3}{2}} \cdot 2^{-\frac{3}{2}} \cdot 3^{-3}$$

Adesso moltiplichiamo fra loro le potenze di uguale base, applicando la ben nota regola secondo la quale gli esponenti si sommano e le basi restano invariate.

$$3^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{-\frac{3}{2}} \cdot 2^{-\frac{3}{2}} \cdot 3^{-3} = 2^{\frac{2}{3} - \frac{3}{2} - \frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - 3} = 2^{\frac{4-9-9}{6}} \cdot 3^{\frac{1+2-9}{3}} = 2^{-\frac{14}{6}} \cdot 3^{-\frac{6}{3}} = 2^{-\frac{7}{3}} \cdot 3^{-2}$$

Semplificare, ove possibile, le seguenti espressioni

Livello 1

- $2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{2}{5}} \cdot 8^{\frac{1}{7}} ; 5^{\frac{1}{2}} \cdot 25^{\frac{1}{3}} \cdot 75^{\frac{2}{3}} ; 12^{\frac{3}{4}} \cdot 18^{\frac{5}{2}} ; 24^{\frac{1}{3}} \cdot 48^{\frac{2}{3}} : 72^{\frac{4}{3}}$ $\left[2^{\frac{74}{105}} ; 3^{\frac{2}{5}} \cdot 5^{\frac{5}{2}} ; 2^4 \cdot 3^{\frac{23}{5}} ; 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{5}{3}} \right]$
- $\frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{5}{8}} \cdot 2^{\frac{9}{32}}}{2^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{7}{16}} \cdot 2^{\frac{11}{64}}} ; \frac{15^{\frac{2}{5}} \cdot 20^{\frac{3}{5}}}{12^{\frac{1}{5}} \cdot 25^{\frac{4}{5}}} ; \frac{2^{\frac{2}{3}} \cdot 64^{\frac{1}{3}} \cdot 128^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{4}}}{32^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{6}} \cdot 256^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{2}{3}}} ; a^{\frac{3}{2}} \cdot b^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{-\frac{1}{2}}$ $\left[2^{\frac{3}{64}} ; 2^{\frac{4}{5}} \cdot 3^{\frac{1}{5}} \cdot 5^{-\frac{3}{5}} ; 2^{\frac{1}{3}} ; a^{\frac{7}{4}} \cdot b^{-1} \right]$
- $\left(5^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{2}} \right)^2 ; \left(2^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{3}} \right)^3 ; \left(1 + 7^{\frac{1}{2}} \right) \cdot \left(1 - 7^{\frac{1}{2}} \right) ; \left(5^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} \right) \cdot \left(5^{\frac{2}{3}} - 10^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}} \right)$ $\left[8 - 2 \cdot \sqrt{15} ; 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{5}{3}} + 2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{4}{3}} + 5 ; -6 ; 7 \right]$

Lavoriamo insieme

Semplificare l'espressione: $\frac{\sqrt{a^3 \cdot b} \cdot 2 \cdot \sqrt[5]{a^4 \cdot b^2 \cdot c}}{3 \cdot \sqrt[4]{a \cdot b^2 \cdot c^3}}$. Piuttosto che applicare le proprietà dei radicali si

potrebbe utilizzare la notazione esponenziale e scrivere: $\frac{\sqrt{a^3 \cdot b} \cdot 2 \cdot \sqrt[5]{a^4 \cdot b^2 \cdot c}}{3 \cdot \sqrt[4]{a \cdot b^2 \cdot c^3}} = \frac{a^{\frac{3}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot a^{\frac{4}{5}} \cdot b^{\frac{2}{5}} \cdot c^{\frac{1}{5}}}{3 \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{1}{2}} \cdot c^{\frac{3}{4}}} =$
 $= \frac{2}{3} \cdot a^{(\frac{3}{2} + \frac{4}{5} - \frac{1}{4})} \cdot b^{(\frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{2})} \cdot c^{(\frac{1}{5} - \frac{3}{4})} = \frac{2}{3} \cdot a^{\frac{41}{20}} \cdot b^{\frac{2}{5}} \cdot c^{-\frac{11}{20}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt[20]{\frac{a^{41} \cdot b^8}{c^{11}}}$

Semplificare, ove possibile, le seguenti espressioni

Livello 2

- $\left(2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{6}} \right)^2 - \left(2^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{1}{3}} \right) \cdot \left(2^{\frac{2}{3}} + 6^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{2}{3}} \right) - 3 \cdot \left(1 + 3^{-\frac{2}{3}} \right)$ $\left[2^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} \right]$
- $\left(2^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{4}} + 1 \right) \cdot \left(2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{4}} + 1 \right) - 2^{\frac{3}{2}} + \left(2^{\frac{1}{4}} - 3^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \cdot \left(2^{\frac{1}{4}} + 3^{\frac{1}{2}} - 1 \right) - 2^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - 2^{\frac{3}{4}} \right)$ $\left[1 - \sqrt{3} \right]$
- $\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{4}} \right)^2 + \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{4}} \right)^2 ; \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{4}} \right) \cdot \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{4}} \right) - \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{4}} \right)^2 + 2 \cdot \left(a^{\frac{1}{3}} + 1 \right) \cdot \left(b^{\frac{1}{4}} - 1 \right) + 2 \cdot \left(b^{\frac{1}{4}} - 1 \right)^2$ $\left[2a + 2b^{\frac{1}{2}} ; -2a^{\frac{1}{3}} - 2b^{\frac{1}{4}} \right]$

7.
$$\left(a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{3}} - c^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{1}{2}}\right) - \left(a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{3}}\right)^2 - a^{\frac{1}{3}} \cdot \left(4a^{\frac{1}{2}} - 1\right) \cdot b^{\frac{1}{3}} \left[-c + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right]$$
8. Utilizzando la notazione esponenziale dei radicali provare i teoremi 3, 4 e 5.

Razionalizzazione di una espressione irrazionale

I numeri irrazionali ovviamente rimangono tali, tranne che siano solo apparenti. A volte però può essere utile cambiarne la forma, non eliminando, dato che ciò è impossibile, ma *spostando* l'irrazionalità.

Vediamo un esempio.

Esempio 19

- Semplificare l'espressione $\frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{3}}$. Possiamo pensare di calcolare il minimo comune denominatore, solo che i denominatori non sono numeri interi, bensì numeri irrazionali. Possiamo generalizzare il concetto di mcm anche a questo tipo di numeri?
- E se dovessimo semplificare l'espressione $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$, come procederemmo? Come si vede le cose si complicano, dobbiamo quindi cercare di *spostare* i radicali al numeratore, in modo tale che al denominatore vi siano solo numeri interi con i quali sappiamo operare.

Prima di risolvere il problema diamo una definizione.

Definizione 9

Data una frazione contenente radicali non apparenti al numeratore o al denominatore, l'operazione di spostare i termini radicali dal numeratore al denominatore o viceversa si chiama **razionalizzazione** del numeratore o del denominatore rispettivamente.

Cominciamo a rendere razionali i denominatori di semplici frazioni, in seguito applicheremo il procedimento alle espressioni più complesse viste prima.

Esempio 20

- Vogliamo razionalizzare il denominatore della seguente frazione: $\frac{2}{\sqrt{5}}$. Un modo potrebbe essere quello di ottenere che il radicale al denominatore risulti apparente. Ciò può farsi applicando la proprietà invariantiva delle frazioni, quindi moltiplicando numeratore e denominatore (altrimenti la frazione ottenuta sarebbe diversa da quella di partenza) per lo stesso radicale: $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5^2}}$. Al denominatore abbiamo ottenuto un radicale apparente, pertanto: $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5}$.
- Razionalizzare il denominatore della frazione $\frac{3}{\sqrt{12}}$. Potremmo moltiplicare numeratore e denominatore per $\sqrt{12}$, ma risulta più economico il seguente procedimento: $\frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{\sqrt{2^2 \cdot 3}} = \frac{3}{\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3}{2 \cdot \sqrt{3}}$. Moltiplichiamo numeratore e denominatore solo per $\sqrt{3}$: $\frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{3^2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Razionalizzare il denominatore della frazione $\frac{pq^3}{\sqrt[4]{p^2 \cdot q^3}}$. Otterremo il nostro scopo creando, al denominatore, un radicale contenente tutte potenze multiple di 4, il che si fa moltiplicando per $\sqrt[4]{p^2 q}$. Abbiamo allora: $\frac{pq^3}{\sqrt[4]{p^2 \cdot q^3}} = \frac{pq^3 \cdot \sqrt[4]{p^2 \cdot q}}{\sqrt[4]{p^2 \cdot q^3} \cdot \sqrt[4]{p^2 \cdot q}} = \frac{pq^3 \cdot \sqrt[4]{p^2 \cdot q}}{\sqrt[4]{p^4 \cdot q^4}} = \frac{pq^3 \cdot \sqrt[4]{p^2 \cdot q}}{pq} = q^2 \cdot \sqrt[4]{p^2 \cdot q}$.

A questo punto siamo in grado di risolvere il primo degli esercizi dell'esempio 19.

Esempio 21

Semplificare $\frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{3}}$. Razionalizziamo i denominatori: $\frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} + \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} + \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{5} + \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}$

Adesso risulta più semplice semplificare l'espressione, calcolando il minimo comune multiplo dei denominatori, che sono numeri interi: $\frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{5} + \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{9 \cdot \sqrt{5} + 10 \cdot \sqrt{3}}{15}$.

Passiamo a un'altra espressione.

Esempio 22

Vogliamo razionalizzare il denominatore della frazione: $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}$. Possiamo applicare il procedimento precedente a questa frazione? Proviamo moltiplicando per lo stesso denominatore. Otteniamo:

$$\frac{\sqrt{2^2} - \sqrt{5^2}}{(\sqrt{2} - \sqrt{5})^2} = \frac{2 - 5}{2 - 2 \cdot \sqrt{10} + 5} = \frac{-3}{7 - 2 \cdot \sqrt{10}}.$$

Il metodo non ha funzionato ma ci ha fornito un prezioso suggerimento, giacché, senza volerlo, abbiamo reso razionale il numeratore. Quindi, se moltiplichiamo il denominatore per se stesso, è vero che otteniamo un quadrato, ma non di un fattore monomio come negli esempi precedenti, ma di un binomio, pertanto il calcolo del doppio prodotto ci ripropone il radicale che avevamo sperato di eliminare. Applicando invece il prodotto notevole noto come differenza di due quadrati, otteniamo appunto i quadrati di due monomi con la conseguente sparizione di entrambi i radicali.

Dalle risultanze dell'esempio precedente enunciamo la seguente regola.

Regola 1

Per rendere razionale il numeratore o il denominatore di una frazione formato da una espressione del tipo $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, si moltiplicano numeratore e denominatore per il fattore $\sqrt{a} \mp \sqrt{b}$.

Esempio 23

- Rendere razionale il denominatore dell'espressione $\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$. Applicando la Regola 1 otteniamo:

$$\frac{2 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})}{5 - 3} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})}{2} = \sqrt{5} - \sqrt{3}.$$

- Rendere razionale il numeratore della frazione $\frac{\sqrt{2} + 3}{\sqrt{2}}$. Apparentemente la forma del numeratore non è

del tipo *previsto* dalla Regola 1; in realtà 3 può pensarsi anche come $\sqrt{3^2}$. Pertanto otteniamo:

$$\frac{(\sqrt{2} + 3) \cdot (\sqrt{2} - 3)}{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - 3)} = \frac{\sqrt{2^2} - 9}{2 - 3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{2 - 9}{2 - 3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{-7}{2 - 3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{7}{3 \cdot \sqrt{2} - 2}.$$

- Rendere razionale il numeratore della frazione: $\frac{5 - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}$. A questo punto abbiamo capito la strategia da usare: andiamo cioè alla ricerca di un prodotto notevole che ci possa aiutare. Lo troviamo in quello noto come differenza di due cubi, che, algebricamente, si esprime con $(a^3 - b^3) = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$.

Abbiamo allora:
$$\frac{5 - \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}} = \frac{5^3 - 2}{(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) \cdot (25 + 5 \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})} = \frac{123}{25 \cdot \sqrt[3]{2} + 5 \cdot \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{8} + 25 \cdot \sqrt[3]{4} + 5 \cdot \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{16}} =$$

$$= \frac{123}{25 \cdot \sqrt[3]{2} + 30 \cdot \sqrt[3]{4} + 2 + 5 \cdot 2 + \sqrt[3]{2^4}} = \frac{123}{25 \cdot \sqrt[3]{2} + 30 \cdot \sqrt[3]{4} + 12 + 2 \cdot \sqrt[3]{2}} = \frac{123}{27 \cdot \sqrt[3]{2} + 30 \cdot \sqrt[3]{4} + 12}$$

Possiamo semplificare la seconda espressione presentata nel problema.

Esempio 24

Semplificare l'espressione $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$. Cominciamo a razionalizzare i denominatori delle

singole frazioni:
$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3})} - \frac{\sqrt{3} \cdot (1 - \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3}) \cdot (1 - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} + \frac{\sqrt{2^2} - \sqrt{6}}{\sqrt{2^2} - \sqrt{3^2}} - \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3^2}}{1 - \sqrt{3^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2 - \sqrt{6}}{2 - 3} - \frac{\sqrt{3} - 3}{1 - 3} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2 - \sqrt{6}}{-1} - \frac{\sqrt{3} - 3}{-2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2 - \sqrt{6}}{1} + \frac{\sqrt{3} - 3}{2}$$

A questo punto possiamo calcolare facilmente il minimo comune denominatore e proseguire nella

semplificazione:
$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2 - \sqrt{6}}{1} + \frac{\sqrt{3} - 3}{2} = \frac{\sqrt{2} - 2 \cdot (2 - \sqrt{6}) + \sqrt{3} - 3}{2} = \frac{\sqrt{2} - 4 + 2 \cdot \sqrt{6} + \sqrt{3} - 3}{2} = \frac{\sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{6} + \sqrt{3} - 7}{2}.$$

Verifiche

Lavoriamo insieme

Si voglia rendere razionale il numeratore dell'espressione $\sqrt[4]{a^3b^6c^4}$ (si badi che in questo caso si può pensare a un denominatore unitario). Dobbiamo *completare* l'esponente di ciascun monomio in modo che risulti multiplo di quattro. Per il principio di economia sceglieremo il minor multiplo di quattro che superi l'esponente considerato. Si può effettuare questa operazione procedendo nel seguente modo:

$$\sqrt[4]{a^3b^6c^4} = \frac{\sqrt[4]{a^3b^6c^4} \cdot \sqrt[4]{ab^2}}{\sqrt[4]{ab^2}} = \frac{\sqrt[4]{a^4b^8c^4}}{\sqrt[4]{ab^2}} = \frac{ab^2c}{\sqrt[4]{ab^2}}$$

Rendere razionali i numeratori e/o i denominatori delle seguenti espressioni

Livello 1

32. $\frac{2}{\sqrt[3]{24}}; \frac{3}{\sqrt[3]{16}}; \frac{5}{\sqrt[3]{15}}; \frac{7}{\sqrt[3]{49}}; \frac{11}{\sqrt[5]{121}}$ $\left[\frac{\sqrt[3]{2^4 \cdot 3^6}}{3}; \frac{3 \cdot \sqrt[3]{4}}{4}; \frac{\sqrt[5]{15^4}}{3}; \sqrt[3]{7}; \sqrt[5]{11^3} \right]$
33. $\frac{13}{\sqrt[3]{156}}; \frac{\sqrt[3]{5}}{5}; \frac{\sqrt[4]{8}}{4}; \frac{3}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt[3]{6}}$ $\left[\frac{\sqrt[3]{2 \cdot 39^2}}{6}; \frac{1}{\sqrt[3]{25}}; \frac{1}{2 \cdot \sqrt[4]{2}}; \frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt[3]{36}}{3} \right]$
34. $\frac{mn^2p^3}{\sqrt[4]{m^5n^8p^{11}}}; \frac{\sqrt[3]{xy^2}}{xy^2}; \frac{\sqrt[5]{x^8y^{16}z^{24}}}{x^4yz^2}; \frac{a^3b}{\sqrt[7]{a^4b^5}}; \frac{ax}{a^4x^3\sqrt[3]{ax^2}}$ $\left[\frac{p}{\sqrt[4]{mp^3}}; \frac{1}{y \cdot \sqrt[3]{x^2y}}; \frac{y^3z^3}{x^4 \cdot \sqrt[5]{x^2y^4z}}; a^2 \cdot \sqrt[7]{a^3b^2}; \frac{1}{a^3 \cdot \sqrt[3]{ax^2}} \right]$
35. $\frac{xyz}{\sqrt[5]{xy^2z^3}}; \frac{\sqrt[3]{a^2b^3c^4}}{ab}; \frac{a^2b^3c^4}{\sqrt[4]{a^5b^4c^3d}}; \frac{mnp}{\sqrt[6]{m^{15}n^{18}p^{23}}}; \frac{amo}{\sqrt[11]{a^{34}m^{45}o^{56}}}$ $\left[\sqrt[5]{x^4y^3z^2}; \frac{c^2}{\sqrt[3]{ac^2}}; \frac{b^2c^3 \cdot \sqrt[4]{a^3cd^3}}{d}; \frac{\sqrt[6]{m^3p}}{m^2n^2p^3}; \frac{1}{a^2m^3o^4 \cdot \sqrt[11]{amo}} \right]$

Lavoriamo insieme

Rendere razionale il denominatore dell'espressione $\frac{\sqrt{7} + 2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{7}}$. Dobbiamo ricorrere al prodotto notevole noto come differenza di quadrati, scrivendo:

$$\frac{\sqrt{7} + 2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{7}} = \frac{(\sqrt{7} + 2 \cdot \sqrt{2}) \cdot (2 \cdot \sqrt{7} - \sqrt{2})}{(\sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{7}) \cdot (2 \cdot \sqrt{7} - \sqrt{2})} =$$

$$= \frac{2 \cdot \sqrt{7^2} - \sqrt{14} + 4 \cdot \sqrt{14} - 2 \cdot \sqrt{2^2}}{2^2 \cdot \sqrt{7^2} - \sqrt{2^2}} = \frac{2 \cdot 7 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot \sqrt{14}}{4 \cdot 7 - 2} = \frac{14 - 4 + 3 \cdot \sqrt{14}}{28 - 2} = \frac{10 + 3 \cdot \sqrt{14}}{26}.$$

Rendere razionali i numeratori e/o i denominatori delle seguenti espressioni; se i radicali sono presenti sia al numeratore che al denominatore, razionalizzare il denominatore

Livello 1

36. $\frac{2}{\sqrt{3}-1}; \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{4}; \frac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}; \frac{13}{\sqrt{19}+\sqrt{23}}; \sqrt{17}-\sqrt{13}$
- $$\left[\sqrt{3}+1; \frac{1}{2 \cdot (\sqrt{5}-\sqrt{3})}; \frac{\sqrt{11}+\sqrt{7}}{4}; \frac{13 \cdot (\sqrt{19}-\sqrt{23})}{4}; \frac{4}{\sqrt{17}+\sqrt{13}} \right]$$

$$37. \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}; \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}; \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{11}-13}{\sqrt{11}+11}$$

$$\left[6-\sqrt{35}; \frac{3 \cdot (\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}; 5+2 \cdot \sqrt{6}; \frac{7-2 \cdot \sqrt{10}}{3}; \frac{12 \cdot \sqrt{11}-77}{55} \right]$$

$$38. \frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{4}; \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{3}; \frac{2}{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}; \frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}; \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{\sqrt{2}-1}} \left[\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{4}; \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{3}; 1 \cdot \sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}; \frac{\sqrt{5}-1}{2}; \sqrt{2}+1 \right]$$

Livello 2

$$39. \frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}; \frac{a+b-c}{\sqrt{a+b}+\sqrt{c}}; \frac{\sqrt{x}-y}{x-y^2}; \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^5}}{x+y^2}; \frac{1}{\sqrt{axy}+\sqrt{ax^2y}}$$

$$\left[\sqrt{a}+\sqrt{b}; \sqrt{a+b}-\sqrt{c}; \frac{1}{\sqrt{x+y}}; \frac{x^3-y^5}{(x+y^2) \cdot (x \cdot \sqrt{x}-y^2 \cdot \sqrt{y})}; \frac{\sqrt{axy}-\sqrt{ax^2y}}{axy-ax^2y} \right]$$

$$40. \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}; \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c^3}-\sqrt{d^5}}; \frac{\sqrt{e^3}+\sqrt{b}}{\sqrt{e^3}-\sqrt{b}}; \frac{\sqrt{2a}-\sqrt{3b}}{\sqrt{3a}+\sqrt{2b}}; \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

$$\left[\frac{a+b+2 \cdot \sqrt{ab}}{a-b}; \frac{c^2+d^2 \sqrt{cd}}{c^3-d^5}; \frac{\sqrt{e^6-b} \cdot (e^3+\sqrt{b})}{e^6-b}; \frac{\sqrt{6a}-\sqrt{ab}-\sqrt{6b}}{3a-2b}; \frac{\sqrt{a^2-b} \cdot (a+\sqrt{b})}{a^2-b} \right]$$

Lavoriamo insieme

Rendere razionale il denominatore dell'espressione $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}$. Questa volta abbiamo a che fare con un trinomio e non potendo ricorrere immediatamente all'applicazione di un prodotto notevole, proviamo ugualmente il procedimento enunciato nella regola 1, anche se sappiamo che non sarà efficace. Per eseguire questa operazione dobbiamo considerare uno dei tre possibili binomi come un monomio, per esempio quello formato dai primi due termini. In tal modo otteniamo:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}} = \frac{[(\sqrt{3}+\sqrt{5})+\sqrt{7}]}{[(\sqrt{3}+\sqrt{5})-\sqrt{7}] \cdot [(\sqrt{3}+\sqrt{5})+\sqrt{7}]} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2-7} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}{3+5+2\sqrt{15}-7} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}{1+2\sqrt{15}}.$$

Si tratta di una frazione il cui denominatore è ancora irrazionale, ma contenente un radicale in meno, per cui possiamo applicargli la regola 1. Otteniamo:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}{1+2\sqrt{15}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}) \cdot (1-2\sqrt{15})}{(1+2\sqrt{15}) \cdot (1-2\sqrt{15})} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}-2\sqrt{45}-2\sqrt{75}-2\sqrt{105}}{1-60}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}-6\sqrt{5}-10\sqrt{3}-2\sqrt{105}}{-59} = \frac{9\sqrt{3}+5\sqrt{5}-\sqrt{7}+2\sqrt{105}}{59}$$

Semplificare le seguenti espressioni**Livello 1**

$$41. \frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}-1}; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}; \frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{3}}; \frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}};$$

$$\left[\frac{3 \cdot (\sqrt{5}-\sqrt{2}+1)}{2}; \frac{\sqrt{6}+\sqrt{15}+3}{6}; \frac{4 \cdot \sqrt{15}+7 \cdot \sqrt{6}-3 \cdot \sqrt{10}-6}{12}; \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}+2}{4} \right]$$

$$42. \frac{1}{1-\sqrt[3]{3}}; \frac{2}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}; \frac{1+\sqrt[3]{2}}{1-\sqrt[3]{2}}; \frac{2+\sqrt[3]{3}}{2+\sqrt{3}}; \frac{4}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}$$

$$\left[-\frac{1+2\cdot\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}}{2}; \sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{9}; -(3+2\cdot\sqrt[3]{4}+2\cdot\sqrt[3]{2}); \frac{(2-\sqrt{2})\cdot(\sqrt[3]{3}+2)}{2}; 2\cdot\sqrt[3]{4}+4\cdot\sqrt[3]{2}+4 \right]$$

$$43. \frac{1}{1-\sqrt[4]{2}}; \frac{1}{\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}}; \frac{2\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}; \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}+1}$$

$$\left[-\frac{(\sqrt{2}+1)\cdot(\sqrt[4]{2}+1)}{22}; (\sqrt{2}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}); \frac{2\cdot\sqrt{30}-2\cdot\sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{5}+3\cdot\sqrt{6}-3\cdot\sqrt{3}+7\cdot\sqrt{2}-7}{11} \right]$$

Livello 2

$$44. \frac{a^3-b}{a-\sqrt[3]{b}}; \frac{a+\sqrt[3]{b}}{a-\sqrt[3]{b}}; \frac{\sqrt[3]{m^2}+\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{mn}}{\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n}}; \frac{2\cdot\sqrt{mn}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{m+n}}$$

$$\left[a^2+a\cdot\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2}; \frac{a^3+2a^2\cdot\sqrt[3]{b}+2a\cdot\sqrt[3]{b^2}+b}{a-b}; \frac{m\cdot\sqrt[3]{m}+n\cdot\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{mn}}{m-n}; \sqrt{m}+\sqrt{n}-\sqrt{m-n} \right]$$

$$45. -\sqrt{\frac{5}{13}}+\sqrt{\frac{13}{5}}; \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{12}}{\sqrt{6}}; \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}+\frac{2\cdot\sqrt{15}-1}{\sqrt{5}}+\frac{3-\sqrt{10}}{\sqrt{20}}$$

$$\left[\frac{8\cdot\sqrt{65}}{65}; \frac{2\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{2}-6}{6}; \frac{3\cdot\sqrt{5}+40\cdot\sqrt{3}}{30} \right]$$

$$46. \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{12}+\sqrt{2}}{\sqrt{12}-\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{8}}-\frac{3}{\sqrt{3}}+\frac{4}{\sqrt{27}}+\frac{5}{\sqrt{32}}$$

$$\left[-\frac{12\cdot\sqrt{6}+10\cdot\sqrt{2}+17}{5}; \frac{104\cdot\sqrt{3}+117\cdot\sqrt{2}-6}{72} \right]$$

$$47. \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{16}}-\frac{2}{\sqrt[3]{54}}-\frac{4}{\sqrt[3]{128}}+\frac{1}{\sqrt[3]{250}}$$

$$\left[\frac{75\cdot\sqrt{2}+25\cdot\sqrt{6}-6\cdot\sqrt{10}}{30}; \frac{31\cdot\sqrt[3]{4}}{60} \right]$$

$$48. 3+\sqrt{3}+\frac{1}{3+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}-3}; 2+\sqrt{3}+\frac{3}{2+\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}-2}; \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\frac{1-\sqrt{2}}{3} \right)^3$$

$$\left[\frac{2\cdot\sqrt{3}+9}{3}; 4-4\cdot\sqrt{3}; \frac{64}{27}\cdot(5\cdot\sqrt{2}-7) \right]$$

$$49. \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}+\frac{11-\sqrt{7}}{2}-\frac{3}{11-\sqrt{7}}$$

$$\left[2\cdot\sqrt{6}-\sqrt{15}-\sqrt{35}+3; \frac{19\cdot\sqrt{5}+9\cdot\sqrt{7}+99}{19} \right]$$

$$50. \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}; \frac{1}{1+\sqrt{2}}-\frac{1}{1-2\cdot\sqrt{2}}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{1+\sqrt{8}}$$

$$\left[\frac{5\cdot\sqrt{5}-3\cdot\sqrt{7}+4\cdot\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{2}}{2}; \frac{29\cdot\sqrt{2}}{14} \right]$$

$$51. \left[\frac{4}{(1+\sqrt{3})^2}+\frac{2}{1+\sqrt{3}} \right] \cdot \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} \right) - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} \right)^2 \cdot \left[\frac{4}{(1-\sqrt{3})^2}+\frac{2}{1-\sqrt{3}} \right] \left[\frac{3\cdot\sqrt{3}-3}{2} \right]$$

$$52. \left[\frac{9}{(1+\sqrt{2})^2} + \frac{3}{1+\sqrt{2}} \right] \cdot \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2} \right)^3 - \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2} \right)^3 \cdot \left[\frac{9}{(1-\sqrt{2})^2} + \frac{3}{1-\sqrt{2}} \right] \quad \left[\frac{15 \cdot \sqrt{2}}{4} \right]$$

Livello 3

$$53. \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{3}{\sqrt{a^3}} + \frac{3}{\sqrt{a^5}} - \frac{1}{\sqrt{a^7}}; \frac{1}{\sqrt[4]{4m^2}} - \frac{m+2}{\sqrt{18m}} + \frac{m^2-1}{\sqrt{8m^3}} - \frac{1}{\sqrt[6]{8m^3}} + \frac{m^3+2m^2+2m-1}{\sqrt{32m^5}} \quad \left[\frac{(a-1)^3 \cdot \sqrt{a}}{a}; \frac{\sqrt{2m} \cdot (5m^3 - 2m^2 - 3)}{24m^2} \right]$$

$$54. \frac{\sqrt{1+a^2} - \frac{a^2-1}{\sqrt{1+a^2}}}{1+a^2}; \left(\frac{\sqrt{x}-y}{\sqrt{x}+y} - \frac{\sqrt{x}+y}{\sqrt{x}-y} \right)^2; \left(\frac{2a^2}{a^2-b} + \frac{a}{a+\sqrt{b}} - \frac{a}{a-\sqrt{b}} \right) \cdot \frac{a^2-b}{2a} \quad \left[\frac{2 \cdot \sqrt{1+a^2}}{(a^2+1)^2}; \frac{16x^2y^2}{(x-y^2)^2}; a-\sqrt{b} \right]$$

$$55. \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{2x}{x-y} + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - \frac{2y}{x-y}; x + \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \quad [0; 2x]$$

$$56. \left[\frac{x^2}{(1+\sqrt{y})^2} + \frac{x}{1+\sqrt{y}} \right] \cdot \left(\frac{1+\sqrt{y}}{x} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{y}}{x} \right)^2 \cdot \left[\frac{x^2}{(1-\sqrt{y})^2} + \frac{x}{1-\sqrt{y}} \right] \quad \left[\frac{2 \cdot \sqrt{y}}{x} \right]$$

57. Dopo aver mostrato la verità dell'identità: $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{a-b}$, valida per ogni numero reale positivo a e b . Applicarla per razionalizzare i denominatori delle seguenti frazioni:

$$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{11}}{\sqrt{7}+\sqrt{11}}; \frac{-\sqrt{5}+\sqrt{13}}{\sqrt{13}+\sqrt{5}}; \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{15}}{2\sqrt{3}+\sqrt{15}}; \frac{1-\sqrt{17}}{1+\sqrt{17}}; \frac{\sqrt{27}-\sqrt{8}}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}$$

Lavoriamo insieme

- Risolvere l'equazione $\sqrt{3}x - 1 = 2x + \sqrt{5}$. Anche se potrebbe sembrare una equazione *strana*, non è che una equazione di primo grado a coefficienti irrazionali. Risolviamola con la consueta procedura di isolare l'incognita al primo membro. $\sqrt{3}x - 2x = 1 + \sqrt{5} \Rightarrow (\sqrt{3} - 2) \cdot x = 1 + \sqrt{5} \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-2} \Rightarrow x = \frac{(1+\sqrt{5}) \cdot (\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3})^2 - 2^2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}+2+\sqrt{15}+2 \cdot \sqrt{5}}{3-4} \Rightarrow x = -(\sqrt{3}+2+\sqrt{15}+2 \cdot \sqrt{5})$
- Risolvere l'equazione $3x^2 - 7 = 0$. Si tratta di un'equazione di secondo grado, che possiamo scrivere nel seguente modo: $(\sqrt{3}x)^2 - \sqrt{7}^2 = 0$, considerando il suo membro sinistro come una differenza di quadrati. Da cui $(\sqrt{3}x - \sqrt{7}) \cdot (\sqrt{3}x + \sqrt{7}) = 0$. Allora per il principio di annullamento del prodotto, si risolvono le due seguenti equazioni di primo grado. $\sqrt{3}x - \sqrt{7} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{7}{3}}$ e $\sqrt{3}x + \sqrt{7} = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{\frac{7}{3}}$.

Risolvere le seguenti equazioni a coefficienti irrazionali**Livello 1**

$$58. (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot x = \sqrt{2} - \sqrt{3}; (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot x - \sqrt{5} + \sqrt{7} = 0 \quad \left[x = 2 \cdot \sqrt{6} - 5; x = \sqrt{14} + \sqrt{15} - \sqrt{10} - \sqrt{21} \right]$$

$$59. \quad \sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0; 2x + \sqrt{5} = 0; 1 + \sqrt{3}x = 0; 2x - 1 = \sqrt{3} \cdot x \quad \left[x = \frac{\sqrt{6}}{3}; x = -\frac{\sqrt{5}}{2}; x = -\frac{\sqrt{3}}{3}; x = 2 + \sqrt{3} \right]$$

$$60. \quad (\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot x - \sqrt{3} + \sqrt{2} = 0; \sqrt{7}x - \sqrt{3} = \sqrt{3}x - \sqrt{7}; (\sqrt{5}x - \sqrt{7}) \cdot (\sqrt{7}x - \sqrt{5}) - \sqrt{35}x^2 = 0$$

$$\left[x = -1; x = -1; x = \frac{\sqrt{35}}{12} \right]$$

$$61. \quad (\sqrt{2} - x) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{5}x) = 0; \sqrt{2} \cdot x - \sqrt{5} = \sqrt{7} \cdot x + \sqrt{3} \quad \left[x = \frac{\sqrt{6}}{3}; x = -\frac{\sqrt{5}}{2}; x = \frac{\sqrt{3}}{3}; x = 2 + \sqrt{3} \right]$$

Livello 2

$$62. \quad \sqrt{2} \cdot x - 1 = \sqrt{3} \cdot x - \sqrt{5} \cdot x; (\sqrt{7}x - 2)^2 - (\sqrt{5}x + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{5}x - \sqrt{2}) + 5 \cdot (x - \sqrt{7}) = 2x^2$$

$$\left[x = \frac{\sqrt{30} - 2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot \sqrt{2}}{12}; x = -\frac{110 + \sqrt{7}}{87} \right]$$

$$63. \quad \frac{\sqrt{3} - x}{\sqrt{3} + x} = \frac{\sqrt{2} + x}{\sqrt{2} - x}; (\sqrt{7} + \sqrt{11}x)^2 - 11x^2 + (\sqrt{7} + \sqrt{5}x) \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{5}x) + 5x^2 = 0 \quad \left[x = 0; x = -\frac{\sqrt{77}}{11} \right]$$

$$64. \quad (\sqrt{2} + \sqrt{3} + x)^2 = (\sqrt{2} - \sqrt{3} - x)^2; 11x^2 - 19 = 0; \sqrt{7}x^2 = 2 \quad \left[x = -\sqrt{3}; x = \pm \frac{\sqrt{209}}{11}; x = \pm \frac{\sqrt[4]{2^2 \cdot 7^3}}{7} \right]$$

Lavoriamo insieme

Risolvere il seguente sistema lineare di due equazioni in due incognite $\begin{cases} \sqrt{2}x + y = 1 \\ x + \sqrt{2}y = 2 \end{cases}$ a coefficienti

irrazionali. Fra tutti i metodi studiati, probabilmente il più semplice in questo caso, è il metodo di Cramer. Il

determinante dei coefficienti $D = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{2}^2 - 1 = 1$ è diverso da 0 per il teorema di Cramer il sistema

ha una sola soluzione. Calcoliamola: $x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \sqrt{2} \end{vmatrix}}{1} = \sqrt{2} - 2; y = \frac{\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{2} = 2 \cdot \sqrt{2} - 1.$

Risolvere i seguenti sistemi lineari a coefficienti irrazionali**Livello 2**

$$65. \quad \begin{cases} x + \sqrt{2}y = \sqrt{2} \\ x - y = 1 \end{cases}; \begin{cases} \sqrt{3}x - \sqrt{2}y = 0 \\ \sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x + y = \sqrt{2} \\ x - y = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\left[(x = 4 - 2 \cdot \sqrt{2}, y = 3 - 2 \cdot \sqrt{2}); (x = 5 \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot \sqrt{5}, y = \sqrt{30} - 3 \cdot \sqrt{3}); \left(x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}, y = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2} \right) \right]$$

$$66. \quad \begin{cases} \sqrt{2}x - \sqrt{8}y = 2 \\ x - 2y = -1 \end{cases}; \begin{cases} \sqrt{3}x + y = 3 \cdot \sqrt{3} \\ 2 \cdot \sqrt{3}x + 2y = \sqrt{27} \end{cases}; \begin{cases} \sqrt{3}x - \sqrt{2}y = \sqrt{3} \\ \sqrt{2}x + \sqrt{3}y = \sqrt{2} \end{cases} \quad \left[\left(x = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}, y = \frac{1 + \sqrt{2}}{4} \right); (\emptyset); (x = 1, y = 0) \right]$$

$$67. \quad \begin{cases} \sqrt{2}x + y = \sqrt{5} \\ \sqrt{5}x - y = \sqrt{2} \end{cases}; \begin{cases} (\sqrt{2} + 1) \cdot x - y = -1 \\ x + (\sqrt{2} - 1) \cdot y = 1 \end{cases}; \begin{cases} (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot x - (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\left[(x = 1, y = \sqrt{5} - \sqrt{2}); \left(x = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}, y = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \right); \left(x = \frac{3 - \sqrt{6}}{6}, y = \frac{3 + \sqrt{6}}{6} \right) \right]$$

Livello 3

$$\begin{aligned}
68. \quad & \begin{cases} x + y - z = 1 \\ \sqrt{2}x - y = -1 \\ x + y - \sqrt{2}z = 0 \end{cases} ; \begin{cases} \sqrt{2}x - y + z = \sqrt{2} \\ x + \sqrt{3}y = -1 \\ y - z = 0 \end{cases} ; \begin{cases} \sqrt{5} \cdot x - y + 2z = 0 \\ x + \sqrt{5} \cdot y - z = 1 \\ 2x - y + \sqrt{5} \cdot z = -1 \end{cases} \\
& \left[\left(x=1, y=1+\sqrt{2}, z=1+\sqrt{2} \right); \left(x=1, y=-\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}, z=-\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \right); \left(x=\frac{15-3 \cdot \sqrt{5}}{5}, y=-\frac{5+\sqrt{5}}{5}, z=\frac{5-8 \cdot \sqrt{5}}{5} \right) \right] \\
69. \quad & \begin{cases} (\sqrt{2}+1) \cdot x - y = 1 \\ (\sqrt{2}+1) \cdot y - z = 2 \\ x + (\sqrt{2}+1) \cdot z = -1 \end{cases} ; \begin{cases} \sqrt{2}x + y - z = 1 \\ x - y + 2z = 0 \\ (\sqrt{2}+1) \cdot x + z = 3 \end{cases} ; \begin{cases} \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{2}y = \sqrt{5} \\ x - y + z = 1 \\ (\sqrt{3}+1) \cdot x + (\sqrt{2}-1) \cdot y + z = \sqrt{5}+1 \end{cases} \\
& \left[\left(x=\frac{6 \cdot \sqrt{2}-4}{7}, y=\frac{1+2 \cdot \sqrt{2}}{7}, z=\frac{3 \cdot \sqrt{2}-9}{7} \right); (\emptyset); (\text{Indeterminato}) \right]
\end{aligned}$$

Quelli che vogliono sapere di più ...

Costruzione dei numeri irrazionali

Una delle proprietà più interessanti dei numeri razionali consiste nel fatto che, anche se essi sono costituiti da infinite cifre dopo la virgola, noi siamo in grado di dire che cifra è una qualsiasi di esse scelta a piacere. Chiariamo quanto detto con un esempio.

Esempio 25

Sia dato il numero razionale $0,1235214782$. Supponiamo di voler conoscere il valore della sua cifra che occupa la posizione numero 1234 dopo la virgola. Dato che il numero ha un antiperiodo di 3 cifre e un periodo di 7 cifre, possiamo dire che le sue cifre di posto 4, 11, 18, ... sono tutte uguali a 5, quelle di posto 5, 12, 19, ... uguali a 2 e così via, quelle di posto 10, 17, 24, ... uguali a 2. Quindi, per risolvere il problema, basta sottrarre a 1234 il numero 3 delle cifre dell'antiperiodo e determinare il resto della divisione per 7 del risultato ottenuto, 1231. Si ottiene 6, per cui possiamo dire che la cifra cercata è la sesta del periodo, cioè 8.

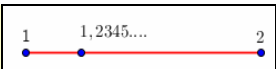
Potrebbe sembrare che la precedente proprietà risulti una caratteristica dei soli numeri razionali, soprattutto se consideriamo numeri ben noti come $\sqrt{2}$ e π . Ciò non è sempre vero.

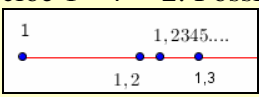
Esempio 26

Consideriamo il numero $0,123456789101112...$ che non è periodico, dato che le sue cifre decimali si ottengono mettendo uno accanto all'altro gli infiniti numeri naturali. Anche in questo caso siamo in grado di conoscere (con qualche difficoltà in più dell'esempio precedente) ogni sua cifra, nonostante il numero sia irrazionale. Supponiamo di voler sapere qual è la cifra di posto numero 654. Osserviamo che con i numeri naturali a una cifra occupiamo i primi 9 posti; con quelli a 2 cifre (da 10 a 99), che sono cento, occupiamo le posizioni da $9 + 1 = 10$ a $9 + 200 = 209$, con quelli a 3 cifre (da 100 a 999), che sono mille, occupiamo le posizioni da $209 + 1 = 210$ a $209 + 3000 = 3009$. Poiché $654 = 209 + 445$, la cifra numero 654 è quella ottenuta scrivendo 445 cifre dopo il numero 999. Perciò dividiamo 445 per 3, ottenendo 148 con il resto di 1. Ciò significa che la cifra cercata è la prima del centoquarantanovesimo numero a 3 cifre, cioè 248. Quindi la cifra cercata è 2.

Visto che i numeri irrazionali appaiono *difficili* da trattare, risulta interessante approssimarli mediante numeri razionali.

Esempio 27

Consideriamo il numero $r = 1,2345678910...$. Sulla retta reale  esso è a destra di 1 e a sinistra di 2, cioè $1 < r < 2$. Possiamo ottenere una posizione più precisa tenendo conto che è anche vero che

 $1,2 < r < 1,3$ o che $1,23 < r < 1,24$ e così via.

Nell'esempio precedente possiamo costruire due sequenze infinite di numeri razionali, una formata da numeri minori di r (1; 1,2; 1,23; 1,234; 1,2345; ...) e una formata da numeri maggiori di r (2; 1,3; 1,24; 1,235; 1,2346; ...). La prima sequenza è composta da numeri sempre più grandi, diciamo che è una *successione crescente*, la seconda è una *successione decrescente*.

È interessante notare che la differenza fra due numeri che occupano lo stesso posto nelle due successioni diminuisce all'aumentare della posizione. Così

$$\begin{aligned} 2 - 1 &= 1; \\ 1,3 - 1,2 &= 0,1; \\ 1,24 - 1,23 &= 0,01; \\ 1,235 - 1,234 &= 0,001; \\ 1,2346 - 1,2345 &= 0,0001; \dots \end{aligned}$$

Praticamente stiamo ottenendo una posizione sempre più precisa per il numero r sulla retta reale, poiché la lunghezza del segmento all'interno del quale esso deve essere posizionato diventa sempre più piccola.

Questo procedimento è noto come **approssimazione di un numero irrazionale**, dato che ci stiamo avvicinando sempre di più alla sua precisa posizione e quindi al suo preciso valore numerico decimale, valore che però non raggiungeremo mai. Abbiamo però la possibilità di ottenere un valore di r preciso quanto vogliamo, in relazione agli strumenti di calcolo a nostra disposizione (per esempio, potremmo avere a disposizione una calcolatrice che visualizza solo 8 cifre).

Definizione 10

Dato un numero irrazionale r , un numero razionale $a < r$ si dice **approssimazione per difetto** di r . Un numero razionale $a > r$ si dice **approssimazione per eccesso** di r .

Ricordiamo adesso un concetto incontrato a proposito delle relazioni di equivalenza.

Definizione 11

Diciamo **partizione** di un insieme C , l'unione di n insiemi disgiunti $A_1, A_2, \dots, A_n$ tali che $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = C$ e $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \emptyset$.

In questo caso particolare ci interessa considerare le partizioni dell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali.

Esempio 28

Consideriamo la seguente partizione di $\mathbb{Q}$, $A = \{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\}$ e $B = \{r \in \mathbb{Q} : r^2 > 2\}$.

Tutti gli elementi del primo insieme sono minori di quelli del secondo, inoltre, se ordiniamo gli elementi di A e di B , troviamo in A una successione crescente di numeri razionali che approssimano per difetto il numero $\sqrt{2}$ e in B una successione decrescente di numeri razionali che approssimano per eccesso $\sqrt{2}$. Possiamo allora dire che i due insiemi A e B definiscono il numero $\sqrt{2}$.

Quanto visto significa che i numeri irrazionali possono costruirsi per approssimazioni successive di successioni di numeri razionali.

Per la prova Invalsi

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato alle prove Invalsi del 2011.

Quale fra le seguenti uguaglianze è corretta, qualunque sia il numero reale che sostituisce la x ?

- A) $\sqrt{x^2} = x$ B) $\sqrt{x^2} = \pm x$ C) $\sqrt{x^2} = |x|$ D) $\sqrt{x^2} = \pm|x|$

La prima non è corretta perché per esempio $\sqrt{(-2)^2} = 2 \neq -2$; la B) e la D) per lo stesso motivo. Pertanto la soluzione corretta è la C).

1. (Invalsi 2011) Nelle prime due colonne di un foglio elettronico sono state calcolate alcune coppie di valori (x, y) di una funzione.

	A x	B y	C
•			
1	1	0	
2	2	1	
3	5	2	
4	10	3	
5	17	4	
6	26	5	
7	37	6	
8			

Quale tra le seguenti è la funzione di cui sono stati calcolati i valori (x, y) ?

- A) $y = \sqrt{x} - 1$ B) $y = \sqrt{x+1}$ C) $y = \sqrt{x-1}$ D) $y = 1 + \sqrt{x}$

[C]

2. (Invalsi 2014) Se a è un numero reale compreso tra 0 e 1 ($0 < a < 1$), allora

[C]

- A) $a < \sqrt{a} < \frac{1}{a} < a^2$ B) $\frac{1}{a} < \sqrt{a} < a < a^2$ C) $a^2 < a < \sqrt{a} < \frac{1}{a}$ D) $\sqrt{a} < a < a^2 < \frac{1}{a}$

3. Quale fra i seguenti numeri è razionale?

[D]

- A) $\sqrt{15} + \sqrt{25}$ B) $\sqrt{13} - \sqrt{25}$ C) $\sqrt{\sqrt{11} + \sqrt{14}}$ D) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{2}$

4. Quale fra le seguenti scritte è corretta?

[A]

- A) $\sqrt{17} > 4 > \frac{\sqrt{39}}{\sqrt{2}+1}$ B) $11 < \sqrt{147} < 12$ C) $\sqrt{11} - \sqrt{21} = \sqrt{42} - \sqrt{2}$ D) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} > 5$

5. Solo sapendo che $41 < \sqrt{1748} < 42$, possiamo dedurre che la prima cifra decimale esatta di $\sqrt{1748}$

[D]

- A) è 9 B) è compresa tra 5 e 9 C) è compresa tra 0 e 4 D) non si può determinare

6. Se $a < 10$ possiamo dire che $\sqrt[3]{a}$ A) è positivo B) può non avere significato C) è minore di 1 D) è minore o uguale a 2,2

[D]

7. Quale fra i seguenti radicali è equivalente a $\sqrt[8]{144}$? A) $\sqrt{12}$ B) $\sqrt[4]{12}$ C) 12 D) $\sqrt[3]{12}$

[C]

8. Quale fra i seguenti radicali non è simile a $\sqrt{a}$, con $a > 0$? A) $\sqrt{2a}$ B) $\sqrt{a^3}$ C) $\sqrt[4]{a^{10}}$ D) $\sqrt{1+a}$

[D]

9. Se $\sqrt{x^2} = x$ allora A) x è intero B) $x > 0$ C) $x \geq 0$ D) $x \neq 0$

[C]

10. La corretta semplificazione di $\frac{1}{\sqrt{3}-2}$ è A) $-2 - \sqrt{3}$ B) $\frac{\sqrt{3}+2}{5}$ C) $\sqrt{3} + 2$ D) Nessuno dei precedenti

[A]

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi

1. Provare che $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ è un numero intero dispari se a e b sono numeri interi consecutivi e c è il loro prodotto. Verificare quanto provato per $a = 3, b = 4, c = 12$.
2. Semplificare $\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$. $\left[\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2} \right]$

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica

AHSME = Annual High School Mathematics Examination

K = Kangaroo

OMI = Olimpiadi della Matematica italiane

MT = Mathematics Teacher, rivista della NCTM

TAMU = Texas A&M University

Lavoriamo insieme

Il quesito è stato pubblicato sul numero di ottobre 1993 della rivista Mathematics Teacher.

Calcolare $\sqrt[3]{\sqrt{30} + \sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{30} - \sqrt{3}}$.

Dato che i radicali esterni hanno lo stesso indice, possiamo moltiplicare i relativi radicandi, che costituiscono una differenza di quadrati: $\sqrt[3]{30-3} = \sqrt[3]{27} = 3$.

1. (AHSME1974) Semplificare $\frac{1}{3-\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-2}$. [5]
2. (AHSME1976) Sia il numero: $P = 2^{\frac{1}{7}} \cdot 2^{\frac{3}{7}} \cdot \dots \cdot 2^{\frac{2n-1}{7}}$, in cui tutte le frazioni hanno denominatore uguale a 7 e numeratori i numeri dispari in successione. Qual è il più piccolo numero n per cui P è maggiore di 1000? [9]
3. (AHSME1976) Semplificare $\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$. [1]
4. (OMI 1991) Si dice che tre numeri x, y, z sono in progressione aritmetica se $y - x = z - y$. A esempio 6, 8, 10 formano una progressione aritmetica così come 15, 21, 27. Dati tre numeri positivi m, n, p in progressione aritmetica, quale tra le seguenti tre terne forma sicuramente una nuova progressione aritmetica? [B]
 A) $\sqrt{m}, \sqrt{n}, \sqrt{p}$ B) $\sqrt{m} + \sqrt{n}, \sqrt{m} + \sqrt{p}, \sqrt{n} + \sqrt{p}$ C) $\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{p}}, \frac{1}{\sqrt{m} + \sqrt{p}}, \frac{1}{\sqrt{m} + \sqrt{n}}$
 D) m^2, n^2, p^2 E) $\frac{1}{p}, \frac{1}{n}, \frac{1}{m}$
5. (K2005) Quanti numeri interi positivi n soddisfano entrambe le disuguaglianze $2000 < \sqrt{n \cdot (n+1)} < 2005$? A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5 [E]
6. (K2009) Quanti numeri interi n esistono tali che la distanza tra $\sqrt{n}$ e 10 sia strettamente minore di 1? A) 39 B) 29 C) 20 D) 19 E) 1 [A]

Questions in English

Working together

This question was published in the issue of November 1995 in Mathematics Teacher.

Find k if $\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \sqrt{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^k$.

We seek to write the two members as powers of the same base. So we work on the first member:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}-1}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{4}} = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{4}+1}} = \left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{4}}\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{8}}$$

Hence $k = 3/8$.

7. (AHSME1976) For how many real numbers x $\sqrt{-(x+1)^2}$, represents a real number? [1]
8. (AHSME1981) If $\sqrt{x+2} = 2$, how much is $(x+2)^2$? [16]
9. (AHSME1986) Simplify $\left(\sqrt[5]{27} - \sqrt{6 + \frac{3}{4}}\right)^2$. [3/4]
10. (TAMU1999) Find $a + b$ if $\sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{a}{b}} = 3$. [35]
11. (TAMU2000) If $\sqrt{19^2 + 19^2 + \dots + 19^2} = 19^2$, how many times must 19^2 appear in the radicand? [361]
12. (TAMU2009) Find the value of $\sqrt{5+2\cdot\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\cdot\sqrt{6}}$. $[2\cdot\sqrt{2}]$

Attività di recupero**Operazione di estrazione di radice n-esima****Fase 1: Osserva**

- Consideriamo il seguente radicale $\sqrt[4]{81}$. Questo rappresenta un numero reale positivo e, precisamente il numero intero 3, dato che sappiamo che la cui quarta potenza di 3 è proprio 81. Possiamo quindi scrivere $\sqrt[4]{81} = 3$: si tratta di un radicale *apparente*.
- Anche il radicale $\sqrt[3]{-\frac{125}{8}}$, rappresenta un numero reale, ma stavolta negativo. Anzi in effetti un numero razionale, dato che conosciamo due numeri interi il cui cubo è rispettivamente 125 e 8. Scriviamo perciò $\sqrt[3]{-\frac{125}{8}} = -\frac{5}{2}$: si tratta ancora di un radicale *apparente*.
- La seguente scrittura invece non rappresenta un numero reale: $\sqrt[2]{-64}$, poiché non vi sono numeri reali il cui quadrato sia negativo: infatti $8^2 = (-8)^2 = 64$. Osserviamo che, quando si tratta di un radicale quadratico, non è necessario indicare l'indice della radice: $\sqrt[2]{-64} = \sqrt{-64}$.
- Il simbolo seguente rappresenta un numero reale irrazionale: $\sqrt{27}$. Infatti non conosciamo alcun numero razionale il cui quadrato sia 27. Sappiamo però che $5^2 = 25 < 27$ e $6^2 = 36 > 27$. Ciò significa che $5 < \sqrt{27} < 6$. Se vogliamo, possiamo precisare meglio il valore di $\sqrt{27}$, esaminando i quadrati dei numeri con una cifra decimale, così $5,1^2 = 26,01 < 27$; $5,2^2 = 27,04 > 27 \Rightarrow 5,1 < \sqrt{27} < 5,2$. Il procedimento precedente può essere continuato, per una migliore approssimazione del valore del radicale, fino ad acquisire un numero grande quanto si vuole (almeno in linea teorica) di cifre decimali.

Fase 2: Completa ...

- Determinare il numero intero rappresentato dal seguente simbolo: $\sqrt[5]{32}$. Poiché $\dots^5 = 32$, possiamo dire che si ha: $\sqrt[5]{32} = \dots$
- Determinare il numero razionale rappresentato da $\sqrt[4]{\frac{1}{256}}$. Poiché $\dots^4 = \dots$ e $\dots^4 = \dots$, possiamo scrivere che $\sqrt[4]{\frac{1}{256}} = \frac{\dots}{\dots}$.
- Determinare il numero reale rappresentato da $\sqrt[6]{-1}$. Poiché la sesta potenza di qualsiasi numero reale è sempre un numero reale, possiamo dire che il precedente simbolo
- Determinare il numero reale eventualmente rappresentato da $\sqrt[3]{-84}$. Non esistono numeri interi il cui cubo sia uguale a, però abbiamo $(-4)^3 = \dots > -84$ e $(-5)^3 = \dots < -84$, ciò significa che $-5 < \sqrt[3]{-84} < -4$. Quindi $\sqrt[3]{-84}$ è un numero del tipo $-4,x$, con x numero con infinite cifre. Se vogliamo trovare la prima cifra decimale procediamo con il calcolo dei seguenti cubi: $-4,1^3 = -68,921$; $-4,2^3 = \dots$, $-4,3^3 = \dots$, $-4,4^3 = \dots$ e ci fermiamo qui perché $-4,4^3 < \dots$. Possiamo perciò dire che $\dots < \sqrt[3]{-84} < \dots$. Quindi il numero reale con la prima cifra decimale corretta rappresentato dal numero irrazionale $\sqrt[3]{-84}$ è

Fase 3: Prova!

Determinare gli eventuali numeri razionali rappresentati dai seguenti simboli

1. $\sqrt{16}; \sqrt[4]{16}; \sqrt[4]{-16}; \sqrt[3]{-27}; -\sqrt[3]{8}; -\sqrt{25}$

[4; 2; $\emptyset$; -3; 2; -5]

2. $\sqrt[4]{625}; \sqrt[3]{-64}; \sqrt[4]{(-16)^2}; -\sqrt[6]{-1}; \sqrt{256}; \sqrt[4]{256}$ $[5; -4; 4; \emptyset; 16; 4]$
3. $\sqrt[8]{256}; \sqrt[6]{729}; \sqrt{49}; \sqrt{\frac{121}{49}}; \sqrt[3]{\frac{-125}{64}}; \sqrt[4]{\frac{-16}{-81}}$ $\left[2; 3; 7; \frac{11}{7}; -\frac{5}{4}; \frac{2}{3}\right]$
4. $\sqrt[5]{\frac{-1}{32}}; -\sqrt[4]{\frac{-1296}{81}}; \sqrt{\frac{1}{1024}}; \sqrt{\frac{169}{289}}; \sqrt{\frac{576}{676}}; \sqrt{\frac{841}{961}}$ $\left[-\frac{1}{2}; \emptyset; \frac{1}{32}; \frac{13}{17}; \frac{12}{13}; \frac{29}{31}\right]$
5. $\sqrt[4]{-\frac{81}{-2401}}; \sqrt[5]{\frac{1}{-3125}}; \sqrt[6]{\frac{-1}{6400}}; -\sqrt[3]{\frac{1331}{1728}}; \sqrt[3]{\frac{343}{2197}}; -\sqrt[6]{\frac{1}{729}}$ $\left[\frac{3}{7}; -\frac{1}{5}; \emptyset; -\frac{11}{12}; \frac{7}{13}; -\frac{1}{3}\right]$

Calcolare un valore con una cifra decimale esatta dei seguenti numeri irrazionali

6. $\sqrt{19}; \sqrt{111}; \sqrt{250}; \sqrt[3]{42}; \sqrt[3]{-67}; \sqrt[3]{100}; \sqrt{11}$ $[4,3; 10,5; 15,8; 3,4; -4,0; 4,6; 3,3]$
7. $\sqrt[4]{125}; \sqrt[4]{580}; \sqrt[4]{1050}; \sqrt{124}; \sqrt[3]{200}; \sqrt[4]{4321}; \sqrt[4]{1111}; \sqrt[3]{111}$ $[3,3; 4,9; 5,6; 11,1; 5,8; 8,1; 5,7; 4,8]$

Operazioni con i radicali

Fase 1: Osserva

- Il seguente radicale $\sqrt[6]{216}$ è semplificabile o irriducibile? Scomponiamo il radicando in fattori: $\sqrt[6]{216} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 3^3}$: dato che $\text{MCD}(6, 3, 3) = 3 \neq 1$, il radicale è *semplificabile*. Semplifichiamolo dividendo l'indice e gli esponenti per tale MCD: $\sqrt[6]{216} = \sqrt[2]{2^{\frac{3}{3}} \cdot 3^{\frac{3}{3}}} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$. Naturalmente questo radicale è adesso irriducibile.
- Semplificare, se possibile, il seguente radicale: $\sqrt[8]{720}$. Scomponiamo il radicando in fattori: $\sqrt[8]{720} = \sqrt[8]{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5}$. Poiché $\text{MCD}(8, 4, 3, 1) = 1$, il radicale è *irriducibile*.
- Semplificare $\sqrt[20]{a^{15}b^{10}c^{15}}$. Calcoliamo il $\text{MCD}(20, 15, 10, 15) = 5$. Dividiamo indice ed esponenti per questo valore: $\sqrt[20]{a^{15}b^{10}c^{15}} = \sqrt[4]{a^3b^2c^3}$.
- Semplificare la seguente espressione: $\sqrt{6} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{18}$. Poiché i tre fattori hanno lo stesso indice possiamo scrivere l'espressione sotto un unico radicale: $\sqrt{6} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{6 \cdot 12 \cdot 18}$ e, invece di eseguire le moltiplicazioni, scomponiamo ciascun radicando in fattori primi: $\sqrt{6 \cdot 12 \cdot 18} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3^2} = \sqrt{2^4 \cdot 3^4}$. In tal modo ci accorgiamo facilmente che il radicale è solo apparente, quindi lo semplifichiamo: $\sqrt{2^4 \cdot 3^4} = 2^2 \cdot 3^2 = 36$.
- Semplificare la seguente espressione: $\frac{\sqrt[3]{a^2b} \cdot \sqrt[3]{a^4b^2c}}{\sqrt[3]{a^4} \cdot \sqrt[3]{ab^5c^3}}$. Avendo tutti i radicali uguale indice possiamo

scrivere l'intera espressione all'interno di un solo radicale: $\sqrt[3]{\frac{a^2b \cdot a^4b^2c}{a^4 \cdot ab^5c^3}} = \sqrt[3]{\frac{a^6b^3c}{a^5b^5c^3}}$. Adesso semplifi-

chiamo il radicando: $\sqrt[3]{\frac{a^{\cancel{6}}b^{\cancel{3}}c^{\cancel{1}}}{a^{\cancel{4}}b^{\cancel{5}2}c^{\cancel{3}2}}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b^2c^2}}$.

- Semplificare $\frac{\sqrt{ax^2} \cdot \sqrt[3]{a^2x}}{\sqrt[4]{ax}}$. Dato che ciascun radicando ha un diverso indice riconduciamo tutto allo

stesso indice, che è $\text{mcm}(2, 3, 4) = 12$: $\frac{\sqrt[12]{(ax^2)^6} \cdot \sqrt[12]{(a^2x)^4}}{\sqrt[12]{(ax)^3}} = \frac{\sqrt[12]{a^6x^{12}} \cdot \sqrt[12]{a^8x^4}}{\sqrt[12]{a^3x^3}}$. Portiamo tutto sotto lo

stesso segno di radicale e semplifichiamo: $\frac{\sqrt[12]{a^6x^{12}} \cdot \sqrt[12]{a^8x^4}}{\sqrt[12]{a^3x^3}} = \sqrt[12]{\frac{a^6x^{12} \cdot a^8x^4}{a^3x^3}} = \sqrt[12]{\frac{a^{14}x^{16}}{a^3x^3}} = \sqrt[12]{a^{11}x^{13}}$.

- Semplificare la seguente espressione: $3 \cdot \sqrt{5} + 7 \cdot \sqrt{5} - 2 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{3}$. Possiamo sommare fra loro solo i radicali simili, pertanto scriviamo:

$$3 \cdot \sqrt{5} + 7 \cdot \sqrt{5} - 2 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{3} = (3 + 7 + 1) \cdot \sqrt{5} + (-2 - 1) \cdot \sqrt{3} = 11 \cdot \sqrt{5} - 3 \cdot \sqrt{3}.$$

- Semplificare: $6 \cdot \sqrt{8} - 2 \cdot \sqrt{6} + 4 \cdot \sqrt{24} - \sqrt{2} + \sqrt{54}$. Apparentemente non vi sono radicali fra loro simili, scomponiamo ciascun radicando in fattori primi: $6 \cdot \sqrt{2^3} - 2 \cdot \sqrt{2 \cdot 3} + 4 \cdot \sqrt{2^3 \cdot 3} - \sqrt{2} + \sqrt{2 \cdot 3^3}$. Adesso scomponiamo ciascun radicando che ha almeno un fattore con esponente maggiore o uguale a 2 nel prodotto di due radicali, uno apparente e l'altro irriducibile. Dato che sono radici quadrate, formiamo radicali con potenze multiple di 2: $6 \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{6} + 4 \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2 \cdot 3} - \sqrt{2} + \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2 \cdot 3}$. Eliminiamo i radicali apparenti: $6 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{6} + 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{6} - \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{6}$ e svolgiamo le moltiplicazioni: $12 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{6} + 8 \cdot \sqrt{6} - \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{6}$. Adesso raggruppiamo le coppie di radicali simili e le sommiamo fra loro: $(12 - 1) \cdot \sqrt{2} + (-2 + 8 + 3) \cdot \sqrt{6} = 11 \cdot \sqrt{2} + 9 \cdot \sqrt{6}$.
- Semplificare la seguente espressione: $(1 + \sqrt{3})^2 - (1 + \sqrt{3}) \cdot (1 - \sqrt{3})$. Sviluppiamo il quadrato di binomio: $1 + (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} - (1 + \sqrt{3}) \cdot (1 - \sqrt{3}) = 1 + 3 + 2 \cdot \sqrt{3} - (1 + \sqrt{3}) \cdot (1 - \sqrt{3}) = 4 + 2 \cdot \sqrt{3} - (1 + \sqrt{3}) \cdot (1 - \sqrt{3})$. Adesso sviluppiamo il secondo prodotto, che è una differenza di quadrati: $4 + 2 \cdot \sqrt{3} - [1^2 - (\sqrt{3})^2] = 4 + 2 \cdot \sqrt{3} - [1^2 - 3] = 4 + 2 \cdot \sqrt{3} - [-2] = 4 + 2 \cdot \sqrt{3} + 2 = 6 + 2 \cdot \sqrt{3}$.

Fase 2: Completa ...

- Semplificare, se possibile, il radicale $\sqrt[4]{1000}$. Scomponiamo il radicando in fattori: $\sqrt[4]{1000} = \sqrt[4]{\dots\dots\dots}$. Dato che $\text{MCD}(4, \dots) = \dots$ possiamo dire che il radicale è $\dots\dots\dots$. E può anche scriversi: $\dots\dots\dots$
- Semplificare, se possibile, il radicale: $\sqrt[6]{176400}$. Scomponiamo il radicando in fattori: $\sqrt[6]{176400} = \sqrt[6]{\dots\dots\dots}$. Poiché $\text{MCD}(6, \dots) = \dots$, il radicale è $\dots\dots\dots$. Quindi si ha: $\sqrt[6]{176400} = \dots\dots\dots$
- Semplificare $\sqrt[12]{a^{15}m^9p^6z^{21}}$. Calcoliamo il $\text{MCD}(12, 15, \dots, \dots, \dots) = \dots$. Dividiamo indice ed esponenti per questo valore: $\sqrt[12]{a^{15}m^9p^6z^{21}} = \dots\dots\dots$
- Semplificare la seguente espressione: $\sqrt{20} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{15}$. Poiché i tre fattori hanno lo stesso indice possiamo scrivere l'espressione sotto un unico radicale: $\sqrt{20} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{15} = \dots\dots\dots$. Scomponiamo ciascun radicando in fattori primi: $\sqrt{\dots\dots\dots}$, in tal modo ci accorgiamo facilmente che il radicale è $\dots\dots\dots$, quindi si ha: $\dots\dots\dots$
- Semplificare la seguente espressione: $\frac{\sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt[4]{xy^4z^2}}{\sqrt[4]{x^5y} \cdot \sqrt[4]{y^2z^3}}$. Avendo tutti i radicali uguale indice possiamo scrivere l'intera espressione all'interno di un solo radicale: $\sqrt[4]{\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}}$. Adesso semplifichiamo il radicando: $\dots\dots\dots$
- Semplificare $\frac{\sqrt{m^3} \cdot \sqrt[4]{m^2p}}{\sqrt[8]{mp}}$. Dato che ciascun radicando ha un diverso indice riconduciamo tutto allo stesso indice, che è $\text{mcm}(2, \dots, \dots) = \dots\dots\dots$ $\frac{\sqrt{m^3} \cdot \sqrt[4]{m^2p}}{\sqrt[8]{mp}} = \dots\dots\dots$ Portiamo tutto sotto lo stesso segno di radicale e semplifichiamo: $\dots\dots\dots$

- Semplificare la seguente espressione: $4 \cdot \sqrt{11} + 2 \cdot \sqrt{7} - \sqrt{7} - 7 + \sqrt{11}$. Raccogliamo i radicali simili e ne sommiamo i coefficienti:
- Semplificare: $4 \cdot \sqrt{12} + 3 \cdot \sqrt{18} + \sqrt{28} - \sqrt{7} + \sqrt{3}$. Scomponiamo ciascun radicando in fattori primi: Scomponiamo ciascun radicando che ha almeno un fattore con esponente maggiore o uguale a 2 nel prodotto di due radicali, uno apparente e l'altro irriducibile. eliminiamo i radicali apparenti: svolgiamo le moltiplicazioni: sommiamo i radicali simili:
- Semplificare la seguente espressione: $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 - (2 + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} - 1) + \sqrt{15}$. Sviluppiamo il quadrato di binomio: sviluppiamo il secondo prodotto: riconosciamo e semplifichiamo i termini simili:

Fase 3: Prova!

Semplificare, laddove possibile, i seguenti radicali

- $\sqrt[4]{36}; \sqrt[6]{27}; \sqrt[8]{16}; \sqrt[9]{-27}; \sqrt[10]{32}; \sqrt[12]{64}$ $\left[\sqrt{6}; \sqrt{3}; \sqrt{2}; \sqrt[3]{-3}; \sqrt{2}; \sqrt{2} \right]$
- $\sqrt[9]{121}; \sqrt[15]{-125}; \sqrt[8]{256}; \sqrt[6]{\frac{169}{196}}; \sqrt[4]{\frac{625}{343}}; \sqrt[16]{\frac{576}{729}}$ $\left[\sqrt[9]{121}; \sqrt[5]{-5}; 2; \sqrt[3]{\frac{13}{14}}; \sqrt[4]{\frac{5}{343}}; \sqrt[8]{\frac{24}{17}} \right]$
- $\sqrt[14]{\frac{128}{49}}; \sqrt[6]{\frac{216}{125}}; \sqrt[20]{\frac{32}{25}}; \sqrt[12]{a^4 b^6}; \sqrt[6]{a^2 b^3 c^6}; \sqrt[4]{a^4 b^6 c^8}$ $\left[\frac{2}{\sqrt[3]{7}}; \sqrt{\frac{6}{5}}; \sqrt[4]{\frac{2}{5}}; \sqrt[6]{a^2 b^3}; c \cdot \sqrt[6]{a^2 b^3}; abc^2 \cdot \sqrt{b} \right]$
- $\sqrt[15]{a^{10} b^{15} x^{20}}; \sqrt[18]{x^6 y^{12} z^{18}}; \sqrt[14]{m^{14} n^4}; \sqrt[25]{5 a^5 b^{10}}; \sqrt[12]{m^{12} p^{16} z^6}; \sqrt[16]{16 a^8 x^{12} c^{16}}$ $\left[x \cdot \sqrt[3]{a^2 b^3 x}; \sqrt[3]{xy^2 z^3}; m \cdot \sqrt[7]{n^2}; \sqrt[25]{5} \cdot \sqrt[5]{ab^2}; mp \sqrt[6]{p^2 z^3}; \sqrt[4]{2 a^2 x^3 c^4} \right]$
- $\sqrt[36]{\frac{b^{12} x^4}{a^6 y^{12}}}; \sqrt[8]{\frac{x^4 y^2}{3 a^8 b^4}}; \sqrt[6]{\frac{mn}{6 p^6}}; \sqrt[30]{\frac{a^{12} b^{18}}{x^5 y^{10}}}; \sqrt[18]{\frac{4 x^6 y^{12}}{m^4 p^6}}; \sqrt[26]{\frac{p^{13}}{8 x^4}}$ $\left[\sqrt[18]{\frac{b^6 x^2}{a^3 y^6}}; \frac{1}{\sqrt[8]{3}} \cdot \sqrt[4]{\frac{x^2 y}{a^4 b^2}}; \frac{1}{p} \cdot \sqrt[6]{\frac{mn}{6}}; \sqrt[5]{\frac{a^2 b^3}{xy^2}}; \sqrt[9]{\frac{2 x^3 y^6}{m^2 p^3}}; \sqrt[26]{\frac{p}{8 x^4}} \right]$

Semplificare le seguenti espressioni contenenti prodotti o rapporti di radicali

- $\sqrt{28} \cdot \sqrt{56} \cdot \sqrt{7}; \sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[3]{18}; \sqrt[4]{40} \cdot \sqrt[4]{50} \cdot \sqrt[4]{60} \cdot \sqrt[4]{80}$ $\left[28 \cdot \sqrt{14}; 24; 20 \cdot \sqrt[4]{60} \right]$
- $\frac{\sqrt[6]{144} \cdot \sqrt[6]{180}}{\sqrt[6]{2}} \cdot \sqrt[6]{20}; \frac{\sqrt[4]{36} \cdot \sqrt{18}}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{8}$ (Attenzione a semplificare prima ciascun radicale) $\left[2 \cdot \sqrt[6]{4050}; 6 \cdot \sqrt{2} \right]$
- $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[4]{12}; \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[5]{5}; \frac{\sqrt[3]{121} \cdot \sqrt[6]{11}}{\sqrt{22}}; \frac{\sqrt[4]{6} \cdot \sqrt[3]{24}}{\sqrt[6]{36}} \cdot \sqrt{2}$ $\left[2 \cdot \sqrt[6]{54}; \sqrt[12]{2^{10} \cdot 3^{11}}; 2 \cdot \sqrt[15]{3^5 \cdot 5^3}; \frac{\sqrt[6]{968}}{2}; 2 \cdot \sqrt[12]{2^5 \cdot 3^3} \right]$
- $\frac{\sqrt[3]{a^2 b} \cdot \sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{ab} \cdot \sqrt[3]{ab^3}}; \frac{\sqrt[4]{x^3 y z} \cdot \sqrt[4]{x^5}}{\sqrt[4]{y}}; \frac{\sqrt{p^7}}{\sqrt{pq^3} \cdot \sqrt{p^3 q} \cdot \sqrt{q^5}}; \frac{\sqrt[6]{m^2} \cdot \sqrt[3]{m^2}}{\sqrt[3]{m} \cdot \sqrt[9]{m^6}}; \frac{\sqrt[4]{a^4 x} \cdot \sqrt[8]{a^2}}{\sqrt[4]{ax^3}}$

$$10. \quad \frac{\sqrt[3]{z^4} \cdot \sqrt[4]{z^2}}{\sqrt{z} \cdot \sqrt[6]{z^5}}; \frac{\sqrt[4]{t^5} \cdot \sqrt[3]{t^5}}{\sqrt[6]{t^5}}; \frac{\sqrt[3]{2x^2}}{\sqrt[4]{4x^3} \cdot \sqrt[6]{8x^5} \cdot \sqrt{8x^3}}; \frac{\sqrt[6]{y^3} \cdot \sqrt{y^2}}{\sqrt[4]{y} \cdot \sqrt[3]{y^2}}; \frac{\sqrt[4]{2a^3x} \cdot \sqrt[8]{2ax^2}}{\sqrt[12]{2ax^3}}; \left[\sqrt[3]{\frac{a}{b}}; x^2 \cdot \sqrt[4]{z}; \frac{p}{q^4} \cdot \sqrt{\frac{p}{q}}; |m|; \frac{|a|}{\sqrt{x}} \right]$$

$$\left[\sqrt{|z|}; t \cdot \sqrt[12]{t^9}; \frac{1}{2x^2 \cdot \sqrt[12]{2x^5}}; \sqrt[12]{y^7}; \sqrt[24]{2^7 a^{19} x^6} \right]$$

Semplificare le seguenti espressioni

$$11. \quad 3 \cdot \sqrt{17} + 4 \cdot \sqrt{15} - \sqrt{16} + 2 + \sqrt{17}; \sqrt{5} - 7 \cdot \sqrt{9} + 2 \cdot \sqrt{5} - 4 \cdot \sqrt{25} \quad \left[4 \cdot \sqrt{15} + 4 \cdot \sqrt{17} - 2; 3 \cdot \sqrt{5} - 41 \right]$$

$$12. \quad -2 \cdot \sqrt{6} + 6 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} - \sqrt{6}; 7 \cdot \sqrt{16} + 2 \cdot \sqrt{8} - \sqrt{32} + 6 \cdot \sqrt{128} - 2 \quad \left[5 \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot \sqrt{6}; 48 \cdot \sqrt{2} + 26 \right]$$

$$13. \quad 3 - 4 \cdot \sqrt{15} - \sqrt{15} + \sqrt{14} + 2; \sqrt[3]{2} - \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{4} - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{8} \quad \left[5 + \sqrt{14} - 5 \cdot \sqrt{15}; 6 - \sqrt{2} \right]$$

$$14. \quad 5 \cdot \sqrt{12} + 5 \cdot \sqrt{16} - 3 \cdot \sqrt{18} - 6 \cdot \sqrt{3} + 3; 8 \cdot \sqrt{20} + 5 \cdot \sqrt{10} - \sqrt{5} - 3\sqrt{100} + 2 \cdot \sqrt{40} - \sqrt{90} \quad \left[23 - 9 \cdot \sqrt{2} + 4 \cdot \sqrt{3}; 6 \cdot \sqrt{10} + 15 \cdot \sqrt{5} - 30 \right]$$

$$15. \quad 3 \cdot \sqrt{35} + 2 \cdot \sqrt{75} - 4 \cdot \sqrt{15} - \sqrt{45}; 2 \cdot \sqrt{121} + 3 \cdot \sqrt{28} - \sqrt{63} - \sqrt{7} + 11; (\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1 - \sqrt{3}) \quad \left[3 \cdot \sqrt{35} - 4 \cdot \sqrt{15} + 12 \cdot \sqrt{5} + 10 \cdot \sqrt{3}; 33 + 2 \cdot \sqrt{7}; -2 - 2 \cdot \sqrt{3} \right]$$

$$16. \quad (2 + \sqrt{2})^2 - (1 + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2} - 1) + \sqrt{2}; (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3} - 4) + \sqrt{6} \quad \left[5 + 5 \cdot \sqrt{2}; 2 + 4 \cdot \sqrt{2} + 4 \cdot \sqrt{3} \right]$$

$$17. \quad (\sqrt{10} + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{15} + 2) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{5}) - 4 + \sqrt{3}; 2 \cdot (\sqrt{7} + 1) - (1 + \sqrt{6}) \cdot (\sqrt{6} - 3) + \sqrt{7} - 8 \quad \left[11 + 10 \cdot \sqrt{2} + 4 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{5} - 9 + 2 \cdot \sqrt{6} + 3 \cdot \sqrt{7} \right]$$

Notazione esponenziale dei radicali

Fase 1: Osserva

- Con il simbolo $5^{\frac{3}{4}}$ indichiamo il radicale $\sqrt[4]{5^3}$, pertanto se volessimo eseguire la moltiplicazione $\sqrt[4]{5^3} \cdot \sqrt[3]{5}$, risulterebbe più semplice passare alla forma esponenziale: $5^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{3}}$, applicare le proprietà sul prodotto di potenze con la stessa base: $5^{\frac{3}{4} + \frac{1}{3}} = 5^{\frac{9+4}{12}} = 5^{\frac{13}{12}}$, quindi ripassare alla forma radicale: $\sqrt[12]{5^{13}} = 5 \cdot \sqrt[12]{5}$.
- Semplificare $\frac{\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[5]{2^7}}{\sqrt[7]{2^9}}$. Esprimiamo il tutto in forma esponenziale: $\frac{2^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{7}{5}}}{2^{\frac{9}{7}}}$, applichiamo le proprietà delle potenze: $2^{\frac{3}{4} + \frac{7}{5} - \frac{9}{7}} = 2^{\frac{105+196-180}{140}} = 2^{\frac{121}{140}} = \sqrt[140]{2^{121}}$.

Fase 2: Completa ...

- Con il simbolo $3^{\frac{5}{8}}$ indichiamo il radicale $\sqrt[8]{3^5}$. Quindi l'operazione $\frac{3^{\frac{5}{8}}}{3^{\frac{3}{8}}}$, equivale all'operazione fra

radicali $\frac{\sqrt[3]{3^{\dots}}}{\sqrt[3]{3^{\dots}}}$, pertanto applichiamo le proprietà sul rapporto di potenze con la stessa base:

$3^{\frac{5}{8}} = 3^{\dots}$, quindi riportiamo il tutto in forma radicale: $\sqrt[3]{3^{\dots}}$.

- Semplificare $(\sqrt{3} + \sqrt[3]{3})^3$. Esprimiamo il tutto in forma esponenziale: $\left(3^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{3}}\right)^3$, sviluppiamo il cubo:

$3^{\frac{3}{2}} + \dots$, quindi scriviamo di nuovo in forma radicale.

Fase 3: Prova!

Usando la forma esponenziale dei radicali semplificare le seguenti operazioni

- $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2}; \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[5]{9} : \sqrt[7]{27}; (\sqrt[3]{32} + \sqrt{2})^2$ $\left[2^{\frac{13}{12}}; 3^{\frac{32}{105}}; 2^{\frac{10}{3}} + 2^{\frac{19}{6}} + 2 \right]$
- $(\sqrt{2} - \sqrt[3]{2})^3; \frac{\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[3]{5}}{\sqrt{125}}; (\sqrt[3]{3} + \sqrt{243}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt[3]{9})$ $\left[2^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 2^{\frac{4}{3}} + 3 \cdot 2^{\frac{7}{6}} - 2; 5^{\frac{1}{2}}; 3^{\frac{5}{6}} - 3^{\frac{19}{6}} + 2^3 \cdot 3 \right]$
- $\sqrt{\sqrt[3]{2}}; \sqrt{\frac{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[4]{343}}{\sqrt{7}}}; (\sqrt[4]{a} + \sqrt{a})^2$ $\left[2^{\frac{1}{8}}; 7^{\frac{7}{24}}; a^{\frac{1}{2}} + 2 \cdot a^{\frac{3}{4}} + a \right]$
- $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{8}} \cdot 2^{\frac{1}{16}} \cdot 2^{\frac{1}{32}}; 3^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{2}{3}} \cdot 27^{\frac{3}{4}}; 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} : 5^{\frac{1}{6}} \cdot 5^{\frac{1}{8}}$ $\left[2^{\frac{31}{32}}; 3^{\frac{49}{12}}; 5^{\frac{17}{24}} \right]$
- $2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 6^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{1}{4}}; 3^{\frac{1}{2}} : 3^{\frac{2}{5}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}; 51^{\frac{1}{2}} \cdot 51^{\frac{1}{3}} \cdot 51^{\frac{1}{6}}$ $\left[2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{4}}; 3^{\frac{7}{20}}; 51 \right]$

Razionalizzazione di espressioni irrazionali

Fase 1: Osserva

- Vogliamo rendere razionale il denominatore della seguente frazione: $\frac{6}{\sqrt{3}}$. Per fare divenire razionale

il denominatore dobbiamo moltiplicare numeratore e denominatore per una quantità che trasformi il radicale irriducibile del denominatore in un radicale apparente, quindi in questo caso in un radicale con il radicando che è un quadrato. Per far ciò basta moltiplicare per lo stesso denominatore:

$$\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{3^1} = 2 \cdot \sqrt{3}.$$

- Rendere razionale il denominatore della seguente frazione: $\frac{12}{5 \cdot \sqrt[4]{2}}$. Dobbiamo trasformare il radicale

presente in un radicale apparente. Quindi stavolta dobbiamo avere un radicando quarta potenza e, dato che l'attuale radicando ha potenza 1, dovremo moltiplicare per un radicale con lo stesso indice ma ra-

dicando con uguale base e potenza 3, cioè: $\frac{12}{5 \cdot \sqrt[4]{2}} = \frac{12 \cdot \sqrt[4]{2^3}}{5 \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{2^3}} = \frac{12 \cdot \sqrt[4]{2^3}}{5 \cdot \sqrt[4]{2^4}} = \frac{12^6 \cdot \sqrt[4]{2^3}}{5 \cdot 2^1} = \frac{6 \cdot \sqrt[4]{2^3}}{5}.$

- Rendere razionale il numeratore della frazione: $\frac{\sqrt[6]{a^4bc^8}}{ab^2c^2}$. Dobbiamo cercare di rendere le potenze del radicando tutte di grado multiplo di 6, quindi moltiplicheremo per un radicale con lo stesso indice, 6, e radicando formato da un monomio con le stesse lettere ma i cui esponenti sono tali da formare, con quelli già presenti, il multiplo di 6 più vicino. Cioè: $\frac{\sqrt[6]{a^4bc^8}}{ab^2c^2} = \frac{\sqrt[6]{a^4bc^8} \cdot \sqrt[6]{a^2b^5c^4}}{ab^2c^2 \cdot \sqrt[6]{a^2b^5c^4}} = \frac{\sqrt[6]{a^6b^6c^{12}}}{ab^2c^2 \cdot \sqrt[6]{a^2b^5c^4}} =$

$$= \frac{\cancel{a}^3 \cancel{b}^3 \cancel{c}^4}{\cancel{a}^2 \cancel{b}^2 \cancel{c}^2 \cdot \sqrt[6]{a^2b^5c^4}} = \frac{1}{b \cdot \sqrt[6]{a^2b^5c^4}}.$$

- Calcolare: $\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{3}{\sqrt{3}} - 2 \cdot \sqrt{3}$. Per rendere più semplice i calcoli razionalizziamo tutti i denominatori irrazionali: $\frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} - 2 \cdot \sqrt{3} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}^2} - \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3}^2} - 2 \cdot \sqrt{3} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\cancel{3} \cdot \sqrt{3}}{\cancel{3}} - 2 \cdot \sqrt{3} =$
 $= \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} + \sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{3} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} - \sqrt{3}$. Adesso determiniamo il minimo comune denominatore:
 $\frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} - \sqrt{3} = \frac{3 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{2} - 6 \cdot \sqrt{3}}{6} = \frac{9 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{2} - 6 \cdot \sqrt{3}}{6} = \frac{7 \cdot \sqrt{2} - 6 \cdot \sqrt{3}}{6}.$

- Rendere razionale il denominatore della seguente frazione: $\frac{3}{\sqrt{7} + \sqrt{11}}$. Per questo tipo di termini irrazionali, binomi, la moltiplicazione per lo stesso fattore non è vantaggiosa perché in questo modo creeremmo un quadrato di binomio che non elimina tutti i radicali quadratici. Infatti la frazione

$$\frac{3 \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{11})}{(\sqrt{7} + \sqrt{11}) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{11})} = \frac{3 \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{11})}{(\sqrt{7} + \sqrt{11})^2} = \frac{3 \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{11})}{7 + 11 + 2 \cdot \sqrt{77}} = \frac{3 \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{11})}{18 + 2 \cdot \sqrt{77}}$$

continua ad avere un denominatore irrazionale. È invece utile ricorrere al prodotto notevole noto sotto il nome di prodotto della somma delle basi per la loro differenza, il quale produce due quadrati, che portano all'eliminazione di entrambi i radicali quadratici. Vediamo come:

$$\frac{3 \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{11})}{(\sqrt{7} + \sqrt{11}) \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{11})} = \frac{3 \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{11})}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{11})^2} = \frac{3 \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{11})}{7 - 11} = \frac{3 \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{11})}{-4} = \frac{3 \cdot (\sqrt{11} - \sqrt{7})}{4}.$$

- Semplificare la seguente espressione: $\frac{2}{\sqrt{7} + \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{2}}$. Razionalizziamo i denominatori, per rendere più semplice la determinazione del minimo comune denominatore:

$$\frac{2}{\sqrt{7} + \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{2}} = \frac{2 \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{2})}{(\sqrt{7} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{2})} - \frac{\sqrt{7} + \sqrt{2}}{(\sqrt{7} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{2})} =$$

$$= \frac{2 \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{2})}{7 - 2} - \frac{\sqrt{7} + \sqrt{2}}{7 - 2} = \frac{2 \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{2})}{5} - \frac{\sqrt{7} + \sqrt{2}}{5}.$$

In questo caso addirittura i denominatori sono uguali, possiamo quindi sommare i termini simili dei numeratori: $\frac{2 \cdot \sqrt{7} - 2 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{7} - \sqrt{2}}{5} = \frac{\sqrt{7} - 3 \cdot \sqrt{2}}{5}.$

Fase 2: Completa ...

- Rendere razionale il denominatore della frazione: $\frac{14}{\sqrt{7}}$. Per fare divenire razionale il denominatore dobbiamo trasformare il radicale irriducibile del denominatore in un radicale, quindi in

questo caso dobbiamo moltiplicare numeratore e denominatore per, ottenendo: $\frac{14}{\sqrt{7}} =$

- Rendere razionale il denominatore della frazione: $\frac{18}{7 \cdot \sqrt[3]{3}}$. Stavolta dobbiamo avere un radicandopotenza, dato che l'attuale radicando ha potenza 1, dovremo moltiplicare per un radicando con lo stesso indice ma radicale con uguale base e potenza, cioè per: $\frac{18}{7 \cdot \sqrt[3]{3}} =$
- Rendere razionale il numeratore della frazione: $\frac{\sqrt[5]{x^2 y^{12}}}{x^2 y^3}$. Dobbiamo cercare di rendere le potenze del radicando tutte di grado multiplo di, quindi $\frac{\sqrt[5]{x^2 y^{12}}}{x^2 y^3} =$
- Semplificare: $\frac{6}{\sqrt{5}} - \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}} - 3$. Cominciamo a razionalizzare tutti i denominatori irrazionali:
 $\frac{6}{\sqrt{5}} - \frac{3 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}} - 3 =$
 Adesso determiniamo il minimo comune denominatore:
- Razionalizzare il denominatore della frazione: $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$. Utilizziamo il prodotto notevole che va sotto il nome di somma per, moltiplicando numeratore e denominatore per
 Da cui: $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} =$
- Semplificare la seguente espressione: $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$. Razionalizziamo i denominatori, per rendere più semplice la determinazione del minimo comune denominatore: $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} =$
 Effettuiamo il minimo comune multiplo dei denominatori e sommiamo:

Fase 3: Prova!

Rendere razionali i denominatori delle seguenti frazioni

1. $\frac{5}{\sqrt{6}}; \frac{3}{\sqrt[4]{3}}; \frac{8}{\sqrt[3]{4}}; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}; \frac{3}{\sqrt{21}}; \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{5}}$ $\left[\frac{5 \cdot \sqrt{6}}{6}; \sqrt[4]{27}; 4 \cdot \sqrt[3]{2}; \sqrt[6]{2}; \frac{\sqrt{21}}{7}; \frac{\sqrt[4]{250}}{5} \right]$
2. $\frac{3 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[5]{25}}; \frac{2 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt[3]{49}}; \frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{12}}; \frac{abc}{\sqrt[6]{a^3 b^4}}; \frac{a^2 b^3 c}{\sqrt[5]{a^2 b^3 c}}; \frac{ab^4}{\sqrt[3]{a^2 b^5 c^4}}$ $\left[3 \cdot \sqrt[10]{5}; \frac{2 \cdot \sqrt[6]{7^5}}{7}; \frac{\sqrt[3]{180}}{6}; c \cdot \sqrt[6]{a^3 b^2}; ab^2 \cdot \sqrt[5]{a^3 b^2 c^4}; \frac{b^2 \cdot \sqrt[3]{abc^2}}{c^2} \right]$
3. $\frac{xy^2}{\sqrt{x^3 y^5}}; \frac{x^2 \cdot \sqrt[3]{xy}}{\sqrt[3]{x^2 y^4}}; \frac{x^4}{\sqrt[6]{x^2 y^7 z^{15}}}; \frac{2m^2}{\sqrt[4]{3m^5 p^2}}; \frac{4t^2 z^5}{\sqrt[3]{2t^4 z^5}}; \frac{5}{\sqrt[6]{5a^3 x^5}}$ $\left[\frac{\sqrt{xy}}{xy}; \frac{x \cdot \sqrt[3]{x^2}}{y}; \frac{x^3 \cdot \sqrt[6]{x^4 y^5 z^3}}{y^2 z^3}; \frac{2 \cdot \sqrt[4]{27m^3 p^2}}{3p}; 2z^3 \cdot \sqrt[3]{4t^2 z}; \frac{\sqrt[6]{5^5 a^3 x}}{ax} \right]$

Semplificare le seguenti espressioni

4. $\frac{4}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{3}} + 1; \frac{12}{\sqrt{5}} - \frac{4 \cdot \sqrt{5}}{11} + 2; \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \sqrt{6} + 2 \cdot \sqrt{5}$
 $\left[1 + 2 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{3}; \frac{110 + 112 \cdot \sqrt{5}}{55}; \frac{18 \cdot \sqrt{10} + 60 \cdot \sqrt{5} - 25 \cdot \sqrt{6}}{30} \right]$
5. $\frac{5 \cdot \sqrt{7}}{7} - \frac{3}{\sqrt{5}} + 2 \cdot \sqrt{5} - 4 \cdot \sqrt{7} + 1; \left(\frac{3}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2$
 $\left[\frac{49 \cdot \sqrt{5} - 115 \cdot \sqrt{7} + 35}{35}; \frac{35 + 12 \cdot \sqrt{6}}{24} \right]$
6. $\left(\frac{7 \cdot \sqrt{11}}{5} - \frac{4}{\sqrt{13}} \right) \cdot \left(\frac{7 \cdot \sqrt{11}}{5} + \frac{4}{\sqrt{13}} \right); \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{5} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{5} \right)$
 $\left[\frac{6607}{325}; \frac{6 \cdot \sqrt{10} - 31}{6} \right]$
7. $\left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{3}{\sqrt{2}} - \sqrt{3} \right)^2; \left(\frac{\sqrt{7}}{3} + \frac{3}{\sqrt{7}} - 1 \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{7}}{3} - \frac{3}{\sqrt{7}} - 1 \right)^2$
 $\left[\frac{175 - 66 \cdot \sqrt{6}}{18}; \frac{28 - 12 \cdot \sqrt{7}}{7} \right]$

Razionalizzare i denominatori delle seguenti frazioni

8. $\frac{1}{1 + \sqrt{2}}; \frac{5}{\sqrt{3} - 2}; \frac{2}{\sqrt{7} + 2}; \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}; \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$
 $\left[\sqrt{2} - 1; -10 - 5 \cdot \sqrt{3}; \frac{2 \cdot \sqrt{7} - 4}{3}; 3 + 2 \cdot \sqrt{2}; \frac{3 + \sqrt{3}}{2}; \frac{7 + 2 \cdot \sqrt{10}}{3} \right]$
9. $\frac{2 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 2}; \frac{4 \cdot \sqrt{17}}{\sqrt{17} - \sqrt{2}}; \frac{1 + \sqrt{10}}{\sqrt{10} + 2}; \frac{a + b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}; \frac{a - b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}; \frac{\sqrt{a}}{a - \sqrt{a}}$
 $\left[10 + 4 \cdot \sqrt{5}; \frac{68 + 4 \cdot \sqrt{34}}{15}; \frac{8 - \sqrt{10}}{6}; \frac{(a + b) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}; \frac{(a - b) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b^2}; \frac{\sqrt{a} + 1}{1 - a} \right]$
10. $\frac{x + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - y}; \frac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}; \frac{x^2}{\sqrt{x} - 1}$
 $\left[\frac{x^2 + 2x \cdot \sqrt{y} + y}{x - y^2}; \frac{x + 1 + 2 \cdot \sqrt{x}}{x - 1}; \frac{x^2 \cdot (\sqrt{x} + 1)}{x - 1} \right]$

Semplificare le seguenti espressioni

11. $\frac{3}{\sqrt{2} + 1} - \frac{4}{\sqrt{2} - 1} + 5; \frac{2}{\sqrt{5} - 3} - \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{3} + \sqrt{5}; \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} + 1$
 $\left[-2 - \sqrt{2}; \frac{-9 - \sqrt{5}}{6}; \frac{8 + 3 \cdot \sqrt{2}}{2} \right]$
12. $\frac{\sqrt{11} - 1}{3} - \frac{2}{\sqrt{11} + 1} + 3 \cdot \sqrt{11} - \frac{4}{\sqrt{11} - 1} + 1; \frac{\sqrt{17} - \sqrt{15}}{3} - \frac{\sqrt{17} + \sqrt{15}}{\sqrt{17} - \sqrt{15}} + \sqrt{17} - \frac{1}{\sqrt{17} + \sqrt{15}} + \sqrt{15}$
 $\left[\frac{7 + 41 \cdot \sqrt{11}}{15}; \frac{5 \cdot \sqrt{17} - 6 \cdot \sqrt{255} + 7 \cdot \sqrt{15} - 96}{6} \right]$
13. $\left(\frac{1}{\sqrt{5} + 2} + \frac{3}{\sqrt{5} - 2} \right)^2; \left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2} - \frac{1}{\sqrt{13} - 3} \right) \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2} + \frac{1}{\sqrt{13} - 3} \right)$
 $\left[96 + 32 \cdot \sqrt{35}; \frac{3 \cdot (11 + 3 \cdot \sqrt{13})}{8} \right]$
14. $\left(\frac{1}{\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2} - 1} - \frac{1}{\sqrt{3} + 1} \right); \left(\frac{\sqrt{2} + 3}{4} + \frac{1}{\sqrt{2} - 3} - \sqrt{2} \right)^2$
 $\left[\frac{1 + 2 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{3}}{2}; \frac{1331 - 450 \cdot \sqrt{2}}{784} \right]$
15. $\left(\frac{\sqrt{21} - 1}{4} + \frac{4}{\sqrt{21} - 1} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{21} + 1}{4} - \frac{4}{\sqrt{21} + 1} \right)^2$
 $\left[\frac{100 - 9 \cdot \sqrt{21}}{100} \right]$

Per svolgere un Test finale di 10 quesiti, collegati al sito

http://mathinterattiva.altervista.org/volume_2_5.htm

5. Algebra non lineare

5.2 Equazioni e sistemi di grado superiore al primo

Prerequisiti

- Numeri irrazionali
- Scomposizione di un polinomio in fattori
- Calcolo con i radicali
- Risoluzione di equazioni di primo grado
- Principio di annullamento del prodotto

Obiettivi

- Risolvere equazioni di secondo grado utilizzando la formula risolutiva
- Comprendere che un'equazione di grado superiore al primo può ammettere più soluzioni reali o anche nessuna
- Comprendere il difficile decorso storico che ha portato alla determinazione di una formula risolutiva per le equazioni di secondo grado nella forma attuale
- Generalizzare i risultati ottenuti per le equazioni di secondo grado a generiche equazioni binomie e trinomie
- Risolvere semplici questioni sulle equazioni parametriche
- Distinguere fra soluzioni accettabili e non accettabili di un'equazione irrazionale
- Risolvere sistemi di grado superiore al primo

Contenuti

- Richiamiamo le conoscenze
- Equazioni binomie
- Equazioni di secondo grado
- Equazioni trinomie
- Relazioni fra i coefficienti di una equazione trinomia e le sue soluzioni
- Equazioni parametriche di secondo grado
- Particolari equazioni di grado superiore al secondo Equazioni reciproche
- Equazioni fratte di secondo grado
- Equazioni irrazionali
- Sistemi di equazioni non lineari

Quelli che vogliono sapere di più ...

- Regola dei segni di Cartesio
- Particolari equazioni di grado superiore al secondo. Equazioni reciproche

Parole chiave

Delta o discriminante – Equazione algebrica – Equazione binomia – Equazione reciproca – Equazione trinomia – Sistema simmetrico

Simbologia

Δ Indica il cosiddetto delta o discriminante di un'equazione trinomia.

Richiamiamo le conoscenze

Concetto di equazione

Abbiamo già affrontato il concetto di equazione nel nostro primo anno di studio. Ricordiamolo. In genere, se scriviamo un'uguaglianza fra due espressioni numeriche possono succedere solo due casi, di seguito esemplificati.

Esempio A

- L'uguaglianza $3 + 7 = 2 \cdot 5$ è vera, poiché eseguendo correttamente le operazioni in essa contenute possiamo scrivere $10 = 10$, che è anche un'uguaglianza simbolica.
- L'uguaglianza $3 + 6 = 4 \cdot 2$, è invece falsa, poiché la sua semplificazione è $9 = 8$.

Se invece consideriamo uguaglianze nelle quali sono presenti anche termini simbolici, i fatti possibili diventano 3.

Esempio B

- L'uguaglianza $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b \cdot (a+b) + ab$, è vera indipendentemente dai simboli usati e dai valori numerici a essi sostituiti, infatti riusciamo a semplificarla in $a^2 - b^2 = a^2 - b^2$. Abbiamo a che fare con un'**identità** nell'insieme dei numeri reali.
- Anche l'uguaglianza $\frac{x^3-1}{x-1} = x^2 + x + 1$ è un'identità, ma non per tutti i numeri reali, poiché se al posto di x sostituiamo 1 avremo la seguente scritta $\frac{1^3-1}{1-1} = 1^2 + 1 + 1 \Rightarrow \frac{0}{0} = 3$, che è priva di significato.
- L'uguaglianza $x^2 + 1 = -y^2$, è falsa per qualsiasi numero reale, dato che il primo membro rappresenta sempre numeri positivi ($x^2 \geq 0$ sempre), mentre il secondo membro rappresenta sempre numeri negativi o lo zero. Abbiamo a che fare con quella che abbiamo chiamato **contraddizione**.
- Infine l'uguaglianza $3x + 2 = y$ è quella che abbiamo chiamato **equazione**, ossia un'uguaglianza che è falsa per alcuni valori assegnati alle incognite (per esempio $x = 1$ e $y = 2$ o $x = 0$ e $y = -2$) e vera per altri valori (per esempio $x = 1$ e $y = 5$ o $x = 0$ e $y = 2$).

Naturalmente fra le tre classi di uguaglianze, le più importanti sono le equazioni, dato che in quel caso dobbiamo cercare quali sono le soluzioni, ossia i numeri che rendono vera l'uguaglianza.

Risoluzione di equazioni di primo grado in una incognita.

Le equazioni più semplici da risolvere sono ovviamente quelle che hanno meno incognite, quindi solo una, inoltre sarà più semplice risolvere un'equazione la cui espressione è composta da un polinomio, quindi la massima semplicità la avremo se tale polinomio è di primo grado. Per cominciare, consideriamo le equazioni di primo grado in un'incognita.

Esempio C

- L'equazione $x = 1$, è già risolta, dato che ovviamente l'unica sua soluzione è proprio quella scritta, ossia $x = 1$.
- L'equazione $5x - 2 = 0$, è scritta in una forma semplice, ma non così semplice come la precedente. Lo scopo è perciò quello di ridurla alla forma $x = a$, con a un numero reale. Per far ciò procediamo per passi. Intanto *trasferiamo* il termine noto (-2) dall'altro lato del segno di uguaglianza, aggiungendo a entrambi i membri il suo opposto, 2: $5x - 2 + 2 = 0 + 2 \Rightarrow 5x = 2$. Adesso trasferiamo anche il coefficiente 5 dall'altra parte, ma essendo questo un fattore e non un addendo come il precedente, dobbiamo dividere per esso entrambi i membri. In tal modo otteniamo la soluzione cercata: $\frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}} = \frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{2}{5}$.

Il procedimento che abbiamo descritto può ripetersi per qualsiasi equazione di primo grado scritta in forma semplificata. Otteniamo così il seguente risultato.

Teorema A

Un'equazione di primo grado $ax + b = 0$, con $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$, ammette sempre l'unica soluzione $x = -\frac{b}{a}$.

Trinomi di secondo grado e principio di annullamento del prodotto

Ricordiamo che il polinomio $x^2 + sx + p$, si chiama **trinomio di secondo grado**, per esso è valido il seguente risultato.

Teorema B

Si ha la validità della seguente uguaglianza $x^2 + sx + p = (x + a) \cdot (x + b)$, se e solo se i numeri a e b verificano le seguenti due proprietà: $a + b = s$; $a \cdot b = p$.

Esempio D

- Vogliamo scomporre il trinomio di secondo grado $x^2 - 7x + 10$. Riferendoci al teorema precedente, abbiamo $s = -7$, $p = 10$. Dobbiamo perciò cercare due numeri reali verificanti le seguenti uguaglianze: $\begin{cases} a + b = -7 \\ a \cdot b = 10 \end{cases}$. Non è difficile capire che i due numeri devono essere entrambi negativi, dato che la loro somma è negativa e il loro prodotto positivo: i numeri $m = -2$ e $n = -5$ soddisfano tali condizioni. Possiamo quindi scrivere: $x^2 - 7x + 10 = (x - 2) \cdot (x - 5)$.
- Vogliamo scomporre il trinomio di secondo grado $x^2 + 5x - 4$. Cerchiamo perciò due numeri che verifichino le uguaglianze $\begin{cases} a + b = 5 \\ a \cdot b = -4 \end{cases}$. I fattori interi che generano -4 sono $-1, 4$; $1, -4$; $-2, 2$: $-4 = 1 \cdot (-4) = 2 \cdot (-2) = 4 \cdot (-1)$; ma si ha: $1 + (-4) = -3$, $2 + (-2) = 0$, $4 + (-1) = 3$. Tuttavia ciò non significa che il trinomio non sia scomponibile, ma che non lo è in polinomi con coefficienti interi.

Con la scomposizione dei trinomi di secondo grado, quando è possibile, possiamo risolvere anche equazioni di grado superiore al primo. Vediamo come.

Esempio E

Vogliamo risolvere l'equazione $x^2 - 7x + 10 = 0$, che è di secondo grado. Usando le tecniche relative alla scomposizione di trinomi di secondo grado, possiamo scrivere il primo membro nella seguente forma: $(x - 2) \cdot (x - 5) = 0$. Che cosa significa questa uguaglianza? Noi stiamo cercando uno o più numeri reali x che la rendono vera, cioè che fanno diventare nullo il primo membro, ma essendo tale membro un prodotto, basta annullare uno solo dei due fattori perché tutto il prodotto sia nullo. Basta cioè risolvere entrambe le equazioni di primo grado che abbiamo ottenuto, $x - 2 = 0$ e $x - 5 = 0$, che hanno per soluzioni $x = 2$ e $x = 5$. Questi numeri sono soluzioni dell'equazione data.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Risolvere l'equazione $5x - 1 - 2 \cdot (4 - x) = 1 + 3 \cdot (6x - 5)$. Cominciamo a eseguire i calcoli: $5x - 1 - 8 + 2x = 1 + 18x - 15 \Rightarrow 7x - 9 = 18x - 14$. Adesso trasportiamo i termini con l'incognita da una parte e i termini noti dall'altra: $-11x = -5$. Infine dividiamo entrambi i membri per -11 , ottenendo la soluzione cercata: $\frac{-11x}{-11} = \frac{-5}{-11} \Rightarrow x = \frac{5}{11}$.

Risolvere le seguenti equazioni di primo grado

Livello 1

- $4x + 5 = 0$; $1 - 2x = 3$; $x + 4 = 3x + 2$; $2x + 1 - 3x = 4 + x - 5$; $3 + 4x = 11x + 5$ $\left[-\frac{5}{4}; -1; 1; -\frac{2}{7} \right]$
- $3 - 8x + x = 5x + 1 - x$; $\frac{1}{2}x - 2 = \frac{3}{2} - 1$; $2x - \frac{3}{4} + 1 = -\frac{1}{4}x$; $4 - \frac{3}{2}x - x = \frac{3}{4} - \frac{4}{3}x$ $\left[\frac{2}{11}; 5; -\frac{1}{9}; \frac{39}{14} \right]$
- $\frac{1}{3} \cdot (2x - 1) - 2 \cdot \left(\frac{2}{5}x + 1 \right) = 0$; $x + \frac{1}{6} \cdot \left(x - \frac{2}{3} \right) = (3 - x) \cdot \frac{1}{4}$; $x^2 - \frac{3}{5}x + 2 = \frac{3}{4}x - x \cdot (5 - x)$ $\left[-\frac{35}{2}; \frac{35}{51}; -\frac{40}{73} \right]$
- $\frac{1}{3}x \cdot (x - 1) = \frac{3}{4}x \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{9}x \right)$; $\frac{5}{4}x \cdot \left(\frac{5}{3}x - 2 \right) - \frac{25}{12}x^2 = 1$; $-\frac{3}{7}x + 3 = \frac{1}{4}x \cdot (2x + 1) - \frac{1}{2}x^2$ $\left[0; -\frac{2}{5}; \frac{84}{19} \right]$
- $\left(\frac{2}{3}x - 1 \right) \cdot \left(\frac{2}{3}x + 1 \right) = \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{4} \right)^2$; $\left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{3} \right)^2 - \left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{3} \right) = 0$ $\left[-\frac{51}{16}; -\frac{20}{27} \right]$
- $(x - 1)^3 - (x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 4) = 5x - 1 - 3x^2$; $\left(\frac{1}{2}x - 1 \right)^3 - \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{4}x^2 - 1 \right) = 1 - x^2$ $\left[-4; \frac{1}{2} \right]$
- $(3x + 1) \cdot (5x - 2) + x^2 - x - 1 = \left(4x - \frac{1}{2} \right)^2$; $\left(\frac{1}{2}x + 1 \right)^2 - \left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{5} \right) \cdot \left(x - \frac{1}{2} \right) = 0$ $\left[\frac{13}{8}; -\frac{52}{21} \right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere l'equazione $x^2 - 8x + 15 = 0$. Questa è un'equazione di secondo grado, che perciò non sappiamo risolvere. Possiamo però scomporre il trinomio cercando due numeri la cui somma sia -8 e il cui prodotto 15 : troviamo abbastanza facilmente che i numeri cercati sono -3 e -5 . Possiamo perciò scrivere: $x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow (x - 3) \cdot (x - 5) = 0$. Adesso, applicando il principio di annullamento del prodotto, riconduciamo la risoluzione a quella di due equazioni di primo grado: $x - 3 = 0$ e $x - 5 = 0$, le cui soluzioni sono rispettivamente $x = 3$ e $x = 5$.

Risolvere le seguenti equazioni di grado superiore al primo, utilizzando il principio di annullamento del prodotto

Livello 1

- $x^2 - 7x + 10 = 0$; $x^2 + 5x + 4 = 0$; $x^2 + 3x + 2 = 0$; $x^2 + x - 20 = 0$; $x^2 + 17x + 70 = 0$
 $[2 \vee 5; -4 \vee -1; -2 \vee -1; -5 \vee 4; -1]$
- $x^2 + x - 56 = 0$; $x^2 - x - 30 = 0$; $x^2 + 8x + 7 = 0$; $x^2 - 8x + 7 = 0$; $x^2 + 11x + 30 = 0$
 $[-8 \vee 7; -5 \vee 6; -7 \vee -1; 1 \vee 7; -6 \vee -5]$
- $x^2 - 12x + 20 = 0$; $x^2 - 4x - 12 = 0$; $x^2 - 7x - 30 = 0$; $x^2 + 13x - 140 = 0$; $x^2 - 15x - 100 = 0$
 $[2 \vee 10; -2 \vee 6; -3 \vee 10; -20 \vee 7; -5 \vee 20]$

Equazioni binomie

La risoluzione delle equazioni di primo grado e la conoscenza dei radicali ci convincono facilmente che con tecniche analoghe a quelle appena illustrate per le equazioni di primo grado, riusciamo a risolvere particolari equazioni di grado superiore al primo.

Esempio 1

Vogliamo risolvere l'equazione di quarto grado $x^4 - 81 = 0$. Questa equazione, a parte la potenza 4 dell'incognita, è molto simile a un'equazione di primo grado, quindi proviamo a risolverla con una tecnica analoga a quanto fatto finora. Otteniamo così: $x^4 = 81$. Naturalmente 81 non è la soluzione cercata. Noi stiamo cercando x e non la sua quarta potenza. Ma allora basta ricordare la definizione di radice quarta di un numero reale, per concludere che *una* soluzione dell'equazione data è $x = 3$. D'altro canto però noi sappiamo che si ha anche $(-3)^4 = 81$, quindi anche $x = -3$ è una soluzione. A questo punto possiamo anche dire che non ci sono altre soluzioni oltre queste due.

Tenendo conto dell'Esempio 1, noi crediamo di riuscire a risolvere con facilità equazioni dello stesso tipo della precedente. Cominciamo perciò a definire le specie di equazioni che vogliamo prendere in esame.

Definizione 1

Un'equazione che, in forma semplificata e nell'unica incognita x , si scrive $ax^n + b = 0$, si dice **equazione binomia**.

In effetti un'equazione di primo grado è una particolare equazione binomia, dobbiamo però stare attenti al fatto che non sempre le equazioni binomie di grado superiore al primo hanno soluzioni reali.

Esempio 2

- Vogliamo risolvere l'equazione di secondo grado $x^2 + 25 = 0$. Possiamo procedere come nell'Esempio 1, ottenendo così: $x^2 = -25$. Questa scritta è però una contraddizione in $\mathbb{R}$. Ciò perché a sinistra abbiamo un quadrato che, in $\mathbb{R}$, rappresenta sempre un numero non negativo, mentre a destra c'è un numero negativo.
- Risolviamo l'equazione $8x^3 = -125$. Potremmo pensare che sia una contraddizione simile alla precedente, ma ciò non è vero. Infatti stavolta l'incognita è una potenza con esponente dispari e il secondo membro può quindi essere anche un numero negativo: $\frac{8x^3}{8} = -\frac{125}{8} \Rightarrow x = -\sqrt[3]{\frac{125}{8}} \Rightarrow x = -\sqrt[3]{\frac{5^3}{2^3}} \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$. Vi è una soluzione reale; $x = \frac{5}{2}$ non è soluzione: $8 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3 = -125 \Rightarrow 8 \cdot \frac{125}{8} = -125 \Rightarrow 125 = -125$.

Abbiamo perciò visto equazioni binomie prive di soluzioni reali, altre con una soluzione reale e altre ancora con 2 soluzioni reali. In particolare, in quest'ultimo caso abbiamo anche osservato che esse sono fra loro opposte. Stabiliamo perciò di scriverle in modo più compatto, usando la seguente notazione.

Notazione 1

La scrittura $x = \pm a$, equivale alle due seguenti: $x = +a$ e $x = -a$.

Esempio 3

Tenuto conto della Notazione 1 le soluzioni reali dell'equazione $x^4 - 81 = 0$, possono scriversi nel seguente modo compatto: $x = \pm 3$.

Gli esempi precedenti ci dovrebbero convincere abbastanza facilmente che le equazioni binomie di grado dispari hanno sempre una soluzione reale, mentre quelle di grado pari o non hanno soluzioni reali o ne hanno due fra loro opposte. Vale infatti il seguente risultato.

Teorema 1

- Ogni equazione binomia di grado dispari ammette sempre una soluzione reale.
- Ogni equazione binomia di grado pari ammette sempre due soluzioni reali opposte fra loro solo se i suoi coefficienti hanno segno diverso, non ammette soluzioni reali se i coefficienti hanno lo stesso segno.

Vediamo qualche esempio di conferma.

Esempio 4

Consideriamo l'equazione $x^4 = 1$. Risolvendola come visto in precedenza otteniamo le seguenti soluzioni: $x = \pm\sqrt[4]{1} \Rightarrow x = \pm 1$. Vogliamo provare che non vi sono altre soluzioni. Possiamo scrivere la nostra equazione anche così: $x^4 - 1 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1) = 0$

Applicando il principio di annullamento del prodotto possiamo dire che l'equazione ha le stesse soluzioni delle due distinte equazioni binomie di secondo grado: $x^2 - 1 = 0 \vee x^2 + 1 = 0$. La prima equazione ha le soluzioni già proposte: $x = \pm 1$, mentre la seconda, in virtù del Teorema 1, non ha soluzioni reali.

Il metodo visto ci permette di risolvere anche altre equazioni che non sono binomie.

Esempio 5

Risolvere l'equazione: $(25x^2 - 1)^4 - 1 = 0$. Questa non è una equazione binomia, almeno non nel senso stretto del termine, ma ugualmente si può risolvere con il metodo utilizzato per le equazioni binomie, cioè:

$$(25x^2 - 1)^4 = 1 \Rightarrow 25x^2 - 1 = \pm\sqrt[4]{1} \Rightarrow 25x^2 - 1 = \pm 1$$

Abbiamo così ricondotto l'equazione data a due equazioni binomie di secondo grado. Risolviamole:

$$25x^2 - 1 = 1 \Rightarrow 25x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{25}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{5}; 25x^2 - 1 = -1 \Rightarrow 25x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Possiamo perciò dire che la data equazione ha tre soluzioni reali.

Verifiche

Lavoriamo insieme

- Risolvere l'equazione binomia $3x^6 + 1 = 0$. Possiamo dire che l'equazione non ha soluzioni reali, perché la somma di due termini non negativi non può essere nulla. Per giungere immediatamente al medesimo risultato, avremmo anche potuto applicare il Teorema 1.
- Risolvere l'equazione binomia $12x^4 - 7 = 0$. Sempre per il Teorema 1 possiamo dire che l'equazione ha due soluzioni reali fra loro opposte. Determiniamole: $x^4 = \frac{7}{12} \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{\frac{7}{12}}$.
- Risolvere l'equazione binomia $3x^5 + 2 = 0$. Essendo di grado dispari l'equazione ammette sempre una soluzione reale, sempre grazie al Teorema 1: $3x^5 = -2 \Rightarrow x = \sqrt[5]{-\frac{2}{3}}$.

Risolvere le seguenti equazioni binomie o riconducibili a prodotto di fattori binomi

Livello 1

1. $x^2 - 4 = 0; 3x^3 - 1 = 0; 12x^4 + 5 = 0; 16x^4 - 81 = 0; 8x^3 + 27 = 0; 5 - x^5 = 0$ $\left[\pm 2; \frac{\sqrt[3]{9}}{3}; \emptyset; \pm \frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; \sqrt[5]{5} \right]$
2. $12x^8 - 5 = 0; -7x^6 = 3; 5x^9 + 1 = 0; 27x^6 + 8 = 0; 4x^8 - 1 = 0; 8x^6 - 27 = 0$ $\left[\pm \sqrt[8]{\frac{5}{12}}; \emptyset; -1; \emptyset; \pm \frac{\sqrt[4]{8}}{2}; \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \right]$
3. $13x^{13} - 14 = 0; 343x^9 + 1 = 0; 23x^{24} + 25 = 0; 73x^{73} + 74 = 0; 64x^6 - 49 = 0; x^3 - 27 = 0$ $\left[\pm 2; \frac{\sqrt[3]{9}}{3}; \emptyset; \pm \frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; \sqrt[5]{5} \right]$
4. $x^3 + 64 = 0; x^3 + 2 = 0; 2x^3 - 1 = 0; 3x^3 + 5 = 0; 5x^6 - 1 = 0; 16x^8 - 81 = 0$ $\left[-4; -\sqrt[3]{2}; \frac{\sqrt[3]{4}}{2}; -\sqrt[3]{\frac{5}{3}}; \pm \frac{\sqrt[6]{5^5}}{5}; \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \right]$
5. $3x^6 + 13 = 0; 5 = 23x^{37}; -17x^{12} + 19 = 0; (4x^3 - 1) \cdot (2x - 5) \cdot (7 - 3x) \cdot (8x^4 - 1) = 0$ $\left[\emptyset; -\sqrt[37]{\frac{5}{23}}; \pm \sqrt[12]{\frac{19}{17}}; \left(\pm \frac{\sqrt[4]{2}}{2} \vee \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \vee \frac{7}{3} \vee \frac{5}{2} \right) \right]$
6. $(14x^7 - 3)^3 \cdot (4x + 5) \cdot (2 - 8x) \cdot (3x^6 - 5) = 0; (7x^3 + 8) \cdot (3x - 1)^4 \cdot (4 + 3x) \cdot (3x^6 + 7) = 0$ $\left[\left(-\frac{5}{4} \vee \sqrt[7]{\frac{3}{14}} \vee \frac{1}{4} \vee \pm \sqrt[6]{\frac{5}{3}} \right); \left(-\sqrt[3]{\frac{8}{7}} \vee \frac{1}{3} \vee -\frac{3}{4} \right) \right]$
7. $(5x^5 + 2) \cdot (4x + 1) \cdot (3 - 3x) \cdot (6x^4 - 13) = 0; (x^3 - 1) \cdot (3x - 51) \cdot (4x + 17) \cdot (x^4 - 1) = 0$ $\left[\left(-\frac{1}{4} \vee 1 \vee \pm \sqrt[4]{\frac{13}{6}} \right); \left(\pm 1 \vee 17 \vee -\frac{17}{4} \right) \right]$

Livello 2

8. $(x + 3) \cdot (x - 2)^2 + (2x - 1)^3 + 13x \cdot (x - 1) + 3 \cdot (5x - 7) = 0; (x^2 - 2)^2 + (3x^2 + 1) \cdot (3x^2 - 1) + 4x^2 = 0$ $\left[\frac{\sqrt[3]{30}}{3}; \emptyset \right]$
9. $(7x - 1)^2 + (5x + 3)^2 = 16x + 12; (6x - 2) \cdot (6x + 2) - (5x - 1) \cdot (3x + 7) + 4x \cdot (8 - 3x) = 0$ $\left[\pm \frac{\sqrt{37}}{37}; \emptyset \right]$

10. $\left[(x-1)^2 + (x-3)^2\right]^2 + (8x^2 + 1) \cdot (4x + 7) - 16x \cdot (4x - 16) - 12x \cdot (8x + 15) = 152 - 80x$ $\left[\pm \frac{\sqrt[4]{180}}{2}\right]$
11. $(5x^3 + 1)^2 - (7x^3 + 2) \cdot (7x^3 - 2) + (3x^3 - 5) \cdot (-x^3 + 1) - 6x^2 \cdot (3x + 5) + 30x^2 + 3 = 0$ $\left[\pm \frac{\sqrt[3]{9}}{3}\right]$
12. $(4x - 1)^3 + (3x - 2) \cdot (4x^2 - x + 1) - (2x + 1) \cdot (4x^2 - 2x + 1) + 59x^2 - 17x = 0$ $\left[\frac{\sqrt[3]{289}}{17}\right]$
13. $(4x^2 - 1) \cdot (6x^4 + 4x^2 + 1) - (3x^2 + 5) \cdot (8x^4 + 15x^2 + 25) + 150x^2 = 0$ $[\emptyset]$

Lavoriamo insieme

- Risolvere l'equazione $(3x - 1)^2 = 3$. Probabilmente il nostro primo pensiero ci suggerisce di sviluppare il quadrato, ma in questo modo si ottiene un'equazione che non sappiamo risolvere, $9x^2 - 6x - 2 = 0$. Risulta più opportuno considerare l'equazione data come un'equazione binomia, anche se formalmente non lo è, e quindi applicare la stessa tecnica. Abbiamo così: $3x - 1 = \pm\sqrt{3}$. Abbiamo ottenuto in tal modo due equazioni di primo grado che risolviamo:

$$3x - 1 = \sqrt{3} \Rightarrow 3x = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{3}}{3} \quad \text{e} \quad 3x - 1 = -\sqrt{3} \Rightarrow 3x = 1 - \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{1 - \sqrt{3}}{3}$$

- Risolvere l'equazione $(8x^2 - 5)^3 = 1$. Lavoriamo come con il precedente esempio: $8x^2 - 5 = \sqrt[3]{1}$. Stavolta abbiamo una sola equazione binomia di secondo grado: $8x^2 = 5 + \sqrt[3]{1} \Rightarrow x^2 = \frac{5 + \sqrt[3]{1}}{8} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5 + \sqrt[3]{1}}{8}}$. Naturalmente prima di arrivare alla risoluzione presentata abbiamo verificato che l'ultimo radicando fosse positivo, cosa che in effetti è.
- Risolvere l'equazione $(5x^4 + 2)^4 = 16$. Si ha: $5x^4 + 2 = \pm\sqrt[4]{16} \Rightarrow 5x^4 = -2 \pm 2 \Rightarrow 5x^4 = -2 - 2 \vee 5x^4 = -2 + 2 \Rightarrow \Rightarrow 5x^4 = -4 \vee 5x^4 = 0$. Delle due equazioni binomie ottenute solo la seconda ha soluzioni reali: $x^4 = 0 \Rightarrow x = 0$. Diciamo che la soluzione è di molteplicità quattro.

Risolvere le seguenti equazioni binomie o riconducibili a prodotto di fattori binomi

Livello 3

14. $(x^2 - 6)^3 = 27; (2x^2 + 1)^2 = 3; (x^4 + 1)^3 = -1; (x^3 + 1)^4 = 16; (3 - x^5)^3 = -8; (3x^2 - 2)^4 = 16$
 $\left[\pm 3; \pm \frac{\sqrt{2 \cdot \sqrt{3} - 2}}{2}; \emptyset; -1; \sqrt[5]{5}; \left(0 \vee \pm \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}\right)\right]$
15. $(5x^3 - 1)^6 = 5; (12 - x)^5 = 32; (4 - x^2)^4 = 3; (4x^6 + 2)^4 - 13 = 0; (13x^3 - 2)^3 = -1; (5x^5 - 4)^2 = 7$
 $\left[\pm \frac{\sqrt[3]{25 \cdot (\sqrt[6]{5} - 1)}}{5}; 10; \pm \sqrt{4 \pm \sqrt[4]{3}}; \emptyset; \frac{\sqrt[3]{169}}{13}; \pm \frac{\sqrt[5]{5^4 \cdot (\sqrt{7} - 4)}}{5}\right]$
16. $(8x^6 - 1)^3 + 6 = 0; (12x - 5)^4 = 21; (65x^3 - 2)^5 = 1; (7x^8 - 4)^2 - 9 = 0; (x^9 - 1)^8 = 1; (1 - x^{12})^{13} = -1$
 $\left[\emptyset; \frac{5 \pm \sqrt[4]{21}}{12}; \frac{\sqrt[3]{3 \cdot 65^2}}{65}; \left(-1 \vee \pm \frac{1}{\sqrt[8]{7}}\right); \left(0 \vee \sqrt[2]{2}\right); \pm \sqrt[12]{2}\right]$

17. $(7x^4 - 3)^3 - 12 = 0; (11x^2 - 12)^5 = -32; (31 - x^3)^3 = 64$ $\left[\pm \frac{\sqrt[4]{343 \cdot (3 + \sqrt[3]{12})}}{7}; \pm \frac{\sqrt{110}}{11}; 3 \right]$
18. $\left[(x^2 + 1)^2 - 2 \right] \cdot \left[(x^2 + 2)^2 - 1 \right] = 0 ; \left[(3x^3 - 2)^3 + 5 \right] \cdot \left[(5x^4 - 1)^2 + 2 \right] = 0$ $\left[\pm \sqrt{\sqrt{2} - 1}; \sqrt[3]{\frac{2 - \sqrt[3]{5}}{3}} \right]$
19. $\left[(7x^4 - 2)^2 - 11 \right] \cdot \left[(5x^3 + 12)^5 - 3 \right] = 0 ; (3x^3 + 1) \cdot (5x^2 - 3) + (3x^3 + 1) \cdot (4x^2 + 3) = 0$ (mettere in evidenza) $\left[\left(\pm \sqrt[4]{\frac{2 + \sqrt{11}}{7}} \vee \sqrt[3]{\frac{-12 + \sqrt[5]{3}}{5}} \right); \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \vee 0 \right) \right]$
20. $(5x^2 - 2) \cdot (3 - x^2) + (5x^2 - 2) \cdot (7 - 11x^2) = 0 ; (12x^7 - 2) \cdot (4x^8 + 1) + (12x^7 - 2) \cdot (5 - x^8) = 0$ $\left[\left(\pm \frac{\sqrt{30}}{6} \vee \pm \frac{\sqrt{10}}{5} \right); \frac{1}{\sqrt[3]{6}} \right]$
21. $(x^3 - 2) \cdot (x^2 + 5) + (x^3 - 2) \cdot (3x^2 + 1) - (x^3 - 2) \cdot (11x^2 + 34) = 0$ $\left[\sqrt[3]{2} \right]$
22. $(1 - 13x^4) \cdot (3x^3 + 1) + (1 - 13x^4) \cdot (31 - x^3) - 2 \cdot (1 - 13x^4) \cdot (x^3 + 2) = 0$ $[\emptyset]$

Equazioni di secondo grado

Adesso vogliamo considerare equazioni di grado superiore al primo che non rientrano in particolari casi. Cominciamo a considerare le equazioni di secondo grado.

Un'equazione di secondo grado si può scrivere nella seguente forma: $ax^2 + bx + c = 0$. Se $b = 0$ abbiamo ancora un'equazione binomia, che sappiamo già risolvere. Alle equazioni binomie di secondo grado si usa riservare un nome particolare.

Definizione 2

Un'equazione binomia di secondo grado si dice **equazione pura**.

Ma anche se $c = 0$ otteniamo un'equazione che sappiamo risolvere.

Esempio 6

Vogliamo risolvere l'equazione di secondo grado $3x^2 + 7x = 0$. Notiamo il fattore comune x , che mettiamo in evidenza: $x \cdot (3x + 7) = 0$. Applicando il principio di annullamento del prodotto abbiamo le due equazioni di primo grado: $x = 0 \vee 3x + 7 = 0$, che hanno le soluzioni $x = 0 \vee x = -\frac{7}{3}$.

Anche a queste equazioni riserviamo un nome particolare.

Definizione 3

Un'equazione di secondo grado priva del termine noto si dice **equazione spuria**.

Per quanto visto vale il risultato seguente.

Teorema 2

Ogni equazione spuria ammette sempre due soluzioni reali, una delle quali è uguale a zero.

Schema dimostrativo			
Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Scriviamo una generica equazione spuria	$ax^2 + bx = 0$	Per definizione
2	Mettiamo in evidenza il fattore x	$x \cdot (ax + b) = 0$	
3	Applichiamo il principio di annullamento del prodotto	$x = 0 \vee ax + b = 0$	
4	Determiniamo le soluzioni	$x = 0 \vee x = -\frac{b}{a}$	Abbiamo risolto le due equazioni di primo grado

Adesso l'obiettivo è quello di risolvere una qualsiasi equazione di secondo grado, con tutti i suoi tre coefficienti diversi da zero, cioè un'equazione del tipo: $ax^2 + bx + c = 0$.

Cominciamo a vedere qualche esempio che possa aiutarci nella risoluzione.

Esempio 7

Risolvere l'equazione $x^2 - 2x + 1 = 0$. Ci accorgiamo facilmente che il primo membro è un quadrato di binomio, scriviamo perciò: $(x - 1)^2 = 0$, o anche $(x - 1) \cdot (x - 1) = 0$. Applicando il principio di annullamento del prodotto troviamo per due volte la soluzione $x = 1$.

Nell'esempio precedente abbiamo visto che l'equazione data aveva una sola soluzione, $x = 1$, cioè la stessa soluzione dell'equazione di primo grado $x - 1 = 0$. Però è come se avessimo ottenuto per due volte la stessa soluzione, anche perché se avessimo scritto il polinomio come prodotto di due binomi di primo grado *diversi*, avremmo detto che le soluzioni sono due. Risulta perciò opportuno distinguere le due equazioni mediante le loro soluzioni.

Definizione 4

Un'equazione ottenuta uguagliando a zero un polinomio a coefficienti numeri reali si chiama **equazione algebrica**, il grado del polinomio è anche il grado dell'equazione.

Definizione 5

Data un'equazione algebrica di grado superiore al primo, se possiamo scomporre il polinomio in modo che uno dei suoi fattori sia $(x-h)^n$, con $h \in \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{R}$, diciamo che h è una soluzione di **molteplicità** n .

Possiamo perciò dire che l'equazione $x^2 - 2x + 1 = 0$, che può scriversi $(x-1)^2 = 0$, ha la soluzione $x = 1$ di molteplicità due.

Certamente non tutte le equazioni di secondo grado possono esprimersi come quadrati di binomi uguagliati a zero, né riusciamo a scomporle facilmente nel prodotto di due binomi di primo grado, in modo da potere applicare il principio di annullamento del prodotto. Facciamo però vedere che riusciamo ugualmente a scrivere ogni equazione di secondo grado in modo da renderne semplice la risoluzione.

Esempio 8

Risolvere l'equazione $(3x-2)^2 - 5 = 0$. Svolgendo il quadrato: $9x^2 - 12x + 4 - 5 = 0 \Rightarrow 9x^2 - 12x - 1 = 0$, come si vede questo procedimento non è consigliabile, perché in tal modo otteniamo un'equazione che non sappiamo risolvere. Invece ricordando gli ultimi esercizi del paragrafo precedente la risolviamo con facilità.

$$(3x-2)^2 = 5 \Rightarrow 3x-2 = \pm\sqrt{5} \Rightarrow 3x-2 = \sqrt{5} \vee 3x-2 = -\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2 + \sqrt{5} \Rightarrow x = \frac{2+\sqrt{5}}{3} \\ 3x = 2 - \sqrt{5} \Rightarrow x = \frac{2-\sqrt{5}}{3} \end{cases} . \text{ Le due soluzioni}$$

possono scriversi anche nel seguente modo compatto: $x = \frac{2 \pm \sqrt{5}}{3}$.

Il precedente esempio ci mostra un modo per risolvere con facilità un'equazione di secondo grado scritta in un certo modo. La questione è perciò quella di vedere se ogni equazione di secondo grado può scriversi in tal modo, ossia come somma o differenza fra un quadrato perfetto contenente l'incognita e un numero. Vediamo alcuni esempi.

Esempio 9

- Risolvere l'equazione $16x^2 - 8x - 3 = 0$. Non abbiamo a che fare con quadrato di binomio. Però i primi due termini si riconoscono facilmente facenti parte del quadrato $(4x-1)^2$, che sviluppato dà infatti luogo a $16x^2 - 8x + 1$. Riscriviamo l'equazione data nel seguente modo: $16x^2 - 8x + 1 - 4 = 0 \Rightarrow (4x-1)^2 - 4 = 0$. Intanto notiamo che effettivamente la prima equazione può semplificarsi in quella data. Poi osserviamo che adesso l'equazione è scritta nella forma voluta, quindi possiamo risolverla. Avremo:

$$(4x-1)^2 = 4 \Rightarrow 4x-1 = \pm 2 \Rightarrow 4x = 1 \pm 2 \Rightarrow x = \frac{1 \pm 2}{4} \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4} \\ \frac{1-2}{4} = -\frac{1}{4} \end{cases} .$$

- Risolvere l'equazione $49x^2 - 42x + 13 = 0$. Anche qui ci accorgiamo facilmente che i primi due termini fanno parte di un quadrato di binomio. Scriviamo perciò: $49x^2 - 42x + 9 + 4 = 0 \Rightarrow 49x^2 - 42x + 9 = -4 \Rightarrow (7x-3)^2 = -4$. Stavolta abbiamo ottenuta una contraddizione in $\mathbb{R}$.

Negli esempi precedenti abbiamo considerato equazioni generiche ma con coefficienti particolari, in modo da facilitare la costruzione del quadrato di binomio. In effetti ciò può farsi con qualsiasi altra equazione, anche se con maggiori difficoltà nel calcolo. Vediamo alcuni esempi.

Esempio 10

- Risolvere l'equazione $16x^2 - 5x - 7 = 0$. Riconosciamo facilmente nel primo termine il quadrato di $4x$, ci risulta più difficile riconoscere in $-5x$ il doppio prodotto, quindi a maggior ragione non riconosciamo l'altro quadrato. Per cercare di risolvere la questione facciamo il seguente ragionamento. Noi vogliamo creare un quadrato della forma $(4x - q)^2$, cioè sviluppando, $16x^2 - 8qx + q^2$. Di questo trinomio noi abbiamo già due termini, cioè $16x^2 - 5x$. Questi devono coincidere con $16x^2 - 8qx$, quindi deve aversi $5 = 8q$. Abbiamo così trovato: $q = \frac{5}{8}$. Ciò significa che la nostra equazione sarà scritta nel modo seguente:

$$16x^2 - 5x + \left(\frac{5}{8}\right)^2 - \left(\frac{5}{8}\right)^2 - 7 = 0$$

Abbiamo creato il quadrato: $16x^2 - 5x + \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \left(\frac{5}{8}\right)^2 + 7 \Rightarrow \left(4x - \frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{64} + 7$. Risolviamo l'equazione:

$$\left(\frac{32x-5}{8}\right)^2 = \frac{25+448}{64} \Rightarrow \frac{32x-5}{8} = \pm \sqrt{\frac{473}{64}} \Rightarrow \frac{32x-5}{8} = \pm \frac{\sqrt{473}}{8} \Rightarrow 32x-5 = \pm \sqrt{473} \Rightarrow 32x = 5 \pm \sqrt{473} \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{473}}{32}$$

- Risolvere l'equazione $5x^2 - 13x + 1 = 0$. Stavolta neanche il coefficiente di secondo grado è un quadrato perfetto, ma ciò non cambia il modo di procedere. Scriviamo infatti: $(\sqrt{5}x)^2 - 13x + 1 = 0$. Quindi il quadrato perfetto che cerchiamo di completare sarà $(\sqrt{5}x + q)^2 = 5x^2 + 2 \cdot \sqrt{5}qx + q^2$, da cui otteniamo: $5x^2 - 13x = 5x^2 + 2 \cdot \sqrt{5}qx \Rightarrow -13 = 2 \cdot \sqrt{5}q \Rightarrow q = -\frac{13}{2 \cdot \sqrt{5}} = -\frac{13 \cdot \sqrt{5}}{10}$. Quindi l'equazione di partenza si può scrivere: $5x^2 - 13x + \left(-\frac{13 \cdot \sqrt{5}}{10}\right)^2 - \left(-\frac{13 \cdot \sqrt{5}}{10}\right)^2 + 1 = 0 \Rightarrow \left(\sqrt{5}x - \frac{13 \cdot \sqrt{5}}{10}\right)^2 = \frac{169 \cdot 5}{100} - 1$. Continuiamo a risolvere:

$$\begin{aligned} \left(\frac{10 \cdot \sqrt{5}x - 13 \cdot \sqrt{5}}{10}\right)^2 &= \frac{845 - 100}{100} \Rightarrow \frac{10 \cdot \sqrt{5}x - 13 \cdot \sqrt{5}}{10} = \pm \sqrt{\frac{745}{100}} \Rightarrow \frac{10 \cdot \sqrt{5}x - 13 \cdot \sqrt{5}}{10} = \pm \frac{\sqrt{745}}{10} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 10 \cdot \sqrt{5}x = 13 \cdot \sqrt{5} \pm \sqrt{745} \Rightarrow x = \frac{13 \cdot \sqrt{5} \pm \sqrt{745}}{10 \cdot \sqrt{5}} = \frac{13 \pm \sqrt{149}}{10} \end{aligned}$$

Il precedente metodo, detto di completamento dei quadrati, è dovuto, nella sua originaria forma geometrica, ai Babilonesi.

Gli esempi precedenti hanno mostrato che il metodo del completamento dei quadrati, pur essendo efficace, talvolta non risulta efficiente. L'idea è perciò quella di applicarlo alla risoluzione di una generica equazione di secondo grado, in modo da ottenere una formula risolutiva generale da usare in modo meccanico. Si ha infatti la validità del seguente risultato.

Teorema 3

L'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha soluzioni reali solo se $b^2 - 4ac \geq 0$, e si ottengono mediante la seguente

formula risolutiva: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Schema dimostrativo			
Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Consideriamo l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, con $a > 0$.		Se non fosse $a > 0$ moltiplicheremmo per (-1) i due membri dell'equazione

2	Cerchiamo un addendo q^2 che con $ax^2 + bx$ formi un quadrato di binomio	$ax^2 + bx = (\sqrt{a}x + q)^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow ax^2 + bx = ax^2 + 2q \cdot \sqrt{a}x + q^2$	
3	Determiniamo q	$b = 2q \cdot \sqrt{a} \Rightarrow q = \frac{b}{2 \cdot \sqrt{a}} = \frac{b \cdot \sqrt{a}}{2a}$	Applichiamo il principio di identità dei polinomi
4	Completiamo il quadrato	$ax^2 + bx + \left(\frac{b \cdot \sqrt{a}}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b \cdot \sqrt{a}}{2a}\right)^2 + c = 0 \Rightarrow$ $\left(\sqrt{a}x + \frac{b \cdot \sqrt{a}}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b \cdot \sqrt{a}}{2a}\right)^2 - c$	
5	Semplifichiamo	$\left(\frac{2a \cdot \sqrt{a}x + b \cdot \sqrt{a}}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a} - c \Rightarrow$ $\Rightarrow \left(\frac{2a \cdot \sqrt{a}x + b \cdot \sqrt{a}}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$	
6	Estraiamo la radice quadrata di entrambi i membri, nell'ipotesi che il secondo non sia negativo	$\frac{2a \cdot \sqrt{a}x + b \cdot \sqrt{a}}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a}} \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{2a \cdot \sqrt{a}x + b \cdot \sqrt{a}}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2 \cdot \sqrt{a}} \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{2a \cdot \sqrt{a}x + b \cdot \sqrt{a}}{2a} = \pm \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ Vi sono soluzioni reali solo se $b^2 - 4ac \geq 0$	
7	Semplifichiamo	$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$	
8	Risolviamo le due equazioni del passo 7	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Il teorema è provato

Esempio 11

Mediante la formula che abbiamo ricavato, risolviamo l'equazione, già risolta in altro modo nell'esempio precedente: $5x^2 - 13x + 1 = 0$, con una semplice operazione di sostituzione di simboli con numeri. In questo caso si ha: $a = 5$; $b = -13$ e $c = 1$. Assicuriamoci prima che vi siano soluzioni reali: $b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = 169 - 20 = 149 > 0$. Effettivamente le soluzioni esistono, calcoliamole: $x = \frac{-(-13) \pm \sqrt{149}}{2 \cdot 5} = \frac{13 \pm \sqrt{149}}{10}$. Naturalmente le soluzioni coincidono con quelle calcolate prima in modo più laborioso.

Nel Teorema 3 abbiamo stabilito che le soluzioni reali dell'equazione sono legate al segno di una data quantità. Risulta quindi opportuno associare un nome a tale quantità.

Definizione 6

Nella formula risolutiva di un'equazione di secondo grado, il termine $b^2 - 4ac$ si chiama **discriminante** dell'equazione.

Che cosa significa?

Discriminante. Discriminare significa in qualche modo distinguere, differenziare. Nel linguaggio quotidiano è usato spesso con significato dispregiativo, discriminare una persona significa metterla da parte, in questo caso invece il significato è di *termine che distingue le equazioni che hanno soluzioni reali da quelle che non le hanno*.

Notazione 2

Il discriminante di una equazione di secondo grado si indica con la lettera greca maiuscola **delta**, Δ .

Con la Notazione 2 la formula risolutiva può scriversi nella seguente forma semplificata: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. Risulta a questo punto immediato il seguente risultato.

Teorema 4

Un'equazione di secondo grado ammette due soluzioni reali e distinte, o una soluzione reale di molteplicità due o non ammette soluzioni reali a seconda che il suo discriminante sia un numero positivo, nullo o negativo.

La formula risolutiva può applicarsi anche alle equazioni di secondo grado binomie sia pure sia spurie.

Esempio 12

Risolvere l'equazione binomia di secondo grado pura: $7x^2 - 3 = 0$, applicando la formula risolutiva. In questo caso abbiamo: $a = 7$; $b = 0$ e $c = -3$. Cominciamo a calcolare il delta: $\Delta = 0^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-3) = 84$, ci sono perciò le seguenti due soluzioni reali: $x = \frac{0 \pm \sqrt{84}}{2 \cdot 7} = \frac{\pm \sqrt{2^2 \cdot 21}}{14} = \pm \frac{2 \cdot \sqrt{21}}{14} = \pm \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Il procedimento dell'esempio precedente può applicarsi in generale a un'equazione binomia pura $ax^2 + c = 0$, ottenendo: $\Delta = -4ac$, che è positivo solo se a e c hanno segni discordi. In questo caso le soluzioni sono:

$$x = \pm \frac{\sqrt{-4ac}}{2a} = \pm \frac{2 \cdot \sqrt{-ac}}{2a} = \pm \frac{\sqrt{-ac}}{a} = \pm \sqrt{\frac{-ac}{a^2}} = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}.$$

Proviamo adesso per le equazioni spurie.

Esempio 13

Risolvere l'equazione $9x^2 + x = 0$. Calcoliamo il discriminante: $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 9 \cdot 0 = 1$. Ci sono le seguenti due

$$\text{soluzioni reali: } x = \frac{-1 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 9} = \frac{-1 \pm 1}{18} = \begin{cases} \frac{-1+1}{18} = 0 \\ \frac{-1-1}{18} = -\frac{2}{18} = -\frac{1}{9} \end{cases}. \text{ Come sapevamo una soluzione è lo zero.}$$

Anche in questo caso lavorando sul caso generale: $ax^2 + bx = 0$, otteniamo i seguenti risultati.

1. Il discriminante è sempre non negativo (nullo solo se $b = 0$): $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot 0 = b^2$;

$$2. \text{ Una soluzione è sempre lo zero: } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2}}{2a} = \frac{-b \pm b}{2a} = \begin{cases} \frac{-b+b}{2a} = 0 \\ \frac{-b-b}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a} \end{cases}.$$

Ancora una volta i risultati coincidono con quelli ottenuti con altri procedimenti.

Infine, talvolta può essere utile semplificare la formula.

Esempio 14

Risolvere l'equazione $5x^2 + 52x + 3 = 0$. Per calcolare il discriminante dobbiamo calcolare il quadrato del numero 52. Procediamo nel modo consueto: $\Delta = 52^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3 = 2704 - 60 = 2644 = 2^2 \cdot 661$, calcoliamo le

$$\text{due soluzioni reali: } x = \frac{-52 \pm \sqrt{2^2 \cdot 661}}{2 \cdot 5} = \frac{-\cancel{52}^{26} \pm \cancel{2} \cdot \sqrt{661}}{10^5} = \frac{-26 \pm \sqrt{661}}{5}.$$

Aver trovato un fattore 2 comune ci ha consentito di semplificare i risultati. Ci chiediamo se ciò è un caso o se è in qualche modo legato alle caratteristiche dei coefficienti dell'equazione: proveremo che è proprio così e dipende dal fatto che il coefficiente di x è un numero pari. Cerchiamo di capire meglio cosa accade in questo caso.

Esempio 15

Calcoliamo il delta dell'equazione precedente scomponendo in fattori primi il numero 52:

$$\Delta = (2^2 \cdot 13)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3 = 2^4 \cdot 13^2 - 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot (2^2 \cdot 13^2 - 3 \cdot 5)$$

Come si vede il delta ha un fattore 4, dovuto appunto al fatto che il termine b è pari, quindi b^2 sarà divisibile per 4, d'altro canto anche $-4ac$ contiene il fattore 4, quindi anche il delta lo contiene. Passiamo allora alla

formula: $x = \frac{-2^2 \cdot 13 \pm \sqrt{2^2 \cdot (676 - 15)}}{2 \cdot 5} = \frac{-2^2 \cdot 13 \pm \cancel{2} \cdot \sqrt{661}}{\cancel{2} \cdot 5} = \frac{-2 \cdot 13 \pm \sqrt{661}}{5}$. Tenuto conto di quanto visto

potevamo applicare semplicemente l'ultima espressione della formula, calcolando intanto questo delta

ridotto: $\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{52}{2}\right)^2 - 5 \cdot 3 = 26^2 - 15 = 661$, applicando poi questa formula ridotta: $x = \frac{-\frac{56}{2} \pm \sqrt{661}}{5} = \frac{-26 \pm \sqrt{661}}{5}$.

Quanto abbiamo visto si può naturalmente generalizzare.

Teorema 5

Una equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$, in cui il coefficiente b contiene un fattore 2, si risolve

applicando la seguente formula ridotta: $x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$.

Consideriamo un esempio in cui b non è un numero intero ma contiene un fattore pari.

Esempio 16

Risolvere l'equazione $3x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0$. Calcoliamo il delta ridotto, che solitamente si chiama *delta*

quarti: $\frac{\Delta}{4} = (-\sqrt{3})^2 - 3 \cdot (-1) = 3 + 3 = 6$. Appliciamo la formula ridotta: $x = \frac{-\left(\frac{-2\sqrt{3}}{2}\right) \pm \sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{6}}{3}$.

L'angolo storico. Il metodo del completamento dei quadrati

- I Babilonesi avevano interesse a risolvere equazioni di secondo grado, purché presentassero sempre una soluzione reale positiva, dato che non accettavano i numeri negativi. Così per risolvere l'equazione $x^2 - x = 870$ procedevano nel modo seguente.
 - a) Esplicitavano il termine che dovrebbe essere il doppio prodotto: $x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x = 870$;
 - b) Aggiungevano a entrambi i membri $\frac{1}{4}$ (In modo da completare il quadrato): $x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 870 + \frac{1}{4}$;
 - c) Completavano il quadrato: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3481}{4}$;
 - d) Estraecono la radice quadrata: $x - \frac{1}{2} = \frac{59}{2}$ (Solo la radice positiva);
 - e) Infine ottenevano la soluzione: $x = \frac{1}{2} + \frac{59}{2} = \frac{60}{2} = 30$.
- In realtà i Babilonesi usavano anche altri metodi sia algebrici sia geometrici. Vediamone uno di tipo algebrico per risolvere l'equazione $x^2 + 16x = 16$
 - a) Mettiamo in evidenza x al primo membro: $x \cdot (x + 6) = 16$;
 - b) Poniamo $x + 6 = y$. Il problema è diventato quello di trovare due numeri, x e y , di cui conosciamo la differenza e il prodotto: $x - y = 6$ e $xy = 16$.
 - c) Poniamo $x = a - 3$ e $y = a + 3$. (Infatti in questo modo $y - x = a + 3 - (a - 3) = 6$);
 - d) Allora si ha: $xy = 16 \Rightarrow (a - 3) \cdot (a + 3) = 16 \Rightarrow a^2 - 9 = 16 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$. (Si considera sempre solo la soluzione positiva);
 - e) Infine: $x = a - 3 = 5 - 3 = 2$; $y = a + 3 = 5 + 3 = 8$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

- Vogliamo risolvere l'equazione $9x^2 + 6x - 5 = 0$ con il metodo del completamento del quadrato. Riconosciamo facilmente nei primi due termini una parte dello sviluppo di $(3x+1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$. Scriviamo perciò: $9x^2 + 6x + 1 - 6 = 0 \Rightarrow (3x+1)^2 - 6 = 0 \Rightarrow (3x+1)^2 = 6$, adesso estraiamo la radice quadrata di ambo i membri, non negativi: $3x+1 = \pm\sqrt{6} \Rightarrow 3x = -1 \pm \sqrt{6} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{6}}{3}$. Ecco le soluzioni.
- Risolviamo l'equazione $4x^2 - x + 1 = 0$. In questo caso risulta più difficile riconoscere lo sviluppo del quadrato di un binomio. Scriviamo allora nel modo seguente: $(2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 1 = 0$. Abbiamo esplicitato il primo quadrato e poi abbiamo cercato di scrivere il secondo termine come doppio prodotto del primo e di un altro termine che non riconosciamo. In effetti si ha: $\left(2x - \frac{1}{4}\right)^2 = 4x^2 + 2 \cdot 2x \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{16} = 4x^2 - x + \frac{1}{16}$. Quindi riscriviamo l'equazione nel modo seguente: $\left(2x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} + 1 = 0 \Rightarrow \left(2x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1-16}{16} \Rightarrow \left(2x - \frac{1}{4}\right)^2 = -\frac{15}{16}$. L'ultima scritta è una contraddizione, pertanto possiamo concludere che l'equazione non ha soluzioni reali.

Risolvere con il metodo del completamento del quadrato le equazioni seguenti

Livello 2

- $25x^2 - 10x + 1 = 0$; $81x^2 + 18x - 5 = 0$; $4x^2 - 4x + 3 = 0$ $\left[\frac{1}{5}; \frac{-1 \pm \sqrt{6}}{9}; \emptyset\right]$
- $x^2 - 5x + 6 = 0$; $x^2 + 12x - 1 = 0$; $x^2 - 3x + 7 = 0$ $\left[(2 \vee 3); -6 \pm \sqrt{37}; \emptyset\right]$
- $36x^2 - 12x + 5 = 0$; $49x^2 - 7x + 1 = 0$; $16x^2 - 3x - 2 = 0$ $\left[\emptyset; \emptyset; \frac{3 \pm \sqrt{137}}{32}\right]$
- $9x^2 - 30x + 5 = 0$; $64x^2 + 8x + 11 = 0$; $x^2 - 5x + 1 = 0$ $\left[\frac{5 \pm 2 \cdot \sqrt{5}}{3}; \emptyset; \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}\right]$
- $100x^2 + 20x - 31 = 0$; $x^2 - 7x + 2 = 0$; $9x^2 - 5x + 2 = 0$ $\left[\frac{-1 \pm 4 \cdot \sqrt{2}}{10}; \frac{7 \pm \sqrt{41}}{2}; \emptyset\right]$
- $7x^2 - 6x + 1 = 0$; $12x^2 + 5x - 2 = 0$; $3x^2 - x + 1 = 0$ $\left[\frac{3 \pm \sqrt{2}}{7}; \left(-\frac{2}{3} \vee \frac{1}{4}\right); \emptyset\right]$

Livello 3

- $3t^2 + 5t - 2 = 0$; $11m^2 + 9m - 3 = 0$; $10y^2 - y - 1 = 0$ $\left[\left(-2 \vee \frac{1}{3}\right); \frac{-9 \pm \sqrt{213}}{22}; \frac{1 \pm \sqrt{41}}{20}\right]$
- $3a^2 + 2 \cdot \sqrt{3}a + 1 = 0$; $5b^2 - \sqrt{5}b + 2 = 0$; $6c^2 + 4 \cdot \sqrt{6}c - 3 = 0$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}; \emptyset; \frac{-2 \cdot \sqrt{6} \pm \sqrt{42}}{6}\right]$
- $4x^2 - x - 1 = 0$; $2x^2 - 3x - 1 = 0$; $5x^2 + 7x - 9 = 0$ $\left[\frac{1 \pm \sqrt{17}}{8}; \frac{3 \pm \sqrt{17}}{8}; \frac{-7 \pm \sqrt{229}}{10}\right]$

$$10. \quad 7m^2 + m + 1 = 0; \quad 13p^2 - 3p + 1 = 0; \quad 4n^2 - \sqrt{2}n - 3 = 0 \quad \left[\emptyset; \emptyset; \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \vee \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{4} \right) \right]$$

Lavoriamo insieme

Applichiamo la formula risolutiva alle due equazioni già risolte in precedenza con il metodo del completamento del quadrato. Ricordiamo la formula risolutiva dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ che nel caso di } b \text{ numero pari diventa: } x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}.$$

- $9x^2 + 6x - 5 = 0$, in questo caso abbiamo: $a = 9$, $b = 6$, $c = -5$. Determiniamo prima il discriminante: $\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 3^2 - 9 \cdot (-5) = 9 + 45 = 54 > 0$, quindi: $x = \frac{-3 \pm \sqrt{54}}{9} = \frac{-3 \pm \sqrt{54}}{9} = \frac{-3 \pm 3 \cdot \sqrt{6}}{9} = \frac{-1 \pm \sqrt{6}}{3}$.
- $4x^2 - x + 1 = 0$. Si ha: $a = 4$, $b = -1$, $c = 1$. Determiniamo il discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 1 - 16 = -15 < 0$. L'equazione non ha soluzioni reali.

Risolvere le seguenti equazioni di secondo grado utilizzando la formula risolutiva

Livello 1

$$\begin{array}{ll}
 11. \quad 9x^2 - 3x + 5 = 0; \quad 15x^2 + x - 7 = 0; \quad 5x^2 + 7x - 9 = 0 & \left[\emptyset; \frac{-1 \pm \sqrt{421}}{30}; \frac{-7 \pm \sqrt{229}}{10} \right] \\
 12. \quad x^2 + 5x + 6 = 0; \quad x^2 - 5x - 6 = 0; \quad x^2 + 5x - 6 = 0 & [-3 \vee -2; -1 \vee 6; -6 \vee 1] \\
 13. \quad x^2 + 6x + 9 = 0; \quad x^2 - 6x + 9 = 0; \quad x^2 - 6x - 9 = 0 & [-3; 3; 3 \pm 3 \cdot \sqrt{2}] \\
 14. \quad x^2 - 9x + 14 = 0; \quad x^2 + 14x - 9 = 0; \quad 14x^2 - 9x + 1 = 0 & \left[2 \vee 7; -7 \pm \sqrt{58}; \frac{1}{7} \vee \frac{1}{2} \right] \\
 15. \quad x^2 - 10x + 11 = 0; \quad 10x^2 + x - 11 = 0; \quad 11x^2 - x + 10 = 0 & \left[5 \pm \sqrt{14}; \frac{-11}{10} \vee; \emptyset \right] \\
 16. \quad x^2 + 8x - 65 = 0; \quad 8x^2 + x - 65 = 0; \quad 65x^2 - 8x + 1 = 0 & \left[-13 \vee 5; \frac{-1 \pm \sqrt{2081}}{16}; \emptyset \right] \\
 17. \quad x^2 + 7x - 2 = 0; \quad 2x^2 + 7x - 1 = 0; \quad 7x^2 - 2x - 1 = 0 & \left[\frac{-7 \pm \sqrt{57}}{2}; \frac{-7 \pm \sqrt{57}}{4}; \frac{1 \pm 2 \cdot \sqrt{2}}{7} \right] \\
 18. \quad 3x^2 - 19x + 11 = 0; \quad 11x^2 + 19x - 3 = 0; \quad 19x^2 - 3x - 11 = 0 & \left[\frac{19 \pm \sqrt{229}}{6}; \frac{-19 \pm \sqrt{493}}{22}; \frac{3 \pm 13 \cdot \sqrt{5}}{38} \right] \\
 19. \quad 14x^2 - 2x - 3 = 0; \quad 3x^2 + 14x + 2 = 0; \quad 2x^2 - 14x - 3 = 0 & \left[\frac{1 \pm \sqrt{43}}{14}; \frac{-7 \pm \sqrt{43}}{3}; \frac{7 \pm \sqrt{55}}{2} \right]
 \end{array}$$

Tenuto conto dello svolgimento degli esercizi precedenti, determinare in che relazione sono le soluzioni delle coppie di equazioni seguenti, nell'ipotesi in cui abbiano soluzioni reali

Livello 3

- | | |
|---|------------------------|
| 20. $ax^2 + bx + c = 0$ e $ax^2 - bx + c = 0$ | [Opposte] |
| 21. $ax^2 + bx + c = 0$ e $cx^2 + bx + a = 0$ | [Reciproche] |
| 22. $ax^2 + bx + c = 0$ e $cx^2 - bx + a = 0$ | [Reciproche e opposte] |

Lavoriamo insieme

- Risolvere $(1+\sqrt{5}) \cdot x^2 - x - (1-\sqrt{5}) = 0$. In questo esercizio si possono trovare difficoltà causate dalla presenza di radicali come coefficienti, per il resto la formula da applicare rimane invariata. Cominciamo a determinare il discriminante: $\Delta = 1^2 + 4 \cdot (1+\sqrt{5}) \cdot (1-\sqrt{5}) = 1 + 4 \cdot (1-5) = 1-16 = -15 < 0$. Concludiamo che l'equazione non ha soluzioni reali.

- $(2-\sqrt{3}) \cdot x^2 - x - \sqrt{3} = 0$, si ha: $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (2-\sqrt{3}) \cdot (-\sqrt{3}) = 1 + 4 \cdot (2\sqrt{3} - 3) = 1 + 8\sqrt{3} - 12 = 8\sqrt{3} - 11 > 0$.

Possiamo applicare la formula: $x = \frac{1 \pm \sqrt{8\sqrt{3} - 11}}{2 \cdot (2-\sqrt{3})}$. Non riusciamo a semplificare ulteriormente.

- $2x^2 - (2+\sqrt{5}) \cdot x - \sqrt{5} - 5 = 0 \Rightarrow \Delta = (2+\sqrt{5})^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-\sqrt{5} - 5) = 4 + 4\sqrt{5} + 5 + 8\sqrt{5} + 40 = 49 + 12\sqrt{5} > 0$.

Applichiamo la formula: $x = \frac{2+\sqrt{5} \pm \sqrt{49+12\sqrt{5}}}{4}$. Questa volta vogliamo vedere se possiamo ancora semplificare: cerchiamo quindi di scrivere il radicando come un quadrato perfetto. Vediamo che $49 + 12\sqrt{5} = 45 + 4 + 12\sqrt{5} = 5 \cdot 9 + 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} = (3\sqrt{5})^2 + 2 \cdot (2) \cdot (3\sqrt{5}) + 2^2 = (2+3\sqrt{5})^2$, quindi le nostre soluzioni divengono:

$$x = \frac{2+\sqrt{5} \pm \sqrt{(2+3\sqrt{5})^2}}{4} = \frac{2+\sqrt{5} \pm (2+3\sqrt{5})}{4} = \begin{cases} \frac{2+\sqrt{5}-2-3\sqrt{5}}{4} = -\frac{2\sqrt{5}}{4} = -\frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{2+\sqrt{5}+2+3\sqrt{5}}{4} = \frac{4+4\sqrt{5}}{4} = 1+\sqrt{5} \end{cases}$$

Livello 2

$$23. \quad 7x^2 + 2\sqrt{7}x + 1 = 0; \sqrt{7}x^2 + x - 7 = 0; x^2 - 7x + 2\sqrt{7} = 0 \quad \left[-\frac{\sqrt{7}}{7}; \frac{-1 \pm \sqrt{1+28\sqrt{7}}}{2\sqrt{7}}; \frac{7 \pm \sqrt{49-8\sqrt{7}}}{2} \right]$$

$$24. \quad \sqrt{2}x^2 - x + \sqrt{2} = 0; 3x^2 + x - \sqrt{3} = 0; 5x^2 - \sqrt{5}x - 1 = 0 \quad \left[\emptyset; \frac{-1 \pm \sqrt{1+12\sqrt{3}}}{6}; \frac{5 \pm \sqrt{5}}{10} \right]$$

$$25. \quad (\sqrt{2}-1)x^2 - 2x - 1 = 0; x^2 + (1-\sqrt{3}) \cdot x - 1 = 0; 2x^2 - (\sqrt{2}-1) \cdot x - 1 = 0 \quad \left[\frac{1}{1 \pm \sqrt{2}}; \frac{\sqrt{3}-1 \pm \sqrt{8-2\sqrt{3}}}{2}; \frac{-1+\sqrt{2} \pm \sqrt{11-2\sqrt{2}}}{4} \right]$$

$$26. \quad \sqrt{2}x^2 - \sqrt{3}x - 1 = 0; x^2 + (\sqrt{2}+\sqrt{3}) \cdot x - 2 = 0; x^2 - x - (\sqrt{2}-\sqrt{5}) = 0 \quad \left[\frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{3+4\sqrt{2}}}{4}; \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{3} \pm \sqrt{13+2\sqrt{6}}}{2}; \emptyset \right]$$

$$27. \quad x^2 + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) \cdot -\sqrt{6} = 0; x^2 - (\sqrt{2}-\sqrt{3}+2) \cdot x + 1 - \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} = 0 \quad \left[\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3} \pm \sqrt{5+2\sqrt{6}}}{2}; 1+\sqrt{2} \vee 1-\sqrt{3} \right]$$

$$28. \quad x^2 - \sqrt{2}x - 3\sqrt{2} - 5 = 0; 3x^2 + (8\sqrt{2}-3) \cdot x - 1 = 0 \quad \left[1 \pm \sqrt{2}; \frac{3-8\sqrt{2} \pm \sqrt{149-48\sqrt{2}}}{6} \right]$$

Lavoriamo insieme

Risolvere l'equazione $\frac{2x}{3} + 1 - \frac{x^2 + 3x - 1}{4} = \frac{3x^2 + x}{6}$. Questa equazione non differisce da una normale equazione di secondo grado, se non per il fatto che dobbiamo semplificarne l'espressione per ricondurla alla forma a cui applicare la formula risolutiva: $\frac{8x + 12 - 3 \cdot (x^2 + 3x - 1)}{12} = \frac{2 \cdot (3x^2 + x)}{12}$. Ora eliminiamo il minimo comune denominatore: $8x + 12 - 3x^2 - 9x + 3 = 6x^2 + 2x \Rightarrow -9x^2 - 3x + 15 = 0 \Rightarrow 3x^2 + x - 5 = 0$. Adesso calcoliamo il discriminante: $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5) = 1 + 60 = 61 > 0$. Possiamo applicare la formula risolutiva: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{61}}{6}$.

Risolvere le seguenti equazioni**Livello 1**

29. $(6x-1)^2 + (2x-3) \cdot (14+5x) - (3x-2) \cdot (3x+2) = 0$; $(3x+2)^2 - (1+3x) \cdot (4-x) - 5 = 1+x^2$

$$\left[\frac{-1 \pm \sqrt{5477}}{74}; \frac{-1 \pm \sqrt{265}}{22} \right]$$
30. $\left(\frac{3}{2}x+1\right)^2 + 3 \cdot \left(x-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(3-\frac{2}{3}x\right) = \left(\frac{4}{3}x+1\right) \cdot \left(\frac{4}{3}x-1\right) + x^2 - 3$

$$\left[\frac{270 \pm 3 \cdot \sqrt{5006}}{91} \right]$$
31. $(3x+1) \cdot \left(\frac{3}{4}x+2\right) - (3+x) \cdot (3x-1) = (4x-1)^2$

$$\left[\frac{27 \pm \sqrt{5017}}{134} \right]$$
32. $\left(2x+\frac{5}{2}\right)^2 + x \cdot \left(\frac{1}{3}x-1\right) - (4-x^2) = x^2 - \left(3x-\frac{1}{4}\right)^2$

$$[\emptyset]$$
33. $x^2 - x + 2 - (x^2 - x + 1) + 3x \cdot (-x + 2) = \left(\frac{5}{6}x-1\right) \cdot \left(x-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}x^2$

$$\left[\frac{89 \pm \sqrt{8929}}{84} \right]$$
34. $(\sqrt{2}x-1)^2 + (2x-1) \cdot (\sqrt{2}+3x) = 3-\sqrt{2} + (x-1) \cdot (5-3x)$

$$[\emptyset]$$
35. $(\sqrt{2}-\sqrt{3}x)^2 + (\sqrt{3}x-1) \cdot (\sqrt{2}+x) = (1-\sqrt{2}) \cdot (2x+1)$

$$[\emptyset]$$
36. $\frac{x-1}{7} - \frac{4x^2+1}{14} + \frac{3x^2-9}{2} = 0$; $\frac{3x^2+1}{3} - \frac{4x+5}{6} + \frac{13x^2-x-2}{9} = 1$

$$\left[\frac{-1 \pm \sqrt{1123}}{17}; \frac{7 \pm 3 \cdot \sqrt{157}}{44} \right]$$
37. $\frac{x^2-x+1}{2} - \frac{x^2+x-1}{4} + \frac{x^2-x-1}{8} - \frac{x^2+x+1}{16} = 0$

$$\left[\frac{15 \pm 3 \cdot \sqrt{5}}{10} \right]$$

Livello 2

38. $\left(\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3}\right) \cdot \left(\frac{x+1}{3} + \frac{x-1}{2}\right) - 4 \cdot \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = 0$

$$[\emptyset]$$
39. $\left(\frac{2x-1}{4} + \frac{3x-5}{3}\right) \cdot \left(\frac{2x+1}{4} - \frac{3x+5}{3}\right) = x \cdot \left(3x+\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{4}x$

$$\left[-\frac{17}{18} \vee \frac{23}{30} \right]$$
40. $\left(\frac{5x-2}{2} + 1\right) \cdot \left(1 - \frac{3x-2}{3}\right) + \left(\frac{4x-1}{6}\right)^2 = \frac{3x^2-x+1}{12}$

$$\left[\frac{145 \pm \sqrt{20361}}{166} \right]$$
41. $\left(\frac{2x-3}{5} + \frac{4x-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{4x+1}{2} - \frac{3x-2}{5}\right)^2 - \left(\frac{5x+3}{2}\right)^2 = x^2 - x + 1$

$$\left[\frac{-659 \pm 5 \cdot \sqrt{15619}}{149} \right]$$

$$42. \left(\frac{1}{2} - 3x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}x+1}{3} + \sqrt{2}\right)^2 - (\sqrt{2}x-1)^2 = (\sqrt{2}-1)^2 \quad [\emptyset]$$

$$43. x \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{x}{\sqrt{3}}\right) + \sqrt{3}x \cdot \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{x}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}+2x}{3}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{9}x \quad \left[\frac{27 \pm \sqrt{969}}{20}\right]$$

Lavoriamo insieme

Risolvere l'equazione $(2x^2 - x - 1)^2 - 5 \cdot (2x^2 - x - 1) - 1 = 0$. Saremmo tentati di sviluppare i calcoli, ma così facendo otterremmo un'equazione di quarto grado con la quale, probabilmente, non sapremmo cosa fare. Notiamo invece che ponendo semplicemente la condizione: $z = 2x^2 - x - 1$, l'equazione diviene $z^2 - 5z - 1 = 0$, che sappiamo risolvere senza alcuna difficoltà: $z = \frac{5 \pm \sqrt{25+4}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}$. Ma questa non è la soluzione dell'equazione iniziale, dobbiamo sostituire il valore di z : $2x^2 - x - 1 = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}$, ottenendo così due equazioni di secondo grado, che risolviamo: $4x^2 - 2x - 2 - 5 - \sqrt{29} = 0 \vee 4x^2 - 2x - 2 - 5 + \sqrt{29} = 0 \Rightarrow \Rightarrow 4x^2 - 2x - 7 - \sqrt{29} = 0 \vee 4x^2 - 2x - 7 + \sqrt{29} = 0 \Rightarrow \frac{\Delta}{4} = 1 + 28 + 4 \cdot \sqrt{29} = 29 + 4 \cdot \sqrt{29} \vee \frac{\Delta}{4} = 1 + 28 - 4 \cdot \sqrt{29} = 29 - 4 \cdot \sqrt{29}$

Infine: $x = \frac{1 \pm \sqrt{29 + 4 \cdot \sqrt{29}}}{4} \vee x = \frac{1 \pm \sqrt{29 - 4 \cdot \sqrt{29}}}{4}$

Usando opportune sostituzioni risolvere le seguenti equazioni

Livello 2

$$44. 3 \cdot (2x-1)^2 + (2x-1) - 5 = 0 ; 4 \cdot (11x+2)^2 + 4 \cdot (11x+2) + 1 = 0 \quad \left[\frac{5 \pm \sqrt{61}}{12}; -\frac{5}{22}\right]$$

$$45. (3-5x)^2 - 3 \cdot (3-5x) + 2 = 0 ; 4 \cdot (5x+3)^2 + 3 \cdot (5x+3) - 1 = 0 \quad \left[\frac{4}{5} \vee 1; -\frac{4}{5} \vee -\frac{11}{20}\right]$$

$$46. (x^2 - x + 3)^2 - 5 \cdot (x^2 - x + 3) + 6 = 0 ; (3x^2 + x - 1)^2 - 7 \cdot (3x^2 + x - 1) + 10 = 0 \quad \left[0 \vee 1; \frac{-1 \pm \sqrt{37}}{6} \vee \frac{-1 \pm \sqrt{73}}{6}\right]$$

$$47. 5 \cdot (x^2 - x)^2 + 2 \cdot (x^2 - x) - 1 = 0 ; 8 \cdot (2x^2 - x + 11)^2 + 3 \cdot (2x^2 - x + 11) - 2 = 0 \quad \left[\frac{5 \pm \sqrt{5 + 20 \cdot \sqrt{6}}}{10}; \emptyset\right]$$

$$48. 6 \cdot (2x^2 - x - 2)^2 - 7 \cdot (2x^2 - x - 2) + 1 = 0 ; 10 \cdot (7x^2 - 2)^2 - 3 \cdot (7x^2 - 2) - 1 = 0 \quad \left[\frac{3 \pm \sqrt{165}}{12} \vee -1 \vee \frac{3}{2}; \pm \frac{3}{\sqrt{35}} \vee \pm \frac{\sqrt{70}}{14}\right]$$

$$49. (7x^3 - 1)^2 - 5 \cdot (7x^3 - 1) + 6 = 0 ; (x^7 - 2)^2 + 5 \cdot (x^7 - 2) + 4 = 0 \quad \left[\sqrt[3]{\frac{3}{7}} \vee \sqrt[3]{\frac{4}{7}}; -\sqrt[3]{2} \vee 1\right]$$

$$50. 6 \cdot (2x^3 - 1)^2 + (2x^3 - 1) - 2 = 0 ; 5 \cdot (4 - x^5)^2 - 11 \cdot (4 - x^5) + 2 = 0 ; 4 \cdot (5x^4 - 1)^2 - 17 \cdot (5x^4 - 1) + 15 = 0 \quad \left[\frac{1}{\sqrt[3]{6}} \vee \frac{\sqrt[3]{6}}{2}; \sqrt[5]{\frac{19}{5}} \vee \sqrt[5]{2}; \pm \frac{\sqrt{6}}{10 \cdot \sqrt[4]{5}} \vee \pm \sqrt[4]{\frac{4}{5}}\right]$$

L'angolo delle correzioni***Correggere i seguenti procedimenti errati***

$$1. \quad 3x + 4x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 60}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{76}}{6}$$

$$2. \quad x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$$

$$3. \quad 2x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} = \frac{-1 \pm 5}{4} = \left\langle \begin{array}{l} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{array} \right.$$

$$4. \quad 5x^2 - 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-3)}}{5} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{5} = \frac{2 \pm 8}{5} = \frac{2 \pm 8}{5} = \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ -\frac{6}{5} \end{array} \right.$$

$$5. \quad 3x^2 + 6x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{6^2 - 3 \cdot (-2)}}{3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 6}}{3} = \frac{-3 \pm \sqrt{15}}{3} = -1 \pm \sqrt{5}$$

Equazioni trinomie

Nel paragrafo sulle equazioni binomie abbiamo visto che con uno stesso procedimento riusciamo a risolvere equazioni di qualsiasi grado, purché inquadrabili in un certo modello. Vogliamo estendere quindi il modello delle equazioni di secondo grado a equazioni di grado superiore a due.

Vediamo come ciò sia possibile.

Esempio 17

- Vogliamo risolvere l'equazione $3x^4 - 5x^2 - 4 = 0$. Questa è un'equazione di quarto grado, ma "assomiglia" a una di secondo grado, anzi se conveniamo di cambiare il nome delle incognite, indicando $t = x^2$, avremo anche $x^4 = (x^2)^2 = t^2$, e l'equazione si trasforma nell'equazione di secondo grado:

$3t^2 - 5t - 4 = 0$, che perciò sappiamo risolvere. Avremo: $\Delta = 25 + 48 = 73 > 0 \Rightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{6}$. Questa

equazione ha 2 soluzioni reali, che però non sono soluzioni dell'equazione di partenza. Per ricavare le soluzioni di detta equazione dobbiamo risolvere queste altre due equazioni binomie:

$$t = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{6} \Leftrightarrow x^2 = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{6} \begin{cases} x^2 = \frac{5 - \sqrt{73}}{6} \Rightarrow \emptyset \\ x^2 = \frac{5 + \sqrt{73}}{6} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5 + \sqrt{73}}{6}} \end{cases}$$

Osserviamo che la prima equazione non ha soluzioni perché $\frac{5 - \sqrt{73}}{6} < 0$.

- Vogliamo risolvere l'equazione $5x^6 - 2x^3 + 1 = 0$. Questa è un'equazione di sesto grado ma, come la precedente, può ricondursi a una di secondo grado, ponendo $t = x^3$, $t^2 = x^6$, quindi: $5t^2 - 2t + 1 = 0$, e dato che $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$, questa equazione non ha soluzioni reali, e neppure ne avrà l'equazione da cui essa è stata ottenuta.

I precedenti esempi ci convincono che possiamo generalizzare il concetto di equazione di secondo grado, quindi anche di formula risolutiva, per particolari classi di equazioni di grado superiore al secondo.

Definizione 7

Un'equazione che scritta in forma semplificata abbia la seguente forma: $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, si dice **trinomia**.

Definizione 8

Un'equazione trinomia di quarto grado si chiama equazione **biquadratica**.

L'aver associato un nome particolare alle equazioni trinomie di quarto grado, dipende dal fatto che essa, dopo il secondo grado, è quella di grado più piccolo, quindi da un punto di vista storico è stata più studiata delle altre.

Proprio per questo tipo di equazioni possiamo enunciare il seguente risultato.

Teorema 6

Un'equazione biquadratica ammette 0, 2 o 4 soluzioni reali. Le eventuali soluzioni reali sono sempre a due a due opposte.

Schema dimostrativo			
Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Trasformiamo $ax^4 + bx^2 + c = 0$, in un'equazione di secondo grado.	$at^2 + bt + c = 0$	Abbiamo posto $t = x^2$, $t^2 = x^4$
2	Risoliamo l'equazione di secondo grado	$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Abbiamo applicato la formula risolutiva.

3	Consideriamo il discriminante dell'equazione.	Abbiamo 3 sottocasi	
3a	$\Delta < 0$	L'equazione biquadratica non ha soluzioni reali.	Perché non ne ha neppure l'equazione nell'incognita t .
3b	$\Delta = 0$	L'equazione biquadratica ha 2 soluzioni reali fra loro opposte e ciascuna di molteplicità 2 o non ha soluzioni reali.	Le soluzioni sono $x = \pm \sqrt{-\frac{b}{2a}}$, che sono numeri reali solo se il radicando non è negativo. Ciò accade se l'unica soluzione dell'equazione in t è positiva.
3c	$\Delta > 0$	L'equazione biquadratica ha 4 soluzioni reali a 2 a 2 fra loro opposte, o 2 soluzioni reali fra loro opposte o non ha soluzioni reali.	Le soluzioni sono $x = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$, che sono numeri reali solo se entrambi i radicandi non sono negativi. Ciò accade se entrambe le soluzioni dell'equazione in t sono positive. Diversamente se una sola soluzione è positiva vi sono 2 soluzioni reali e opposte, infine se sono tutte e due negative non vi sono soluzioni reali.

Questo teorema in effetti è vero per ogni equazione trinomia di grado multiplo di 4 (4, 8, 12, ...), invece per gradi non multipli di 4 (6, 10, 14, ...) vale quest'altro risultato.

Teorema 7

Un'equazione trinomia di grado non multiplo di 4, ammette 0, 1 o 2 soluzioni reali.

Lasciamo la dimostrazione per esercizio, chiarendola con alcuni esempi.

Esempio 18

- L'equazione $x^6 - x^3 + 1 = 0$ non ammette soluzioni reali, perché il discriminante dell'equazione di secondo grado a essa associata: $t^2 - t + 1 = 0$, è negativo, valendo $\Delta = 1^2 - 4 = -3 < 0$.
- L'equazione $4x^{10} - 4x^5 + 1 = 0$ ammette 1 soluzione reale, perché l'equazione di secondo grado a essa associata: $4t^2 - 4t + 1 = 0$, ha una sola soluzione di molteplicità 2: $t = -\frac{1}{2}$, quindi l'equazione di decimo grado ha l'unica soluzione: $x^5 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt[5]{-\frac{1}{2}} \Rightarrow x = -\sqrt[5]{\frac{1}{2}}$.
- L'equazione $3x^{14} + 7x^7 + 2 = 0$ ammette soluzioni reali, perché l'equazione di secondo grado a essa associata: $3t^2 + 7t + 2 = 0$, ha due soluzioni reali $t = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6} = \frac{-7 \pm 5}{6} = \begin{cases} \frac{-7-5}{6} = -2 \\ \frac{-7+5}{2} = -1 \end{cases}$, quindi l'equazione di partenza ha le due soluzioni: $x^7 = -2 \vee x^7 = -1 \Rightarrow x = -\sqrt[7]{2} \vee x = -1$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

- Risolvere l'equazione $5x^6 - 12x^3 - 1 = 0$. Abbiamo a che fare con un'equazione trinomia, che possiamo risolvere mediante la formula risolutiva valida per le equazioni di secondo grado in cui l'incognita è però x^3 . Dato che $\frac{\Delta}{4} = 36 + 5 = 41$, avremo: $x^3 = \frac{6 \pm \sqrt{41}}{5}$. In questo modo abbiamo ottenuto due equazioni binomie che risolviamo: $x = \sqrt[3]{\frac{6 \pm \sqrt{41}}{5}}$, che sono le soluzioni cercate.
- Risolvere $3x^8 - x^4 - 5 = 0$. Risolviamo come in precedenza: $\Delta = 1 + 60 = 61 > 0$, $x^4 = \frac{1 \pm \sqrt{61}}{6}$. In questo caso dobbiamo considerare i segni delle precedenti soluzioni. Abbiamo così: $x^4 = \frac{1 - \sqrt{61}}{6} < 0 \Rightarrow \emptyset$ e $x^4 = \frac{1 + \sqrt{61}}{6} > 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{\frac{1 + \sqrt{61}}{6}}$.

Risolvere le equazioni trinomie seguenti

Livello 1

- $4x^4 - 20x^2 - 13 = 0$; $64x^6 + 3x^3 - 5 = 0$; $x^8 + 7x^4 - 2 = 0$ $\left[\pm \frac{\sqrt{10+2\sqrt{83}}}{2}; \pm \sqrt[3]{\frac{4\sqrt{1289}-12}{8}}; \pm \sqrt{\frac{\sqrt{57}-7}{2}} \right]$
- $5x^{10} - 7x^5 - 11 = 0$; $13x^{12} - 12x^6 + 17 = 0$; $144x^4 - 24x^2 + 1 = 0$ $\left[\pm \sqrt[5]{\frac{\sqrt{269}-7}{10}}; \emptyset; \pm \frac{\sqrt{3}}{6} \right]$
- $12x^8 - 3x^4 + 5 = 0$; $6x^{12} + x^6 - 1 = 0$; $x^{14} - 3x^7 + 2 = 0$ $\left[\emptyset; \pm \frac{1}{\sqrt[5]{3}}; 1 \vee \sqrt[7]{2} \right]$
- $13x^4 - 12x^2 + 1 = 0$; $12x^4 + 13x^2 - 1 = 0$; $x^4 - 13x^2 + 12 = 0$ $\left[\pm \sqrt{\frac{6 \pm \sqrt{23}}{13}}; \pm \sqrt{\frac{\sqrt{217}-13}{24}}; \pm 1 \vee \pm 2 \cdot \sqrt{3} \right]$
- $x^6 - 10x^3 + 11 = 0$; $x^8 + 10x^4 - 11 = 0$; $x^{10} - x^5 - 56 = 0$ $\left[\sqrt[3]{5 \pm \sqrt{14}}; \pm 1; -\sqrt[5]{7} \vee \sqrt[5]{8} \right]$
- $4x^4 + 3x^2 - 2 = 0$; $3x^4 + 4x^2 - 2 = 0$; $2x^4 - 3x^2 + 4 = 0$ $\left[\pm \sqrt{\frac{\sqrt{41}-3}{8}}; \pm \sqrt{\frac{\sqrt{10}-2}{3}}; \emptyset \right]$
- $(x^4 - x^2 - 1) \cdot (x^6 - x^3 - 1) = 0$; $(x^6 - 5x^3 + 6) \cdot (x^4 - 5x^2 + 6) = 0$ $\left[\pm \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \vee \sqrt[3]{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}; \pm \sqrt{2} \vee \pm \sqrt{3} \vee \sqrt[3]{2} \vee \sqrt[3]{3} \right]$
- $(x^6 - 2x^3 + 1) \cdot (5x^8 - x^4 - 3) = 0$; $(3x^8 + x^4 - 1) \cdot (x^{12} - 5x^6 - 2) = 0$ $\left[\pm \sqrt[4]{\frac{\sqrt{61}+1}{10}} \vee 1; \pm \sqrt[6]{\frac{\sqrt{33}+5}{2}} \vee \pm \sqrt[4]{\frac{\sqrt{13}-1}{6}} \right]$

Livello 2

- $(2x^{16} - 2 \cdot \sqrt{2}x^8 + 1) \cdot (x^{14} + 2 \cdot \sqrt{2}x^7 + 2) = 0$; $(3x^6 + \sqrt{60} \cdot x^3 + 5) \cdot (3x^4 - \sqrt{3}x^2 - 1) = 0$ $\left[\pm \frac{1}{\sqrt[16]{2}} \vee -\sqrt[14]{2}; -\sqrt[3]{\frac{\sqrt{15}}{3}} \vee \pm \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{12}} \right]$
- $\left(\frac{x^2-1}{3} + \frac{x^2+1}{4} - 1 \right)^2 + \frac{7x^2-1}{12} - \frac{13x^4+1}{4} = 0$ $\left[\pm \sqrt{\frac{30 \cdot \sqrt{59} - 49}{419}} \right]$

11. $\left(\frac{x^3+2}{12}-\frac{x^3-1}{3}\right)^2+\frac{(4x^3-1)\cdot(4x^3+1)}{7}-\frac{11x^6}{4}=0$ $\left[\sqrt[3]{\frac{\pm 4\cdot\sqrt{46}-14}{45}}\right]$
12. $(x^4-x^2+1)\cdot(x^4+x^2-1)-2x^2-5=0$ $[\pm\sqrt[4]{3}]$
13. $(3x^3+1)\cdot(9x^6-3x^3+1)-(x^9+1)^2-4=0$ $\left[\sqrt[9]{\frac{25\pm\sqrt{609}}{2}}\right]$
14. $(4x^2-1)\cdot(16x^4+4x^2+1)-(3x+2)^3+18x\cdot(3x+2)-7=0$ $\left[\sqrt[3]{\frac{27\pm 5\cdot\sqrt{193}}{128}}\right]$
15. $\left[(3x-1)\cdot(9x^2+3x+1)\right]^2-\left[(2x+1)\cdot(2x-1)\right]^3+24x\cdot(x+5)=12x^2\cdot(2x+1)^2+12\cdot(10x-4)$ $[\emptyset]$

Relazioni fra i coefficienti di un'equazione trinomia e le sue soluzioni

Già sappiamo che il trinomio $x^2 + sx + p$ si può scomporre nel prodotto di due fattori di primo grado a coefficienti interi se riusciamo a trovare due numeri interi a e b che verificano le due equazioni: $a + b = s$ e $a \cdot b = p$. Ciò vuol dire che l'equazione $x^2 + sx + p = 0$, possiamo scriverla nella forma $(x+a) \cdot (x+b) = 0$ e quindi $x = -a$ e $x = -b$ sono le soluzioni reali dell'equazione data.

In questo paragrafo vogliamo cercare di estendere questo risultato all'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, qualunque siano le sue soluzioni, anche non intere purché reali. Vale infatti il seguente risultato.

Teorema 8

Se l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ammette due soluzioni reali (distinte o no) x_1, x_2 , vale la seguente identità:

$$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2). \text{ Inoltre si ha: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Schema dimostrativo			
Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Sia l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, che supponiamo abbia ha soluzioni reali.	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	Abbiamo applicato la formula risolutiva.
2	Scriviamo l'equazione sotto forma di prodotto $a \cdot \left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$	$\cancel{a} \cdot \frac{2ax + b + \sqrt{\Delta}}{2\cancel{a}} \cdot \frac{2ax + b - \sqrt{\Delta}}{2a} =$ $= \frac{(2ax + b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a} =$ $= \frac{4a^2x^2 + 4abx + b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a} =$ $= \frac{4a^2x^2 + 4abx + 4ac}{4a} = ax^2 + bx + c$	La prima tesi è dimostrata.
3	Sommiamo le soluzioni.	$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$	Abbiamo dimostrato la seconda tesi.
4	Moltiplichiamo le soluzioni.	$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2}$	Abbiamo dimostrato la terza tesi.

Si badi che abbiamo imposto che le soluzioni dell'equazione siano reali, ma almeno simbolicamente le formule trovate valgono anche se il discriminante è negativo. Quando studieremo i numeri complessi riprenderemo la questione. Adesso verifichiamo il precedente teorema.

Esempio 19

Risolvi l'equazione $3x^2 - 5x + 1 = 0$, $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 12}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$. Scomponiamo il trinomio:

$$3 \cdot \left(x - \frac{5 - \sqrt{13}}{6} \right) \cdot \left(x - \frac{5 + \sqrt{13}}{6} \right) = \cancel{3} \cdot \frac{6x - 5 + \sqrt{13}}{\cancel{6}^2} \cdot \frac{6x - 5 - \sqrt{13}}{6} = \frac{(6x - 5)^2 - (\sqrt{13})^2}{12} =$$

$$= \frac{36x^2 - 60x + 25 - 13}{12} = \frac{36x^2 - 60x + 12}{12} = 3x^2 - 5x + 1. \text{ La prima verifica è andata a buon fine. Passiamo}$$

alle altre: $\frac{5 - \sqrt{13}}{6} + \frac{5 + \sqrt{13}}{6} = \frac{5 - \sqrt{13} + 5 + \sqrt{13}}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}; \frac{5 - \sqrt{13}}{6} \cdot \frac{5 + \sqrt{13}}{6} = \frac{25 - 13}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

Anche queste hanno avuto esito positivo.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Data l'equazione $5x^2 - 11x + 3 = 0$, siamo in grado di stabilire, senza risolverla, se le sue soluzioni sono reali? Sì, è sufficiente considerare il segno del suo discriminante: $\Delta = 11^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3 = 121 - 60 = 61 > 0$. Quindi l'equazione ha soluzioni reali. Senza risolverla possiamo anche calcolare la somma e il prodotto di tali soluzioni. Sappiamo infatti che la somma è pari a $-\frac{b}{a} = -\frac{-11}{5} = \frac{11}{5}$, mentre il prodotto è $\frac{c}{a} = \frac{3}{5}$.

Date le seguenti equazioni dire, senza risolverle, se hanno soluzioni reali; in caso affermativo, calcolare la loro somma e il loro prodotto

Livello 1

- $4x^2 - 7x + 1 = 0$; $3x^2 + 9x - 4 = 0$; $3x^2 - 8x - 2 = 0$ $\left[\left(\frac{7}{4}, \frac{1}{4} \right); \left(-3, -\frac{4}{9} \right); \left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3} \right) \right]$
- $x^2 + 4x - 1 = 0$; $x^2 - 4x - 1 = 0$; $9x^2 - 24x + 16 = 0$ $\left[\left(-4, -\frac{1}{4} \right); \left(4, -\frac{1}{4} \right); \left(\frac{8}{3}, \frac{16}{9} \right) \right]$
- $9x^2 - 24x + 17 = 0$; $3x^2 + 12x + 5 = 0$; $-4x^2 + 3x + 5 = 0$ $\left[\emptyset; \left(-4, \frac{5}{3} \right); \left(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4} \right) \right]$

Livello 2

- $x^2 + 4x + \sqrt{2} = 0$; $7x^2 + 15x + \sqrt{3} = 0$; $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{8}x + 2 = 0$ $\left[\left(-4, \sqrt{2} \right); \left(-\frac{15}{7}, \frac{\sqrt{3}}{7} \right); \left(\sqrt{\frac{8}{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \right]$
- $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$; $\sqrt{5}x^2 + x - 1 = 0$; $x^2 + x + \sqrt{5} = 0$ $\left[\left(\sqrt{5}, 1 \right); \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right); \emptyset \right]$
- $(1 - \sqrt{2}) \cdot x^2 - x - 1 = 0$; $(\sqrt{2} - 1) \cdot x^2 + x - 1 = 0$; $(\sqrt{2} + 1) \cdot x^2 + 4x - (\sqrt{2} - 1) = 0$ $\left[\left(-1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2} \right); \left(1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2} \right); \left(4 - 4\sqrt{2}, 2 \cdot \sqrt{2} - 3 \right) \right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo esprimere la somma dei quadrati delle soluzioni di un'equazione di secondo grado mediante i suoi coefficienti. Noi sappiamo che l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, ha soluzioni, reali o no, la cui somma è $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e il cui prodotto è $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. Vogliamo trovare un'espressione mediante a , b e c , di $x_1^2 + x_2^2$.

Possiamo scrivere: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$, quindi possiamo sfruttare le precedenti espressioni, scrivendo: $x_1^2 + x_2^2 = \left(-\frac{b}{a} \right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$.

Livello 2

- Quando il discriminante di un'equazione trinomia è nullo, il trinomio che rappresenta l'equazione è un particolare prodotto notevole, quale? [Quadrato di binomio]
- Quando accade che somma e prodotto delle soluzioni di un'equazione di secondo grado sono lo stesso numero? [Per le equazioni $ax^2 - x + 1 = 0$]
- Quando accade che somma e prodotto delle soluzioni di un'equazione di secondo grado sono numeri opposti? [Per le equazioni $ax^2 + x + 1 = 0$]
- Esprimere la differenza delle soluzioni di un'equazione di secondo grado mediante i coefficienti. Consideriamo la differenza del minore dal maggiore. $\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{a} \right]$

11. Data l'equazione $ax^2 + bx + a = 0$, nell'ipotesi in cui ammetta soluzioni reali, in che relazione sono fra loro? [Reciproche]
12. Data l'equazione $ax^2 + bx + a = 0$, se ammette una sola soluzione, quanto vale? Quando si verifica questo caso? (Suggerimento: tenere conto che il delta vale) $[x = 1, b = -2a; x = -1, b = 2a]$
13. Data l'equazione $ax^2 + ax + b = 0$, se ammette una sola soluzione, quanto vale? Quando si verifica questo caso? $[x = -1/2; a = 4b]$
14. Data l'equazione $ax^2 + bx + b = 0$, se ammette 1 sola soluzione, quanto vale? Quando si verifica questo caso? $[x = -2; b = 4a]$
15. Qual è il rapporto della somma e del prodotto delle soluzioni di $ax^2 + bx + c = 0$ rispetto alla somma e al prodotto di quelle di $cx^2 + bx + a = 0$? $\left[\frac{c}{a}; \left(\frac{c}{a} \right)^2 \right]$

Livello 3

16. Esprimere la differenza dei quadrati delle soluzioni di un'equazione di secondo grado mediante i coefficienti. (Suggerimento: scomporre in fattori) $\left[-\frac{b \cdot \sqrt{\Delta}}{a^2} \right]$
17. Esprimere la somma dei reciproci delle soluzioni di una equazione di secondo grado mediante i coefficienti. (Suggerimento: tenere conto che $\frac{1}{m} + \frac{1}{p} = \frac{m+p}{mp}$). $\left[-\frac{b}{c} \right]$
18. Esprimere la differenza dei reciproci delle soluzioni di una equazione di secondo grado mediante i coefficienti. (Suggerimento: tenere conto che $\frac{1}{m} - \frac{1}{p} = \frac{p-m}{mp}$). $\left[-\frac{\sqrt{\Delta}}{c} \right]$
19. Esprimere la somma dei cubi delle soluzioni di una equazione di secondo grado mediante i coefficienti. (Suggerimento: tenere conto che $m^3 + p^3 = (m+p) \cdot (m^2 - mp + p^2)$) $\left[\frac{3abc - b^3}{a^3} \right]$
20. Esprimere la differenza dei cubi delle soluzioni di una equazione di secondo grado mediante i coefficienti. (Suggerimento: tenere conto che $m^3 - p^3 = (m-p) \cdot (m^2 + mp + p^2)$) $\left[\frac{(b^2 - ac) \cdot \sqrt{\Delta}}{a^3} \right]$

Equazioni parametriche di II grado

Viste le relazioni stabilite nel paragrafo precedente, possiamo risolvere equazioni parametriche di grado superiore al primo. Ricordiamo che per equazione parametrica intendiamo un'equazione che ha più di una variabile: una viene considerata come incognita, le altre sono invece dei parametri. Ciò significa che un'equazione parametrica in generale rappresenta infinite equazioni. Cerchiamo di determinare eventuali proprietà verificate da tutte o da una parte di tali equazioni. Vediamo qualche esempio.

Esempio 20

Consideriamo l'equazione parametrica $(4k-5) \cdot x^2 + (3-k) \cdot x - 7k + 2 = 0$, in cui il parametro è k . Ci chiediamo se ci sono valori del parametro per cui l'equazione

- si riduce al primo grado. Stabiliamo subito che vi è un solo valore del parametro per cui non si hanno equazioni di secondo grado. Infatti solo se $4k-5=0$, cioè se $k=\frac{5}{4}$, l'equazione diviene di primo grado,

$\left(3-\frac{5}{4}\right) \cdot x - 7 \cdot \frac{5}{4} + 2 = 0 \Rightarrow \frac{7}{4}x + \frac{-35+8}{4} = 0 \Rightarrow 7x - 27 = 0$. Per gli altri valori di k l'equazione è di secondo grado.

- Una delle sue soluzioni è $x=2$. Dire che un numero è soluzione di una data equazione, non importa di che grado, vuol dire che la verifica. Dobbiamo quindi imporre che si abbia: $(4k-5) \cdot 2^2 + (3-k) \cdot 2 - 7k + 2 = 0 \Rightarrow 16k - 20 + 6 - 2k - 7k + 2 = 0 \Rightarrow 7k - 12 = 0$. Abbiamo così ottenuto un'equazione di primo grado nell'incognita k . Risolviamola: $k=\frac{12}{7}$, è il valore richiesto.

- la somma delle sue soluzioni (reali) è 3. Grazie al Teorema 8 possiamo dire che la somma delle soluzioni dell'equazione è data dalla seguente espressione: $-\frac{b}{a} = -\frac{3-k}{4k-5} = \frac{k-3}{4k-5}$. Dobbiamo quindi vedere se vi sono valori reali di k per cui tale espressione è 3. Dobbiamo quindi risolvere l'equazione $\frac{k-3}{4k-5} = 3$.

$$\text{Abbiamo: } \frac{k-3-3 \cdot (4k-5)}{4k-5} = 0 \Rightarrow \begin{cases} k-3-12k+15=0 \\ 4k-5 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -11k=-12 \\ k \neq \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow k=\frac{12}{11}. \text{ Per questo valore le}$$

soluzioni hanno per somma 3, non sappiamo però se sono reali. Sostituiamo il valore:

$$\left(4 \cdot \frac{12}{11} - 5\right) \cdot x^2 + \left(3 - \frac{12}{11}\right) \cdot x - 7 \cdot \frac{12}{11} + 2 = 0 \Rightarrow \frac{48-55}{11}x^2 + \frac{33-12}{11}x - \frac{84}{11} + 2 = 0 \Rightarrow -\frac{7}{11}x^2 + \frac{21}{11}x - \frac{62}{11} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 7x^2 - 21x + 62 = 0 \Rightarrow \Delta = 441 - 1736 = -1295 < 0$. In effetti le soluzioni non sono reali. Notiamo però che la loro somma, quale che sia il significato da dare alle scritte simboliche sulle quali operiamo come

$$\text{su i numeri reali, è proprio 3: } \frac{42 - \sqrt{-2240}}{14} + \frac{42 + \sqrt{-2240}}{14} = \frac{84}{14} = \frac{21 - \sqrt{-1295}}{14} + \frac{21 + \sqrt{-1295}}{14} = \frac{42}{14} = 3$$

Verifiche

Lavoriamo insieme

Data l'equazione parametrica $(2-k) \cdot x^2 + (3+k) \cdot x + 2 = 0$, vogliamo rispondere ad alcuni quesiti.

- L'equazione può divenire di primo grado? Ciò accade se esistono valori di k che annullano il coefficiente di secondo grado, cioè $2-k$. Dobbiamo quindi risolvere l'equazione $2-k=0$, con soluzione $k=2$, che corrisponde al valore richiesto. Per questo valore di k l'equazione diventa: $5x+2=0$.
- L'equazione può avere soluzioni coincidenti? Sappiamo che ciò dipende dal discriminante: se è nullo le soluzioni sono coincidenti. Si ha: $\Delta = (3+k)^2 - 4 \cdot (2-k) \cdot 2 = 9 + 6k + k^2 - 16 + 8k = k^2 + 14k - 7$.
Poniamolo uguale a zero, risolvendo l'equazione: $k = -7 \pm \sqrt{49+7} = -7 \pm \sqrt{56} = -7 \pm \sqrt{2^3 \cdot 7} = -7 \pm 2 \cdot \sqrt{14}$.
Si noti che abbiamo applicato la formula ridotta dell'equazione di secondo grado.
- L'equazione può avere tra le soluzioni il numero 2? Sappiamo che un numero è soluzione di un'equazione se la verifica, cioè se sostituito all'incognita rende vera l'uguaglianza. Sostituiamo quindi a x il numero 2: $(2-k) \cdot 2^2 + (3+k) \cdot 2 + 2 = 0 \Rightarrow 8 - 4k + 6 + 2k + 2 = 0 \Rightarrow -2k + 16 = 0 \Rightarrow k = 8$. Questo è il valore cercato.
- L'equazione può avere soluzioni che sommate diano -3 ? La risposta dipende dal fatto che la somma delle soluzioni di un'equazione di secondo grado è data da $-\frac{b}{a}$. Nel nostro caso: $-\frac{3+k}{2-k} = \frac{3+k}{k-2}$, basta quindi porre la precedente espressione uguale al valore dato:

$$\frac{3+k}{k-2} = -3 \Rightarrow 3+k = -3 \cdot (k-2) \wedge k \neq 2 \Rightarrow 3+k+3k-6=0 \Rightarrow 4k-3=0 \Rightarrow k = \frac{3}{4}$$

Tenuto conto delle relazioni fra i coefficienti dell'equazione e le sue soluzioni, determinare gli eventuali valori del parametro reale m nelle equazioni seguenti in modo che sia verificato quanto richiesto

Livello 2

1. $x^2 - mx + m = 0$, abbia soluzioni coincidenti. [$0 \vee 4$]
2. $\frac{x^2 + 3x}{5x - 2} = \frac{m-1}{m+1}$ abbia due soluzioni reali e coincidenti. [$-4 \pm \sqrt{34}$]
3. $(1-m) \cdot x^2 + x - 1 = 0$, abbia soluzioni reali la cui somma sia 3. [4/3 non accettabile]
4. $(1+3m) \cdot x^2 + 4mx + 3 - m = 0$, abbia soluzioni reali il cui prodotto sia 2. [1/7 non accettabile]
5. $(3-4m) \cdot x^2 + (4m-1) \cdot x + 1 = 0$, abbia fra le proprie soluzioni il numero -1 . [$\emptyset$]
6. $(m^2-1) \cdot x^2 + (m^2-3m+2) \cdot x + 1 = 0$, sia un'equazione di secondo grado pura. [$1 \vee 2$]
7. $(4m^2-1) \cdot x^2 + (2m^2-m-1) \cdot x + m-3 = 0$, sia un'equazione di secondo grado spuria. [3]
8. $(3m^2+m-1) \cdot x^2 + (m^2+3) \cdot x + 2m-1 = 0$, abbia soluzioni opposte. [$\emptyset$]
9. $(m+3) \cdot x^2 + (3m^2-2m+1) \cdot x + 4m = 0$, abbia soluzioni reciproche. [1, non accettabile]
10. $(2m^2+m) \cdot x^2 - (5m-3) \cdot x + 4-2m = 0$, abbia soluzioni reciproche e di segno opposto. [$\emptyset$]

Nelle seguenti equazioni parametriche di secondo grado determinare i valori del parametro reale k , se esistono, per cui le equazioni soddisfano le proprietà di seguito richieste. Nelle risposte se il valore è posto fra parentesi tonde non è accettabile, cioè l'equazione associata non ha soluzioni reali

Livello 3

11. $(2k-3) \cdot x^2 + (6k-1) \cdot x + 3k-8 = 0$. a) sono equazioni pure; b) hanno tra le soluzioni $x = -3$; c) la somma delle loro soluzioni vale $\frac{3}{5}$; d) il prodotto delle loro soluzioni vale $\frac{8}{3}$.

$$\left[a) \left(\frac{1}{6} \right); b) \frac{32}{3}; c) \left(\frac{7}{18} \right); d) (0) \right]$$

12. $(5k+3) \cdot x^2 - (7k-1) \cdot x + 9k+4 = 0$. a) sono equazioni spurie; b) hanno tra le soluzioni $x = -4$; c) la somma delle loro soluzioni vale $\frac{3}{4}$; d) il prodotto delle loro soluzioni vale $\frac{7}{5}$.

$$\left[a) -\frac{4}{9}; b) -\frac{19}{39}; c) (1); d) \left(\frac{1}{10} \right) \right]$$

13. $(2k-5) \cdot x^2 + (3k-5) \cdot x + 8k-1 = 0$. a) hanno soluzioni coincidenti; b) sono equazioni di primo grado; c) la somma delle loro soluzioni vale $\frac{5}{6}$; d) il prodotto delle loro soluzioni vale $\frac{4}{7}$.

$$\left[a) \frac{69 \pm 2 \cdot \sqrt{1259}}{55}; b) \frac{5}{2}; c) \frac{55}{28}; d) \left(-\frac{13}{48} \right) \right]$$

14. $(k-1) \cdot x^2 + (11k+2) \cdot x + 3 = 0$. a) hanno soluzioni coincidenti; b) sono equazioni di primo grado; c) sono equazioni spurie; d) sono equazioni pure; e) hanno tra le soluzioni $x = \frac{3}{2}$.

$$\left[a) \emptyset; b) 1; c) \emptyset; d) -\frac{2}{11}; e) -\frac{1}{5} \right]$$

15. $5x^2 - 3 \cdot (k+5) \cdot x - 13k+2 = 0$. a) hanno soluzioni la cui somma vale $\frac{1}{4}$; b) divengono equazioni di primo grado; c) sono equazioni spurie; d) sono equazioni pure; e) hanno soluzioni il cui prodotto vale $\frac{3}{2}$.

$$\left[a) \left(-\frac{5}{4} \right); b) \emptyset; c) \frac{2}{13}; d) \left(-\frac{5}{3} \right); e) \left(-\frac{11}{26} \right) \right]$$

16. $(3-5k) \cdot x^2 + 2x - 7k = 0$. a) hanno soluzioni la cui somma vale $-\frac{3}{5}$; b) divengono equazioni di primo grado; c) sono equazioni spurie; d) sono equazioni pure; e) hanno soluzioni il cui prodotto vale $-\frac{5}{3}$.

$$\left[a) \left(-\frac{1}{15} \right); b) \frac{3}{5}; c) 0; d) \emptyset; e) \frac{15}{46} \right]$$

Lavoriamo insieme

Data l'equazione parametrica di secondo grado $kx^2 - (1-k) \cdot x + 3k+7 = 0$ determinare, se esistono, i valori del parametro k per cui si ottengono equazioni le cui soluzioni reali o no, soddisfano le seguenti proprietà:

a) hanno differenza 1; b) somma dei reciproci 4; c) somma dei cubi 8; d) somma dei quadrati -5 .

Utilizziamo le formule determinate negli esercizi precedenti.

a) La differenza delle soluzioni si esprime, in funzione dei coefficienti, come $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$. Quindi deve

essere $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a} = 1 \Rightarrow \frac{b^2-4ac}{a^2} = 1 \Rightarrow b^2-4ac = a^2$, ma nel nostro caso si ha:

$$b^2-4ac = a^2 \Rightarrow (1-k)^2 - 4 \cdot k \cdot (3k+7) = k^2 \Rightarrow 1-2k+k^2-12k^2-28k-k^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -12k^2-30k+1=0 \Rightarrow 12k^2+30k-1=0 \Rightarrow k = \frac{-15 \pm \sqrt{225+12}}{12} = \frac{-15 \pm \sqrt{237}}{12}$$

Per questi due valori di k si hanno le equazioni cercate, che non è detto che abbiano soluzioni reali. Sostituendo si verifica che in effetti le ha, quindi i valori sono accettabili.

b) La somma dei reciproci si esprime come $-\frac{b}{c} = \frac{1-k}{3k+7}$. Si deve perciò avere $\frac{1-k}{3k+7} = 4 \Rightarrow 1-k = 12k+28 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 13k = -27 \Rightarrow k = -\frac{27}{13}$. In questo caso il valore è accettabile, poiché si verifica che l'equazione di

partenza ha soluzioni reali.

c) La somma dei cubi si esprime come $-\left(\frac{b}{a}\right)^3 + 3 \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} = -\left(\frac{1-k}{k}\right)^3 + 3 \cdot \frac{1-k}{k} \cdot \frac{3k+7}{k}$. Si deve perciò

avere: $-\left(\frac{1-k}{k}\right)^3 + 3 \cdot \frac{1-k}{k} \cdot \frac{3k+7}{k} = 8 \Rightarrow -(1-k)^3 + 3k \cdot (1-k) \cdot (3k+7) = 8k^3 \Rightarrow 15k^2 - 24k + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = \frac{12 \pm \sqrt{129}}{15}$. Stavolta i valori non sono accettabili, la sostituzione non fornisce soluzioni reali.

d) La somma dei quadrati si esprime come $\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \frac{c}{a} = \left(\frac{k-1}{k}\right)^2 - 2 \frac{3k+7}{k}$. Si deve perciò avere

$\left(\frac{k-1}{k}\right)^2 - 2 \frac{3k+7}{k} = -5 \Rightarrow (k-1)^2 - 2k \cdot (3k+7) = -5k^2 \Rightarrow -16k = -1 \Rightarrow k = \frac{1}{16}$. Anche stavolta valori non accettabili

Tenuto conto delle relazioni fra i coefficienti dell'equazione e le sue soluzioni, determinare gli eventuali valori del parametro reale m nelle equazioni seguenti in modo che sia verificato quanto richiesto

Livello 3

17. $4x^2 - mx + m^2 - 1 = 0$, la differenza fra le sue soluzioni sia uguale a 1.

[0]

18. $(3-m) \cdot x^2 + (4+7m) \cdot x - 2m + 1 = 0$, la somma dei quadrati delle soluzioni sia 4.

$$\left[\frac{-47 \pm \sqrt{131}}{41} \right]$$

19. $(m+2) \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1 + 5m = 0$, la differenza dei reciproci delle soluzioni sia -3 .

$$\left[\frac{-67 + 2 \cdot \sqrt{1061}}{245} \right]$$

20. $m \cdot x^2 - (3+m) \cdot x + 2 = 0$, la somma dei reciproci delle soluzioni sia 2.

[1]

Nelle seguenti equazioni parametriche di secondo grado determinare i valori del parametro reale k , se esistono, per cui le equazioni soddisfano le proprietà di seguito richieste. Nelle risposte se il valore è posto fra parentesi tonde non è accettabile, cioè l'equazione associata non ha soluzioni reali

21. $(k+1) \cdot x^2 + (k-1) \cdot x + k - 2 = 0$. a) la differenza delle soluzioni vale 1; b) la somma dei quadrati delle soluzioni vale 3; c) la somma dei reciproci delle soluzioni vale $\frac{18}{19}$; d) la somma dei cubi delle solu-

zioni vale 2.

$$\left[a) \sqrt{2}; b) \frac{\sqrt{17}-3}{4} \vee \frac{-\sqrt{17}-3}{4}; c) -1 \vee \frac{55}{37}; d) \left(-\frac{5}{3}\right) \vee \frac{1}{3} \right]$$

22. $(3-2k) \cdot x^2 - x + 1 - 5k = 0$. a) la somma dei quadrati delle soluzioni vale 2; b) la somma dei reciproci delle soluzioni vale 17; c) la differenza dei reciproci delle soluzioni vale 1.

$$\left[a) \frac{29 \pm \sqrt{197}}{28}; b) \frac{16}{85} \vee \frac{3}{2}; c) \frac{39 - \sqrt{741}}{65} \right]$$

23. $(3k+1) \cdot x^2 + (2k-11) \cdot x + 2 = 0$. a) la somma dei reciproci delle soluzioni vale 8; b) la somma dei quadrati delle soluzioni vale 12.

$$\left[a) -\frac{5}{2} \vee -\frac{1}{3}; b) \frac{-32 \pm \sqrt{3754}}{52} \right]$$

24. $(4k-7) \cdot x^2 + 3x + 1 = 0$. a) la somma dei quadrati delle soluzioni vale 9; c) la somma dei reciproci delle soluzioni vale 0.

$$\left[a) \frac{62 \pm \sqrt{82}}{54}; b) \emptyset \right]$$

25. $kx^2 + 3x - k = 0$. a) la somma dei quadrati delle soluzioni vale 2; b) la somma dei reciproci delle soluzioni vale 5; c) la somma dei quadrati dei reciproci delle soluzioni vale 15.

$$\left[a) \emptyset; b) \frac{3}{5} c) \pm \frac{3}{\sqrt{13}} \right]$$

Equazioni fratte

Così come si è fatto per le equazioni di primo grado, per le equazioni fratte di grado superiore, dobbiamo sempre verificare se sono accettabili i valori delle soluzioni trovate. Vediamo un esempio

Esempio 21

Risolvere l'equazione fratta: $\frac{4x+1}{x-1} + \frac{2+3x}{x+2} - \frac{x^2-x+1}{x^2+x-2} = 0$. Cominciamo a scomporre i denominatori:

$\frac{4x+1}{x-1} + \frac{2+3x}{x+2} - \frac{x^2-x+1}{(x-1) \cdot (x+2)} = 0$. Imponiamo la condizione di realtà: $x-1 \neq 0 \wedge x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \wedge x \neq -2$.

Adesso riportiamo il tutto a un'unica frazione: $\frac{(4x+1) \cdot (x+2) + (2+3x) \cdot (x-1) - (x^2-x+1)}{(x-1) \cdot (x+2)} = 0$, eliminiamo il

denominatore e semplifichiamo il numeratore: $4x^2 + 8x + x + 2 + 2x - 2 + 3x^2 - 3x - x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow 6x^2 +$

$9x - 1 = 0$. Risolviamo: $x = \frac{-9 \pm \sqrt{81+24}}{12} \Rightarrow \frac{-9 \pm \sqrt{105}}{12}$. Le soluzioni sono entrambe accettabili.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Risolvere $\frac{3}{x^2-4} + \frac{5}{x-1} = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$. Non vi è alcuna differenza nel risolvere un'equazione fratta o intera, se non nel fatto che, dopo aver determinato il minimo comune denominatore, dovremmo stabilire gli eventuali valori che lo annullano, eliminandoli dall'insieme delle soluzioni. Procediamo:

$$\frac{3}{(x-2) \cdot (x+2)} + \frac{5}{x-1} - \frac{x+1}{(x-1) \cdot (x-2)} = 0 \Rightarrow \frac{3 \cdot (x-1) + 5 \cdot (x-2) \cdot (x+2) - (x+1) \cdot (x+2)}{(x-2) \cdot (x+2) \cdot (x-1)} = 0$$

Imponiamo la condizione di realtà: $x-2 \neq 0 \wedge x+2 \neq 0 \wedge x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \wedge x \neq -2 \wedge x \neq 1$, eliminiamo il denominatore e sviluppiamo i calcoli al numeratore: $3x-3+5 \cdot (x^2-4) - (x^2+2x+x+2) = 0 \Rightarrow 3x-3+5x^2-20-x^2-3x-2 = 0 \Rightarrow 4x^2-25=0 \Rightarrow 4x^2=25 \Rightarrow x^2=\frac{25}{4} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{25}{4}} \Rightarrow x=\pm\frac{5}{2}$. Non essendo le soluzioni trovate tra quelle da escludere, sono accettabili.

Risolvere le seguenti equazioni fratte. Le soluzioni non accettabili saranno scritte fra parentesi graffe

Livello 1

- $a + \frac{2}{a} - 1 = 0$; $3x+1 - \frac{5}{3x} = 2$; $x - \frac{3}{x} + 5 = 0$ $\left[\emptyset; \frac{1 \pm \sqrt{21}}{6}; \frac{-5 \pm \sqrt{37}}{2} \right]$
- $2y+3 - \frac{4y-1}{4y+1} = 0$; $y-1 - \frac{6}{y-1} = 2$; $\frac{z+1}{z-1} - 2z = 1 - \frac{4}{z-1}$ $\left[\emptyset; 2 \pm \sqrt{7}; \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \right]$
- $\frac{m^2}{m-1} - \frac{m+5}{3} = \frac{3m-2}{m-1}$; $\frac{5n+1}{3n-1} - 2n+3 = \frac{3}{3n-1} + 1$ $\left[\frac{11}{2}, \{1\}; \frac{13 \pm \sqrt{73}}{12} \right]$
- $3y - \frac{2y+1}{y-1} = 1$; $2p+1 - \frac{1}{2p-1} = p-1$; $5x+2 - \frac{x+1}{x-1} = 0$ $\left[0 \vee 2; \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{4}; \frac{2 \pm \sqrt{19}}{5} \right]$

Livello 2

- $\frac{3}{x-2} + \frac{5}{x+2} = \frac{x^2+12x}{x^2-4}$; $z + \frac{\sqrt{2}}{z-\sqrt{2}} + 1 = 0$; $\frac{y^2-y+1}{y-\sqrt{3}} + y = 1$ $\left[\{-2\}; (\sqrt{2}-1 \vee 0); \emptyset \right]$
- $\frac{\sqrt{3}x-1}{x+1} = x-2$; $\frac{2x-1}{3x+1} = \frac{3x+1}{2x-1}$; $\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} = 2$ $\left[\frac{1+\sqrt{3} \pm \sqrt{8+2 \cdot \sqrt{3}}}{2}; (-2 \vee 0); -1 \pm \sqrt{2} \right]$
- $\frac{2x+1}{2x-1} - \frac{x+3}{x+1} = 3$; $\frac{3y-2}{3y+2} - \frac{y+5}{y-5} = \frac{y^2-y}{3y^2-13y-10}$; $\frac{x^2-x+1}{x^2-5x+6} - \frac{3x+1}{x-2} + \frac{1}{x-3} = 0$ $\left[\frac{-5 \pm \sqrt{193}}{12}; (-33 \vee 0); 2 \pm \sqrt{5} \right]$
- $\frac{2y^2-3}{y^2-2y+1} - \frac{5y+2}{y-1} + 2 = 0$; $\frac{5x+1}{4x-1} - \frac{3x-1}{5x+2} - \frac{x}{x+1} + \frac{7x^2-3x-2}{20x^2+3x-2} = 0$ $\left[\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}; \frac{-5 \pm \sqrt{34}}{18} \right]$
- $\frac{2x^2-x+3}{x^2-7x+10} - \frac{x+5}{x-5} = \frac{x+2}{x-2}$; $\frac{10x+4}{5x+1} = \frac{3x}{3x+4} + \frac{2x+1}{2x+7}$; $\frac{3x^2-x+1}{x^2-x-6} + \frac{3}{x-3} + 1 = 0$ $\left[23; \frac{-86 \pm \sqrt{3562}}{71}; \emptyset \right]$
- $\frac{3x+1}{2x+1} - \frac{5x-2}{3x-2} = \frac{x^2-x-1}{6x^2-x-2}$; $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = 0$; $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} - \frac{3}{x-3} = 0$ $\left[\frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}; \emptyset; \frac{3}{2} \right]$

$$11. \frac{x+1}{x^2-5x+6} + \frac{3x-2}{x^2-7x+10} = \frac{3x+1}{x^2-8x+15}; \frac{2x^2-1}{x^2-4} + \frac{x^2+1}{x^2+4} - 1 = 0 \quad \left[5 \pm \sqrt{22}; \emptyset\right]$$

Livello 3

$$12. \frac{x^3}{x^3+2} + \frac{3x^3-1}{2x^3+1} = 0; \frac{1}{x^4+x^2-1} - \frac{2}{x^4-x^2+1} = 0; \frac{x^5+2}{x^5-3} + \frac{x^5-4}{x^5+1} = \frac{x^{10}+12x^5-3}{x^{10}-2x^5-3}$$

$$\left[\sqrt[3]{\frac{-3 \pm \sqrt{19}}{5}}; \pm \sqrt{\frac{\sqrt{21}-3}{2}}; \sqrt[5]{8 \pm \sqrt{47}} \right]$$

$$13. \frac{x^6-1}{x^6-3} + \frac{2x^6-3}{x^6-5} - 1 = 0; \frac{3x^4+2}{x^2+7} + \frac{4x^4+7}{x^2+1} - \frac{x^6+31x^4-x^3+9x^2+51}{x^4+8x^2+7} = 0 \quad \left[\pm \sqrt[6]{\frac{7+\sqrt{57}}{2}}; \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{6}} \vee 0\right) \right]$$

$$14. \frac{x^4-x^2+1}{x^4+x^2+1} + \frac{x^4+x^2-1}{x^4-x^2-1} - 2 = 0; \frac{3x^6+2x^3-1}{2x^6+3x^3+1} - \frac{4x^6+x^3-1}{x^6+x^3-1} + \frac{5x^9}{2x^9+3x^6-x^3-1} = 0 \quad \left[0; \sqrt[3]{\frac{-3 \pm \sqrt{41}}{8}} \right]$$

$$15. \frac{5}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-4} + \frac{3}{x^2-9} = 0; \frac{8}{x^3+2} - \frac{5}{x^3-1} - \frac{4}{x^3-3} = 0 \quad \left[\pm \sqrt{\frac{15 \pm 2 \cdot \sqrt{6}}{3}}; \sqrt[3]{\frac{-31 \pm \sqrt{1209}}{2}} \right]$$

$$16. \frac{1}{x^6-1} + \frac{1}{x^6-2} - \frac{3}{x^6-3} = 0; 1 - \frac{1}{x^8-x^4} + \frac{1}{x^8+x^4} = 0 \quad \left[\pm \sqrt[12]{3}; 0 \right]$$

Equazioni irrazionali

Potrebbe capitare talvolta di risolvere equazioni in cui le incognite si trovano all'interno di radicali. Definiamo tali equazioni.

Definizione 11

Un'equazione in cui l'incognita compare all'interno di un radicale non apparente si dirà **equazione irrazionale**.

Vediamo subito un esempio.

Esempio 22

Risolvere l'equazione $\sqrt{2x} - 5 = 0$. Il buon senso e l'esperienza ci suggeriscono di scrivere l'equazione nel modo seguente: $\sqrt{2x} = 5$. A questo punto innalzare al quadrato entrambi i membri può essere una buona idea, otteniamo così: $2x = 25 \Rightarrow x = \frac{25}{2}$. Verifichiamo: $\sqrt{2^1 \cdot \frac{25}{2^1}} = 5 \Rightarrow \sqrt{25} = 5$.

Sembra quindi che un modo per risolvere equazioni irrazionali consista nell'eliminare i radicali con opportuni elevamenti a potenza. Naturalmente la prima cosa da chiedersi è se questo procedimento sia lecito e, soprattutto, se riesca a fornirci le soluzioni cercate. A tal riguardo è valido il seguente risultato.

Teorema 9

L'insieme delle soluzioni reali dell'equazione $f(x) = g(x)$ è contenuto nell'insieme delle soluzioni reali dell'equazione $[f(x)]^n = [g(x)]^n$ se n rappresenta un numero naturale pari; i due insiemi coincidono se $f(x)$ e $g(x)$ sono di segno concorde.

Gli insiemi delle soluzioni reali delle equazioni $f(x) = g(x)$ e $[f(x)]^n = [g(x)]^n$ coincidono se n rappresenta un numero naturale dispari.

Vediamo di comprendere meglio il significato del teorema precedente.

Esempio 23

Consideriamo l'equazione di primo grado $x = 1$, che ha ovviamente l'unica soluzione $x = 1$. Innalziamo entrambi i membri al quadrato. Otteniamo così l'equazione binomia $x^2 = 1$, che ha invece due soluzioni reali: $x = \pm 1$, delle quali però una sola coincide con quella dell'equazione di partenza.

Se invece avessimo innalzato alla terza avremmo avuto: $x^3 = 1 \Rightarrow x^3 - 1 = 0 \Rightarrow (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) = 0$, che ha l'unica soluzione reale $x = 1$, dato che il secondo fattore ha delta negativo.

Il Teorema 9, fornisce quindi un metodo pratico per risolvere un'equazione irrazionale. Dopo aver isolato un radicale, si effettuano operazioni di innalzamento a potenza di entrambi i membri, anche ripetuti, fino a ottenere un'equazione razionale. Le sue eventuali soluzioni saranno soluzioni dell'equazione di partenza se abbiamo innalzato solo a potenze dispari, dovranno invece essere verificate se abbiamo innalzato almeno una volta a esponente pari. Vediamo ancora qualche esempio.

Esempio 24

Risolvere l'equazione $\sqrt{x+1} - 2x + 3 = 0$. Isoliamo il radicale: $\sqrt{x+1} = 2x - 3$. Innalziamo al quadrato entrambi i membri: $x+1 = (2x-3)^2 \Rightarrow x+1 = 4x^2 - 12x + 9 \Rightarrow 4x^2 - 13x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 128}}{8} = \frac{13 \pm \sqrt{41}}{8}$

Verifichiamo i risultati ottenuti.

$$\sqrt{\frac{13 - \sqrt{41}}{8}} + 1 - 2 \cdot \frac{13 - \sqrt{41}}{8} + 3 = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{13 - \sqrt{41} + 8}{8}} + \frac{\sqrt{41} - 13 + 12}{4} = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{21 - \sqrt{41}}{8}} + \frac{\sqrt{41} - 1}{4} = 0$$

Possiamo subito dire che la precedente è una contraddizione, poiché entrambi gli addendi sono numeri positivi, quindi la loro somma non può essere zero. Passiamo alla verifica dell'altra soluzione ottenuta.

$$\sqrt{\frac{13+\sqrt{41}}{8}}+1-\sqrt{\frac{13+\sqrt{41}}{8}}+3=0 \Rightarrow \sqrt{\frac{13+\sqrt{41}+8}{8}}+\frac{-13-\sqrt{41}+12}{4}=0 \Rightarrow \sqrt{\frac{21+\sqrt{41}}{8}}-\frac{\sqrt{41}+1}{4}=0 \Rightarrow \sqrt{\frac{21+\sqrt{41}}{8}}=\frac{1+\sqrt{41}}{4}$$

Come si nota abbiamo ottenuto una scrittura alquanto laboriosa da trattare. Conviene innalzare al quadrato il secondo termine per stabilire se coincide con il radicando del primo membro.

$$\left(\frac{1+\sqrt{41}}{4}\right)^2 = \frac{1+2\cdot\sqrt{41}+41}{16} = \frac{42+2\cdot\sqrt{41}}{16} = \frac{21+\sqrt{41}}{8}$$

Quindi solo la seconda soluzione è accettabile.

Ancora degli esempi.

Esempio 25

- Risolvere l'equazione $\sqrt{2x-1}+1-\sqrt{3x+1}=0$. Trasportiamo uno dei radicali al secondo membro: $\sqrt{2x-1}+1=\sqrt{3x+1}$; innalziamo al quadrato $2x-1+2\cdot\sqrt{2x-1}+1=3x+1 \Rightarrow 2\cdot\sqrt{2x-1}=x+1$; al quadrato ancora: $4\cdot(2x-1)=(x+1)^2 \Rightarrow 8x-4=x^2+2x+1 \Rightarrow x^2-6x+5=0 \Rightarrow x=3\pm\sqrt{9-5}=3\pm 2=\begin{cases} 3-2=1 \\ 3+2=5 \end{cases}$.

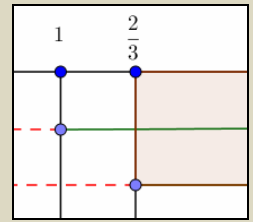
Verifichiamo le soluzioni: $\sqrt{2\cdot 1-1}+1-\sqrt{3\cdot 1+1}=0 \Rightarrow \sqrt{1}+1-\sqrt{4}=0 \Rightarrow 1+1-2=0 \Rightarrow 0=0$, accettabile; e $\sqrt{2\cdot 5-1}+1-\sqrt{3\cdot 5+1}=0 \Rightarrow \sqrt{9}+1-\sqrt{16}=0 \Rightarrow 3+1-4=0 \Rightarrow 0=0$, anch'essa accettabile. L'equazione data ha perciò due soluzioni reali.

- Consideriamo l'equazione $\sqrt{1-x}+2-\sqrt{x-5}=0$. Piuttosto che applicare meccanicamente il metodo risolutivo, consideriamo che all'interno dei radicali quadratici i radicandi non devono essere negativi, deve cioè accadere che $\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x-5 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 5 \end{cases}$. È immediato notare che il sistema non ha soluzioni reali, e così anche l'equazione di partenza, dato che non esistono numeri reali che rendano reali entrambi i radicali.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Risolvere l'equazione $\sqrt{x+1} = \sqrt{3x-2}$. Per prima cosa studiamo l'insieme di esistenza dell'equazione, dato



dalla soluzione del seguente sistema di disequazioni lineari: $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 3x-2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq \frac{2}{3} \end{cases}$

Perciò le soluzioni devono verificare la condizione $x \geq \frac{2}{3}$. Adesso possiamo innalzare al quadrato entrambi i

membri dell'equazione: $x+1 = 3x-2 \Rightarrow x-3x = -2-1 \Rightarrow -2x = -3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$. Dato che la soluzione ottenuta verifica la condizione di realtà, è accettabile. A questo punto la verifica non è necessaria, ma la ef-

fettuiamo ugualmente: $\sqrt{\frac{3}{2}+1} = \sqrt{3 \cdot \frac{3}{2}-2} \Rightarrow \sqrt{\frac{3+2}{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}-2} \Rightarrow \sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

Risolvere le seguenti equazioni irrazionali, verificando i risultati ottenuti, le soluzioni fra parentesi non sono accettabili

Livello 1

1. $\sqrt{2x-1} = 3; 4 - \sqrt{11x+2} = 0; x - \sqrt{3x-2} = 0; \sqrt{-x+5} = 1; 2x-1 = \sqrt{x+1}$ $\left[5; \frac{14}{11}; 1 \vee 2; 4; \frac{5}{4}\right]$
2. $; 4 = 3x - \sqrt{x+1}; \sqrt{11x+5} = -7; 5x+2 = 3 \cdot \sqrt{4x-1}$ $\left[\frac{5}{4}; \frac{25+\sqrt{85}}{18}; \left(\frac{25-\sqrt{85}}{18}\right); (4); \emptyset\right]$
3. $3-x = 2 \cdot \sqrt{1-x}; \sqrt{x^2+3} = 2; \sqrt{3-x^2+x} = x-1; 1+5 \cdot \sqrt{x^2-1+x} = 0$ $\left[\emptyset; \pm 1; 2; \left(-\frac{1}{2}\right); \left(\frac{-5 \pm \sqrt{129}}{10}\right)\right]$
4. $\sqrt{x^2-x+1} = 4; \sqrt{3x^2-1} = 2x+3; x = 3 \cdot \sqrt{7-x^2}$ $\left[\frac{1 \pm \sqrt{61}}{2}; \frac{6 \pm \sqrt{86}}{5}; \frac{3 \cdot \sqrt{70}}{10}; \left(-\frac{3 \cdot \sqrt{70}}{10}\right)\right]$
5. $\sqrt[3]{2x+3} = 1; \sqrt[3]{x^3-x^2+1} = x; 2x+1 = \sqrt[3]{8x^3-x^2+1}; \sqrt[3]{4x+5} = -2$ $\left[-1; \pm 1; -\frac{6}{13} \vee 0; -\frac{13}{4}\right]$
6. $\sqrt[3]{11x+1} = 0; 2 = \sqrt[4]{x^2-3x+1}; \sqrt[3]{4x^2+13} = -5; \sqrt[3]{x^2+x-1} = 1$ $\left[-\frac{1}{11}; \frac{3 \pm \sqrt{65}}{2}; \emptyset; -2 \vee 1\right]$
7. $\sqrt[5]{x^2-1} = -3; \sqrt[4]{x+1} = 3; \sqrt[3]{x^2+x} = x; \sqrt[6]{5x+1} = 3; \sqrt[5]{x+2} = 2$ $\left[\emptyset; 80; \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \vee 0; \frac{728}{5}; 30\right]$
8. $\sqrt[4]{x^4-x^2-2x+1} = x; \sqrt[7]{3x^2-x-1} = -1; \sqrt{7x+2} = \sqrt{x-1}$ $\left[\sqrt{2}-1, (-\sqrt{2}-1); 0 \vee \frac{1}{3}; \left(-\frac{1}{2}\right)\right]$
9. $\sqrt{4x+1} - \sqrt{x+2} = 0; 3 \cdot \sqrt{5x-2} = \sqrt{7x-3}; \sqrt{4x-1} = 2 \cdot \sqrt{x+3}; \sqrt{x^2+1} - \sqrt{2x^2+1} = 0$ $\left[\frac{1}{3}; \left(\frac{15}{38}\right); \emptyset; 0\right]$
10. $\sqrt{x^2+5x-1} = \sqrt{2x^2-x+2}; \sqrt{9x-18} = 3 \cdot \sqrt{x-2}; 4 \cdot \sqrt{x+1} - 3 \cdot \sqrt{x^2+x} = 0$ $\left[3 \pm \sqrt{6}; \forall x \in \mathbb{R}; -1 \vee \frac{16}{9}\right]$
11. $\sqrt{2x^2+x+3} = \sqrt{3x^2-2x+1}; \sqrt{x^2-1} = \sqrt{3x^2-x+2}; \sqrt{3x+1} - 3 \cdot \sqrt{x^2-2x+1} = 0$ $\left[\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}; \emptyset; x = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{6}\right]$

12. $\sqrt{4x^2-4x+1}=\sqrt{x+2}$; $\sqrt{x^2-x-1}=\sqrt{3x+1}$; $\sqrt{5x^2-x}=2\cdot\sqrt{x^2+x-1}$ $\left[\frac{5\pm\sqrt{41}}{8}; 2\pm\sqrt{6}; 1\vee 4\right]$
13. $\sqrt{5x^2+6x+1}=\sqrt{x+2}$; $\sqrt[3]{2x+1}=\sqrt[3]{x^2+x}$; $\sqrt[4]{2x^2+3}=\sqrt[4]{5x^2-x}$ $\left[\frac{-5\pm 3\cdot\sqrt{5}}{10}; \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}; \frac{1\pm\sqrt{37}}{6}\right]$
14. $\sqrt[5]{x+3}=\sqrt[5]{3x^2+2}$; $\sqrt[3]{x^2+x+2}=\sqrt[3]{7x+2}$; $\sqrt[4]{3x^2+2x-1}=\sqrt[4]{x^2-2x+3}$; $2\cdot\sqrt[5]{x^2+2}=\sqrt[5]{3x^2-x+2}$.
 $\left[\frac{1\pm\sqrt{13}}{6}; 0\vee 6; -1\pm\sqrt{3}; \emptyset\right]$

Livello 2

15. $\sqrt{x^2-1}=\sqrt[4]{3x^2-1}$; $\sqrt[4]{x^2+x-3}=\sqrt{2x-3}$; $\sqrt[3]{x^2+1}=\sqrt[6]{x^4-x^2+1}$ $[\emptyset; 3; 0]$
16. $\sqrt[4]{3x^6+x^3+1}=\sqrt{x^3+2}$; $\sqrt[4]{5x^2-1}=\sqrt{x^2-3}$; $\sqrt[8]{x^6+x^3-1}=\sqrt[4]{2x^3-5}$ $\left[\sqrt[3]{\frac{3\pm\sqrt{33}}{4}}; \pm\sqrt{10}; \sqrt[3]{\frac{21+\sqrt{129}}{6}}\right]$

Lavoriamo insieme

Risolvere l'equazione $\sqrt{3x+1}-2\cdot\sqrt{4x-1}=1$. Stavolta una sola razionalizzazione non è sufficiente a risolvere il problema. L'insieme di esistenza delle soluzioni si trova risolvendo il sistema $\begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ 4x-1 \geq 0 \end{cases}, x \geq \frac{1}{4}$.

Adesso procediamo con la risoluzione, isolando un radicale: $\sqrt{3x+1}=2\cdot\sqrt{4x-1}+1$. Innalziamo al quadrato ambo i membri: $(\sqrt{3x+1})^2=(2\cdot\sqrt{4x-1}+1)^2 \Rightarrow 3x+1=4\cdot(4x-1)+4\cdot\sqrt{4x-1}+1$.

Semplifichiamo e isoliamo il radicale: $3x+1-16x+4-1=4\cdot\sqrt{4x-1} \Rightarrow -13x+4=4\cdot\sqrt{4x-1}$. Innalziamo al quadrato: $(-13x+4)^2=(4\cdot\sqrt{4x-1})^2 \Rightarrow 169x^2-104x+16=16\cdot(4x-1) \Rightarrow 169x^2-168x+32=0$.

Risolviamo quest'ultima equazione: $x=\frac{84\pm 4\cdot\sqrt{103}}{169}$. Infine la verifica dice che è soluzione soltanto

$$x=\frac{84-4\cdot\sqrt{103}}{169}.$$

Risolvere le seguenti equazioni irrazionali, razionalizzando più volte, ove necessario**Livello 1**

17. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}=1$; $\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+3}=2$; $\sqrt{3-x}-2=\sqrt{4x+7}$ $\left[\emptyset; 7-2\cdot\sqrt{13}; \frac{-8-4\cdot\sqrt{79}}{25}\right]$
18. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}=1$; $\sqrt{2x+3}+2\cdot\sqrt{4x+5}=3$; $x=-1$; $\sqrt{x-1}=1+\sqrt{3x+1}$ $[7; -1; \emptyset]$
19. $\sqrt{x+2}+5=\sqrt{4x+1}$; $\sqrt{5x+1}+2\cdot\sqrt{3x-1}=4$; $\sqrt{x^2-x+1}-2=\sqrt{x^2+x-3}$ $\left[x=\frac{238}{9}; \frac{307-32\cdot\sqrt{74}}{49}; -\frac{2+2\cdot\sqrt{10}}{3}\right]$
20. $\sqrt{4x-2}=\sqrt{2x-4}+3$; $\sqrt{8x+1}-3=\sqrt{x+3}$; $\sqrt{2x^2-1}+\sqrt{2x^2+7x+3}=5$
 $\left[\frac{25+12\cdot\sqrt{3}}{2}; \frac{95+6\cdot\sqrt{233}}{49}; \frac{-147\pm 10\cdot\sqrt{1033}}{151}\right]$

Livello 2

21. $\sqrt{x-5}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{x+3}$; $2\cdot\sqrt{11x+1}-\sqrt{9x+2}-\sqrt{x+4}=0$; $\sqrt{3x+5}-\sqrt{7x+1}-\sqrt{8x+2}=0$
 $\left[\emptyset; \frac{18+\sqrt{814}}{70}; \frac{\sqrt{269}-17}{20}\right]$
22. $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=\sqrt{2x+1}$; $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}=0$; $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}=\sqrt{4-x}$ $\left[\frac{5+\sqrt{41}}{4}; \frac{2+2\cdot\sqrt{7}}{3}; \emptyset\right]$

$$\begin{aligned}
 23. \quad & \sqrt{2x+3} - \sqrt{8x+5} = \sqrt{5x-1} ; \sqrt{3x+2} + \sqrt{4x+7} = \sqrt{x+5} ; \sqrt{2x-9} - \sqrt{9x+2} = \sqrt{6x+1} \\
 & \left[\emptyset; -\frac{2}{3}; \frac{114-2 \cdot \sqrt{4847}}{47} \right] \\
 24. \quad & \sqrt{8x-3} + \sqrt{7x-2} = \sqrt{x+11} ; \sqrt{4x-12} + 2 \cdot \sqrt{x-2} = \sqrt{9x+1} ; \sqrt{3x-2} - 3 \cdot \sqrt{2x+3} = \sqrt{x+2} \\
 & \left[\frac{\sqrt{7249}-75}{14}; \frac{181+16 \cdot \sqrt{142}}{63}; \emptyset \right]
 \end{aligned}$$

Sistemi di equazioni non lineari

Risolviamo qualche sistema di equazioni di grado superiore al primo. Utilizzeremo il metodo di sostituzione, dato che abbiamo verificato che esso può applicarsi alla risoluzione di qualsiasi sistema di equazioni. Ci limiteremo a considerare solo sistemi di equazioni a due incognite.

Esempio 1

Risolvere il sistema $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x^2 + xy - 3 = 0 \end{cases}$. Ricaviamo rispetto a una incognita nella prima equazione e

sostituiamo nella seconda: $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ x^2 + x(2x + 3) - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ x^2 + 2x^2 + 3x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ 3x^2 + 3x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ x^2 + x - 1 = 0 \end{cases}$. La

seconda equazione ha le soluzioni: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, quindi anche il sistema ha due soluzioni, che

otteniamo sostituendo i precedenti valori nella prima equazione: $\begin{cases} y = 2 \cdot \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} + 3 \\ x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$ e

$$\begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ y = 2 \cdot \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ y = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Alcuni sistemi possono risolversi con particolari artifici.

Esempio 2

Risolvere il sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = -7 \end{cases}$. In questo caso, piuttosto che andare a sostituire i valori, possiamo pensare

alla risoluzione del sistema come al problema di trovare due numeri dei quali sono noti la somma e il prodotto. Questo problema equivale a risolvere un'equazione di secondo grado, alla cui variabile possiamo associare un simbolo qualsiasi, per esempio z . L'equazione può essere così espressa: $z^2 - 3z - 7 = 0$.

Risolviamo: $z = \frac{3 \pm \sqrt{9+28}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{2}$. Quindi le soluzioni del sistema sono: $\begin{cases} x = \frac{3 - \sqrt{37}}{2} \\ y = \frac{3 + \sqrt{37}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{37}}{2} \\ y = \frac{3 - \sqrt{37}}{2} \end{cases}$.

Abbiamo scritto le soluzioni simmetricamente per la proprietà commutativa della somma e del prodotto.

Tenuto conto dei risultati del precedente esempio stabiliamo la seguente definizione.

Definizione 1

Un sistema di due o più equazioni in due incognite x e y si dice **simmetrico** se scambiando fra loro i nomi delle incognite il sistema non cambia.

Esempio 3

- Il sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 3xy - x^2 - 2 = 0 \end{cases}$ non è simmetrico, infatti scambiando i nomi delle incognite esso diviene $\begin{cases} y^2 + x^2 = 5 \\ 3yx - y^2 - 2 = 0 \end{cases}$, evidentemente diverso dal precedente.

- È invece simmetrico il seguente sistema: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ 3xy - 2 = 0 \end{cases}$.

Vale il seguente ovvio risultato.

Teorema 1

Un sistema simmetrico in due variabili, che ammette le soluzioni $(x = a, y = b)$, ammette anche le soluzioni $(x = b, y = a)$.

La dimostrazione del precedente teorema segue dalla stessa definizione di sistema simmetrico.

In alcuni sistemi è conveniente applicare un altro metodo che illustriamo nel seguente esempio.

Esempio 4

Risolvere il seguente sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 - x + y - 1 = 7 \\ x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0 \end{cases}$. Applicare il metodo di sostituzione in questo caso

conduce alla risoluzione di un'equazione irrazionale, infatti non riusciamo a ricavare da nessuna delle due equazioni l'incognita x o y senza introdurre radici quadrate. Ci accorgiamo però che i termini di secondo grado, che sono quelli che *complicano* il sistema, compaiono con gli stessi segni, sia nella prima sia nella seconda equazione. Allora sottraiamo la seconda equazione dalla prima, secondo un'operazione del tutto lecita $x^2 + y^2 - x + y - 1 - (x^2 + y^2 + 2x - 1) = 7 - 0$, ottenendo l'equazione di primo grado $-3x + y - 7 = 0$.

Mettiamo a sistema tale equazione con una delle due equazioni, ottenendo così $\begin{cases} -3x + y - 7 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0 \end{cases}$.

Risolviamo con il metodo di sostituzione: $\begin{cases} y = 3x + 7 \\ x^2 + (3x + 7)^2 + 2x - 1 = 0 \end{cases}$. Risolviamo la seconda equazione: x^2

$$+ 9x^2 + 42x + 49 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow 10x^2 + 44x + 48 = 0 \Rightarrow 5x^2 + 22x + 24 = 0 \Rightarrow x = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 120}}{5} =$$

$$\frac{-11 \pm 1}{5} \Rightarrow x_1 = -2 \text{ e } x_2 = -\frac{12}{5}. \text{ Sostituiamo tali valori nel sistema e otteniamo le soluzioni cercate, cioè:}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ y_1 = 3 \cdot (-2) + 7 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = -\frac{12}{5} \\ y_2 = 3 \cdot \left(-\frac{12}{5}\right) + 7 = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

Verifiche

Lavoriamo insieme

Risolvere il sistema: $\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ x^2 - xy + y - 2 = 0 \end{cases}$. Finché è possibile applicarlo, il metodo di sostituzione rimane il

più efficace. In questo caso conviene ricavare il valore della y dalla prima equazione, poiché così facendo otterremo calcoli più semplici. Infatti ricavando la x per sostituirne il valore, dovremmo sviluppare un

quadrato di binomio. $\begin{cases} -3y = -2x - 1 \\ x^2 - xy + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{-2x-1}{-3} \\ x^2 - y \cdot (x-1) - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{2x+1}{3} \\ x^2 - \frac{2x+1}{3} \cdot (x-1) - 2 = 0 \end{cases}$. Risolviamo

la seconda equazione nell'incognita x : $x^2 - \frac{2x^2 - 2x + x - 1}{3} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{3x^2 - 2x^2 + 2x - x + 1 - 6}{3} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+20}}{2} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$. I due valori trovati si sostituiscono nell'espressione di

y , completando la risoluzione: $\begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{21}}{2} \\ y = \frac{2 \cdot \frac{-1+\sqrt{21}}{2} + 1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{21}}{2} \\ y = \frac{2 \cdot \frac{-1+\sqrt{21}}{2} + 1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{21}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{21}}{3} \end{cases}$ oppure

$\begin{cases} x = \frac{-1-\sqrt{21}}{2} \\ y = \frac{2 \cdot \frac{-1-\sqrt{21}}{2} + 1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1-\sqrt{21}}{2} \\ y = \frac{-1-\sqrt{21}+1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1-\sqrt{21}}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{21}}{3} \end{cases}$.

Risolvere i seguenti sistemi di grado superiore al primo. Le soluzioni sono scritte ordinate, prima quella relativa a x , poi quella a y

Livello 1

$$11. \quad \begin{cases} x + 3y = 6 \\ xy - 2x + 4y - 1 = 0 \end{cases}; \begin{cases} 4x + 3y = 32 \\ 2xy - x^2 + y + 69 = 0 \end{cases}; \begin{cases} 5x + y^2 + 1 = 0 \\ x - 3y - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\left(\left\{ -7; \frac{13}{3} \right\} \vee \{3; 1\} \right); \left(\frac{30 \mp \sqrt{3529}}{11}; \frac{4 \cdot (58 \pm \sqrt{3529})}{33} \right); (\{-29; -12\} \vee \{-2; -3\}) \right]$$

$$12. \quad \begin{cases} 5x + y = 50 - y^2 \\ x^2 - xy - 12 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x^2 - y^2 + \frac{91}{36} = 0 \\ 5x + y - 5 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x + y = 11 \\ xy = 7 \end{cases}; \begin{cases} x + y = 13 \\ xy + 17 = 0 \end{cases}$$

$$\left[(\{-12; -11\} \vee \{\pm\sqrt{2}; \mp 5 \cdot \sqrt{2}\} \vee \{6; 4\}); (\emptyset); \left(\frac{11 \pm \sqrt{93}}{2}; \frac{11 \mp \sqrt{93}}{2} \right); \left(\frac{13 \pm \sqrt{237}}{2}; \frac{13 \mp \sqrt{237}}{2} \right) \right]$$

$$13. \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 - xy - y + 1 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x - y = 3 \\ xy + x^2 + y^2 = 1 \end{cases}; \begin{cases} x + y = 13 \\ xy - x^2 = 1 \end{cases} \quad \left[(0; 1); (\emptyset); \left(\frac{13 \pm \sqrt{161}}{4}; \frac{39 \mp \sqrt{161}}{4} \right) \right]$$

Lavoriamo insieme

Risolvere il sistema simmetrico: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy + 6 = 0 \end{cases}$. Appliciamo l'artificio di costruire il quadrato di binomio

nella prima equazione: $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy - 2xy = 13 \\ xy = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 13 \\ xy = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2 \cdot (-6) = 13 \\ xy = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 1 \\ xy = -6 \end{cases}$

Così il sistema di partenza è equivalente ai due sistemi: $\begin{cases} x+y = -1 \\ xy = -6 \end{cases} \vee \begin{cases} (x+y) = 1 \\ xy = -6 \end{cases}$, ossia alle equazioni seguenti (scegliamo sempre z come nome della variabile): $z^2 + z - 6 = 0$ e $z^2 - z - 6 = 0$, che ammettono rispettivamente le soluzioni: $z = -3, 2$ e $z = -2, 3$. Quindi le soluzioni del sistema sono:

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}.$$

Risolvere i seguenti sistemi non lineari, con opportuni artifici

Livello 1

14. $\begin{cases} x+y = 11 \\ x^2 y^2 = 4 \end{cases}; \begin{cases} x+y = 13-3xy \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}; \begin{cases} x+2y-3 = 0 \\ x^2 + xy - 2y^2 = 6 \end{cases}$

$$\left[\left(\left\{ \frac{11 \pm \sqrt{129}}{2}; \frac{11 \mp \sqrt{129}}{2} \right\} \vee \left\{ \frac{11 \pm \sqrt{113}}{2}; \frac{11 \mp \sqrt{113}}{2} \right\} \right); (\{1; 3\} \vee \{3; 1\}); \left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3} \right) \right]$$

15. $\begin{cases} xy - x - y - 7 = 0 \\ x^2 + y^2 = 34 \end{cases}; \begin{cases} 2x - 3y - 17 = 0 \\ x^2 - y^2 = 48 \end{cases}; \begin{cases} x^2 - 4x + y^2 + 4 = 9 \\ y^2 + x^2 + 2y - 8 = 0 \end{cases}$

$$\left[\left(\{-3 \pm 2 \cdot \sqrt{2}; -3 \mp 2 \cdot \sqrt{2}\} \vee \{3; 5\} \vee \{5; 3\} \right); \left(\left\{ -\frac{103}{5}; -\frac{97}{5} \right\} \vee \{7; -1\} \right); \left(\frac{10 \pm \sqrt{155}}{10}; \frac{-5 \mp 2 \cdot \sqrt{155}}{10} \right) \right]$$

16. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ xy - 1 = 0 \end{cases}; \begin{cases} 9x^2 + 4y^2 = 36 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases}; \begin{cases} 5x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 + 5y^2 = 5 \end{cases}$

$$\left[\left(\left\{ \frac{\pm(\sqrt{5}+1) \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{5}-2}}{4}; \mp \frac{\sqrt{2 \cdot \sqrt{5}-2}}{2} \right\}; (\emptyset); \left(\left\{ \pm \frac{\sqrt{30}}{6}; \pm \frac{\sqrt{30}}{6} \right\} \vee \left\{ \pm \frac{\sqrt{30}}{6}; \mp \frac{\sqrt{30}}{6} \right\} \right) \right]$$

17. $\begin{cases} 7x^2 + 9y^2 = 63 \\ 7x^2 - 9y^2 = 63 \end{cases}; \begin{cases} xy = 3 \\ xy + 2 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x^2 + 2x + y^2 - 2y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x = 2y \end{cases}$ $[(\pm 3; 0); (\emptyset); (\emptyset)]$

Livello 2

18. $\begin{cases} x+y = 1-xy \\ x^2 y^2 = 2-xy \end{cases}$ *Suggerimento:* risolvere la seconda equazione nell'incognita $z = xy$ $\left[\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}; \frac{3 \mp \sqrt{17}}{2} \right]$

19. $\begin{cases} 400x^2 + 400y^2 - 1009 = 0 \\ 20xy - 21 = 0 \end{cases}$ *Suggerimento:* completare il quadrato nella prima equazione

$$\left[\left(\left\{ \pm \frac{7}{5}; \pm \frac{3}{4} \right\} \vee \left\{ \pm \frac{3}{4}; \pm \frac{7}{5} \right\} \right) \right]$$

Lavoriamo insieme

Risolvere il seguente sistema simmetrico $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$. Anche qui applichiamo un artificio, scomponendo

la somma di due cubi nella prima equazione: $\begin{cases} (x+y) \cdot (x^2 - xy + y^2) = 7 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) \cdot (x^2 - xy + y^2) = 7 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 - 3xy = 7 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 3xy = 7 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1)^2 - 3xy = 7 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3xy = -6 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = -2 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow z^2 - z - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Risolvere i seguenti sistemi non lineari, con opportuni artifici

Livello 2

$$20. \quad \begin{cases} x^3 + y^3 - 35 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}; \begin{cases} 4x + 4y - 1 = 0 \\ 16xy + 91 = 16x^2 + 16y^2 \end{cases}; \begin{cases} x^4 + y^4 = \frac{337}{1296} \\ x^2 + y^2 = \frac{25}{36} \end{cases}$$

$$\left[\left(\frac{12 \pm \sqrt{57}}{6}; \mp \frac{12 \mp \sqrt{57}}{6} \right); \left(\frac{1 \pm \sqrt{30}}{4}; \frac{1 \mp \sqrt{30}}{4} \right); \left(\left\{ -\frac{2}{3}; \pm \frac{1}{2} \right\} \vee \left\{ \frac{1}{2}; \pm \frac{2}{3} \right\} \vee \left\{ \frac{2}{3}; \pm \frac{1}{2} \right\} \vee \left\{ -\frac{1}{2}; \pm \frac{2}{3} \right\} \right) \right]$$

$$21. \quad \begin{cases} x^4 - y^4 = 3 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}; \begin{cases} x^4 + y^4 = 17 \\ x^2 y^2 = 4 \end{cases}; \begin{cases} x^6 - y^6 = 7 \\ x^3 + y^3 = 1 \end{cases}$$

$$\left[\left(\left\{ \pm \sqrt{2}; 1 \right\} \vee \left\{ \pm \sqrt{2}; -1 \right\} \right); \left(\left\{ \pm 2; 1 \right\} \vee \left\{ \pm 2; -1 \right\} \vee \left\{ \pm 1; -2 \right\} \vee \left\{ \pm 1; 2 \right\} \right); \left(\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{3} \right) \right]$$

Livello 3

$$22. \quad \begin{cases} x^6 - y^6 = 11 \\ x^3 - y^3 = -4 \end{cases}; \begin{cases} (3x - 5y)^2 + (7x - y)^2 = 25 \\ (3x - 5y) \cdot (7x - y) = 12 \end{cases}; \begin{cases} (11x - 3y)^3 + (12x + 5y)^3 = 26 \\ (11x - 3y) \cdot (12x + 5y) = -3 \end{cases}$$

$$\left[\left(-\frac{3}{2}; \frac{\sqrt[3]{5}}{2} \right); \left(\left\{ \pm \frac{17}{32}; \mp \frac{9}{32} \right\} \vee \left\{ \pm \frac{11}{32}; \mp \frac{19}{32} \right\} \right); \left(\left\{ \frac{4}{91}; \frac{45}{91} \right\} \vee \left\{ \frac{12}{91}; -\frac{47}{91} \right\} \right) \right]$$

$$23. \quad \begin{cases} (2x - y)^6 - (x + 3y)^6 = 1 \\ (2x - y)^3 + (x + 3y)^3 = 1 \end{cases}; \begin{cases} (x + y - 1)^6 - (x - y + 1)^6 = 2 \\ (x + y - 1)^3 - (x - y + 1)^3 = 5 \end{cases} \quad \left[\left(\frac{3}{7}; -\frac{1}{7} \right); \left(\frac{9 - \sqrt[3]{23}}{7 \cdot \sqrt[3]{10}}; \frac{3 - 2 \cdot \sqrt[3]{23}}{7 \cdot \sqrt[3]{10}} \right) \right]$$

Quelli che vogliono sapere di più

La regola dei segni di Cartesio

Abbiamo già trovato una relazione fra i coefficienti di un'equazione di secondo grado e la somma o il prodotto delle sue soluzioni; ora vogliamo stabilire invece una relazione fra i coefficienti dell'equazione e il segno delle sue soluzioni. Cominciamo a fornire la terminologia.

Definizione 12

Consideriamo i segni dei coefficienti a , b e c di un'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$; diciamo che in tale successione vi è una **permanenza** se i segni di due coefficienti consecutivi sono uguali, vi è una **variazione** se sono diversi.

Esempio 26

- Nell'equazione $3x^2 + x - 1 = 0$ vi sono una permanenza, $(+ 3 \text{ e } +1)$, e una variazione, $(+1, -1)$.
- Nell'equazione $6x^2 - 7x + 1 = 0$ vi sono due variazioni, $(+6, -7)$ e $(-7, +1)$.
- Nell'equazione $9x^2 + 11x + 8 = 0$ vi sono due permanenze, $(+9, +11)$ e $(+11, +8)$.

Adesso possiamo enunciare il risultato promesso.

Teorema 10 (dei segni di Cartesio)

Un'equazione di secondo grado a delta positivo, ha le soluzioni

- entrambe negative solo se i suoi coefficienti presentano due permanenze;
- entrambe positive solo se i suoi coefficienti presentano due variazioni;
- di segno diverso solo se i suoi coefficienti presentano una permanenza e una variazione. In questo caso, se la variazione precede la permanenza la soluzione positiva ha valore assoluto maggiore della negativa; viceversa è la negativa ad avere maggior valore assoluto.

Prima di dimostrare il teorema ne chiariamo il significato con un esempio.

Esempio 27

- L'equazione $x^2 + 3x + 2 = 0$ ha il delta positivo, $\Delta = 9 - 8 = 1$, e i coefficienti che presentano due permanenze, quindi deve avere due soluzioni negative. Verifichiamo: $x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \begin{cases} -2 < 0 \\ -1 < 0 \end{cases}$.
- L'equazione $x^2 - 12x + 35 = 0$, ha il delta positivo, $\Delta = 144 - 140 = 4$, e i coefficienti che presentano due variazioni, quindi deve avere due soluzioni positive. Infatti si ha: $x = 6 \pm \sqrt{1} = 6 \pm 1 = \begin{cases} 7 > 0 \\ 5 > 0 \end{cases}$.
- L'equazione $3x^2 + x - 2 = 0$, ha il delta positivo, $\Delta = 1 + 24 = 25$, e i coefficienti che presentano una permanenza e una variazione, quindi deve avere una soluzione negativa e una positiva, in valore assoluto minore della prima. Infatti si ha: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{-1 \pm 5}{6} = \begin{cases} \frac{2}{3} > 0 \\ -1 < 0 \end{cases}$, inoltre $\frac{2}{3} < |-1| = 1$.
- L'equazione $6x^2 - 13x - 5 = 0$, ha il delta positivo, $\Delta = 169 + 120 = 289 = 17^2$, e i coefficienti che presentano una variazione e una permanenza, quindi deve avere una soluzione positiva e una negativa, in valore assoluto minore della prima. Infatti si ha: $x = \frac{13 \pm \sqrt{289}}{12} = \frac{13 \pm 17}{12} = \begin{cases} \frac{5}{2} > 0 \\ -\frac{1}{3} < 0 \end{cases}$, ed è $|\frac{1}{3}| < \frac{5}{2}$.

Possiamo inoltre osservare che se i coefficienti di un'equazione di secondo grado presentano una variazione e una permanenza, indipendentemente dall'ordine, l'equazione ha sempre delta positivo, perché in questo caso a e c hanno segno diverso.

Dimostriamo ora la condizione necessaria del teorema di Cartesio, e cioè che *se le soluzioni hanno un certo segno allora i segni dei coefficienti devono ubbidire a certi schemi*. Naturalmente supponiamo che l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, abbia soluzioni reali. (Lasciamo il completamento dello schema per esercizio)

Schema dimostrativo			
Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Supponiamo che le soluzioni siano entrambe positive	$-\frac{b}{a} > 0 \wedge \frac{c}{a} > 0$	Abbiamo usato il Teorema 8
2	Consideriamo i segni dei coefficienti	a e b hanno segno diverso, a e c hanno segno uguale, quindi abbiamo due variazioni	Abbiamo usato la conseguenza del passo 1
3	Supponiamo che le soluzioni siano entrambe negative		
4	Consideriamo i segni dei coefficienti.	a e b hanno segno, a e c hanno segno, quindi abbiamo	
5	Supponiamo che le soluzioni siano una positiva e una negativa e la positiva sia maggiore del valore assoluto della negativa	$-\frac{b}{a} > 0 \wedge \frac{c}{a} < 0$	Abbiamo usato il Teorema 8 e tenuto conto del fatto che nella somma prevale il segno positivo
6	Consideriamo i segni dei coefficienti	a e b hanno segno, a e c hanno segno, quindi abbiamo	
7	Supponiamo che le soluzioni siano una positiva e una negativa e la positiva sia minore del valore assoluto della positiva		
8	Consideriamo i segni dei coefficienti	a e b hanno segno, a e c hanno segno, quindi abbiamo	

Adesso dimostriamo la condizione sufficiente, e cioè che *se i segni dei coefficienti ubbidiscono a certi schemi, allora le soluzioni hanno un certo segno*.

Supponiamo che l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, abbia soluzioni reali. (Lasciamo il completamento dello schema per esercizio)

Schema dimostrativo			
Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	I coefficienti a , b e c presentano due permanenze	$a > 0, b > 0, c > 0 \vee$ $a < 0, b < 0, c < 0$	
2	Consideriamo somma e prodotto delle soluzioni	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0 \wedge x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0$	Abbiamo usato il Teorema 8 e il passo 1.
3	Consideriamo i segni delle soluzioni	Sono entrambe negative	Dato che il loro prodotto è positivo, le soluzioni hanno lo

			stesso segno, e poiché la somma è negativa, tale segno è negativo.
4	I coefficienti a , b e c presentano due variazioni	$a \dots 0, b \dots 0, c \dots 0 \vee$ $a \dots 0, b \dots 0, c \dots 0$	
5	Consideriamo somma e prodotto delle soluzioni		
6	Consideriamo i segni delle soluzioni		
7	I coefficienti a , b e c presentano una permanenza e una variazione	$a \dots 0, b \dots 0, c \dots 0 \vee$ $a \dots 0, b \dots 0, c \dots 0$	
8	Consideriamo somma e prodotto delle soluzioni		
9	Consideriamo i segni delle soluzioni		
10	I coefficienti a , b e c presentano una variazione e una permanenza	$a \dots 0, b \dots 0, c \dots 0 \vee$ $a \dots 0, b \dots 0, c \dots 0$	
11	Consideriamo somma e prodotto delle soluzioni		
12	Consideriamo i segni delle soluzioni		

Verifiche

Lavoriamo insieme

Consideriamo l'equazione $5x^2 - x - 2 = 0$, senza risolverla vogliamo conoscere il segno delle sue eventuali soluzioni reali. Intanto cominciamo a dire che effettivamente l'equazione data ha soluzioni reali, poiché quando primo e terzo coefficiente hanno segni discordi $-4ac$ è positivo, quindi anche $\Delta = b^2 - 4ac$ è positivo. Adesso, visto che nell'equazione data troviamo una variazione (+, -) e una permanenza (-, -), l'equazione ha due soluzioni di segno opposto. Anzi visto che la variazione precede la permanenza, in valore assoluto la soluzione positiva è maggiore della negativa. Effettivamente risolvendo l'equazione troviamo le

$$\text{soluzioni } \frac{1-\sqrt{41}}{10} < 0, \frac{1+\sqrt{41}}{10} > 0 \text{ e } \frac{1+\sqrt{41}}{10} > \left| \frac{1-\sqrt{41}}{10} \right|.$$

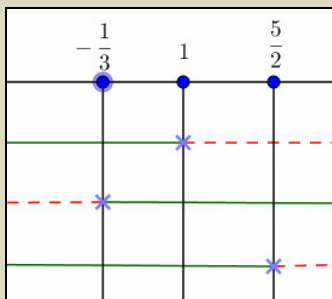
Senza risolvere le equazioni, stabilire se ammettono soluzioni reali e, in caso affermativo, stabilirne il segno. Nelle risposte se i segni sono diversi quello scritto per primo è il maggiore in valore assoluto

Livello 1

- | | | |
|----|--|---|
| 1. | $3x^2 - 4x + 1 = 0$; $5x^2 + 11x + 1 = 0$; $-2x^2 + x + 4 = 0$; $-2x^2 - x - 7 = 0$ | $[(+, +); (-, -); (+, -); \emptyset]$ |
| 2. | $4x^2 - 7x - 5 = 0$; $3x^2 + x - 7 = 0$; $13x^2 + 7x + 2 = 0$; $x^2 - x - 11 = 0$ | $[(+, -); (-, +); \emptyset; (+, -)]$ |
| 3. | $-x^2 + 3x - 7 = 0$; $5x^2 + 9x + 2 = 0$; $8x^2 - 7x + 2 = 0$; $-x^2 - 9x + 3 = 0$ | $[\emptyset; (-, -); \emptyset; (-, +)]$ |
| 4. | $x^2 - x + 3 = 0$; $3x^2 + x - 8 = 0$; $-7x^2 + 12x - 8 = 0$; $7x^2 - 23x + 19 = 0$ | $[\emptyset; (-, +); \emptyset; \emptyset]$ |

Lavoriamo insieme

Data l'equazione parametrica $(1-m) \cdot x^2 + (3m+1) \cdot x - 2m+5 = 0$, vogliamo determinare, al variare del parametro m nell'insieme dei numeri reali, il segno delle eventuali soluzioni reali. Dobbiamo considerare il segno dei tre coefficienti. Abbiamo: $1 - m > 0 \Rightarrow m < 1$; $3m+1 > 0 \Rightarrow m > -\frac{1}{3}$; $-2m+5 > 0 \Rightarrow m < \frac{5}{2}$.



Riportiamo il tutto in un unico grafico: Abbiamo così determinato 4 intervalli:

$m < -\frac{1}{3}$: 2 variazioni (se le soluzioni sono reali sono entrambe positive); $-\frac{1}{3} < m < 1$: 2 permanenze (se le soluzioni sono reali sono entrambe negative); $1 < m < \frac{5}{2}$: una variazione e una permanenza (due soluzioni reali e di segno diverso, in valore assoluto la positiva è maggiore della negativa); $m > \frac{5}{2}$: 2 variazioni (se le soluzioni sono reali sono entrambe positive). Inoltre, se $m = -\frac{1}{3}$ l'equazione è spuria i coefficienti rimanenti sono entrambi positivi, le soluzioni sono una nulla e una negativa; se $m = 1$ è di primo grado; se $m = \frac{5}{2}$ è pura, i coefficienti sono opposti, quindi soluzioni reali ed opposte.

Determinare, al variare del parametro reale m , il segno delle eventuali soluzioni reali delle seguenti equazioni parametriche

Livello 2

5. $(2-m) \cdot x^2 - mx + 1 = 0$; $(1-3m) \cdot x^2 - 7x + 3 = 0$ $\left[\begin{cases} (-,-) & m < 0 \\ (+,+) & 0 < m < 2 \\ (-,+) & m > 2 \end{cases} \right] \left\{ \begin{cases} (+,+) & m < \frac{1}{3} \\ (-,+) & m > \frac{1}{3} \end{cases} \right.$
6. $x^2 + (5-3m) \cdot x - 4 + 7m = 0$; $(1+3m) \cdot x^2 - 5x - 3m + 2 = 0$ $\left[\begin{cases} (-,+) & m < \frac{4}{7} \\ (-,-) & \frac{4}{7} < m < \frac{5}{3} \\ (+,+) & m > \frac{5}{3} \end{cases} \right] \left\{ \begin{cases} (-,+) & m < -\frac{1}{3} \\ (+,+) & -\frac{1}{3} < m < \frac{2}{3} \\ (+,-) & m > \frac{2}{3} \end{cases} \right.$
7. $(1+3m) \cdot x^2 + (4+m) \cdot x + 3 - 5m = 0$; $(5+7m) \cdot x^2 - 3 \cdot (2m-5) \cdot x - 7m + 3 = 0$ $\left[\begin{cases} (-,+) & m < -4 \vee m > \frac{3}{5} \\ (+,-) & -4 < m < -\frac{1}{3} \\ (-,-) & -\frac{1}{3} < m < \frac{3}{5} \end{cases} \right] \left\{ \begin{cases} (+,-) & m < -\frac{5}{7} \vee m > \frac{5}{2} \\ (-,+) & \frac{3}{7} < m < \frac{5}{2} \\ (-,-) & -\frac{5}{7} < m < \frac{3}{7} \end{cases} \right.$
8. $(1-3m) \cdot x^2 + (m+1) \cdot x - 2m - 5 = 0$; $(1+3m) \cdot x^2 + (1+3m) \cdot x - 3m = 0$ $\left[\begin{cases} (+,+) & m < -\frac{5}{2} \vee m > \frac{1}{3} \\ (-,+) & -1 < m < \frac{1}{3} \\ (+,-) & -\frac{5}{2} < m < -1 \end{cases} \right] \left\{ \begin{cases} (-,+) & m < -\frac{1}{3} \vee m > 0 \\ (-,-) & -\frac{1}{3} < m < 0 \end{cases} \right.$
9. $(2m-3) \cdot x^2 + (5m+1) \cdot x + 2m - 9 = 0$; $(5m-7) \cdot x^2 + (7m-5) \cdot x + m = 0$ $\left[\begin{cases} (-,-) & m < -\frac{1}{5} \vee m > \frac{9}{2} \\ (+,+) & -\frac{1}{5} < m < \frac{3}{2} \\ (-,+) & \frac{3}{2} < m < \frac{9}{2} \end{cases} \right] \left\{ \begin{cases} (-,-) & m < 0 \vee m > \frac{7}{5} \\ (+,-) & \frac{5}{7} < m < \frac{7}{5} \\ (-,+) & 0 < m < \frac{5}{7} \end{cases} \right.$

Particolari equazioni di grado superiore al secondo. Equazioni reciproche

Nel paragrafo precedente abbiamo considerato alcune equazioni di grado superiore al secondo che si potevano risolvere sfruttando le tecniche acquisite per la risoluzione delle equazioni di secondo grado; qui ora vogliamo risolvere con opportuni procedimenti qualche altra particolare equazione di grado superiore al secondo. Consideriamo qualche esempio.

Esempio 28

- Risolvere l'equazione $x^4 - x^3 - 2x^2 = 0$. Anche se l'equazione non è trinomia, si può scrivere nel seguente modo: $x^2 \cdot (x^2 - x - 2) = 0$. Perciò, applicando il principio di annullamento del prodotto, risolviamo singolarmente le due equazioni $x^2 = 0 \vee x^2 - x - 2 = 0$, le cui soluzioni sono quelle dell'equazione data. Abbiamo: $x = 0$ di molteplicità due e $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$.
- Stavolta vogliamo risolvere l'equazione $3x^3 + 5x^2 - 5x - 3 = 0$. Non vi sono fattori comuni, ma possiamo scrivere: $3 \cdot (x^3 - 1) + 5x \cdot (x - 1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) + 5x \cdot (x - 1) = 0 \Rightarrow (x - 1) \cdot (3x^2 + 3x + 3 + 5x) = 0 \Rightarrow (x - 1) \cdot (3x^2 + 8x + 3) = 0$. Quindi ancora una volta, con il principio di annullamento del prodotto, troviamo le soluzioni $x = 1$ e $x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-9}}{3} = \frac{-4 \pm \sqrt{7}}{3}$.

Come abbiamo visto, alcune equazioni possono essere risolte sfruttando il fatto che il polinomio a esse associate si può scomporre in fattori di grado minore, di cui sappiamo risolvere le equazioni associate. Cerchiamo di generalizzare il secondo esempio.

Definizione 9

- L'equazione $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$, con $a \neq 0$ si chiama equazione reciproca di III grado e I specie.
- L'equazione $ax^3 + bx^2 - bx - a = 0$, con $a \neq 0$ si chiama equazione reciproca di III grado e II specie.

Prima di procedere chiediamoci il perché dell'aggettivo reciproca che abbiamo associato alle equazioni precedenti.

Esempio 29

Riconsideriamo l'equazione $3x^3 + 5x^2 - 5x - 3 = 0$ che abbiamo risolto scomponendone il polinomio nel prodotto $(x - 1) \cdot (3x^2 + 8x + 3) = 0$ e, in particolare l'equazione $3x^2 + 8x + 3 = 0$, il prodotto delle cui eventuali soluzioni reali è il rapporto $\frac{3}{3} = 1$. Ciò significa appunto che le soluzioni, se reali, sono fra loro numeri reciproci, cioè del tipo $\frac{m}{n}, \frac{n}{m}$. Questo fatto ci stupisce un po' perché le soluzioni trovate sembrano non rispondere a questi requisiti. Vediamo che riusciamo a scrivere tali soluzioni, $x = \frac{-4 \pm \sqrt{7}}{3}$, in una forma che ne evidenzia la reciprocità: $\frac{-4 + \sqrt{7}}{3} = \frac{(-4 + \sqrt{7}) \cdot (-4 - \sqrt{7})}{3 \cdot (-4 - \sqrt{7})} = \frac{16 - 7}{3 \cdot (-4 - \sqrt{7})} = \frac{9}{3 \cdot (-4 - \sqrt{7})} = \frac{3}{-4 - \sqrt{7}}$.

Adesso possiamo enunciare il seguente risultato generale.

Teorema 11

Le equazioni reciproche di terzo grado e prima o seconda specie ammettono sempre rispettivamente le soluzioni $x = -1$ e $x = 1$. Inoltre se hanno altre due soluzioni reali queste sono fra loro reciproche.

Schema Dimostrativo			
Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Consideriamo l'equazione $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0, a \neq 0$	$a \cdot (x^3 + 1) + bx \cdot (x + 1) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow a \cdot (x + 1) \cdot (x^2 - x + 1) + bx \cdot (x + 1) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow a \cdot (x + 1) \cdot (x^2 - x + 1) + bx \cdot (x + 1) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow (x + 1) \cdot (ax^2 - ax + a + bx) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow (x + 1) \cdot [ax^2 + (b - a) \cdot x + a] = 0$	Abbiamo messo in evidenza a coppie.
2	Riduciamo l'equazione.	$x + 1 = 0 \vee ax^2 + (b - a) \cdot x + a = 0$	Abbiamo applicato il principio di annullamento del prodotto.
3	Consideriamo l'equazione di primo grado	$x = -1$	Abbiamo dimostrato la prima tesi.
4	Consideriamo l'equazione di secondo grado	Se ha soluzioni reali queste sono fra loro reciproche.	Il prodotto delle soluzioni è $\frac{a}{a} = 1$.

Lasciamo per esercizio la dimostrazione per le equazioni reciproche di seconda specie.

Possiamo generalizzare il concetto di equazione reciproca anche a gradi superiori al terzo, anche se non è detto che sappiamo risolvere per intero tali equazioni. Riusciamo infatti a ridurne il grado, ma le equazioni che otteniamo non sempre le sappiamo risolvere.

Definizione 10

- Un'equazione algebrica si chiama **reciproca di prima specie** se è di grado dispari, $2h + 1$, e può scriversi $a_1x^{2h+1} + a_2x^{2h} + \dots + a_{h+1}x^{h+1} + a_{h+1}x^h + a_hx^{h-1} + \dots + a_2x + a_1 = 0$, con $a_1 \neq 0$; o è di grado pari, $2h$, e può scriversi $a_1x^{2h} + a_2x^{2h-1} + \dots + a_{h+1}x^{h+1} + a_{h+2}x^h + a_{h+1}x^{h-1} + \dots + a_2x + a_1 = 0$, con $a_1 \neq 0$.
- Un'equazione algebrica si chiama **reciproca di seconda specie** se è di grado dispari, $2h + 1$, e può scriversi $a_1x^{2h+1} + a_2x^{2h} + \dots + a_{h+1}x^{h+1} - a_{h+1}x^h - a_hx^{h-1} - \dots - a_2x - a_1 = 0$, con $a_1 \neq 0$; o è di grado pari, $2h$, e può scriversi $a_1x^{2h} + a_2x^{2h-1} + \dots + a_{h+1}x^{h+1} - a_{h+1}x^{h-1} - a_hx^{h-2} - \dots - a_2x - a_1 = 0$, con $a_1 \neq 0$.

Si osservi che le equazioni reciproche di grado pari e di seconda specie hanno il termine *centrale* nullo. Vediamo qualche esempio.

Esempio 30

- L'equazione $x^4 + x^3 - x - 1 = 0$ è reciproca di quarto grado di seconda specie. Possiamo sempre mettere in evidenza: $x^3 \cdot (x + 1) - (x + 1) = 0 \Rightarrow (x + 1) \cdot (x^3 - 1) = 0 \Rightarrow (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) = 0$. Questa volta abbiamo 2 soluzioni immediate: $x = 1$ e $x = -1$, e ancora un'equazione di secondo grado da risolvere, che però non ha soluzioni reali, perché il suo discriminante è negativo.
- Risolvere l'equazione reciproca di quarto grado e prima specie $3x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 3 = 0$. In questo caso il fattore comune non è evidente come nell'equazione precedente, dovremo quindi ricorrere a un artificio: dividiamo tutti i termini per x^2 : $3x^2 - 2x - 2 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} = 0 \Rightarrow 3 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) - 2 = 0$
Il primo fattore posto fra parentesi è quasi il quadrato dell'altro, ma per essere un vero quadrato manca il doppio prodotto che è 2. Allora aggiungiamo e togliamo 2 all'interno della parentesi:

$$3 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 - 2 \right) - 2 \cdot \left(x + \frac{1}{x} \right) - 2 = 0 \Rightarrow 3 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \right) - 6 - 2 \cdot \left(x + \frac{1}{x} \right) - 2 = 0 \Rightarrow 3 \cdot \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 2 \cdot \left(x + \frac{1}{x} \right) - 8 = 0.$$

Ponendo $z = x + \frac{1}{x}$, l'equazione risolvente diviene un'equazione di secondo grado nell'incognita z ,

$$\text{perciò abbiamo: } 3z^2 - 2z + 8 = 0 \Rightarrow z = x + \frac{1}{x} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{3} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{3} = \frac{1 \pm 5}{3} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{4}{3} \end{cases}.$$
 Adesso si devono

risolvere le due equazioni: $x + \frac{1}{x} = -\frac{4}{3}$ e $x + \frac{1}{x} = 2$. Risolvendo la prima si ha: $x + \frac{1}{x} = -\frac{4}{3} \Rightarrow$

$$3x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-9}}{3} = \frac{-2 \pm \sqrt{-5}}{3}, \text{ quindi non ci sono soluzioni reali. Risolvendo la}$$

seconda si ha: $x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$ (soluzione doppia).

L'equazione data ha perciò solo una soluzione reale doppia $x=1$.

- Risolviamo l'equazione di quinto grado e prima specie: $3x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 3 = 0$. Possiamo sempre mettere in evidenza a coppie:

$$3 \cdot (x^5 + 1) - 2x \cdot (x^3 + 1) + x^2 \cdot (x + 1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot (x + 1) \cdot (x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) - 2x \cdot (x + 1) \cdot (x^2 - x + 1) + x^2 \cdot (x + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x + 1) \cdot (3x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 3 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + x^2) = 0 \Rightarrow (x + 1) \cdot (3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 3) = 0.$$

Come si vede abbiamo ottenuto il prodotto fra un'equazione di primo grado e una reciproca di quarto grado e prima specie. Fattorizzando quest'ultima con il procedimento visto nell'esempio precedente troviamo: $(x + 1) \cdot (x^2 + 1) \cdot (3x^2 - 5x + 3) = 0$. Tutte e due le equazioni di secondo grado hanno delta negativo, quindi l'equazione di partenza ha un'unica soluzione reale $x = -1$

Visti i precedenti risultati, possiamo enunciare il risultato seguente.

Teorema 12

Ogni equazione reciproca di grado dispari se di prima specie ammette sempre la soluzione $x = -1$, se di seconda specie ammette sempre la soluzione $x = 1$. Ogni equazione reciproca di seconda specie e grado pari ammette sempre le soluzioni $x = \pm 1$.

Per equazioni di qualsiasi tipo e grado valgono i due seguenti importanti teoremi.

Teorema 13

Data un'equazione algebrica di grado n a coefficienti interi, $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$, le sue eventuali soluzioni intere appartengono all'insieme dei divisori interi del termine noto a_n .

Teorema 14 (Fondamentale dell'algebra di D'Alembert–Gauss)

Ogni equazione algebrica di grado n a coefficienti reali, $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$, ammette al massimo n soluzioni reali. Inoltre, se le sue uniche soluzioni reali sono $x_1, x_2, \dots, x_k, k \leq n$, non per forza tutte distinte, allora vale la seguente identità:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = a_0 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot \dots \cdot (x - x_k) \cdot p_{n-k}(x)$$

in cui $p_{n-k}(x) = 0$ è un'equazione di grado $(n - k)$ priva di soluzioni reali.

Esempio 31

Consideriamo l'equazione $x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 6 = 0$. Per il Teorema 13, se l'equazione ha soluzioni intere queste debbono appartenere all'insieme $\{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$. Basta quindi verificare per gli otto valori. Si ha: $(-6)^4 + 2 \cdot (-6)^3 - (-6)^2 + (-6) + 6 \neq 0$; $(-3)^4 + 2 \cdot (-3)^3 - (-3)^2 + (-3) + 6 \neq 0$; $(-2)^4 + 2 \cdot (-2)^3 - (-2)^2 + (-2) + 6 \neq 0$; $(-1)^4 + 2 \cdot (-1)^3 - (-1)^2 + (-1) + 6 \neq 0$; $1^4 + 2 \cdot 1^3 - 1^2 + 1 + 6 \neq 0$; $2^4 + 2 \cdot 2^3 - 2^2 + 2 + 6 \neq 0$; $3^4 + 2 \cdot 3^3 - 3^2 + 3 + 6 \neq 0$; $6^4 + 2 \cdot 6^3 - 6^2 + 6 + 6 \neq 0$.

$+ (-2) + 6 = 0$. Gli altri valori non annullano l'espressione, ciò significa che l'equazione ha una sola soluzione intera, $x = -2$. Possiamo perciò abbassare di grado con la regola di Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ & & -2 & 0 & 2 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}$$

Quindi si ha: $x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 6 = (x + 2) \cdot (x^3 - x + 3)$. A questo punto possiamo dire che la data equazione non ha altre soluzioni intere. Per trovare le altre eventuali soluzioni dobbiamo risolvere l'equazione di terzo grado ottenuta dalla scomposizione, cosa che non sappiamo fare.

I protagonisti

Rafael Bombelli nacque a Bologna nel gennaio del 1526, ebbe come educatore l'ingegnere Pier Francesco Clementi, e ne seguì la professione. Nel campo matematico Bombelli è ricordato per il suo capolavoro, l'Algebra, scritta nel 1550, originariamente composta da 5 libri, di cui ne furono pubblicati solo 3 nel 1572. I rimanenti, manoscritti probabilmente incompleti, furono scoperti nel 1929 dallo storico Ettore Bortolotti nella biblioteca dell'Archiginnasio di Bologna. Insieme all'*Ars Magna* di Gerolamo Cardano e ai *Quesiti et inventioni diverse* di Niccolò Tartaglia, quest'opera è considerata uno dei capolavori matematici del Rinascimento italiano. Essa riguarda numerose questioni algebriche, dal trattamento dei radicali, che in quell'epoca non erano accettati come veri e propri numeri, alla risoluzione algebrica e geometrica delle equazioni di primo, secondo, terzo e quarto grado. In particolare la risoluzione di questi ultimi due tipi di equazioni è stata la prima a essere proposta in stampa. Bombelli morì a Roma nel 1573.

Verifiche

Lavoriamo insieme

- Risolvere $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$. Notiamo che il polinomio al primo membro si può fattorizzare con raccoglimento parziale: $x^2 \cdot (x-1) - 4 \cdot (x-1) = 0 \Rightarrow (x-1) \cdot (x^2 - 4) = 0 \Rightarrow (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x+2) = 0$. Applicando il principio di annullamento del prodotto, possiamo perciò concludere che l'equazione data ha per soluzioni: $x = 1, x = 2, x = -2$.

- Risolvere l'equazione $2x^3 + x^2 - 24x + 9 = 0$. Stavolta non riusciamo a intravedere come scomporre. Proviamo allora a cercare le eventuali soluzioni intere dell'equazione. Applicando il Teorema 13, cerchiamo quindi fra i divisori del termine noto, cioè fra i numeri $\pm 1, \pm 3, \pm 9$. Dopo aver sostituito, ci accorgiamo che $x = 3$ è una soluzione, infatti: $2 \cdot 3^3 + 3^2 - 24 \cdot 3 + 9 = 54 + 9 - 72 + 9 = 0$. Quindi possiamo

abbassare di grado l'equazione mediante la regola di Ruffini:
$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & 1 & -24 & 9 \\ & & 6 & 21 & -9 \\ \hline & 2 & 7 & -3 & 0 \end{array}$$

$(x-3) \cdot (2x^2 + 7x - 3) = 0$. Applicando il principio di annullamento del prodotto, determiniamo le altre

soluzioni risolvendo l'equazione di secondo grado: $x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 24}}{4} = \frac{-7 \pm \sqrt{73}}{4}$, che, insieme con $x = 3$, rappresentano tutte le soluzioni dell'equazione data.

Risolvere le seguenti equazioni di grado superiore al secondo utilizzando i metodi di scomposizione

Livello 2

- $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0; x^3 + 4x^2 - 17x - 60 = 0$ $[(-2 \vee -1 \vee 1); (-5 \vee -3 \vee 4)]$
- $3x^3 + 11x^2 + 11x + 3 = 0; x^4 - 8x^2 + 5x + 6 = 0$ $\left[\left(-1 \vee \frac{-4 \pm \sqrt{7}}{3} \right); \left(-3 \vee 2 \vee \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right) \right]$
- $2x^7 + 3x^6 + 2x^4 + 3x^3 + 2x + 3 = 0; x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x + 2 = 0$ $\left[-\frac{3}{2}; \left(\pm \sqrt{2} \vee \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \right) \right]$
- $7x^9 - 9x^8 - 7x^5 + 9x^4 - 7x + 9 = 0; 4x^5 + 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 4x + 3 = 0$ $\left[\left(\frac{9}{7} \vee \pm \sqrt[4]{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}} \right); \left(-\frac{3}{4} \vee \pm 1 \right) \right]$
- $x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 15x + 18 = 0; x^4 - 7x^3 + 13x^2 - 21x + 30 = 0$ $\left[(-1 \vee \pm \sqrt{3} \vee 6); (2 \vee 5) \right]$

Livello 3

- $3x^6 + 2x^5 - 4x^4 + 3x^2 + 2x - 4 = 0; 15x^8 - 12x^7 - 9x^6 - 25x^2 + 20x + 15 = 0$ $\left[\frac{1 \pm \sqrt{13}}{3}; \left(\frac{2 \pm \sqrt{19}}{5} \vee \pm \sqrt[6]{\frac{5}{3}} \right) \right]$
- $21x^6 + 18x^5 - 107x^4 + 39x^3 - 128x^2 + 11x - 30 = 0; 4x^6 + 8x^5 - 33x^4 - 38x^3 + 64x^2 + 9x - 14 = 0$ $\left[(-3 \vee 2); \left(\pm \frac{1}{2} \vee -2 \vee 1 \vee \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2} \right) \right]$
- $3x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 8x - 8 = 0; 9x^5 + 9x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$ $\left[1; \left(-1 \vee \pm \sqrt{\frac{5-1}{6}} \right) \right]$
- $15x^8 - 25x^6 - 18x^4 + 5x^2 + 3 = 0; 40x^{12} + 24x^9 - 43x^6 - 21x^3 + 7 = 0$

$$\left[\pm \sqrt{\frac{5+\sqrt{61}}{6}} \vee \pm \frac{1}{\sqrt[4]{5}}; \sqrt[3]{\frac{-3 \pm \sqrt{29}}{10}} \vee \pm \sqrt[6]{\frac{7}{8}} \right]$$

$$10. \quad 15x^7 + 5x^6 - 6x^4 - 2x^3 - 12x - 4 = 0; -16x^9 + 24x^8 - 18x^5 + 27x^4 - 2x + 3 = 0 \quad \left[\left(-\frac{1}{3} \vee \sqrt[3]{\frac{1 \pm \sqrt{21}}{5}} \right); \frac{3}{2} \right]$$

$$11. \quad 12x^7 - 12x^6 + 5x^5 - 5x^4 - 46x^3 + 46x^2 - 35x + 35 = 0; 16x^5 - 40x^4 - 54x^3 + 23x^2 + 18x - 3 = 0$$

$$\left[\left(1 \vee \pm \sqrt{\frac{5+\sqrt{137}}{8}} \right); \left(\frac{7 \pm \sqrt{41}}{4} \vee \pm \frac{\sqrt{6}}{4} \vee -1 \right) \right]$$

Lavoriamo insieme

- Vogliamo risolvere l'equazione $5x^4 + 3x^3 - 3x - 5 = 0$, riconosciamo di avere a che fare con un'equazione reciproca di quarto grado e seconda specie. Mettiamo in evidenza a coppie.

$$5 \cdot (x^4 - 1) + 3x \cdot (x^2 - 1) = 0 \Rightarrow (x^2 - 1) \cdot [5 \cdot (x^2 + 1) + 3x] = 0 \Rightarrow (x^2 - 1) \cdot [5x^2 + 3x + 5] = 0$$

Applicando il principio di annullamento del prodotto, abbiamo che $x = \pm 1$, sono due soluzioni, le altre eventuali soluzioni si ottengono risolvendo l'equazione $5x^2 + 3x + 5 = 0$, che però ha delta negativo, come facilmente si calcola: $\Delta = 9 - 100 < 0$.

- Risolvere $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$. Stavolta abbiamo a che fare con una reciproca di prima specie.

dobbiamo quindi effettuare il seguente artificio: $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - x + 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \right) - \left(x + \frac{1}{x} \right) - 1 = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - \left(x + \frac{1}{x} \right) - 1 = 0. \text{ Adesso trasformiamo l'equazione in una}$$

di secondo grado: $z = \left(x + \frac{1}{x} \right) \Rightarrow z^2 - z - 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Riportiamo il tutto all'incognita x :

$$x + \frac{1}{x} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow 2x^2 - (1 \pm \sqrt{5}) \cdot x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (1 \pm \sqrt{5})^2 - 16 < 0. \text{ Entrambe le equazioni sono prive di soluzioni reali.}$$

Risolvere le seguenti equazioni reciproche

Livello 2

$$12. \quad 5x^3 - x^2 + x - 5 = 0; 5x^3 - x^2 - x + 5 = 0; x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0; x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \left[1; -1; -1; \left(1 \vee \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \right) \right]$$

$$13. \quad 3x^3 + 11x^2 + 11x + 3 = 0; 3x^3 - 11x^2 + 11x - 3 = 0; 6x^3 - 7x^2 - 7x + 6 = 0; 6x^3 + 7x^2 - 7x - 6 = 0$$

$$\left[\left(-1 \vee \frac{-4 \pm \sqrt{7}}{3} \right); \left(1 \vee \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3} \right); \left(-1 \vee \frac{2}{3} \vee \frac{3}{2} \right); \left(1 \vee -\frac{3}{2} \vee -\frac{2}{3} \right) \right]$$

$$14. \quad \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} = 0; \frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{2} = 0; \frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{3}{4} = 0; \frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{3}{4} = 0 \quad [-1; 1; 1; -1]$$

$$15. \quad x^3 - \frac{7}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 1 = 0; x^3 + \frac{7}{3}x^2 - \frac{7}{3}x - 1 = 0 \quad \left[\left(-1 \vee \frac{1}{3} \vee 3 \right); \left(1 \vee -3 \vee -\frac{1}{3} \right) \right]$$

Livello 3

$$16. \quad \sqrt{2}x^3 - x^2 + x - \sqrt{2} = 0; \sqrt{2}x^3 + x^2 + x + \sqrt{2} = 0; \sqrt{2}x^3 + \sqrt{19}x^2 + \sqrt{19}x + \sqrt{2} = 0$$

$$\left[1; -1; \left(-1 \vee \frac{2 - \sqrt{38} \pm \sqrt{26 - 4 \cdot \sqrt{38}}}{4} \right) \right]$$

$$17. \quad \sqrt{2}x^3 + \sqrt{19}x^2 - \sqrt{19}x - \sqrt{2} = 0; x^3 - \sqrt{3}x^2 - \sqrt{3}x + 1 = 0; x^3 - \sqrt{3}x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0$$

- $$\left[\left(1 \vee \frac{-2 - \sqrt{38} \pm \sqrt{26 + 4 \cdot \sqrt{38}}}{4} \right); \left(-1 \vee \frac{1 + \sqrt{3} \pm \sqrt[4]{12}}{2} \right); 1 \right]$$
18. $x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = 0; x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0; 15x^4 - 34x^3 + 34x - 15 = 0$ $\left[x = \pm 1; \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}; \left(\pm 1 \vee \frac{3}{5} \vee \frac{5}{3} \right) \right]$
19. $34x^4 - 15x^3 + 15x - 34 = 0; \frac{2}{5}x^4 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{5}{2}x - \frac{2}{5} = 0; \frac{2}{5}x^4 + \frac{5}{2}x^3 - x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{2}{5} = 0$
 $\left[x = \pm 1; \left(\pm 1 \vee \frac{25 \pm \sqrt{561}}{8} \right); \frac{-2 - \sqrt{913} \pm \sqrt{1282 + 50 \cdot \sqrt{913}}}{16} \right]$
20. $5x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 5 = 0; 2x^4 - 5x^3 - x^2 - 5x + 2 = 0; 3x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 3 = 0$
 $\left[\emptyset; \frac{5 + \sqrt{65} \pm \sqrt{26 + 10 \cdot \sqrt{65}}}{8}; -1 \right]$
21. $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0; 180x^4 - 24x^3 - 433x^2 - 24x + 180 = 0; 180x^4 + 24x^3 - 24x - 180 = 0$
 $\left[-2 \pm \sqrt{3}; \left(-\frac{5}{6} \vee -\frac{6}{5} \vee \frac{2}{3} \vee \frac{3}{2} \right); \pm 1 \right]$
22. $-2x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 3x - 2 = 0; 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 3 = 0; x^4 - \sqrt{5}x^3 + \sqrt{5}x - 1 = 0$
 $\left[\frac{3 + \sqrt{89} \pm \sqrt{34 + 6 \cdot \sqrt{89}}}{8}; \frac{-1 - \sqrt{37} \pm \sqrt{2 + 2 \cdot \sqrt{37}}}{6}; \left(\pm 1 \vee \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2} \right) \right]$
23. $\sqrt{5}x^4 - x^3 + x - \sqrt{5} = 0; 12x^5 + x^4 - 157x^3 - 157x^2 + x + 12 = 0; 6x^5 - x^4 - 43x^3 + 43x^2 + x - 6 = 0$
 $\left[\pm 1; \left(-3 \vee -1 \vee -\frac{1}{3} \vee \frac{1}{4} \vee 4 \right); \left(-3 \vee -\frac{1}{3} \vee \frac{1}{2} \vee 1 \vee 2 \right) \right]$
24. $6x^5 - 11x^4 - 33x^3 + 33x^2 + 11x - 6 = 0; 5x^5 - 21x^4 - 26x^3 + 26x^2 + 21x - 5 = 0$
 $\left[\left(2 \vee -\frac{1}{2} \vee \frac{1}{3} \vee 1 \vee 3 \right); \left(-1 \vee \frac{1}{5} \vee 1 \vee 5 \right) \right]$
25. $24x^5 + 14x^4 - 87x^3 - 87x^2 + 14x + 24 = 0; 12x^5 - 71x^4 - 92x^3 + 92x^2 + 71x - 12 = 0$
 $\left[\left(-\frac{4}{3} \vee -\frac{3}{4} \vee -1 \vee \frac{1}{2} \vee 2 \right); \left(-\frac{4}{3} \vee -1 \vee -\frac{3}{4} \vee \frac{7 \pm 3 \cdot \sqrt{5}}{2} \right) \right]$

Lavoriamo insieme

Risolvere $(2x^2 + 1)^3 - 3 \cdot (2x^2 + 1)^2 - 3 \cdot (2x^2 + 1) + 1 = 0$. Ponendo $2x^2 + 1 = z$, l'equazione diviene reciproca

di terzo grado: $z^3 - 3z^2 + 5z + 1 = 0$, che perciò risolviamo al solito modo: $\frac{-1 \begin{vmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix}}{1 \quad -4 \quad 1}$, quindi

scriviamo: $(z + 1) \cdot (z^2 - 4z + 1) = 0 \Rightarrow z = -1 \wedge z = 2 \pm \sqrt{3}$. Adesso risostituiamo:

$$2x^2 + 1 = -1 \wedge 2x^2 + 1 = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow 2x^2 = -2 \wedge 2x^2 = 1 - \sqrt{3} \wedge 2x^2 = 1 + \sqrt{3}$$

Le prime due equazioni sono prive di soluzioni reali, perché il termine noto è negativo. Risolviamo la terza:

$$x^2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}}{2}}, \text{ questa è l'unica soluzione.}$$

Risolvere le seguenti equazioni riconducibili a reciproche

Livello 2

26. $3 \cdot (2x^5 - 1)^3 + (2x^5 - 1)^2 + (2x^5 - 1) + 3 = 0; 4 \cdot (3x^4 + 2)^3 + (3x^4 + 2)^2 + (3x^4 + 2) + 4 = 0$ $[0; \emptyset]$
27. $18 \cdot (x - 3)^3 + 67 \cdot (x - 3)^2 - 67 \cdot (x - 3) - 18 = 0; 4 \cdot (2x + 5)^3 + 21 \cdot (2x + 5)^2 + 21 \cdot (2x + 5) + 4 = 0$
 $\left[\left(-\frac{3}{2} \vee \frac{25}{9} \vee 4 \right); \left(-\frac{9}{2} \vee -3 \vee -\frac{21}{8} \right) \right]$
28. $22 \cdot (x^3 - 1)^3 + 103 \cdot (x^3 - 1)^2 - 103 \cdot (x^3 - 1) - 22 = 0; 5 \cdot (3x^2 - 1)^3 + 2 \cdot (3x^2 - 1)^2 - 2 \cdot (3x^2 - 1) - 5 = 0$
 $\left[\left(-\frac{\sqrt[3]{36}}{2} \vee \sqrt[3]{2} \vee \frac{\sqrt[3]{33^2}}{11} \right); \left(\pm \frac{\sqrt{6}}{3} \right) \right]$
29. $21 \cdot (x^2 - 1)^4 - 58 \cdot (x^2 - 1)^3 + 58 \cdot (x^2 - 1) - 21 = 0; (x^4 - 2)^4 - 2 \cdot (x^4 - 2)^3 + 2 \cdot (x^4 - 2) - 1 = 0$
 $\left[\left(0 \vee \pm \frac{\sqrt{70}}{7} \vee \pm \frac{\sqrt{30}}{3} \vee \pm \sqrt{2} \right); (\pm 1 \vee \pm \sqrt[4]{3}) \right]$
30. $3 \cdot (4x + 1)^4 + 2 \cdot (4x + 1)^3 - 2 \cdot (4x + 1) - 3 = 0; (x^3 + 1)^4 + 5 \cdot (x^3 + 1)^3 - 5 \cdot (x^3 + 1) - 1 = 0$
 $\left[\left(-\frac{1}{2} \vee 0 \right); \left(0 \vee \sqrt[3]{\frac{-7 \pm \sqrt{21}}{2}} \vee -\sqrt[3]{2} \right) \right]$
31. $5 \cdot (x^2 - x - 1)^3 + 2 \cdot (x^2 - x - 1)^2 - 2 \cdot (x^2 - x - 1) - 5 = 0; 3 \cdot (x^4 - x^2 + 1)^3 - (x^4 - x^2 + 1)^2 - (x^4 - x^2 + 1) + 3 = 0$
 $[(-1 \vee 2); \emptyset]$

Lavoriamo insieme

Qual è l'equazione di grado minimo che ha per soluzioni i numeri 1, 2 e 3? La domanda non è ben posta, poiché sono infinite le equazioni di terzo grado che hanno le tre soluzioni indicate. Infatti tutte le seguenti equazioni risolvono il problema: $a \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) = 0$, al variare di a nell'insieme dei numeri reali. Naturalmente sono tutte equivalenti, possiamo perciò considerare la più semplice fra esse, ossia quella in cui $a = 1$, cioè, sviluppando le moltiplicazioni: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

Scrivere l'equazione di grado minimo e con i coefficienti privi di fattori comuni, che abbia per soluzioni i numeri accanto indicati

Livello 1

32. $(1, 2); (-1, 2); (-1, -2); \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right); \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right); \left(\frac{3}{2}, -2 \right)$
 $[x^2 - 3x + 2 = 0; x^2 - x - 2 = 0; x^2 + 3x + 2 = 0; 9x^2 + 9x + 2 = 0; 6x^2 - 5x + 1 = 0; 2x^2 + x - 6 = 0]$
33. $\left(\frac{1}{7}, -\frac{1}{9}, 0 \right); \left(0, -\frac{1}{5}, \frac{5}{4} \right); (1, -2, 3)$ $[63x^3 - 2x^2 - x = 0; 20x^3 - 21x^2 - 5x = 0; x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0]$
34. $(2, 2, 2); \left(4, -4, \frac{1}{4} \right); \left(\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{5} \right)$ $[x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0; 4x^3 - x^2 - 64x + 16 = 0; 60x^3 - 13x^2 - 88x + 48 = 0]$
35. $\left(1, -1, \frac{4}{5}, \frac{5}{4} \right); \left(1, -1, \frac{4}{5}, -\frac{5}{4} \right); \left(1, 1, 1, \frac{5}{6} \right)$
 $[20x^4 - 41x^3 + 41x - 20 = 0; x^4 + 9x^3 - 40x^2 - 9x + 20 = 0; 6x^4 + 23x^3 + 33x^2 + 21x + 5 = 0]$

Livello 2

36. $(-\sqrt{2}, -1); (1, \sqrt{2}); (\sqrt{2}, \sqrt{3})$ $[x^2 + (1 + \sqrt{2}) \cdot x + \sqrt{2} = 0; x^2 - (1 + \sqrt{2}) \cdot x + \sqrt{2} = 0; x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cdot x + \sqrt{6} = 0]$
37. $(\sqrt{2}, -1, 0); (\sqrt{3}, -1, \sqrt{2}); (1 + \sqrt{2}, 0, 0)$

38. $\left[x^3 - (1 + \sqrt{2}) \cdot x^2 - \sqrt{2}x = 0; x^3 + (1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot x^2 + (\sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot x + \sqrt{6} = 0; x^3 - (1 + \sqrt{2}) \cdot x^2 = 0 \right]$
 $(-2, -1, 0, 1, 2); (\sqrt{2} + \sqrt{3}, \sqrt{2} - \sqrt{3}, 1, -1); (1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 2, -2)$
 $\left[x^5 - 5x^3 + 4x = 0; x^4 - 2 \cdot \sqrt{2}x^3 - 2x^2 + 2 \cdot \sqrt{2}x + 1 = 0; x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 8x + 4 = 0 \right]$
39. $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{2}, -\sqrt{3}); \left(0, 0, 2, 2, -\frac{1}{4}\right); (-1, -2, -3, -3, 0)$
 $\left[x^4 - 5x^2 + 6 = 0; 4x^5 - 15x^4 + 12x^3 + 4x^2 = 0; x^5 + 9x^4 + 29x^3 + 39x^2 + 18x = 0 \right]$
40. $(\sqrt{2} - \sqrt{3}, \sqrt{3} - \sqrt{5}, \sqrt{2} - \sqrt{5}); \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right); (1, 1, 1, -1, -1, -1)$
 $\left[x^3 + 2 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2})x^2 + (4 - 3 \cdot \sqrt{10} + \sqrt{15} + \sqrt{6}) \cdot x + 3 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{5} = 0; \right.$
 $\left. 32x^5 - 48x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 6x + 1 = 0; x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 = 0 \right]$
41. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}\right); \left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}\right); (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$
 $\left[\begin{aligned} 720x^5 - 2556x^4 + 3604x^3 - 2521x^2 + 874x - 120 &= 0; \\ 720x^5 - 444x^4 - 796x^3 + 471x^2 + 214x - 120 &= 0; \\ x^4 + 2 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot x^3 + (5 - 4 \cdot \sqrt{6}) \cdot x^2 + 2 \cdot (2 \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{2}) \cdot x + 6 &= 0 \end{aligned} \right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo semplificare la frazione $\frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 + 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) \cdot x + 3 - 2 \cdot \sqrt{2}}$. Determiniamo le soluzioni delle equazioni

i cui termini sono il numeratore e il denominatore:

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = [x - (1 - \sqrt{2})] \cdot [x - (1 + \sqrt{2})]$$

$$x^2 + 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) \cdot x + 3 - 2 \cdot \sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = 1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2 - (3 - 2 \cdot \sqrt{2})} =$$

$$= 1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{1 - 2 \cdot \sqrt{2} + 2 - 3 + 2 \cdot \sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow x^2 + 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) \cdot x + 3 - 2 \cdot \sqrt{2} = [x - (1 - \sqrt{2})]^2$$

Possiamo perciò scrivere la frazione di partenza nella seguente forma semplificata:

$$\frac{(x - 1 + \sqrt{2}) \cdot (x - 1 - \sqrt{2})}{(x - 1 + \sqrt{2})^2} = \frac{x - 1 - \sqrt{2}}{x - 1 + \sqrt{2}}.$$

Semplificare, ove possibile, le seguenti frazioni

Livello 1

42. $\frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 + 6x + 8}; \frac{x^2 + 8x + 15}{x^2 - 2x - 15}; \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 3x - 4}; \frac{6x^2 + 7x + 2}{6x^2 - x - 2} \quad \left[\frac{x - 4}{x + 4}; \frac{x + 5}{x - 5}; \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 3x - 4}; \frac{3x + 2}{3x - 2} \right]$
43. $\frac{49x^2 + 154x + 121}{77x^2 + 72x - 77}; \frac{13x^2 + 2x - 11}{13x^2 + 24x + 11}; \frac{4x^2 + 15x - 4}{4x^2 - 15x - 4}; \frac{15x^2 - 32x + 16}{12x^2 - 31x + 20} \quad \left[\frac{7x + 11}{11x - 7}; \frac{13x - 11}{13x + 11}; \frac{4x^2 + 15x - 4}{4x^2 - 15x - 4}; \frac{5x - 4}{4x - 5} \right]$

Livello 2

44. $\frac{4x^2 - 9}{6x^2 - 13x + 6}; \frac{x^2 - (1 + \sqrt{2}) \cdot x + \sqrt{2}}{x^2 - 2}; \frac{x^2 - 2 \cdot \sqrt{3}x + 3}{\sqrt{3}x^2 - 4x + \sqrt{3}}; \frac{2x^2 + \sqrt{2}x - 2}{2x^2 - \sqrt{2}x - 2} \quad \left[\frac{2x + 3}{3x - 2}; \frac{x - 1}{x + \sqrt{2}}; \frac{x - \sqrt{3}}{\sqrt{3}x - 1}; \frac{2x^2 + \sqrt{2}x - 2}{2x^2 - \sqrt{2}x - 2} \right]$

$$45. \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^3 - 7x + 6}; \frac{x^3 - 10x^2 + 29x - 20}{x^3 - 21x - 20}; \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^3 - 2x^2 - x + 2} \left[\frac{x-3}{x+3}; \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 5x + 4}; \frac{x+2}{x+1} \right]$$

$$46. \frac{3x^3 - 7x^2 - 7x + 3}{3x^3 - 13x^2 + 13x - 3}; \frac{2x^3 - 3x^2 - 3x + 2}{6x^3 - 7x^2 - 7x + 6}; \frac{4x^3 + 13x^2 - 13x - 4}{4x^3 - 13x^2 - 13x + 4} \left[\frac{x+1}{x-1}; \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 13x + 6}; \frac{4x^3 + 13x^2 - 13x - 4}{4x^3 - 13x^2 - 13x + 4} \right]$$

Livello 3

$$47. \frac{2x^4 + 5x^3 - 5x - 2}{2x^4 - 5x^3 + 5x - 2}; \frac{12x^4 - 56x^3 + 89x^2 - 56x + 12}{6x^4 - 13x^3 + 13x - 6}; \frac{30x^4 + 13x^3 - 230x^2 + 13x + 30}{30x^4 + 187x^3 + 350x^2 + 187x + 30} \left[\frac{2x^2 + 5x + 2}{2x^2 - 5x + 2}; \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 1}; \frac{10x^2 + 29x + 10}{10x^2 + 29x + 10} \right]$$

$$48. \frac{x^4 + 3x^2 - 4}{x^4 - 5x^2 + 4}; \frac{4x^4 + 16x^3 + 7x^2 + 36x - 36}{36x^4 - 97x^2 + 36}; \frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4}{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2} \left[\frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}; \frac{x^2 - 4x + 4}{9x^2 - 4}; \frac{x+2}{x-1} \right]$$

$$49. \frac{6x^5 - 41x^4 + 97x^3 - 97x^2 + 41x - 6}{x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4}; \frac{x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1}{x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1}; \frac{6x^4 - 7x^3 - 10x^2 + 17x - 6}{6x^4 - 17x^3 + 10x^2 + 7x - 6} \left[\frac{6x^3 - 23x^2 + 16x - 3}{x^2 - 3x + 2}; \frac{x-1}{x+1}; \frac{6x^2 + 5x - 6}{6x^2 - 5x - 6} \right]$$

$$50. \frac{x^6 + 2x^5 - 7x^4 - 16x^3 + 8x^2 + 32x + 16}{x^6 - 2x^5 - 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 32x + 16}; \frac{x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - x^2 - 2x + 1}{x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1}; \frac{x^5 - 1}{x^4 - 1} \left[\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1}; \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1}; \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1} \right]$$

Lavoriamo insieme

Esploriamo un altro modo per ottenere valori approssimati di $\sqrt{2}$. Sfruttiamo il fatto che $\sqrt{2}$ è una soluzione della seguente equazione: $x = 1 + \frac{1}{1+x}$. Prima di continuare proviamo quanto detto.

$$x - 1 = \frac{1}{1+x} \Rightarrow (x-1) \cdot (1+x) = 1 \Rightarrow x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Effettivamente è vero quanto abbiamo premesso. Vediamo di capire come possiamo sfruttare questo fatto per determinare un valore approssimato di $\sqrt{2}$. Dato che $x = 1 + \frac{1}{1+x}$, possiamo operare una sostituzione

strana, mettendo al posto di x nel denominatore del secondo membro l'intero secondo membro, cioè $1 + \frac{1}{1+x}$. In tal modo otteniamo: $x = 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1+x}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+x}}$. Possiamo ripetere il procedimento,

ottenendo: $x = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+x}}}}$. Continuando ancora, in generale possiamo

scrivere: $x = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$, ove i puntini di sospensione indicano che il procedimento continua

all'infinito. Allora, maggiore è il numero di *denominatori* che consideriamo e migliore sarà l'approssimazione che otteniamo per $\sqrt{2}$. Per esempio, se consideriamo 4 linee di frazione, otteniamo

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + 1}}}} &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{7}{3}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{3}{2 + \frac{3}{7}}} = \\
&= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{17}{7}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{7}{17}} = 1 + \frac{1}{\frac{41}{17}} = 1 + \frac{17}{41} = \frac{58}{41} \approx 1.4146
\end{aligned}$$

che coincide fino alle prime tre cifre decimali con $\sqrt{2}$.

Per lo svolgimento degli esercizi seguenti può essere utile l'uso di uno strumento elettronico

Livello 2

51. Tenuto conto del box lavoriamo insieme, calcolare il valore approssimato di $\sqrt{2}$, iterando il procedimento fino a 10 ordini di frazioni. $\left[\frac{11482}{8119} \approx 1,414213573 \right]$
52. Tenuto conto che $\sqrt{3}$ è una soluzione dell'equazione $x = 1 + \frac{2}{1+x}$, mediante il metodo delle frazioni continue, determinare un valore approssimato di $\sqrt{3}$, fissando a 10 le iterazioni. $\left[\frac{1351}{780} \approx 1,732051282 \right]$
53. Tenuto conto che $\sqrt{n}$ è una soluzione dell'equazione $x = 1 + \frac{n-1}{1+x}$, mediante il metodo delle frazioni continue determinare un valore approssimato di $\sqrt{n}$ per tutti gli n da 4 a 10, fissando a 10 le iterazioni. Controllare cosa accade quando $\sqrt{n}$ è un numero intero.

$$\left[\begin{aligned} \sqrt{4} &= 2; \sqrt{5} \approx \frac{521}{233} \approx 2,236051; \sqrt{6} \approx \frac{530666}{216651} \approx 2,449404; \sqrt{7} \approx \frac{10037}{3794} \approx 2,645492; \\ \sqrt{8} &\approx \frac{1632802}{577405} \approx 2,827827; \sqrt{9} \approx \frac{5119}{1707} \approx 2,998828; \sqrt{10} \approx \frac{1342334}{424757} \approx 3,160239 \end{aligned} \right]$$

Livello 3

54. Con riferimento all'esercizio precedente, osservare che all'aumentare di n la precisione diminuisce, in proposito determinare il valore approssimato di $\sqrt{100}$. $\left[\frac{47225803334}{5652389507} \approx 8,355015 \right]$
55. Tenuto conto che $x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$, in cui gli addendi sono infiniti e tutti uguali a 1, determinare il valore di x . (Suggerimento: tenere conto che $x = \sqrt{1+x}$) $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]$

Lavoriamo insieme

- Risolvere l'equazione $\left\{ \left[(1-x^2)^3 - 2 \right]^4 + 1 \right\}^5 = -32$. Anche in questo caso riusciamo a risolvere l'equazione senza grossi problemi. Vediamo come. $\left[(1-x^2)^3 - 2 \right]^4 + 1 = \sqrt[5]{-32} \Rightarrow \left[(1-x^2)^3 - 2 \right]^4 + 1 = -2 \Rightarrow \left[(1-x^2)^3 - 2 \right]^4 = -3$. Dato che una quarta potenza non può essere negativa, l'equazione non ha soluzioni reali.
- Risolvere $\left\{ \left[(1-2x^3)^2 - 12 \right]^3 - 2 \right\}^2 = 16$. Si ha: $\left[(1-2x^3)^2 - 12 \right]^3 - 2 = \pm 4 \Rightarrow \left[(1-2x^3)^2 - 12 \right]^3 - 2 = 4 \vee \vee \left[(1-2x^3)^2 - 12 \right]^3 - 2 = -4 \Rightarrow \left[(1-2x^3)^2 - 12 \right]^3 = 6 \vee \left[(1-2x^3)^2 - 12 \right]^3 = -2 \Rightarrow (1-2x^3)^2 - 12 = \sqrt[3]{6} \vee$

$$\sqrt{(1-2x^3)^2 - 12} = -\sqrt[3]{2} \Rightarrow (1-2x^3)^2 = 12 + \sqrt[3]{6} \sqrt{(1-2x^3)^2} = 12 - \sqrt[3]{2} \Rightarrow 1-2x^3 = \pm \sqrt{12 + \sqrt[3]{6}} \vee$$

$$\sqrt{1-2x^3} = \pm \sqrt{12 - \sqrt[3]{2}} \Rightarrow -2x^3 = -1 \pm \sqrt{12 + \sqrt[3]{6}} \vee -2x^3 = -1 \pm \sqrt{12 - \sqrt[3]{2}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1 \pm \sqrt{12 + \sqrt[3]{6}}}{2}} \vee x = \sqrt[3]{\frac{1 \pm \sqrt{12 - \sqrt[3]{2}}}{2}}.$$

Come si vede, con un semplice ragionamento abbiamo risolto un'equazione che risolvono con difficoltà anche software particolarmente raffinati, e lo abbiamo fatto anche in forma simbolica, cosa che i detti software spesso non riescono a fare.

Usando opportune procedure determinare tutte le soluzioni reali delle seguenti equazioni

Livello 3

$$56. \quad \left[(4x^2 - 6)^3 - 25 \right]^4 = 16; \left[(243x^5 - 31)^4 + 2 \right]^3 = 27; \left[(-7x^5 - 2)^4 - 7 \right]^2 = 81$$

$$\left[\left(\pm \sqrt{\frac{6 + \sqrt[3]{23}}{4}} \vee \pm \frac{3}{2} \right); \left(\frac{\sqrt[3]{30}}{3} \vee \frac{2}{3} \right); \left(-\frac{\sqrt[3]{98^2}}{7} \vee 0 \right) \right]$$

$$57. \quad \left[(32x^4 - 3)^2 - 5 \right]^4 = 256; \left[(-27x^3 + 9)^4 + 4 \right]^3 = 125; \left[(2x^5 - 1)^4 - 3 \right]^2 = 7$$

$$\left[\left(\pm \frac{\sqrt[4]{2}}{2} \vee \pm \frac{\sqrt[4]{3}}{2} \vee \pm \frac{1}{2} \vee 0 \right); \left(\frac{\sqrt[3]{10}}{3} \vee \frac{2}{3} \right); \left(\sqrt[5]{\frac{1}{2} \pm \sqrt[4]{\frac{3 \pm \sqrt{7}}{16}}} \right) \right]$$

$$58. \quad \left\{ \left[(3x-1)^2 - 1 \right]^3 + 10 \right\}^4 = 1; \left\{ \left[(4-x^2)^3 + 2 \right]^3 + 1 \right\}^3 = 8; \left\{ \left[(5x^2 - 2)^2 + 2 \right]^2 - 20 \right\}^2 = 4$$

$$\left[(\emptyset); (\pm \sqrt{5}); \left(\pm \sqrt{\frac{2 \pm \sqrt{22} - 2}{5}} \vee \pm \sqrt{\frac{2 \pm \sqrt{18} - 2}{5}} \right) \right]$$

$$59. \quad \left\{ \left[(x^4 - 2)^3 + 5 \right]^2 - 2 \right\}^3 = 27; \left\{ \left[(x+2)^3 + 11 \right]^2 - 4 \right\}^3 = -8$$

$$\left[(\emptyset); (-2 - \sqrt[3]{11 \pm \sqrt{2}}) \right]$$

Lavoriamo insieme

Risolvere l'equazione $(4x^2 - 1)^4 = (3x^2 - 3)^4$. Siamo tentati di sviluppare le potenze, ma ancora una volta l'osservazione ci conduce su una strada migliore. Estraiamo le radici quarte di entrambi i membri:

Abbiamo così ottenuto due equazioni binomie: $x^2 = -2 \vee 7x^2 = 4 \Rightarrow \emptyset \vee x = \pm \sqrt{\frac{4}{7}} \Rightarrow \emptyset \vee x = \pm \frac{2}{\sqrt{7}}$.

Usando opportune procedure determinare tutte le soluzioni reali delle seguenti equazioni

Livello 3

$$60. \quad (5x^6 - 7)^2 - (4x^6 + 3)^2 = 0; (2x^8 - 3)^2 = (3x^8 + 2)^2$$

$$\left[\left(\pm \sqrt[6]{10} \vee \pm \frac{\sqrt[3]{18}}{3} \right); \left(\pm \frac{1}{\sqrt[8]{5}} \right) \right]$$

$$61. \quad (x^2 + 3)^3 - (2x^2 - 1)^3 = 0; (x^3 - 1)^4 = (4x^3 + 5)^4; (x^3 + 2)^2 - (x^3 + 1)^2 = 0$$

$$\left[(\pm 2); \left(-\sqrt[3]{2} \vee -\frac{\sqrt[3]{100}}{5} \right); \left(-\frac{\sqrt[3]{12}}{2} \right) \right]$$

Lavoriamo insieme

Risolvere l'equazione $(3x^2 + x - 1)^2 + 2 \cdot (3x^2 + x - 1) - 5 = 0$. Piuttosto che sviluppare i calcoli effettuiamo la seguente posizione: $z = 3x^2 + x - 1 \Rightarrow z^2 + 2z - 5 = 0$. Abbiamo ottenuto un'equazione di secondo grado che

andiamo a risolvere. $z = -1 \pm \sqrt{6}$. Otteniamo perciò le seguenti equazioni di secondo grado:

$$3x^2 + x - 1 = -1 + \sqrt{6} \vee 3x^2 + x - 1 = -1 - \sqrt{6} \Rightarrow 3x^2 + x - \sqrt{6} = 0 \vee 3x^2 + x + \sqrt{6} = 0$$

Risolviamole: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 12 \cdot \sqrt{6}}}{6} \vee \Delta = 1 - 12 \cdot \sqrt{6} < 0$. Solo la prima equazione ha soluzioni reali, che sono perciò quelle dell'equazione data.

Usando opportune sostituzioni determinare tutte le soluzioni reali delle seguenti equazioni

Livello 2

$$62. \quad (3x^{11} + 1)^4 - (3x^{11} + 1)^2 - 2 = 0; (3x - 2)^4 + 2 \cdot (3x - 2)^2 - 5 = 0 \quad \left[\sqrt[11]{\frac{1 \pm \sqrt{2}}{3}}; \frac{2 \pm \sqrt{6-1}}{3} \right]$$

$$63. \quad (7x^5 - 2)^{10} + 5 \cdot (7x^5 - 2)^5 - 4 = 0; (5x^2 - 2)^2 + 3 \cdot (5x^2 - 2) - 4 = 0 \quad \left[\sqrt[5]{\frac{4 \pm \sqrt{5-16 \cdot \sqrt{41}}}{14}}; \pm \frac{\sqrt{15}}{5} \right]$$

$$64. \quad (12x^4 + 1)^6 - 7 \cdot (12x^4 + 1)^3 + 1 = 0; (4x^3 + 3)^8 - 15 \cdot (4x^3 + 3)^4 + 2 = 0 \quad \left[\sqrt[4]{\sqrt[3]{\frac{7}{3456} + \frac{\sqrt{5}}{1152} - \frac{1}{12}}}; \left(\sqrt[3]{-\frac{3}{4} \pm \sqrt[4]{\frac{15 - \sqrt{217}}{512}}} \vee \sqrt[3]{-\frac{3}{4} \pm \sqrt[4]{\frac{15 + \sqrt{217}}{512}}} \right) \right]$$

$$65. \quad (x^2 - 7x + 1)^4 - 5 \cdot (x^2 - 7x + 1)^2 - 7 = 0; (x^6 - 13x^3 + 1)^2 - 2 \cdot (x^6 - 13x^3 + 1) - 5 = 0 \quad \left[\frac{7 \pm \sqrt{45 \pm \sqrt{40 + 8 \cdot \sqrt{53}}}}{2}; \sqrt[3]{\frac{13 \pm \sqrt{165 + 4 \cdot \sqrt[3]{1 \pm \sqrt{6}}}}{2}} \right]$$

$$66. \quad (2x^2 - x + 1)^6 - 3 \cdot (2x^2 - x + 1)^3 + 1 = 0; (4x^4 + x^2 + 3)^8 + 5 \cdot (4x^4 + x^2 + 3)^4 - 2 = 0 \quad \left[\frac{1}{4} \pm \sqrt{-\frac{7}{16} \pm \sqrt[3]{\frac{3 + \sqrt{5}}{16}}}; \emptyset \right]$$

Lavoriamo insieme

Vogliamo scrivere la forma generica di un'equazione di secondo grado che ha per soluzioni due numeri che differiscono fra loro per 1. Le soluzioni sono numeri del tipo a e $a + 1$, la loro somma è perciò $2a + 1$ e il loro prodotto $a \cdot (a + 1) = a^2 + a$. Quindi, visto che l'equazione $x^2 - sx + p = 0$, indica un'equazione le cui soluzioni hanno per somma s e per prodotto p , l'equazione richiesta è $x^2 - (2a + 1) \cdot x + a^2 + a = 0$. Verifichiamo la validità di quanto affermato.

$$\Delta = (2a + 1)^2 - 4 \cdot (a^2 + a) = 4a^2 + 4a + 1 - 4a^2 - 4a = 1; x = \frac{2a + 1 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} \frac{2a + 1 - 1}{2} = a \\ \frac{2a + 1 + 1}{2} = a + 1 \end{cases}$$

Livello 2

67. Scrivere la forma generale di un'equazione di secondo grado, le cui soluzioni sono una il quadrato dell'altra.

$$[x^2 - a \cdot (a + 1) \cdot x + a^3 = 0]$$

68. Scrivere la forma generale di un'equazione di secondo grado, le cui soluzioni sono una il doppio dell'altra.

$$[x^2 - 3ax + 2a^2 = 0]$$

69. Le soluzioni dell'equazione $x^2 + bx + c = 0$ sono i quadrati di quelle dell'equazione $x^2 + x - 1 = 0$. Determinare i valori di b e c . [$b = -3, c = 1$]
70. Sapendo che il delta dell'equazione $ax^2 + 2bx + c = 0$ è nullo, stabilire quale delle seguenti affermazioni relative ai coefficienti a , b e c è vera. A) Sono tutti diversi B) Sono tutti numeri negativi C) a e c sono concordi D) Uno almeno dei tre è nullo E) Sono tutti e tre uguali [C]

L'Antologia

Leggiamo alcuni passi dall'*Algebra* di Rafael Bombelli. Il libro è testimone della sua epoca, ha pertanto un linguaggio arcaico e una simbologia diversa da quella attuale. Si noti inoltre che nel testo di Bombelli si considerano decine di casi di ogni equazione e non è presente una cosiddetta formula generale.

Cominciamo con le equazioni binomie.

Leggiamo il caso che Bombelli chiama *Capitolo di potenza eguale a numero*, cioè dell'equazione binomia $ax^2 = b$, in cui con il termine *potenza* si intende il quadrato dell'incognita e con *numero* si designa il termine noto. Vediamo come Bombelli descrive il metodo per risolvere tale equazione, in forma di descrizione di metodi risolutivi, esemplificata con casi particolari.

Se si haverà ad agguagliare potenza a numero partasi il numero per la quantità delle potenze e dell'avenimento se ne piglia il lato e quello sarà la valuta del tanto, ovvero facciasi così: piglisi il lato dell'uno e dell'altro e così si haverà Tanto eguale a numero, qual si finirà come si è mostrato di sopra.

Parafrasiamo in linguaggio moderno.

Se dobbiamo uguagliare il quadrato di una incognita a un termine noto [cioè vogliamo risolvere l'equazione $ax^2 = b$] dividiamo il termine noto per il coefficiente dell'incognita [che Bombelli chiama la quantità delle potenze; cioè scriviamo $x^2 = \frac{b}{a}$]. Del risultato di questa operazione, [che Bombelli chiama l'avenimento] si estra la radice quadrata [ossia se ne considera il lato].

Non dimentichiamo che nell'algebra del tempo di Bombelli i riferimenti sono geometrici, quindi estrarre una radice quadrata equivale a determinare la misura del lato di un quadrato mediante la misura della sua area. Questa è la soluzione che Bombelli chiama la valuta del *Tanto* (il *Tanto* è l'incognita di primo grado, cioè la nostra x , che altri autori contemporanei di Bombelli chiamano *cosa*).

La soluzione è quella che conosciamo, cioè $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$. Notiamo che Bombelli non considera la soluzione negativa, né discute il fatto che a e b possano avere diverso segno, perché è sottinteso che essi siano entrambi positivi. Per far capire meglio quel che ha detto a parole, comincia a proporre diversi esempi.

Agguagliasi 9^2 a 81 [con il simbolo 2 , Bombelli indica x^2]. Piglisi il lato di 9^2 , che sarà 3^1 [cioè $3x$], ed il lato di 81 sarà 9, e si haveranno 3^1 eguali a 9, che seguendo come si è detto di sopra il Tanto valerà 3.

Bombelli descrive a parole la procedura, che scriviamo in simboli moderni: $9x^2 = 81 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$. Leggiamo ora il *Capitolo di Cubo eguale a numero*, ossia la risoluzione dell'equazione $ax^3 = b$.

Quando si haveranno Cubi eguali a numero si partirà il numero per il numero de' Cubi e dell'avenimento se ne pigli il lato cubico, il quale sarà la valuta del Tanto, come per essemplio agguagliasi $3\sqrt[3]{}$ a 24 [cioè $3x^3 = 24$]. Partasi 24 per 3, numero delli cubi, ne viene 8, il suo lato cubico è 2 e il Tanto vale 2 [Cioè $x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$], e per non procedere in infinito nei Capitoli semplici porrò la regola generale.

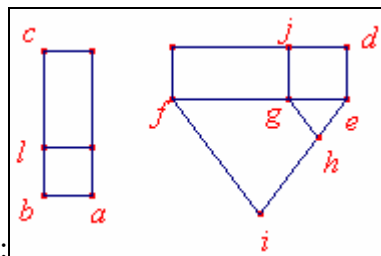
Dopo avere esemplificato i casi dell'equazione binomia per $n = 2$ e 3, Bombelli passa alla risoluzione generale di $ax^n = b$.

Regola di una dignità eguale a numero. [Con la parola dignità Bombelli indica la generica potenza dell'incognita, ossia x^n] Quando si haverà una dignità eguale a numero si partirà il numero per il numero della dignità et dell'avenimento se ne pigliarà il lato secondo la sorte della dignità, e detto lato sarà la valuta del Tanto, come se si havesse $2\sqrt[5]{}$ eguali a 486 [cioè $2x^5 = 486$]; partasi 486 per 2, numero de' relati, ne viene 243 [cioè $x^5 = 243$], del quale se ne pigli il lato relato, ch'è 3 e 3 vale il Tanto, [cioè $x = \sqrt[5]{243} \Rightarrow x = 3$] e così si procederà in tutte.

Adesso consideriamo la risoluzione geometrica delle equazioni binomie di secondo grado, proposta da Bombelli.

Egli vuole risolvere l'equazione $3x^2 = 108$. Costruisce allora un rettangolo, che chiama *parallelogramo*, di area $3x^2$.

Sia *.a.b.* $1\sqrt[1]{}$ e *.b.c.* 3 tanti quanto è la *.a.b.*, cioè $3\sqrt[1]{}$ e la *.e.f.* sia 24 et *.d.e.* $4\frac{1}{2}$ [con questo simbolo Bombelli indica $4 + \frac{1}{2}$].



Il riferimento è alla seguente figura: Bombelli indica la misura di un segmento scrivendo i suoi estremi separati da punti; indica i punti con lettere minuscole, a differenza di quel che facciamo noi. I due rettangoli *abc* e *def* sono supposti equiestesi

Nel rettangolo di lati *ab* e *bc*, essi misurano x e $3x$, l'area misura $3x^2$; il rettangolo di lati *de* e *fe* ha dimensioni che misurano 24 e $4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$, la sua area vale 108. Continuiamo la costruzione.

Et essendo .e.i. eguale alla .b.c. sarà $3\sqrt[1]{}$ et .e.h. $1\sqrt[1]{}$ et .h.i. $2\sqrt[1]{}$, la .e.g. sarà 8 e .g.f. 16, perché tal proportionione ha .e.g. a .g.f., che ha .e.h. con .h.i. et essendo .d.e. $4\frac{1}{2}$ il parallelogramo .d.e.g. sarà 36 eguale alla potenza .a.b.l.

Il segmento *ei* viene costruito della stessa misura di *bc* ed *eh* uguale ad *ab*. Così le rispettive misure sono $3x$ e x . Il segmento *eg* viene costruito come la terza parte di *ef*, dato che *eh* lo è di *ei*, perciò misura 8, quindi il rettangolo *degj* ha area 36. Il rettangolo *degj* è equiesteso al quadrato di lato *ab*. Perciò $x^2 = 36$ e quindi $x = 6$ è la soluzione cercata.

Infine vediamo il caso delle equazioni di secondo grado complete.

Cominciamo con il *Capitolo di potenze eguali a Tanti*, cioè dell'equazione $ax^2 = bx$. Scrive Bombelli:

Quando si haveranno potenze eguali a Tanti si partirà il numero delli Tanti per il numero delle potenze e l'avenimento sarà la valuta del Tanto.

In pratica Bombelli non considera la soluzione zero, perciò basta ricondurre l'equazione alla corrispondente equazione di primo grado. Passiamo all'esempio:

Agguagliasi 10^2 a 40^1 [Cioè l'equazione $10x^2 = 40x$]. Partasi 40 per 10 ne vien 4, e 4 vale il Tanto [Cioè $x^2 = 4x$]. Et a ridurre questo Capitolo a Tanti eguali a numero [cioè all'equazione di primo grado $ax = b$] si fa in questa guisa: si schifa l'una e l'altra parte [cioè si riduce il grado di ciascuna incognita] che levando una dignità a ciascuna delle parti si haverà 10^1 eguali a 40 [Cioè $10x = 40$].

Si passa quindi alla generalizzazione dell'equazione $ax^n = bx^m$, con $n > m > 0$.

E se si havesse 10^4 eguali a 90^2 [cioè $10x^4 = 90x^2$] lievisi due dignità a ciascuna delle parti: si haverà 10^2 eguali a 90 [cioè $10x^2 = 90$] e così si potrà con quest'ordine agguagliare tutte le dignità quando una sarà eguale all'altra, eccetto se le dignità saranno tutte di una natura, perché non si può agguagliare Tanti a Tanti, né Potenze a Potenze, né numero a numero e così delli altri.

Bombelli esclude che sia $n = m$. Passiamo adesso all'equazione di secondo grado completa, ossia al *Capitolo di Potenze e tanti eguali a numero* (l'equazione $ax^2 + bx = c$).

Quando si haveranno potenze e Tanti eguali a numero ci sono due modi. Il primo è questo. Partasi ogni cosa per la quantità delle potenze [dividiamo tutto per a, ottenendo $x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}$], poi si piglia la metà delli Tanti [cioè $\frac{b}{2a}$] e si quadra [ottenendo $\frac{b^2}{4a^2}$] ed il prodotto si aggiunge al numero [quindi $\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}$] e della somma se ne piglia il lato [cioè si estrae la radice quadrata: $\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}}$, che può anche scriversi $\sqrt{\frac{b^2 + 4ac}{4a^2}}$] e di detto lato se ne cava la metà delli Tanti [ecco infine la formula risolutiva $\sqrt{\frac{b^2 + 4ac}{4a^2}} - \frac{b}{2a}$] e quello che resterà sarà la valuta del Tanto.

Spendiamo qualche parola per raffrontare la formula che Bombelli propone senza alcuna giustificazione e quella ottenuta da noi. Notiamo che il discriminante ottenuto da Bombelli ha un segno diverso dal nostro, ciò è dovuto al fatto che in questo caso il termine noto è da parti opposte rispetto ai termini con le incognite. Vi è poi una sola soluzione e non due. Se si tiene conto del fatto che i coefficienti sono tutti positivi, può provarsi che l'equazione ammette sempre due soluzioni reali, una positiva, quella così trovata, e l'altra negativa. Il secondo metodo proposto da Bombelli è simile al precedente e conduce alla formula

$$x = \frac{\sqrt{\frac{b^2}{4} + ac} - \frac{b}{2}}{a}$$
. La verifica della formula avviene in modo geometrico mediante il teorema di Pitagora.

In seguito Bombelli propone la risoluzione delle equazioni scritte come $ax^2 = bx + c$ e $ax^2 + c = bx$.

L'ultima equazione può avere soluzioni non reali, come per esempio $x^2 + 20 = 8x$: è strano che in questo caso Bombelli, che scarta le soluzioni negative, consideri questi numeri, a noi ancora sconosciuti.

(Le citazioni sono liberamente tratte dall'edizione del 1966 edita da Feltrinelli).

Per la prova Invalsi

Lavoriamo insieme

In che relazione sono le soluzioni, supposte reali, delle equazioni $x^2 + ax + b = 0$ e $x^2 - ax + b = 0$? Sappiamo che la somma delle soluzioni della generica equazione $ax^2 + bx + c = 0$ vale $-b/a$, mentre il prodotto c/a . Ciò vuol dire che per la prima equazione somma e prodotto valgono $-a$ e b , per la seconda invece a e b . Pertanto le coppie di soluzioni hanno lo stesso prodotto e opposta somma. Per capire meglio cosa succede consideriamo un caso particolare, per esempio le equazioni $x^2 + 4x + 3 = 0$ e $x^2 - 4x + 3 = 0$. Le soluzioni della prima sono $(-1; -3)$, della seconda $(1; 3)$. Pertanto le due equazioni hanno soluzioni fra loro opposte.

Risolvi i seguenti quesiti

- Quale fra le seguenti equazioni di secondo grado ha certamente soluzioni reali, quale che sia il valore del parametro reale a ? A) $x^2 + ax - a = 0$ B) $x^2 + ax + a^2 = 0$ C) $x^2 + a^2x + a = 0$ D) $x^2 + ax - a^2 = 0$ [D]
- Per quale valore del parametro reale a , l'equazione $x^2 + ax - 1 = 0$, ammette come una delle sue soluzioni $x = 1$? A) 0 B) 1 C) -1 D) Nessuno dei valori precedenti [A]
- Per quali fra le seguenti coppie di valori assegnati rispettivamente ai parametri a e b tutte le equazioni $x^2 + ax + b = 0$, $x^2 + ax - b = 0$, $x^2 - ax + b = 0$, $x^2 - ax - b = 0$, ammettono sempre soluzioni intere? A) (5; 6) B) (1; 2) C) (3; 4) D) Nessuno dei precedenti [A]
- Quali fra le seguenti equazioni di secondo grado ha soluzioni coincidenti, quale che sia il valore del parametro reale a ? A) $x^2 + ax - a^2 = 0$ B) $x^2 + 2ax + a^2 = 0$ C) $x^2 + a^2x + 1 = 0$ D) $x^2 + 2ax - 1 = 0$ [B]
- Se un'equazione di secondo grado ha soluzioni irrazionali, può avere somma e prodotto interi? [Sì]
- Se un'equazione di secondo grado ha soluzioni razionali, può avere somma e prodotto irrazionali? [No]
- Date l'equazione $x^2 + 3x - 5 = 0$ e $x^2 + 9x + 25 = 0$, possiamo dire che le soluzioni della seconda, rispetto a quelle della prima sono A) il quadrato B) il doppio C) il triplo D) Nessuna delle precedenti è corretta [D]
- Quale fra le seguenti equazioni ha soluzioni che sono reciproche di quelle di $x^2 + 7x + 2 = 0$? A) $x^2 + 1/7x + 1/2 = 0$ B) $x^2 + 7x + 1 = 0$ C) $x^2 + 7/2x + 1/2 = 0$ D) $x^2 + 2/7x + 2 = 0$ [C]
- Quante soluzioni reali ha l'equazione $(4x - 1)^4 + 3 \cdot (4x - 1)^2 + 1 = 0$? [0]
- Quale equazione algebrica di grado minimo e coefficiente direttore unitario, ha come soluzioni $1/2$, $1/3$, 2 , 3 ? $[x^4 - 35/6x^3 + 31/3x^2 - 35/6x + 1 = 0]$ [C]
- Quale dei seguenti sistemi è simmetrico? [C]
 A) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ B) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x^2 + y^2 = 3 \end{cases}$ C) $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 5 \\ x^2y^2 + xy = 10 \end{cases}$ D) $\begin{cases} xy = 1 \\ x^2y = 4 \end{cases}$
- Quale dei seguenti sistemi è di II grado? [B]
 A) $\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases}$ B) $\begin{cases} x^2 + 2y = 1 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$ C) $\begin{cases} xy = 3 \\ x^2 + y = 5 \end{cases}$ D) $\begin{cases} x = y^2 \\ x^2 = y \end{cases}$
- Quale dei seguenti sistemi è privo di soluzioni reali? [A]
 A) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ y + x = 5 \end{cases}$ B) $\begin{cases} x^2 + y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$ C) $\begin{cases} xy = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$ D) $\begin{cases} x = y^2 \\ x^2 = y \end{cases}$

14. Per quali valori assegnati al parametro reale m il sistema $\begin{cases} x+y=m \\ xy=1 \end{cases}$ ha esattamente una sola soluzione reale? [±2]
15. Quale dei seguenti sistemi non ammette come una delle sue soluzioni la coppia (1; 1)? [D]
- A) $\begin{cases} x^2=1 \\ y^2=1 \end{cases}$ B) $\begin{cases} x^2+y=2 \\ x^2-y^2=0 \end{cases}$ C) $\begin{cases} xy=1 \\ x^2+y^3=2 \end{cases}$ D) $\begin{cases} x=y^3 \\ x^3+y=0 \end{cases}$

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

Risolvere le seguenti equazioni binomie al variare dei parametri reali a e b

1. $ax^6 - b = 0, a \neq 0; a^n \cdot x^n + b^n = 0, a \neq 0; x^n - a^{2n} = 0; x^{2n} - a^n = 0$
- $$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} \pm \sqrt[n]{\frac{b}{a}} & a \cdot b \geq 0 \\ \emptyset & a \cdot b < 0 \end{array} \right\}; \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{b}{a} & n \text{ dispari} \\ \pm \frac{b}{a} & n \text{ pari e } a \cdot b \leq 0 \\ \emptyset & n \text{ pari e } a \cdot b > 0 \end{array} \right\}; \left\{ \begin{array}{ll} \pm a^2 & n \text{ pari} \\ a^2 & n \text{ dispari} \end{array} \right\}; \left\{ \begin{array}{ll} \pm \sqrt[n]{a} & a \geq 0 \\ \emptyset & a < 0 \end{array} \right\} \end{array} \right]$$
2. Trovare la somma di tutte le soluzioni reali dell'equazione $x^{256} - 256^{32} = 0$. [0]

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Davanti a ogni esercizio vi è un simbolo che si riferisce alla gara da cui è tratto.

AHSME = Annual High School Mathematics Examination

MT = Mathematics Teacher, rivista della NCTM

A&M = High school math contest

OMI = Olimpiadi della matematica italiane

Lavoriamo insieme

Il seguente quesito è apparso sul numero di Gennaio 1996 del Mathematics Teacher.

Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa di 6 e il perimetro di 14, determinare l'area del triangolo.

Indichiamo con x e y le misure dei cateti. Abbiamo perciò, usando il Teorema di Pitagora: $\begin{cases} x+y+6=14 \\ x^2+y^2=36 \end{cases}$,

che è un sistema di II grado, che però non dobbiamo necessariamente risolvere, poiché non vogliamo trovare x e y , bensì la metà del loro prodotto $xy/2$ (che è appunto l'area del triangolo). Allora dalla prima equazione: $x+y=8$, se innalziamo al quadrato termine a termine troviamo: $x^2+y^2+2xy=64$ che tenendo conto della seconda equazione, diventa: $36+2xy=64$, cioè $2xy=28 \Rightarrow xy=14 \Rightarrow xy/2=7$, che è l'area cercata.

1. (AHSME1953) Copiando dalla lavagna un'equazione di secondo grado, con coefficiente direttore unitario, uno studente sbaglia a scrivere il termine noto; risolve correttamente l'equazione così scritta e ottiene come soluzioni i numeri 2 e 8. Il suo compagno di banco sbaglia invece a copiare il coefficiente del termine di primo grado e, risolvendo correttamente l'equazione scritta, ottiene come soluzioni i numeri -9 e -1. Qual era l'equazione scritta alla lavagna? [$x^2 - 10x + 9 = 0$]
2. (AHSME1954) Le due soluzioni dell'equazione $a \cdot (b-c)x^2 + b \cdot (c-a)x + c \cdot (a-b) = 0$ sono 1 e
- A) $\frac{b \cdot (c-a)}{a \cdot (b-c)}$ B) $\frac{a \cdot (b-c)}{c \cdot (a-b)}$ C) $\frac{a \cdot (b-c)}{b \cdot (c-a)}$ D) $\frac{c \cdot (a-b)}{a \cdot (b-c)}$ E) $\frac{c \cdot (a-b)}{b \cdot (c-a)}$ [D]
3. (AHSME1958) Sapendo che l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha come soluzioni i numeri r e s , determinare il valore di p affinché l'equazione $x^2 + px + q = 0$ abbia come soluzioni i numeri r^2 , s^2 . [$\frac{2ac-b^2}{a^2}$]

4. (AHSME1960) Per un certo valore di k il prodotto delle soluzioni dell'equazione $x^2 - 3kx + 2k^2 - 1 = 0$ è 7. A quali dei seguenti insiemi numerici appartengono dette soluzioni? [D]
A) Naturali B) Interi negativi C) Razionali non interi D) Irrazionali E) Non reali
5. (AHSME1961) Se l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha per soluzioni i numeri r e s , quale delle seguenti ha per soluzioni $ar + b$ e $as + b$? A) $x^2 - bx - ac = 0$ B) $x^2 - bx + ac = 0$ C) $x^2 + 3bx + ac + 2b^2 = 0$ D) $x^2 + 3bx - ac + 2b^2 = 0$ E) $x^2 + b \cdot (2 - a)x + a^2c + b^2 \cdot (a + 1) = 0$ [B]
6. (AHSME1963) Date le equazioni $x^2 + kx + 6 = 0$ e $x^2 - kx + 6 = 0$. Se, quando le soluzioni delle equazioni sono scritte ordinate, ogni soluzione della seconda ha un valore che è 5 più della corrispondente soluzione della prima, allora k è A) 5 B) -5 C) 7 D) -7 E) Nessuna delle precedenti [A]
7. (AHSME1977) Sapendo che le soluzioni dell'equazione $x^2 + px + q = 0$ sono i cubi di quelle dell'equazione $x^2 + mx + n = 0$, determinare il valore di p . [$m^3 - 3mn$]
8. (AHSME1985) Quante soluzioni intere ammette l'equazione $(x^2 - x - 1)^{x+2} = 1$? [1]
9. (OMI 1991) Dire quante soluzioni reali ha l'equazione $2^{x^2-3x+\sqrt{5}} = 1$. [2]
10. (OMI1997) Data l'equazione $4 = \sqrt{7 + \sqrt{9 + \sqrt{4 + x}}}$, quanto vale x ? [5180]

Lavoriamo insieme

Questo quesito è stato pubblicato nel numero di Febbraio 1997 del Mathematics Teacher.

Il numero totale di angoli interni di due poligoni regolari è 17, e il numero totale di diagonali è 53. Quanti lati ha ciascuno dei due poligoni?

Indichiamo con x e y il numero dei lati cercati. Poiché un poligono di n lati ha $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$ diagonali (dato che dei segmenti che partono da ogni vertice 2 sono lati, non diagonali e uno degenera in un punto), il problema è risolto dal seguente sistema:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x + y = 17 \\ \frac{x \cdot (x-3)}{2} + \frac{y \cdot (y-3)}{2} = 53 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 17 - y \\ (17 - y)^2 - 3 \cdot (17 - y) + y^2 - 3y - 106 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 17 - y \\ 289 - 34y + y^2 - 51 + 3y + y^2 - 3y - 106 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 17 - y \\ 2y^2 - 34y + 132 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 17 - y \\ y^2 - 17y + 66 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = 17 - y \\ y = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 264}}{2} = \frac{17 \pm 5}{2} < 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \vee x = 11 \\ y = 11 \vee y = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

11. (AHSME1950) I valori di y che soddisfano il sistema $\begin{cases} 2x^2 + 6x + 5y + 1 = 0 \\ 2x + y + 3 = 0 \end{cases}$, si trovano risolvendo l'equazione A) $y^2 + 14y - 7 = 0$ B) $y^2 + 8y + 1 = 0$ C) $y^2 + 10y - 7 = 0$ D) $y^2 + y - 12 = 0$ E) Nessuna delle precedenti [C]
12. (AHSME1953) La soluzione x del sistema $\begin{cases} y = \frac{8}{x^2 + 4} \\ x + y = 2 \end{cases}$ è? [0]
13. (AHSME1960) Il numero di soluzioni reali del sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y^2 = 9 \end{cases}$ sono [C]
A) infinite B) 4 C) 2 D) 1 E) 0
14. (AHSME 1987) Determinare $x^2 + y^2$, con x e y soluzioni del sistema $\begin{cases} xy = 6 \\ x^2y + xy^2 + x + y = 63 \end{cases}$. [69]
15. (AHSME 1978) Se a, b, c, d sono numeri non nulli, con c e d soluzioni di $x^2 + ax + b = 0$ e a e b soluzioni di $x^2 + cx + d = 0$, determinare il valore di $a + b + c + d$. Tenere conto delle relazioni fra le soluzioni e i coefficienti di un'equazione di secondo grado [-2]

16. (A&M2009) Trovare tutte le coppie ordinate (x, y) di interi positivi tali che $x^4 = y^2 + 71$. [(6; 35)]

Questions in English

Working together

This question was published in the issue of October 1993 in the magazine Mathematics Teacher.

The square root of half the number bees in a swarm¹ have flown out to a jasmine bush. Additionally, one female bee flies about a male stuck in a lotus flower the evening before. $\frac{8}{9}$ of the whole swarm remain in the hive². How many bees are involved in all?

We call n the unknown number, it must satisfy the following equation: $\sqrt{\frac{n}{2}} + 2 = \frac{n}{9}$. We solve it.

$$\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)^2 = \left(\frac{n}{9} - 2\right)^2 \Rightarrow \frac{n}{2} = \frac{n^2}{81} - \frac{4}{9}n + 4 \Rightarrow 2n^2 - 72n - 81n + 648 = 0 \Rightarrow 2n^2 - 153n + 648 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{153 \pm \sqrt{23409 - 5184}}{4} \Rightarrow n = \frac{153 \pm \sqrt{18225}}{4} \Rightarrow n = \frac{153 \pm 135}{4} = \frac{9}{2}$$

Obviously only the integer solution is acceptable.

17. (AHSME1952) The difference of the roots of $x^2 - 7x - 9 = 0$, is A) 7 B) $\frac{7}{2}$ C) 9 D) $2 \cdot \sqrt{85}$ E) $\sqrt{85}$? [E]
18. (AHSME1954) The values of k for which the equation $2x^2 - kx + x + 8 = 0$, will have real and equal roots are A) 9 and -7 B) only -7 C) 9 and 7 D) -9 and -7 E) only 9 [A]
19. (AHSME1955) Two numbers whose sum is 6 and the absolute value of whose difference is 8 are roots of the equation [B]
A) $x^2 - 6x + 7 = 0$ B) $x^2 - 6x - 7 = 0$ C) $x^2 + 6x - 8 = 0$ D) $x^2 - 6x + 8 = 0$ E) $x^2 + 6x - 7 = 0$
20. (AHSME1962) For what real values of k does $x = k^2 \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)$ have real roots? [E]
A) none B) $-2 < k < 1$ C) $-2\sqrt{2} < k < 2\sqrt{2}$ D) $k > 1$ or $k < -2$ E) all
21. (AHSME1963) Consider equations of the form $x^2 + bx + c = 0$. How many such equations have real roots and have coefficients b and c selected from the set of integers $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$? [19]
22. (AHSME1964) Let n be the number of real values of p for which the roots of the equation $x^2 - px + p = 0$ are equal. Then n equals? [2]
23. (AHSME1968) If m and n are the roots of $x^2 + mx + n = 0$, $m \neq 0$, $n \neq 0$, then the sum of the roots is [-1]
24. (AHSME1974) What is the smallest integral value of k such that $2x \cdot (kx - 4) - x^2 + 6 = 0$, has no real roots? [2]
25. (MT1995) If r and s are roots of $x^2 - 50x + 505 = 0$, find the value of $r^2 + rs + s^2$. [1995]
26. (MT1996) Find a polynomial equation with integral coefficients having $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ as one of its roots. [There are infinite ones, one of which, with the lowest grade, is $x^4 + 10x^2 + 1 = 0$]

Working together

This problem was assigned at A&M in 2002. Find the smallest positive integer n so that $n + 125$ and $n + 201$ are both perfect squares. We have to solve the system $\begin{cases} n+125=a^2 \\ n+201=b^2 \end{cases}$, which has more unknowns than

equations. We subtract term by term, obtaining: $201 - 125 = b^2 - a^2 \Rightarrow 76 = (b - a) \cdot (b + a)$. we know that $76 = 4 \cdot 19$, and a and b must be integers. So we have the following cases:

$\begin{cases} b-a=1 \\ b+a=76 \end{cases} \vee \begin{cases} b-a=2 \\ b+a=38 \end{cases} \vee \begin{cases} b-a=4 \\ b+a=19 \end{cases}$, solving we find, that first and third system haven't integer solutions;

¹ sciame

² alveare

while the second one has $b = 20$, $a = 18$. Hence $b + a = 19$, $b - a = 4$; $n + 125 = 18^2$, $n = 324 - 125 = 199$.

27. (AHSME1955) The pairs of values of x and y that are the common solutions of the equations $y = (x + 1)^2$ and $xy + y = 1$ are A) 3 real pairs B) 4 real pairs C) 4 imaginary pairs D) 2 real and 2 imaginary pairs E) 1 real and 2 imaginary pairs [E]
28. (AHSME1963) For what value of k does the pair of equations $y = x^2$ and $y = 3x + k$ have two identical solutions? A) $4/9$ B) $-4/9$ C) $9/4$ D) $-9/4$ E) Non of these [D]
29. (AHSME1966) The number of distinct real solutions of the system $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 1 \\ 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ is? [2]
30. (AHSME1971) If the system $\begin{cases} y = mx + 1 \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{cases}$ has exactly one solution, how much is m^2 ? [3/4]
31. (A&M2003) The difference between the squares of two consecutive odd integers is 128. What is the product of the two integers? [1023]
32. (A&M2007) Suppose that x and y are two real numbers such that $x - y = 2$ and $x^2 + y^2 = 8$. Find $x^3 + y^3$. [20]

Attività di recupero**Equazioni binomie****Fase 1: Osserva**

- Risolvere l'equazione $3x^3 + 2 = 0$. Questa è un'equazione binomia di grado dispari, pertanto ammette sempre una soluzione reale. Per determinarla procediamo come nella risoluzione di un'equazione di primo grado, scrivendo: $3x^3 + 2 = 0 \Rightarrow 3x^3 = -2 \Rightarrow x^3 = -\frac{2}{3}$. Abbiamo così ricondotto il problema a quello della determinazione di un numero reale il cui cubo è noto, cioè al calcolo della radice cubica di un numero; pertanto la soluzione cercata sarà: $x = \sqrt[3]{-\frac{2}{3}}$.

- Risolvere l'equazione $5x^4 + 1 = 0$. Possiamo dire che l'equazione non ha soluzioni reali perché ha grado pari e i suoi coefficienti hanno lo stesso segno. Si ha infatti la seguente contraddizione: $5x^4 = -1$, in quanto il primo membro non può essere mai negativo quale che sia il valore reale sostituito al posto della x , al minimo può essere zero, mentre il secondo membro è sempre negativo.

- Risolvere l'equazione $8x^6 - 3 = 0$. Stavolta l'equazione ammette soluzioni reali, dato che i coefficienti hanno segno diverso. Infatti in tal caso avremo l'uguaglianza: $8x^6 = 3$, che può essere verificata da numeri reali. Anzi, dato che il quadrato di un qualsiasi numero non nullo è sempre positivo, i numeri reali

soluzioni sono due e fra loro opposti, cioè: $8x^6 = 3 \Rightarrow x^6 = \frac{3}{8} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt[6]{\frac{3}{8}} \\ x = -\sqrt[6]{\frac{3}{8}} \end{cases}$. Le precedenti soluzioni

possono anche riassumersi nel modo seguente: $x = \pm \sqrt[6]{\frac{3}{8}}$.

Fase 2: Completa ...

- Risolvere l'equazione $4x^4 + 1 = 0$. Questa è un'equazione binomia di grado Per determinare l'esistenza di eventuali soluzioni, dobbiamo considerare i segni dei coefficienti, che in questo caso sono fra loro Pertanto possiamo concludere che l'equazione
- Risolvere l'equazione $4x^4 - 1 = 0$. Ancora una volta abbiamo un'equazione Stavolta però i coefficienti hanno segni fra loro, quindi possiamo dire che l'equazione ammette soluzioni reali fra loro Determiniamole: Possiamo riassumere le precedenti soluzioni nel modo seguente:
- Risolvere l'equazione $4x^5 + 2 = 0$. Questa è un'equazione e quindi ammette Risolviamola:

Fase 3: Prova!**Determinare le eventuali soluzioni reali delle seguenti equazioni binomie**

$$1. \quad x^3 + 1 = 0; x^3 - 1 = 0; x^6 + 1 = 0; 6x^2 + 5 = 0; 6x^2 - 5 = 0; 5x^2 - 6 = 0 \quad \left[-1; 1; \emptyset; \emptyset; \pm \frac{\sqrt{30}}{6}; \pm \frac{\sqrt{30}}{5} \right]$$

$$2. \quad 2x^2 - 4 = 0; 4x^2 - 2 = 0; 2x^4 - 4 = 0; -3x^4 + 5 = 0; 3x^4 - 5 = 0; -3x^5 + 5 = 0 \quad \left[\pm \sqrt{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \sqrt[4]{2}; \pm \frac{\sqrt[4]{135}}{3}; \pm \frac{\sqrt[4]{135}}{3}; \frac{\sqrt[5]{405}}{3} \right]$$

3. $x^5 - 3 = 0; x^3 - 5 = 0; x^5 + 3 = 0; 12x^3 + 3 = 0; 3x^{12} + 12 = 0; 3x^3 + 12 = 0$ $\left[\sqrt[5]{3}; \sqrt[3]{5}; -\sqrt[5]{3}; -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}; \emptyset; -\sqrt[3]{4} \right]$
4. $3x^6 + 5 = 0; 3x^6 - 5 = 0; 3x^5 + 6 = 0; -2x^7 - 4 = 0; 2x^7 - 4 = 0; 7x^2 + 4 = 0$ $\left[\emptyset; \pm \frac{\sqrt[6]{1215}}{3}; -\sqrt[5]{2}; -\sqrt[7]{2}; \sqrt[7]{2}; \emptyset \right]$
5. $-3x^8 - 4 = 0; -4x^8 - 3 = 0; 4x^8 - 3 = 0; 13x^4 + 12 = 0; 13x^{12} - 4 = 0; 4x^{13} + 12 = 0$ $\left[\emptyset; \emptyset; \pm \frac{\sqrt[8]{192}}{2}; \emptyset; \pm \frac{1}{\sqrt[12]{3}}; -\sqrt[13]{3} \right]$

Equazioni di secondo grado

Fase 1: Osserva

- Risolvere l'equazione $3x^2 - x + 1 = 0$. Questa è un'equazione di secondo grado trinomia. Calcoliamo il suo discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac$ (il riferimento è alla generica equazione $ax^2 + bx + c = 0$), in questo caso abbiamo $a = 3$, $b = -1$, $c = 1$. Poiché si ha: $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 1 - 12 = -11 < 0$ concludiamo che l'equazione non ha soluzioni reali in quanto il suo discriminante è negativo.
- Risolvere l'equazione $4x^2 + 5x - 4 = 0$. Calcoliamo il discriminante, osservando che si ha: $a = 4$, $b = 5$, $c = -4$ e quindi $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-4) = 25 + 64 = 89 > 0$. Dato che il suo discriminante è positivo, l'equazione ammette due soluzioni reali, che si determinano con le seguenti formule

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \vee x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Applichiamole: $x = \frac{-5 - \sqrt{89}}{2 \cdot 4} \vee x = \frac{-5 + \sqrt{89}}{2 \cdot 4} \Rightarrow x = \frac{-5 - \sqrt{89}}{8} \vee x = \frac{-5 + \sqrt{89}}{8}$. Nella formula abbiamo utilizzato il discriminante che avevamo già calcolato.

Risolvere l'equazione $16x^2 - 8x + 1 = 0$. Calcoliamo il discriminante: $\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 1 = 64 - 64 = 0$. Stavolta l'equazione ha una sola soluzione reale che si trova con la seguente più semplice formula, ottenuta sostituendo 0 a $b^2 - 4ac$ nelle formule generali: $x = -\frac{b}{2a}$. Nel nostro caso: $x = \frac{-(-8)}{2 \cdot 16} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

Fase 2: Completa ...

- Risolvere l'equazione $7x^2 - 2x - 3 = 0$. Questa è un'equazione di ... grado; calcoliamo il suo discriminante, tenendo conto che si ha: $a = 7$, $b = \dots$, $c = \dots$ e $\Delta = b^2 - 4ac = \dots$. Dato che il discriminante è, l'equazione ha soluzioni reali, determiniamo con le consuete formule: $x = \frac{-2 - \sqrt{\dots}}{2 \cdot \dots} \vee x = \frac{-2 + \sqrt{\dots}}{2 \cdot \dots} \Rightarrow \dots$
- Risolvere l'equazione $x^2 + 3x + 3 = 0$. Calcoliamo il discriminante, osservando che si ha: $a = \dots$, $b = \dots$, $c = \dots$. $\Delta = b^2 - 4ac = \dots$. Dato che il suo discriminante è l'equazione
- Risolvere l'equazione $25x^2 + 40x + 16 = 0$. Calcoliamo il discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac = \dots$. Dato che il discriminante è l'equazione ha che si trova applicando la formula: che nel nostro caso diviene:

Fase 3: Prova!

Calcolare le soluzioni reali delle seguenti equazioni di secondo grado, determinandone prima il discriminante

- $x^2 + 4x + 1 = 0; x^2 - 4x + 1 = 0; x^2 + 4x - 1 = 0; x^2 + 3x - 1 = 0; x^2 - 3x - 1 = 0; x^2 - 3x + 1 = 0$

$$\left[-2 \pm \sqrt{3}; 2 \pm \sqrt{3}; 2 \pm \sqrt{5}; \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}; \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}; \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right]$$
- $x^2 + 4x + 4 = 0; x^2 - 4x + 4 = 0; x^2 + 4x - 4 = 0; 6x^2 + 5x + 1 = 0; 5x^2 + 6x + 1 = 0; x^2 + 5x + 6 = 0$

$$\left[-2; 2; -2 \pm 2 \cdot \sqrt{2}; -\frac{1}{3} \vee -\frac{1}{2}; -\frac{1}{5} \vee -1; -3 \vee -2 \right]$$
- $3x^2 - 5x - 3 = 0; 5x^2 - 3x + 5 = 0; 5x^2 + 3x - 5 = 0; 12x^2 - 7x + 1 = 0; 7x^2 - 12x + 1 = 0; x^2 + 7x - 12 = 0$

$$\left[\frac{5 \pm \sqrt{61}}{6}; \emptyset; \frac{-3 \pm \sqrt{109}}{10}; \frac{1}{4} \vee \frac{1}{3}; \frac{6 \pm \sqrt{29}}{7}; \frac{-7 \pm \sqrt{97}}{2} \right]$$
- $2x^2 + 4x + 1 = 0; 4x^2 + 2x + 1 = 0; x^2 + 4x + 2 = 0; 169x^2 - 78x + 9 = 0; 169x^2 + 78x - 9 = 0; 169x^2 - 78x - 9 = 0$

$$\left[\frac{-2 \pm \sqrt{2}}{2}; \emptyset; -2 \pm \sqrt{2}; \frac{3}{13}; \frac{-3 \pm 3 \cdot \sqrt{2}}{13}; \frac{3 \pm 3 \cdot \sqrt{2}}{13} \right]$$
- $14x^2 - 11x + 10 = 0; 11x^2 - 14x + 10 = 0; 10x^2 + 14x - 11 = 0; \frac{1}{2}x^2 + x - 1 = 0; x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = 0; x^2 + \frac{1}{2}x - 1 = 0$

$$\left[\emptyset; \emptyset; \frac{7 \pm \sqrt{159}}{10}; -1 \pm \sqrt{3}; \emptyset; \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4} \right]$$

Equazioni trinomie**Fase 1: Osserva**

- Risolvere l'equazione $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$. Questa è un'equazione di quarto grado trinomia, detta anche *equazione biquadratica*. Calcoliamo il suo discriminante: $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$. In questo caso non possiamo dire che certamente l'equazione ha soluzioni, ma che potrebbe averne. Infatti se il discriminante è negativo certamente l'equazione non ha soluzioni reali, ma se è positivo debbono farsi ulteriori considerazioni. Associamo all'equazione di partenza un'equazione di secondo grado: $y^2 - 5y + 6 = 0$, in cui abbiamo posto $y = x^2$ e quindi $y^2 = x^4$. Determiniamo le soluzioni di quest'ultima equazione: $y = \frac{5 - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \vee y = \frac{5 + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \Rightarrow y = 2 \vee y = 3 \Rightarrow x^2 = 2 \vee x^2 = 3$. Come si nota, dato che abbiamo detto che i due simboli sono equivalenti, abbiamo poi sostituito ancora x^2 a y , ottenendo così due equazioni binomie: $x^2 = 2 \vee x^2 = 3$ che risolviamo: $x = \pm\sqrt{2} \vee x = \pm\sqrt{3}$. Ed ecco le soluzioni reali dell'equazione biquadratica.
- Risolvere l'equazione $x^6 + 3x^3 - 1 = 0$. Calcoliamo il discriminante: $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 9 + 12 = 21 > 0$. Troviamo le soluzioni dell'equazione associata, $y^2 + 3y - 1 = 0$, in cui si ha: $y = x^3, y^2 = x^6$, $y = \frac{-3 \pm \sqrt{10}}{2} \Rightarrow x^3 = \frac{-3 \pm \sqrt{10}}{2}$. Possiamo risolvere quindi le due equazioni binomie: $x = \sqrt[3]{\frac{-3 \pm \sqrt{10}}{2}}$ stavolta vi sono solo due soluzioni reali.
- Risolvere l'equazione $x^8 - 3x^4 - 10 = 0$. Calcoliamo il discriminante: $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49 > 0$. Determiniamo le soluzioni dell'equazione associata, $y^2 - 3y - 10 = 0$, in cui $y = x^4, y^2 = x^8$:

$$x^4 = \frac{3-\sqrt{49}}{2} \vee x^4 = \frac{3+\sqrt{49}}{2} \Rightarrow x^4 = \frac{3-7}{2} \vee x^4 = \frac{3+7}{2} \Rightarrow x^4 = -2 \vee x^4 = 5.$$

Delle due equazioni binomie ottenute, la prima è priva di soluzioni, perché una quarta potenza di un numero reale non è mai negativa, la seconda invece ammette le seguenti soluzioni reali: $x = \pm\sqrt[4]{5}$, che sono le uniche soluzioni reali dell'equazione di partenza.

Fase 2: Completa ...

- Risolvere l'equazione $x^6 - 7x^3 + 15 = 0$. Questa è un'equazione di ... grado; calcoliamo il suo discriminante, tenendo conto che si ha: $a = 1$, $b = \dots$, $c = \dots$, $\Delta = \dots$. Dato che il discriminante è, l'equazione soluzioni reali.
- Risolvere l'equazione $x^{12} + 10x^6 + 24 = 0$. Calcoliamo il discriminante, osservando che si ha: $a = \dots$, $b = \dots$, $c = \dots$, $\Delta = \dots$. Dato che il suo discriminante è calcoliamo le soluzioni dell'equazione di secondo grado associata: $y^2 + 10y + 24 = 0$, in cui si ha: $y = \dots$ e $y^2 = \dots$. $y = x^6 = \dots$ e $y = x^6 = \dots$. Dato che tutte e due le soluzioni dell'equazione associata sono possiamo dire che le equazioni binomie ottenute sono entrambe prive di, quindi anche l'equazione di partenza non ha
- Risolvere l'equazione $x^{10} + 10x^5 + 25 = 0$. Calcoliamo il discriminante: $\Delta = \dots$. Dato che il discriminante è l'equazione associata ha che si trova applicando la formula: e che nel nostro caso diviene: $y = x^5 = \dots$. Questa equazione ha l'unica soluzione reale $x = \dots$, che è anche l'unica soluzione reale dell'equazione di partenza.

Fase 3: Prova!

Calcolare le soluzioni reali delle seguenti equazioni trinomie, determinandone il discriminante e le soluzioni delle equazioni di secondo grado associate

1. $x^4 + 11x^2 + 24 = 0$; $x^4 + 11x^2 - 24 = 0$; $x^4 - 11x^2 - 24 = 0$; $x^4 - 2x^2 - 35 = 0$; $x^6 - 2x^3 - 35 = 0$; $x^8 - 2x^4 + 35 = 0$

$$\left[\emptyset; \pm\sqrt{\frac{-11-\sqrt{217}}{2}}; x = \pm\sqrt{\frac{11+\sqrt{217}}{2}}; \pm\sqrt{7}; -\sqrt[3]{5} \vee \sqrt[3]{7}; \emptyset \right]$$
2. $x^6 + 12x^3 + 32 = 0$; $x^4 - 12x^2 - 32 = 0$; $x^{10} - 12x^5 + 32 = 0$; $x^6 - 4x^3 + 5 = 0$; $x^4 + 4x^2 + 5 = 0$; $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$.

$$\left[-2 \vee -\sqrt[3]{4}; \pm\sqrt{6+2\cdot\sqrt{17}}; \sqrt[5]{8} \vee \sqrt[5]{4}; \emptyset; \emptyset; \emptyset \right]$$
3. $x^8 + 4x^4 + 4 = 0$; $4x^4 + 4x^2 + 1 = 0$; $4x^6 - 4x^3 - 1 = 0$; $x^8 - 5x^4 + 13 = 0$; $13x^4 + 5x^2 - 1 = 0$; $5x^4 - 13x^2 + 1 = 0$

$$\left[\emptyset; \emptyset; \sqrt[3]{\frac{-1\pm\sqrt{2}}{2}}; \emptyset; \pm\sqrt{\frac{-5+\sqrt{77}}{26}}; \pm\sqrt{\frac{13\pm\sqrt{149}}{10}} \right]$$
4. $x^{14} - 17x^7 + 60 = 0$; $x^{12} + 17x^6 - 60 = 0$; $x^4 - 17x^2 + 60 = 0$; $x^8 + 10x^4 - 39 = 0$; $x^6 - 10x^3 - 39 = 0$; $39x^4 - 10x^2 - 1 = 0$

$$\left[\sqrt[7]{5} \vee \sqrt[7]{12}; \pm\sqrt[6]{3}; \pm 2 \cdot \sqrt{3} \vee \pm\sqrt{5}; \pm\sqrt[4]{3}; -\sqrt[3]{3} \vee \sqrt[3]{13}; \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \right]$$
5. $x^8 - 16x^4 + 28 = 0$; $x^4 + 16x^2 - 28 = 0$; $x^4 - 28x^2 + 16 = 0$; $121x^4 + 44x^2 + 4 = 0$; $4x^4 + 44x^2 + 121 = 0$; $121x^6 - 4x^3 - 44 = 0$

$$\left[\pm\sqrt[4]{14} \vee \pm\sqrt[4]{2}; \pm\sqrt{-8+2\cdot\sqrt{23}}; \pm 3 \pm \sqrt{5}; \emptyset; \emptyset; \sqrt[3]{\frac{2\pm 12\cdot\sqrt{37}}{121}} \right]$$

Equazioni irrazionali

Fase 1: Osserva

- Risolvere l'equazione $\sqrt{x+2} = -1$. Dato che il primo membro è certamente non negativo, mentre il secondo è negativo, possiamo concludere che la detta equazione non ha soluzioni reali.
- Risolvere l'equazione $\sqrt{4x+5} = 2$. In questo caso l'uguaglianza potrebbe avere senso, per risolverla innalziamo al quadrato ambo i membri, ottenendo: $4x+5=2^2 \Rightarrow 4x=4-5 \Rightarrow x=-\frac{1}{4}$. Questo valore così ottenuto è una potenziale soluzione, che dobbiamo verificare. Abbiamo perciò

$$\sqrt{4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 5} = 2 \Rightarrow \sqrt{-1+5} = 2 \Rightarrow \sqrt{4} = 2$$

La verifica ha avuto esito positivo, quindi il valore ottenuto è soluzione dell'equazione data.

- Risolvere l'equazione $\sqrt{5x^2+3x-1} = 2x+1$. Come nel caso precedente innalziamo al quadrato ambo i membri, ottenendo: $5x^2+3x-1=(2x+1)^2 \Rightarrow 5x^2+3x-1=4x^2+4x+1 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow x=\frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} \frac{1+3}{2}=2 \\ \frac{1-3}{2}=-1 \end{cases}$.

Verifichiamo se le soluzioni sono accettabili: $\sqrt{5 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 1} = 2 \cdot 2 + 1 \Rightarrow \sqrt{20+6-1} = 4+1 \Rightarrow \sqrt{25} = 5$ e $\sqrt{5 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 1} = 2 \cdot (-1) + 1 \Rightarrow \sqrt{5-3-1} = -2+1 \Rightarrow \sqrt{1} = -1$. In questo caso una sola delle due soluzioni è accettabile.

- Risolvere l'equazione $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-3} = 1$. Dobbiamo innalzare al quadrato più volte.
 $(\sqrt{x+2})^2 = (1 + \sqrt{x-3})^2 \Rightarrow x+2 = 1 + 2 \cdot \sqrt{x-3} + x-3 \Rightarrow 4 = 2 \cdot \sqrt{x-3} \Rightarrow 2 = \sqrt{x-3} \Rightarrow 4 = x-3 \Rightarrow x=7$
 Il valore ottenuto è accettabile, come facilmente si verifica.

Fase 2: Completa ...

- Risolvere l'equazione $\sqrt{5x+2} + \sqrt{3x+1} = 0$. Dato che al primo membro i due addendi rappresentano numeri il cui segno è sempre, la somma non può mai essere nulla, tranne che siano nulli entrambi gli addendi. Ciò significa che deve essere verificato il seguente sistema, che è facile vedere non ha alcuna soluzione, quindi l'equazione data
- Risolvere l'equazione $\sqrt{11x-9} = 5$. Dobbiamo ambo i membri, ottenendo:

Il valore così ottenuto è una potenziale soluzione, che deve La verifica ha avuto esito, quindi il valore ottenuto ... soluzione dell'equazione data.

- Risolvere l'equazione $\sqrt{3x^2-7x+5} = x-9$. Dobbiamo, ottenendo:

Verifichiamo se entrambe le soluzioni ottenute sono accettabili.

$$\sqrt{3 \cdot \left(\frac{19}{2}\right)^2 - 7 \cdot \frac{19}{2} + 5} = \frac{19}{2} - 9 \Rightarrow \sqrt{3 \cdot \frac{361}{4} - \frac{133}{2} + 5} = \frac{19-18}{2} \Rightarrow \dots\dots\dots;$$

$$\sqrt{3 \cdot 4^2 - 7 \cdot 4 + 5} = 4 - 9 \Rightarrow \dots\dots\dots$$

Concludiamo che delle due soluzioni

- Risolvere l'equazione $\sqrt{3x+1} + \sqrt{2x-7} = 3$. Dobbiamo innalzare al quadrato più volte.

$$(\sqrt{3x+1})^2 = (3 - \sqrt{2x-7})^2 \Rightarrow 3x+1 = 9 - 6 \cdot \sqrt{2x-7} + 2x-7 \Rightarrow$$

.....

Verifichiamo se i valori ottenuti sono accettabili.

$$\sqrt{3 \cdot (37 - \sqrt{1116}) + 1} + \sqrt{2 \cdot (37 - \sqrt{1116}) - 7} = 3 \Rightarrow \sqrt{111 - 37 \cdot \sqrt{1116} + 1} + \sqrt{74 - 2 \cdot \sqrt{1116} - 7} \Rightarrow$$

.....

e

.....

Approssimando i radicali notiamo che le soluzioni sono

Fase 3: Prova!

Determinare le eventuali soluzioni reali delle seguenti equazioni irrazionali

1. $\sqrt{4x+3} = 2x-1; \sqrt{5x+7} = 4; \sqrt{x+1} = x; \sqrt{7x+1} = 7x+2; \sqrt{2-x} = x; \sqrt{5-x^2} = 3 \left[\frac{2+\sqrt{6}}{2}; \frac{9}{5}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \emptyset; 1; \emptyset \right]$
2. $\sqrt{3x^2-x+1} = 41; \sqrt{x^2-3} = 2x; \sqrt{x^2+1} = x+3; \sqrt{3-2x} = 3-2x; \sqrt{3+2x} = 3-2x; \sqrt{x^2-x} = x+1$
 $\left[\frac{1 \pm \sqrt{20161}}{6}; \emptyset; -\frac{4}{3}; \frac{3}{2} \vee 1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3} \right]$
3. $2 \cdot \sqrt{x+1} = 5x; 3 \cdot \sqrt{3x} = 2x-1; \sqrt{x^2+x} = x-2; \sqrt{3x+1} = \sqrt{4x-2}; \sqrt{x^2+7} = \sqrt{2x^2-x}; \sqrt{4x+7} = \sqrt{5x-2-x^2}.$
 $\left[\frac{2+2 \cdot \sqrt{26}}{25}; \frac{31+3 \cdot \sqrt{105}}{8}; \emptyset; 3; \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}; \emptyset \right]$
4. $\sqrt{5+4x} - \sqrt{x} = 2; \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} = 3; \sqrt{x+3} - \sqrt{x+2} = 1; \sqrt{4x+1} = 2 + \sqrt{3-x}; \sqrt{11x-2} = 1 - \sqrt{5-2x}; \sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1} = 1$
 $\left[\frac{1}{9} \vee 1; \frac{7}{9}; -2; 2; \emptyset; \frac{5}{8} \right]$

Sistemi non lineari

Fase 1: Osserva

- Risolvere il sistema $\begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ x^2+y-x+2=0 \end{cases}$. Questo è un sistema di secondo grado, essendo formata da

un'equazione di primo grado e da una di secondo. Un metodo spesso usato per risolvere sistemi di qualsiasi grado è quello di sostituzione, che consiste nel ricavare una delle incognite da una delle equazioni, quando ciò è possibile, sostituendone il valore trovato nelle altre equazioni. Così in questo caso ricaviamo: o il valore di x dalla prima equazione e lo sostituiamo nella seconda; o il valore di y da una delle due sostituendola nell'altra. Non conviene ricavare il valore di x dalla seconda equazione perché è di secondo grado, ciò perciò provocherebbe al comparsa di termini con radicali che complicherebbero la risoluzione. Per evitare di immettere frazioni, almeno in una prima fase, ricaviamo y dal-

la seconda equazione e la sostituiamo nella prima: $\begin{cases} 2x-3 \cdot (-x^2+x-2)+1=0 \\ y=-x^2+x-2 \end{cases}$. In questo modo la

prima è un'equazione di secondo grado nell'incognita x che risolviamo:

$$\begin{cases} 2x+3x^2-3x+6+1=0 \\ y=-x^2+x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2-x+7=0 \\ y=-x^2+x-2 \end{cases}$$

Dato che però il discriminante è negativo ($\Delta = 1 - 4 \cdot 3 \cdot 7 = 1 - 84 < 0$), l'equazione, e quindi il sistema, non hanno soluzioni reali.

- Risolvere il sistema $\begin{cases} 4x + y - 5 = 0 \\ y^2 + x^2 - 3y - x + 2 = 0 \end{cases}$. Applichiamo il metodo di sostituzione ricavando la y

dalla prima equazione e sostituendo nella seconda:

$$\begin{cases} y = -4x + 5 \\ (-4x + 5)^2 + x^2 - 3(-4x + 5) - x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -4x + 5 \\ 16x^2 - 40x + 25 + x^2 + 12x - 15 - x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -4x + 5 \\ 17x^2 - 29x + 12 = 0 \end{cases}$$

Risolviamo l'equazione di secondo grado in x . Calcoliamo il $\Delta = 29^2 - 4 \cdot 17 \cdot 12 = 841 - 816 = 25 >$

0, e determiniamo le soluzioni: $x = \frac{29 \pm \sqrt{25}}{34} = \frac{29 \pm 5}{34} = \begin{cases} \frac{29+5}{34} = \frac{34}{34} = 1 \\ \frac{29-5}{34} = \frac{24}{34} = \frac{12}{17} \end{cases}$. Sostituiamo i valori otte-

nuti nella prima equazione: $\left(\begin{cases} y = -4 \cdot 1 + 5 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases} \right) \vee \left(\begin{cases} y = -4 \cdot \frac{12}{17} + 5 \\ x = \frac{12}{17} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{-48+85}{17} \\ x = \frac{12}{17} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{37}{17} \\ x = \frac{12}{17} \end{cases} \right)$. Ab-

biamo così trovato le soluzioni del sistema.

- Risolvere il sistema: $\begin{cases} x + y = 13 \\ xy = 31 \end{cases}$. Abbiamo un particolare sistema di secondo grado, che richiede di

determinare due numeri reali dei quali si conoscono la somma e il prodotto. Invece di applicare il metodo di sostituzione conviene costruire l'equazione di secondo grado associata: $z^2 - s \cdot z + p = 0$, in cui s e p indicano rispettivamente la somma e il prodotto noti delle variabili. Le soluzioni di questa equazione sono anche le soluzioni del sistema. Vediamo in che modo. Cominciamo a risolvere l'equazione associata che in questo caso è: $z^2 - 13 \cdot z + 31 = 0$.

$$z = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 4 \cdot 1 \cdot 31}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 124}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{45}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{9 \cdot 5}}{2} = \frac{13 \pm 3 \cdot \sqrt{5}}{2}$$

Ecco le soluzioni del sistema: $\begin{cases} x = \frac{13 + 3 \cdot \sqrt{5}}{2} \\ y = \frac{13 - 3 \cdot \sqrt{5}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{13 - 3 \cdot \sqrt{5}}{2} \\ y = \frac{13 + 3 \cdot \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Fase 2: Completa ...

- Risolvere il sistema $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ x^2 + 4y - 2x - 12 = 0 \end{cases}$. Abbiamo un sistema di grado. Applichiamo il metodo

di sostituzione, ricavando il valore dell'incognita y dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda:

$$\begin{cases} y = \dots\dots\dots \\ x^2 + 4 \cdot (\dots\dots\dots) - 2x - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Così la seconda è un'equazione digrado nell'incognita x che risolviamo:

.....
I valori trovati li sostituiamo nella prima equazione ricavando i valori numerici di y :

$$\begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases} \vee \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases} \vee \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Risolvere il sistema: $\begin{cases} x + y = 24 \\ xy = 15 \end{cases}$.
Per risolvere questo sistema dobbiamo considerare la seguente equazione di secondo grado associata: $z^2 - \dots z - \dots = 0$. Risolviamola: $z = \dots\dots\dots$. Scriviamo adesso le solu-

zioni del sistema: $\begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases} \vee \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$

Fase 3: Prova!**Utilizzando il metodo di sostituzione risolvere i seguenti sistemi non lineari**

$$1. \quad \begin{cases} x - y + 4 = 0 \\ x^2 - 4y - x + 2 = 0 \end{cases}; \begin{cases} 3x + 4y + 1 = 0 \\ x^2 - 2x - y + 1 = 0 \end{cases}; \begin{cases} x - y = -1 \\ 4x - y^2 + 2x - 3y + 76 = 0 \end{cases}$$

$$[(\{-2; 2\} \vee \{7; 11\}), (\emptyset); (\{-8; -7\} \vee \{9; 10\})]$$

$$2. \quad \begin{cases} 4x - 5y + 15 = 0 \\ 2x^2 - 3x + 2y = 63 \end{cases}; \begin{cases} 3x^2 - y^2 + 1 = 0 \\ -2x + 3y = 13 \end{cases}; \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17 \\ y^2 = 4x + 16 \end{cases}$$

$$\left[\left(\{-5; -1\} \vee \left\{ \frac{57}{10}; \frac{189}{25} \right\} \right); \left(\left\{ -\frac{40}{23}; \frac{73}{23} \right\} \vee \{4; 7\} \right); (-3; \pm 2) \right]$$

$$3. \quad \begin{cases} 3x^2 - 2y = 2x + 6 \\ x^2 - y = x - 5 \end{cases}; \begin{cases} -x^2 + 4y = x - 12 \\ 5x^2 - y = 7x + 3 \end{cases}; \begin{cases} x - 5y + 3 = 0 \\ 2x^2 - x - 4y = 3 \end{cases}; \begin{cases} x^2 + y^2 = 32 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\left(\{-4; 25\} \vee \{4; 17\} \right); \left(\{0; -3\} \vee \left\{ \frac{29}{19}; -\frac{735}{361} \right\} \right); \left(\frac{9 \pm 3 \cdot \sqrt{129}}{20}; \frac{69 \pm 3 \cdot \sqrt{129}}{100} \right); (\{-4; \pm 4\} \vee \{4; \pm 4\}) \right]$$

Risolvere i seguenti sistemi non lineari mediante la risoluzione delle equazioni a essi associate.

$$4. \quad \begin{cases} x + y = 17 \\ xy = 4 \end{cases}; \begin{cases} x + y = -5 \\ xy = 1 \end{cases}; \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = -2 \end{cases}; \begin{cases} x + y = -8 \\ xy = -7 \end{cases}; \begin{cases} (x + y)^2 = 16 \\ xy = 3 \end{cases} \quad (\text{Attenzione! Vengono fuori due}$$

distinti sistemi)

$$\left[\left(\frac{17 \pm \sqrt{273}}{2}; \frac{17 \mp \sqrt{273}}{3} \right); \left(\frac{-5 \pm \sqrt{33}}{2}; \frac{-5 \mp \sqrt{33}}{2} \right); \left(\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}; \frac{3 \mp \sqrt{17}}{2} \right); (-4 \pm \sqrt{23}; -4 \mp \sqrt{23}); (\{\pm 3; \pm 1\} \vee \{\pm 1; \pm 3\}) \right]$$

5. Algebra non lineare

5.3 Disequazioni non lineari

Prerequisiti

- Numeri irrazionali e calcolo con i radicali
- Risoluzione di equazioni binomie, trinomie e reciproche
- Risoluzione di disequazioni lineari
- Risoluzione di sistemi di disequazioni lineari

Obiettivi

- Risolvere disequazioni di secondo grado, utilizzando quanto appreso sulle equazioni
- Risolvere sistemi di disequazioni di grado superiore al primo
- Comprendere il concetto di intervallo delle soluzioni

Contenuti

- Disequazioni non lineari
- Sistemi di disequazioni non lineari

Diseguazioni e sistemi di disequazioni non lineari

Nel modulo relativo ai problemi lineari, nel volume primo, abbiamo introdotto il concetto di disuguaglianza e quello conseguente di disequazione, concentrandoci nella risoluzione delle disequazioni lineari o esprimibili come prodotto o rapporto di fattori lineari.

Adesso vogliamo risolvere le disequazioni di grado superiore al primo per cui utilizziamo il teorema già enunciato nell'unità "Equazioni non lineari", che qui enunciamo in forma diversa.

Teorema 1

Dato il polinomio $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, se esso ammette solo i seguenti zeri reali, non necessariamente tutti distinti, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{m-1}, x_m; m \leq n$, allora vale la seguente identità:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = a_0 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot \dots \cdot (x - x_m) \cdot Q_m(x)$$

in cui $Q(x)$ è un polinomio di grado $n - m$.

Ciò significa che leghiamo la risoluzione di una disequazione polinomiale di grado superiore al primo al problema di scomporre il polinomio in fattori, determinando i suoi eventuali zeri. Vediamo qualche esempio.

Esempio 1

- Risolvere la disequazione $x^2 + 7x + 10 > 0$. Consideriamo il polinomio associato $x^2 + 7x + 10$ e procediamo a scomporlo in prodotto di polinomi. In particolare consideriamo il trinomio di secondo grado, cioè cerchiamo due numeri interi, se esistono, la cui somma sia 7 e il cui prodotto sia 10. Essi sono 2 e 5. Pertanto scriviamo: $x^2 + 7x + 10 = (x + 2) \cdot (x + 5)$ e quindi la disequazione di partenza è equivalente alla risoluzione di $(x + 2) \cdot (x + 5) > 0$. Sappiamo che ciò equivale alla determinazione del segno di un prodotto, stabiliamo quindi il segno dei singoli fattori, cominciando dal positivo: $x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2 \wedge x$

	-5		-2	
-		-		+
-		+		+
+		-		+

$+ 5 > 0 \Rightarrow x > -5$ e rappresentiamo in un grafico ottenendo il risultato finale: $x < -5 \vee x > -2$.

- Risolvere la disequazione $x^2 - 3x - 5 \leq 0$. Stavolta non abbiamo un trinomio notevole dobbiamo perciò

usare la formula risolutiva dell'equazione di II grado: $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 20}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2}$, perciò possiamo

scrivere la disequazione iniziale nel seguente modo: $\left(x - \frac{3 + \sqrt{29}}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{3 - \sqrt{29}}{2}\right) \leq 0$. Quindi abbiamo il

	$\frac{-3 - \sqrt{29}}{2}$		$\frac{-3 + \sqrt{29}}{2}$	
-		-		+
-		+		+
+		-		+

seguente schema:

dal quale si ricava la soluzione: $\frac{3 - \sqrt{29}}{2} \leq x \leq \frac{3 + \sqrt{29}}{2}$.

L'esempio precedente permette di impostare il problema più in generale per la risoluzione delle disequazioni $ax^2 + bx + c > 0 \vee ax^2 + bx + c < 0$ nel caso in cui il discriminante dell'equazione associata sia positivo, ovve-

ro l'equazione ammetta due soluzioni distinte $x_1 < x_2$. Osserviamo che possiamo sempre supporre $a > 0$, poiché se così non fosse potremmo cambiare segno a tutti i coefficienti e verso alla disequazione. Sulla base di queste ipotesi, grazie al Teorema 1, possiamo scrivere la disequazione nella seguente forma

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) > 0 \vee a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) < 0$$

e quindi a essa associamo il grafico seguente

	x_1	x_2
$x - x_1$	—	—
$x - x_2$	—	+
$ax^2 + bx + c$	+	—

mediante il quale possiamo dire che il trinomio $ax^2 + bx + c$, nelle ipotesi $a > 0$, $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ e x_1, x_2 siano i suoi zeri, con $x_1 < x_2$, è positivo negli intervalli in cui è $x < x_1 \vee x > x_2$, mentre risulta negativo nell'intervallo in cui è $x_1 < x < x_2$.

Possiamo perciò enunciare il seguente teorema.

Teorema 2

Nell'ipotesi in cui sia $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, il trinomio $ax^2 + bx + c$ ammette due zeri x_1, x_2 , con $x_1 < x_2$, quindi si scrive $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$. Pertanto assume lo stesso segno di a quando è $x < x_1 \vee x > x_2$, mentre assume il segno opposto a quello di a se è $x_1 < x < x_2$.

Vediamo l'applicazione del teorema agli esercizi.

Esempio 2

- Risolvere la disequazione $3x^2 - 7x + 1 < 0$. Dato che l'equazione associata ha delta positivo: $49 - 12 = 37$, troviamo le sue soluzioni, che sono $x = \frac{7 \pm \sqrt{37}}{6}$. Adesso grazie al Teorema 2 possiamo dire che il trinomio è negativo, cioè ha segno opposto al suo primo coefficiente, per $\frac{7 - \sqrt{37}}{6} < x < \frac{7 + \sqrt{37}}{6}$.
- Risolvere la disequazione $-5x^2 - 17x + 4 < 0$. Il problema è equivalente a quello di risolvere la disequazione $5x^2 + 17x - 4 > 0$. Anche in questo caso il delta è positivo e le soluzioni dell'equazione associata sono $x = \frac{17 \pm \sqrt{369}}{10}$, quindi il trinomio è positivo, cioè ha lo stesso segno del suo primo coefficiente, per i seguenti valori: $x < \frac{17 - \sqrt{369}}{10} \vee x > \frac{17 + \sqrt{369}}{10}$.
- Risolvere la disequazione $11x^2 + 7x - 8 \geq 0$. Le soluzioni dell'equazione associata sono $x = \frac{-7 \pm \sqrt{401}}{22}$. Stavolta ci interessa sapere quando il trinomio è positivo o nullo, perciò la soluzione sarà: $x \leq \frac{-7 - \sqrt{401}}{22} \vee x \geq \frac{-7 + \sqrt{401}}{22}$.

Il procedimento descritto nell'esempio precedente può usarsi anche se il discriminante è nullo, anzi in questo caso, per il Teorema 2, si ha: $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_1) = a \cdot (x - x_1)^2$. Quindi il segno del trinomio è lo stesso del primo coefficiente, essendo l'altro fattore un quadrato perfetto, e quindi sempre positivo per $x \neq x_1$. Grazie alla formula risolutiva dell'equazione di secondo grado siamo anche in grado di determinare

x_1 . Infatti: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b}{2a}$, pertanto $x_1 = -\frac{b}{2a}$. In queste ipotesi vale il seguente risultato.

Teorema 3

Nell'ipotesi in cui sia $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, il trinomio $ax^2 + bx + c$ ammette un solo zero reale $x = -\frac{b}{2a}$ e pertanto si scrive: $ax^2 + bx + c = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. Quindi esso assume lo stesso segno di a quando è $x \neq -\frac{b}{2a}$, mentre non assume mai il segno opposto a quello di a .

Anche in questo caso vediamo delle applicazioni del teorema.

Esempio 3

- Risolvere $9x^2 - 6x + 1 > 0$. Si ha: $\Delta = 36 - 36 = 0$, per il teorema 3 si ha: $9x^2 - 6x + 1 > 0 \Leftrightarrow (3x - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{3}$.
- Risolvere la disequazione $16x^2 + 40x + 25 \geq 0$. Si ha: $\Delta = 1600 - 1600 = 0$, perciò per il Teorema 3. si ha $16x^2 + 40x + 25 \geq 0 \Leftrightarrow (4x + 5)^2 \geq 0$, il che accade per ogni numero reale.
- Risolvere la disequazione $81x^2 + 18x + 1 < 0$. Occorre verificare se il trinomio è un quadrato di binomio per stabilire se il discriminante è nullo; in questo caso lo è e si ha $(9x + 1)^2 < 0$, quindi la disequazione non ha soluzioni.
- Risolvere la disequazione $x^2 - 18x + 81 \leq 0$. Si ha $(x - 9)^2 \leq 0$, quindi il trinomio non è mai negativo, è però nullo per $x = 9$, perciò questa è l'unica soluzione.

Consideriamo infine il caso in cui il trinomio abbia discriminante negativo. Ricordiamo quanto vale per il completamento dei quadrati. Se il discriminante del trinomio è negativo, esso può scriversi nel seguente modo:

do: $ax^2 + bx + c = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$. Consideriamo la precedente espressione nell'ipotesi in cui sia

$a > 0$. Dato che $\Delta < 0$, essa risulta la somma di un numero non negativo e di un numero positivo, quindi è sempre un numero positivo. Ciò significa che vale il seguente teorema.

Teorema 4

Nell'ipotesi in cui sia $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, il trinomio $ax^2 + bx + c$ assume sempre lo stesso segno di a .

Anche in questo caso vediamo delle applicazioni.

Esempio 4

- Risolvere la disequazione $6x^2 - x + 8 > 0$. Si ha $\Delta = 1 - 196 < 0$, per il Teorema 2 il trinomio è sempre positivo, quindi tutti i numeri reali sono soluzioni della disequazione.
- Risolvere la disequazione $x^2 - 5x + 18 < 0$. Si ha $\Delta = 25 - 72 < 0$, per il Teorema 4 il trinomio è sempre positivo, quindi nessun numero reale è soluzione della disequazione.

Per le disequazioni di secondo grado abbiamo stabilito regole che facilitano il loro svolgimento, per quelle di grado superiore si procede alla scomposizione in fattori, quando è possibile.

Esempio 5

- Data la disequazione $3x^3 - 5x^2 + 5x - 3 < 0$, risolviamo l'equazione reciproca: $3x^3 - 5x^2 + 5x - 3 = 0 \Rightarrow 3 \cdot (x^3 - 1) - 5x \cdot (x - 1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) - 5x \cdot (x - 1) = 0 \Rightarrow (x - 1) \cdot (3x^2 + 3x + 3 - 5x) = 0 \Rightarrow (x - 1) \cdot (3x^2 - 2x + 3) = 0$. Quindi possiamo scrivere: $3x^3 - 5x^2 + 5x - 3 < 0 \Leftrightarrow (x - 1) \cdot (3x^2 - 2x + 3) < 0$. Ora il fattore trinomio ha discriminante negativo ($\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = 4 - 36$), quindi l'espressione ha il segno del suo primo coefficiente 3, cioè è sempre positiva. Possiamo perciò eliminarlo e affermare che la disequazione di partenza ha le stesse soluzioni di $x - 1 < 0 \Rightarrow x < 1$.
- Risolvere la disequazione fratta $\frac{6x^5 - 2}{4x^4 - 3x^2 - 1} > 0$. Il segno del numeratore può essere determinato

subito, esso è positivo per $x > \sqrt[5]{\frac{1}{3}}$. Per il denominatore risolviamo l'equazione biquadratica a esso

associata, ottenendo: $x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{8} = \left\langle -\frac{1}{4} \right\rangle$. Perciò scriviamo $4x^4 - 3x^2 - 1 = 4 \cdot (x^2 - 1) \cdot \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)$. Il

secondo fattore è sempre positivo, può perciò eliminarsi, non essendo di alcun interesse ai fini del segno dell'intera espressione. Dobbiamo quindi risolvere $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. La disequazione di partenza diviene

$\frac{6x^5 - 2}{4 \cdot (x-1) \cdot (x+1)} > 0$. Lo schema associato alla precedente disequazione è il seguente, tenuto conto che

nella prima riga è descritto il segno del numeratore, nella seconda quello del denominatore e nella terza quello dell'intera frazione, ossia quello che a noi interessa:

		-1	$\sqrt[5]{\frac{1}{3}}$	1	
$6x^5 - 2$	—	—	—	+	+
$x^2 - 1$	+	—	—	—	+
$\frac{6x^5 - 2}{4 \cdot (x^2 - 1)}$	—	+	—	+	+

Le soluzioni sono quindi: $-1 < x < \sqrt[5]{\frac{1}{3}} \vee x > 1$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

- Risolvere $4x^2 - 7x - 1 > 0$. Avendo a che fare con una disequazione di secondo grado è importante determinare il valore del discriminante: $\Delta = 49 + 16 = 65 > 0$. L'equazione associata ha perciò le seguenti due soluzioni: $x = \frac{7 \pm \sqrt{65}}{8}$. La disequazione ha soluzioni quando il trinomio assume lo stesso segno del primo coefficiente, che è appunto positivo. Per quanto visto in teoria possiamo dire che le soluzioni sono esterne all'intervallo i cui estremi sono gli zeri del trinomio. Quindi $x < \frac{7 - \sqrt{65}}{8} \vee x > \frac{7 + \sqrt{65}}{8}$.
- Risolvere $2x^2 - 2 \cdot \sqrt{2}x + 1 \leq 0$. Stavolta si ha: $\Delta = 4 \cdot 2 - 4 \cdot 2 = 0$ e l'equazione associata ha perciò una sola soluzione: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. La disequazione data ha soluzioni quando il trinomio assume segno contrario a quello del primo coefficiente, ma ciò non accade mai. Vi è però la possibilità che il trinomio sia nullo e, poiché il verso della disequazione è $\leq$, l'unica soluzione è $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Risolvere $14x^2 + 3x + 2 < 0$. Abbiamo $\Delta = 9 - 4 \cdot 14 \cdot 2 < 0$. L'equazione associata non ha soluzioni reali, quindi il trinomio assume sempre il segno del primo coefficiente. Dato che esso è positivo, mentre vogliamo sapere quando è negativo, la disequazione in oggetto non ha soluzioni.

Risolvere le seguenti disequazioni

Livello 1

- $10x^2 - 23x - 5 > 0$; $49x^2 - 28x + 4 > 0$; $25x^2 - 10x + 1 < 0$; $81x^2 + 144x + 64 \leq 0$

$$\left[\left(x < -\frac{1}{5} \vee x > \frac{5}{2} \right); x \neq \frac{2}{7}; \emptyset; x = -\frac{8}{9} \right]$$
- $11x^2 - 32x + 35 > 0$; $-56x^2 + 9x + 2 > 0$; $169x^2 - 1 \leq 0$; $135x^2 - 85x \geq 0$

$$\left[\forall x \in \mathbb{R}; -\frac{1}{8} < x < \frac{2}{7}; -\frac{1}{13} \leq x \leq \frac{1}{13}; \left(x \leq 0 \vee x \geq \frac{17}{27} \right) \right]$$
- $-3x^2 + 2x - 1 \leq 0$; $12x^2 + 5x - 1 < 0$; $11x^2 + 7x + 2 < 0$; $3x^2 - 2 \cdot \sqrt{3}x + 1 < 0$

$$\left[\left(x < -\frac{1}{5} \vee x > \frac{5}{2} \right); x \neq \frac{2}{7}; \emptyset; x = -\frac{8}{9} \right]$$
- $2x^2 - 6x + 3 \leq 0$; $6x^2 - 5x - 2 \geq 0$; $16x^2 - 8x + 1 \leq 0$; $169x^2 + 104x + 16 \geq 0$

$$\left[\frac{3 - \sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{3 + \sqrt{3}}{2}; \left(x \leq \frac{5 - \sqrt{73}}{12} \vee x \geq \frac{5 + \sqrt{73}}{12} \right); x = \frac{1}{4}; \forall x \in \mathbb{R} \right]$$
- $11x^7 - 3 \geq 0$; $23x^8 + 1 > 0$; $x^6 + 8 < 0$; $4x^{12} - 1 < 0$; $48x^4 + 11 \geq 0$

$$\left[x \geq \sqrt[7]{\frac{3}{11}}; \forall x \in \mathbb{R}; \emptyset; -\frac{1}{\sqrt[6]{2}} < x < \frac{1}{\sqrt[6]{2}}; \forall x \in \mathbb{R} \right]$$

Livello 2

- $\left(\frac{1}{2}x - 1 \right) \cdot \left(\frac{2}{3}x + 1 \right) - x^2 + 3x > 8x + 1$; $(x - 1) \cdot (x + 2) - 3x \leq (2x - 1) \cdot (-x + 1) + 13x - x^2$

$$\left[\frac{-31 - \sqrt{769}}{8} < x < \frac{-31 + \sqrt{769}}{8}; \frac{9 - \sqrt{85}}{4} \leq x \leq \frac{9 + \sqrt{85}}{4} \right]$$
- $\frac{2x - 1}{2} + \frac{x^2 - 3x + 1}{3} \leq \frac{(x - 3) \cdot (2x + 3)}{4} - 3x^2 + 1$ [$\emptyset$]

$$8. \quad (3x+1) \cdot (2x-1) - (4x-1) \cdot (-2x+3) \leq 3x+2 - \left(\frac{1}{2}x-1\right) \cdot \left(5x-\frac{3}{2}\right) \quad \left[\frac{95-\sqrt{7441}}{132} \leq x \leq \frac{95+\sqrt{7441}}{132}\right]$$

$$9. \quad (x+12) \cdot (5x-1) - \left(\frac{3}{2}x+1\right) \cdot \left(\frac{2}{3}x-1\right) > \left(\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}x-5\right) + x^2 - x + 1$$

$$\left[x < -2 \cdot \frac{383+\sqrt{152485}}{63} \vee x > -2 \cdot \frac{383-\sqrt{152485}}{63}\right]$$

$$10. \quad (x+1)^2 - \left(\frac{1}{3}x-1\right) \cdot \left(\frac{1}{3}x+1\right) \geq (3x+1)^2 + \left(\frac{2}{3}-x\right) \cdot \left(\frac{2}{3}x+1\right) \quad \left[\frac{-31-\sqrt{1765}}{134} \leq x \leq \frac{-31+\sqrt{1765}}{134}\right]$$

Livello 3

11. Data l'equazione $ax^2 + bx + a = 0$, stabilire per quali valori di a e b ammette soluzioni reali.

$$\left[-\frac{|b|}{2} \leq a \leq \frac{|b|}{2}\right]$$

12. Data l'equazione $ax^2 + bx - a = 0$, stabilire per quali valori di a e b ammette soluzioni reali.

[Qualsiasi valore]

Lavoriamo insieme

Risolvere la disequazione $12x^4 - 10x^3 - 4x^2 + 5x - 1 > 0$. Vediamo se è possibile scomporre il polinomio in fattori lineari del tipo $(x - k)$, con k intero. k va cercato fra i divisori del termine noto, cioè $+1$ e -1 , che, sostituiti alla x , lo annullano. nessuno dei due valori risponde alla richiesta. Allora vediamo se k può essere razionale: in tal caso lo cerchiamo tra i rapporti fra il termine noto e i divisori del primo coefficiente.

Cominciamo con $\frac{1}{2}$: se lo sostituiamo alla x nel polinomio dato otteniamo il seguente risultato.

$$12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 12 \cdot \frac{1}{16} - 10 \cdot \frac{1}{8} - 4 \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{4} - \frac{5}{4} - 1 + \frac{5}{2} - 1 = \frac{3-5-4+10-4}{4} = 0$$

Poiché $x = \frac{1}{2}$ annulla il polinomio possiamo abbassarlo di grado dividendo per $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ con la regola di

	12	-10	-4	+5	-1
$\frac{1}{2}$		6	-2	-3	+1
	12	-4	-6	+2	

Ruffini:

Possiamo allora dire che la disequazione di partenza è così divenuta: $\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (12x^3 - 4x^2 - 6x + 2) > 0$.

Ripetiamo la ricerca degli zeri per il fattore di terzo grado e troviamo il valore $x = \frac{1}{3}$. Lasciamo il compito

allo studente di abbassare di grado con la regola di Ruffini, ottenendo $\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot (2x^2 - 1) > 0$.

Scomponendo anche l'ultimo fattore si ha: $\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot (\sqrt{2}x - 1) \cdot (\sqrt{2}x + 1) > 0$. Possiamo passare al grafico.

	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$x - \frac{1}{2}$	-	-	-	+
$x - \frac{1}{3}$	-	-	+	+
$\sqrt{2}x - 1$	-	+	+	+
$\sqrt{2}x + 1$	-	-	-	+
	+	-	+	+

Pertanto le soluzioni sono: $x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \vee \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2} \vee x > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Risolvere le seguenti disequazioni

Livello 2

13. $\frac{1+2x}{1-2x} - \frac{4}{1-4x^2} - 1 > 0$; $\frac{4y-1}{3y-5} - \frac{2y+7}{y+1} > -3$; $\frac{6z-1}{5z+3} - \frac{4z+7}{3z+5} \leq 2$
 $\left[-1 < x < -\frac{1}{2}; \left(y < -1 \vee y > \frac{5}{3} \right); \left(z \leq -\frac{7}{4} \vee -\frac{5}{3} < z \leq -1 \vee z > -\frac{3}{5} \right) \right]$
14. $7 - \frac{5t+1}{2t-3} < \frac{4}{3t-5}$; $5u - \frac{6u^2+3u-1}{3u-1} < \frac{7}{2}u - \frac{3}{2}$; $\frac{w-1}{w+1} < \frac{13w+5}{2w-4} - 1$
 $\left[\left(\frac{3}{2} < t < \frac{119-\sqrt{985}}{54} \vee \frac{5}{3} < t < \frac{119+\sqrt{985}}{54} \right); u > \frac{1}{3}; \left(w \leq \frac{-13-2\cdot\sqrt{31}}{9} \vee -1 < w < \frac{-13+2\cdot\sqrt{31}}{9} \vee w > 2 \right) \right]$
15. $\frac{10x^2+x-3}{3x^2-5x+7} \leq 0$; $\frac{2x^2-1}{x^2-7x-3} \leq 0$; $\frac{2x^2-x-5}{3x^2+11x+1} < 0$
 $\left[-\frac{3}{5} \leq x \leq \frac{1}{2}; \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x < \frac{7-\sqrt{61}}{2} \vee \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x < \frac{7+\sqrt{61}}{2} \right); \left(\frac{-11-\sqrt{109}}{6} < x < \frac{1-\sqrt{41}}{4} \vee \frac{-11+\sqrt{109}}{6} < x < \frac{1+\sqrt{41}}{4} \right) \right]$
16. $\frac{-3x^2+5x+2}{x^2-14x+5} < 0$; $\frac{2x-7}{x^3-1} > 0$; $\frac{x^2+2x-1}{3x^2-2\cdot\sqrt{3}x+1} \leq 0$
 $\left[\left(x < -\frac{1}{3} \vee 7-2\cdot\sqrt{11} < x < 2 \vee x > 7+2\cdot\sqrt{11} \right); \left(x < 1 \vee x > \frac{7}{2} \right); -1-\sqrt{2} \leq x \leq -1+\sqrt{2} \right]$
17. $\frac{25x^2-10x+1}{81x^2+18x+1} \geq 0$; $\frac{11x^2-2x-5}{-3x^2+4x+1} < 0$; $\frac{7x^2+15x-8}{-x^2+3x-4} \geq 0$
 $\left[x \neq -\frac{1}{9}; \left(x < \frac{1-2\cdot\sqrt{14}}{11} \vee \frac{2-\sqrt{7}}{3} < x < \frac{1+2\cdot\sqrt{14}}{11} \vee x > \frac{2+\sqrt{7}}{3} \right); \frac{-15-\sqrt{449}}{14} \leq x \leq \frac{-15+\sqrt{449}}{14} \right]$

Livello 3

18. $35x^4 - 12x^2 + 1 \geq 0$; $48x^6 - 94x^3 + 45 < 0$; $6x^3 - 19x^2 + 19x - 6 > 0$
 $\left[\left(x \leq -\frac{\sqrt{5}}{5} \vee -\frac{\sqrt{7}}{7} \leq x \leq \frac{\sqrt{7}}{7} \vee x \geq \frac{\sqrt{5}}{5} \right); \sqrt[3]{\frac{5}{6}} < x < \frac{\sqrt[3]{9}}{2}; \left(\frac{2}{3} < x < 1 \vee x > \frac{3}{2} \right) \right]$
19. $35x^3 - 39x^2 - 39x + 35 < 0$; $2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 \geq 0$; $\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^3+x^2-2x-2} > 0$
 $\left[\left(x < -1 \vee \frac{5}{7} < x < \frac{7}{5} \right); \left(x \leq -1 \vee \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \vee x \geq 2 \right); \left(x < -\sqrt{2} \vee -1 < x \leq 1 \vee \sqrt{2} < x < 2 \vee x > 3 \right) \right]$

$$20. \quad \frac{6x^3 - 25x^2 + 31x - 10}{3x^3 + x^2 - 9x - 3} \leq 0; \quad \frac{x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24}{36x^4 - 13x^2 + 1} \geq 0$$

$$\left[\left(-\sqrt{3} < x < -\frac{1}{3} \vee \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{3} \vee \sqrt{3} < x \leq 2 \right); \left(x < -\frac{1}{2} \vee -\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{3} \vee \frac{1}{2} < x \leq 1 \vee 2 \leq x \leq 3 \vee x \geq 4 \right) \right]$$

$$21. \quad \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1} \leq 0; \quad \frac{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1} \geq 0 \quad [x < -1; x < -1 \vee x \geq 1]$$

Lavoriamo insieme

Data l'equazione parametrica $(1 + 2m) \cdot x^2 - x + m - 1 = 0$, vogliamo stabilire per quali valori del parametro si ottengono soluzioni reali.

Calcoliamo il discriminante: $\Delta = 1 - 4 \cdot (1 + 2m) \cdot (m - 1) = 1 - 4 \cdot (m - 1 + 2m^2 - 2m) = 1 - 4m + 4 - 8m^2 + 8m = -8m^2 + 4m + 5$. Affinché le soluzioni siano reali il discriminante non deve essere negativo, quindi:

$$-8m^2 + 4m + 5 \geq 0. \text{ Le soluzioni dell'equazione: } m = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 40}}{-8} = \frac{-2 \pm \sqrt{44}}{-8} = \frac{-2 \pm 2 \cdot \sqrt{11}}{-8} = \frac{1 \pm \sqrt{11}}{4},$$

quindi si hanno soluzioni reali per $\frac{1 - \sqrt{11}}{4} \leq m \leq \frac{1 + \sqrt{11}}{4}$.

Determinare, se esistono, i valori reali da assegnare al parametro m affinché risulti quanto richiesto

Livello 2

22. L'equazione $(3 - m) \cdot x^2 - 2mx + (3 + m) = 0$ ammette soluzioni reali. $\left[m \leq -\frac{3}{\sqrt{2}} \vee m \geq \frac{3}{\sqrt{2}} \right]$
23. L'equazione $(7 + 2m) \cdot x^2 + 4mx - (7 - 2m) = 0$ ammette soluzioni reali. $[\forall m \in \mathbb{R}]$
24. L'equazione $(m + 1) \cdot x^2 + 2mx + m = 0$ ammette soluzioni reali. $[m = -1]$
25. L'equazione $(m^2 + 1) \cdot x^2 + mx + m - 1 = 0$ ammette soluzioni, reali o no, la cui somma è maggiore di 3. $[\emptyset]$
26. L'equazione $(m^2 - 3) \cdot x^2 + 3mx + 2m - 1 = 0$ ammette soluzioni, reali o no, la cui somma è compresa tra 2 e 5. $\left[-\frac{3 + \sqrt{57}}{4} \leq m \leq -\frac{3 + \sqrt{109}}{10} \vee \frac{-3 + \sqrt{57}}{4} \leq m \leq \frac{-3 + \sqrt{109}}{10} \right]$
27. L'equazione $(m^2 - 2) \cdot x^2 + x + m - 2 = 0$ ammette soluzioni, reali o no, il cui prodotto è minore di 1. $\left[m < -\sqrt{2} \vee 0 < m < 1 \vee m > \sqrt{2} \right]$
28. L'equazione $(4m - 1) \cdot x^2 + x + m^2 + m - 1 = 0$ ammette soluzioni, reali o no, il cui prodotto è compreso tra -2 e 3. $\left[-\frac{9 + \sqrt{93}}{2} \leq m \leq \frac{11 - \sqrt{113}}{2} \vee \frac{-9 + \sqrt{93}}{2} \leq m \leq \frac{11 + \sqrt{113}}{2} \right]$

L'angolo delle correzioni

Correggere i seguenti procedimenti errati

- $x^2 > 1 \Rightarrow x > \pm 1$.
- $\frac{x}{x+1} + \frac{2x-1}{x-1} > 0 \Rightarrow \frac{x \cdot (x-1) + (2x-1) \cdot (x+1)}{(x-1) \cdot (x+1)} > 0 \Rightarrow \frac{x^2 - x + 2x^2 + 2x - x - 1}{(x-1) \cdot (x+1)} > 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 > 0 \wedge x \neq \pm 1 \Rightarrow x > \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \wedge x \neq \pm 1$
- $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2} > 0 \Rightarrow \frac{(x-2) \cdot (x-3)}{(x-1) \cdot (x-2)} > 0 \Rightarrow \frac{x-3}{x-2} > 0 \Rightarrow x-3 > 0 \Rightarrow x > 3$

4. $\frac{x-1}{x^2-7x+10} \leq 0 \Rightarrow \frac{x-1}{(x-2) \cdot (x-5)} \leq 0 \Rightarrow$
 tengono le soluzioni: $1 \leq x \leq 2 \vee x \geq 5$

	1	2	5
$x-1$	-	+	+
$x-2$	-	-	+
$x-5$	-	-	+
$\frac{x-1}{x^2-7x+10}$	-	+	+

Dal grafico si ot-

5. $\frac{x^2-3x+1}{x^2-2x-1} > 0$. Risolviamo le equazioni associate al numeratore e al denominatore.

$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ e $x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2 \cdot \sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$, quindi le due espressioni sono

positive rispettivamente per $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e per $x < 1-\sqrt{2} \vee x > 1+\sqrt{2}$. Dato che, con la calcola-

trice stabiliamo che si ha $1-\sqrt{2} < \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1+\sqrt{2} < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, costruiamo il grafico

	$1-\sqrt{2}$	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$	$1+\sqrt{2}$	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$
x^2-3x+1	-	-	+	+
x^2-2x-1	+	-	-	+
$\frac{x^2-3x+1}{x^2-2x-1}$	-	+	-	+

Le soluzioni sono perciò: $1-\sqrt{2} < x < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee 1+\sqrt{2} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Sistemi di disequazioni non lineari

Passiamo a risolvere sistemi di disequazioni non lineari, partendo da alcuni esempi.

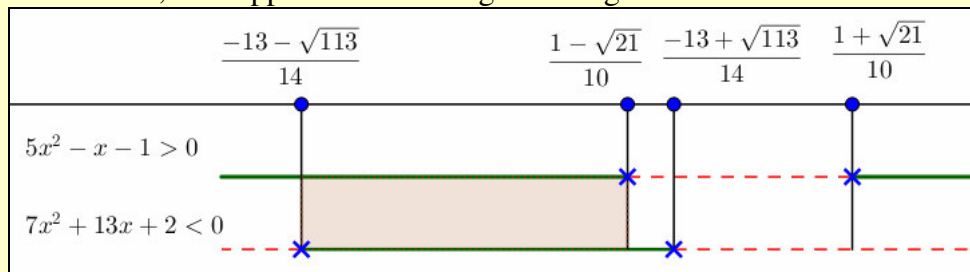
Esempio 6

Risolvere il sistema di disequazioni: $\begin{cases} 5x^2 - x - 1 > 0 \\ 7x^2 + 13x + 2 < 0 \end{cases}$. Determiniamo le soluzioni delle equazioni associate

a ciascuna disequazione: $5x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+20}}{10} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{10}$ e $7x^2 + 13x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-13 \pm \sqrt{169-56}}{14} = \frac{-13 \pm \sqrt{113}}{14}$. Il sistema di partenza è perciò equivalente al seguente:

$\begin{cases} x < \frac{1-\sqrt{21}}{10} \vee x > \frac{1+\sqrt{21}}{10} \\ \frac{-13-\sqrt{113}}{14} < x < \frac{-13+\sqrt{113}}{14} \end{cases}$. Ordiniamo i quattro valori ottenuti. Usando la calcolatrice stabiliamo

l'ordine dei 4 valori ottenuti, che rappresentiamo nel grafico seguente.



Dato che cerchiamo soluzioni comuni, che, da un punto di vista grafico, sono intervalli di linee continue, la soluzione è $\frac{-13-\sqrt{113}}{14} < x < \frac{1-\sqrt{21}}{10}$.

Concludiamo con un esempio più complesso.

Esempio 7

Risolvere il sistema di disequazioni $\begin{cases} 3x^2 + x - 7 < 0 \\ 7x^3 + 2x^2 + 2x + 7 \geq 0 \\ \frac{x-1}{x^6-6x^3-5} > 0 \end{cases}$. Consideriamo la prima disequazione. Essa è di

secondo grado e ha il discriminante positivo, quindi la sua soluzione è $\frac{-1-\sqrt{85}}{6} < x < \frac{-1+\sqrt{85}}{6}$. La

seconda disequazione è una reciproca di terzo grado e di prima specie, quindi scomponiamo il polinomio ottenendo: $7x^3 + 2x^2 + 2x + 7 = 7 \cdot (x^3 + 1) + 2x \cdot (x + 1) = (x + 1) \cdot (7x^2 - 7x + 7 + 2x) = (x + 1) \cdot (7x^2 - 5x + 7)$.

Essendo il fattore trinomio a discriminante negativo, il suo segno è sempre positivo: le soluzioni della disequazione sono le stesse di $x + 1 \geq 0$, cioè $x \geq -1$. Per la disequazione fratta, il numeratore è positivo per $x > 1$, mentre il denominatore è positivo per $x^3 < 3 - \sqrt{14} \vee x^3 > 3 + \sqrt{14} \Rightarrow x < \sqrt[3]{3 - \sqrt{14}} \vee x > \sqrt[3]{3 + \sqrt{14}}$.

Possiamo quindi dire che il segno della frazione è il seguente:

	$\sqrt[3]{3-\sqrt{14}}$		1		$\sqrt[3]{3+\sqrt{14}}$
$x-1$	-	-	*	+	+
x^6-6x^3-5	+	-	*	-	+
$\frac{x-1}{x^6-6x^3-5}$	-	+	*	-	+

Quindi il sistema di partenza è equivalente a $\begin{cases} \frac{-1-\sqrt{85}}{6} < x < \frac{-1+\sqrt{85}}{6} \\ x \geq 1 \\ \sqrt[3]{3-\sqrt{14}} < x < 1 \vee x > \sqrt[3]{3+\sqrt{14}} \end{cases}$. Le soluzioni sono perciò

determinate dal seguente schema:

	$\frac{-1-\sqrt{85}}{6}$	$\sqrt[3]{3-\sqrt{14}}$	1	$\frac{-1+\sqrt{85}}{6}$	$\sqrt[3]{3+\sqrt{14}}$
$3x^2+x-7 < 0$	*			*	
$7x^3+2x^2+2x+7 \geq 0$			*		
$\frac{x-1}{x^6-6x^3-5} > 0$		*	*	*	*

Non essendovi alcun intervallo per il quale tutte le disequazioni siano verificate, il sistema è privo di soluzioni.

Verifiche

Lavoriamo insieme

- Risolvere il sistema di disequazioni in un'incognita:
$$\begin{cases} x^2 - x - 1 > 0 \\ x^2 + 1 < 0 \\ 3x^2 - 2x - 5 > 0 \end{cases}$$
. Osserviamo che la seconda

disequazione è priva di soluzioni, poiché il primo membro è sempre positivo. È perciò inutile risolvere le altre disequazioni, dato che il sistema non potrà avere soluzioni.

- Risolvere il sistema
$$\begin{cases} x^2 - 8x + 15 < 0 \\ x^2 - 7x + 12 \geq 0 \\ x^2 - 2x + 5 > 0 \end{cases}$$
. Risolviamo singolarmente ciascuna disequazione. La prima ha

equazione associata con discriminante positivo e soluzioni $x = 3$ e $x = 5$, quindi ha soluzioni: $3 < x < 5$. Anche la seconda ha equazione associata con due soluzioni reali, $x = 3$ e $x = 4$, le soluzioni: $x \leq 3 \vee x \geq 4$. Infine la terza ha equazione associata di discriminante nullo, quindi il trinomio che la rappresenta assume sempre lo stesso segno del primo coefficiente, che è positivo. Perciò la soluzione è l'insieme dei numeri

reali. Pertanto il sistema diviene
$$\begin{cases} 3 < x < 5 \\ x \leq 3 \vee x \geq 4 \end{cases}$$
. Stavolta la terza disequazione è ininfluente perché la sua

presenza o assenza non varia l'insieme delle soluzioni, quindi non ne terremo conto. Non è necessario costruire il grafico, si capisce facilmente che la soluzione comune è: $4 \leq x < 5$, che sono quindi le soluzioni del sistema.

Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni in un'incognita

Livello 1

$$1. \quad \begin{cases} 3x+1 > -x+2 \\ x^2-2x+1 \geq (2x-1) \cdot (3x-2) + x-1 \end{cases}; \begin{cases} \frac{1}{2}x \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right) - 2x \leq \frac{2}{3}x \cdot \left(x - \frac{11}{4}\right) + x^2 - 1 \\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}x - \frac{2}{3} \end{cases} \quad \left[\frac{1}{4} < x \leq \frac{4}{5}; x \leq -\frac{3+\sqrt{177}}{14} \right]$$

$$2. \quad \begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} \geq \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}\right) \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}x \geq (x-1)^2 - x \end{cases}; \begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{2x-3}{3} < \frac{3x+1}{4} - \frac{1}{2} \\ \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \geq \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{3}\right) + x^2 - x + 3 \end{cases} \quad [\emptyset; \emptyset]$$

$$3. \quad \begin{cases} \frac{2x-1}{3} - \frac{1}{3}x < \frac{\frac{1}{4}x-1}{3} \\ 3x^2 - x - 7 \leq 0 \end{cases}; \begin{cases} 5x^2 - x + 1 \geq 0 \\ 7x^2 + x - 2 \leq 0 \end{cases}; \begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ x^2 - 7x + 10 > 0 \end{cases}; \begin{cases} x^2 - 2x - 15 \leq 0 \\ x^2 - 3x - 10 \geq 0 \end{cases}$$

$$\left[\frac{1-\sqrt{85}}{6} \leq x < 0; -\frac{1+\sqrt{57}}{14} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{57}}{14}; x < 2 \vee x > 5; -3 \leq x \leq -2 \vee x = 5 \right]$$

$$4. \quad \begin{cases} 4x^2 - 4x + 1 \leq 0 \\ 9x^2 + 6x + 1 > 0 \end{cases}; \begin{cases} x^2 - x + 6 > 0 \\ 16x^2 + 24x + 9 > 0 \end{cases}; \begin{cases} 3x^2 - x + 5 \leq 0 \\ x^8 - 3x^7 - 2x - 10 \geq 0 \end{cases} \quad [x = 1/2; x \neq -3/4; \emptyset]$$

Livello 2

$$5. \quad \begin{cases} x^3 - x^2 - x + 1 > 0 \\ x^3 + x^2 - x - 1 < 0 \end{cases}; \begin{cases} x^4 - 2x^3 + 2x - 1 > 0 \\ x^3 + 2x^2 + x + 2 < 0 \end{cases}; \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} - \frac{x^2+1}{x-1} \geq 0 \\ \frac{x+1}{x^6-6x^3+3} < 0 \end{cases} \quad \left[-1 < x < 1; x < -1; \sqrt[3]{3-\sqrt{6}} < x < 1 \right]$$

$$6. \quad \begin{cases} x^2 - 2x + 1 > 0 \\ x^4 - 5x^2 + 6 \geq 0 \\ x^6 - x^3 - 6 \leq 0 \end{cases}; \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 25} \geq 0 \\ \frac{x^2 + 9}{x^2 - 16} < 0 \end{cases}; \begin{cases} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x - 1} < 0 \\ \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 1} > 0 \end{cases}; \begin{cases} \frac{x^4 - 81}{x^4 - 16} < 0 \\ \frac{x^3 - 8}{x^3 + 1} > 0 \end{cases}$$

$$\left[x \neq 1 \wedge -\sqrt[3]{2} \leq x \leq \sqrt{2}; -3 \leq x \leq 3; \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}; -3 < x < -2 \vee 2 < x < 3 \right]$$

Livello 3

$$7. \quad \begin{cases} \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 + 2x - 1} \geq 0 \\ \frac{x^2 + 11x + 9}{x^4 - 1} < 0 \end{cases}; \begin{cases} 7x^2 - x - 2 > 0 \\ 5x^3 - 2 < 0 \\ \frac{4x^2 - 4x + 1}{12x^8 - x^4 - 2} < 0 \end{cases}; \begin{cases} 3x^2 - x + 1 > 0 \\ 7x^4 - x^2 + 3 \geq 0 \\ \frac{x+1}{x-1} < 0 \end{cases}$$

$$\left[-\frac{11+\sqrt{85}}{2} < x < -1 - \sqrt{2} \vee \sqrt{2} - 1 < x < 1; -\sqrt[4]{\frac{1+\sqrt{97}}{3}} < x < \frac{1-\sqrt{57}}{14} \vee \frac{1+\sqrt{57}}{14} < x < \sqrt[3]{\frac{2}{5}}; -1 < x < 1 \right]$$

$$8. \quad \begin{cases} x^2 + 1 < 0 \\ x^{45} - x^{32} + 3 \geq 0 \\ x^{123} - 123x^{234} + 324 < 0 \end{cases}; \begin{cases} x^5 - 3x^4 - x + 3 < 0 \\ x^3 - 7 > 0 \\ \frac{x^2 - 3x - 5}{x^2 - 4x - 1} \leq 0 \end{cases}; \begin{cases} x^4 - 3x^2 - 1 \leq 0 \\ 3x^3 - x^2 - 3x + 1 > 0 \\ x^7 - 2x > 0 \end{cases}; \begin{cases} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 4x + 4} \geq 0 \\ x^8 - x^4 - 3 > 0 \\ \frac{x^7 + 3}{x^7 - 3} \leq 0 \end{cases}$$

$$\left[\emptyset; \emptyset; -1 < x < 0 \vee \sqrt[6]{2} < x \leq \sqrt{\frac{3+\sqrt{13}}{2}}; \emptyset \right]$$

Lavoriamo insieme

Riconsideriamo l'equazione parametrica $(1 + 2m) \cdot x^2 - x + m - 1 = 0$, che abbiamo già visto in un precedente box Lavoriamo insieme, trovando che essa ha soluzioni reali per $\frac{1-\sqrt{11}}{4} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{11}}{4}$.

Adesso vogliamo stabilire per quali valori di m le soluzioni, reali, hanno prodotto inferiore a 2. Cioè

dobbiamo risolvere il sistema: $\begin{cases} \frac{1-\sqrt{11}}{4} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{11}}{4} \\ \frac{m-1}{1+2m} < 2 \end{cases}$. La seconda disequazione si risolve facilmente:

$$\frac{m-1-2 \cdot (1+2m)}{1+2m} < 0 \Rightarrow \frac{m-1-2-4m}{1+2m} < 0 \Rightarrow \frac{-3m-3}{1+2m} < 0, \text{ le cui soluzioni si ottengono facilmente,}$$

lasciamo il compito allo studente di farlo, e sono: $m < -1 \vee m > -\frac{1}{2}$. Pertanto il sistema risolutivo diviene:

$$\begin{cases} \frac{1-\sqrt{11}}{4} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{11}}{4} \\ m < -1 \vee m > -\frac{1}{2} \end{cases}. \text{ Lasciamo ancora la risoluzione per esercizio. Si otterrà: } -\frac{1}{2} < m \leq \frac{1+\sqrt{11}}{4}.$$

Risolvere i seguenti problemi impostando opportuni sistemi di disequazioni**Livello 2**

9. Data l'equazione parametrica $(3 + m) \cdot x^2 - mx + 3m = 0$. Determinare per quali valori del parametro m essa ammette due soluzioni reali il cui prodotto risulta minore di 4. $[-3 < m \leq 0]$

10. Data l'equazione parametrica $m \cdot x^2 - (1 + 4m) \cdot x + m - 2 = 0$. Determinare per quali valori del parametro m essa ammette due soluzioni reali la cui somma risulta maggiore di 2. $\left[m \leq -\frac{4+\sqrt{13}}{6} \vee m > 0 \right]$
11. Data l'equazione parametrica $(2 - m) \cdot x^2 + (3 - m) \cdot x + 1 = 0$. Determinare per quali valori del parametro m essa ammette soluzioni non reali il cui prodotto è maggiore di 2. Se le soluzioni richieste fossero reali, cambierebbe la risposta? $\left[\emptyset; \frac{3}{2} < m < 2 \right]$
12. Data l'equazione parametrica $(3 - m) \cdot x^2 + (1 - 2m) \cdot x + 2m = 0$. Determinare per quali valori del parametro m essa ammette soluzioni non reali la cui somma è minore di 3. Se le soluzioni richieste fossero reali, cambierebbe la risposta? $\left[\frac{7-\sqrt{46}}{6} < m < 2; m \leq \frac{7-\sqrt{46}}{6} \vee m > 3 \right]$

Per la prova Invalsi

Lavoriamo insieme

Dato che l'equazione $x^2 = 4$ ha soluzioni $x = \pm 2$, possiamo dire che le soluzioni della disequazione $x^2 > 4$ sono $x > \pm 2$?

Osserviamo che la scritta $x > \pm 2$ è perlomeno equivoca, dato che se $x > 2$ è ovviamente anche $x > -2$, mentre se $x > -2$ non è detto che sia anche $x > 2$, per esempio $1 > -2$ ma $1 < 2$. Quindi non è vera l'implicazione che abbiamo utilizzato. Sappiamo invece, dalla teoria, che la corretta soluzione è $x < -2 \vee x > 2$.

- (Invalsi 2013) Nell'insieme dei numeri reali, la disequazione $x^2 > 0$ è verificata [A]
A) per ogni $x \neq 0$ B) per ogni x C) solo per ogni $x < 0$ D) solo per ogni $x > 0$
- (Invalsi 2015) Nell'insieme dei numeri reali la disequazione $x^2 + 1 \geq 0$ è verificata [C]
A) solo per $x \geq 0$ B) solo per $x \geq -1$ C) per ogni x D) per nessun x
- Sapendo che è $x > 1$, quale delle seguenti scritte non è detto che sia vera? [A]
A) $x^2 > 0$ B) $x^3 \geq 1$ C) $x^2 + x > 2$ D) $2x^2 > 2$
- La disequazione $ax^2 + bx + c \geq 0$ ha per soluzioni ogni x reale [B]
A) solo se $\Delta < 0$ B) se $a > 0$ e $\Delta < 0$ C) se $a > 0$ e $\Delta > 0$ D) se $a \cdot c > 0$
- Quale fra le seguenti è la corretta soluzione della disequazione $x^2 + 2x + 1 > 0$? [B]
A) $\forall x \in \mathbb{R}$ B) $x \neq -1$ C) $x > -1$ D) $x < -1 \vee x > 1$
- Per quanti numeri interi è verificata la disequazione $x^2 + 7x - 2 < 0$? [8]
- Per quanti numeri razionali è verificata la disequazione $x^2 > \sqrt{2}$? [Infiniti]
- Per quali valori reali di a la disequazione $ax^2 + 2x - 1 < 0$ non ha soluzioni reali? [$a < -1$]
- Quali sono le soluzioni della disequazione $\frac{x^2 + 4x + 4}{(x+2) \cdot (x-3)} > 0$? [$x < -2 \vee x > 3$]
- Per quali valori di a numero reale l'equazione $x^2 + ax - a = 0$ ha due soluzioni reali e distinte? [$a < -4 \vee a > 0$]

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi

- Studiare la risoluzione della disequazione $\frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f} > 0$, al variare delle soluzioni delle disequazioni al numeratore e al denominatore. In particolare dire quando l'insieme delle soluzioni è formato da a) $\emptyset$; b) un intervallo; c) due intervalli; d) tre intervalli; e) quattro intervalli; f) l'insieme dei numeri reali. [a) $\Delta < 0$ per entrambi e $ad < 0$, oppure $\Delta \geq 0$ per entrambi e gli intervalli soluzione disgiunti; ...]

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Davanti a ogni esercizio vi è un simbolo che si riferisce alla gara da cui è tratto.

AHSME = Annual High School Mathematics Examination

OMI = Olimpiadi della Matematica italiane

Lavoriamo insieme

Consideriamo un quesito assegnato agli AHSME del 1962. *Quale dei seguenti insiemi di soluzioni soddisfa la disequazione $2x^2 + x < 6$?* A) $-2 < x < 3/2$ B) $x > 3/2 \vee x < -2$ C) $x < 3/2$ D) $3/2 < x < 2$ E) $x < -2$.

Potremmo semplicemente verificare alcuni valori, per esempio consideriamo $x = 0$ che verifica la disequazione, ma non appartiene agli insiemi B), D) ed E) per cui possiamo escluderli. Adesso consideriamo $x = -2$ che appartiene a C) ma non ad A) e non verifica la disequazione ($2 \cdot 4 - 2 = 6$), pertanto escludiamo anche C e la risposta corretta è A). Questo modo di procedere è indicato per questo tipo di test poiché più veloce. diversamente potremmo risolvere la disequazione, ottenendo $2x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = -2 \vee x = 3/2$, da cui la disequazione ha soluzione $-2 < x < 3/2$.

- (AHSME1969) L'insieme dei valori che soddisfano la disequazione $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} > 0$ è? [A]
A) $x > 2 \vee x < -2 \vee -1 < x < 1$ B) $x > 2 \vee x < -2$ C) $x > 1 \vee x < -2$ D) $x > 1 \vee x < -1$ E) $x \neq \pm 1$
- (AHSME1959) Le soluzioni di $x^2 + bx + c = 0$ sono entrambe reali e maggiori di 1. chiamiamo $s = b + c + 1$, allora s A) può essere minore di 0 B) può essere zero C) deve essere positivo D) deve essere negativo E) deve essere compreso tra -1 e 1 [C]
- (AHSME1971) Determinare le soluzioni della disequazione $6x^2 + 5x < 4$. $[-4/3 < x < 1/2]$
- (AHSME1974) Quale fra le seguenti affermazioni è corretta? A) Se $x < 0$ allora $x^2 > x$ B) Se $x^2 > 0$ allora $x > 0$ C) Se $x^2 > x$ allora $x > 0$ D) Se $x^2 > x$ allora $x < 0$ E) Se $x < 1$ allora $x^2 < x$ [A]
- (AHSME1974) Qual è il più piccolo valore intero di k per cui l'equazione $2x \cdot (kx - 4) - x^2 + 6 = 0$ non ha soluzioni reali? [2]
- 2OMI1995) Quanti sono i numeri interi relativi n per cui $n \cdot (n + 2) \cdot (n + 4) \cdot (n + 6) < 0$? [2]

Questions in English

Working together

Consider the following question assigned at AHSME in 1965. *If we write $|x^2 - 4| < N$ for all x such that $|x - 2| < 0.01$, the smallest value we can use for N is* A) 0.0301 B) .0349 C) 0.0399 D) 0.0401 E) 0.0499

Since $|x - 2| < 0.01$, x is positive and $x < 2.01$. Hence $|x^2 - 4| = |x - 2| \cdot |x + 2| = |x - 2| \cdot (x + 2) < 0.01 \cdot 4.01 = 0.401$. The correct answer is D).

- (AHSME1956) If $x < a < 0$ then [B]
A) $x^2 < ax < 0$ B) $x^2 > ax > a^2$ C) $x^2 < a^2 < 0$ D) $x^2 > ax$ but $ax < 0$ E) $x^2 > a^2$ but $a^2 < 0$
- (AHSME1957) The relation $x^2 \cdot (x^2 - 1) \geq 0$ is true only for [D]
A) $x \geq 1$ B) $-1 \leq x \leq 1$ C) $x = 0, \pm 1$ D) $x = 0, x \leq -1 \vee x \geq 1$ E) $x \geq 0$
- (AHSME1958) For what real values of k , other than $k = 0$, does the equation $x^2 + kx + k^2 = 0$ have real roots? [No values of k]
- (AHSME1959) In the equation $(x - m)^2 - (x - n)^2 = (m - n)^2$, m is a fixed positive number and n is a fixed negative number. The set of values x satisfying the equation is [E]
A) $x \geq 0$ B) $x \leq n$ C) $x = 0$ D) The set of real numbers E) none of these
- (AHSME1965) The statement $x^2 - x - 6 < 0$ is equivalent to the statement: [A]
A) $-2 < x < 3$ B) $x > -2$ C) $x < 3$ D) $x > 3$ and $x < -2$ E) $x > 3 \vee x < -2$
- (AHSME1967) If $x^2 - 5x + 6 < 0$ and $P = x^2 + 5x + 6$ then [B]
A) P can take any real value B) $20 < P < 30$ C) $0 < P < 20$ D) $P < 0$ E) $P > 30$

Attività di recupero**Attività 1****Fase 1: Osserva**

- Risolvere $3x^2 - 5x + 1 > 0$. Consideriamo l'equazione associata: $3x^2 - 5x + 1 = 0$ e ne determiniamo il di-

scriminante: $\Delta = 25 - 12 = 13 > 0$. L'equazione ha le seguenti soluzioni reali: $x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{5 - \sqrt{13}}{6} \\ \frac{5 + \sqrt{13}}{6} \end{array} \right.$.

Dato che il coefficiente del termine di secondo grado della disequazione è positivo, possiamo dire che il segno dell'espressione è positivo all'esterno dell'intervallo di estremi le due soluzioni precedenti; cioè:

$$x < \frac{5 - \sqrt{13}}{6} \vee x > \frac{5 + \sqrt{13}}{6}$$

costituisce la soluzione della disequazione.

- Risolvere $-4x^2 + 2x - 7 > 0$. Cambiamo segno a tutti i coefficienti e verso alla disequazione, per ricondurla al caso generale in cui il primo coefficiente è sempre positivo: $4x^2 - 2x + 7 < 0$. Adesso consideriamo l'equazione associata: $4x^2 - 2x + 7 = 0$, il cui discriminante è: $\Delta = 4 - 112 = -108 < 0$. Poiché in questo caso il trinomio assume sempre il segno del primo coefficiente, che è positivo, possiamo dire che il trinomio non è negativo per alcun numero reale, quindi la disequazione è priva di soluzioni.
- Risolvere $81x^2 + 90x + 25 < 0$. Calcoliamo il discriminante dell'equazione associata: $\Delta = 8100 - 8100 = 0$. In questo caso, e potevamo anche accorgercene prima, abbiamo un trinomio che rappresenta il quadrato di un binomio: $(9x + 5)^2 < 0$, che quindi può essere positivo o nullo, mai negativo. Perciò, anche stavolta, la disequazione è priva di soluzioni.

Fase 2: Completa ...

- Risolvere $7x^2 + 12x + 3 < 0$. Calcoliamo il discriminante dell'equazione associata: $7x^2 + 12x + 3 = 0$: $\Delta = \dots\dots\dots$. Troviamo le soluzioni reali della detta equazione: $\dots\dots\dots$. Il coefficiente del termine di secondo grado della disequazione è positivo, quindi il segno dell'espressione è positivo $\dots\dots\dots$ dell'intervallo di estremi le due soluzioni precedenti, cioè: per $\dots\dots < x < \dots\dots$.
- Risolvere $36x^2 - 84x + 49 > 0$. Calcoliamo il discriminante dell'equazione associata: $36x^2 - 84x + 49 = 0$: $\Delta = \dots\dots\dots$. Il discriminante nullo ottenuto indica che il trinomio rappresenta un $\dots\dots\dots$. Perciò esso è positivo sempre tranne quando si annulla cioè per $\dots\dots\dots$. Quindi la soluzione della disequazione è per tutti i valori tranne che per il precedente, cioè per $\dots\dots\dots$.
- Risolvere $11x^2 + 7x + 5 > 0$. Calcoliamo il discriminante dell'equazione associata: $\Delta = \dots\dots\dots$; dato che è $\dots\dots\dots$, il trinomio assume $\dots\dots\dots$ lo stesso segno del primo coefficiente, cioè il segno positivo. Quindi possiamo concludere che la disequazione ammette soluzione per $\dots\dots\dots$.

Fase 3: Prova!**Risolvere le seguenti disequazioni di secondo grado**

- $12x^2 + 5x - 7 < 0$; $4x^2 - 2x + 1 < 0$; $3x^2 + 15x + 2 > 0$; $16x^2 + 8x + 1 > 0$

$$\left[-1 < x < \frac{7}{12}; \emptyset; x < -\frac{15 + \sqrt{201}}{6} \vee x > \frac{-15 + \sqrt{201}}{16}; x \neq -\frac{1}{4} \right]$$
- $25x^2 + 10x - 1 < 0$; $-21x^2 + 13x + 4 < 0$; $-49x^2 - 42x - 9 < 0$; $-2x^2 - 5x + 3 \leq 0$

$$\left[-\frac{1 + \sqrt{2}}{5} < x < \frac{-1 + \sqrt{2}}{5}; x < \frac{13 - \sqrt{505}}{42} \vee x > \frac{13 + \sqrt{505}}{42}; x \neq -\frac{3}{7}; x \leq -3 \vee x \geq \frac{1}{2} \right]$$
- $8x^2 - 17x + 3 \geq 0$; $121x^2 - 22x + 1 \geq 0$; $169x^2 + 26x + 1 \leq 0$; $7x^2 + 7x + 1 \leq 0$

$$\left[x < \frac{17 - \sqrt{193}}{16} \vee x > \frac{17 + \sqrt{193}}{16}; \forall x \in \mathbb{R}; x = -\frac{1}{13}; -\frac{7 + \sqrt{21}}{14} \leq x \leq \frac{-7 + \sqrt{21}}{14} \right]$$

4. $-14x^2 + x + 1 \leq 0$; $41x^2 - 28x + 3 \geq 0$; $x^2 + 13x - 9 \leq 0$

$$\left[x \leq \frac{1-\sqrt{57}}{28} \vee x \geq \frac{1+\sqrt{57}}{28}; x \leq \frac{14-\sqrt{73}}{41} \vee x \geq \frac{14+\sqrt{73}}{41}; -\frac{13+\sqrt{205}}{2} \leq x \leq \frac{-13+\sqrt{205}}{2} \right]$$

Attività 2

Fase 1: Osserva

- Risolvere $\frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 3x - 2} > 0$. Dobbiamo determinare il segno della frazione, e quindi il segno del numeratore e del denominatore. Per semplicità, li supporremo sempre entrambi positivi; dal grafico dedurremo in seguito gli intervalli corrispondenti alla disequazione proposta. Cominciamo a stabilire il segno del numeratore: $x^2 + x - 1 > 0$. Calcoliamo il discriminante dell'equazione associata: $\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$ e, dato che è positivo, determiniamo le soluzioni dell'equazione: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Il trinomio assume segno positivo all'esterno dell'intervallo i cui estremi sono le precedenti soluzioni, negativo all'interno, cioè graficamen-



Adesso determiniamo il segno del denominatore: $x^2 - 3x - 2 > 0$, il cui discriminante è: $9 + 8 = 17 > 0$. Quindi le soluzioni dell'equazione associata sono: $x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$ e



il relativo grafico dei segni è il seguente: Adesso si tratta di riportare in un unico grafico i precedenti, ponendo in ordine crescente i quattro valori trovati:

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < \frac{3-\sqrt{17}}{2} < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < \frac{3+\sqrt{17}}{2}.$$

	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{3-\sqrt{17}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{3+\sqrt{17}}{2}$	
$x^2 + x - 1$	+	-	-	+	+
$x^2 - 3x - 2$	+	+	-	-	+
$\frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 3x - 2}$	+	-	+	-	+

Concludiamo dicendo che le soluzioni della disequazione fratta sono quegli intervalli in cui si trova il segno +, cioè: $x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \vee \frac{3-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{3+\sqrt{17}}{2}$.

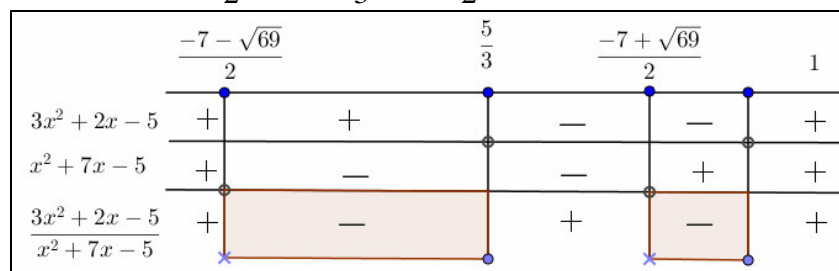
- Risolvere $\frac{3x^2 + 2x - 5}{x^2 + 7x - 5} \leq 0$. Iniziamo determinando il segno del numeratore: $3x^2 + 2x - 5 \geq 0 \Rightarrow \Delta = 4 + 60$

$$= 64 > 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{-2 \pm 8}{6} = \begin{cases} \frac{-2-8}{6} = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3} \\ \frac{-2+8}{6} = \frac{6}{6} = 1 \end{cases}.$$

Il trinomio assume segno non negativo positivo o nullo) all'esterno dell'intervallo delle soluzioni, estremi compresi, cioè: $x \leq -\frac{5}{3} \vee x \geq 1$.

Per il denominatore consideriamo solo il segno positivo, dato che è privo di senso determinare dove si

annulla il denominatore, quindi: $x^2 + 7x - 5 > 0 \Rightarrow \Delta = 49 + 20 = 69 > 0 \Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{69}}{2}$. Le soluzioni della disequazioni sono ancora esterne all'intervallo delle soluzioni: $x < \frac{-7 - \sqrt{69}}{2} \vee x > \frac{-7 + \sqrt{69}}{2}$. Ordiniamo i quattro valori trovati: $\frac{-7 - \sqrt{69}}{2} < -\frac{5}{3} < \frac{-7 + \sqrt{69}}{2} < 1$. Riportiamo il tutto in un unico grafico:



Le soluzioni della disequazione fratta sono quegli intervalli in cui si trova il segno - o lo zero, cioè:

$$\frac{-7 - \sqrt{69}}{2} < x \leq -\frac{5}{3} \vee \frac{-7 + \sqrt{69}}{2} < x \leq 1.$$

- Risolvere $\frac{4x^2 + 4x + 1}{6x^2 + x + 7} \leq 0$. Per quel che riguarda il segno del numeratore: $4x^2 + 4x + 1 \geq 0$, abbiamo $\Delta = 16 - 16 = 0$, quindi può scriversi $(2x + 1)^2 \geq 0$. Quindi il numeratore assume sempre il segno positivo ma si annulla per $2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$. Per quel che riguarda il segno del denominatore invece si ha: $\Delta = 1 - 168 < 0$, quindi il denominatore è sempre positivo. In conclusione la frazione non è mai negativa e si annulla solo per $x = -\frac{1}{2}$, che è perciò l'unica soluzione della disequazione.

Fase 2: Completa ...

- Risolvere $\frac{4x^2 + 3x - 1}{7x^2 + x - 2} < 0$. Studiamo i segni di numeratore e denominatore. $4x^2 + 3x - 1 > 0 \Rightarrow \Delta = \dots \Rightarrow x = \dots$. Il trinomio assume segno positivo dell'intervallo i cui estremi sono le precedenti soluzioni, cioè per Passiamo al segno del denominatore: $7x^2 + x - 2 > 0 \Rightarrow \Delta = \dots \Rightarrow x = \dots$. Ancora una volta il segno positivo del trinomio si ha dell'intervallo delle soluzioni, cioè per: Ordiniamo i quattro valori ottenuti: < < < e rappresentiamo il tutto in un grafico:

Le soluzioni della disequazione fratta sono quegli intervalli in cui si trova il segno -, cioè:

- Risolvere $\frac{-5x^2 + 6x + 1}{2x^2 + 8x + 11} \geq 0$. Come visto in precedenza determiniamo il segno di numeratore e denominatore. $-5x^2 + 6x + 1 \geq 0$, cambiamo segno e verso: Calcoliamo il discriminante: $\Delta = \dots \Rightarrow x = \dots$. Il trinomio assume segno non positivo (negativo o nullo) all'interno dell'intervallo delle soluzioni, estremi compresi, cioè: Il discriminante del denominatore è $\Delta = \dots$, quindi il denominatore è sempre, il segno della frazione è perciò quello del numeratore, quindi la soluzione è quella trovata dianzi, cioè
- Risolvere $\frac{9x^2 - 6x + 1}{x^2 + 2x - 3} \geq 0$. Stabiliamo il segno del numeratore: $9x^2 - 6x + 1 \geq 0$. Si ha: $\Delta = \dots$, quindi può scriversi $(3x - 1)^2 \geq 0$, questa scritta è sempre vera, quindi il numeratore non interferisce sul

segno della frazione, che è perciò quello del denominatore. Vediamo il suo discriminante: $\Delta =$ Determiniamo le soluzioni dell'equazione associata: $x =$, quindi le soluzioni della disequazione sono (al solito non consideriamo il segno di uguale per il denominatore):

Fase 3: Prova!

Risolvere le seguenti disequazioni fratte

1. $\frac{3x^2 + x - 7}{4x^2 + x - 1} > 0$; $\frac{2x^2 + 3x + 1}{5x^2 + 4x - 1} < 0$; $\frac{12x^2 - 3x + 4}{7x^2 - 3x + 1} \geq 0$;

$$\left[\left(x < -\frac{1+\sqrt{85}}{6} \vee -\frac{1+\sqrt{17}}{8} < x < \frac{-1+\sqrt{17}}{8} \vee x > \frac{-1+\sqrt{85}}{6} \right); -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{5}; \forall x \in \mathbb{R} \right]$$
2. $\frac{3x^2 + 15x + 2}{8x^2 + 17x + 1} \leq 0$; $\frac{16x^2 - 24x + 9}{3x^2 + x - 1} \geq 0$; $\frac{-2x^2 + x - 4}{3x^2 + 4x - 2} \geq 0$; $\frac{49x^2 - 14x + 1}{64x^2 + 16x + 1} \leq 0$;

$$\left[\left(-\frac{15+\sqrt{201}}{6} \leq x < -\frac{17+\sqrt{257}}{16} \vee -\frac{15+\sqrt{201}}{6} \leq x < -\frac{17+\sqrt{257}}{16} \right); x < -\frac{1+\sqrt{13}}{6} \vee x > \frac{-1+\sqrt{13}}{6}; -\frac{2+\sqrt{10}}{3} < x < \frac{-2+\sqrt{10}}{3}; x = \frac{1}{7} \right]$$
3. $\frac{x^2 + 11x + 12}{3x^2 + 8x - 2} \geq 0$; $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 2} < 0$; $\frac{4x^2 - 3x + 7}{5x^2 + x + 9} > 0$; $\frac{7x^2 - 12x + 4}{5x^2 - 3x - 2} \geq 0$

$$\left[\left(x \leq \frac{-11-\sqrt{73}}{2} \vee -\frac{4+\sqrt{222}}{3} < x \leq \frac{-11+\sqrt{73}}{2} \vee x > \frac{-4+\sqrt{222}}{3} \right); \emptyset; \forall x \in \mathbb{R}; \left(x < -\frac{2}{5} \vee \frac{6-\sqrt{8}}{7} \leq x < 1 \vee x \geq \frac{6+\sqrt{8}}{7} \right) \right]$$
4. $\frac{x^2 - 11x + 15}{x^2 + 7x + 10} < 0$; $\frac{3x^2 - 4x + 5}{5x^2 + 4x - 3} \leq 0$; $\frac{2x^2 - x + 1}{x^2 + 2x + 1} \geq 0$; $\frac{3x^2 - 7x + 4}{x^2 + 5x - 6} < 0$

$$\left[\left(-5 < x < -2 \vee \frac{11-\sqrt{61}}{2} < x < \frac{11+\sqrt{61}}{2} \right); -\frac{2+\sqrt{19}}{5} < x < \frac{-2+\sqrt{19}}{5}; x \neq -1; -6 < x < \frac{4}{3} \right]$$

Sistemi di disequazioni non lineari

Attività 3

Fase 1: Osserva

- Risolvere $\begin{cases} x^2 - 3x + 11 < 0 \\ 2x^2 - 5x - 9 > 0 \end{cases}$. Risolvere un sistema significa determinare le eventuali soluzioni comuni a tutte le componenti il sistema. Risolviamo la prima disequazione: $x^2 - 3x + 11 < 0$, dato che il suo discriminante: $\Delta = 9 - 44 = -35$ è negativo, il trinomio ammette sempre lo stesso segno del primo coefficiente, cioè segno positivo; quindi, poiché il trinomio non è mai negativo la disequazione è priva di soluzioni e anche il sistema perciò non ne ha, dato che non è possibile trovarne di comuni a entrambe le disequazioni.

- Risolvere $\begin{cases} 2x^2 - x - 9 \geq 0 \\ 3x^2 + x - 7 \leq 0 \end{cases}$. Risolviamo singolarmente ciascuna disequazione: $2x^2 - x - 9 \geq 0 \Rightarrow \Delta = 1 +$

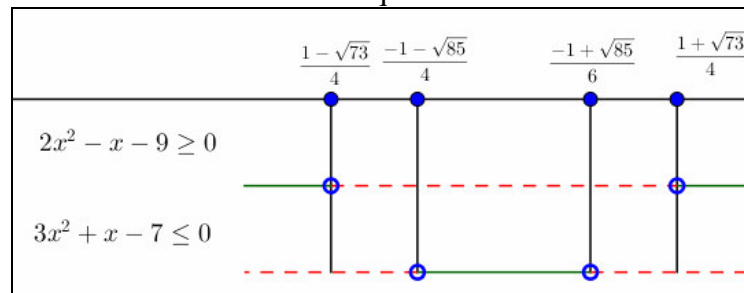
$72 = 73 > 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{73}}{4}$. Il trinomio assume segno positivo, concorde con quello del primo coefficiente, all'esterno dell'intervallo determinato dalle soluzioni trovate, cioè per $x \leq \frac{1-\sqrt{73}}{4} \vee x \geq \frac{1+\sqrt{73}}{4}$.

Passiamo alla seconda disequazione: $3x^2 + x - 7 \leq 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 84 = 85 > 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{85}}{6}$. Il trinomio

assume segno negativo, discorde con quello del primo coefficiente, all'interno dell'intervallo determinato dalle precedenti soluzioni, cioè per $\frac{-1-\sqrt{85}}{6} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{85}}{6}$. Quindi il sistema iniziale equivale al seguente:

$$\text{Ordiniamo in senso crescente i valori: } \begin{cases} x \leq \frac{1-\sqrt{73}}{4} & x \geq \frac{1+\sqrt{73}}{4} \\ \frac{-1-\sqrt{85}}{6} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{85}}{6} \end{cases}$$

$\frac{1-\sqrt{73}}{4} < \frac{-1-\sqrt{85}}{6} < \frac{-1+\sqrt{85}}{6} < \frac{1+\sqrt{73}}{4}$ e rappresentiamo il tutto in un grafico, indicando con una linea continua l'intervallo delle soluzioni di ciascuna disequazione



dal quale si evince che il sistema non ammette soluzioni.

Risolvere: $\begin{cases} x^2 + 3x + 1 < 0 \\ 2x^2 - 7x - 11 > 0 \\ 4x^2 + 12x + 9 \leq 0 \end{cases}$. Determiniamo le soluzioni di ciascuna singola disequazione: $x^2 + 3x + 1 < 0$

$0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4 = 5 > 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Il trinomio assume segno negativo per $\frac{-3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$;

$2x^2 - 7x - 11 > 0 \Rightarrow \Delta = 49 + 88 = 137 > 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{137}}{4}$. Il trinomio assume segno positivo per

$x < \frac{7-\sqrt{137}}{4} \vee x > \frac{7+\sqrt{137}}{4}$; $4x^2 + 12x + 9 \leq 0 \Rightarrow \Delta = 144 - 144 = 0 \Rightarrow (2x + 3)^2 \leq 0$. Il trinomio non

assume mai segno negativo ma si annulla per $2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$. Osserviamo che l'unica soluzione

possibile è $x = -\frac{3}{2}$, dato che è l'unico valore che risolve la terza disequazione.

Fase 2: Completa ...

• Risolvere $\begin{cases} 25x^2 - 30x + 9 \leq 0 \\ 6x^2 + 3x + 1 > 0 \end{cases}$. Risolviamo le singole disequazioni: $25x^2 - 30x + 9 \leq 0$. Calcoliamo il discriminante: $\Delta = \dots$. Dato che è nullo, il trinomio rappresenta un $\dots$, può perciò scriversi: $(5x - 3)^2 \leq 0$, che ha soluzioni solo per il valore che annulla la base del quadrato, cioè per $5x - 3 = 0 \Rightarrow \dots$. Quindi questa è l'unica soluzione possibile del sistema, perciò invece di risolvere la seconda disequazione possiamo verificare se il detto valore la soddisfa sostituendolo nella disequazione,

scrivendo cioè: $6 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 3 \cdot \frac{3}{5} + 1 > 0$: la scritta è ovviamente vera, senza bisogno di effettuare i calcoli, dato che $\dots$. Concludiamo dicendo che il sistema ammette l'unica soluzione $\dots$

• Risolvere $\begin{cases} 4x^2 + 5x - 1 < 0 \\ 3x^2 + 2x - 3 \leq 0 \end{cases}$. Risolviamo singolarmente ciascuna disequazione: $4x^2 + 5x - 1 < 0 \Rightarrow \Delta = \dots$

$\dots \Rightarrow x = \dots$. Il trinomio assume segno negativo $\dots$

dell'intervallo determinato dalle precedenti soluzioni, cioè per Passiamo alla seconda disequazione: $3x^2 + 2x - 3 \leq 0 \Rightarrow \Delta = \dots \Rightarrow x = \dots$. Il trinomio assume segno negativo o nullo e sugli estremi dell'intervallo determinato dalle precedenti soluzioni, cioè per Quindi il sistema iniziale equivale al seguente

$$\left\{ \dots \dots \dots \text{Ordiniamo i valori trovati: } \frac{-5-3\cdot\sqrt{5}}{8} < \frac{-1-\sqrt{10}}{3} < \frac{-5+3\cdot\sqrt{5}}{8} < \frac{-1+\sqrt{10}}{3} \text{ e rap-} \right.$$

presentiamo il tutto in un grafico, indicando con una linea continua l'intervallo delle soluzioni di ciascuna disequazione la soluzione è data dagli intervalli in cui entrambe le linee sono continue, cioè da

- Risolvere: $\begin{cases} 9x^2 + 42x + 49 > 0 \\ x^2 - 3x - 5 \leq 0 \\ 2x^2 + 13x + 7 \geq 0 \end{cases}$. Calcoliamo le soluzioni di ciascuna singola disequazione: $9x^2 + 42x + 49$

$> 0 \Rightarrow \Delta = \dots \Rightarrow$ Il trinomio assume sempre segno positivo tranne per i valori che annullano il trinomio, che può scriversi:, cioè per $x = \dots$, quindi la soluzione della disequazione è; $x^2 - 3x - 5 \leq 0 \Rightarrow \Delta = \dots \Rightarrow x = \dots$. Il trinomio assume segno negativo o nullo per; $2x^2 + 13x + 7 \geq 0 \Rightarrow \Delta = \dots \Rightarrow x = \dots$. Il trinomio assume segno positivo o nullo per Ordiniamo i cinque valori ottenuti: $\frac{-13-\sqrt{113}}{4} < -\frac{7}{3} < \frac{3-\sqrt{29}}{2} < \frac{-13+\sqrt{113}}{4} < \frac{3+\sqrt{29}}{2}$ e rappresentiamo il tutto in un grafico: Possiamo concludere che le soluzioni del sistema sono:

Fase 3: Prova!

Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni

1. $\begin{cases} x^2 + 6x + 9 > 0 \\ x^2 + 6x - 9 \leq 0 \end{cases}; \begin{cases} 3x^2 + 7x - 2 < 0 \\ 11x^2 + 4x - 2 > 0 \end{cases}; \begin{cases} x^2 - 10x + 25 \leq 0 \\ 5x^2 + 3x - 7 > 0 \end{cases}$

$$\left[(x \neq -3 \wedge -1 - 3\sqrt{2} \leq x \leq 1 + 3\sqrt{2}); -\frac{7+\sqrt{73}}{6} < x < -\frac{2+\sqrt{26}}{11}; x = 5 \right]$$
2. $\begin{cases} -3x^2 + 11x - 4 \geq 0 \\ 13x^2 + 12x - 13 < 0 \end{cases}; \begin{cases} 16x^2 + 40x + 25 > 0 \\ 81x^2 + 18x + 1 \leq 0 \end{cases}; \begin{cases} 3x^2 + x + 15 < 0 \\ 11x^4 - 3x^3 + x^2 + x - 3 > 0 \end{cases}$

$$\left[\frac{11-\sqrt{73}}{6} \leq x < \frac{-6+\sqrt{205}}{13}; x = -\frac{1}{9}; \emptyset \right]$$
3. $\begin{cases} -14x^2 - 7x + 2 > 0 \\ x^2 + 6x - 1 \leq 0 \end{cases}; \begin{cases} x^2 + x + 13 > 0 \\ 1233x^2 + 2341x + 5478 > 0 \end{cases}; \begin{cases} x^{24} + x^4 + 1 < 0 \\ x^2 + x > 0 \end{cases}$

$$\left[-\frac{7+\sqrt{161}}{28} < x \leq \sqrt{10} - 3; \forall x \in \mathbb{R}; \emptyset \right]$$
4. $\begin{cases} x^2 + 5x < 0 \\ 4x^2 - 3 \geq 0 \end{cases}; \begin{cases} 3x + 2 > 0 \\ x^2 - 4x + 4 > 0 \\ x^2 + 5x + 6 \geq 0 \end{cases}; \begin{cases} 3x^2 + 3x + 4 < 0 \\ 5x^2 - x - 1 \leq 0 \\ x^2 + 3x - 12 < 0 \end{cases}$

$$\left[-5 < x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}; x > \frac{2}{3} \wedge x \neq 2; \emptyset \right]$$
5. $\begin{cases} 2x^2 - 4x + 9 \leq 0 \\ 8x^2 + 7x - 6 \leq 0 \\ 6x^2 + 7x - 8 \geq 0 \end{cases}; \begin{cases} 7x^2 + 2x - 9 \leq 0 \\ -6x^2 - 2x + 3 \leq 0 \\ -x^2 + 3x + 2 \geq 0 \end{cases}; \begin{cases} x^2 + 2x + 1 \geq 0 \\ 11x^2 - 31x + 12 > 0 \\ x^2 + 3x < 0 \end{cases}$

$$\left[\emptyset; \frac{-1+\sqrt{19}}{6} \leq x \leq 1; -3 < x < 0 \right]$$

Per svolgere un Test finale di 10 quesiti, collegati al sito

http://mathinterattiva.altervista.org/volume_2_5.htm

6. Geometria del piano

6.1 Circonferenza

Prerequisiti

- Possedere nozioni intuitive di forma
- Possedere nozioni elementari sugli insiemi
- Avere il concetto di ordine

Obiettivi

- Riconoscere le forme geometriche piane elementari
- Riconoscere la differenza fra la scienza geometrica e la geometria della natura
- Descrivere oggetti geometrici piani
- Costruire oggetti geometrici piani di cui viene fornita una descrizione verbale
- Conoscere gli enti geometrici piani fondamentali
- Riconoscere le figure piane dalla loro rappresentazione grafica
- Potenziare l'intuizione geometrica per acquisire la consapevolezza che talvolta i propri sensi e l'intuizione possono essere inaffidabili
- Affinare le capacità di astrazione
- Sapere risolvere semplici problemi relativi alla circonferenza e alle sue parti
- Sapere costruire alcuni poligoni regolari inscritti e circoscritti a una circonferenza
- Comprendere il procedimento di esaurimento per il calcolo approssimato della lunghezza di una circonferenza o dell'area di un cerchio

Contenuti

- La circonferenza e le sue parti
- Posizione reciproche di retta e circonferenza
- Posizioni reciproche di due circonferenze
- Poligoni inscritti e circoscritti a una circonferenza e lunghezza della circonferenza

Parole chiave

Angolo al centro – Angolo alla circonferenza – Arco – Circonferenze concentriche – Circonferenze secanti – Circonferenze tangenti – Corda – Corona circolare – Diametro – Raggio – Segmento circolare – Settore circolare

Simbologia

$\widehat{AB}$ Indica un arco di estremi i punti A e B , con A che precede B nel verso antiorario.

La circonferenza e le sue parti

Il problema

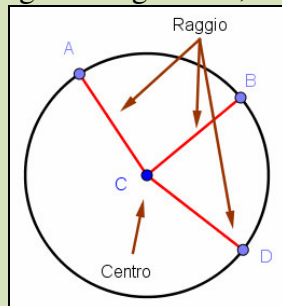
Una capra è legata, in un prato, a un palo con una corda lunga 1 metro. Che lunghezza ha il contorno della parte di prato che riesce a brucare?

Questo è un vecchio problema della matematica ricreativa ed è legato al calcolo della lunghezza della parte di prato delimitata dalla linea che la corda alla sua massima estensione, cioè 1 m , traccia ruotando attorno al palo. In effetti stiamo semplificando alcune cose, come il fatto che la capra “sporge” oltre la corda o che potrebbe riuscire a brucare anche parte dell’erba che non riesce effettivamente a raggiungere ma che riesce a “tirare” a sé. Ma dovremmo essere abituati in qualche modo a “semplificare” i problemi reali considerando la loro modellizzazione matematica.

Prima di tentare di risolvere il problema precedente dobbiamo determinare la “forma” della linea tracciata dalla corda che ruota attorno al palo. È intuitivo capire che questa linea è una di quelle che abbiamo più volte usato nelle diverse unità didattiche dei moduli di questo corso.

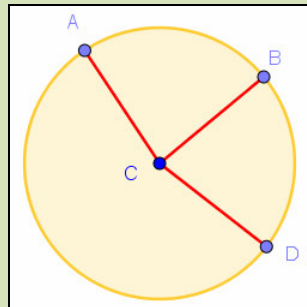
Definizione 1

Diciamo **circonferenza** di **centro** il punto C e di **raggio** il segmento r , l’insieme dei punti del piano che si ottengono come estremi di tutti i possibili segmenti uguali a r , di cui l’altro estremo è C .



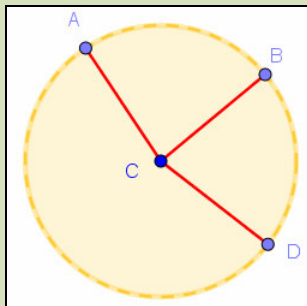
Definizione 2

Diciamo **cerchio** delimitato dalla circonferenza di centro il punto C e di raggio il segmento di misura r , il luogo geometrico dei punti del piano la cui distanza da C non è maggiore di r .



Definizione 3

Diciamo **cerchio interno** delimitato dalla circonferenza di centro il punto C e di raggio il segmento di misura r , il luogo geometrico dei punti del piano la cui distanza da C è minore di r .



Con riferimento al nostro problema, la circonferenza è perciò la linea tracciata dalla corda, il cerchio è la parte di erba che la capra può brucare. In pratica, indicando con il simbolo Π l’insieme dei punti del piano,

fissato un punto $C \in \Pi$ e un numero reale positivo r , le precedenti definizioni si riferiscono ai seguenti insiemi: $\Gamma = \{P \in \Pi : \overline{PC} = r\}$; $\Sigma = \{P \in \Pi : \overline{PC} \leq r\}$; $\Phi = \{P \in \Pi : \overline{PC} < r\}$

Che cosa significa?

Circonferenza in greco antico si dice *periphéreia*, che ha lo stesso significato della nostra periferia; sta a indicare la linea di contorno e non la parte di piano che essa racchiude.

Enunciamo un fatto intuitivo.

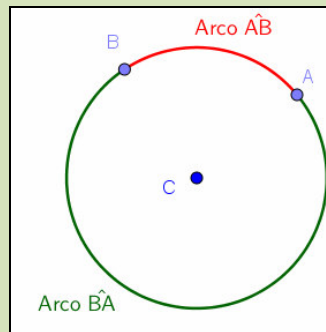
Postulato 1

Circonferenze fra loro uguali hanno raggi uguali e viceversa.

È opportuno nominare anche le parti di circonferenza. Ma prima stabiliamo sulla circonferenza un verso di percorrenza dicendo che, per andare da un punto P della circonferenza a un altro punto Q della circonferenza, si procede secondo il verso contrario a quello delle lancette dell'orologio, cioè in verso *antiorario*.

Definizione 4

Diciamo **arco** di estremi A e B punti di una stessa circonferenza Γ , l'insieme dei punti di Γ che, nel verso di rotazione stabilito su Γ , seguono A e precedono B .



Notazione 1

Un arco di estremi A e B si indica con $\widehat{AB}$. Il simbolo dell'arco appare in una traduzione del *Liber embadorum* di Savasorda, a opera di Platone da Tivoli nella metà del XII secolo.

Consideriamo adesso un arco e le semirette di origine il centro della circonferenza che passano per gli estremi dell'arco. Muoviamo la semiretta OA attorno al centro, fino a che non si sovrapponga alla semiretta OB : in questo modo alcuni punti del piano vengono *toccati* da questo movimento, altri punti invece non vengono *toccati*.

Definizione 5

Diciamo **rotazione** di una semiretta attorno alla sua origine O da un punto A a un punto B di una stessa circonferenza di centro O , il movimento che porta la semiretta OA a sovrapporsi alla semiretta OB .

Postulato 2 (di continuità)

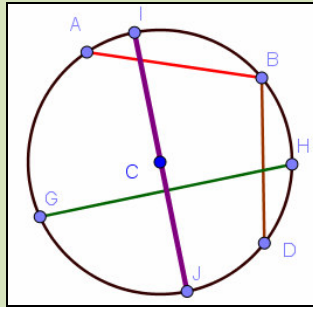
In una rotazione attorno alla sua origine O da un punto A a un punto B , appartenenti entrambi alla stessa circonferenza di centro C , la retta che ruota incontra tutti i punti di $\widehat{AB}$.

Il precedente postulato è anche detto **postulato di continuità**, poiché afferma che il movimento effettuato durante la rotazione è *continuo* e non *a salti*. Continuiamo a considerare le varie parti della circonferenza

Definizione 6

- Diciamo **corda** di una circonferenza Γ , un segmento i cui estremi sono due punti distinti di Γ .
- Una corda passante per il centro si chiama **diametro**.

- Una retta passante per il centro di una circonferenza o di una sfera si chiama **retta diametricale**.
- Un arco di estremi i punti A e B si dice anche che *sottende* la corda AB .



Nell'esempio grafico associato alla definizione 6, la corda IJ è un diametro; l'arco $\widehat{AB}$ o l'arco $\widehat{BA}$ entrambi sottendono la corda AB .

Se guardiamo una figura in cui tracciamo sia corde che diametri, per esempio la precedente, abbiamo la sensazione che i diametri siano sempre più “lunghi”. Questa sensazione è reale ed è confermata dalla validità del seguente risultato, che è un'ovvia conseguenza della disuguaglianza triangolare, perciò ne lasciamo la dimostrazione per esercizio.

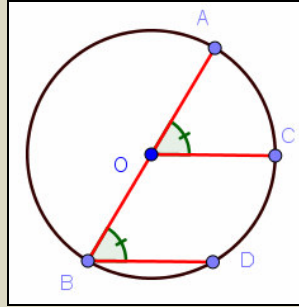
Teorema 1

Un diametro di una circonferenza Γ non è mai minore di una qualunque altra corda di Γ .

Verifiche

Lavoriamo insieme

Data la circonferenza in figura, nella quale O è il centro, AB è un diametro e $OC \parallel BD$, dimostrare che gli



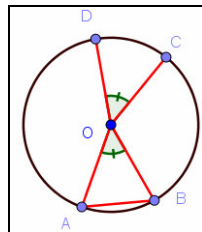
angoli segnati sono fra loro uguali.

Basta applicare le proprietà relative alle rette parallele tagliate da una trasversale, in questo caso le parallele sono OC e BD , la trasversale AB . A questo punto gli angoli segnati sono corrispondenti e quindi uguali.

Livello 1

- Con riferimento al quesito svolto nel box *Lavoriamo insieme*, determinare altre coppie di angoli fra loro uguali, formati dai punti segnati.

$$\left[\angle O\hat{C}A = \angle B\hat{D}O; \angle C\hat{A}O = \angle D\hat{O}B \right]$$



- Data la circonferenza in figura, nella quale O è il centro, sapendo che gli angoli segnati sono uguali, determinare un'altra coppia di angoli uguali fra quelli con vertice in O e lati contenenti le corde segnate.
- Dimostrare il teorema 1.
- In una circonferenza si considerino le due corde uguali e parallele AB e CD , provare che anche le corde AC e BD sono fra loro uguali e parallele.
- Con riferimento al problema precedente, se AB e CD non sono parallele il risultato precedente è ancora vero? Giustificare la risposta.
- Giustificare il fatto, proponendo la costruzione geometrica che la conoscenza dei seguenti fatti determina una circonferenza: Centro e misura del raggio; Misura del diametro; 1 punto e il centro; 2 punti e la misura del raggio.
- Provare che in una circonferenza corde uguali hanno la stessa distanza dal centro.

$$\left[\angle D\hat{O}B = \angle A\hat{O}C \right]$$

Lavoriamo insieme

Alle 12:00 le lancette di un orologio sono esattamente sovrapposte, che ore saranno quando la prima volta formeranno un angolo di 30° ?

La lancetta dei minuti percorre un angolo di 360° in 60 minuti, quindi compie 1° in un sesto di minuto, cioè 10^s , quindi percorre 30° in 5^m .

La lancetta delle ore invece percorre 360° in 12 ore, quindi 1° in 2^m . Pertanto dopo 5^m l'angolo formato dalle due lancette sarà di $(30^\circ - 2^\circ 30') = 27^\circ 30'$.

Ogni 60^s l'angolo formato dalle lancette aumenta di $5^\circ 30'$. Perciò possiamo scrivere che

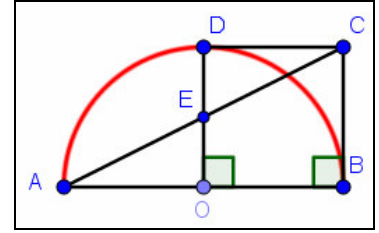
$$5,5^\circ \cdot t^m = 30^\circ \Rightarrow t = \left(\frac{30}{5,5} \right)^m = \left(\frac{60}{11} \right)^m = 5^m \left(\frac{300}{11} \right)^s \approx 5^m 27^s$$

Livello 2

- Dopo quanto tempo, dopo le 12:00, le lancette dei minuti e delle ore formeranno un angolo di 45° ? E uno di 60° ?

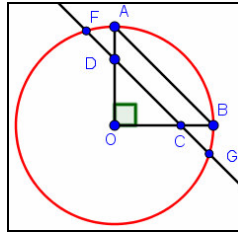
$$[\approx 8^m 11^s; \approx 10^m 55^s]$$

9. Sono passate le 3:00, ma non sono ancora le 4:00 e le lancette di un orologio sono sovrapposte. Che ore sono? $[\approx 3^h 16^m 22^s]$
10. Dimostrare la seguente proposizione dovuta ad Archimede. In figura si ha: $CD \parallel AB$, $CB \parallel DO$, $DO \perp$



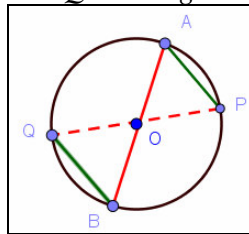
AB . Provare che E è punto medio dei segmenti AC e OD .

11. In una circonferenza di centro O , tracciamo due raggi OA e OB fra loro perpendicolari. Condotta una corda EG parallela alla corda AB , in modo da incontrare OA e OB in D e C rispettivamente, provare



che i segmenti CG e FD sono uguali.

12. Dato il seguente teorema: *Se AB è un diametro di una circonferenza di centro O , e AP e BQ sono due corde fra di loro parallele, allora AP e BQ sono uguali.* Consideriamo la seguente “dimostrazione”, in

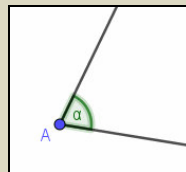


cui ci riferiamo alla figura seguente.

Si congiunga P con Q e si considerino i triangoli AOP e BOQ , i quali sono uguali per LAL, dato che hanno $\angle A\hat{O}P = \angle B\hat{O}Q$ perché angoli opposti al vertice, $\overline{AO} = \overline{OB} = \overline{OP} = \overline{OQ}$ perché raggi di una stessa circonferenza. Quindi si ha la tesi. Tale dimostrazione non è corretta, poiché è stato usato un risultato non provato, determinarlo e dimostrare correttamente il teorema.

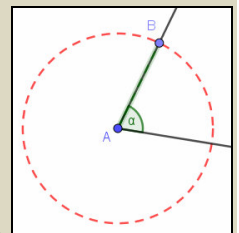
Lavoriamo insieme

Mediante la circonferenza possiamo costruire triangoli di cui conosciamo alcuni suoi elementi. Abbiamo già visto per esempio, nel primo volume, come si costruisce un triangolo di cui conosciamo le misure dei lati, da cui consegue poi la disuguaglianza triangolare. Ora vogliamo costruire un triangolo di cui conosciamo la misura di un lato, di uno degli angoli adiacenti e la misura della mediana a esso relativa.



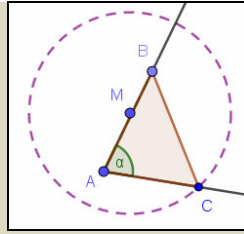
Cominciamo a tracciare l'angolo di cui sappiamo la misura

ora tracciamo il lato di cui cono-



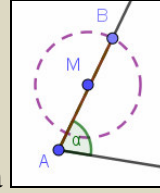
sciamo la misura puntando il compasso sul vertice A con apertura uguale alla misura nota.

Passiamo alla mediana, relativa ad AB , tracciamo il punto medio M e con centro in esso tracciamo una cir-



conferenza raggio pari alla misura della mediana.

Abbiamo costruito il triangolo. Osserviamo solo che il triangolo potrebbe non esserci, se non vi è intersezione fra la circonferenza per M e la se-

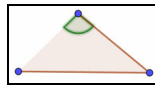


miretta per A non passante per B , come mostrato in figura

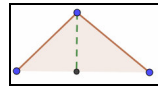
Livello 3

Costruire i triangoli di cui conosciamo i seguenti elementi, discutendo anche la effettiva esistenza. In alcuni esercizi può essere utile ricordare le proprietà del baricentro di un triangolo.

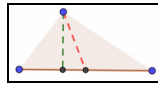
13. Due lati e l'angolo opposto a uno di essi.



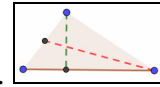
14. Due lati e l'altezza relativa al terzo lato.



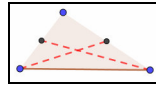
15. Un lato e mediana e altezza a esso relative.



16. Un lato, l'altezza a esso relativa e la mediana relativa a uno degli altri due lati.



17. Un lato e le mediane relative agli altri due lati.



Posizioni reciproche di retta e circonferenza

Vogliamo indagare sulle diverse posizioni che possono avere fra loro una retta qualsiasi e una circonferenza. Per far ciò dimostreremo il seguente teorema.

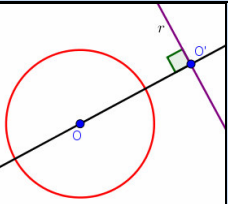
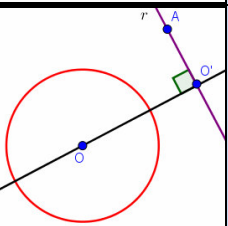
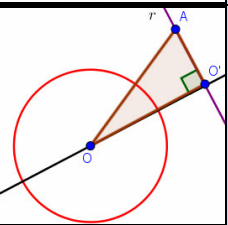
Teorema 2

Date una retta r e una circonferenza Γ di centro O e raggio che misura R , indichiamo con d la distanza di r da O , ossia la misura del segmento perpendicolare condotto da O a r . Valgono i seguenti fatti:

- Se $d > R$ allora r e Γ non hanno punti in comune
- Se $d = R$ allora r e Γ hanno un solo punto in comune
- Se $d < R$ allora r e Γ hanno due punti in comune.

Dimostrazione

Proviamo solo il punto 1., lasciando il resto per esercizio.

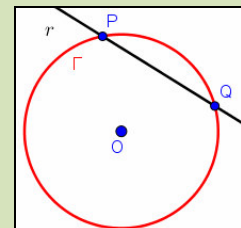
Schema Dimostrativo			
Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Costruiamo la proiezione O' di O su r .		Determinazione della distanza d di O da r .
2	Scegliamo un punto $A \in r$, diverso da O' .		Vogliamo provare che $A \notin \Gamma$, che equivale a dire che circonferenza e retta non hanno punti comuni.
3	Consideriamo il segmento OA .	 $\overline{OA} > \overline{OO'} = d$	Nel triangolo rettangolo $OO'A$, OA è ipotenusa e OO' cateto.
4	Confrontiamo il segmento OA con la misura del raggio R .	$\overline{OA} > R$.	Per la proprietà transitiva alla disuguaglianza dell'ipotesi e del passo 3.
5		$A \notin \Gamma$.	A non verifica la proprietà dei punti di Γ .

Visto il risultato del precedente teorema possiamo porre la seguente definizione.

Definizione 7

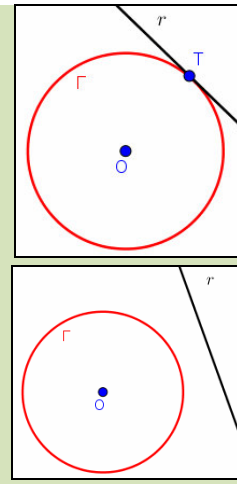
Date una retta r e una circonferenza Γ di centro O e raggio R sul piano Π diciamo che

- r è **secante** a Γ , se $\exists P, Q \in \Pi: r \cap \Gamma = \{P, Q\}$ o se $d(r, O) < R$



- r è **tangente** a Γ , se $\exists T \in \Pi: r \cap \Gamma = \{T\}$ o se $d(r, O) = R$

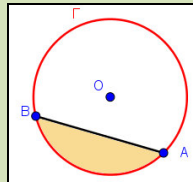
- r è **esterna** a Γ , se $r \cap \Gamma = \emptyset$ o se $d(r, O) > R$



Adesso consideriamo le parti del cerchio.

Definizione 8

Diciamo **segmento circolare** di base una corda AB di un cerchio Γ , la parte di Γ delimitata dall'arco AB e

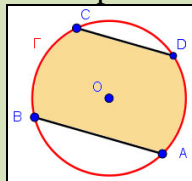


dalla corda da esso sottesa.

Si noti che la determinazione del segmento circolare dipende dalla scelta del verso antiorario per la determinazione dell'arco. Se poi consideriamo due corde fra di loro parallele suddividiamo il cerchio in tre parti, due segmenti circolari e un'altra parte per la quale riserviamo la successiva definizione.

Definizione 9

Diciamo **segmento circolare a due basi** la parte di piano delimitata da due corde di una stessa circonferenza



fra di loro parallele.

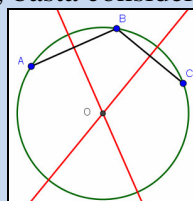
Sappiamo che due punti determinano una retta, nel senso che conoscendo due soli punti di una retta siamo in grado di disegnarla. Quante cose sono necessarie per poter costruire una circonferenza? Certamente bastano il centro e la misura del raggio, ma ricordando che il circocentro (punto di intersezione degli assi dei lati di un triangolo) è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo, possiamo dire che anche tre punti, non allineati, determinano una circonferenza. Anzi per costruire la circonferenza passante per tre punti non allineati, basta appunto ricordare come si costruisce il circocentro di un triangolo. Quanto ricordato ci permette di enunciare il seguente risultato.

Teorema 3

Per tre punti non allineati passa una e una sola circonferenza.

Dimostrazione

Dati i tre punti A , B e C , basta considerarli come vertici di un triangolo e costruirne il circocentro, come mo-



strato meglio in figura. Che poi tale circonferenza sia unica dipende dal fatto che un'altra circonferenza con centro in O , avrebbe raggio uguale a OA e quindi coinciderebbe con la precedente.

La costruzione descritta nel teorema precedente ci fa enunciare un altro importante risultato.

Corollario 1

L'asse di una corda di una circonferenza passa per il centro della circonferenza.

Esempio 1

Grazie alla validità del teorema 3 possiamo determinare il centro di una circonferenza data, basta infatti considerare due corde qualsiasi e tracciare i loro assi che si incontreranno nel centro.

Risulta anche ovvio e di semplice dimostrazione il seguente risultato.

Teorema 4

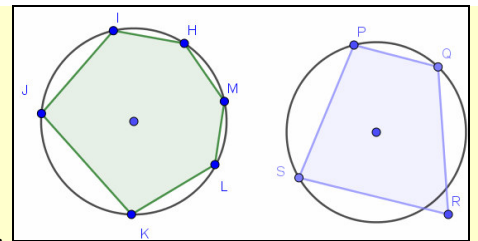
Il diametro condotto perpendicolarmente a una corda la biseca.

Il Teorema 3 permette anche di racchiudere un triangolo all'interno di una circonferenza, con i suoi vertici sulla stessa circonferenza.

Definizione 10

Se tutti i vertici di un poligono sono punti di una circonferenza, diciamo che la **circonferenza è circoscritta al poligono** e che **il poligono è inscritto nella circonferenza**.

Esempio 2



In figura il primo poligono è inscritto nella circonferenza, il secondo no.

Possiamo enunciare il seguente evidente risultato.

Corollario 2

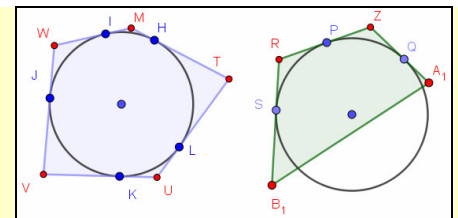
Ogni triangolo è inscritto in una circonferenza.

Abbiamo anche quest'altro analogo concetto.

Definizione 11

Se tutti i lati di un poligono sono tangenti a una circonferenza, diciamo che la **circonferenza è inscritta nel poligono** e che **il poligono è circoscritto alla circonferenza**.

Esempio 3



In figura il primo poligono è circoscritto alla circonferenza, il secondo no.

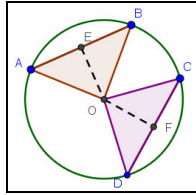
Anche in questo caso abbiamo un risultato per i triangoli.

Teorema 5

Ogni triangolo è circoscrivibile a una circonferenza, il cui centro è punto d'incontro delle bisettrici dei suoi angoli interni.

Dimostrazione segue dalle proprietà delle bisettrici.

Adesso all'interno di una stessa circonferenza consideriamo corde uguali. Ci riferiamo alla seguente figura



per la notazione. È facile notare che, nell'ipotesi $\overline{AB} = \overline{CD}$, i triangoli OAB e OCD sono uguali per LLL e poiché sono isosceli sulle basi AB e CD rispettivamente, anche le altezze OE e OF , relative a tali basi sono uguali. Quindi abbiamo provato la validità della condizione necessaria del seguente teorema. La dimostrazione della condizione sufficiente è lasciata per esercizio.

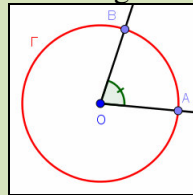
Teorema 6

Condizione necessaria e sufficiente affinché due corde di una stessa circonferenza o di circonferenze uguali siano uguali è che abbiano la stessa distanza dal centro.

Sempre considerando due corde AB e CD fra di loro uguali notiamo che anche gli archi delimitati dalle corde sono uguali, così come gli angoli $\hat{AOB}$ e $\hat{COD}$. Consideriamo in particolare tali angoli o per meglio dire quegli angoli che verificano la seguente definizione.

Definizione 12

Diciamo **angolo al centro** di una circonferenza Γ un angolo il cui vertice coincide con il centro di Γ e i cui



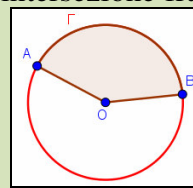
lati sono i prolungamenti di due raggi.

L'arco determinato dai lati dell'angolo si dice che è **sotteso** dall'angolo o anche che è l'arco su cui **insiste** l'angolo.

Vale anche la seguente definizione riferita ai cerchi.

Definizione 13

Chiamiamo **settore circolare** la parte di piano intersezione fra un cerchio di circonferenza Γ e un angolo al



centro di Γ .

Risulta abbastanza ovvio, tenuto conto della definizione di rotazione la validità del risultato seguente.

Teorema 7

In una stessa circonferenza o in circonferenze uguali i seguenti fatti sono equivalenti:

- le corde AB e CD sono uguali;
- gli archi AB e CD sono uguali; gli angoli al centro che insistono sugli archi AB e CD sono uguali;
- i segmenti circolari di basi AB e CD sono uguali.

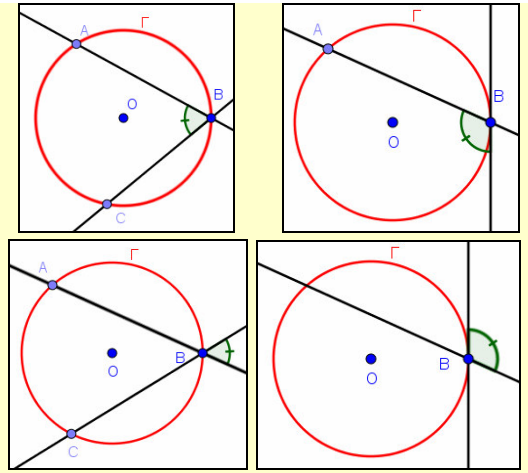
Ora risulta naturale prendere in considerazione un altro tipo di angolo che si determina su una circonferenza.

Definizione 14

Diciamo **angolo alla circonferenza** Γ , un angolo che contiene punti del cerchio racchiuso da Γ , il cui vertice è un punto di Γ e i cui lati sono o due rette secanti la circonferenza o una secante e l'altra tangente. L'arco determinato dai lati dell'angolo si dice che è **sotteso** dall'angolo o è l'arco su cui **insiste** l'angolo.

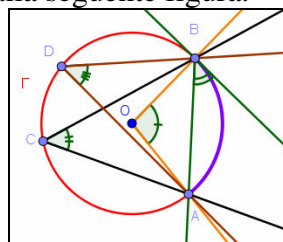
Esempio 4

I seguenti sono esempi grafici di angoli alla circonferenza:



Questi sono invece due esempi di “falso” angolo alla circonferenza:

È facile capire che, dato un arco, su di esso può insistere un solo angolo al centro, mentre sono infiniti quelli alla circonferenza, come meglio chiarito dalla seguente figura.



Ci chiediamo allora se possa stabilirsi una relazione fra angolo al centro e angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco. Se essa esiste risulta implicito che gli angoli alla circonferenza debbano avere tutti la stessa misura, fatto abbastanza intuitivo, specie se rapportato a quanto stabilito dal teorema 7. In effetti è vero il seguente risultato.

Teorema 8

Un angolo al centro è uguale al doppio della misura di uno qualsiasi degli angoli alla circonferenza che insistono sul suo stesso arco.

Dimostrazione

In linea teorica sono possibili diversi casi, nelle diverse ipotesi in cui l'angolo alla circonferenza ha per lati delle secanti, o una secante e una tangente. Inoltre il centro rispetto all'angolo alla circonferenza, stia su uno dei suoi lati, sia a esso interno o sia a esso esterno. Supponiamo di essere nel caso descritto dalla seguente

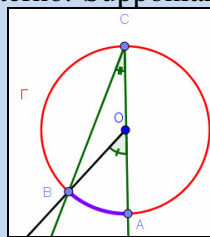


figura.

Ipotesi: $A, B, C \in \Gamma$; A, O e C sono allineati

Tesi: $\angle B\hat{O}A = 2 \cdot \angle B\hat{C}A$

Schema dimostrativo			
Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Consideriamo $B\hat{O}A$	$\angle B\hat{O}A = \angle B\hat{C}O + \angle O\hat{B}C$	Per il teorema dell'angolo esterno, dato che $B\hat{O}A$ è angolo esterno del triangolo COB .
2	Consideriamo il triangolo BOC	Ha uguali gli angoli adiacenti al lato BC .	È isoscele perché OC e OB sono raggi della stessa circonferenza.
3		$\angle B\hat{O}A = 2 \cdot \angle B\hat{C}A$	Per i passi 1 e 2.

Lasciamo per esercizio gli altri casi.

Dal teorema precedente segue immediato quanto già preannunciato, cioè il seguente risultato.

Teorema 9

Condizione necessaria e sufficiente affinché due angoli alla circonferenza di una stessa circonferenza o di circonferenze uguali siano uguali, è che insistano sullo stesso arco o su archi fra di loro uguali.

Come ovvi corollari di questo teorema, si hanno i seguenti fatti, la cui dimostrazione non è difficile quindi vengono lasciate per esercizio.

Corollario 3

Ogni triangolo inscritto in una semicirconferenza è retto.

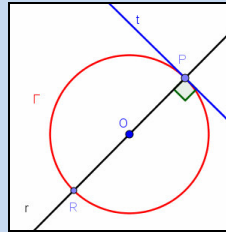
Corollario 4

In un triangolo rettangolo, la mediana relativa all'ipotenusa misura quanto metà dell'ipotenusa.

Sempre come conseguenza del teorema 8 si ha il seguente fatto.

Teorema 10

Dato un punto P su una circonferenza, l'angolo formato dalla retta diametrale passante per P e dalla tangente alla circonferenza in P è retto.

Dimostrazione

Ci riferiamo alla figura seguente per la notazione.

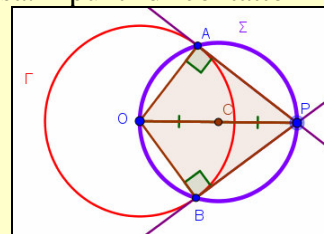
Ipotesi: $t \cap \Gamma = \{P\}$, $P, O, R \in r$

Tesi: $\widehat{\angle tr} = 90^\circ$

Schema dimostrativo			
Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Consideriamo l'angolo $\angle RÔP$.	È un angolo piatto.	Perché formato da due semirette adiacenti.
2	Consideriamo $\widehat{\angle tr}$.	È un angolo retto.	Perché è angolo alla circonferenza che insiste sull'arco formato dalla semicirconferenza di diametro PR .

Esempio 5

- Il precedente teorema ci permette di costruire facilmente la tangente a una circonferenza per un suo punto. Basta infatti tracciare la retta diametrale per il punto, la perpendicolare a tale retta per il punto dato è proprio la tangente cercata.
- Se invece il punto fosse esterno alla circonferenza come possiamo costruire la tangente in esso? Basta cercare di riferirci al caso precedente, ossia costruiamo la circonferenza passante per il punto medio fra il centro O della circonferenza data e il punto P esterno a essa. I punti di contatto A e B sono i punti di



tangenza cercati. Infatti (ci riferiamo alla figura seguente) i triangoli OAP e BOP sono inscritti in una semicirconferenza, quindi per il teorema 10 AP e BP sono le tangenti cercate.

Da quanto visto possiamo enunciare il seguente risultato.

Teorema 11

Dato un punto P e una circonferenza Γ , per esso passano 0, 1 o 2 tangenti a Γ , secondo che P sia interno, appartenga, o sia esterno a Γ .

Poniamo le necessarie definizioni.

Definizione 15

Dato un punto P esterno a una circonferenza Γ , i punti di intersezione fra Γ e le tangenti condotte da P a Γ si dicono **punti di tangenza** condotti da P .

Definizione 16

Dato un punto P esterno a una circonferenza Γ i segmenti che hanno per estremi P e i suoi punti di tangenza si dicono **segmenti di tangenza**.

È semplice provare la validità del seguente teorema.

Teorema 12

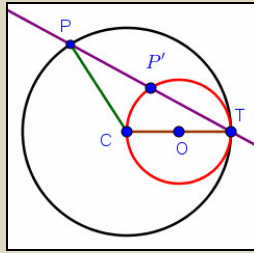
I segmenti di tangenza condotti da un punto esterno a una circonferenza sono fra loro uguali.

Dimostrazione per esercizio

Verifiche

Lavoriamo insieme

Data la circonferenza Γ di centro C , si tracci un'altra circonferenza Φ passante per C , di diametro uguale al raggio di Γ e tangente a essa in T . Data una qualsiasi retta per T , che interseca Γ in P e Φ in P' , provare che

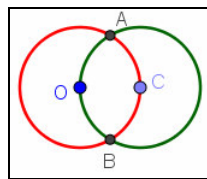


P' è punto medio di PT .

Consideriamo il triangolo CTP e congiungiamo P' con O . Naturalmente OP' è uguale alla metà di PC , quindi per il viceversa del teorema che afferma: *il segmento che unisce i punti medi di due lati di un triangolo è uguale alla metà del terzo lato*, possiamo dire che P' è punto medio di TP .

Livello 1

1. Dimostrare il Teorema 4.
2. Dimostrare il Teorema 5.
3. Dimostrare la condizione sufficiente del Teorema 6.
4. Dimostrare il Teorema 7.
5. Un segmento circolare di un cerchio di centro O , ha per base una corda AB uguale al raggio, determinare la misura dell'angolo $\hat{AOB}$. [60°]
6. Un segmento circolare a due basi è delimitato da due corde uguali al raggio della circonferenza. Se tale misura è unitaria, determinare la misura della minima distanza fra le corde. [$\sqrt{3}$]

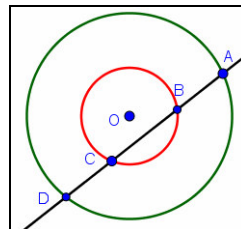


7. Le circonferenze in figura hanno la corda AB in comune che misura 2 cm. Quanto misurano i raggi delle due circonferenze? [$\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} \text{ cm}$]

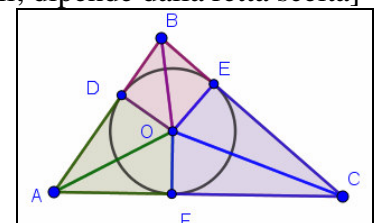
8. Consideriamo il seguente enunciato: *In due circonferenze secanti nei punti A e B , la corda comune AB è asse del segmento congiungente i centri delle circonferenze*. Dire perché il precedente enunciato non è corretto, aggiungere quindi una ulteriore ipotesi che lo renda corretto e dimostrarlo.

[Di uguale raggio]

9. Un cerchio è inscritto in un quarto di cerchio di raggio r , provare che la retta congiungente i due centri biseca il quarto di cerchio.



10. Date le due circonferenze concentriche in figura, tagliate dalla retta. In che relazione sono AB e CD ? E AB e BC ? [Uguali; dipende dalla retta scelta]



11. In figura la circonferenza di centro O è inscritta nel triangolo ABC , [Di uguale raggio]

F sono i punti di tangenza. Provare che i triangoli ugualmente colorati sono uguali.

12. Dato un triangolo ABC si costruisca la semicirconferenza di diametro AB , che incontra gli altri due lati o i loro prolungamenti nei punti H e K . Provare che AH e BK sono altezze del triangolo.

Livello 2

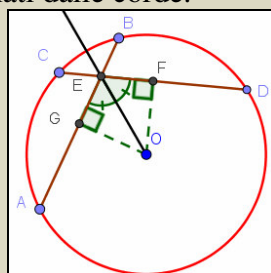
13. Con riferimento al problema precedente, se la retta passa per O , e $\overline{AB} = \overline{CD}$, in che relazione sono i raggi R e r delle due circonferenze? $[R = 3r]$
14. Provare che la bisettrice di un angolo al centro divide a metà l'arco corrispondente.
15. Provare che nella stessa circonferenza, due angoli al centro sono uguali se e solo se lo sono gli archi corrispondenti; inoltre se un arco è maggiore di un altro arco, allora l'angolo che sottende il primo arco è maggiore dell'angolo che sottende il secondo (e viceversa).
16. Date due circonferenze concentriche, la minore delle quali ha raggio che misura 4 cm . Sappiamo che una retta secante entrambe le circonferenze intercettando sulla circonferenza maggiore una corda lunga 12 cm e sulla minore una corda lunga 4 cm . Determinare la misura del raggio della circonferenza maggiore. $[4 \cdot \sqrt{3}\text{ cm}]$
17. In una circonferenza si traccino due corde fra loro parallele e non uguali, si congiungano fra loro gli estremi in modo che si incontrino nel punto P . Dimostrare che P appartiene al diametro perpendicolare alle corde.

Livello 3

18. Con riferimento al precedente quesito, determinare il raggio R della circonferenza maggiore conoscendo quello, r , della minore e le misure delle corde c e C . $\left[\frac{\sqrt{C^2 - c^2 + 4r^2}}{2} \right]$

Lavoriamo insieme

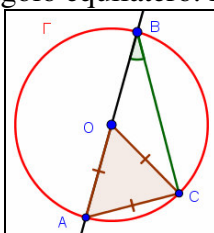
AB e CD sono corde uguali di una stessa circonferenza di centro O , le quali si intersecano nel punto $E \neq O$. Provare che OE è bisettrice di due degli angoli formati dalle corde.



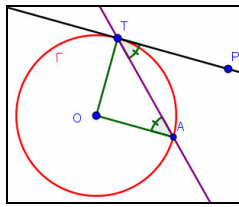
Consideriamo la figura seguente per il riferimento. Ricordiamo che la bisettrice di un angolo è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dai lati dell'angolo. Allora consideriamo le distanze OF e OG di O dalle corde, se riusciamo a provare che i detti segmenti sono fra loro uguali abbiamo finito. Per il teorema 6, F e G sono punti medi di CD e AB rispettivamente. Poiché è facile vedere che i triangoli OBA e OCD sono triangoli isosceli fra loro uguali (per il criterio LLL), ciò implica che anche le altezze relative alla base, cioè appunto OF e OG , sono fra loro uguali, che è quel che volevamo provare.

Livello 1

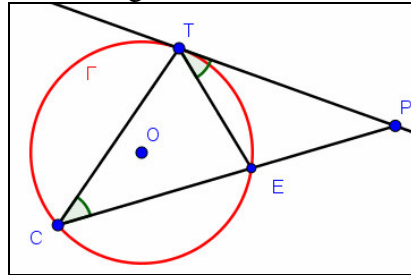
19. In figura AB è diametro, AOC è un triangolo equilatero. Determinare la misura di $\hat{ABC}$. $[30^\circ]$



20. Dato il triangolo isoscele ABC con l'angolo di vertice C di 120° , si consideri la circonferenza di centro C passante per A e B . Si prolunghi il lato AC che incontra la circonferenza in D . Che tipo di triangolo è ADB ? $[Equilatero]$

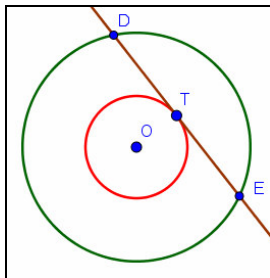


21. In figura PT è tangente a Γ . Determinare $\angle P\hat{T}A$ se è $\angle P\hat{T}A = \angle O\hat{A}T$? [45°]
 22. In figura il segmento TP è tangente alla circonferenza. Determinare la relazione esistente fra le misure



degli angoli indicati.

[Sono uguali]



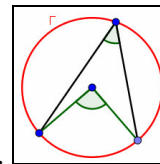
23. In figura le due circonferenze concentriche sono tali che la misura del raggio della minore è 1 cm, e la misura della corda DE tangente alla circonferenza minore è 4 cm. Determinare la misura del raggio della circonferenza maggiore. [$\sqrt{5}$ cm]

Livello 2

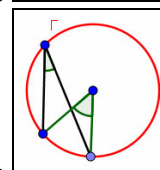
24. Con riferimento al problema precedente, determinare una relazione che lega fra loro le misure dei due raggi r e R , con la misura T della corda.

$$R = \sqrt{r^2 + \left(\frac{T}{2}\right)^2}$$

25. Dimostrare il teorema 8, nell'ipotesi descritte dalla figura seguente.



26. Dimostrare il teorema 8, nell'ipotesi descritte dalla figura seguente.

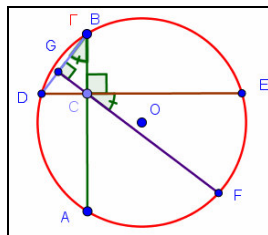


27. Dimostrare il teorema 9.

28. Dimostrare il Corollario 3.

29. Dimostrare il Corollario 4.

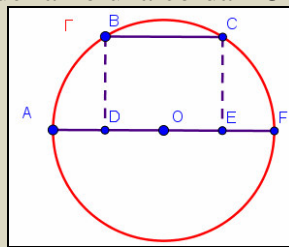
30. Da un punto P esterno a una circonferenza Γ di centro O , si traccino le tangenti a Γ che la incontrano nei punti A e B . Provare che $\angle O\hat{P}A = \angle B\hat{A}O$.



31. Nel cerchio in figura, la circonferenza ha centro O , le corde AB e DE sono perpendicolari, FG è perpendicolare a DB . Provare che $\angle D\hat{B}C = \angle F\hat{C}E$.

Lavoriamo insieme

Nella circonferenza in figura, di diametro AF consideriamo una corda $BC \parallel AF$, vogliamo provare che, dette

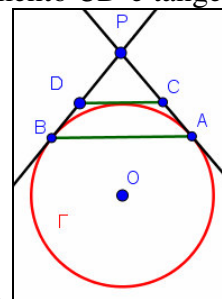


D ed le proiezioni di B e C su AF , si ha: $\overline{AD} = \overline{EF}$.

Per far ciò basta considerare i triangoli ABF e ACF , i quali per il corollario 3 sono rettangoli. Dato che hanno l'ipotenusa AF in comune e le altezze relative all'ipotenusa fra loro uguali perché distanze di rette parallele, i detti triangoli sono uguali. Ma allora $\overline{AB} = \overline{AC}$ e quindi anche i triangoli rettangoli ABD e ECF sono uguali e hanno uguali AD ed EF , cioè la tesi.

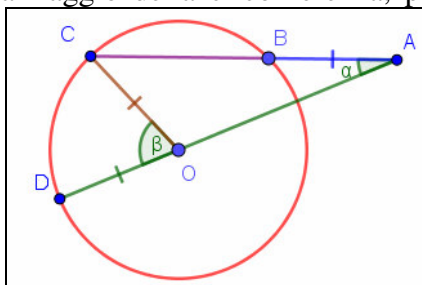
Livello 2

32. Siano AB e CD , due corde di una stessa circonferenza, con $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{CD}$. È sempre vero che l'angolo al centro che insiste su AB è doppio di quello che insiste su CD ? Motivare la risposta. [No]
33. In figura le rette per P e A e per P e B sono tangenti alla circonferenza Γ . Il segmento CD è tangente a

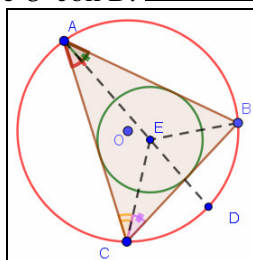


Γ e parallelo alla corda AB . Provare che i segmenti PC e PD sono fra loro uguali.

34. Con riferimento all'esercizio precedente, sappiamo che $\overline{AB} = 2\overline{CD} = 2\text{ cm}$. Determinare la misura del perimetro del triangolo ABP . [6 cm]
35. Data una circonferenza di centro C e raggio che misura 1 cm. Si consideri una sua corda AB uguale al raggio e si traccino le tangenti alla circonferenza per A e B , le quali si incontrano in D . Determinare la misura di CD . Suggerimento: tenere conto che si formano particolari triangoli $\left[\frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}\right]$
36. Un triangolo ABC il cui perimetro misura 38 cm, è circoscritto a una circonferenza. Siano D , E e F i punti di tangenza appartenenti rispettivamente ai lati BC , AC , AB . Sapendo che $\overline{AE} = 3\overline{EC}$ e che $\overline{FB} = 11\text{ cm}$, determinare le misure dei lati di ABC . [8 cm; 13 cm; 17 cm]
37. Nella figura seguente AB è uguale al raggio della circonferenza, provare che $\angle C\hat{O}D = 3 \cdot \angle O\hat{A}C$.



Suggerimento: congiungere O con B .



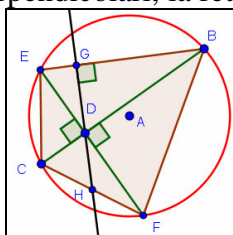
38. Il triangolo ABC in figura è circoscritto a una circonferenza di centro E . Si consideri la circonferenza di centro O circoscritta ad ABC e si tracci la sua corda AD passante per E . Quanto

$$\text{valgono } \frac{\widehat{CAB}}{\widehat{DAB}} \text{ e } \frac{\widehat{ECA}}{\widehat{BCE}} ?$$

[2; 1]

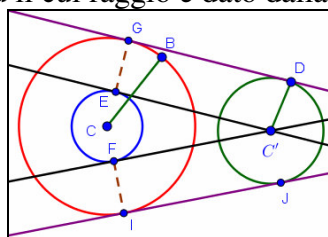
Livello 3

39. Provare il seguente teorema di Brahmagupta. In un quadrilatero inscritto in una circonferenza, le cui diagonali sono perpendicolari, la retta per l'intersezione delle diagonali, perpendicolare a un lato, biseca il lato opposto.

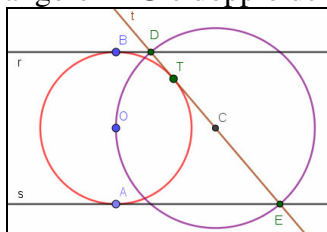


ca il lato opposto.

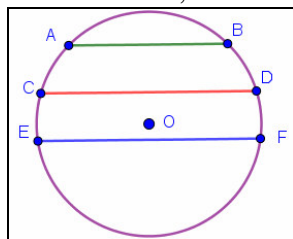
40. Data la seguente figura, provare che essa rappresenta una costruzione delle tangenti comuni a due circonferenze fra loro esterne (la rossa e la verde). Si sa che $C'E$ e $C'F$ sono le tangenti condotte da C' alla circonferenza blu il cui raggio è dato dalla differenza fra i raggi delle due circonferenze. $DG \parallel C'E$ e

 $IJ \parallel C'F$.

41. Descrivere un modo per costruire, come nell'esercizio precedente, una circonferenza il cui raggio è differenza dei raggi di due date circonferenze non uguali.
42. Giustificare, proponendo la costruzione geometrica, che la conoscenza dei seguenti fatti determina una circonferenza. 1 punto e 2 tangenti fra loro incidenti, una delle quali tangente nel punto dato; 1 punto e 2 tangenti fra loro parallele; un punto e una retta a cui essa è tangente in un punto dato; la misura del suo raggio e due rette date a cui la circonferenza è tangente; una circonferenza a essa tangente in un dato punto e un punto fuori dalla circonferenza.
43. Da un punto A esterno a una circonferenza sono condotte due tangenti, siano B e C i punti di contatto. Una terza tangente alla circonferenza nel punto D , incontra AB in E e AC in F . Provare che il perimetro del triangolo AFG è doppio della misura del segmento AB .



44. In figura le rette r e s sono fra loro parallele e tangenti nei punti A e B , a una circonferenza di centro O . Da un punto T della circonferenza si tracci un'altra tangente t che incontra r e s nei punti D ed E . Provare che O , D ed E appartengono alla circonferenza di diametro DE . [Adattato da Posamentier, Salkind, *Challenging problems in geometry*]
45. In figura AB ed EF sono due corde parallele di uno stesso cerchio, $\overline{AB} = 10 \text{ cm}$ e $\overline{EF} = 14 \text{ cm}$. Sapendo che la loro distanza è 6 cm , determinare la misura della corda CD parallela alle due e che dista

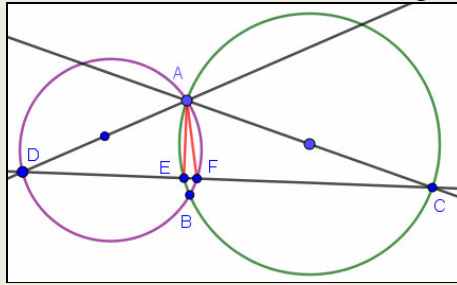


ugualmente da esse.

$$[\sqrt{46} \text{ cm}]$$

Enigmi matematici

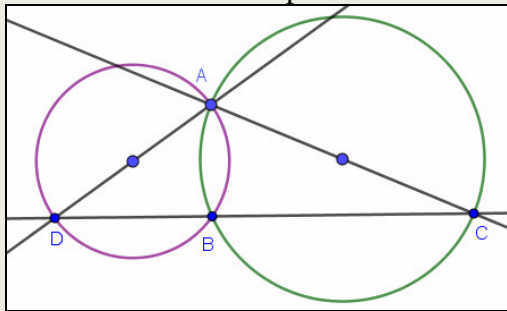
Proponiamo adesso una “dimostrazione” del fatto che da un punto possono condursi due distinte perpendicolari a una data retta. Questa “dimostrazione”, come altre già fornite, ha il fine didattico di ricordare allo studente che nelle matematiche la fretta è cattiva consigliera. Consideriamo la figura seguente,



nella quale A e B sono le intersezioni di due circonferenze generiche, AC e AD sono due dei loro diametri e CD incontra le due circonferenze nei punti E e F rispettivamente.

Dato che sia AED che ACF sono triangoli inscritti in una semicirconferenza, essi sono retti. Abbiamo quindi provato che dal punto A possono condursi le due distinte perpendicolari AE e AF alla retta per CD .

L'assurdità del risultato è motivata dal fatto che abbiamo detto, senza provarlo, il fatto falso che CD incontra le due circonferenze nei due punti distinti E e F , mentre in realtà accade ciò che è visualizzato nella seguente



figura

due circonferenze.

cioè E e F coincidono nell'unico punto B intersezione delle

Attività

Provare che il segmento CD non incontra le due circonferenze in due punti distinti, né che ne incontra una sola di essi, cioè che la retta per CD è più “bassa” di quella mostrata nella figura.

Posizioni reciproche di due circonferenze

Abbiamo già trattato delle posizioni reciproche di due circonferenze considerando i diagrammi di Eulero – Venn, quindi risulta abbastanza naturale considerare il seguente risultato.

Teorema 13

Due circonferenze distinte non hanno più di due punti in comune.

Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che esistano due circonferenze che abbiano in comune 3 punti: A , B e C . Tali punti chiaramente non sono allineati, ma allora per il teorema 3 la circonferenza che li contiene è unica. Pertanto il teorema è provato.

Poniamo adesso delle definizioni.

Definizione 17

Due circonferenze Γ e Φ che, unitamente ai cerchi interni che esse delimitano non hanno punti in comune si dicono fra di loro **esterne**.

Definizione 18

Due circonferenze Γ e Φ che hanno due punti in comune si dicono fra di loro **secanti**.

Definizione 19

Due circonferenze Γ e Φ che, unitamente ai cerchi interni che esse delimitano, hanno un solo punto in comune si dicono fra di loro tangenti **esternamente**.

Definizione 20

Due circonferenze Γ e Φ , che hanno il centro in comune si dicono fra di loro **concentriche** o **omocentriche**.

Definizione 21

Date due circonferenze concentriche Γ e Φ , con $\Phi \subset \Gamma$, l'insieme $\Gamma - \Phi$ si dice **corona circolare** delimitata da Γ e Φ .

Definizione 22

Una circonferenza Φ i cui punti sono tutti appartenenti al cerchio interno di un'altra circonferenza Γ , si dice **interna** a quest'ultima.

Definizione 23

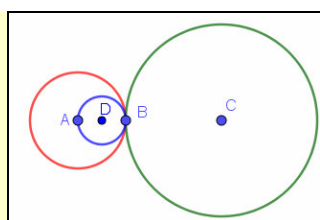
Due circonferenze Γ e Φ , che hanno un punto in comune e i cui cerchi interni che esse delimitano hanno punti in comune, si dicono fra di loro **tangenti internamente**.

Che cosa significa?

Concentriche o Omocentriche significa semplicemente con lo stesso centro. Ricordiamo che il prefisso *Omo* è già stato usato in altri vocaboli matematici, come omogeneo (dello stesso genere).

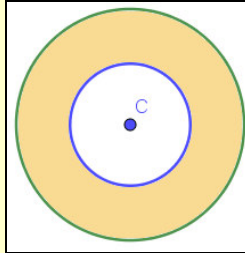
Vediamo qualche esempio grafico.

Esempio 6



- In figura il cerchio rosso è tangente esternamente a quello verde ed internamente a quello blu. Non è necessario che la circonferenza blu passi per il punto A , mentre è

necessario che D stia sulla congiungente A e B .



- I due cerchi in figura sono concentrici, la parte colorata è la corona circolare da essi delimitata.

Dall'esempio precedente risulta naturale caratterizzare le posizioni reciproche di due circonferenze tenuto conto delle relazioni fra il segmento che congiunge i centri delle circonferenze (se non sono concentriche) e i raggi.

Teorema 14

Date due circonferenze Γ e Φ di centri rispettivi O e C e raggi che misurano r e p . Allora valgono i seguenti fatti:

- Γ e Φ sono esterne $\Leftrightarrow \overline{OC} > r + p$;
- Γ e Φ sono secanti $\Leftrightarrow |r - p| < \overline{OC} < r + p$ (il valore assoluto è motivato dal fatto che non abbiamo stabilito quale dei due raggi è maggiore dell'altro);
- Γ e Φ sono tangenti esternamente $\Leftrightarrow \overline{OC} = r + p$;
- Γ è interna a $\Phi \Leftrightarrow r < p$ e $\overline{OC} < p - r$;
- Γ e Φ sono tangenti internamente $\Leftrightarrow \overline{OC} = |r - p|$

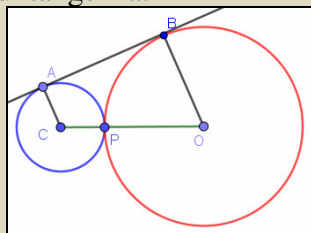
Dimostrazione

Lasciata per esercizio. Diciamo solo che per il punto b) basta considerare il triangolo i cui vertici sono O , C e uno dei punti di intersezione delle due circonferenze. Per tutti gli altri casi basta considerare solo il segmento OC .

Verifiche

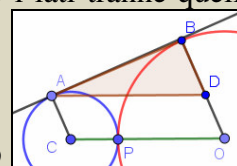
Lavoriamo insieme

Due circonferenze di raggi che misurano 8 cm e 18 cm sono fra loro tangenti esternamente in un punto P . Si consideri una retta tangente a entrambe le circonferenze in un punto diverso da P . Determinare la misura del segmento che unisce i due punti di tangenza.



Rappresentiamo il tutto in figura

Dato che la tangente è comune vuol dire che i raggi nei punti di tangenza sono paralleli, dato che con la detta tangente formano un angolo retto (Teorema 10). Quindi il quadrilatero $ABOC$ è un trapezio rettangolo di cui conosciamo i lati tranne quello che è altezza.

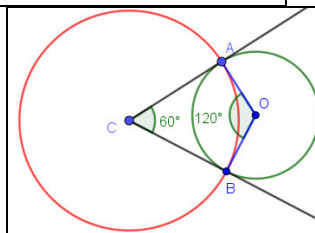


Tracciamo la parallela a CO per A , ottenendo il triangolo rettangolo ABD , in cui AD è uguale a CO e BD è differenza fra i due raggi. Appliciamo il teorema di Pitagora per determinare quanto richiesto: $\overline{AB} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{BD}^2} = \sqrt{26^2 - 10^2}\text{ cm} = \sqrt{676 - 100}\text{ cm} = \sqrt{576}\text{ cm} = 24\text{ cm}$.

Livello 1

- Con riferimento al problema precedente, si indichino con $r < R$ le misure dei due raggi e con T la misura del segmento che unisce i due punti di tangenza. Determinare la misura di T . $\left[2 \cdot \sqrt{R \cdot r}\right]$
- Completare la seguente tabella, giustificando le risposte, tenuto conto che con R e R' indichiamo le misure dei raggi di due circonferenze e con D la distanza dei loro raggi:

R	R'	D	Le circonferenze sono
6	4	15	
	6	12	Tangenti internamente
10	6	12	
8		4	Tangenti esternamente
13	7	5	
12	3		Interne
7	4	8	
4	10		Esterne
5	3		Concentriche
4	10	16	
	2	3	
3		4	Secanti



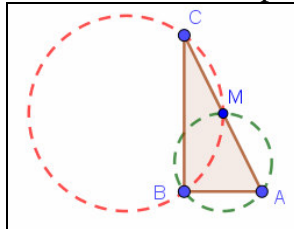
- Date le circonferenze di centri O e C in figura che si intersecano nei punti A e B , sapendo che $\angle A\hat{O}B = 60^\circ$, $\angle B\hat{C}A = 120^\circ$, provare che OA e OB sono semirette tangenti alla circonferenza di centro C .
- Due circonferenze sono tangenti internamente, per il centro C della minore si conduca la perpendicolare al segmento OC congiungente i centri delle due circonferenze, che incontra in P e Q la circonferenza

za maggiore. Sapendo che le misure dei raggi delle due circonferenze misurano rispettivamente 1 cm e 3 cm , determinare la misura di PQ . $\left[\sqrt{5}\text{ cm}\right]$

5. Con riferimento al problema precedente, determinare la misura di PQ , espressa mediante le misure $r < R$ dei due raggi. $\left[\sqrt{2Rr - r^2}\right]$
6. Due circonferenze di centri O e C hanno raggi che misurano 1 cm e 2 cm e sono tangenti internamente nel punto T . Una terza circonferenza di centro P e raggio che misura 4 cm , è tangente esternamente alle due circonferenze nel punto T . Determinare la misura del segmento OP . $[6\text{ cm}]$
7. Si risolva il quesito precedente, nelle stesse ipotesi ma indicando con R , R' e R'' le misure dei raggi delle tre circonferenze. $[R + R'']$
8. Due circonferenze sono fra loro secanti nei punti A e B . Se il segmento AB misura 16 cm e i raggi misurano 10 cm e 17 cm , si determinino le distanze fra i centri delle circonferenze. $[21\text{ cm}]$

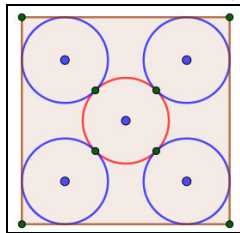
Livello 2

9. Descrivere la costruzione della tangente comune a due circonferenze i cui raggi sono fra loro uguali.
10. Dato un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa AC , si consideri il punto medio M di AC . Si traccino le circonferenze passanti per A , M e B e per B , C e M , come esemplificato nella figura seguente. Provare che una delle due circonferenze risulta divisa dai tre punti i tre archi uguali, mentre nell'altra solo due



dei tre archi sono fra loro uguali.

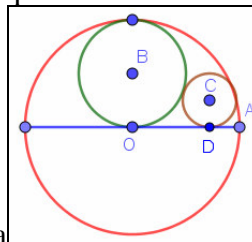
11. In figura, internamente a un quadrato di lato 1 m , vi sono cinque circonferenze uguali di raggio r che non si sovrappongono. Sappiamo che una delle cinque circonferenze è concentrica al quadrato e tangente alle altre quattro circonferenze, ciascuna delle quali è tangente a due lati del quadrato. Determinare la misura di r .



nare la misura di r .

$$\left[\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right]$$

12. In un cerchio di centro O e raggio OA che misura 6 , si tracci un altro cerchio di centro B a esso tangente internamente e passante per O . Si tracci poi un terzo cerchio di centro C tangente ai detti cerchi e al

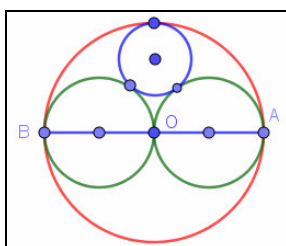


segmento OA nel punto D , come in figura. Determinare la misura del raggio della circonferenza minore.

$$\left[12 - 6\sqrt{3}\right]$$

13. Risolvere il precedente quesito per il raggio OA lungo r .

$$\left[r \cdot (2 - \sqrt{3})\right]$$



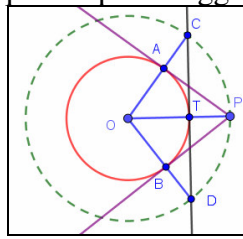
14. In figura è disegnato un cerchio di centro O e diametro AB e due cerchi di diametro AO e OB . È tracciato altresì il cerchio tangente ai tre precedenti cerchi. Se il raggio di

quest'ultimo cerchio misura 8 cm , quanto misura AB ?

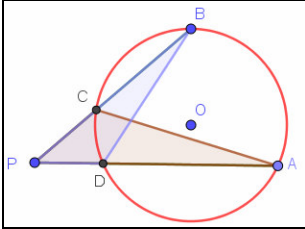
[24 cm]

15. Risolvere il precedente quesito per il raggio del cerchio minore lungo r .

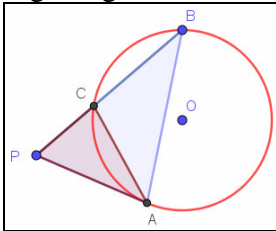
[3r]



16. Data la seguente figura, provare che essa rappresenta una costruzione delle tangenti condotte da un punto P esterno a una circonferenza di centro O e raggio OT . Si sa che CD è la perpendicolare a OP passante per T , A e B sono le intersezioni di OC e OD con la circonferenza di partenza.



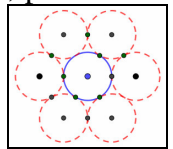
17. In figura PA e PB sono secanti la circonferenza. Provare che i triangoli PAC e PBD hanno gli angoli a due a due uguali.



18. In figura PB è secante la circonferenza, PA è a essa tangente. Provare che i triangoli PAB e PCA hanno gli angoli a due a due uguali.

Livello 3

19. Una moneta è posta su un tavolo, quante altre monete, dello stesso tipo della precedente, possono disporsi in modo che siano tangenti alla moneta e fra di loro? Giustificare la risposta.

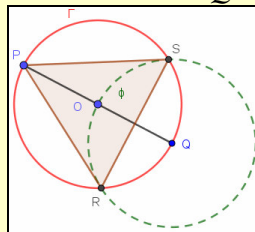


Poligoni inscritti e circoscritti a una circonferenza e lunghezza della circonferenza

Abbiamo considerato triangoli inscritti e circoscritti a una circonferenza, adesso trattiamo il problema della inscrivibilità e circoscrivibilità di un generico poligono in una circonferenza. Ricordiamo che ogni triangolo può essere sia inscritto che circoscritto a una circonferenza, ci chiediamo se ciò è vero per tutti gli altri poligoni. La risposta è immediatamente negativa, basta infatti pensare alle costruzioni che sono state fatte nell'unità relativa ai parallelogrammi, in particolare fu visto che il rombo non quadrato non è inscrittibile a una circonferenza. Allora vediamo cosa possiamo dire in generale. È evidente che se fissiamo sulla circonferenza più di due punti allora il poligono che ha per estremi tali punti è inscritto nella circonferenza. Il nostro problema è invece: dato un poligono qualsiasi possiamo dire se esso è o non è inscrittibile o circoscrivibile a una circonferenza? Se il poligono è regolare la risposta è positiva, dato che se riusciamo a suddividere la circonferenza in n archi uguali, tali punti sono gli estremi di un poligono regolare di n lati. Infatti le corde essendo sottese da archi fra di loro uguali, per il teorema 7 sono tutte uguali fra di loro, per lo stesso risultato possiamo dire che anche gli angoli al centro che insistono su tali archi sono tutti uguali fra loro, quindi facilmente lo sono anche gli angoli interni del poligono. Quindi un poligono regolare è inscrittibile a una circonferenza, il che però non significa che dato un qualsiasi poligono regolare noi sappiamo inscrivere nella circonferenza, solo con l'uso di riga e compasso.

Esempio 6

Data una circonferenza Γ di centro O , vogliamo costruire un triangolo equilatero in essa inscritto. Fissiamo un punto P qualsiasi su Γ e tracciamo il diametro per P che incontra Γ in Q . Con centro in Q tracciamo la

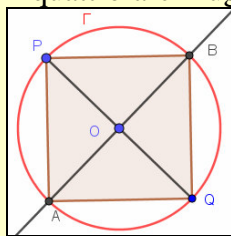


circonferenza Φ di raggio QO che incontra Γ in R e S . Noi diciamo che PRS è il triangolo cercato. Infatti, ci riferiamo alla precedente figura, $\overline{OR} = \overline{RQ} = \overline{OQ} = r$ perché raggi di circonferenze uguali. Quindi ORQ è equilatero. Il triangolo PQR , essendo inscritto in una semicirconferenza, è rettangolo con ipotenusa $\overline{PQ} = 2\overline{QR}$. Ciò significa che è un triangolo rettangolo, con angoli acuti che misurano 30° e 60° , quindi $\angle RPQ = 30^\circ$ e $\angle SRP = 60^\circ$. Ma PQ è asse di RS , quindi avremo anche $\angle RPS = 2 \cdot \angle RPQ = 60^\circ$, il che equivale appunto a dire che PSR è equilatero.

Passiamo alla costruzione del quadrato.

Esempio 7

Vogliamo adesso costruire il quadrato inscritto in una circonferenza. Il procedimento è molto semplice, dato che bisogna dividere la circonferenza in quattro archi uguali, cosa che può farsi semplicemente costruendo



due diametri fra di loro perpendicolari.

Tenuto conto del fatto che dimezzando una corda dimezziamo anche l'arco che la sottende, possiamo dire che a partire dal triangolo equilatero siamo in grado di costruire l'esagono regolare e da questo il dodecagono regolare e così via, analogamente dal quadrato l'ottagono e via dicendo. Possiamo perciò enunciare il seguente risultato.

Teorema 15

I poligoni regolari di 2^n lati e $3 \cdot 2^n$ lati sono costruibili con riga e compasso.

Consideriamo adesso più in generale i quadrilateri inscrittibili in una circonferenza, cercando di determinare una condizione che li caratterizzi. Abbiamo già osservato che un rombo non quadrato non può essere inscritto in una circonferenza, e ciò a causa del fatto che le diagonali hanno diversa misura, infatti essendo esse fra di loro perpendicolari dovrebbero incontrarsi nel centro della circonferenza, essere quindi diametri e avere perciò la stessa misura. Consideriamo adesso un quadrilatero inscritto in una circonferenza come quello in

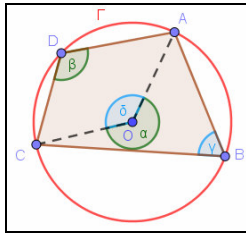


figura. Grazie al teorema 8 possiamo dire che $\alpha = 2\beta$ e $\delta = 2\gamma$, cioè $\beta + \gamma = 180^\circ$. Poiché sappiamo che la somma degli angoli interni di un quadrilatero misura 360° anche gli altri due angoli opposti sono fra di loro supplementari. Abbiamo così trovato una condizione necessaria affinché un quadrilatero sia inscrittibile in una circonferenza. Ci chiediamo se tale condizione è anche sufficiente, se cioè è vero il seguente enunciato.

Teorema 16

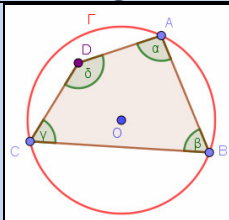
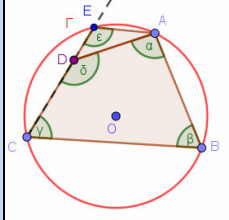
Condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero sia inscrittibile in una circonferenza è che abbia gli angoli interni opposti supplementari.

Abbiamo già provato la parte necessaria non ci rimane che dimostrare quella sufficiente.

Ipotesi: ABCD ha gli angoli interni opposti supplementari *Tesi:* ABCD è inscrittibile in una circonferenza

Dimostrazione

Ragioniamo per assurdo.

Schema dimostrativo			
Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Sia ABCD con $\beta + \delta = 180^\circ$. Tracciamo la circonferenza per ABC.	 Non passa per D.	Perché stiamo negando la tesi.
2	Prolunghiamo CD fino a incontrare Γ in E. Consideriamo il quadrilatero ABCE.	 È inscritto in Γ.	
3	Consideriamo gli angoli ε e β	Sono supplementari.	Per la condizione necessaria di questo teorema.
4	Consideriamo gli angoli ε e δ	Sono uguali.	Perché entrambi supplementari di β
5		La precedente conseguenza è assurda.	Perché δ è angolo esterno del triangolo ADE di cui ε è angolo interno non adiacente e quindi deve essere maggiore di ε.

Se D fosse esterno a Γ il procedimento potrebbe ripetersi, considerando come punto E l'intersezione di CD (non del suo prolungamento) con Γ. Caratterizziamo con un nome i quadrilateri inscrittibili.

Definizione 24

I quadrilateri inscrittibili in una circonferenza si dicono **ciclici**.

Passiamo adesso al problema della circoscrivibilità. Ancora una volta i poligoni regolari sono circoscrivibili a qualsiasi circonferenza, basta partire dal poligono inscritto e tracciare le tangenti alla circonferenza in tali punti. Il poligono i cui vertici sono dati dalle intersezioni delle dette tangenti è regolare, come mostrato in

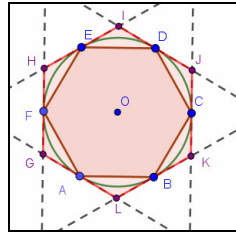


figura per il caso dell'esagono.

Infatti, per il teorema 12 i segmenti di tangenza condotti da uno stesso punto sono fra loro uguali (p.e. $\overline{GA} = \overline{GF}$), gli angoli formati dai segmenti di tangenza e dal lato del poligono inscritto sono uguali (p.e. $\angle G\hat{A}B = \angle G\hat{F}E$) perché angoli alla circonferenza (formati da una retta tangente e una retta secante) che insistono su archi fra loro uguali. Ciò vuol dire che tutti i triangoli tipo GAF sono isosceli e uguali fra di loro, quindi tutti i lati del poligono circoscritto sono fra loro uguali così come lo sono gli angoli interni. La costruzione di un poligono regolare circoscritto è quindi dipendente da quella del corrispondente poligono inscritto.

Vediamo cosa accade più in generale per i quadrilateri. Al solito è facile capire che non tutti sono circoscrivibili: un rettangolo non quadrato non lo è mai. Invece, sempre grazie al teorema 12, possiamo dire che il risultato da applicare è il seguente.

Teorema 17

Condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero sia circoscrivibile a una circonferenza è che la somma delle misure dei suoi lati opposti sia costante.

Ipotesi: $ABCD$ è circoscrivibile a una circonferenza

Tesi: $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$

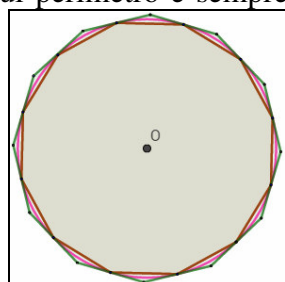
Dimostrazione

Schema dimostrativo			
Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Sia $FGHI$ circoscritto a una circonferenza Γ . Consideriamo i segmenti di tangenza condotti dai vertici di $ABCD$.	$\overline{FC} = \overline{FD}, \overline{GC} = \overline{GB},$ $\overline{HB} = \overline{HE}, \overline{ID} = \overline{IE}$	Per il teorema 12.
2	Consideriamo la somma dei lati opposti di $ABCD$.	$\overline{FG} + \overline{HI} = \overline{GH} + \overline{FI}$	Somma di segmenti fra loro uguali, tenuto conto del risultato del passo 1.

Per quel che riguarda la condizione sufficiente si ragiona per assurdo in modo simile a quanto fatto per il teorema 16. Lasciamo per esercizio la sua dimostrazione.

Chiudiamo il capitolo cercando di determinare la lunghezza della circonferenza.

Se inscriviamo e circoscriviamo in una circonferenza poligoni regolari con un numero sempre maggiore di lati, otterremo poligoni il cui perimetro è sempre più vicino alla lunghezza della circonferenza, come mo-



strato nella seguente figura, in cui abbiamo inscritto e circoscritto un poligono regolare con 12 lati. È proprio con un procedimento del genere che Archimede, partendo dall'esagono regolare e

arrivando a inscrivere e circoscrivere poligoni regolari di 96 lati trovò la seguente disuguaglianza:

$$6 + \frac{20}{71} < c < 6 + \frac{2}{7}.$$

È chiaro che Archimede usò dei procedimenti di approssimazione già nel calcolo dei valori irrazionali che chiaramente gli vennero fuori dai calcoli. Con questo metodo, detto di esaustione, Archimede dimostrò il seguente teorema.

Teorema 18

In ogni circonferenza il rapporto fra la sua lunghezza e il suo diametro è costante.

Al valore costante precedente il famoso matematico svizzero del settecento Leonhard Euler associò il simbolo π (pi greca). Dal precedente teorema viene fuori la ben nota formula per la determinazione della misura di una circonferenza:

$$c = 2\pi \cdot r$$

Vale anche il seguente risultato.

Teorema 19

Un arco di una circonferenza di raggio r , che determina un angolo al centro che misura α gradi ha una misura pari a

$$\frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180}.$$

Esempio 8

È intuitivo il fatto che la semicirconferenza, che determina un angolo al centro di 180° , misuri metà della circonferenza, allo stesso modo un arco che determina un angolo al centro di 60° misurerà $\frac{1}{6}$ della circonferenza.

L'angolo storico

Il simbolo π è stato usato con il significato moderno, per la prima volta solo nel 1706 dall'inglese William Jones. In precedenza erano stati usati altri simboli, per esempio un quadrato da John Wallis nel 1655. Con il simbolo π , sempre nel 1600 si indicava la misura di tutta la circonferenza.

Il valore di π .

La “sensazione” che la regolarità della circonferenza si ripercuotesse nella costanza di un rapporto, in particolare della lunghezza con il raggio, è stata avvertita sin dai primordi delle matematiche. Ciò anche perché risultava necessario nella vita pratica, ossia nelle costruzioni. Naturalmente per fini utilitaristici ci si accontentava di valori approssimati, spesso molto grossolani. Così presso gli egiziani, nel più volte citato papiro di Rhind, si supposeva $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3.1604$.

Rhind, si supposeva $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3.1604$.

In seguito ciascuna civiltà non mancò di fornire il suo valore, nella stessa Bibbia, nel libro dei Re, vi è un'affermazione che porta a concludere che $\pi = 3$, mentre presso i babilonesi si ritrova o lo stesso valore o uno più preciso: $\pi = 3 + \frac{1}{8}$. Un valore migliore viene proposto, come abbiamo detto prima, da Archimede

con il suo metodo di esaustione. Per ottenere un valore migliore si deve attendere fino al VX secolo, quando l'arabo Al – Kashi, fornisce un valore con ben 16 cifre decimali esatte. Ed è a partire da questo periodo che vi è una specie di gara per la determinazione del maggior numero possibile di cifre decimali. Si ricorda in particolare Ludolph van Ceulen che passò gran parte della sua vita a effettuare tali calcoli, trovando 35 cifre esatte. Tuttora in Germania, il suo paese natale, π è conosciuto come numero Ludolfino. Nel XVII secolo i grandi matematici dell'epoca trovano delle semplici formule, che ai giorni nostri possono implementarsi facilmente nei computer, per ottenere con facilità valori ben approssimati di π .

Naturalmente è proprio con l'avvento dei moderni computer che si è arrivati a ottenere decine di milioni di

cifre esatte del numero. Anzi un fatto curioso da segnalare è che un tale Ferguson nel 1945, grazie a una calcolatrice scoprì che William Shanks aveva sbagliato i suoi lunghi calcoli che nel 1853 lo avevano portato a trovare 707 cifre, a partire dalla 528 esima cifra.

La domanda spontanea che nasce è “a che serve tutto ciò?”. Possiamo rispondere intanto che è solo una sana sfida intellettuale, ma non solo, dato che la storia del mondo ha sempre dimostrato che spesso da problemi apparentemente superflui sono nati importanti scoperte. Per esempio gli algoritmi per il calcolo di π sono usati per testare la velocità dei processori. Chiudiamo riportando “alcune” cifre decimali esatte di questo famoso numero: $\pi \approx 3,1415926535897932384626433832795028841972$

L'Antologia



Gli “*Elementi*” contengono naturalmente anche riferimenti alla circonferenza e al cerchio. In effetti già la definizione XV del libro I riporta:

Cerchio è una figura piana compresa da un'unica linea tale che tutte le rette, le quali cadano sulla linea a partire da un punto fra quelli che giacciono internamente alla figura, sono uguali fra loro.

Come si vede una definizione alquanto artificiosa e poco precisa. In essa Euclide dice praticamente che c'è un punto in questa figura, che chiamerà *centro* nella successiva definizione XVI, tale che ogni retta passante per esso “stacca” sulla circonferenza segmenti di uguale misura, i diametri. Poi, come se continuasse il discorso, Euclide nomina appunto queste parti, dicendo:

“Quel punto si chiama centro del cerchio” (Definizione XVI)

“Diametro del cerchio è una retta condotta per il centro e terminata da ambedue le parti dalla circonferenza del cerchio, la quale retta taglia anche il cerchio per metà”. (Definizione XVII)

“Semicerchio è la figura compresa dal diametro e dalla circonferenza da esso tagliata. E centro del semicerchio è quello stesso che è anche centro del cerchio”. (Definizione XVIII)

Dopo di che usa senza problemi il cerchio e la circonferenza anche in diverse dimostrazioni, come la costruzione di un triangolo equilatero. Per approfondire le proprietà della circonferenza, cerchio e sue pari dedica un intero libro, il terzo, che comprende 37 proposizioni. Questo libro si apre con altre undici definizioni, di cui ne riportiamo le prime tre

- *Sono uguali i cerchi i cui diametri sono uguali, o di cui sono uguali i raggi.*
- *Si dice che è tangente ad un cerchio una retta, la quale raggiunge il cerchio e, prolungata non lo taglia.*
- *Si dicono tangenti fra loro cerchi i quali si raggiungono e non si tagliano scambievolmente.*

Possiamo notare ancora una volta il modo “tortuoso” di descrivere proprietà in qualche modo intuitive. Infine, nel libro IV, composto da 16 proposizioni, tratta le questioni sui poligoni inscritti e circoscritti a una circonferenza.

Archimede inoltre dedica un breve trattato, *Misura del cerchio*, composto da sole tre proposizioni, proprio per trattare la questione della misurazione della superficie racchiusa da un cerchio.

Ecco le tre proposizioni.

Proposizione 1.

Ogni cerchio è uguale a un triangolo rettangolo se ha il raggio uguale a un cateto e la circonferenza uguale alla base.

La dimostrazione avviene per assurdo, facendo vedere che, prese due figure come quelle espone nell'enunciato, non è possibile che una delle sue abbia area maggiore dell'altra. Per far ciò comunque usa diverse proprietà che ha enunciato e provato in una sua opera maggiore, *Sulla sfera e sul cilindro*.

Proposizione 2.

Il cerchio ha rispetto al quadrato del diametro il rapporto che 11 ha rispetto a 14.

Questa proposizione è stata scritta erroneamente per seconda dai curatori della traduzione araba sulla quale ci si avvale anche per le moderne edizioni, dato che per essere dimostrata ha bisogno della successiva proposizione. Inoltre è male enunciata, dato che si riferisce a una approssimazione e non a un risultato esatto. In pratica l'enunciato equivale a dire che

$$\frac{\pi \cdot r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi}{4} = \frac{11}{14} \Rightarrow \pi = \frac{22}{7} = 3.\overline{142857}$$

valore che ha solo le prime due cifre decimali esatte.

Proposizione 3.

La circonferenza di ogni cerchio è tripla del diametro e la supera ancora di meno di un settimo del diametro, e di più di dieci settantunesimi.

Questa è la proposizione che, mediante il procedimento di esaustione, inscrivendo e circoscrivendo poligoni regolari di 96 lati, trova la limitazione

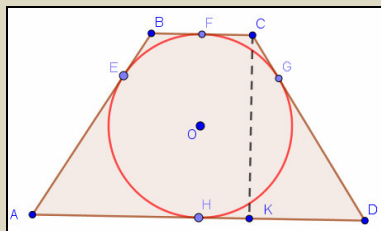
$$3 + \frac{10}{71} \approx 3.1408 < \pi < 3 + \frac{1}{7} = 3.\overline{142857}$$

Verifiche

Lavoriamo insieme

Un trapezio isoscele è circoscritto a una circonferenza. Sapendo che le sue basi misurano 45 cm e 125 cm , determinare la misura del diametro del cerchio inscritto.

Ci riferiamo alla seguente figura, nella quale abbiamo costruito il triangolo rettangolo CKD , in cui CK è sia altezza del trapezio che segmento uguale al diametro da determinare.



Per potere applicare il teorema di Pitagora dobbiamo conoscere le misure di CD e di KD . Sappiamo che i segmenti di tangenza sono uguali, quindi: $\overline{CD} = \overline{CG} + \overline{GD} = \overline{CF} + \overline{DH} = \frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2} = \frac{45 + 125}{2}\text{ cm} = 85\text{ cm}$.

D'altro canto KD è la metà della differenza delle basi, cioè 40 cm . Infine

$$\overline{CK} = \sqrt{\overline{CD}^2 - \overline{KD}^2} = \sqrt{85^2 - 40^2}\text{ cm} = \sqrt{7225 - 1600}\text{ cm} = \sqrt{5625}\text{ cm} = 75\text{ cm}$$

Livello 1

1. Provare che il lato di un esagono regolare inscritto in una circonferenza è uguale al raggio della stessa circonferenza.
2. Usando il precedente risultato costruisci l'esagono regolare inscritto in una circonferenza.
3. Tra tutti i triangoli rettangoli inscritti in una circonferenza quale ha area massima? Giustificare la risposta. [Quello isoscele]
4. Tenuto conto del problema precedente, determinare la misura dell'area del massimo triangolo rettangolo inscrivibile in un cerchio di raggio 1. [1]
5. Determinare la misura dell'area del massimo triangolo rettangolo inscrivibile in un cerchio di raggio r . [r^2]
6. Determinare la misura del lato di un quadrato inscritto in una circonferenza di raggio 1. [$\sqrt{2}$]
7. Determinare la misura del lato di un quadrato circoscritto a una circonferenza di raggio 1. [2]
8. Dire quali fra i seguenti quadrilateri: parallelogrammi, rettangoli, rombi, trapezi isosceli, trapezi rettangoli, trapezi scaleni, sono sempre inscrivibili in una circonferenza. Giustificare la risposta. [Rettangoli; Trapezi isosceli]
9. Dire quali fra i seguenti quadrilateri: parallelogrammi, rettangoli, rombi, trapezi isosceli, trapezi rettangoli, trapezi scaleni, sono sempre circoscrivibili a una circonferenza. Giustificare la risposta. [Rombi]
10. Determinare la misura del raggio di una circonferenza lunga 1 m . [$\frac{1}{2\pi}\text{ m}$]
11. Un arco che determina un angolo al centro di 60° misura 1 cm , quanto misura il raggio della circonferenza cui appartiene il raggio? [$\frac{3}{\pi}\text{ cm}$]

Livello 2

12. Provare che il triangolo che ha per vertici i punti di contatto della circonferenza inscritta in un triangolo qualsiasi è acutangolo.
13. Costruire l'esagono regolare circoscritto a una circonferenza e trovare la misura del suo lato, nota che sia la misura r del raggio della circonferenza stessa. [$\frac{2r}{\sqrt{3}}$]

14. Costruire il poligono regolare di 8 lati inscritto in una circonferenza e trovare la misura del suo lato, supposto unitario il raggio. $\left[\sqrt{2 - \sqrt{2}} \right]$
15. Costruire il poligono regolare di 8 lati circoscritto a una circonferenza e trovare la misura del suo lato, supposto unitario il raggio. $\left[2 \cdot (\sqrt{2} - 1) \right]$
16. Determinare la misura del diametro di una circonferenza inscritta in un trapezio isoscele in funzione delle misure delle basi m e n . $\left[\sqrt{m \cdot n} \right]$
17. Costruire i poligoni regolari di 16 lati inscritto e circoscritto a una circonferenza.
18. Costruire i poligoni regolari di 32 lati inscritto e circoscritto a una circonferenza.
19. Le circonferenze Γ e Φ , verificano la proprietà che la lunghezza di un arco di Γ che determina un angolo al centro di 60° uguaglia la misura di un arco di Φ che determina un angolo al centro di 45° . Se il raggio di Φ misura 4 cm , determinare la misura del raggio di Γ . $[3 \text{ cm}]$
20. Consideriamo una circonferenza di raggio R e una circonferenza a essa concentrica più lunga di 1 unità rispetto alla precedente. Determinare la misura del raggio di quest'ultima. $\left[r + \frac{1}{2\pi} \right]$

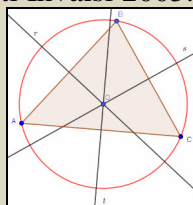
Livello 3

21. Costruire il poligono regolare di 12 lati inscritto in una circonferenza e trovare la misura del suo lato, supposto unitario il raggio. $\left[\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \cdot r \right]$
22. Una circonferenza di raggio unitario viene divisa in 6 parti uguali e su ogni corda intercettata da tali archi viene costruita una semicirconferenza. Determinare la misura della lunghezza delle semicirconferenze. $[6\pi]$
23. Uno pneumatico con sigla 195 55 R16 ha larghezza 195 mm e diametro 16 pollici. Sapendo che un pollice è circa 2,52 cm, vogliamo sapere quanta strada percorre una macchina che ha montati i predetti pneumatici i quali effettuano 1200 giri. Se ciò avviene in 2 minuti, a che velocità va l'auto? $[\approx 1520 \text{ m}; \approx 45,6 \text{ km/h}]$

Per la prova Invalsi

Lavoriamo insieme

Consideriamo un quesito assegnato nei quesiti Invalsi 2005. Osserva la seguente figura. Quale delle seguen-

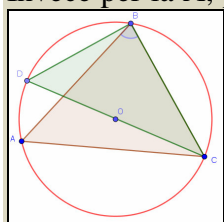


ti affermazioni relative alla figura è FALSA?

- A) Il triangolo ABC è acutangolo B) Il punto O è l'intersezione delle altezze del triangolo ABC C) Le rette r , s , t sono gli assi dei lati del triangolo ABC D) I punti A , B , C sono equidistanti da O .

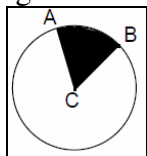
Il centro della circonferenza circoscritta a un triangolo è intersezione degli assi dei lati, quindi la risposta falsa è la B.

Per completezza consideriamo anche le altre affermazioni, la C e la D sono vere proprio perché A è falsa. Invece per la A, poiché il centro O della circonferenza è interno ad ABC , come si vede nella figura seguente

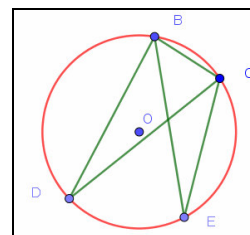


vuol dire che $\hat{ABC}$ è minore di un angolo retto, dato che BCD è inscritto in una semicirconferenza, quindi $90^\circ = \hat{DBC} > \hat{ABC}$. Stesso discorso per gli altri angoli.

1. (Invalsi 2005) Nella seguente figura la superficie colorata di nero è $\frac{1}{6}$ della superficie del cerchio. Qual è la misura dell'angolo $\widehat{ACB}$? A) 30° B) 45° C) 60° D) Non si può dire se non si conosce il raggio della circonferenza

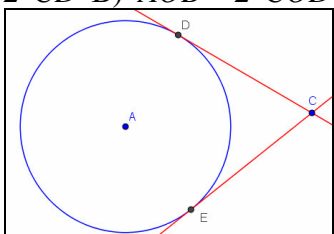


gio della circonferenza

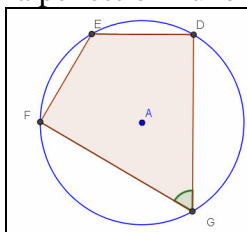


[C]

2. (Invalsi 2012) Osserva la circonferenza di centro O rappresentata in figura. Comunque siano presi i punti B, C, D, E sulla circonferenza, è possibile affermare che
 A) il triangolo BCE è congruente al triangolo CBD B) il segmento BD è congruente al segmento CE
 C) l'angolo EBC è congruente all'angolo DCB D) l'angolo CEB è congruente all'angolo CDB [D]
3. In una stessa circonferenza di centro O si ha: $\widehat{AB} = 2 \cdot \widehat{CD}$, quale delle seguenti uguaglianze è falsa?
 A) $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{CD}$ B) $\widehat{AOB} = 2 \cdot \widehat{COD}$ C) $\widehat{AOB} = \widehat{BOA}$ D) $\overline{AB} = \overline{BA}$ [C]



4. In figura abbiamo tracciato le tangenti a una circonferenza da un suo punto esterno. Quale delle seguenti affermazioni è falsa?
 A) I triangoli ADC e AEC sono entrambi retti B) $\overline{CD} = \overline{CE}$ C) I triangoli ADC e AEC sono uguali D) Il triangolo ADC non può mai essere isoscele [D]
5. Inscriviamo in una circonferenza un poligono regolare di n lati, se l'angolo al centro che insiste su un arco che ha per estremi uno dei lati del poligono misura 24° , n è? A) 15 B) 18 C) 20 D) Non esiste [A]



6. In figura ED è il lato dell'esagono regolare inscritto nella circonferenza, FG quello del triangolo equilatero. Quanto misura l'angolo segnato?
 A) 30° B) 4° C) 60° D) non si può determinare dai dati [C]
7. Il quadrilatero $ABCD$ ha due angoli consecutivi retti ed è inscritto in una circonferenza, quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera? A) $ABCD$ è un quadrato B) $ABCD$ è un rettangolo non quadrato C) ABC è un triangolo rettangolo D) nessuna delle precedenti è sicuramente vera [D]
8. Un rombo $ABCD$ è circoscritto a una circonferenza di centro O , sia E il punto di tangenza del segmento AB , quale delle seguenti affermazioni è vera?
 A) E è punto medio di AB B) $\overline{OE} = \frac{\overline{AB}}{2}$ C) OE è una delle altezze del triangolo ABO D) $\overline{AE} > \overline{EB}$ [C]
9. Le circonferenze di centri O ed O' e raggi rispettivi lunghi 1 e 2, sono tali che si ha: $\overline{OO'} = 1$, possiamo dire che le due circonferenze sono
 A) tangenti esternamente B) tangenti internamente C) secanti D) esterne [B]
10. Due circonferenze di raggi r e R sono fra loro secanti e la distanza fra i loro centri è 5. Allora possiamo dire che
 A) $r + R > 5$ B) $|r - R| < 4$ C) $r < R$ D) $r + R < 6$ [A]

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi

1. Trovare una formula per il calcolo della misura del lato del poligono regolare di $2n$ lati inscritto in una circonferenza di raggio 1, conoscendo la misura x del lato del poligono regolare di n lati.

$$\left[\sqrt{\frac{2+x}{2}} - \sqrt{\frac{2-x}{2}} \right]$$

2. Trovare una formula per il calcolo della misura del lato del poligono regolare di $2n$ lati circoscritto in una circonferenza di raggio 1, conoscendo la misura x del lato del poligono regolare di n lati.

$$\left[\frac{2x}{\sqrt{4-x^2}} \right]$$

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Davanti a ogni esercizio vi è un simbolo che si riferisce alla gara da cui è tratto.

AHSME = Annual High School Mathematics Examination

MT = Mathematics Teacher, rivista della NCTM

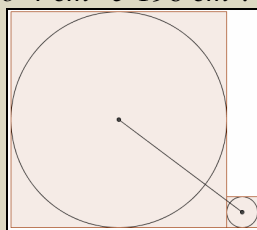
HSMC = High School Math Contest

OMI = Olimpiadi della Matematica italiane

Lavoriamo insieme

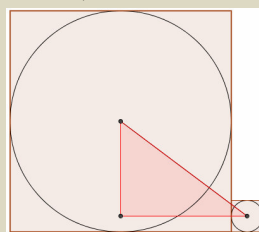
Questo quesito è stato pubblicato nel numero di Novembre 1995 sulla rivista Mathematics Teacher.

Le aree dei due quadrati adiacenti in figura sono 4 cm^2 e 196 cm^2 . Trovare la lunghezza del segmento che

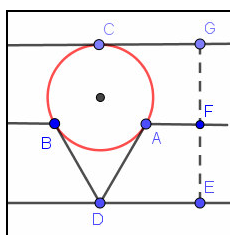


congiunge i centri dei due cerchi in essi inscritti.

I diametri dei cerchi sono ovviamente uguali a $\sqrt{4} \text{ cm} = 2 \text{ cm}$, $\sqrt{196} \text{ cm} = 14 \text{ cm}$, quindi i raggi sono lunghi 1



cm e 7 cm . Costruiamo il triangolo rettangolo in figura, in cui l'ipotenusa è il segmento da trovare, mentre i cateti misurano $(7 - 1) \text{ cm} = 6 \text{ cm}$ e $(7 + 1) \text{ cm} = 8 \text{ cm}$. Applicando il teorema di Pitagora, il segmento cercato misura $\sqrt{6^2 + 8^2} \text{ cm} = \sqrt{100} \text{ cm} = 10 \text{ cm}$.



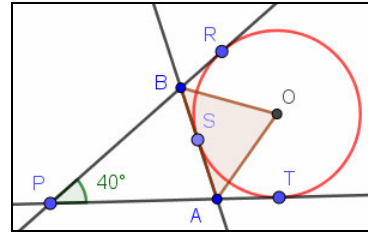
1. (AHSME1954) La circonferenza in figura ha diametro che misura $\frac{3}{8}$, il segmento

FE misura $\frac{1}{2}$ e l'angolo $\widehat{ABD}$, 60° . Sapendo che A , B e C sono punti di tangenza, determinare la misura di GF .

$$\left[\frac{1}{16} \right]$$

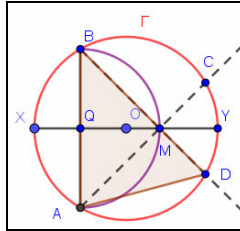
2. (AHSME1956) Il triangolo PAB in figura, è formato da tre tangenti al cerchio di centro O . Sapendo

che $\angle B\hat{P}A = 40^\circ$, determinare la misura di $A\hat{O}B$. Dimostrare inoltre che la misura del detto angolo



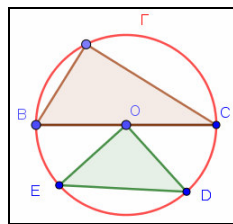
non dipende dalla scelta del punto S sull'arco AB .

[70°]

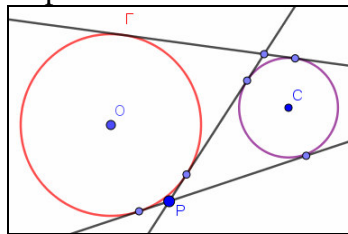


3. (AHSME1957) Nel cerchio Γ in figura Q è punto medio di OX , $AB \perp XY$, M è l'intersezione della semicirconferenza di diametro AB con XY . C è l'intersezione della semiretta per AM con Γ e D è l'intersezione della semiretta per BM con Γ . Detta r la misura del raggio, determinare la misura di AD .

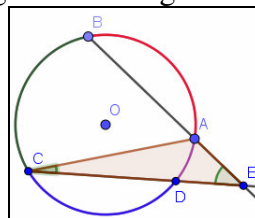
$[\sqrt{2} \cdot r]$



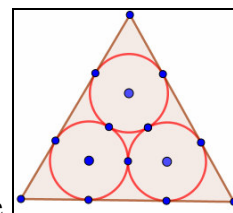
4. (AHSME1958) Nella figura seguente il triangolo ABC è inscritto nella semicirconferenza di diametro BC , mentre ODE determina un arco DE che è un quarto di circonferenza. Quanto vale il rapporto tra l'area di ABC e quella di ODE ? [2]
5. (AHSME1965) Sul cateto BC del triangolo rettangolo la cui ipotenusa è AB , costruiamo una semicirconferenza che incontra AB nel punto D . Tracciamo la tangente alla semicirconferenza in D che incontra AC nel punto F . Provare i seguenti fatti: a) $\angle C\hat{A}B = \angle B\hat{C}D$; b) ADF è un triangolo isoscele; c) DF biseca AC ; d) $\angle C\hat{F}D = 2\angle C\hat{A}B$. Quale ipotesi è necessaria affinché DF bisечи $C\hat{D}A$? $[CD = AD]$



6. (AHSME1976) Nella figura seguente i punti P e Q sono le intersezioni di due tangenti esterne comuni alle due circonferenze con una tangente interna anch'essa comune alle circonferenze. Provare che la lunghezza di PQ è uguale alla lunghezza di una tangente esterna comune. *Suggerimento:* utilizzare le proprietà dei segmenti di tangenza condotti da uno stesso punto



7. (AHSME1977) Con riferimento alla figura, $\angle A\hat{E}C = 40^\circ$ e gli archi AB , BC e CD hanno tutti la stessa misura. Determinare la misura dell'angolo $D\hat{C}A$. *Suggerimento:* utilizzare il teorema dell'angolo esterno e impostare un sistema. [15°]



8. (AHSME 1977) Ognuno dei tre cerchi della figura seguente è tangente esternamente agli altri due, e ogni lato del triangolo è tangente a due dei cerchi. Se i raggi dei cerchi misurano tutti 3

cm, determinare il perimetro del triangolo.

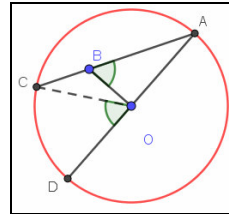
$$\left[18 + 18 \cdot \sqrt{3} \right]$$

9. (AHSME1980) In una stessa circonferenza tre corde parallele sono poste dalla stessa parte rispetto al centro. Sapendo che esse misurano 20, 16 e 8 e che la distanza fra le prime due è uguale alla distanza fra la seconda e la terza, determinare la misura del raggio della circonferenza. *Suggerimento:* applicando opportunamente il teorema di Pitagora, impostare un sistema.

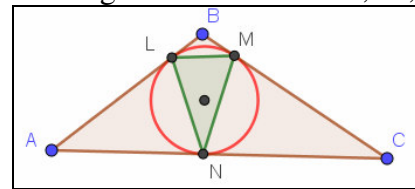
$$\left[\frac{5 \cdot \sqrt{22}}{2} \right]$$

10. (AHSME1983) Il segmento AB è contemporaneamente diametro di una circonferenza di raggio 2 e lato del triangolo equilatero ABC . Sapendo che la circonferenza incontra AC e BC in D ed E rispettivamente, determinare la lunghezza di AE .

$$\left[\sqrt{3} \right]$$

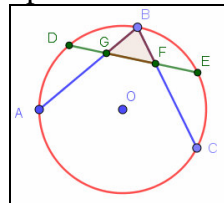


11. (AHSME1985) Nel cerchio di centro O in figura, AD è un diametro, AC una corda, $\angle A\hat{B}O = \angle C\hat{O}D = 60^\circ$ e $\overline{BO} = 5$. Determinare la misura di BC . [5]
12. (OMI 1991) Si costruisca una circonferenza inscritta in un triangolo ABC e siano L, M, N i punti di



tangenza dei lati AB , BC e CA , come mostrato in figura.

Quale delle seguenti affermazioni è sbagliata? A) I triangoli ALN , BML , CNM sono isosceli B) Il triangolo LMN è acutangolo C) Il triangolo ABC ha un angolo di 60° D) Almeno due fra i triangoli LMN , ALN , BML , CNM hanno gli angoli fra loro uguali E) Le circonferenze circoscritte ai triangoli ALN , BML , CNM passano per uno stesso punto [C]



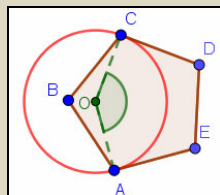
13. (OMI1993) In figura AB e BC sono due corde di una stessa circonferenza aventi un estremo in comune, siano D ed E i punti che bisecano gli archi AB e BC rispettivamente. Se la corda DE incontra AB e BC in F e G rispettivamente, provare che FBG è un triangolo isoscele.
14. (AHSME1994) Il triangolo isoscele ABC è iscritto in una circonferenza. Sapendo che gli angoli adiacenti alla base sono il quadruplo di quello al vertice e che la base è lato di un poligono regolare inscritto nella stessa circonferenza, determinare quanti lati ha tale poligono. [9]

Questions in English

Working together

This is a question assigned at AHSME in 1995.

Given regular pentagon $ABCDE$, a circle can be drawn that is tangent to DC at C and to AE at A . The num-



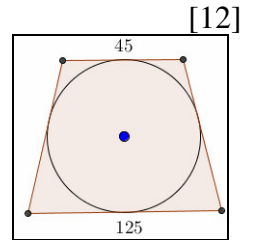
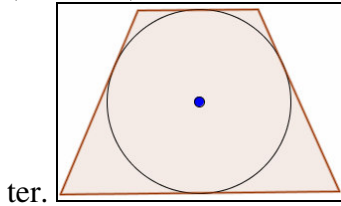
ber of degrees in minor arc AC is?

Let O be the centre of the circle. Since the sum of the interior angles in any n -gon¹ is $(n - 2) \times 180^\circ$, the sum

¹ Poligono con n lati

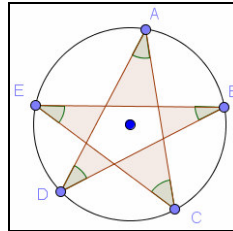
of the angles in $AOCDE$ is 540° . Since $\angle C\hat{D}E = \angle D\hat{E}A = 108^\circ$ and $\angle E\hat{A}O = \angle O\hat{C}D = 90^\circ$, it follows that the measure of $A\hat{O}C$, and thus the measure of minor arc AC , equals 144° .

15. (MT1993) An isosceles trapezoid with bases 8 and 18 *cm* long has an inscribed circle. Find its diameter.



16. (MT1995) Determine the diameter of the circle inscribed in this isosceles trapezoid.

[75]



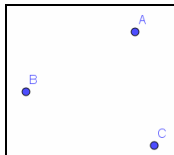
17. (MT1997) Points A , B , C , D , and E lie on a circle. What is the sum of the measures of the interior angles A , B , C , D , and E ? [180°]
18. (HSMC2000) Given 2 circles of radius 1 with a common tangent line and a common point, find the radius of the smaller circle. [0,25]
19. (HSMC2002) A circular spinner to be used in a game is divided by radii into 5 wedge-shaped pieces such that 4 pieces have equal area and the area of the remaining piece is twice the area of any one of the other pieces. How many degrees are in the central angle of the largest piece? [120°]
20. (HSMC2007) Compute the distance from the center of a circle of radius 3 inches to a chord of length 5 inches. $\left[\frac{\sqrt{11}}{2} \right]$

Attività di recupero

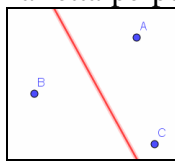
La circonferenza e le sue parti. Posizione reciproche di retta e circonferenza. Posizioni reciproche di due circonferenze

Fase 1: Osserva

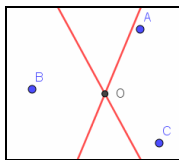
- Vogliamo costruire la circonferenza passante per tre punti non allineati. In figura abbiamo disegnato i



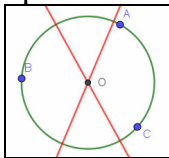
punti. Per disegnare la circonferenza dobbiamo costruirne il centro, ossia un punto che ha la stessa distanza dai tre punti dati. Sappiamo che il luogo dei punti del piano equidistante da due punti dati è l'asse del segmento che ha tali punti per estremi, cioè la retta perpendicolare al segmento



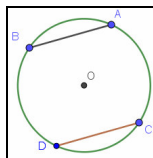
nel suo punto medio: costruiamo perciò l'asse del segmento AB . Il centro O della circonferenza cercata è certamente uno dei punti di questa retta, ma quale? Costruiamo anche l'asse di



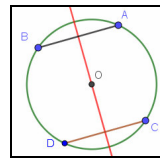
AC . Per quanto detto prima, il centro della circonferenza deve appartenere anche a questa seconda retta. Ma allora è proprio l'intersezione delle due rette, cioè il punto che abbiamo segnato con O . Adesso basta puntare il compasso su O e, con apertura pari ai segmenti uguali OA , OB , OC ,



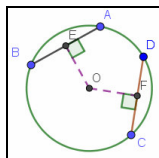
tracciamo la circonferenza cercata.



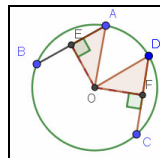
- In figura le corde AB e CD sono fra loro parallele; vogliamo provare che hanno l'asse in comune. Abbiamo visto in precedenza che l'asse di una corda qualsiasi passa per il centro, quindi sia l'asse di AB sia quello di CD passano per O . poiché l'asse è perpendicolare alle corde, e dato che esse



sono fra loro parallele, è evidente che questo asse deve essere unico.



- In figura consideriamo due corde fra loro uguali; vogliamo provare che distano ugualmente dal centro, cioè che i segmenti OE e OF sono fra loro uguali. Consideriamo i triangoli rettangoli

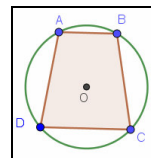


OAE e OFD , segnando gli enti che sono certamente fra loro uguali. Infatti i segmenti OA e OD sono raggi di una stessa circonferenza e i segmenti AE e DF sono metà dei segmenti fra loro uguali AB e CD . Possiamo allora applicare il criterio di isometria dei triangoli rettangoli, concludendo

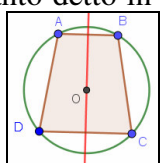
che i detti triangoli sono uguali e perciò hanno uguali anche i cateti OE e OF , che è quel che volevamo provare.

Fase 2: Completa ...

- Vogliamo provare che due circonferenze Γ e Γ' non possono avere più di due punti in comune. Se infatti per assurdo avessero in comune tre punti, chiamiamoli per esempio A , B e C , essi certamente non potrebbero essere allineati. Ma noi sappiamo che per tre punti non allineati....., quindi le due circonferenze Γ e Γ' dovrebbero essere, il che non è vero. Quindi il massimo numero che due circonferenze possono avere in comune è
- Vogliamo provare che un trapezio inscritto in una circonferenza è isoscele. Consideriamo la figura se-

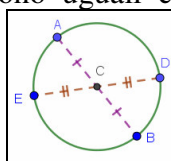


guente: vogliamo provare che le corde AB e CD sono fra loro uguali. Tracciamo l'asse del lato CD ; per quanto detto in precedenza questo è anche asse del lato perché i detti lati sono fra

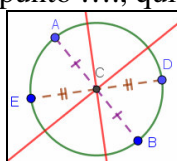


loro Ma allora i punti A e B si corrispondono nella simmetria assiale di asse tale retta e, analogamente, si corrispondono i punti C e D . Quindi i segmenti AD e BC sono simmetrici rispetto al detto asse. Poiché la simmetria assiale è una trasformazione, concludiamo che AD e BC sono fra loro, come volevamo dimostrare.

- Consideriamo due corde di una stessa circonferenza che si incontrano in un punto C . Se questo punto è il centro è chiaro che le corde sono uguali, dato che sono entrambe diametri. Viceversa vogliamo provare che se C è punto medio di entrambe, allora sono uguali cioè sono diametri, ossia C è il

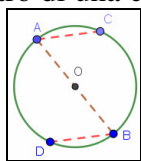


..... Consideriamo la seguente figura. Dato che C è punto medio sia di AB sia di DE , possiamo considerare gli assi di AB e DE . Abbiamo già visto che l'asse di una corda passa, quindi sia l'asse di AB sia quello di DE passano per il centro. Del resto tali assi si incontrano nel punto, quindi C è



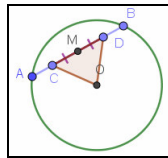
Fase 3: Prova!

1. Dimostrare che due corde ugualmente distanti dal centro sono fra loro uguali.
2. Dimostrare che una retta e una circonferenza possono avere al massimo due punti in comune.
3. Dagli estremi di un diametro di una circonferenza conduciamo due corde fra loro parallele; dimostrare



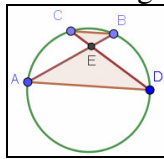
che tali corde sono uguali.

4. Dagli estremi di un diametro di una circonferenza conduciamo due corde fra loro uguali; dimostrare che tali corde sono parallele.
5. In figura M è punto medio di AB , C e D sono equidistanti da M , provare che il triangolo COD è



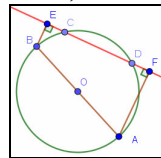
isoscele sulla base CD .

6. In figura le corde AB e CD sono fra loro uguali, E è il loro punto di intersezione. Provare che i



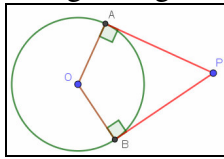
triangoli ADE e BCE sono isosceli.

7. Dimostrare che fra tutte le corde di una stessa circonferenza i diametri sono le più lunghe.
8. In figura AB è un diametro, CD una corda, AE e BF sono perpendicolari alla retta per CD . Provare che

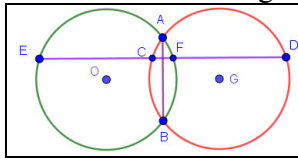


CE e DF sono uguali.

9. In figura gli angoli di vertice A e B sono retti. Provare che i segmenti PA e PB sono uguali.

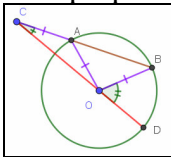


10. In figura le circonferenze sono uguali, i segmenti AB ed ED sono perpendicolari. Provare che EF e CD



sono uguali.

11. Provare che la proprietà precedente non è vera se le circonferenze non sono uguali.

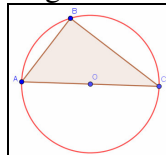


12. In figura CD passa per il centro O e da C si conduca la secante CB e sia A l'ulteriore intersezione con la circonferenza. Supponendo che siano uguali AO e AC , e tenuto conto del teorema dell'angolo esterno, provare che $\angle A\hat{O}B = 3 \cdot \angle O\hat{C}A$.

Poligoni inscritti e circoscritti a una circonferenza

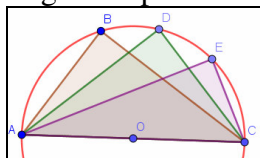
Fase 1

- In figura abbiamo disegnato un triangolo ABC inscritto in una semicirconferenza; vogliamo provare



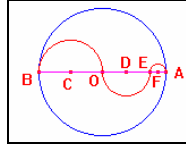
che è rettangolo di ipotenusa AB .

Consideriamo l'angolo di vertice C ; esso è un angolo alla circonferenza che insiste sull'arco di estremi AB , ossia su una semicirconferenza e, poiché l'angolo al centro corrispondente è chiaramente un angolo piatto ed è il suo doppio, ne viene che l'angolo di vertice C è metà di un angolo piatto, cioè è retto. Non solo, ma tutti i triangoli di vertici A , B e un punto della circonferenza sono rettangoli di ipotenusa AB . Quale di essi ha area maggiore?



Possiamo calcolare l'area considerando il prodotto fra le misure dell'ipotenusa e dell'altezza a essa relativa e poi dividendo per 2. Dato che tutti i triangoli inscritti hanno la stessa ipotenusa, avrà area maggiore quello che ha altezza a essa relativa maggiore, il che accade quando l'altezza coincide con il

raggio quindi, con riferimento alla figura, è il triangolo ABD ad avere maggiore area. Questo triangolo è isoscele, dato che DO è non solo altezza ma anche mediana relativa ad AB ; perciò il triangolo di area massima inscrivibile in una circonferenza è isoscele.



- Consideriamo la seguente figura. In essa AB è un diametro di misura 2, C è punto medio fra O e B , E divide il segmento OA nel rapporto $3 : 1$, F è punto medio di EA . Vogliamo calcolare la misura della linea rossa. Ci rendiamo conto che tale linea è formata da 3 semicirconferenze; per risolvere il quesito basta quindi calcolarne i rispettivi raggi. Abbiamo perciò: $\overline{BC} = \frac{\overline{BO}}{2} = \frac{\overline{BA}}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

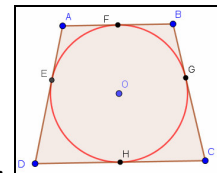
Inoltre, dato che $\overline{OE} : \overline{EA} = 3 : 1$, applichiamo la proprietà del comporre:

$(\overline{OE} + \overline{EA}) : \overline{EA} = (3 + 1) : 1 \Rightarrow \overline{OA} : \overline{EA} = 4 : 1$, ma $\overline{OA} = \frac{\overline{BA}}{2} = \frac{2}{2} = 1$, quindi $1 : \overline{EA} = 4 : 1 \Rightarrow \overline{EA} = \frac{1}{4}$, e

$\overline{OE} = \overline{OA} - \overline{EA} = \frac{3}{4}$. Da questi, che sono i diametri delle due semicirconferenze, ricaviamo i raggi:

$\overline{EF} = \frac{\overline{EA}}{2} = \frac{1}{8}$ e $\overline{OD} = \frac{\overline{OE}}{2} = \frac{3}{8}$. Infine la linea richiesta misura: $\pi \cdot \frac{1}{2} + \pi \cdot \frac{1}{8} + \pi \cdot \frac{3}{8} = \pi \cdot \frac{4 + 1 + 3}{8} = \pi$.

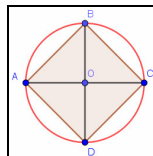
Fase 2: Completa ...



- In figura abbiamo un trapezio isoscele circoscritto a una circonferenza. Vogliamo dimostrare che la somma delle misure dei lati obliqui uguaglia la somma di quelle delle basi. Indichiamo con E, F, G, H i punti di tangenza dei lati del trapezio. Possiamo considerare parte dei lati come segmenti di tangenza condotti alla circonferenza dai quattro vertici del trapezio. Noi sappiamo che i segmenti di tangenza condotti da un punto esterno a una circonferenza sono quindi abbiamo: $\overline{AE} = \overline{AF}, \overline{BF} = \overline{BG}, \overline{CG} = \overline{CH}, \overline{DH} = \overline{DE}$. Tenuto conto di queste uguaglianze possiamo scrivere: $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AE} + \overline{FB} + \overline{CH} + \overline{HD} = \dots\dots\dots$

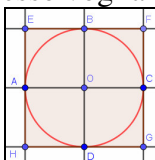
Che è quel che volevamo provare. In effetti questo è vero per qualsiasi trapezio, non solo per un trapezio isoscele. Se inoltre il trapezio è isoscele, come in questo caso, allora possiamo ricavare uno dei lati obliqui mediante le basi, scrivendo: $\overline{AB} + \overline{CD} = 2 \cdot \overline{AB} = \dots\dots\dots \Rightarrow \overline{AB} = \dots\dots\dots$ cioè un lato obliquo misura quanto

- Vogliamo costruire il quadrato inscritto in una circonferenza. Per far ciò basta costruire due diametri fra loro perpendicolari, come mostrato in figura. Infatti così facendo abbiamo diviso la circonferenza



in quattro archi Possiamo infatti osservare che i triangoli rettangoli ABO , sono fra loro uguali, poiché hanno i cateti di uguale misura, dato che sono Ciò significa che $ABCD$ è un quadrilatero Ma gli stessi triangoli rettangoli sono anche isosceli, quindi i loro angoli acuti misurano Perciò $ABCD$ è anche, cioè è un quadrato.

- Invece adesso vogliamo costruire il quadrato circoscritto a una circonferenza. Ci riferiamo alla seguen-

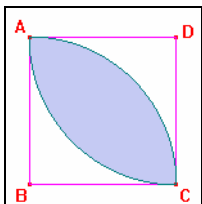


te figura. Stavolta, dopo aver costruito due rette diametrali perpendicolari tra loro e inter-

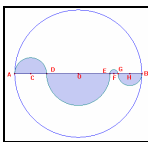
secanti la circonferenza nei punti A, B, C e D , abbiamo considerato le tangenti in tali punti, costruendo così il quadrilatero $EFGH$. Questo è un quadrato perché gli angoli interni sono retti perché i lati sono e quindi i suoi lati sono fra loro uguali dato che.....

Fase 3: Prova!

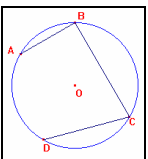
1. Un trapezio rettangolo è circoscritto a una circonferenza, provare che il suo perimetro si può trovare raddoppiando la somma fra il diametro e il lato obliquo.
2. Provare che ogni poligono equilatero inscritto in una circonferenza è anche equiangolo, cioè è regolare.
3. Considera un triangolo rettangolo inscritto in una semicirconferenza e prova che la mediana relativa all'ipotenusa misura quanto metà dell'ipotenusa.
4. Un quadrilatero circoscritto a una circonferenza ha tre lati consecutivi che misurano 10, 12 e 14. Determinare la misura del quarto lato. [12]
5. Un quadrilatero inscritto in una circonferenza ha due angoli adiacenti allo stesso lato di 72° e 80° rispettivamente. Quanto valgono gli altri due angoli? [108°; 100°]
6. Da un vertice di un poligono regolare inscritto in una circonferenza tracciamo le diagonali; provare che l'angolo interno viene così diviso in parti tutte uguali fra loro.
7. Partendo dal quadrato inscritto in una circonferenza costruire l'ottagono regolare inscritto.
8. Partendo dal quadrato circoscritto a una circonferenza costruire l'ottagono regolare circoscritto.
9. Quale fra i seguenti quadrilateri: parallelogramma, rombo, rettangolo, trapezio, è certamente inscritto a una circonferenza? Quale certamente circoscrittibile? [rettangolo; rombo]
10. Costruire con riga e compasso il poligono regolare di 8 lati.
11. Determinare la misura dell'arco sotteso da un lato dell'ottagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio di misura 1. [$\pi/4$]
12. Determinare la misura dell'arco che determina un angolo al centro di 30° , in una circonferenza di raggio di misura 1. [$\pi/6$]
13. La lunghezza di un arco di una circonferenza di raggio di misura 1 è $\frac{2}{5}\pi$, quanto misura l'angolo al centro da esso determinato? [72°]



14. In figura $ABCD$ è un quadrato di lato che misura 1, la regione colorata è determinata dagli archi intersezione fra le circonferenze di centri B e D e raggi che misurano quanto il lato del quadrato. Determinare la misura della lunghezza degli archi. [π]
15. Determinare la misura del lato del triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di raggio di misura 1. [$\sqrt{3}$]



16. In figura D è punto medio di AO , E di OB , G divide EB nel rapporto 1 : 4. Se la circonferenza ha raggio di misura 40, determinare la misura della lunghezza del perimetro della regione colorata. [12 π]



17. In figura la circonferenza ha raggio di misura 1, i segmenti AB, BC e CD sono i lati dei seguenti poligoni regolari inscritti nella circonferenza: esagono, triangolo, quadrato. Determinare la misura della poligonale $ABCD$. [$1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$]

Per svolgere un Test finale di 10 quesiti, collegati al sito

http://mathinterattiva.altervista.org/volume_2_6.htm

6. Geometria del piano

6.2 Similitudine

Prerequisiti

- Concetto di relazione di equivalenza
- L'insieme dei numeri razionali
- Nozioni di geometria elementare
- Criteri di isometria dei triangoli
- La circonferenza, il cerchio e le loro parti

Obiettivi

- Comprendere il concetto di similitudine tra figure
- Sapere individuare triangoli simili
- Sapere operare con le proporzioni, usando le proprietà più importanti
- Affinare la capacità di astrazione
- Sapere risolvere semplici problemi geometrici mediante le proprietà di similitudine
- Comprendere il concetto di trasformazione non isometrica, nei casi particolari di omotetia e affinità
- Applicare la similitudine a problemi di geometria analitica
- Studiare omotetie, similitudini e affinità con l'ausilio della geometria analitica
- Comprendere che vi è un nesso fra il rapporto dei lati di un triangolo e l'angolo che essi determinano
- Comprendere il concetto di risoluzione di un triangolo
- Comprendere il concetto di funzione trigonometrica
- Sapere risolvere triangoli rettangoli

Contenuti

- Richiamiamo le conoscenze. Le proporzioni
- Concetto di similitudine
- Teorema di Talete
- Criteri di similitudine
- Omotetie
- Importanti teoremi sulla similitudine
- Affinità

Quelli che vogliono sapere di più

- Applicazioni della similitudine alla geometria analitica
- Funzioni goniometriche riferite ad angoli acuti
- Risoluzione dei triangoli rettangoli

Parole chiave

Coseno – Estremi – Medi – Medio proporzionale – Omologo – Omotetia – Proporzione – Rapporto aureo – Seno – Sezione aurea – Simile – Tangente

Simbologia

- ~ Indica la similitudine fra due figure geometriche
- ϕ Indica il rapporto aureo

Richiamiamo le conoscenze

Le proporzioni

Il concetto di proporzione è molto importante nelle matematiche. In molte attività abbiamo a che fare con questioni relative alla proporzionalità, ossia alla suddivisione di oggetti in parti proporzionali. Chiariamo con un esempio.

Esempio A

Aldo, Mattia e Federica hanno acquistato un biglietto della lotteria, del costo di € 5,00, mettendo rispettivamente le somme di € 2,00, € 1,20 e € 1,80. Sono stati fortunati e hanno vinto un premio di consolazione di € 250,00, come devono dividersi la vincita? Il modo più equo è quello di suddividere la vincita in parti proporzionali alle quote versate, dato che se avessero perso ciascuno avrebbe perso quantità diverse dagli altri è giusto che anche le vincite siano ripartite nello stesso modo. Calcoliamo intanto le "quote" percentuali: $\frac{2}{5} = \frac{40}{100} = 40\%$; $\frac{1.2}{5} = \frac{24}{100} = 24\%$; $\frac{1.8}{5} = \frac{36}{100} = 36\%$. Pertanto il premio sarà così diviso: € 250,00 · 40% = € 100,00; € 250,00 · 24% = € 60,00; € 250,00 · 36% = € 90,00.

Naturalmente non dobbiamo pensare che vi sia proporzionalità dappertutto. Per esempio se un bambino a 10 anni è alto 1,20 m a 20 anni difficilmente sarà alto 2,40 m e certamente a 30 anni non sarà alto 3,60 m. Cominciamo a porre alcune definizioni.

Definizione A

Diciamo **proporzione** l'uguaglianza di due rapporti.

Notazione A

Una proporzione fra i numeri a , b , c e d si indica con una delle seguenti scritte: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ oppure $a : b = c : d$.
e si legge: *a sta a b come c sta a d*.

Definizione B

Nella proporzione $x : y = t : z$, i termini posti accanto al segno di uguale (cioè in questo caso y e z) si dicono **medi**, gli altri si dicono **estremi**.

Definizione C

Il rapporto costante di una proporzione si chiama **costante della proporzione**.

Vediamo alcuni esempi di proporzioni

Esempio B

- $\frac{15}{12} = \frac{35}{28}$; infatti possiamo ridurre entrambe le frazioni ai minimi termini ottenendo la frazione $\frac{5}{4}$, che è il rapporto della proporzione.
- $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot (\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}$; in questo caso è più difficile accorgersi dell'uguaglianza, anche se ricordando come avviene la razionalizzazione di un denominatore, notiamo che effettivamente il secondo membro è la razionalizzazione del primo.
- $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$; anche in questo caso abbiamo una razionalizzazione. Non dobbiamo sorprendersi se il secondo membro non è una frazione, basta sottintendere il denominatore 1.

Nell'esempio precedente abbiamo visto che non risulta sempre semplice stabilire se una espressione costituisce o meno una proporzione. Il seguente teorema ci fornisce un metodo più rapido per farlo.

Teorema A (Caratterizzazione delle proporzioni)

Quattro numeri reali non nulli sono in proporzione se e solo se il prodotto di due di essi uguaglia il prodotto degli altri due. In questo caso i fattori di ciascun prodotto costituiscono entrambi i medi o entrambi gli estremi della proporzione.

La dimostrazione del precedente teorema discende immediatamente dalle proprietà delle frazioni.

Esempio C

Per verificare che $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{3\cdot\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{6}-2\cdot\sqrt{2}+3}$ è una corretta proporzione, basta applicare il teorema precedente:

$$(\sqrt{2}+1) \cdot (3\cdot\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{6}-2\cdot\sqrt{2}+3) = 3\cdot\sqrt{6}-4\cdot\sqrt{3}-4+3\cdot\sqrt{2}+3\cdot\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{6}-2\cdot\sqrt{2}+3 = \sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1 = (\sqrt{2}-1) \cdot (\sqrt{3}+1).$$

Valgono anche le seguenti proprietà.

Teorema B (Proprietà del permutare)

$a : b = c : d \Leftrightarrow a : c = b : d \Leftrightarrow d : b = c : a.$

Dimostrazione

Immediata, applicando il Teorema A a tutte e tre le proporzioni.

Teorema C (Proprietà dell'invertire).

$a : b = c : d \Leftrightarrow b : a = d : c.$

Dimostrazione Per esercizio.

Esempio D

Verifichiamo i precedenti due teoremi sulla proporzione $3 : 2 = 6 : 4$. Otteniamo le seguenti proporzioni:

$3 : 6 = 2 : 4$; $4 : 2 = 6 : 3$; $2 : 3 = 4 : 6$. Naturalmente le costanti di proporzionalità sono cambiate, da $\frac{3}{2}$, sono

rispettivamente divenute: $\frac{1}{2}$; 2 ; $\frac{2}{3}$.

Ricordiamo ancora qualche concetto.

Definizione D

Se in una frazione i due termini medi sono uguali, il loro valore comune si chiama **medio proporzionale**.

Se a essere uguali fossero i termini estremi, per la proprietà dell'invertire essi possono sempre diventare i termini medi. Vediamo ancora due teoremi.

Teorema D (Proprietà del comporre)

$a : b = c : d \Leftrightarrow (a + b) : a = (c + d) : c \Leftrightarrow (a + b) : b = (c + d) : d.$

Schema dimostrativo			
Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Sia $a : b = c : d$	$a \cdot d = b \cdot c.$	Per il teorema A
2	Aggiungiamo a entrambi i membri la quantità $a \cdot c$	$a \cdot c + a \cdot d = a \cdot c + b \cdot c$	
3	Mettiamo in evidenza	$a \cdot (c + d) = c \cdot (a + b)$	
4		$(a + b) : a = (c + d) : c$	Per il teorema A

Lasciamo la prova dell'altra uguaglianza e delle inverse per esercizio.

Abbiamo un analogo risultato.

Teorema E (Proprietà dello scomporre)

$$a : b = c : d \Leftrightarrow (a - b) : a = (c - d) : c \Leftrightarrow (a - b) : b = (c - d) : d.$$

Dimostrazione Per esercizio**Esempio E**

Verifichiamo i precedenti due teoremi sulla proporzione $3 : 2 = 6 : 4$. Otteniamo le seguenti proporzioni:
 $5 : 3 = 10 : 6$; $5 : 2 = 10 : 4$; $1 : 3 = 2 : 6$; $1 : 2 = 2 : 4$. Anche stavolta le costanti di proporzionalità sono cambiate, da $\frac{3}{2}$, sono rispettivamente divenute: $\frac{5}{3}$; $\frac{5}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

L'uguaglianza $\sqrt{2} : \sqrt{3} = \sqrt{6} : 3$ è una proporzione, dato che è verificata la proprietà caratteristica, infatti si ha: $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = 3 \cdot \sqrt{2}$, il rapporto è $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Verifichiamo su questa proporzione le altre proprietà delle proporzioni, determinandone i rispettivi rapporti.

- Proprietà del permutare: $3 : \sqrt{3} = \sqrt{6} : \sqrt{2} \vee \sqrt{2} : \sqrt{6} = \sqrt{3} : 3$, che hanno per rapporti $\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
- Proprietà dell'invertire: $\sqrt{3} : \sqrt{2} = 3 : \sqrt{6}$, che ha per rapporto $\sqrt{\frac{3}{2}}$.
- Proprietà del comporre: $\sqrt{2} + \sqrt{3} : \sqrt{2} = \sqrt{6} + 3 : \sqrt{6} \vee \sqrt{2} + \sqrt{3} : \sqrt{3} = \sqrt{6} + 3 : 3$, con rapporti: $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{2 + \sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} + 3}{3}$.
- Proprietà dello scomporre: $\sqrt{2} - \sqrt{3} : \sqrt{2} = \sqrt{6} - 3 : \sqrt{6} \vee \sqrt{2} - \sqrt{3} : \sqrt{3} = \sqrt{6} - 3 : 3$, con rapporti: $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6} - 3}{3}$.

Livello 1

Delle seguenti proporzioni determinarne le costanti. Verificare poi le proprietà del permutare, dell'invertire, del comporre e dello scomporre, determinandone le rispettive costanti.

1. $3 : 2 = 9 : 6; 5 : 8 = 25 : 40$ $\left[\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, 3, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{5}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right); \left(\frac{5}{8}, \frac{1}{5}, 5, \frac{8}{5}, \frac{13}{5}, \frac{13}{8}, -\frac{3}{5}, -\frac{3}{8} \right) \right]$
2. $\frac{1}{4} : \frac{2}{3} = \frac{5}{4} : \frac{10}{3}; \frac{7}{5} : \frac{3}{8} = \frac{4}{3} : \frac{5}{14}$ $\left[\left(\frac{3}{8}, \frac{1}{5}, 5, \frac{8}{3}, \frac{11}{3}, \frac{11}{8}, -\frac{5}{3}, -\frac{5}{8} \right); \left(\frac{56}{15}, \frac{21}{20}, \frac{20}{21}, \frac{15}{56}, \frac{71}{56}, \frac{71}{15}, \frac{41}{56}, \frac{41}{15} \right) \right]$
3. $\sqrt{5} : \sqrt{7} = \sqrt{10} : \sqrt{14}; \sqrt{3} : 2 = 3 : \sqrt{12}$ $\left[\frac{\sqrt{35}}{7}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{35}}{5}, \frac{\sqrt{35}+5}{5}, \frac{\sqrt{35}+7}{7}, \frac{5-\sqrt{35}}{5}, \frac{\sqrt{35}-7}{7}; \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}+3}{3}, \frac{\sqrt{3}+2}{2}, \frac{3-2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}-2}{2} \right]$
4. $1 + \sqrt{2} : 3 = 1 : 3 \cdot \sqrt{2} - 3; \sqrt{2} + \sqrt{3} : \sqrt{3} = \sqrt{2} : 3 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{3}$ $\left[\frac{\sqrt{2}+1}{3}, \sqrt{2}+1, \sqrt{2}-1, 3\sqrt{2}-3, 3\sqrt{2}-2, \frac{\sqrt{2}+4}{3}, 4-3\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}-2}{3}; \frac{\sqrt{6}+3}{3}, \frac{\sqrt{6}+2}{2}, \sqrt{6}-2, 3-\sqrt{6}, 4-\sqrt{6}, \frac{\sqrt{6}+6}{3}, \sqrt{6}-2, \frac{\sqrt{6}}{3} \right]$
5. $\frac{2}{\sqrt{3}} : \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} : \frac{\sqrt{2}}{6}; \frac{1-\sqrt{2}}{2} : \frac{3}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{2} : -3$ $\left[\left(\sqrt{6}, 2, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}+1}{6}, \sqrt{6}+1, \frac{6-\sqrt{6}}{6}, \sqrt{6}-1 \right); \left(-\frac{1}{6}, 1-\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}, -6, -5, \frac{5}{6}, 7, -\frac{7}{6} \right) \right]$

Lavoriamo insieme

Una proporzione è l'uguaglianza di due rapporti, cioè una uguaglianza del tipo: $a : b = c : d$. la proprietà che la caratterizza è quella che brevemente si ricorda con la regola: *il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi*. Proprio grazie a questa proprietà si può risolvere il cosiddetto problema della quarta proporzio-

nale, trovare cioè l'unico numero incognito che insieme con altri tre numeri dati forma una certa proporzione.

- Così per esempio, l'unico numero x che rende valida la seguente proporzione: $2 : 7 = x - 1 : 11$, si ottiene semplicemente: $2 \cdot 11 = 7 \cdot (x - 1) \Rightarrow 22 = 7x - 7 \Rightarrow 7x = 29 \Rightarrow x = \frac{29}{7}$.

- Possono anche risolversi problemi più complessi, come determinare i valori reali di x per i quali la seguente è una corretta proporzione: $x^2 - 2 : 3 = 2x^2 + x - 1 : 5$. Deve aversi

$$5 \cdot (x^2 - 2) = 3 \cdot (2x^2 + x - 1) \Rightarrow 5x^2 - 10 = 6x^2 + 3x - 3 \Rightarrow x^2 + 3x + 7 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 28 < 0$$

Pertanto non vi sono numeri reali che risolvono il problema.

Livello 1

Nelle seguenti uguaglianze determinare gli eventuali valori reali di x per i quali esse rappresentano corrette proporzioni.

- $7 : 4 = x : 5 ; x : 1 = 3 : 5 ; 11 : x = 9 : 2 ; x : 4 = x : 5$ $\left[x = \frac{35}{4} ; x = \frac{3}{5} ; x = \frac{22}{9} ; x = 0 \right]$
- $\sqrt{3} : x = 2 : 7 ; 2x + 1 : 5 = 4 : 9 ; 3 : x = x : 8 ; 2 : x = x : 1$ $\left[x = \frac{7 \cdot \sqrt{3}}{2} ; x = \frac{11}{8} ; x = \pm 2 \cdot \sqrt{6} ; x = \pm \sqrt{2} \right]$
- $(3x - 2) : 3 = (x - 1) : 4 ; x : 7 = 8 : x ; 2 : x = x^2 : 4$ $\left[x = \frac{5}{9} ; x = \pm 2 \cdot \sqrt{14} ; x = 2 \right]$
- $(x - 1) : 5 = (x + 1) : 3 ; x : 11 = x^2 : 13 ; \sqrt{x} : 3 = 2 : 3$ $\left[x = -4 ; \left(x = 0 \vee x = \frac{13}{11} \right) ; x = 4 \right]$
- $x^2 : 4 = 2x^2 : 1 ; (x^2 - 1) : 3 = 1 : 5 ; x^2/4 : 5 = x^2 - x : 7$ $\left[x = 0 ; x = \pm \frac{2 \cdot \sqrt{10}}{5} ; \left(x = 0 \vee x = \frac{20}{13} \right) \right]$
- $(2x^2 - 2x + 3) : 2 = (3x^2 + 1) : 5 ; (x^2 + 1) : (5x^2 - x) = 7 : 2$ $\left[\emptyset ; x = \frac{7 \pm \sqrt{313}}{66} \right]$
- $\sqrt{x+1} : 8 = \sqrt{2x+3} : 9 ; (x-3) : 5 = \sqrt{x+2} : 4$ $\left[x = -\frac{111}{47} ; x = \frac{121 + 5 \cdot \sqrt{345}}{32} \right]$

Lavoriamo insieme

Sapendo che $a : b = 2 : 3$ e che $a + b = 7$, vogliamo determinare a e b .

Basta applicare la proprietà del comporre, ottenendo: $(a + b) : a = (2 + 3) : 2 \Rightarrow 7 : a = 5 : 2 \Rightarrow a = \frac{14}{5} = 2,8$.

Pertanto avremo anche $b = 7 - \frac{14}{5} = \frac{21}{5} = 4,2$.

Livello 1

Determinare i valori degli elementi incogniti nelle seguenti proporzioni

- $a : b = 5 : 3$, con $a + b = 12$; $a : 4 = b : 9$, con $a - b = 2$ $\left[\left(a = \frac{15}{2}, b = \frac{9}{2} \right) ; \left(a = -\frac{8}{5}, b = -\frac{18}{5} \right) \right]$
- $\frac{1}{2} : a = \frac{4}{3} : b$, con $a - b = \frac{5}{3}$; $\frac{4}{3} a : \frac{2}{3} b = 4 : 3$, con $2a + b = \frac{2}{3}$ $\left[\left(a = -1, b = -\frac{8}{3} \right) ; \left(a = \frac{4}{21}, b = \frac{2}{7} \right) \right]$
- $3a + 4 : 2b - 7 = \frac{1}{3} : \frac{5}{2}$, con $a + b = 1$; $\frac{3}{2} a + \frac{1}{3} : b + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} : 3$, con $a - b = \frac{3}{2}$ $\left[\left(a = -\frac{10}{7}, b = \frac{17}{7} \right) ; \left(a = -\frac{13}{32}, b = -\frac{61}{32} \right) \right]$

16. $a - 2 : b + 1 = \frac{5}{2} : 3$, con $a + b = 3$; $2a + 3 : 3b - 2 = 5 : 1$, con $a - b = \frac{4}{5}$ $\left[\left(a = \frac{32}{11}, b = \frac{1}{11} \right); \left(a = \frac{25}{13}, b = \frac{73}{65} \right) \right]$
17. $3a + 1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{4} a - b : 1$, con $a + b = \frac{3}{2}$; $\frac{1}{4} a - 1 : 3 = 2b + 4 : \frac{3}{5}$, con $2a + 3b = 1$
- $\left[\left(a = -\frac{9}{2}, b = 6 \right); \left(a = \frac{316}{89}, b = -\frac{181}{89} \right) \right]$

Livello 2

18. Dimostrare il teorema A.
19. Dimostrare il teorema B.
20. Dimostrare il teorema C.
21. Dimostrare il teorema E.
22. Se una proporzione ha costante k , quanto vale la costante della proporzione ottenuta da essa applicando una sola volta la proprietà del permutare? [Non può dirsi in generale]
23. Se una proporzione ha costante k , quanto vale la costante della proporzione ottenuta da essa applicando una sola volta la proprietà dell'invertire? $\left[\frac{1}{k} \right]$
24. Sapendo che $a + b = 100$, $c = 11$, $a : c = 7$ e $a : b = c : d$, determinare il valore dei quattro numeri.
- $\left[a = 77, b = 23, c = 11, d = \frac{23}{7} \right]$
25. Sapendo che $a - b = 25$, $a : c = 3$, $d = 4$ e $a : b = c : d$, determinare il valore dei quattro numeri.
- $\left[a = 37, b = 12, c = \frac{37}{3}, d = 4 \right]$
26. Sapendo che $a + b = 17$, $b : c = 8$, $c - d = 3$ e $a : b = c : d$, determinare il valore dei quattro numeri.
- $[a = 9, b = 8, c = 27, d = 24]$
27. Sapendo che $a - b = 15$, $a + c = 9$, $b - d = 12$ e $a : b = c : d$, determinare il valore dei quattro numeri.
- $\left[\left(a = \frac{45}{2}, b = \frac{15}{2}, c = -\frac{27}{2}, d = -\frac{9}{2} \right) \vee (a = 3, b = -12, c = 6, d = -24) \right]$

Livello 3

28. Sul segmento OD che misura 7 cm , si fissano nell'ordine i punti A, B e C in modo che sia $\overline{OA} = 2 \text{ cm}$, $\overline{OB} = 4 \text{ cm}$, $\overline{OC} = 5 \text{ cm}$. Il punto P è scelto all'interno del segmento BC in modo che BC e AD siano divisi da P nello stesso rapporto. Determinare la misura di OP . [4,5 cm]
29. Con riferimento al precedente esercizio. P si scelga all'interno di AB in modo da dividere OB e AC nella stessa proporzione. [Impossibile]
30. Con riferimento al precedente esercizio. P si scelga all'interno di AB in modo da dividere OD e AB nella stessa proporzione. Determinare la lunghezza di AP . [0,8 cm]
31. Sapendo che $a - c = 7$, $d = 3$, $a : b = c : d$ e i quattro numeri sono tutti interi positivi, determinare il loro valore. *Suggerimento:* Tenere conto del teorema di fattorizzazione unica dei numeri naturali.
- $[a=b=10, c=d=3; a=8, b=24, c=1, d=3; a=14, b=6, c=7, d=3; a=28, b=4, c=21, d=3]$
32. Determinare a e b in funzione di c e d , sapendo che $a - c$ e d sono numeri primi distinti; $a : b = c : d$; i quattro numeri sono tutti interi positivi e diversi da 1. $[a = 2c \text{ e } b = 2d]$
33. Determinare a e b in funzione di c e d , sapendo che $a + b$ e d sono numeri primi distinti; $a : b = c : d$; i quattro numeri sono tutti interi positivi e diversi da 1. [Impossibile]

Il concetto di similitudine

Abbiamo più volte sottolineato che il concetto di uguaglianza fra oggetti può essere inteso in vari modi. Per esempio due monete da 50 centesimi e 1 moneta da 1 euro non sono certamente oggetti uguali, addirittura nel primo caso abbiamo 2 oggetti, nell'altro 1, eppure dal punto di vista del valore monetario, 2 monete da 50 centesimi sono *uguali* a una moneta da 1 euro.

Lo stesso accade con le figure geometriche. Possiamo dire che due figure sono *uguali* se sono sovrapponibili, ossia se sono uguali. Ma possiamo dire anche che sono *uguali* se occupano lo stesso spazio, cioè se sono equiestese. Alla base del concetto di uguaglianza vi è perciò quello di relazione di equivalenza. Ricordiamo che una relazione binaria si dice di equivalenza se essa verifica le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

In conclusione possiamo dire di due oggetti che sono *uguali* se sono gli *stessi* sotto un certo punto di vista: hanno cioè lo stesso prezzo, la stessa lunghezza, lo stesso peso, e così via.

Esempio 1

- Scegliere un pantalone rosso di una data marca, modello e misura invece di uno verde (che è perciò a esso uguale) è del tutto equivalente da un punto di vista pratico della vestibilità, magari non lo è dal punto di vista estetico o dell'opinione personale.
- Per determinare quanta pittura è necessaria per tingeggiare una certa parete, non è necessario conoscerne la forma, basta solo determinarne l'area. Per pitturare una parete di forma quadrata di lato che misura 4 m o una parete di forma rettangolare le cui dimensioni sono 2 m e 8 m, si usa la stessa quantità di pittura. Magari se la parete ha una forma meno regolare ciò potrà provocare più fatica all'imbianchino, ma dal punto di vista della quantità di colore necessario non vi è alcuna differenza.

Abbiamo visto due esempi per i quali da un punto di vista strettamente “matematico” non vi sono differenze, mentre da un punto di vista pratico invece le differenze possono essere enormi. Tuttavia, quando parliamo di matematica pura, non dobbiamo chiaramente farci condizionare dai punti di vista personali o dalle esigenze utilitaristiche.

Adesso vediamo di introdurre un altro concetto di uguaglianza: quello di “somiglianza”.

Esempio 2

Per rappresentare una data zona geografica si usano spesso le mappe, che possono essere di vario genere: politiche, fisiche, stradali, Naturalmente queste mappe non hanno la pretesa di rappresentare esattamente una città, una regione, una nazione e via dicendo, ma vogliono dare un'idea della zona geografica, a seconda delle esigenze. In ogni caso però uno degli scopi della cartografia è quello di evitare di fornire false informazioni. Così non è importante colorare una certa regione di un colore piuttosto che di un altro, mentre è molto importante rispettare le proporzioni, quindi non solo nella cartina dell'Italia, la Sicilia deve apparire come la regione più grande delle altre, ma le sue dimensioni devono rispettare le rispettive proporzioni. Inoltre se una regione ha un'area di 100 e un'altra di 200, quest'ultima dovrà sempre apparire come il doppio della prima. Quindi le due immagini seguenti, della Sicilia e della Val d'Aosta non sono certamente proporzionali fra loro.



Dobbiamo cominciare a stabilire che cosa significa "rispettare le proporzioni". Consideriamo un altro esempio.

Esempio 3

Anche nell'ingrandimento delle fotografie utilizziamo lo stesso concetto di somiglianza che si usa per le cartine geografiche, anche se in quest'ultimo caso ci interessiamo a una maggiore precisione, nel senso che consideriamo con attenzione anche i colori, che siano il più possibile simili a quelli originali e altri dettagli. Supponiamo di volere ingrandire la seguente foto, raddoppiandone le dimensioni.



Ciò significa che la nuova figura avrà sia larghezza, sia altezza doppie rispetto alla precedente, come la



seguente

Ciononostante la precedente immagine non è accettabile perché ha diversi colori e tonalità rispetto all'originale, accetteremo invece la seguente come ingrandimento.



Se invece avessimo raddoppiato solo una delle due dimensioni avremmo ottenuto quest'altra foto, che certamente non considereremo come simile a quella data.



Certamente non diremo che quest'ultima figura “assomiglia” alla prima, pur raffigurando ancora un fiore ugualmente colorato e con tratti caratteristici simili e riconoscibili, o meglio diremo che essa è meno fedele di quanto lo sia la terza foto.

Abbiamo capito cosa intendiamo per rispetto delle proporzioni, cominciamo perciò a precisarlo, riferendoci in particolare ai poligoni.

Definizione 1

Diciamo che due poligoni sono **simili** fra loro secondo il fattore $k \neq 0$, se verificano le seguenti proprietà:

- hanno lo stesso numero di lati;
- esiste una corrispondenza biunivoca fra i loro angoli interni, in modo che due angoli corrispondenti siano fra loro uguali;
- esiste una corrispondenza biunivoca fra tutti i lati che formano le coppie di angoli corrispondenti uguali, in modo che il rapporto delle misure dei lati corrispondenti sia sempre uguale a k .

Definizione 2

Dati due poligoni simili ciascuna coppia di angoli e ciascuna coppia di lati che si corrispondono in una similitudine, si dicono rispettivamente angoli e lati **omologhi** o **corrispondenti** fra loro.

Definizione 3

Dati due poligoni simili, il numero k che misura il valore del comune rapporto fra le misure di segmenti corrispondenti, si chiama **rapporto di similitudine**.

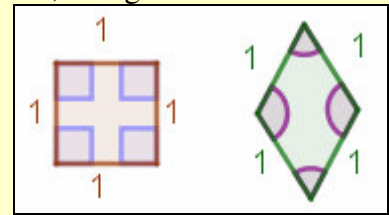
Notazione 1

Per indicare che due figure geometriche P e P' sono simili, scriveremo $P \sim P'$.

Cerchiamo di capire perché abbiamo fissato tre condizioni per la similitudine fra poligoni. In particolare cerchiamo di capire perché abbiamo imposto che le figure abbiano anche angoli a due a due uguali, dato che in precedenza abbiamo insistito quasi esclusivamente sui rapporti fra i lati e non sugli angoli.

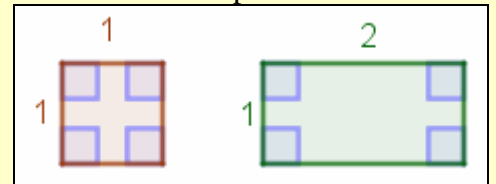
Esempio 4

- Consideriamo un quadrato di lato 1 e un rombo non quadrato di lato 1, le figure non sono certamente



uguali, quindi neppure simili.

- Un rettangolo puro (cioè non quadrato) e un quadrato non sono mai simili fra loro perché verificano le



prime due proprietà della definizione 1, ma non la terza.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Un'applicazione pratica della similitudine si ha nelle cartine geografiche o nei progetti di edifici. Naturalmente abbiamo a che fare con rappresentazioni piane di oggetti spaziali, ma la tecnica di fondo è proprio la similitudine. Tenuto conto di ciò, ci rendiamo conto di cosa voglia dire che una data cartina per esempio è in scala 1: 10000. Significa che, ipotizzando di avere a che fare con una superficie piana, ogni centimetro della nostra cartina equivale a 10000 *cm*, cioè a 100 *m*. Così se volessimo rappresentare su un foglio una regione quadrata di lato 10 *km*, nell'ipotesi precedente di rapporto 1: 10 000, avremmo bisogno di un foglio le cui dimensioni siano almeno $\frac{10000}{10000} m = 1m$.

Livello 1

1. In una cartina la distanza fra Roma e Milano è di 9 *cm*, sapendo che la distanza media reale è di 450 *km*, determinare la scala usata nel tracciare la cartina. [1 : 5000000]
2. In una cartina 1 : 5000 la distanza fra Londra e Parigi è 23 *cm*. Determinare la reale distanza media. [1150 *km*]
3. Vogliamo rappresentare una regione quadrata di lato 100 *km* in un foglio di carta in scala 1: 20000. Quale deve essere la minima lunghezza del foglio? [5 *m*]
4. Vogliamo rappresentare la pianta di un appartamento rettangolare di lati 12 *m* × 15 *m*, in un foglio di carta in scala 1: 75. Quali devono essere le minime dimensioni del foglio? [16 *cm* × 20 *cm*]
5. Vogliamo rappresentare la pianta di una regione di forma rettangolare di lati 825 *m* × 1234 *m*, in un foglio di carta in scala 1: 250. Quali devono essere le minime dimensioni del foglio? [3,3 *m* × 4,936 *m*]
6. Abbiamo a disposizione un foglio quadrato di lato 21 *cm*, se vi vogliamo rappresentare una riproduzione in scala di una regione quadrata di lato 7235 *m*, qual è il minimo valore intero del rapporto di scala? [34453]

Livello 2

7. Su un classico foglio formato A4, le cui dimensioni sono 210 *mm* × 297 *mm*, vogliamo rappresentare una riproduzione in scala di un appartamento di forma rettangolare di dimensioni 10,8 *m* × 11,5 *m*. Qual è il minimo valore intero del rapporto di scala? [52]
8. Da un foglio di cartone rettangolare di dimensioni 1 *m* × 2 *m*, vogliamo ottenere delle carte da gioco di dimensioni 88 *mm* × 63 *mm*. Quante ne possiamo ottenere al massimo? [341]
9. In relazione al precedente quesito, se la statua è alta ($h \cdot n$) *cm*, con *h* e *n* numeri naturali, e se ne ottengono copie ciascuna alta *n cm*, quante copie si ottengono? [h^3]
10. Un formato standard delle foto è 10 *cm* × 15 *cm*. In tale formato un'asta rettilinea lunga 2,34 *m* fotografata in modo da essere posta parallelamente al lato più lungo della riproduzione, misura 13 *cm*, qual è il rapporto di riduzione? In questo caso, se la base dell'asta è larga 57 *cm*, quanto misurerà la sua riproduzione? [18; ≈ 3.17 *cm*]
11. Con riferimento all'esercizio precedente, mantenendo inalterato il rapporto di riduzione, quali sono i valori della massima altezza e della massima larghezza che deve avere l'asta per essere visibile? [2,7 *m*; 1,8 *m*]
12. Due poligoni regolari con lo stesso numero di lati sono sempre simili? Giustificare la risposta. [Sì]

Lavoriamo insieme

ABC e $A'B'C'$ sono due triangoli simili, in cui vertici corrispondenti hanno lo stesso nome. Sapendo che $\overline{AB} = 5$, $\overline{AC} = 7$, $\overline{B'C'} = 4$, $\overline{A'B'} = 9$, determinare le misure dei lati incogniti.

Una delle condizioni per la similitudine di poligoni è che lati corrispondenti siano nello stesso rapporto.

Quindi deve aversi $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \Rightarrow \frac{5}{9} = \frac{7}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{4}$. Le due uguaglianze equivalgono a tre propor-

zioni, usiamone due per determinare i lati incogniti: $\frac{5}{9} = \frac{7}{\overline{A'C'}} \Rightarrow \overline{A'C'} = \frac{36}{5} = 7.2$; $\frac{5}{9} = \frac{\overline{BC}}{4} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{20}{9}$. Ci rimane solo da verificare che i valori determinati siano coerenti, ossia che valga la disuguaglianza triangolare.

Nel triangolo ABC il lato maggiore è lungo 7 e $7 < 5 + \frac{20}{9}$. Non è necessario verificare che anche i valori di $A'B'C'$ siano coerenti, perché è simile ad ABC .

Livello 2

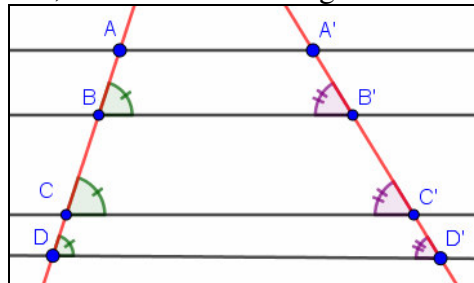
13. ABC e $A'B'C'$ sono due triangoli simili, in cui vertici corrispondenti hanno lo stesso nome. Sapendo che $\overline{AB} = 3, \overline{AC} = 8, \overline{B'C'} = 5, \overline{A'B'} = 7$, determinare le misure dei lati incogniti. [Impossibile]
14. ABC e $A'B'C'$ sono due triangoli simili, in cui vertici corrispondenti hanno lo stesso nome. Sapendo che $\overline{AB} = 7, \overline{AC} = 6, \overline{B'C'} = 2, \overline{A'B'} = 4$, determinare le misure dei lati incogniti. $\left[\overline{BC} = 3,5, \overline{A'C'} = \frac{24}{7} \right]$
15. $ABCD$ e $A'B'C'D'$ sono due trapezi isosceli simili, in cui vertici corrispondenti hanno lo stesso nome. Sapendo che $\overline{AB} = 9, \overline{BC} = \overline{AD} = 12, \overline{A'B'} = 5, \overline{A'C'} = 3$, determinare le misure dei lati incogniti.
- $$\left[\overline{AC} = \frac{5}{3}, \overline{B'C'} = \overline{A'D'} = \frac{24}{7} \right]$$

Teorema di Talete

Tenuto conto di quanto noto per i triangoli uguali, pensiamo che possano stabilirsi dei criteri di similitudine per i triangoli. In effetti ciò accade. Prima però, visto che abbiamo dato una certa importanza alla conservazione degli angoli, è bene cercare qualche proprietà che ha a che fare appunto con tale conservazione.

Ricordiamo che rette parallele tagliate da una trasversale, formano diverse coppie di angoli fra loro uguali.

In particolare ciò sarà vero anche se consideriamo più di due rette parallele, ossia un fascio di rette parallele, che facciamo tagliare da due trasversali, come mostrato in figura.



In questo modo si ottengono alcuni trapezi: $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C'$, $ACC'A'$, $ADD'A'$, $BDD'B'$. Questi trapezi sono simili? Consideriamo le proprietà da noi stabilite.

Per quel che riguarda le proprietà 1 e 2 non vi sono problemi, essendo le rette parallele tutti gli angoli segnati, riferiti a una stessa trasversale, sono corrispondenti (secondo il parallelismo di rette) e quindi uguali fra loro. Anche fra gli angoli non segnati vi sono relazioni di isometria sempre perché angoli corrispondenti rispetto alle parallele tagliate dalla trasversale. Però in generale non è valida la terza proprietà, perché immaginando di spostare il punto C sulla trasversale in modo che sia $\overline{AB} = \overline{CD}$, è chiaro che non potrà mai aversi $\overline{AA'} = \overline{CC'}$, quindi i trapezi non sono simili. Vi è però una proporzionalità fra i lati obliqui corrispondenti di due qualsiasi dei trapezi nominati. Vale infatti il seguente risultato.

Teorema 1 (di Talete)

Due rette che tagliano un fascio di rette parallele, determinano due classi di segmenti fra loro proporzionali.

Prima di passare alla dimostrazione chiariamo il significato del teorema, riferendoci alla precedente figura.

La tesi del teorema afferma che, presi comunque due segmenti determinati da una delle due trasversali, per

esempio $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, il rapporto delle loro misure, $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$, è uguale al rapporto dei segmenti corrispondenti de-

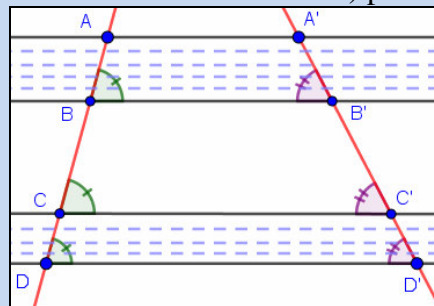
terminati dall'altra trasversale, $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$. Passiamo alla dimostrazione, cominciando da un caso particolare.

Schema Dimostrativo			
Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Supponiamo che sia $\overline{AB} = \overline{CD}$.		
2	Si traccino da A e C le rette parallele a s fino a incontrare BB' e DD' rispettivamente in E e in F .		
3	Consideriamo gli	Sono uguali	Si ha

	angoli $\hat{EAB}, \hat{FCD}$		$\hat{EAB} = \hat{A'AB} - \hat{A'AE}$ $\hat{FCD} = \hat{C'CD} - \hat{C'CF}$ e sia i primi sia i secondi membri sono a due a due uguali
3	Consideriamo i triangoli ABE e CDF	Sono uguali	Per ALA, dato che hanno $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\angle \hat{ABE} = \angle \hat{CDF}$, $\angle \hat{EAB} = \angle \hat{FCD}$.
4	Consideriamo il quadrilatero $AE-B'A'$	È un parallelogramma	Per costruzione
5	Consideriamo i segmenti $A'B'$ e $C'D'$	Sono uguali	Per i punti 3 e 4.

Se invece AB e CD non dovessero essere uguali, diciamo a e b le loro misure e indichiamo con a' e b' le misure di $A'B'$ e $C'D'$, valori espressi tutti nella stessa unità di misura. Supponiamo che il rapporto $\frac{a}{b}$ sia un

numero razionale, tanto per fissare le idee sia $\frac{5}{4}$. Allora noi possiamo suddividere AB in 5 segmenti fra di loro uguali e CD in 4 segmenti uguali ai precedenti. Effettuata questa suddivisione tracciamo le parallele per questi punti. In tal modo suddividiamo anche $A'B'$ in 4 segmenti e $C'D'$ in 5 segmenti che sono tutti fra loro uguali (ma non per forza ai segmenti in cui sono divisi AB e CD) per la parte già dimostrata.



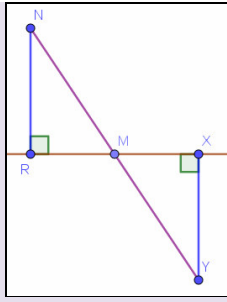
Quindi la tesi del teorema è vero anche in questo caso. Infine nel caso in cui $\frac{a}{b}$ non dovesse essere razionale, possiamo pensare di effettuare lo stesso procedimento mediante l'approssimazione di tale numero irrazionale, quindi mediante un numero infinito di passi. Non approfondiamo questo discorso.

I protagonisti



Talete nacque a Mileto, nell'odierna Turchia, verso il 640 a.C. divenne famoso fra i suoi contemporanei per aver previsto l'eclisse solare del 585 a.C., almeno a quanto narra lo storico Erodoto. Egli è considerato come uno dei Sette Saggi dell'antichità. Oltre a quello qui citato, gli sono attribuiti almeno altri cinque teoremi geometrici, e cioè: *un cerchio è bisecato dal diametro; un triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo; gli angoli opposti al vertice sono fra loro uguali; il criterio ALA e gli angoli opposti ai lati uguali di un triangolo isoscele sono anch'essi uguali.*

Un altro importante aneddoto è riferito da Diogene Laerzio, il quale racconta che Talete riuscì a determinare l'altezza delle piramidi egiziane misurando la loro ombra, in ciò applicando proprio la similitudine dei triangoli che stiamo trattando. Alcuni storici, Loria per esempio, dubitano di ciò poiché ritengono che Talete non conoscesse le proprietà della similitudine, pertanto l'associare il teorema a Talete è errato. Invece in un modo probabilmente simile al seguente, si dice che riuscisse a determinare la distanza di una nave dalla riva.

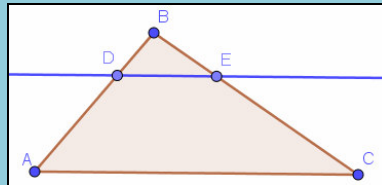


Sia N la posizione della nave e il punto R rappresenti la posizione dalla quale vuole determinarsi la distanza di N . Dobbiamo determinare la misura di RN . Scegliamo a piacere un punto X sulla perpendicolare RX a RN . Determiniamo il punto medio M di RX . Sulla congiungente MN , che possiamo determinare con degli strumenti esistenti al tempo di Talete, troviamo il punto Y , intersezione della detta retta con XY , perpendicolare a RX . È immediato notare che i triangoli NRM e MYX sono fra loro uguali, pertanto la distanza RN misura quanto XY che possiamo facilmente determinare. Si pensa che Talete sia morto verso il 560 a.C.

Vediamo un interessante corollario del teorema di Talete che risulta un'estensione del teorema che afferma: *Dati due punti appartenenti a due lati di un triangolo, il segmento che li congiunge è parallelo al terzo lato e uguale alla sua metà se e solo se i due punti sono punti medi dei rispettivi lati.*

Corollario 1

Sono dati due punti D ed E rispettivamente appartenenti ai lati AB e AC del triangolo ABC . Il segmento DE è parallelo a BC se e solo se D ed E suddividono i lati a cui appartengono nel rapporto k . Inoltre $\frac{DE}{BC} = k$.



Dimostrazione. Risulta una semplice applicazione del teorema di Talete e la lasciamo per esercizio.

Il teorema di Talete ci fornisce un semplice metodo per dividere un segmento in un numero intero di segmenti tutti fra loro uguali. Vediamo un esempio.

Esempio 5

Vogliamo dividere un segmento AB in quattro parti uguali. Per quel che diremo il riferimento è alla seguente

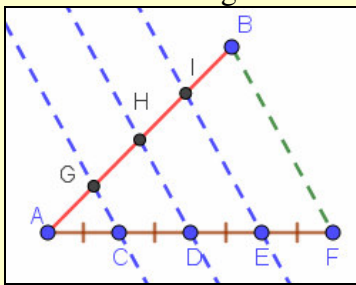


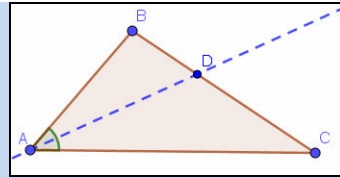
figura.

Tracciamo una qualsiasi semiretta con origine uno degli estremi del segmento, per esempio A , e su di essa, a partire da A si riportino quattro segmenti fra loro uguali. Congiungiamo l'estremo F dell'ultimo segmento con B ; tracciamo le parallele a FB passanti per gli estremi dei quattro segmenti uguali. Le loro intersezioni con AB , dividono quest'ultimo in quattro parti uguali grazie appunto al teorema di Talete.

Un'altra conseguenza del teorema di Talete è la seguente.

Teorema 2 (della bisettrice)

La bisettrice di un angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati.



Ipotesi: $\angle D\hat{A}B = \angle C\hat{A}D$ Tesi: $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$

Schema dimostrativo

Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Tracciamo la bisettrice AD dell'angolo di vertice A e dal punto C tracciamo la parallela ad AD , la quale incontra il prolungamento del lato AB nel punto E		
2	Consideriamo gli angoli $\hat{C}AD, \hat{A}CE$	Sono uguali	Angoli alterni interni rispetto alle parallele AD ed EC tagliate da BC
3	Consideriamo gli angoli $\hat{C}AD, \hat{C}EA$	Sono uguali	Angoli corrispondenti rispetto alle parallele AD ed EC tagliate da AB
4	Consideriamo il triangolo AEC	È isoscele di base EC , quindi $\overline{AE} = \overline{AC}$	Per i punti 2 e 3
5	Consideriamo le rette per AD , per CE e la loro parallela per B	$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$ 	Per il teorema di Talete
6	Consideriamo $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$	Si ha $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$	Per i punti 4 e 5.

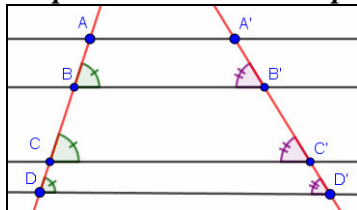
Verifiche

Lavoriamo insieme

Nel triangolo ABC il punto D è scelto in modo tale da dividere il lato AB nel rapporto $\frac{1}{8}$, se E è l'intersezione della parallela a BC per D e DE misura 1 cm , determinare quanto misura BC .

Basta applicare il corollario del teorema di Talete, deducendo che DE è $\frac{1}{8}$ di BC , che perciò misura 8 cm .

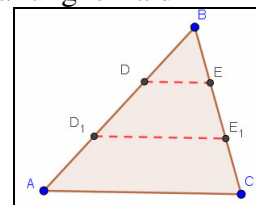
Il riferimento dei prossimi esercizi, indipendentemente dalle proporzioni dei segmenti, è alla seguente figura



gura

Livello 1

- Sapendo che $\overline{AB} = 5$, $\overline{CD} = 3$, $\overline{A'B'} = 2$, determinare $\overline{C'D'}$. [1,2]
- Sapendo che $\overline{AC} = 4$, $\overline{A'B'} = 1$, $\overline{B'C'} = 5$, determinare $\overline{AB}, \overline{CD}$. $\left[\frac{2}{3}; \frac{10}{3}\right]$
- Sapendo che $\overline{BC} = 7$, $\overline{B'D'} = 12$, $\overline{C'D'} = 8$, determinare $\overline{BD}, \overline{CD}$. $\left[\frac{7}{3}; \frac{7}{2}\right]$
- Nel triangolo ABC il segmento DE unisce due punti appartenenti rispettivamente ai lati AB e AC ed è parallelo al segmento BC . È possibile che il triangolo ADE risulti equilatero se ABC non lo è? Giustificare la risposta. [No]
- Il triangolo ABC ha lati lunghi 7, 8, 9. DE è un segmento parallelo a uno dei lati, con gli estremi sugli altri due lati, in modo che la distanza di D dal vertice opposto sia 3. Determinare la lunghezza di DE in



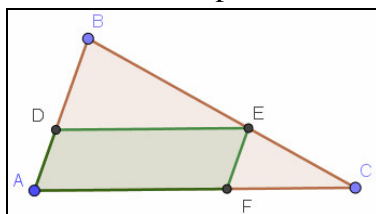
tutti i casi possibili. La figura accanto illustra due dei casi

- DE è un segmento lungo 5, parallelo a uno dei lati del triangolo ABC con gli estremi sugli altri due lati, in modo che le distanze di D ed E dal vertice opposto siano 4 e 6. Sapendo che la distanza di D dall'altro estremo del lato a cui appartiene è 2, determinare le lunghezze dei due lati incogniti di ABC in tutti i casi possibili. $\left[\frac{24}{7} \vee \frac{27}{7} \vee \frac{21}{8} \vee \frac{27}{8} \vee \frac{7}{3} \vee \frac{8}{3}\right]$
- Sui lati AB e AC di un triangolo equilatero ABC si scelgono due punti D ed E in modo tale che DE risulti parallelo a BC . Se il perimetro di ABC è 12 cm è quello di ADE è 5 cm , determinare in quale rapporto il segmento AB è diviso dal punto D . $\left[\frac{5}{12}\right]$
- Con riferimento al problema precedente determinare la misura del perimetro del trapezio $BCDE$. $\left[\frac{31}{3}\text{ cm}\right]$
- Quanto misura un angolo di 2° visto con una lente che ingrandisce gli oggetti quattro volte? Giustificare la risposta. [2°]

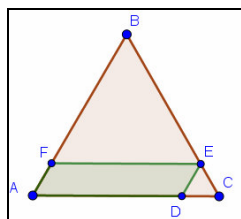
10. In un dato momento del giorno, una colonna proietta un'ombra di 5 m . Sapendo che nello stesso momento e nello stesso luogo, un bastone di 1 m , posto anch'esso perpendicolarmente al suolo proietta un'ombra di 80 cm , determinare l'altezza della colonna. [4 m]
11. In un dato momento del giorno, per collegare la cima di una colonna con l'ombra che essa proietta sul suolo, è necessaria una corda tesa lunga 15 m . Sapendo che nello stesso momento e nello stesso luogo, un bastone di 40 cm , posto anch'esso perpendicolarmente al suolo proietta un'ombra di 30 cm , determinare l'altezza della colonna. [12 m]

Livello 2

12. Dimostrare il corollario 1.
13. Sui lati AB e AC di un triangolo equilatero ABC , si scelgono due punti D ed E in modo tale che DE risulti parallelo a BC . Se il perimetro del trapezio $BCDE$ è 13 cm e quello di ADE è 6 cm , determinare il perimetro di ABC . [15 cm]
14. Nel triangolo ABC , D e F sono scelti su AB , BC , DE e FG sono paralleli, con E e G sul lato AC ; inoltre si ha $\overline{DE} = 3 \cdot \overline{FG}$, $\overline{FD} = 3$, determinare la lunghezza di BD . [9]
15. Nel triangolo equilatero ABC , di lato lungo 3 cm , scegliamo D su AB , sia DE parallelo ad AC , con E su BC . Sapendo che $\overline{DE} = 1\text{ cm}$, determinare la misura del perimetro del quadrilatero $ADEC$. [8 cm]
16. In figura $\overline{AC} = 10$, $\overline{AD} = 2$, $\overline{DB} = 3$, determinare il perimetro del parallelogramma $ADEF$. [16]



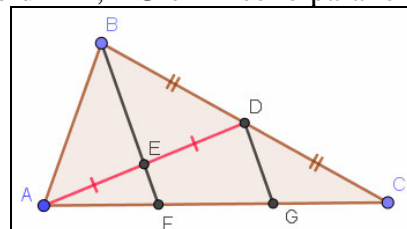
17. Con riferimento al precedente esercizio determinare il perimetro del parallelogramma nelle ipotesi $\overline{AC} = 12$, $\overline{AB} = 9$, $\overline{EC} = 2$, $\overline{BE} = 4$. [22]
18. In figura ABC è equilatero di lato 9 , D divide AC nel rapporto $\frac{4}{5}$. Determinare il perimetro del paralle-

logramma $ADEF$.

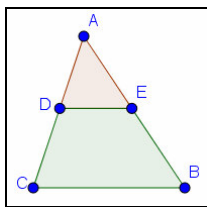
[18]

Livello 2

19. Con riferimento al precedente esercizio, se D divide AB nel rapporto $\frac{m}{n}$, determinare il rapporto dei perimetri di ABC e $ADEF$. $\left[\frac{3}{2} \right]$
20. Nel triangolo in figura, D è punto medio di BC , E è punto medio di AD , DG e BF sono paralleli. Pro-

vare che F e G dividono AC in 3 parti uguali.

21. Con riferimento al precedente esercizio, determinare il rapporto $\frac{\overline{BE}}{\overline{EF}}$. [3]
22. Data la semicirconferenza Γ di diametro AB , si tracci la corda AC che incontra nel punto D la tangente a Γ condotta per il punto B . Si fissi un punto E sul segmento AD in modo che sia $\overline{AE} = \overline{CD}$. Dai punti E e C si traccino le perpendicolari ad AB , i cui piedi si indichino con F e G rispettivamente. Determinare il rapporto fra i segmenti AF e GB . [1]



23. In figura DE è parallelo a BC , in modo che $\frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = k$. È possibile che il perimetro (in-

dicato con $2p$) di $BCDE$ sia uguale a quello di ADE ? Se sì quando accade? $\left[k = \frac{2p - \overline{DE}}{2p} \right]$

24. In un triangolo equilatero di lato $3h$ tracciamo una parallela a un lato, in modo che il segmento intercettato dagli altri due lati sia lungo k . Determinare il perimetro del trapezio determinato dal detto lato e dal triangolo equilatero. $[3h - k]$

Lavoriamo insieme

Un triangolo isoscele ha i lati obliqui lunghi 5 e la base 6. Vogliamo determinare la lunghezza delle due parti in cui ogni lato obliquo è diviso dalla bisettrice dell'angolo a esso opposto. Applicando il teorema della bisettrice, e indicando con $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$ i valori incogniti, avremo:

$$\frac{5}{6} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \Rightarrow \frac{5}{6} = \frac{\overline{AD}}{5 - \overline{AD}} \Rightarrow 6 \cdot \overline{AD} = 25 - 5 \cdot \overline{AD} \Rightarrow 11 \cdot \overline{AD} = 25 \Rightarrow \overline{AD} = \frac{25}{11}, \overline{BD} = 5 - \frac{25}{11} = \frac{30}{11}.$$

Con lo stesso teorema possiamo altresì verificare che la bisettrice dell'angolo al vertice è mediana del lato opposto:

$$\frac{5}{5} = \frac{\overline{AH}}{\overline{CH}} \Rightarrow \frac{5}{5} = \frac{\overline{AH}}{6 - \overline{AH}} \Rightarrow 5 \cdot \overline{AH} = 30 - 5 \cdot \overline{AH} \Rightarrow 10 \cdot \overline{AH} = 30 \Rightarrow \overline{AH} = \overline{CH} = 3.$$

Livello 1

25. Usando il teorema della bisettrice verificare che in un generico triangolo isoscele la bisettrice dell'angolo al vertice è mediana della base.
26. Nel triangolo ABC si ha $\overline{AC} = 5, \overline{BC} = 7, \overline{AB} = 10$. Detta CD la bisettrice dell'angolo interno di vertice C determinare le misure di AD e DB . $\left[\frac{25}{6}; \frac{35}{6} \right]$
27. Nel triangolo ABC il lato AC è lungo 14 cm , mentre gli altri due lati sono l'uno i $\frac{4}{3}$ dell'altro. Si consideri la bisettrice dell'angolo opposto al lato AC . Determinare la misura dei segmenti in cui viene diviso AC da tale bisettrice. $[6 \text{ cm}, 8 \text{ cm}]$
28. Nel triangolo rettangolo ABC , i cateti misurano 3 cm e 4 cm . Determinare la misura dei segmenti in cui viene divisa l'ipotenusa dalla bisettrice dell'angolo retto. $\left[\frac{20}{7} \text{ cm}; \frac{15}{7} \text{ cm} \right]$
29. Di un triangolo conosciamo le lunghezze di un lato, 5, e quelle delle due parti in cui un altro lato è diviso dalla bisettrice dell'angolo a esso opposto, 4 e 2. Determinare la lunghezza del terzo lato. $[2,5]$

Livello 2

30. Provare che in due triangoli simili il rapporto dei segmenti di bisettrice degli angoli interni omologhi è uguale al rapporto di similitudine.
31. Di un triangolo rettangolo conosciamo un cateto, 3, e una delle due parti in cui l'ipotenusa è divisa dalla bisettrice dell'angolo retto, 2,5. Determinare l'altro cateto e l'ipotenusa, nei diversi casi.
32. Di un triangolo isoscele conosciamo la base, 8, e una delle due parti in cui il lato obliquo è diviso dalla bisettrice dell'angolo a esso opposta, 5. Determinare la misura del lato obliquo, nei diversi casi.

$$\left[\frac{5 + \sqrt{185}}{2} \vee \frac{40}{3} \right]$$

33. Nel triangolo ABC i cui lati misurano 11, 12 e 13, consideriamo le bisettrici degli angoli interni. Determinare la minima e la massima misura che possono assumere le parti determinate da tali bisettrici sui lati opposti.

$$\left[\frac{132}{25}, \frac{156}{23} \right]$$

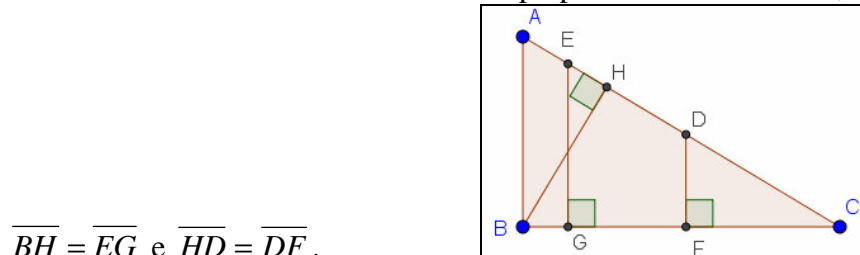
34. ABC è un triangolo isoscele sulla base BC . CD è la bisettrice dell'angolo di vertice C . Se ABC e BCD sono fra loro simili quanto misura $\angle \hat{A}BC$ in gradi sessagesimali?

$$[72^\circ]$$

35. Con riferimento al precedente esercizio, se $\angle \hat{A}BC = 72^\circ$, possiamo dire che sicuramente ABC e BCD sono fra loro simili? Giustificare la risposta.

$$[Si]$$

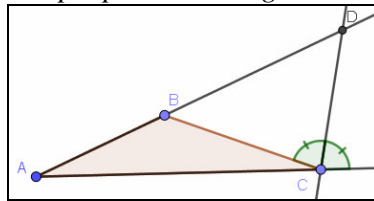
36. Sia il triangolo ABC in figura, rettangolo in B . D ed E sull'ipotenusa AC sono scelti in modo che sia $\overline{AD} = \overline{AB}$ e $\overline{EC} = \overline{BC}$. Si traccino le perpendicolari EG a BC , DF a BC e BH ad AC . Provare che



$$\overline{BH} = \overline{EG} \text{ e } \overline{HD} = \overline{DF}.$$

Livello 3

37. Provare il teorema della bisettrice dell'angolo esterno: *Se la bisettrice di un angolo esterno di un triangolo incontra il prolungamento del lato opposto, il rapporto delle distanze del punto d'incontro dagli estremi del detto lato sono proporzionali agli altri due lati.* Con riferimento alla figura deve provarsi



che si ha: $\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}.$

38. Con riferimento al precedente esercizio, ricavare BD in funzione dei lati di ABC .

$$\left[\frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{\overline{AC} - \overline{BC}} \right]$$

39. Determinare la lunghezza dei segmenti in cui viene diviso il lato c dalla bisettrice dell'angolo di vertice C , in funzione dei lati a , b e c del triangolo.

$$\left[\frac{ac}{a+b}; \frac{bc}{a+b} \right]$$

40. Risolvere il precedente problema per la bisettrice dell'angolo retto di un triangolo rettangolo non isoscele, in funzione dei soli cateti.

$$\left[\frac{a \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}{a+b}; \frac{b \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}{a+b} \right]$$

41. Risolvere il precedente problema per un triangolo isoscele, relativamente alle bisettrici degli angoli alla base.

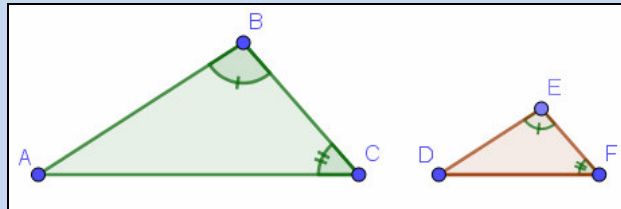
$$\left[\frac{a^2}{a+b}; \frac{ab}{a+b} \right]$$

Criteri di similitudine

Cerchiamo di enunciare e dimostrare i criteri di similitudine per i triangoli. Abbiamo detto che due triangoli sono simili se hanno gli angoli a due a due uguali e i lati a essi opposti in proporzione. Vogliamo trovare delle condizioni più economiche. Crediamo che, come per la isometria, sia necessario considerare tre coppie di enti geometrici. Vediamo quindi il primo criterio, nel quale apparentemente si considerano solo due coppie di angoli uguali. Noi però sappiamo che se due triangoli hanno uguali rispettivamente due coppie di angoli, avranno uguale anche la coppia rimanente.

Teorema 3 (I criterio di similitudine dei triangoli)

Se due angoli di un triangolo sono uguali ad altrettanti angoli di un altro triangolo, allora i due triangoli sono simili.

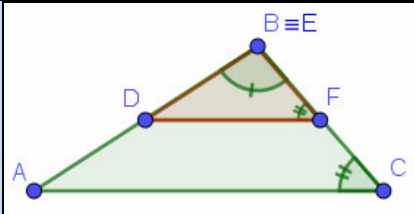


Ipotesi: $\angle \hat{A}BC = \angle \hat{D}EF$, $\angle \hat{B}CA = \angle \hat{E}FD$

Tesi: $ABC \sim DEF$

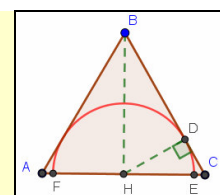
Supponiamo che sia $\frac{AB}{DE} > 1$, infatti se tale rapporto fosse uguale a 1 i triangoli sarebbero uguali per ALA; se invece fosse minore di 1 basterebbe cambiare nome ai triangoli, oppure scambiare numeratore e denominatore fra loro nel rapporto precedente.

Schema Dimostrativo

Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Con un movimento rigido trasportiamo il triangolo DEF in modo che il suo angolo di vertice D coincida con l'angolo di vertice A	 I lati DE e EF appartengono ai lati AB e BC rispettivamente	Per l'isometria degli angoli
2	Consideriamo le altre coppie di angoli	$\angle \hat{C}AB = \angle \hat{F}DB$	Per differenza di angoli uguali
3	Consideriamo i segmenti DF e AC	Sono paralleli	Perché le trasversali AB e BC determinano su di essi angoli corrispondenti uguali
4	La tesi	$\frac{DE}{AB} = \frac{BF}{BC} = \frac{FD}{CA}$	Per il Teorema di Talete e il conseguente Corollario 1.

Vediamo un'applicazione del precedente risultato.

Esempio 6



Un semicerchio è inscritto in un triangolo equilatero come mostrato in figura. Se il lato del triangolo misura, in cm , $4 \cdot \sqrt{3}$, quanto misura il raggio del semicerchio?

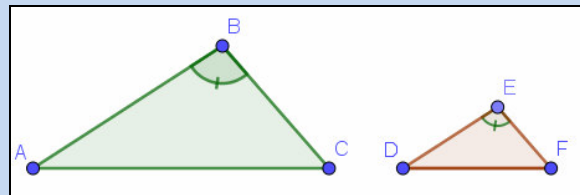
È facile notare che $BHC \sim HDC$, per il primo criterio di similitudine, dato che sono entrambi rettangoli e

hanno in comune l'angolo $\widehat{BCH}$. Pertanto possiamo scrivere la seguente proporzione: $\overline{BH} : \overline{BC} = \overline{HD} : \overline{HC}$ da cui $\overline{HD} = \frac{\overline{BH} \cdot \overline{HC}}{\overline{BC}}$. Dobbiamo perciò determinare la misura di BH , cosa che può farsi applicando la consueta regola con la quale si trova l'altezza di un triangolo equilatero, noto il lato: $h = \frac{\ell}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{2} \text{ cm} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot 3 \text{ cm} = 6 \text{ cm}$. Quindi abbiamo: $\overline{HD} = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot 6}{4 \cdot \sqrt{3}} \text{ cm} = 3 \text{ cm}$

Abbiamo detto varie volte che l'isometria è una particolare similitudine di rapporto 1, quindi i criteri di similitudine, saranno abbastanza simili a quelli di isometria. Ne abbiamo già trovato uno: cerchiamo gli altri. Consideriamo in particolare il criterio LAL e lo "aggiustiamo" trasformandolo nel seguente criterio di similitudine.

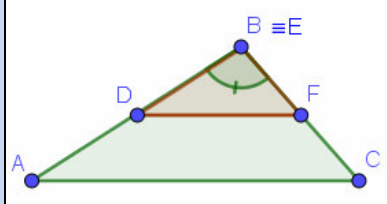
Teorema 4 (II criterio di similitudine dei triangoli)

Se due dei tre rapporti fra i lati di due triangoli sono uguali e gli angoli compresi da tali lati sono fra loro uguali allora i due triangoli sono simili.



Ipotesi: $\angle \widehat{ABC} = \angle \widehat{DEF}$; $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$ **Tesi:** $ABC \sim DEF$

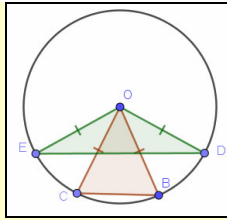
Supponiamo che il rapporto fra le misure dei lati corrispondenti sia maggiore di 1.

Schema Dimostrativo			
Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Con un movimento rigido trasportiamo il triangolo DEF in modo che il suo angolo di vertice e coincida con l'angolo di vertice B	 I lati DE e EF appartengono ai lati AB e BC rispettivamente	Per l'isometria degli angoli
2	Consideriamo i segmenti DF e AC	Sono paralleli	Poiché i punti D ed F dividono i lati a cui appartengono in parti ugualmente proporzionali
3	Consideriamo gli angoli $\widehat{CAB}$ e $\widehat{FDE}$	Sono uguali	Perché corrispondenti rispetto alla parallela DF e AC tagliate da AB
4	Consideriamo i triangoli ABC e DEF	Sono simili	Per il passo 3 e il primo criterio di similitudine.

Vediamo un'applicazione del precedente teorema.

Esempio 7

Vogliamo far vedere che il conoscere solo due lati corrispondenti nella stessa proporzione, non è sufficiente a stabilire la similitudine di due triangoli. Consideriamo per esempio due triangoli isosceli che hanno i lati obliqui uguali (quindi eventuale rapporto di similitudine unitario), ma hanno le rispettive basi diverse. Si pensi per esempio al modello di triangolo isoscele formato da un compasso che, almeno in linea teorica, può aprirsi in infiniti modi (con infinite ampiezze).



Come si vede, i triangoli ODE e OBC non sono simili, pur avendo i lati obliqui uguali.

Adesso cerchiamo di trovare un analogo del criterio LLL per la similitudine.

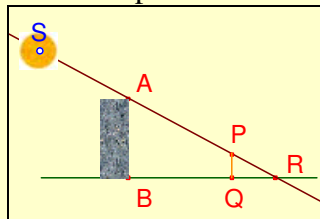
Teorema 5 (III criterio di similitudine dei triangoli)

Se in due triangoli può stabilirsi una corrispondenza biunivoca fra i rispettivi lati, in modo che tutti i rapporti delle misure di lati corrispondenti siano uguali, allora i due triangoli sono simili.

La dimostrazione è simile alle precedenti e viene lasciata per esercizio.

Esempio 8

Abbiamo già visto come Talete potrebbe essere riuscito a risolvere il problema di determinare la distanza di una nave dalla riva, abbiamo detto anche che vi sono dei dubbi sul fatto che possa essere riuscito a trovare l'altezza delle piramidi, e ciò perché la base di tali monumenti è troppo ampia rispetto alla loro altezza. È invece sempre possibile determinare con l'ausilio della similitudine l'altezza di oggetti con una base minore, come per esempio quella degli obelischi. Il procedimento da seguire è descritto in figura.



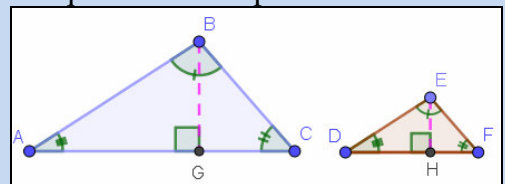
Con S indichiamo il Sole, considerato puntiforme. L'obelisco è assoggettato a un rettangolo, il segmento PQ è un oggetto rettilineo di cui conosciamo la lunghezza, per esempio un bastone. Posizioniamo il bastone perpendicolarmente alla base d'appoggio dell'obelisco. Supponiamo che l'obelisco formi un'ombra, assimilata a un segmento, pari a BR , mentre il bastone formi un'ombra pari a QR . Data la similitudine dei triangoli rettangoli ABR e PQR , per cui possiamo scrivere $\frac{AB}{PQ} = \frac{BR}{QR}$, la misura dell'altezza incognita AB si determinerà mediante la seguente formula, in cui tutte le quantità sono note o si possono determinare facilmente: $AB = \frac{BR \cdot PQ}{QR}$. Naturalmente non è necessario porre il bastone in modo tale che la "fine" della sua ombra coincida con quella dell'obelisco.

Consideriamo altri risultati relativi alla similitudine fra triangoli.

Teorema 6

In due triangoli simili il rapporto fra due lati corrispondenti è uguale a quello fra le rispettive altezze.

Ipotesi: $ABC \sim DEF$, $BG \perp AC$, $EH \perp DF$. Tesi: $\frac{AC}{DF} = \frac{BG}{EH}$



Schema Dimostrativo

Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Tracciamo BG ed EH , le altezze relative ai vertici B ed E		
2	Consideriamo i	Sono simili e si ha:	Dato che sono rettangoli e hanno

	triangoli ABG e DEH	$\overline{AG} : \overline{DH} = \overline{AB} : \overline{DE} = \overline{BG} : \overline{EH}$	un angolo acuto uguale (primo criterio di similitudine)
3	Consideriamo i triangoli BCG e EFH	Sono simili e si ha: $\overline{BC} : \overline{EF} = \overline{CG} : \overline{FH} = \overline{BG} : \overline{EH}$	Come al passo precedente
4	Lavoriamo sulle proporzioni costruite	$\overline{AG} : \overline{DH} = \overline{GC} : \overline{HF}$	Per i passi 2 e 3
5	“	$\overline{AG} : \overline{GC} = \overline{DH} : \overline{HF}$	Proprietà del permutare
6	“	$(\overline{AG} + \overline{GC}) : \overline{GC} = (\overline{DH} + \overline{HF}) : \overline{HF} \Rightarrow$ $\Rightarrow \overline{AC} : \overline{GC} = \overline{DF} : \overline{HF}$	Proprietà del comporre
7	“	$\overline{AC} : \overline{DF} = \overline{BG} : \overline{EH}$	Proprietà del permutare.

Ancora un esempio.

Esempio 9

Dati i triangoli simili ABC e DEF , con $\overline{AB} = 3$, $\overline{DE} = 7$, con AB e DE lati omologhi, sappiamo inoltre che l'altezza $\overline{FK} = 5$, vogliamo determinare la lunghezza dell'altezza CH .

Per il teorema precedente possiamo dire che si ha: $\overline{AB} : \overline{DE} = \overline{CH} : \overline{FK} \Rightarrow \overline{CH} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{FK}}{\overline{DE}} = \frac{3 \cdot 5}{7} = \frac{15}{7}$. Non siamo in grado di conoscere la lunghezza delle altre altezze.

Vediamo un altro risultato.

Teorema 7

In due triangoli simili il rapporto fra i rispettivi perimetri è uguale al rapporto di similitudine.

Dimostrazione lasciata per esercizio.

Esempio 10

Se il rapporto di similitudine fra i triangoli ABC e DEF è 3, vuol dire che si ha, per esempio,

$$\overline{AB} = 3 \cdot \overline{DE}, \quad \overline{AC} = 3 \cdot \overline{DF}, \quad \overline{BC} = 3 \cdot \overline{EF}$$

quindi per i rispettivi perimetri avremo:

$$2p_{ABC} = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = 3 \cdot \overline{DE} + 3 \cdot \overline{DF} + 3 \cdot \overline{EF} = 3 \cdot (\overline{DE} + \overline{DF} + \overline{EF}) = 3 \cdot 2p_{DEF}$$

cioè anche i perimetri hanno lo stesso rapporto di similitudine.

In vista del precedente esempio enunciamo il seguente risultato.

Teorema 8

In due triangoli simili il rapporto fra le corrispondenti aree è uguale al quadrato del rapporto di similitudine.

Dimostrazione Basta tenere conto della formula per il calcolo dell'area di un triangolo e del teorema 6.

Ecco un esempio.

Esempio 11

Se i triangoli ABC e DEF sono simili di rapporto $\frac{3}{5}$, vuol dire che, per esempio si ha: $\overline{AB} = \frac{3}{5} \cdot \overline{DE}$, e quindi

anche, per il Teorema 6, la relazione fra le relative altezze: $\overline{CH} = \frac{3}{5} \cdot \overline{FK}$. Passando perciò alle aree avremo:

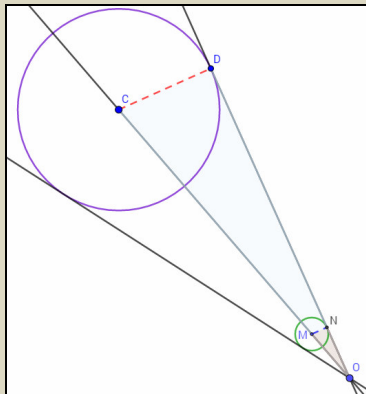
$$S_{ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \overline{DE} \cdot \frac{3}{5} \cdot \overline{FK}}{2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \frac{\overline{DE} \cdot \overline{FK}}{2} = \frac{9}{25} \cdot S_{DEF}$$

Verifiche

Lavoriamo insieme

Sappiamo che in media la luna dista dalla terra 384250 km (363000 km in perigeo e 405500 km in apogeo) e ha un diametro di 3473 km . Chiudiamo un occhio e dinanzi all'altro occhio mettiamo una moneta da € 2,00 il cui diametro è $2,5 \text{ cm}$. Qual è la massima distanza dall'occhio a cui dobbiamo tenere la moneta perché essa copra completamente la luna?

Naturalmente se copriamo completamente il nostro occhio con la moneta, non vedremo un bel niente, non solo la luna, allontanando la moneta, tenuta sempre sulla linea ideale che congiunge il nostro occhio con il centro della luna, invece la visuale dovrebbe pian piano aumentare. Vediamo di effettuare un modello geometrico. Modellizziamo sia la moneta che la luna con dei cerchi, supponiamo che la nostra vista sia assimilabile a un raggio che parte dal nostro occhio supposto puntiforme. Abbiamo così la rappresentazione mostrata in figura, per ovvi motivi non in scala.



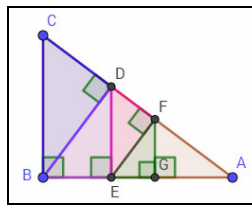
Solo se siamo nella configurazione mostrata accadrà ciò che richiediamo. È facile notare che i triangoli rettangoli OMN e OCD sono simili. A noi interessa conoscere la lunghezza di OM , conoscendo $OC = 384\,250 \text{ Km}$, $CD = 1736,5 \text{ Km}$, $MN = 1,25 \text{ cm}$. Possiamo allora scrivere:

$$\overline{OM} : \overline{OC} = \overline{MN} : \overline{CD} \Rightarrow \overline{OM} = \frac{\overline{OC} \cdot \overline{MN}}{\overline{CD}} = \frac{384250 \cdot 10^5 \cdot 125 \cdot 10^{-2}}{1736,5 \cdot 10^5} = \frac{38425 \cdot 125}{17365} \approx 276 \text{ cm}$$

Quindi se la moneta sta in un rango che va da 0 a $2,76 \text{ m}$ dal nostro occhio la luna è completamente coperta, per distanze maggiori ciò non accade.

Livello 1

- Risolvere il problema della moneta e della luna per monete da € 0,01 (diametro $1,5 \text{ cm}$), € 0,02 o € 0,10 (diametro $1,8 \text{ cm}$), € 0,05 o € 0,2 (diametro $2,00 \text{ cm}$), € 0,50 o € 1,00 (diametro $2,3 \text{ cm}$).
[$\approx 1,66 \text{ m}$; $\approx 1,99 \text{ m}$; $\approx 2,21 \text{ m}$; $\approx 2,54 \text{ m}$]
- Risolvere il problema della moneta e del sole, che ha un diametro di $1,4$ milioni di km e una distanza media dalla terra di 150 milioni di km , per tutte le monete in euro.
[$\approx 1,61 \text{ m}$; $\approx 1,93 \text{ m}$; $\approx 2,14 \text{ m}$; $\approx 2,46 \text{ m}$; $\approx 2,68 \text{ m}$]
- La massima distanza da cui guardiamo un disco circolare in modo che esso copra completamente la luna è 5 m . Determinare il diametro del disco.
[$\approx 4,52 \text{ cm}$]
- Ponendoci a 3 m da un disco circolare poniamo davanti a un occhio una moneta da € 0,20. La massima distanza alla quale portiamo la moneta dal nostro occhio, in modo da coprire completamente il disco è 1 m . Determinare il diametro del disco.
[$7,5 \text{ cm}$]
- Di un triangolo rettangolo conosciamo la misura di un cateto, 5, e quella dell'altezza relativa all'ipotenusa, 4. Determinarne il perimetro.
[20]
- Il triangolo ABC ha lati lunghi 7, 8, 9. Il triangolo $A'B'C'$ è simile ad ABC e ha perimetro lungo 15, determinare le lunghezze dei lati di $A'B'C'$.
[$\frac{35}{8}, 5, \frac{45}{8}$]



7. Provare che tutti i triangoli rettangoli segnati in figura sono simili al triangolo rettangolo ABC .
8. Con riferimento all'esercizio precedente, se il triangolo ABC ha i lati lunghi 6, 8, 10, determinare i perimetri dei triangoli ABD , BDE e DEF . [19,2; 11,52; 6,912]

Livello 2

9. Due triangoli sono simili, del primo conosciamo le lunghezze dei lati (a, b, c) , dell'altro il perimetro P .

Determinare le lunghezze dei lati del secondo triangolo.

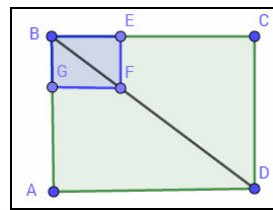
$$\left[\frac{a \cdot P}{a+b+c}, \frac{b \cdot P}{a+b+c}, \frac{c \cdot P}{a+b+c} \right]$$

10. Il triangolo ABC ha lati lunghi 7, 8, 9. Il triangolo $A'B'C'$ è simile ad ABC e ha area 10, determinare le lunghezze dei lati di $A'B'C'$. *Suggerimento:* per determinare l'area di ABC usare la formula di Erone:

$$\sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

$$\left[\frac{7 \cdot \sqrt[4]{180}}{6}, \frac{4 \cdot \sqrt[4]{180}}{3}, \frac{3 \cdot \sqrt[4]{180}}{2} \right]$$

11. ABC e $A'B'C'$ sono fra loro simili. I lati di ABC sono lunghi 5, 6, 7, un lato di $A'B'C'$ è lungo 10. Determinare tutti i possibili valori che può assumere il perimetro di $A'B'C'$. $\left[36; 30; \frac{180}{7} \right]$



12. In figura $\overline{AB} = 12$, $\overline{BE} = 4$, $\overline{BF} = 5$, determinare l'area di $ABCD$. [192]

13. Con riferimento al precedente esercizio, determinare la lunghezza di BF se

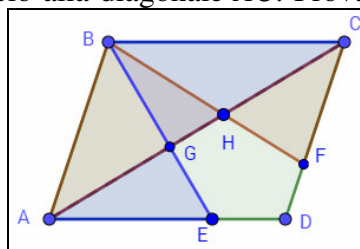
$$\overline{AB} = 8, \overline{BE} = 4, S_{ABCD} = 120.$$

$$\left[\frac{68}{15} \right]$$

14. Sul segmento CD lungo 114, si fissa un punto P e si costruiscono i triangoli rettangoli simili ACP e BPD , di ipotenuse AP e BP . Sapendo che i cateti AC e BD sono lunghi rispettivamente 13 e 65, determinare la lunghezza della minore delle due parti in cui è diviso CD da P . [19]

15. Dati due triangoli non uguali aventi due angoli fra di loro uguali, riportare con riga e compasso il triangolo minore sul maggiore.

16. Nel parallelogramma in figura EF è parallelo alla diagonale AC . Provare che i triangoli ABH e CFH



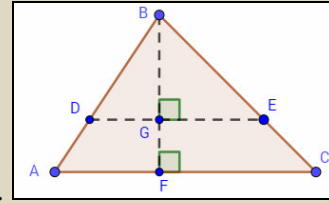
sono simili, così come lo sono AGE e BCH .

17. Con riferimento al precedente esercizio, determinare il rapporto $\frac{\overline{AG}}{\overline{HC}}$.

[1]

Lavoriamo insieme

In figura $\frac{BD}{AB} = \frac{2}{3}$, $S_{ADEC} = 20$, vogliamo determinare l'area di ABC . Naturalmente

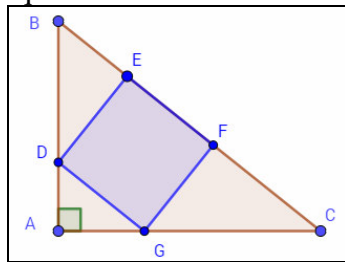


BED e ABC sono simili di rapporto $\frac{2}{3}$, quindi il rapporto fra le loro aree è $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$. Ma allora

$$S_{ADEC} = S_{ABC} - S_{BDE} = S_{ABC} - \frac{4}{9} \cdot S_{ABC} = \frac{5}{9} \cdot S_{ABC} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{9}{5} \cdot S_{BDE} = \frac{9}{5} \cdot 20 = 36$$

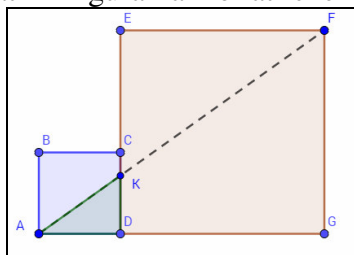
Livello 1

18. In un triangolo ABC tracciamo la parallela al lato BC , determinando il triangolo ADE . Se così facendo il rapporto fra le aree dei due triangoli è 4, determinare il rapporto in cui la parallela taglia i due lati. [2]
19. Con riferimento al problema precedente. Se il rapporto in cui sono divisi i lati è $\frac{5}{8}$ e il trapezio $BCDE$ ha area 39, determinare l'area di AED . [25]
20. Con riferimento al problema precedente. Se il rapporto in cui sono divisi i lati è $\frac{2}{5}$ e ABC ha area 100, determinare l'area del trapezio $BCDE$. [84]
21. In figura $DEFG$ è un quadrato inscritto nel triangolo rettangolo ABC . Provare che EF è medio propor-



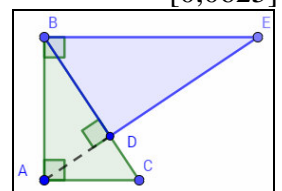
zionale fra BF e FC .

22. Con riferimento al precedente esercizio, determinare EF conoscendo le lunghezze di BE ed FC , 4 e 6 rispettivamente. $[2 \cdot \sqrt{6}]$
23. I due quadrati in figura hanno lati che misurano rispettivamente 2 cm e 5 cm. Trovare l'area del triangolo AKD . $[\frac{10}{7} \text{ cm}^2]$



golo AKD .

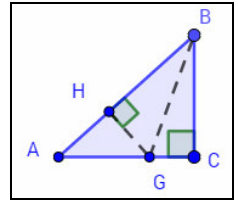
24. Con riferimento al precedente esercizio, sapendo che $\overline{BC} = 5$, $S_{AKD} = 10$, determinare la lunghezza di EF . [20]
25. Con riferimento al precedente esercizio, sapendo che $\overline{EF} = 3$, $S_{DKFG} = 8$, determinare l'area di AKD . [0,0625]



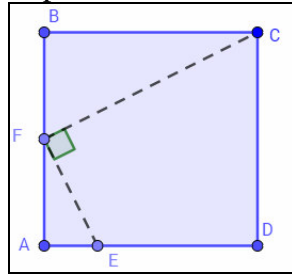
26. In figura gli angoli segnati sono retti, determinare tutti i triangoli fra loro simili.

Livello 2

27. Un problema tratto dall'Algebra di Al Khwarizmi, del 820 d.C. Un pezzo di terra triangolare ha due lati lunghi 10 e uno lungo 12. Quanto misura il lato del massimo quadrato inscrivibile nel triangolo in modo che un suo lato appartenga al lato maggiore? [2,4]
28. Trovare l'area del quadrato inscritto in un triangolo isoscele di base 12 e area 48. [23,04 m²]



29. Nel triangolo in figura $\overline{GH} = 4$, $\overline{AB} = 12$, $\overline{BC} = 8$, determinare la misura di AG . [6]
30. Dato il quadrato $ABCD$ si scelgono due punti E e F sui suoi lati AB e AD rispettivamente, in modo che EF ed EC siano fra loro perpendicolari. Provare che AFE è simile a BEC e a FDC .
31. Nel quadrato $ABCD$ in figura, F è punto medio di AB , $FE \perp FC$, $\overline{AE} = 1$. Determinare la misura del



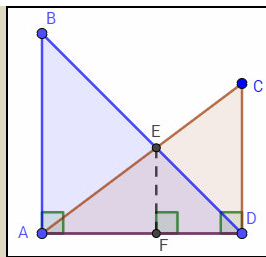
lato del quadrato.

[4]

Livello 3

32. Con riferimento al problema 24, se $\overline{BC} = 1$, $S_{AKD} = k$, determinare per quali valori di k il problema ha soluzione. $\left[0 < k < \frac{1}{2} \right]$
33. Con riferimento all'esercizio 23, determinare il valore dell'area di AKD nell'ipotesi in cui i lati dei quadrati misurano h e k , $h > k$. $\left[\frac{h \cdot k^2}{2 \cdot (h + k)} \right]$
34. Un antico problema cinese. Dato un triangolo rettangolo di cateti che misurano a e b . Determinare la lunghezza del lato del quadrato inscritto nel triangolo in modo che due suoi lati giacciono sui cateti. $\left[\frac{ab}{a + b} \right]$

Lavoriamo insieme



Tenuto conto della figura seguente e sapendo che $\overline{AB} = 12$, $\overline{CD} = 9$, determinare la misura di EF .

Si nota facilmente che i triangoli rettangoli ABD e EFD sono simili, quindi: $\overline{AB} : \overline{EF} = \overline{AD} : \overline{FD} \Rightarrow \overline{AD} = 12 \cdot \frac{\overline{FD}}{\overline{EF}}$.

Ma anche ACD e AEF sono simili, quindi anche: $\overline{CD} : \overline{EF} = \overline{AD} : \overline{AF} \Rightarrow \overline{AD} = 9 \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{EF}}$. Uguagliando i diversi

modi di esprimere la misura di DF , possiamo scrivere: $12 \cdot \overline{FD} = 9 \cdot \overline{AF} \Rightarrow 4 \cdot \overline{FD} = 3 \cdot \overline{AF} \Rightarrow \overline{FD} = \frac{3}{4} \cdot \overline{AF}$.

Dato che $AD = AF + FD$ avremo $\overline{AD} = \overline{AF} + \frac{3}{4} \cdot \overline{AF} = \frac{7}{4} \cdot \overline{AF}$. Perciò $\frac{7}{4} \cdot \overline{AF} = 9 \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{EF}} \Rightarrow \frac{7}{4} = \frac{9}{\overline{EF}} \Rightarrow \overline{EF} = \frac{36}{7}$.

Una cosa interessante da notare è che la misura di EF non dipende da AD , ma solo da AB e CD . In effetti si

ha:

$$\begin{aligned}\overline{AD} &= \overline{AB} \cdot \frac{\overline{FD}}{\overline{EF}} = \overline{CD} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{EF}} \Rightarrow \overline{FD} = \frac{\overline{CD} \cdot \overline{AF}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AD} = \overline{AF} + \overline{FD} = \overline{AF} + \frac{\overline{CD} \cdot \overline{AF}}{\overline{AB}} = \frac{(\overline{CD} + \overline{AB}) \cdot \overline{AF}}{\overline{AB}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \overline{EF} &= \frac{\overline{CD} \cdot \overline{AF}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CD} \cdot \overline{AF}}{(\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot \overline{AF}} = \frac{\overline{CD} \cdot \overline{AB}}{\overline{AB} + \overline{CD}}\end{aligned}$$

Possiamo scrivere questa relazione in modo più interessante: $\frac{1}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{\overline{CD} \cdot \overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD} \cdot \overline{AB}} + \frac{\overline{CD}}{\overline{CD} \cdot \overline{AB}} = \frac{1}{\overline{CD}} + \frac{1}{\overline{AB}}$.

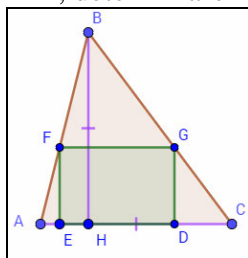
Questa proprietà, nota sotto il nome di legge delle inverse, ha un'equivalente in Ottica, nella cosiddetta *formula delle lenti sottili*: $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, in cui f è la cosiddetta distanza focale, cioè la distanza fra la lente e il punto di convergenza dei raggi passanti per la lente, p e q sono invece le distanze della lente dall'oggetto e dalla sua immagine.

Livello 1

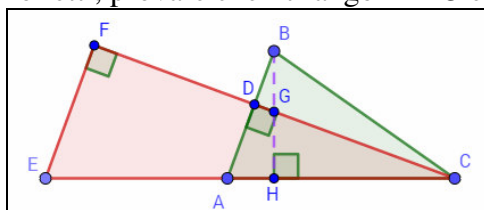
35. Provare che due triangoli che hanno un angolo uguale e le altezze relative ai lati dei detti angoli nella stessa proporzione, sono simili.
36. Provare che due triangoli che hanno le altezze relative ai lati nella stessa proporzione, sono simili.
37. Provare che due parallelogrammi per i quali il rapporto fra i lati è uguale a quello di due altezze sono simili.
38. Provare che due trapezi che hanno gli angoli ordinatamente uguali e in cui il rapporto delle basi (minori o maggiori) è uguale al rapporto delle altezze, sono simili.
39. Provare che due trapezi per cui il rapporto delle basi minori e maggiori è uguale al rapporto delle altezze, sono simili.
40. Dato un quadrilatero convesso inscritto in un cerchio. Provare che le sue diagonali lo dividono in quattro triangoli, a due a due simili tra di loro.

Livello 2

41. Nel triangolo in figura si ha: $\overline{BH} = \overline{AC} = 1$, determinare il perimetro del rettangolo $DEFG$. [2]



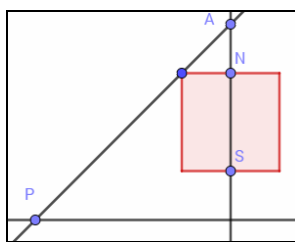
42. Con riferimento al problema precedente, dedurre che tutti i rettangoli inscritti in un triangolo in cui un lato e la relativa altezza sono uguali, hanno lo stesso perimetro. Quindi trovare il valore di tale perimetro in funzione della lunghezza dell'altezza. $[2 \cdot \overline{BH}]$
43. In figura gli angoli segnati sono retti, provare che i triangoli EFC e ABH sono simili.



44. Con riferimento al precedente esercizio, se AH e DF sono uguali e AB è lungo 5, determinare la lunghezza di EA . [5]
45. ABC e $A'B'C'$ sono fra loro simili. I lati di ABC sono lunghi 8, 10, 12, un lato di $A'B'C'$ è lungo h . Determinare il minimo valore intero di h , per cui tutti i lati di $A'B'C'$, sono interi, quale che sia la corrispondenza di similitudine fra i lati. [120]
46. Due triangoli rettangoli sono simili, provare che il prodotto delle ipotenuse è uguale alla somma dei

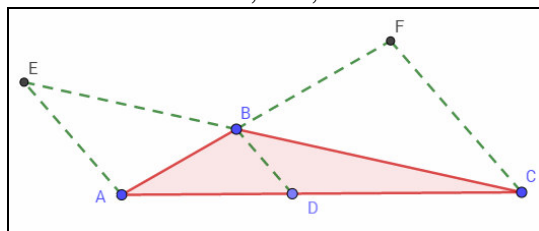
prodotti dei cateti omologhi. *Suggerimento:* utilizzare il teorema di Pitagora sui due triangoli, quindi sottrarre membro a membro le uguaglianze.

47. Esistono due triangoli simili ma non uguali che hanno anche un lato uguale a uno dell'altro triangolo? Giustificare la risposta. [Sì]

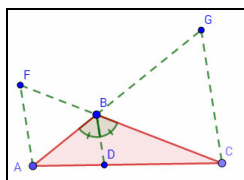


48. Un antico problema cinese. In figura è rappresentata una città a pianta quadrata, attraversata centralmente da una strada rettilinea che collega le due porte che danno a nord (N) e a sud (S). Sapendo che a 20 passi da N è piantato un albero (A) e che questo è visibile dal punto P che si raggiunge da S facendo 14 passi verso sud e 1775 verso ovest, determinare la misura dell'area racchiusa dalla città. (La figura non è in scala) [62500 passi quadrati]

49. Nel triangolo in figura D è scelto a caso su AC; AE, BD e FC sono paralleli. Provare che si ha:

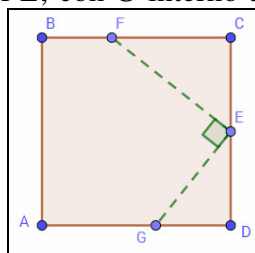


$$\frac{1}{AE} + \frac{1}{CF} = \frac{1}{BD}.$$



50. Nel triangolo in figura si ha $\angle ABD = \angle DBC = 60^\circ$, AF, BD e GC sono paralleli. Sapendo che $AB = 10$, $BC = 13$, determinare la lunghezza di BD. *Suggerimento:* Usare l'esercizio precedente, dopo avere provato che i triangoli AFB e BGC sono $\left[\frac{130}{23} \right]$

51. Sia ABCD un quadrato di lato unitario e sia F un qualunque punto interno a BC. Sia E il punto di mezzo di CD e GE sia perpendicolare a FE, con G interno a DA. Quanto vale il prodotto delle misure di



DG e FC?

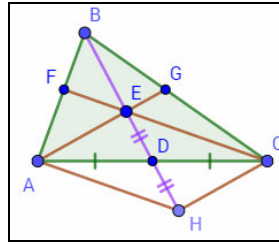
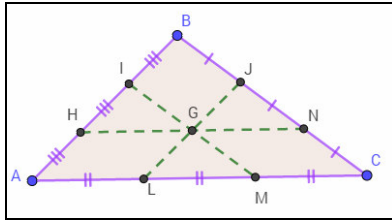
[0,25]

52. Nel triangolo ABC i lati AB e AC misurano rispettivamente 15 cm e 12 cm. Scegliamo due punti D ed E ciascuno su uno dei precedenti lati in modo che sia $AD = AE$. Costruire quindi il rombo ADFE, con F sul lato BC e determinare la misura del suo perimetro. $\left[\frac{80}{3} \text{ cm} \right]$

53. Il triangolo ABC ha il lato AB che misura 14 cm e le altezze CD e AE, entrambe interne al triangolo, che misurano rispettivamente 12 cm e $\frac{168}{13}$ cm. Determinare la misura del perimetro del triangolo ABC. [42 cm]

Livello 3

54. Per il baricentro di un triangolo tracciamo le parallele ai tre lati, dimostrare che in tal modo ciascun lato è suddiviso in tre parti fra loro uguali. *Suggerimento:* tenere conto delle proprietà del baricentro



55. In figura D è punto medio di AC e di EH . Se $\frac{\overline{BE}}{\overline{EH}} = k$, determinare $\frac{\overline{BF}}{\overline{AF}}$. Suggerimento: Provare che $AECH$ è un parallelogramma. [k]

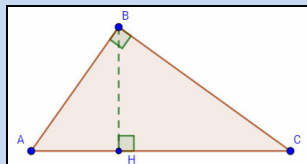
Importanti teoremi sulla similitudine

Grazie alla similitudine si possono facilmente dimostrare due teoremi che qui andiamo a enunciare in una diversa forma, rispetto a come li enunceremo nella prossima unità.

La prima dimostrazione è da completare a cura dell'alunno.

Teorema 9 (I teorema di Euclide)

In un triangolo rettangolo un cateto è medio proporzionale fra l'intera ipotenusa e la sua proiezione sulla stessa ipotenusa.



Ipotesi: $AB \perp BC$, $BH \perp AC$

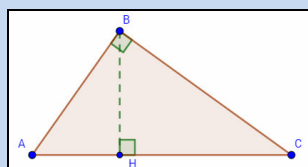
Tesi: $\overline{AH} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{AC}$; $\overline{HC} : \overline{BC} = \overline{BC} : \overline{AC}$

Schema Dimostrativo			
Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Consideriamo i triangoli ABH e ABC .	$ABH \sim ABC$	Per il primo criterio di similitudine, dato che sono rettangoli e hanno l'angolo $\hat{CAB}$ in comune.
2	Consideriamo i triangoli BCH e ABC .		
3		$\overline{AH} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{AC}$	Per il passo 1.
4		$\overline{HC} : \overline{BC} = \overline{BC} : \overline{AC}$	

Il secondo teorema invece è lasciato tutto da dimostrare.

Teorema 10 (II teorema di Euclide)

In un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale fra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.



Ipotesi: $AB \perp BC$, $BH \perp AC$

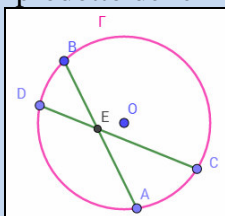
Tesi: $\overline{AH} : \overline{BH} = \overline{BH} : \overline{CH}$

Dimostrazione Per esercizio

Altre interessanti applicazioni della similitudine si hanno fra particolari elementi della circonferenza. In particolare abbiamo i seguenti risultati.

Teorema 11 (delle due corde)

In una circonferenza due corde incidenti sono divise dal loro punto comune in modo che il prodotto delle misure delle due parti dell'una uguaglia il prodotto delle misure delle due parti dell'altra.

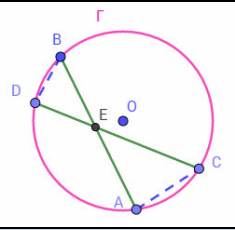
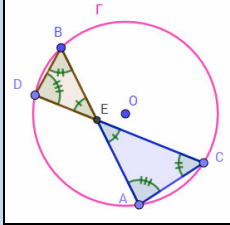


Ipotesi: $A, B, C, D \in \Gamma$; $AB \cap CD = \{E\}$

Tesi: $\overline{AE} \cdot \overline{EB} = \overline{CE} \cdot \overline{ED}$

Schema dimostrativo

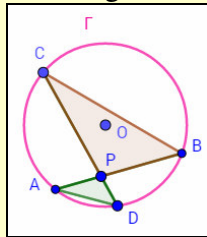
Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
-------	--------	-------------	-----------------

1	Uniamo A con C e B con D		
		Otteniamo i triangoli ACE e DBE	
2	Consideriamo i triangoli ACE e DBE	 Sono simili	Per il primo criterio di similitudine, dato che hanno: $\angle A\hat{E}C = \angle B\hat{E}D$, perché angoli opposti al vertice; $\angle E\hat{C}A = \angle D\hat{B}E$, perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco, AD
3		$\overline{AE} : \overline{ED} = \overline{EC} : \overline{EB}$	Per il passo 2
4		$\overline{AE} \cdot \overline{EB} = \overline{EC} \cdot \overline{ED}$	Proprietà fondamentale delle proporzioni.

Vediamo un esempio.

Esempio 12

Due corde di un cerchio si intersecano come in figura. Trovare la misura dell'area del triangolo PBC



sapendo che l'area di PAD è 8 m^2 e $\frac{\overline{AP}}{\overline{PC}} = \frac{2}{5}$.

Possiamo dire che i triangoli APD e PCB sono simili per il primo criterio di similitudine, con AP e PC lati omologhi. Poiché il rapporto tra le aree di due triangoli simili è il quadrato del rapporto di similitudine

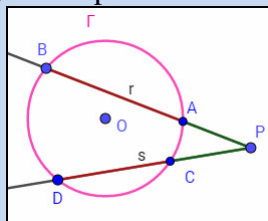
(teorema 8), abbiamo: $\frac{S_{PCB}}{S_{PAD}} = \left(\frac{\overline{PC}}{\overline{AP}}\right)^2 = \frac{25}{4}$. Da tale uguaglianza determiniamo la misura voluta:

$$S_{PCB} = \frac{25}{4} \cdot 8 \text{ m}^2 = 50 \text{ m}^2.$$

Vediamo un altro risultato sulle circonferenze.

Teorema 12 (delle due secanti)

Condotte da un punto P esterno a una circonferenza Γ , due rette a essa secanti, allora il prodotto delle misure di una secante per la sua parte esterna è uguale al prodotto dell'altra secante per la sua parte esterna.



Ipotesi: $r \cap \Gamma = \{A, B\}$; $s \cap \Gamma = \{C, D\}$

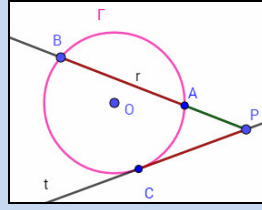
Tesi: $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$

Dimostrazione per esercizio, suggerendo di determinare una coppia di triangoli simili.

Nel teorema precedente con la frase "intera secante" in effetti indichiamo il segmento che unisce il punto P con l'intersezione più lontana da esso. Vediamo un caso particolare del precedente risultato.

Teorema 13 (della secante e della tangente)

Condotte per un punto P esterno a una circonferenza Γ , una retta r secante e una retta t tangente a Γ , allora il segmento di tangenza è medio proporzionale fra l'intera secante e la sua parte esterna.



Ipotesi: $r \cap \Gamma = \{A, B\}$; $s \cap \Gamma = \{C\}$

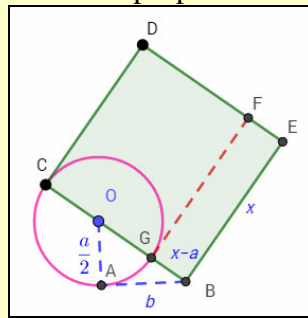
Tesi: $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC}^2$

Dimostrazione per esercizio

Il teorema 14 è un caso particolare del 13 perché se, nel teorema delle secanti pensiamo di spostare una delle due secanti, per esempio PD , fino a farla divenire tangente a Γ in C , tale punto andrà a coincidere con D .

Esempio 13

Come applicazione del precedente teorema consideriamo la soluzione geometrica dell'equazione $x^2 - ax - b^2 = 0$, con $a > 0$, che René Descartes ha proposto nella sua *Geometrie* del 1637.

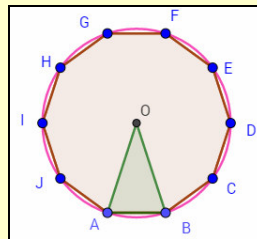


Nella costruzione è $\overline{AB} = b$; $\overline{OA} = \frac{a}{2}$; $\overline{BC} = x$ e $BCDE$ è il quadrato di lato BC . Applicando il teorema della tangente e della secante, si ha: $\overline{BC} \cdot \overline{BG} = \overline{BA}^2 \Rightarrow x \cdot (x - a) = b^2 \Rightarrow x^2 - ax - b^2 = 0$. Quindi il segmento BC è la *soluzione geometrica* dell'equazione data.

Vediamo un'altra interessante applicazione della similitudine.

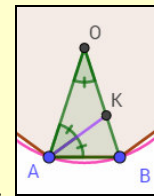
Esempio 14

In figura abbiamo disegnato il decagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio 1, vogliamo



determinare la lunghezza del lato del decagono.

Consideriamo il triangolo OBA che è chiaramente isoscele di base AB . Si ha: $\angle A\hat{O}B = 360^\circ : 10 = 36^\circ$ e $\angle O\hat{B}A = \angle B\hat{A}O = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$.



Adesso consideriamo la bisettrice dell'angolo in A , che incontra OB in K . Gli angoli indicati sono fra loro uguali e i triangoli BAK e AOK sono isosceli, di base KB e OA rispettivamente. Inoltre si ha anche $\angle A\hat{K}B = \angle K\hat{B}A = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$, quindi $BAK \sim AOB$, da cui $\overline{BK} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{AO}$. Ricaviamo

perciò la misura del lato del decagono: $\overline{AB} = \sqrt{\overline{BK} \cdot \overline{AO}} = \sqrt{\overline{BK}}$. Purtroppo però noi non conosciamo la

misura di BK . Per il teorema della bisettrice si ha: $\overline{AB} : \overline{AO} = \overline{BK} : \overline{OK} \Rightarrow \overline{AB} : \overline{AO} = \overline{BK} : (\overline{OB} - \overline{BK})$.

Sostituiamo le misure: $\overline{AB} : 1 = \overline{BK} : (1 - \overline{BK}) \Rightarrow \overline{BK} = \overline{AB} \cdot (1 - \overline{BK}) \Rightarrow \overline{BK} + \overline{AB} \cdot \overline{BK} = \overline{AB} \Rightarrow \overline{BK} = \frac{\overline{AB}}{1 + \overline{AB}}$.

Sostituiamo questo valore nella precedente espressione di $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = \sqrt{\frac{\overline{AB}}{1 + \overline{AB}}} \Rightarrow \overline{AB}^2 = \frac{\overline{AB}}{1 + \overline{AB}} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{1}{1 + \overline{AB}} \Rightarrow \overline{AB}^2 + \overline{AB} - 1 = 0 \Rightarrow \overline{AB} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

naturalmente consideriamo solo la soluzione positiva.

Poniamo alcune definizioni.

Definizione 4

- Dato un segmento, quella sua parte che lo divide in modo che essa sia media proporzionale fra la parte restante e l'intero segmento, si chiama **sezione aurea** del segmento.
- Delle due parti in cui viene diviso il segmento, una viene detta **media ragione** e l'altra **estrema ragione**.
- Il rapporto fra la sezione aurea di un segmento e l'intero segmento si chiama **rapporto aureo**.

Notazione 2

Il rapporto aureo si indica con la lettera greca ϕ . Questo simbolo è dovuto al matematico statunitense Mark Barr che nei primi anni del XX secolo, lo scelse perché iniziale del nome del famoso scultore greco dell'antichità Fidia, il quale ha scolpito diverse statue in cui si può rintracciare il rapporto aureo.

L'angolo storico

Sin dall'antichità la sezione aurea di un segmento ha appassionato i matematici, e non solo essi. Sono stati fatti diversi studi per dimostrare che la divisione di un segmento in media ed estrema ragione è la più "godibile" da un punto di vista estetico. Tanto è vero che molti monumenti antichi (il Partenone ad Atene è il più famoso di essi) sono stati progettati in modo che le proporzioni delle loro dimensioni garantissero tale proporzione. In seguito gli studi sono stati estesi anche al corpo umano e a vari organismi naturali, trovando sempre risultati che sorprendentemente determinavano strette connessioni con la sezione aurea. I motivi di tale nome sono dovuti proprio a quanto abbiamo appena accennato. Addirittura nel 1509 frate Luca Pacioli, importante matematico dell'epoca, scrive un trattato dedicato alla sezione aurea, intitolato *De divina proportion*, lavoro ancora più importante perché illustrato da Leonardo da Vinci. A tale avviso riportiamo la seguente opinione del grande matematico e astronomo Keplero, quello delle famose leggi sulle orbite dei pianeti: *La geometria ha due grandi tesori: uno è il Teorema di Pitagora; l'altro, la divisione di una linea in media ed estrema ragione. Possiamo paragonare il primo a una misura d'oro, e chiamare il secondo un prezioso gioiello.*

Tenuto conto del precedente esempio possiamo dire di avere dimostrato il seguente risultato.

Teorema 14

Il lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza è la sezione aurea del raggio della circonferenza a esso circoscritta.

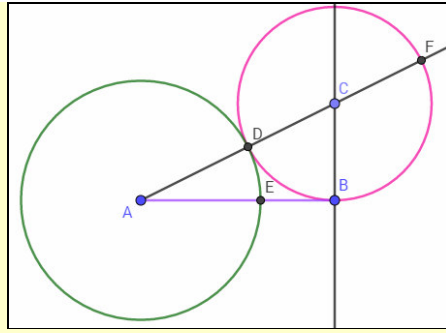
Esempio 15

Riprendendo l'esempio precedente il valore del rapporto aureo vale perciò: $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$.

Possiamo anche fornire una costruzione geometrica del punto che divide un segmento in media ed estrema ragione.

Esempio 16

Nella figura seguente noi diciamo che E è il punto che divide il segmento AB in media ed estrema ragione

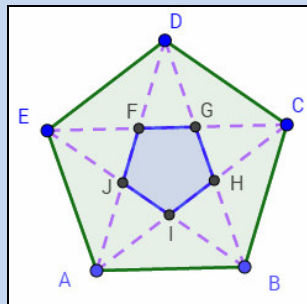


Spieghiamo la costruzione. $BC \perp AB$, $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BC}$, AC unisce A con il centro della circonferenza, D è l'intersezione fra AC e la prima circonferenza; la seconda circonferenza ha centro in A e raggio AD . Allora per il teorema della secante e della tangente applicato alla circonferenza di centro C e al suo punto esterno A , abbiamo: $\overline{AB}^2 = \overline{AF} \cdot \overline{AD} = \overline{AF} \cdot \overline{AE} = (\overline{AD} + \overline{DF}) \cdot \overline{AE} = (\overline{AE} + 2 \cdot \overline{BC}) \cdot \overline{AE} = (\overline{AE} + \overline{AB}) \cdot \overline{AE}$. Nella precedente catena di uguaglianze abbiamo tenuto conto del fatto che AD e AE sono raggi della stessa circonferenza, così come DC e BC e che $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BC}$. Continuiamo la catena di uguaglianze precedente: $\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AB} \cdot \overline{AE} \Rightarrow \overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AB} \cdot \overline{AE} = \overline{AB} \cdot (\overline{AB} - \overline{AE}) = \overline{AB} \cdot \overline{EB}$. Abbiamo ottenuto quanto avevamo enunciato.

Infine consideriamo un'altra importante divisione di un segmento in media ed estrema ragione, ben nota ai pitagorici, i quali avevano addirittura usato tale figura nota sotto il nome di pentagramma o pentagono stellato, come il loro logo, per usare un termine moderno.

Teorema 15

Le diagonali di un pentagono regolare si dividono scambievolmente in media ed estrema ragione.

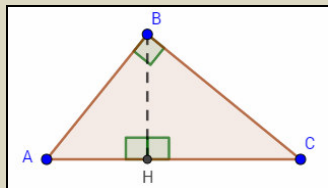


Non forniamo una dimostrazione del precedente risultato, non difficile, ma invitiamo lo studente a svolgerla da sé o con l'aiuto del docente.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Nel *Vija – Ganita* di Bhaskara, un matematico indiano vissuto nel XII secolo, si trova la seguente dimo-



strazione del teorema di Pitagora. I triangoli ABH e ABC sono evidentemente simili, perché sono retti e inoltre hanno l'angolo di vertice A in comune. Possiamo allora scrivere la seguente proporzione fra lati analoghi: $\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{AB}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{AC}$, Che altri non è che il I teorema di Euclide, nostro

teorema 10. Allo stesso modo, lavorando sui triangoli simili BHC e ABC : $\frac{\overline{HC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{BC}^2 = \overline{HC} \cdot \overline{AC}$, da cui, sommando membro a membro le due uguaglianze otteniamo:

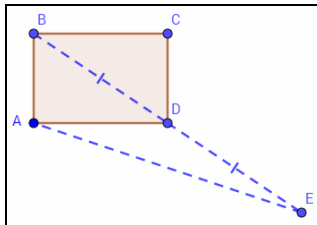
$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{AC} + \overline{HC} \cdot \overline{AC} = \overline{AC} \cdot (\overline{AH} + \overline{HC}) = \overline{AC} \cdot \overline{AC} = \overline{AC}^2$$

Che altri non è che il teorema di Pitagora.

Livello 1

1. Dimostrare il Teorema 10 o II teorema di Euclide avvalendosi della similitudine.
2. Il matematico francese Étienne Bezout, nel 1768 pubblicò una dimostrazione del teorema di Pitagora, considerando contemporaneamente la similitudine dei triangoli (con riferimento alla figura del box Lavoriamo insieme), ABH , HBC , ABC . Ripetere tale dimostrazione.
3. Con riferimento al problema precedente dimostrare il teorema di Pitagora considerando la proporzione fra area dei triangoli e quadrato di un lato.

Livello 2

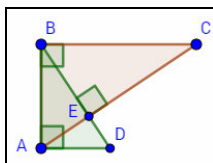


4. La diagonale del rettangolo $ABCD$ in figura è prolungata fino al punto E in modo che BD e DE siano uguali. Sapendo che $\overline{AB} = 2$, $\overline{BC} = 3$, determinare la misura di AE . *suggerimento*: costruire opportuni triangoli simili $[2 \cdot \sqrt{10}]$
5. Dato un segmento AB lungo 8, lo si divida in due segmenti AC e CB con il primo triplo del secondo. Si traccino le circonferenze di diametri AC e CB . Si costruisca una tangente comune alle due circonferenze che incontra la retta a cui appartiene AB nel punto D e le circonferenze rispettivamente in T e P . Determinare le misure di BD , DT e DP . $[1, 3 \cdot \sqrt{3}, \sqrt{3}]$

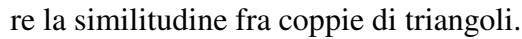
Livello 3

6. In figura gli angoli segnati sono retti. Determinare le lunghezze di tutti i lati incogniti in termini di

$$\overline{BE} = x, \overline{ED} = y. \left[\overline{AE} = \sqrt{xy}, \overline{AB} = \sqrt{x \cdot (x+y)}, \overline{AD} = \sqrt{y \cdot (x+y)}, \overline{EC} = \frac{x \cdot \sqrt{xy}}{y}, \overline{BC} = \frac{x \cdot \sqrt{y \cdot (x+y)}}{y} \right]$$



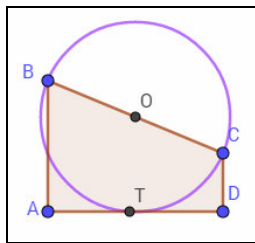
7. In figura il triangolo ABC è inscritto in una semicirconferenza, D è un punto sulla sua ipotenusa, E è l'intersezione fra la perpendicolare ad AC condotta per D e il prolungamento di AB , F e G sono le in-



Abbiamo fornito un'ennesima dimostrazione del teorema di Pitagora.

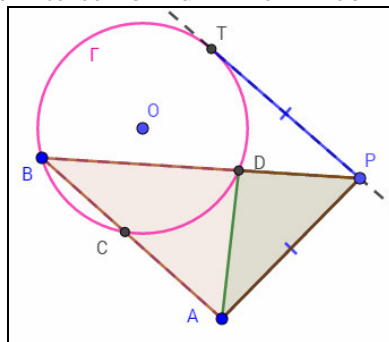
8. Da un punto P esterno ad una circonferenza tracciamo la tangente PA e la secante PBC . Sapendo che PA misura 8 cm e BC misura 12 cm , determinare la misura di PB . [4 cm]
9. Dimostrare il teorema 13.
10. Dimostrare il teorema 14.
11. È possibile che in una circonferenza vi siano due corde AB e CD non uguali incidenti in E , in modo che si abbia $\overline{AE} = \overline{CE}$? Giustificare la risposta. [No]
12. AB e CD sono due corde incidenti in E , $\overline{AE} = 3, \overline{AB} = 5, \overline{CD} = \overline{CE}$, determinare CD . [$2 \cdot \sqrt{6}$]
13. AB e CD sono due corde incidenti in E , $\overline{AB} = 5, \overline{CD} = 7, \overline{DE} = 2$, determinare AE . [Impossibile]
14. AB e CD sono due corde incidenti in E , $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{CD}; \overline{CE} = 1; \overline{AE} = 3$, determinare AB . [3,2]
15. Da un punto P esterno a una circonferenza tracciamo le secanti PAB e PCD . Sapendo che $\overline{PA} = 3, \overline{PD} = 7, \overline{CD} = 1$, determinare la lunghezza di AB . [11]
16. Da un punto P esterno a una circonferenza tracciamo le secanti PAB e PCD . Sapendo che $\overline{PA} = \overline{PC}, \overline{AB} = 3, \overline{PD} = 5$, determinare la lunghezza di PB . [5]
17. Da un punto P esterno a una circonferenza tracciamo le secanti PAB e PCD . Sapendo che $\overline{PA} = \overline{PC}, \overline{AB} = 3, \overline{CD} = 2$, determinare la lunghezza di PB . [Impossibile]
18. Da un punto P esterno a una circonferenza tracciamo le secanti PAB e PCD . Sapendo che $\overline{PA} = \overline{PC}, \overline{AD} = 3, \overline{PC} = 2$, determinare la lunghezza di PB . [Indeterminato]
19. Da un punto P esterno a una circonferenza tracciamo le secanti PAB e PCD . Sapendo che $\overline{BC} = 4, \overline{AD} = 5, \overline{PB} = 8$, determinare la lunghezza di PD . [10]
20. Da un punto P esterno a una circonferenza tracciamo la secante PBC e la tangente PA . Sapendo che AC è un diametro e che $\overline{PA} = 6, \overline{AC} = 8$, determinare la lunghezza del perimetro di ABC . [19,2]
21. Da un punto P esterno a una circonferenza di centro O tracciamo la secante PBC e la tangente PA . Sapendo che AC è un diametro, $\overline{PC} = 15$, OBC ha perimetro 6, determinare la lunghezza del perimetro di APC . [circa 33,87]

249



22. Con riferimento alla figura $ABCD$ è un trapezio rettangolo, AD è tangente in T alla circonferenza di centro O e diametro BC . Sapendo che $\overline{AB} = 6$; $\overline{CD} = 2$, determinare l'area di $ABCD$.
Suggerimento: prolungare BC fino a toccare il prolungamento di AD . $[16 \cdot \sqrt{3}]$

23. Da un punto P esterno a una circonferenza Γ tracciamo una tangente che tocca Γ in T . Sia un altro punto A esterno a Γ , in modo che PA e PT siano fra loro uguali. Congiungiamo A e P con un qualsiasi punto B di Γ . Diciamo C e D le intersezioni di AB e PB con Γ . Provare che PAD e APB sono fra loro



simili.

Lavoriamo insieme

Il numero ϕ che indica il rapporto aureo può trovarsi anche mediante delle interessanti relazioni aritmetiche.

Una di esse è la seguente, consideriamo il numero così definito: $\tau = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$. In cui le frazioni sono

infinite e sono tutte dello stesso tipo. Frazioni di questo genere si chiamano frazioni continue. La giustificazione del perché valga questa identità è semplice. Infatti dato che le frazioni sono infinite, possiamo scrivere semplicemente: $\tau = 1 + \frac{1}{\tau}$. Perciò possiamo determinare il valore del numero τ risolvendo l'equazione:

$\tau^2 - \tau - 1 = 0$, le cui soluzioni si ricavano facilmente: $\tau = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Al solito dobbiamo eliminare la soluzione negativa e troviamo un numero che è di 1 maggiore del rapporto aureo.

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{1 + \sqrt{5} - 2}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Utilizzando quindi l'espansione in frazione continua possiamo calcolare un valore approssimato di ϕ :

$$\phi \approx 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} - 1 = \frac{1}{2} = 0,5$$

che è un valore molto lontano dal vero. Aumentiamo il numero delle frazioni da valutare

$$\phi \approx 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} - 1 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5} = 0,6$$

che è un valore migliore del precedente, più vicino al valore esatto, che fino alle prime 10 cifre decimali è 0,6180339887.

Livello 1

24. Calcolare il rapporto aureo di un segmento lungo 3.

$$\left[3 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right]$$

25. Calcolare la lunghezza di un segmento la cui parte aurea è 1.

$$\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right]$$

26. Calcolare la parte aurea della parte aurea di un segmento lungo 1.

$$\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right]$$

Livello 2

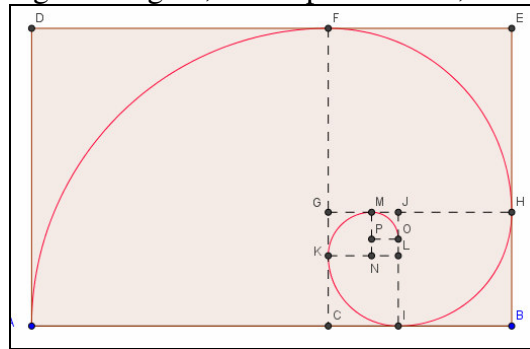
27. Chiamiamo successione di Fibonacci quella definita dalla seguente legge: 1, 1, 1+1=2, 1+2=3, 2+3=5, 3+5=8, 5+8=13, ... in cui, a parte i primi due termini, gli altri sono somma dei due che li precedono. Verificare che la successione dei rapporti di due termini consecutivi della successione di Fibonacci,

$\left\{ 1, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \dots \right\}$ equivale alla frazione continua presentata nel box Lavoriamo insieme.

28. Utilizzando lo sviluppo di ϕ in frazione continua, determinare un suo valore approssimato con 10 livelli di frazione.

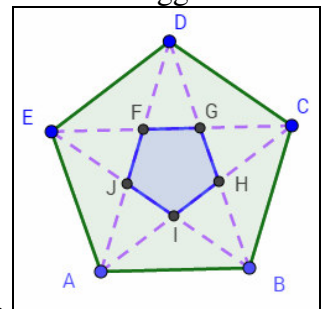
$$\left[\frac{55}{89} \approx 0,617977 \right]$$

29. Diciamo rettangolo aureo, un rettangolo i cui lati sono tali che uno è la sezione aurea dell'altro, costruire, usando Geogebra, la seguente figura, detta spirale aurea, in cui tutti i rettangoli disegnati sono



aurei.

30. Dato un triangolo rettangolo ABC , di ipotenusa AC in cui il cateto AB è metà dell'altro cateto BC . Provare che la differenza fra l'ipotenusa e il cateto minore è la sezione aurea del cateto maggiore.



31. Dimostrare il teorema 16. *Suggerimento:* ragionare sui triangoli AIB e IEC .

Quelli che vogliono sapere di più ...

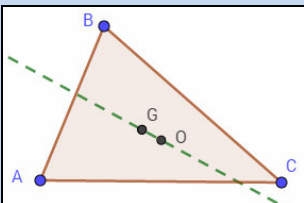
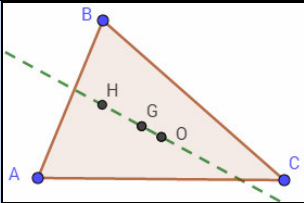
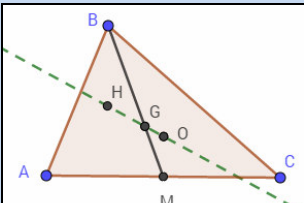
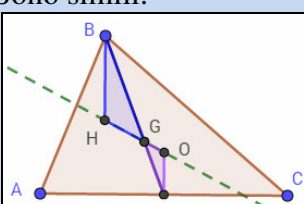
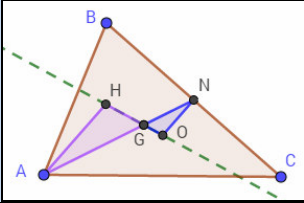
Retta di Eulero e cerchio dei 9 punti. Nozioni di trigonometria

In questa parte vogliamo considerare alcuni risultati poco noti. Cominciamo con il seguente che riguarda un'interessante proprietà che accomuna baricentro, circocentro e ortocentro.

Teorema 16

In ogni triangolo non equilatero, baricentro, circocentro e ortocentro sono allineati. La retta che li contiene si chiama retta di Eulero.

Dimostrazione Proponiamo uno schema da completare.

Schema dimostrativo			
Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Sia ABC non equilatero.	Consideriamo la retta che passa per il circocentro O e il baricentro G .	
			
2	Scegliamo H sulla retta precedente in modo che si abbia $\overline{GH} = 2 \cdot \overline{OG}$.		
3	Consideriamo la mediana BM .	Si ha: $\overline{BG} = 2 \cdot \overline{GM}$	
			
4	Consideriamo i triangoli BHG e GOM .	Sono simili.	
			
5	Consideriamo BH e OM	Sono paralleli	La retta per OH forma con essi angoli
6	Consideriamo BH	È un pezzo dell'altezza condotta da B .	OM fa parte dell'asse di AC , quindi
7	Consideriamo i triangoli AHG e GNO , con N punto medio di BC	Sono simili	
			

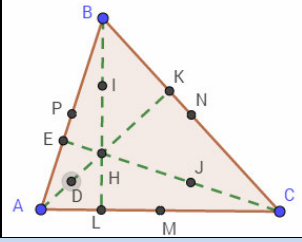
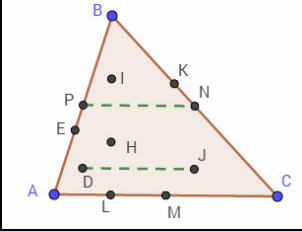
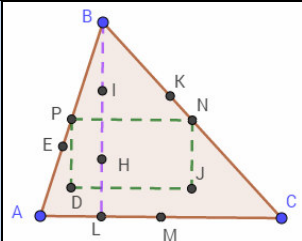
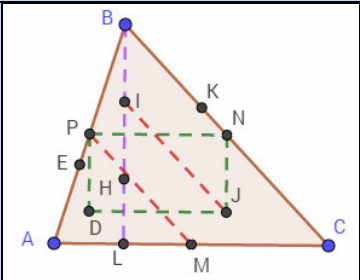
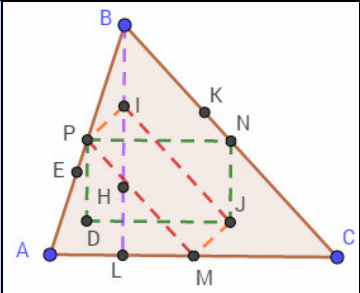
8	Consideriamo AH	È un pezzo dell'altezza condotta da A .	
9	Consideriamo H .	È l'ortocentro.	Tesi

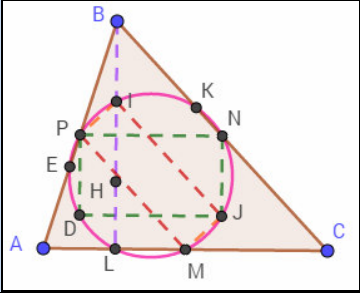
Vediamo un risultato ancora più sorprendente.

Teorema 17

In un triangolo i punti medi dei lati, i punti medi dei segmenti che congiungono l'ortocentro con i vertici e i piedi delle altezze appartengono a uno stesso cerchio, detto cerchio di Feuerbach o dei 9 punti.

Dimostrazione Proponiamo uno schema da completare.

Schema dimostrativo			
Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Siano M, N, P i punti medi dei lati; H l'ortocentro; D, I, J i punti medi dei segmenti AH, BH, CH ; E, L, K i piedi delle altezze.		
2	Consideriamo PN e DJ	 Sono paralleli ad AC .	
3	Consideriamo PD e NJ .	 Sono paralleli a BL	
4	Consideriamo IJ e PM .	 Sono paralleli a AC	
5	Consideriamo IP e JM	 Sono paralleli a AC	
6	Consideriamo $PIJM$ e $PNJD$	Sono	
7	Consideriamo IM, PJ e ND	Sono diametri di uno stesso	

		cerchio	
8	Tracciamo il cerchio per <i>EKL</i> .	Passa per gli altri 6 punti. 	

Concludiamo trattando dal punto di vista matematico le funzioni goniometriche che hai già cominciato ad usare in fisica.

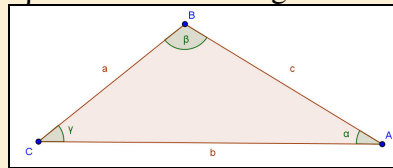
Definizione 5

Dato un triangolo diciamo sua **risoluzione** la determinazione delle misure di tutti i suoi lati e di tutti i suoi angoli.

La disciplina matematica che si occupa della risoluzione dei triangoli viene chiamata **trigonometria**, che letteralmente significa "misura dei triangoli". Vediamo come risolvere i triangoli rettangoli, ma prima stabiliamo alcune convenzioni di scrittura, che ci aiuteranno a semplificare il linguaggio.

Notazione 3

In un triangolo ABC , indichiamo con a la misura di BC , con b la misura di AC e con c la misura di AB ; con α la misura dell'angolo di vertice A , con β la misura dell'angolo di vertice B e con γ la misura dell'angolo di



vertice C .

Tenuto conto della similitudine dei triangoli possiamo dire che il rapporto di due lati deve determinare l'angolo che essi formano. Poiché i lati in un triangolo sono tre e i possibili rapporti a due a due sono 6 potremmo definire 6 diverse funzioni per gli angoli, noi ci limiteremo a definire solo le tre incontrate in fisica.

Definizione 6

Dato un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa BC , chiamiamo **seno** di un suo angolo acuto il rapporto fra la misura del cateto opposto all'angolo e la misura dell'ipotenusa.

Notazione 4

Il seno di un angolo x si indica con $\sin(x)$. Con riferimento al triangolo ABC si ha: $\sin(\beta) = \frac{b}{a}$, $\sin(\gamma) = \frac{c}{a}$.

Definizione 7

Dato un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa BC , chiamiamo **coseno** di un suo angolo acuto il rapporto fra la misura del cateto adiacente all'angolo e la misura dell'ipotenusa.

Notazione 5

Il coseno di un angolo x si indica con $\cos(x)$. Con riferimento al triangolo ABC : $\cos(\beta) = \frac{c}{a}$, $\cos(\gamma) = \frac{b}{a}$.

Osserviamo che $\sin(\beta) = \cos(\gamma)$ e $\sin(\gamma) = \cos(\beta)$. In effetti il motivo per cui usiamo la parola coseno sta proprio nel fatto che se β e γ sono due angoli complementari (e gli angoli acuti di un triangolo rettangolo lo sono certamente), allora il seno di ciascuno dei due angoli è sempre uguale al coseno dell'altro. Inoltre sia il

seno che il coseno di un angolo acuto sono numeri positivi e minori di 1, essendo rapporto fra cateto e ipotenusa di uno stesso triangolo rettangolo.

Definizione 8

Dato un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa BC , chiamiamo **tangente** di un suo angolo acuto il rapporto fra la misura del cateto opposto all'angolo e la misura dell'altro cateto.

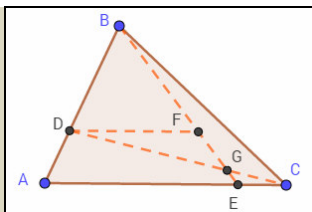
Notazione 6

La tangente di un angolo x si indica con $\tan(x)$. Con riferimento al triangolo ABC : $\tan(\beta) = \frac{b}{c}$, $\tan(\gamma) = \frac{c}{b}$.

Per gli approfondimenti rimandiamo agli anni successivi.

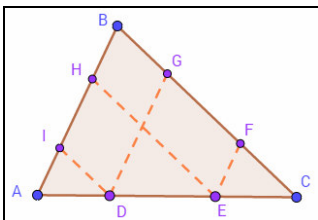
Verifiche

Lavoriamo insieme

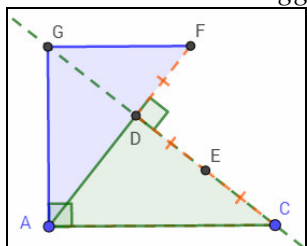


Nel triangolo in figura si ha: $\overline{BD} = 2 \cdot \overline{AD}$, $\overline{AE} = 4 \cdot \overline{EC}$, $DF \parallel AC$. Determinare $\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}$. I due triangoli GDF e GCE sono simili, dato che hanno gli angoli opposti al vertice $\angle F\hat{G}D = \angle E\hat{G}C$ e inoltre $\angle G\hat{D}F = \angle G\hat{C}E$ perché alterni interni rispetto alle parallele DF e AC tagliate da CD . Pertanto abbiamo: $\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{DF}}$. D'altro canto anche $ABE \sim DBF$ e perciò $\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{DF}} \Rightarrow \overline{DF} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{AE}}{\overline{AB}}$, ma dato che $\overline{BD} = 2 \cdot \overline{AD} \Rightarrow \overline{BD} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AB}$, quindi $\overline{DF} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AE} = \frac{2}{3} \cdot 4\overline{CE} = \frac{8}{3} \cdot \overline{CE}$. Infine $\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{CE}}{\frac{8}{3} \cdot \overline{CE}} = \frac{3}{8}$.

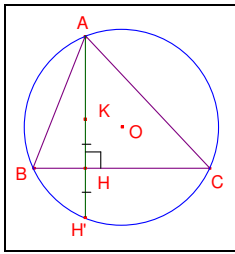
Livello 3

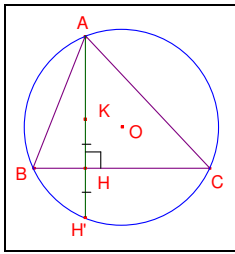


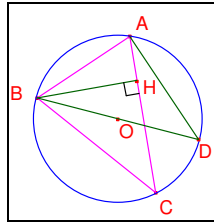
- In figura si ha: $AB \parallel DG \parallel EF$, $BC \parallel DI \parallel EH$. Provare che si ha: $FG : HI = BC : AB$.
- Con riferimento al precedente esercizio, se FG e HI sono uguali, che tipo di triangolo è ABC ? Isoscele
- Nel triangolo ABC , AD è bisettrice dell'angolo di vertice A e CE bisettrice dell'angolo di vertice C .
Provare che $\frac{\overline{AD} \cdot \overline{EB}}{\overline{DB} \cdot \overline{CE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$.
- Nel triangolo ABC , BD è bisettrice dell'angolo B . Provare che $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = \overline{BD}^2 + \overline{AD} \cdot \overline{DC}$.
- In figura D è un punto sull'ipotenusa BC , E ed F sono le sue proiezioni sui cateti. Provare che si ha: $\overline{CD} \cdot \overline{BD} = \overline{CF} \cdot \overline{FA} + \overline{AE} \cdot \overline{EB}$. *Suggerimento*: tracciare l'altezza EH nel triangolo DEB .

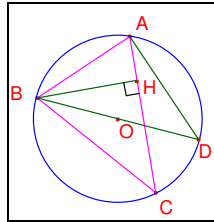


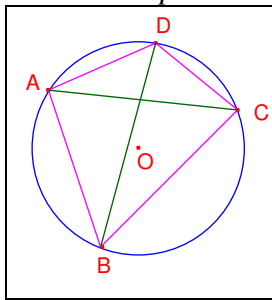
- In figura $\overline{CD} = 2 \cdot \overline{DF}$ e gli angoli segnati sono retti. Provare che $\overline{DG} = \sqrt[3]{2} \cdot \overline{DF}$. Questa è la soluzione di Platone al problema della duplicazione del cubo, ossia alla questione di trovare un segmento la cui lunghezza sia il cubo di un altro segmento dato. In effetti la costruzione è solo teorica, dato che con riga e compasso non è possibile costruire segmenti come GD e FD in modo che CD e G siano allineati. *Suggerimento*: impostare le dovute proporzioni rispetto ai lati e risolvere rispetto a DE .
- In un triangolo ABC isoscele sulla base BC , tracciamo il segmento $BF \perp AC$. Sia H un qualsiasi punto su BC e si traccino i segmenti $HJ \perp AC$ e $HI \perp AB$. Provare che $\overline{BF} = \overline{HJ} + \overline{HI}$.



8. In figura  K è l'ortocentro del triangolo ABC , inscritto nella circonferenza di centro O . Provare che si ha: $\overline{KH} = \overline{HH'}$. *Suggerimento*: congiungere B con K e H' e provare che il triangolo BKH' è
9. Provare che in un triangolo il prodotto fra un'altezza e il segmento di estremi il piede dell'altezza e l'ortocentro è uguale al prodotto delle due parti in cui l'altezza divide il lato. *Suggerimento*: usare il risultato precedente.

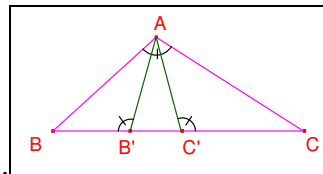


10. Nel triangolo ABC in figura  si ha: $\overline{AB} = 25$; $\overline{BH} = 22$; $\overline{BC} = 33$, determinare la lunghezza del diametro BD della circonferenza circoscritta ad ABC . *Suggerimento*: costruire il triangolo ABD . [37,5]
11. Nel parallelogramma $ABCD$, E e L sono due punti sulla diagonale BC , scelti in modo che CE e BL siano fra loro uguali. Provare che i triangoli CEK e AEB sono simili, così come i triangoli ALC e MLB .
12. Dimostrare il cosiddetto teorema di Tolomeo: *In un quadrilatero inscritto in una circonferenza la somma dei prodotti delle misure dei lati opposti uguaglia il prodotto delle misure delle diagonali.*



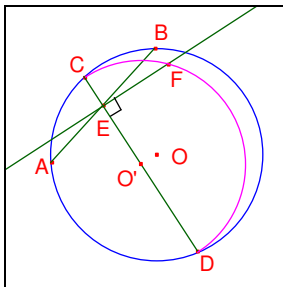
Suggerimento: costruire il triangolo DAE in modo che risulti $\angle \hat{E}DA = \angle \hat{C}DB$, provare poi che BCD e EDA sono fra loro simili.

13. Verificare il teorema di Tolomeo per un generico rettangolo.
14. Usando il teorema di Tolomeo provare che ogni rombo inscritto in una circonferenza è un quadrato.
15. Provare il seguente teorema dovuto al matematico arabo Thabit ibn-Qurra (826–901). Dato un triangolo ABC , scelti due punti B' e C' sul lato BC in modo che sia $\angle \hat{A}B'B = \angle \hat{A}C'C = \angle \hat{C}AB$, allora



$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot (\overline{BB'} + \overline{CC'}).$$

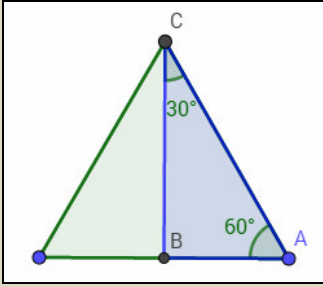
16. AB e CD sono due corde di una stessa circonferenza di centro O , e si incontrano nel punto medio E di



AB . Sia F l'intersezione della perpendicolare a CD condotta per E con la semi-circonferenza di diametro CD e centro O' . Provare che EF e AE sono segmenti uguali.

Lavoriamo insieme

Applicando la definizione, possiamo calcolare facilmente tutte le funzioni goniometriche relative all'angolo di 30° . Infatti, un triangolo rettangolo in cui un angolo acuto è 30° è metà di un triangolo equilatero.



Tenuto conto che si ha: $\overline{AB} = \frac{\overline{AC}}{2}$; $\overline{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \overline{AC}$, avremo:

$$\sin(30^\circ) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}/2}{\overline{AC}} = \frac{1}{2}; \cos(30^\circ) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \overline{AC}/2}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \tan(30^\circ) = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC}/2}{\sqrt{3} \cdot \overline{AC}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Livello 1

17. Determinare le funzioni goniometriche di 60° .

$$\left[\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}; \tan(60^\circ) = \sqrt{3} \right]$$

18. Determinare le funzioni goniometriche di 45° .

$$\left[\sin(45^\circ) = \cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \tan(45^\circ) = 1 \right]$$

Per la prova Invalsi

Quesiti sulle proporzioni

Lavoriamo insieme

Consideriamo un quesito assegnati alle prove Invalsi del 2005. *Un rubinetto, da cui esce acqua, riempie una vasca da 40 litri in 5 minuti. Se si dimezza la portata del rubinetto quanti minuti saranno necessari per riempire una vasca di capienza doppia?* A) 5 B) 10 C) 15 D) 20

Abbiamo a che fare con una proporzionalità inversa, dato che raddoppiando il numero di litri che escono dal rubinetto ovviamente dimezzeremo il tempo necessario a riempire la vasca, e viceversa. Se quindi dimezziamo i litri raddoppiamo il tempo per riempire una vasca uguale a quella iniziale, se raddoppiamo la capienza della vasca quindi il tempo diventa 4 volte quello iniziale. Cioè 20 minuti, quindi la risposta corretta è la D.

1. (Invalsi 2003) In un libro di ricette si trova la seguente tabella.

Numero di persone	4	6	12
Grammi di farina	200	300	600
Grammi di zucchero	70	120	240
Litri di latte	0,6	0,9	1,8
Numero di uova	3	4	9

Vi è proporzionalità tra... A) il numero di persone e il peso della farina B) il numero di persone e il peso dello zucchero C) il numero di persone e la quantità di latte D) il numero di persone e il numero delle uova E) il peso della farina e il peso dello zucchero [A]

2. (Invalsi 2003) La tabella mostra una relazione di proporzionalità diretta fra le grandezze x e y .

x	y
3	2
12	r
s	18

Quali sono i valori da sostituire a r e s ?

A) $r = 6$ e $s = 48$ B) $r = 18$ e $s = 12$ C) $r = 18$ e $s = 27$ D) $r = 8$ e $s = 27$ E) $r = 8$ e $s = 12$ [D]

3. (Invalsi 2004) Nella seguente tabella è rappresentata una proporzionalità diretta tra x e y .

x	y
5	8
10	m
n	40

Quali sono i valori di m ed n ?

A) $m = 13$ e $n = 16$ B) $m = 16$ e $n = 20$ C) $m = 16$ e $n = 25$ D) $m = 25$ e $n = 16$ [C]

4. (Invalsi 2004) 2 cm^3 di una sostanza hanno una massa di 2,6 g. Sapendo che il rapporto tra massa e volume resta costante, qual è la massa di 3 cm^3 della stessa sostanza? [B]

A) 2,6 g B) 3,9 g C) 5,2 g D) Non si può calcolare

5. (Invalsi 2007) Un cuoco prepara un piatto di tagliatelle per un pranzo di 34 persone. La ricetta prevede 2,50 hg di tagliatelle per 4 persone. Quante tagliatelle deve usare il cuoco per 34 persone? [D]

A) 10 hg B) 15 hg C) 2 Kg D) 2,125 Kg

6. (Invalsi 2007) La proporzione: $5 : 7 = x : 10$ è soddisfatta da... [B]

A) $x = 2$ B) $x = 50/7$ C) $x = 8$ D) $x = 14$

7. (Invalsi 2014) La grandezza y è inversamente proporzionale al quadrato della grandezza x e, per $x = 2$, si ha $y = 4$. Quindi, se $x = 8$, y è uguale a A) $\frac{1}{4}$ B) 4 C) 16 D) $\frac{1}{16}$ [A]

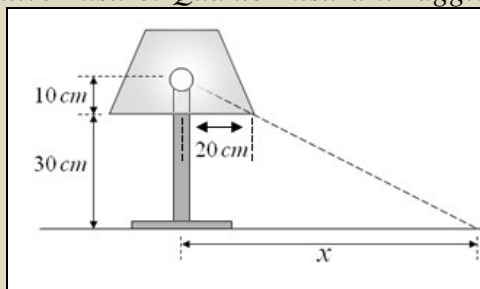
8. (Invalsi 2014) Da un controllo di qualità è emerso che una macchina ha prodotto 14 pezzi difettosi su una produzione di 1200 pezzi. Che stima è ragionevole fare del numero di pezzi difettosi su una produzione di 2150 pezzi? Scrivi i calcoli che hai fatto per trovare la risposta e poi riporta il risultato approssimandolo all'unità. [25]

9. Un imbianchino riesce a tinteggiare $1,3 \text{ m}^2$ di parete in 5 minuti, in quanto tempo tinteggerà 65 m^2 ? Un suo collega invece riesce a tinteggiare $1,8 \text{ m}^2$ di parete in 6 minuti. Se i due lavorano insieme in quanto tempo tinteggiano 168 m^2 ? [250 minuti; 300 minuti]
10. Una stampante 3D impiega 10 minuti per costruire un cubetto di lato 2 cm , senza cambiare il materiale usato né la modalità di lavoro, in quanti minuti costruirà un cubetto di lato 4 cm ? [D]
A) 20 B) 40 C) 60 D) 80 E) nessuna delle precedenti risposte è corretta

Quesiti sulla similitudine

Lavoriamo insieme

Il seguente quesito è stato assegnato ai quesiti Invalsi del 2013. In figura è rappresentata una lampada con paralume e relative misure. Quanto misura il raggio x del cerchio di luce proiettato sul piano d'appoggio

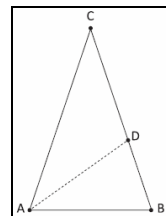


della lampada?

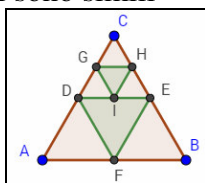
A) 50 cm B) 60 cm C) 70 cm D) 80 cm

Abbiamo due triangoli rettangoli simili, entrambe con un vertice nella lampada, uno, quello più grande di cateti lunghi $(10 + 30) \text{ cm} = 40 \text{ cm}$ e $x \text{ cm}$; l'altro di cateti 10 cm e 20 cm . Pertanto il rapporto di proporzionalità è $40/10 = 4$, quindi $x = 4 \cdot 20 \text{ cm} = 80 \text{ cm}$ e quindi la risposta corretta è D.

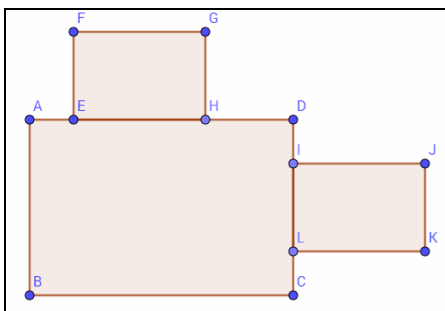
11. (Invalsi 2004) Due triangoli equilateri sono tra loro... [A]
A) sempre simili B) simili solo se i lati dei triangoli sono a due a due paralleli C) mai simili D) simili solo se i lati dei triangoli sono uguali
12. (Invalsi 2007) Se il rapporto tra le aree di due figure simili è 4, qual è il rapporto tra i corrispondenti perimetri? A) $1/4$ B) $1/2$ C) 2 D) 4 [C]



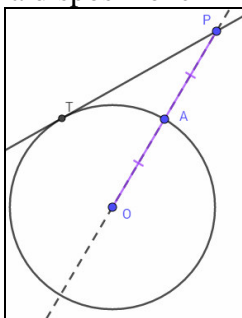
13. (Invalsi 2014) Il triangolo ABC è isoscele sulla base AB . L'angolo in C è la metà dell'angolo in B e AD è la bisettrice dell'angolo $B\hat{A}C$. Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa. A) AD è anche l'altezza relativa al lato BC . B) L'angolo in B misura 72° . C) L'area del triangolo ADC è il doppio dell'area del triangolo ABD . D) $AD : AC = BD : AB$. [F; V; F; F]
14. (Invalsi 2015) Arturo vuole misurare l'altezza di un obelisco che si trova al centro della piazza principale della sua città. A una certa ora di un giorno di sole, l'obelisco proietta un'ombra di circa $6,4 \text{ m}$, e un palo alto $2,5 \text{ m}$, che si trova nella stessa piazza, proietta un'ombra di circa $0,8 \text{ m}$. Qual è l'altezza dell'obelisco? (Supponi che la piazza sia orizzontale e che l'obelisco e il palo siano verticali) [$\approx 20 \text{ m}$]
15. Quali fra le seguenti affermazioni sono corrette? A) Tutti i triangoli isosceli sono simili B) Tutti i quadrati sono simili C) Tutti gli esagoni regolari sono simili D) Tutti i cerchi sono simili E) Tutti i parallelogrammi sono simili [B, C, D]



16. In figura ABC è equilatero, D, E, F sono punti medi dei suoi lati, così come G, H, I sono punti medi dei lati DC, CE ed ED rispettivamente. Possiamo dire che la somma dei perimetri dei triangoli verdi è quale parte del perimetro del triangolo ABC ? [3/4]



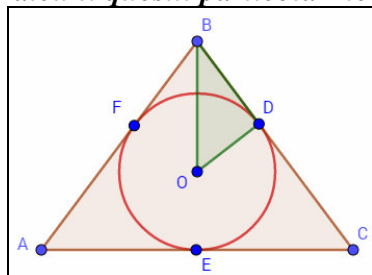
17. In figura i due rettangoli più piccoli sono simili a quello grande secondo il rapporto $1/2$. se il perimetro del rettangolo grande è 20 cm , quanto misura il perimetro del poligono $AEFGHDIJKLCB$? A) 30 cm B) 40 cm C) 60 cm D) non si può determinare con i dati [A]
18. Due corde AB e CD di una stessa circonferenza si incontrano nel punto E in modo che si abbia $\overline{AE} = 3 \cdot \overline{EB}$, allora se $\overline{CE} = 2$, quanto misura ED ? A) 6 B) $2/3$ C) 6 o $2/3$ D) Non si può determinare con i dati a disposizione [D]



19. In figura PT è tangente la circonferenza, i segmenti AP e OA sono fra loro uguali e misurano 1 . Quanto misura PT ? A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) Non si può determinare con i dati a disposizione [B]
20. Se due triangoli sono fra loro simili di rapporto 2 , possiamo dire che ciascuna mediana del triangolo più grande è doppia della corrispondente mediana del triangolo più piccolo? Motivare la risposta. [No]

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi



1. In figura ABC è un triangolo isoscele, la circonferenza di centro O è in esso inscritta. Quando accade che il raggio di detta circonferenza è un quarto della base? $\left[\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{4}{3} \right]$
2. Dimostrare che la seguente espressione $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}} - 1$, dove le radici sono in numero infinito, fornisce il valore di ϕ .
3. Determinare una relazione fra il poligono regolare di n lati e quello di $2n$ lati inscritti nello stesso cerchio di raggio R .
- $$\left[\ell_{2n} = R \cdot \sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(\frac{\ell_n}{R} \right)^2}} \right]$$
4. Calcolare la lunghezza del lato del pentagono regolare inscritto in un cerchio di raggio 1 .
- $$\left[\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} \right]$$
5. Indicati con $\ell_5, \ell_6, \ell_{10}$ le misure dei lati dei poligoni regolari di $5, 6$ e 10 lati inscritti in una stessa circonferenza, verificare che vale la seguente uguaglianza: $\ell_5^2 = \ell_6^2 + \ell_{10}^2$.

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Davanti a ogni esercizio vi è un simbolo che si riferisce alla gara da cui è tratto. Cioè:

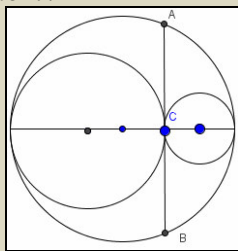
AHSME = Annual High School Mathematics Examination

MT = Mathematics Teacher, rivista della NCTM

OMI = Olimpiadi della Matematica italiane

Lavoriamo insieme

Questo quesito è stato pubblicato nel numero di Gennaio 1992 della rivista Mathematics Teacher pubblicata dalla NCTM. *Due cerchi sono tangenti esternamente l'un l'altro e internamente a un cerchio più grande. I centri dei cerchi sono allineati, come in figura e i segmenti AC e BC sono entrambi lunghi 2. Quanto vale il prodotto delle aree dei cerchi minori?*

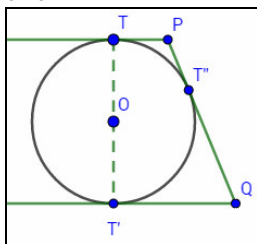


Ci riferiamo alla seguente figura.

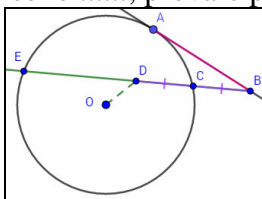
Chiamiamo x e y i diametri dei cerchi piccoli, per il Teorema delle corde abbiamo che $xy = 2 \cdot 2$, quindi $x^2 \cdot y^2 = 16$.

Ma il prodotto delle due aree è $\pi^2 \cdot (x/2)^2 \cdot (y/2)^2 = \pi^2 \cdot x^2 y^2 / 16 = \pi^2 \cdot 16 / 16 = \pi^2$.

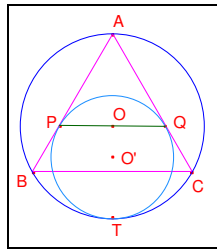
- (AHSME1951) Noti che siano i seguenti enti di un triangolo, quali non permettono di determinare le misure di tutti i suoi angoli? Giustificare la risposta. a) il rapporto di due lati e l'angolo compreso b) il rapporto delle tre altezze c) il rapporto delle tre mediane d) il rapporto di un'altezza e della base relativa e) due angoli [d]
- (AHSME 1952) Nel triangolo ABC i segmenti BD e BE dividono l'angolo di vertice B in 3 parti fra loro uguali. Provare che $\frac{AD}{EC} = \frac{AB \cdot BD}{BE \cdot BC}$.
- (AHSME1957) Il cateto AC del triangolo rettangolo ABC è diviso in 8 parti uguali, da ciascuno dei punti di suddivisione si traccia un segmento parallelo al cateto BC , che misura 10 cm , fino ad incontrare l'ipotenusa. Determinare la somma dei sette segmenti così tracciati. [35 cm]
- (AHSME1960) In un cerchio Γ di centro O , si consideri il segmento AB uguale al diametro e tangente in B a Γ . Sia la retta per A e O che incontra Γ in C e D . Su AB si consideri il punto P in modo che AC e AP siano uguali. Provare che $\overline{AP}^2 = \overline{PB} \cdot \overline{AB}$.



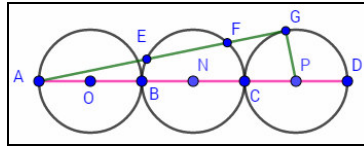
- (AHSME1974) In figura TP e $T'Q$ sono tangenti parallele ad una stessa circonferenza nei punti T e T' rispettivamente. $PT''Q$ è un'ulteriore tangente alla circonferenza in T'' . Se $\overline{TP} = 4\text{ cm}$ e $\overline{T'Q} = 9\text{ cm}$ determinare la misura del raggio. *Suggerimento:* ricordare che i segmenti di tangenza condotti da uno stesso punto sono; provare poi che POQ è un triangolo



- (AHSME1976) Nella figura seguente AB è tangente al cerchio di centro O in A . D è interno al cerchio e DB interseca la circonferenza in C . Se $\overline{BC} = \overline{DC} = 3$, $\overline{OD} = 2$ e $\overline{AB} = 6$, determinare la misura del raggio del cerchio. *Suggerimento:* tracciare la perpendicolare a BE per O . [$\sqrt{22}$]



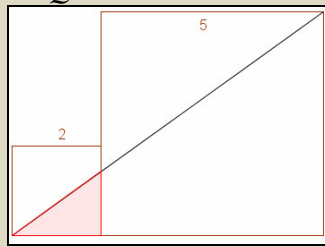
19. (AHSME 1981) Il triangolo ABC in figura è equilatero ed è inscritto nella circonferenza di centro O . La circonferenza di centro O' è tangente internamente alla prima in T e a due lati di ABC nei punti P e Q . Sapendo che $\overline{BC} = 12 \text{ cm}$, determinare la misura di PQ . *Suggerimento:* Provare che il triangolo QPT è [8 cm]



7. (AHSME1982) Nella figura seguente i tre cerchi sono uguali e il loro raggio misura 15, AG è tangente al cerchio di centro P . Se AG interseca il cerchio di centro N nei punti E e F determinare la misura di EF . *Suggerimento:* Tracciare la perpendicolare a EF da N . [24]
8. (AHSME1982) In un triangolo rettangolo ABC ($\angle B\hat{C}A = 90^\circ$) si conducono le mediane CM e BN e si trova che sono fra di loro perpendicolari. Se $\overline{BC} = 2$, determinare la misura di BN . *Suggerimento:* ricordare che le mediane si incontrano nel baricentro che gode di certe proprietà. $[\sqrt{6}]$

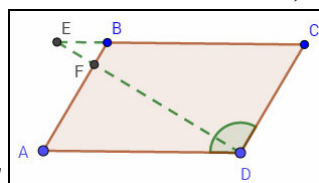
Lavoriamo insieme

Questo quesito è stato pubblicato nel numero di Marzo 1994 della rivista Mathematics Teacher. *I due quadrati in figura hanno le dimensioni indicate. Quanto vale la misura dell'area della zona evidenziata?*



I due triangoli, quello evidenziato e quello di cui esso fa parte, sono ovviamente simili, pertanto, detta x la misura del cateto incognito del triangolo evidenziato abbiamo: $2 : 7 = x : 5$, da cui $x = 10/7$. quindi l'area cercata misura $1/2 \cdot 2 \cdot 10/7 = 10/7$.

20. (AHSME 1983) Cinque circonferenze sono tangenti l'un l'altra e a due rette. Se il raggio della circonferenza maggiore è 18 e quello della minore è 8, determinare il raggio della circonferenza che occupa la posizione centrale. *Suggerimento:* provare che il rapporto di raggi di cerchi consecutivi è costante [12]
9. (AHSME1986) Nel triangolo ABC si ha: $\overline{AB} = 8$, $\overline{BC} = 7$, $\overline{AC} = 6$. Estendiamo il lato BC dalla parte di C fino al punto P in modo tale che i triangoli PAB e PCA siano simili. Determinare la lunghezza di PC . *Attenzione a stabilire le corrette corrispondenze di similitudine* [9]
10. (AHSME1988) I triangoli equilateri ABC e $A'B'C'$ hanno lati paralleli e uguali baricentri. La distanza fra i lati BC e $B'C'$ è $\frac{1}{6}$ dell'altezza di ABC . Determinare il rapporto delle aree dei triangoli. $[\frac{1}{4}]$
11. (OMI1990) Una statua in bronzo, piena e alta 60 cm, viene fusa e dal metallo ottenuto si ricavano delle copie in scala, ciascuna alta 10 cm. Quante copie si possono ottenere? [216]
12. (AHSME1990) $ABCD$ è un parallelogramma in cui $\angle C\hat{D}A = 120^\circ$; $\overline{AB} = 10$; $\overline{BC} = 16$. Estendiamo BC



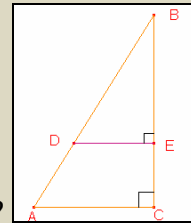
dalla parte di B fino a raggiungere il punto E in modo che sia $\overline{BE} = 4$. Se DE incontra AB in F , determinare la lunghezza di BF . [2]

21. (AHSME1990) Il quadrilatero $ABCD$ ha gli angoli di vertici A e C retti. Siano BF e DE segmenti perpendicolari ad AC , con E e F su AC . Sapendo che $\overline{AE} = 3$, $\overline{DE} = 5$, $\overline{CE} = 7$, determinare la lunghezza di BF . [4,2]
13. (AHSME1991) Due circonferenze di centri O e O' sono tangenti esternamente. Dal punto P a esse esterno conduciamo le tangenti comuni, che incontrano le circonferenze in A e A' e B e B' . Sapendo che $\overline{PA} = \overline{AB} = 4$, determinare l'area del cerchio minore. [2π]
14. (AHSME1992) Due cerchi concentrici hanno raggi uno triplo dell'altro. Sia AB un diametro del cerchio maggiore, BC una sua corda tangente al cerchio minore. Sapendo che $\overline{AC} = 12$ determinare la lunghezza del raggio del cerchio maggiore. [18]
15. (OMI1993) Nel triangolo ABC , A_1, B_1 sono due punti scelti rispettivamente sui lati AC e BC , in modo che $\frac{\overline{AA_1}}{\overline{AC}} = \frac{1}{5}$ e che $\frac{\overline{BB_1}}{\overline{BC}} = \frac{1}{5}$. Trovare l'area del triangolo ABC sapendo che quella del quadrilatero ABB_1A_1 è 45. [125]

Questions in English

Working together

This is a question assigned at AHSME in 1995. In triangle ABC , $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6$ and $BC = 8$. Points D

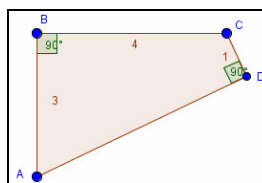


and E are on AB and BC , respectively, and $\angle BED = 90^\circ$. If $DE = 4$, then BD is?

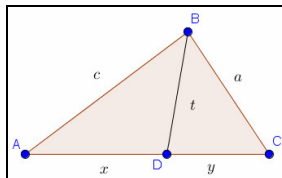
Because ABC is a right triangle, the Pythagorean Theorem implies that $\overline{BA} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

Since DBE is similar to ABC , we have: $\frac{\overline{BD}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{BD} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AC}} \cdot \overline{BA} = \frac{4}{6} \cdot 10 = \frac{20}{3}$.

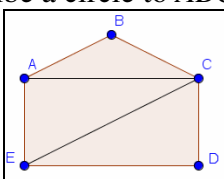
16. (MT1991) What is the area of quadrilateral $ABCD$, if angles B and D are right angles? [$6 + \sqrt{6}$]



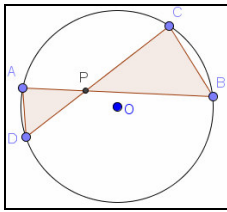
17. (MT1993) An isosceles triangle has a base of 12 meters and an area of 48 square meters. Find the area of the square that is inscribed in the triangle. [$576/25 \text{ m}^2$]



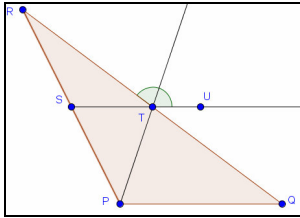
18. (MT1993) In $\triangle ABC$, BD is the bisector of $\angle B$. Prove that $ac = t^2 + xy$. Hint: Circumscribe a circle to ABC and use chords' theorem.



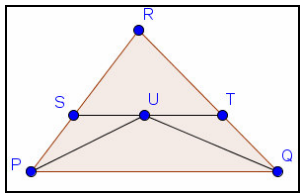
19. (MT1993) $ABCE$ is an isosceles trapezoid and $ACDE$ is a rectangle. $AB = 10$ and $EC = 20$. Find AE . [10]
20. (MT1993) Lois is 2 m tall. A streetlight, 10 m away, casts a 4 m shadow of Lois. How tall is the streetlight? [7 m]



21. (MT1994) Two chords intersect within a circle as indicated in the diagram. Find the area of $\triangle PCB$ if the area of $\triangle PAD = 8$ and the ratio of AP to PC is 2 to 5. [50]



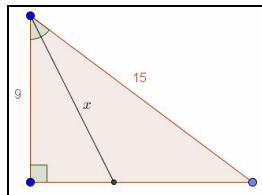
22. (MT1995) In $\triangle PQR$, line STU is parallel to PQ , S is on RP and T is on RQ . PT bisects $\angle RTU$, $ST = 6$ and $PQ = 10$. What is RT ? [15]



23. (MT1995) In $\triangle PQR$, ST is parallel to PQ . QU bisects $\angle PQT$. PU bisects $\angle SPQ$. $PQ = 20$, $PR = 18$ and $RQ = 16$. find the perimeter of $\triangle RST$. [34]

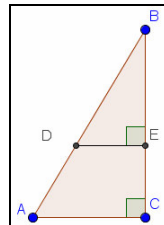
24. (MT1995) Perpendicular tangents CA and CB are drawn to circle with radius 4. If $BE = 1$, find AD .

[8/3]



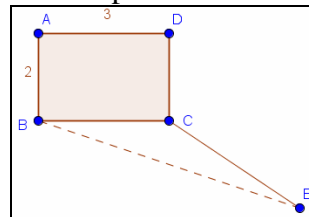
25. (MT1996) Find x $\left[\frac{9}{2}\sqrt{5} \right]$

26. (MT1996) In $\triangle ABC$, $\angle B\hat{C}A = 90^\circ$, $\overline{AC} = 6$, $\overline{BC} = 8$. Points D and E are on AB and BC , respectively,



and $\angle B\hat{E}D = 90^\circ$. If $\overline{DE} = 4$, what does BD equal? [20/3]

27. (MT1997) The diagonal of rectangle $ABCD$ is extended to a point E such that $AC = CE$. Find the



length of segment BE given that $\overline{AD} = 3\text{ cm}$, $\overline{AB} = 2\text{ cm}$. $\left[2\sqrt{10}\text{ cm} \right]$

28. (MT1997) Let $ABCD$ be a unit square and let P be any point on AB other than B itself. Let M be the midpoint of BC and let PM be perpendicular to MQ , where Q is on DC . What is the value of PB/QC ?

[1/4]

Attività di recupero**Le proporzioni****Fase 1: Osserva**

- Vogliamo verificare se $3 : 5 = 12 : 15$ è o no una proporzione. A tal fine basta applicare la *proprietà caratteristica* delle proporzioni, ossia moltiplicare fra loro i medi e gli estremi; se si ottiene lo stesso numero, abbiamo a che fare con una proporzione, altrimenti no. In questo caso, poiché si ha: $3 \cdot 15 = 45$ e $5 \cdot 12 = 60$, la relazione data non è una proporzione, per cui l'uguaglianza è falsa.
- Verifichiamo se vale, e quindi rappresenta una proporzione, la seguente uguaglianza:

$$(\sqrt{2}-1): \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{1}{\sqrt{5}+2} : (\sqrt{2}+1).$$

Verifichiamo la proprietà caratteristica: $(\sqrt{2}-1) \cdot (\sqrt{2}+1) = (\sqrt{2})^2 - 1 = 2 - 1 = 1$ e

$$\frac{1}{\sqrt{5}-2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}+2} = \frac{1}{(\sqrt{5})^2 - 2^2} = \frac{1}{5-4} = 1. \text{ Dato che abbiamo ottenuto lo stesso risultato, l'uguaglianza}$$

proposta è vera: abbiamo a che fare con una proporzione. Ma allora anche le seguenti, ottenute da essa applicando le proprietà del permutare e dell'invertire rispettivamente, sono proporzioni:

$$(\sqrt{2}-1): \frac{1}{\sqrt{5}+2} = \frac{1}{\sqrt{5}-2} : (\sqrt{2}+1) \wedge (\sqrt{2}+1): \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{1}{\sqrt{5}+2} : (\sqrt{2}-1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}-2} : (\sqrt{2}-1) = (\sqrt{2}+1): \frac{1}{\sqrt{5}+2}.$$

- Vogliamo determinare la quarta proporzionale riferita alla seguente proporzione: $5 : x = 4 : 3$. Mediante la proprietà caratteristica ricaviamo il termine incognito: $x = \frac{5 \cdot 3}{4} = \frac{15}{4}$.
- Data la proporzione $5 : 7 = 15 : 21$, vera perché $5 \cdot 21 = 7 \cdot 15 = 105$, verifichiamo che anche le seguenti, ottenute mediante le proprietà del comporre, sono proporzioni:

$$(5+7) : 5 = (15+21) : 15 \Rightarrow 12 : 5 = 36 : 15 \Rightarrow 12 \cdot 15 = 180 \text{ e } 5 \cdot 36 = 180$$

$$(5+7) : 7 = (15+21) : 21 \Rightarrow 12 : 7 = 36 : 21 \Rightarrow 12 \cdot 21 = 252 \text{ e } 7 \cdot 36 = 252.$$

Non è invece una proporzione la seguente: $(5+7) : 5 = (15+21) : 21 \Rightarrow 12 : 5 = 36 : 21$, infatti si ha: $12 \cdot 21 = 252$ e $5 \cdot 36 = 180$.

Fase 2: Completa ...

- La seguente uguaglianza $\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{5}{6} : \frac{8}{9}$ è o no una proporzione? Verifichiamo la validità della *proprietà caratteristica* delle proporzioni: Concludiamo dicendo che
- La seguente $\frac{\sqrt{7}-2}{3} : \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = (5-2\sqrt{6}) : (\sqrt{7}+2)$ è una proporzione? Verifichiamo la validità della *proprietà caratteristica*: e
Abbiamo quindi a che fare con
- Vogliamo determinare la quarta proporzionale riferite alla seguente proporzione: $x : 4 = 3 : 12$. Mediante la *proprietà caratteristica* ricaviamo il termine incognito: $x = \dots\dots\dots$, quindi la proporzione completa è
- Data la proporzione $4 : 9 = 16 : 36$, vera perché $4 \cdot 36 = \dots\dots\dots$, verifichiamo che anche le seguenti, ottenute mediante la *proprietà dello scomporre*, sono proporzioni: $(4-9) : 4 = \dots\dots\dots$
..... $(4-9) : 9 = \dots\dots\dots$
..... Non è invece una proporzione la seguente: $(4-9) : 4 = (16-36) : 36 \Rightarrow \dots\dots\dots$

Fase 3: Prova!**Verificare quali delle seguenti scritte rappresentano proporzioni**

$$1. \quad 4 : 2 = 5 : 10; \frac{1}{3} : \frac{2}{5} = \frac{7}{4} : \frac{21}{10}; \sqrt{2} : 3 = \frac{2}{3} : \sqrt{2}; \frac{4}{\sqrt{3}} : 3 = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{8} \quad [\text{No; Sì; Sì; No}]$$

$$2. \quad \frac{1}{\sqrt{3}+1} : 2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} : 2; (\sqrt{2}-1) : (\sqrt{2}+1) = (\sqrt{3}-2) : (\sqrt{3}+2) \quad [\text{Sì; No}]$$

Determinare il valore incognito del quarto proporzionale

$$3. \quad 3 : 5 = 1 : x; 2 : x = 9 : 4; \frac{2}{3} : \frac{1}{4} = x : 2; x : \frac{1}{5} = \frac{13}{2} : \frac{3}{10} \quad \left[\frac{5}{3}; \frac{8}{9}; \frac{16}{3}; \frac{13}{3} \right]$$

$$4. \quad \sqrt{3} : x = 4 : \sqrt{3}; \frac{1}{\sqrt{7}} : 7 = \frac{\sqrt{7}}{7} : x; \frac{2}{\sqrt{5}-1} : 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} : x \quad \left[\frac{3}{4}; 7; \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right]$$

$$5. \quad (\sqrt{3}-\sqrt{5}) : x = (\sqrt{3}+\sqrt{5}) : 2; x : \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} : \frac{1}{4} \quad [2 \cdot \sqrt{15} - 8; 20 - 4 \cdot \sqrt{21}]$$

6. Applicare la *proprietà del permutare* alle proporzioni degli esercizi precedenti.
7. Applicare la *proprietà dell'invertire* alle proporzioni degli esercizi precedenti.
8. Applicare la *proprietà del comporre* alle proporzioni degli esercizi precedenti.
9. Applicare la *proprietà dello scomporre* alle proporzioni degli esercizi precedenti.

Criteri di similitudine**Fase 1: Osserva**

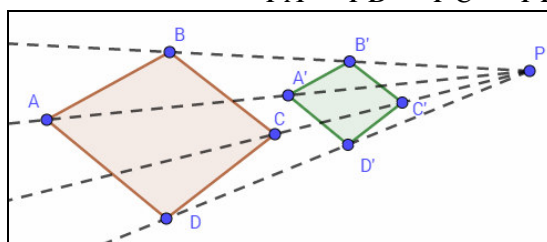
- Un rettangolo e un quadrato sono fra loro simili? Vediamo se essi verificano le tre proprietà dei poligoni simili: hanno lo stesso numero di lati, quattro; gli angoli sono a due a due uguali, addirittura sono tutti fra loro uguali, dato che sono tutti retti. Se però il rettangolo non è a sua volta un quadrato il rapporto fra i lati non è costante, indipendentemente dalla scelta dei lati. Infatti se i lati del quadrato misurano x e quelli non uguali del rettangolo misurano y e z , possiamo considerare i seguenti due rapporti:

$\frac{x}{y}$ e $\frac{x}{z}$, che, hanno i numeratori uguali e i denominatori diversi, sono pertanto diversi. Invece due

qualsiasi poligoni regolari con lo stesso numero di lati sono fra loro simili, per esempio due triangoli equilateri, due quadrati, ...; in essi, infatti, oltre a essere verificate le due prime proprietà precedenti, anche il rapporto tra i relativi lati è costante.

- I due poligoni in figura sono stati costruiti con la seguente tecnica. È stato costruito $ABCD$; è stato fissato un punto P ; abbiamo tracciato le rette passanti per P e i vertici del quadrilatero; i vertici con

l'apice sono stati scelti in modo tale che si abbia $\frac{PA}{PA'} = \frac{PB}{PB'} = \frac{PC}{PC'} = \frac{PD}{PD'} = \frac{1}{2}$.



$ABCD$ e $A'B'C'D'$ si dicono fra loro *omotetici* secondo il centro P e il rapporto $\frac{1}{2}$. Vogliamo provare

che due poligoni omotetici sono anche simili. Essi hanno certamente lo stesso numero di lati; il rapporto fra i lati è costante: infatti se consideriamo per esempio i triangoli PAB e $PA'B'$, essi sono simili per

il primo criterio di similitudine (l'angolo di vertice P è comune e $\frac{\overline{PA}}{\overline{PA'}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PB'}} = \frac{1}{2}$, quindi anche

$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{1}{2}$). Troveremo lo stesso rapporto per le altre coppie di lati. Quest'ultimo fatto permette di dire

che lati corrispondenti sono paralleli (inverso del teorema di Talete), quindi gli angoli interni sono a due a due uguali. Abbiamo perciò provato che i poligoni sono simili.

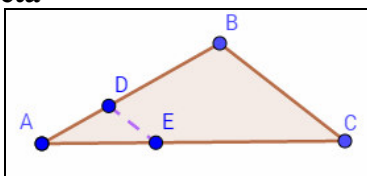
- Due triangoli ABC e DEF sono fra loro simili, in modo che i lati AB , AC , BC e DE misurino rispettivamente 3, 5, 6 e 8. Possiamo calcolare le misure dei lati incogniti di DEF ? Con questi dati il problema è *indeterminato*; infatti noi sappiamo che vi è una corrispondenza fra i lati ma non sappiamo qual è, quindi non siamo in grado di stabilire il valore della costante di similitudine. Così vi possono essere

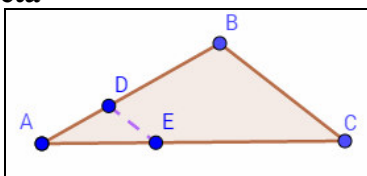
tre possibilità: $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{3}{8}$, $\frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} = \frac{5}{8}$, $\frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. Quindi avremo le seguenti possibili terne di valori

per i lati di DEF : $3 \cdot \frac{8}{3} = 8$, $5 \cdot \frac{8}{3} = \frac{40}{3}$, $6 \cdot \frac{8}{3} = 16$; $3 \cdot \frac{8}{5} = \frac{24}{5}$, $5 \cdot \frac{8}{5} = 8$, $6 \cdot \frac{8}{5} = \frac{48}{5}$;

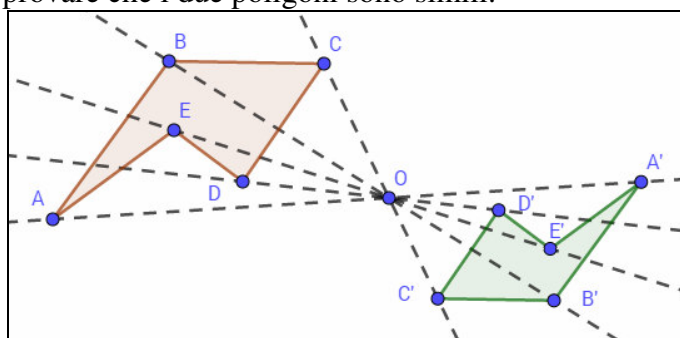
$3 \cdot \frac{4}{3} = 4$, $5 \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$, $6 \cdot \frac{4}{3} = 8$. Non solo, ma non sappiamo neanche se le date misure incognite sono nell'ordine quelle di DF e di EF o al contrario.

Fase 2: Completa



- In figura  DE è parallelo ad AC e misura 0,9 cm. Inoltre BC misura 2,4 cm, BD 1,9 cm e AE 1,7 cm. Vogliamo determinare le misure dei perimetri dei due triangoli. Possiamo dire che ADE e ABC sono fra loro simili, per il primo criterio di similitudine, avendo l'angolo di vertice A e gli altri angoli uguali perché angoli rispetto alle parallele passanti per tagliate rispettivamente da Ciò vuol dire allora che il rapporto di similitudine è e che $\overline{AC} = \dots\dots\dots$. Analogamente $\overline{AB} = \dots\dots\dots$, solo che in questo caso non conosciamo la misura di tale segmento. Ci è però nota la misura di BD , per il quale si ha $\overline{BD} = \dots\dots\dots \overline{AD}$. Quindi ricaviamo la misura di quest'ultimo segmento: $\overline{AD} = \dots\dots\dots$. Possiamo perciò dire che il perimetro di ADE è $0,9 + 1,7 + \dots\dots = \dots\dots$. Naturalmente quello di ABC è volte questo valore, cioè

- In figura è mostrata l'*omotetia* di centro O e rapporto $-\frac{3}{4}$, che trasforma il poligono $ABCDE$ in $A'B'C'D'E'$. Il rapporto negativo significa che le figure si trovano da parti opposte rispetto al centro di omotetia O . Vogliamo provare che i due poligoni sono simili.



Ricordiamo che la costruzione di $A'B'C'D'E'$ a partire da $ABCDE$ è avvenuta tracciando le rette per i vertici e per O e staccando dei segmenti da parte opposta rispetto ad O , in modo che si abbia

$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \dots\dots\dots = \frac{3}{4}$. Verifichiamo le tre proprietà dei poligoni simili. Essi hanno certamente

lo stesso numero di lati e il rapporto fra i lati è costante. Infatti, se consideriamo i triangoli OAB e

$OA'B'$, essi hanno gli angoli di vertice O fra loro uguali perché, inoltre:

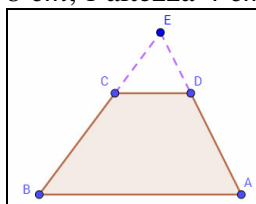
$\frac{OA}{OA'} = \dots = \dots$, quindi sono simili per il criterio di similitudine, e anche Vale un di-

scorso analogo per le altre coppie di lati; perciò i lati corrispondenti sono paralleli, quindi In effetti avremmo potuto risolvere più semplicemente la questione considerando il poligono $A''B''C''D''E''$ simmetrico di $A'B'C'D'E'$ rispetto ad O . Questo è uguale ad $A'B'C'D'E'$, ma è anche omotetico di $ABCDE$ rispetto al centro O e al rapporto $\frac{3}{4}$ e, dato che sappiamo che poligoni omotetici di rapporto positivo sono simili, per la proprietà transitiva possiamo dire che sono tali anche $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$.

- Il triangolo rettangolo ABC ha i cateti AB e BC che misurano rispettivamente 10 cm e 24 cm , il triangolo rettangolo DEF ha il cateto DE che misura 35 cm e l'ipotenusa EF 91 cm . Possiamo dire che i triangoli sono simili? Determiniamo le misure dei lati incogniti. $\overline{AC} = \dots\dots\dots$, $\overline{DF} = \dots\dots\dots$ Adesso calcoliamo il rapporto fra le ipotenuse: $\frac{\overline{AC}}{\overline{EF}} = \dots\dots\dots$ Calcoliamo gli altri possibili rapporti: $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \dots\dots\dots$ e $\frac{\overline{BC}}{\overline{DF}} = \dots\dots\dots$ dato che i tre rapporti coincidono possiamo dire che i triangoli sono simili per il criterio di similitudine.

Fase 3: Prova

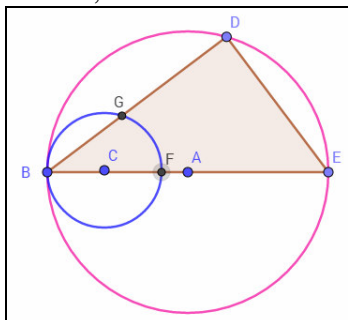
1. Costruire le figure omotetiche di poligoni a piacere, scegliendo centri e rapporti a piacere.
2. Costruire l'omotetico di un quadrato rispetto al suo centro e di rapporto $\frac{1}{2}$.
3. Nei due triangoli simili ABC e DEF si ha: $\angle \hat{A}BC = \angle \hat{D}EF$, $\overline{AB} = 5\text{ cm}$, $\overline{BC} = 3\text{ cm}$, $\overline{AC} = 6\text{ cm}$, $\overline{DF} = 4\text{ cm}$, determinare la misura del perimetro di DEF . [11,2 cm]
4. Due triangoli simili hanno i perimetri che misurano 24 e 32, se l'area del primo triangolo è 27, quanto vale l'area del secondo? [48]
5. Le aree di due triangoli simili sono rispettivamente 40 e 90; se il perimetro del primo triangolo misura 28, quanto misura quello del secondo? [42]
6. In un trapezio $ABCD$ le basi misurano 3 cm e 8 cm , l'altezza 4 cm . Prolunghiamo i lati obliqui fino a



formare il triangolo CED ; determinarne l'area. [3,6]

7. Sui lati AB e AC del triangolo ABC fissiamo i punti D ed E che li dividono nel rapporto $3/4$. Sapendo che la misura del perimetro di ABC è 20, determinare quella del perimetro del trapezio $BCED$. [Problema indeterminato]
8. In un triangolo isoscele la base misura 40 e il perimetro 90. Prolunghiamo di 20 unità i lati obliqui dalla parte della base. Determinare la misura della base del nuovo triangolo isoscele così ottenuto. [72]
9. Il triangolo ABC ha i lati AB e AC che misurano 7 e 10 rispettivamente. Su AB scegliamo un punto D in modo che AD misuri 3. Da D tracciamo la parallela che incontra AC in E . Quanto misura EC ? [40/7]
10. Scelto un punto sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo ABC si traccino le parallele ai cateti; provare che in tal modo si ottengono due triangoli simili ad ABC .
11. Con riferimento al problema precedente, i perimetri dei due triangoli più piccoli misurano 12 e 20, quanto misura il perimetro di ABC ? [32]
12. Con riferimento al problema precedente, provare che in generale il perimetro di ABC è sempre la somma dei perimetri dei due triangoli più piccoli, indipendentemente dalla posizione del punto scelto sull'ipotenusa.

13. Nel triangolo ABC , con $\overline{BC} = 5\text{ cm}$, $S_{ABC} = 7\text{ cm}^2$, è inscritto il quadrato $DEFG$, con il lato FG su BC , determinarne la misura del lato del quadrato. [70/39 cm]
14. Con riferimento al problema precedente, se il rapporto fra le aree dei triangoli ABC e AED è $\frac{16}{9}$ e FG misura 15 cm , quanto misura BC ? [20 cm]
15. In una circonferenza il diametro AB e la corda CD ad esso perpendicolare si incontrano in E . Considerata una qualsiasi corda AF che incontra EC in G , provare che AEG è simile ad ABF .
16. Tenuto conto dell'esercizio precedente, sapendo che il raggio è unitario e che AEG è isoscele, determinare la misura del perimetro di ABF . [$2 \cdot (1 + \sqrt{2})$]
17. Dato il triangolo ABC , costruiamo un triangolo DEF in cui $\overline{DE} = 2\overline{AB}$, $\overline{EF} = 2\overline{BC}$ e $\angle \widehat{ABC} = \angle \widehat{DEF}$. Se l'area di ABC misura S , quanto misura l'area di DEF ? [4S]
18. Data la semicirconferenza di diametro AB , si traccino le tangenti ad essa condotte per A e B . Si scelgano due punti C e D su tali tangenti in modo che i segmenti AC e BD misurino rispettivamente 12 cm e 27 cm . Sapendo che BC e AD si incontrano in un punto E della circonferenza, determinare la misura di AB . [18 cm]
19. All'interno di un triangolo ABC il cui lato AB misura a è inscritto un rettangolo $DEFG$ le cui dimensioni sono l'una doppia dell'altra. Sapendo che DE è sovrapposto ad AB , determinare la misura del lato EF del rettangolo nota che sia h la misura dell'altezza CH . [$\frac{a \cdot h}{a + 2h} \vee \frac{a \cdot h}{a + h}$]
20. Due picchetti sono posti perpendicolarmente ad un terreno piano, due fili d'acciaio sono tesi a congiungere la cima di ciascun picchetto con la base dell'altro. Sapendo che la parte sporgente dei picchetti è rispettivamente 3 m e 5 m e che essi sono posti alla distanza di 12 m , determinare a che altezza dal suolo si incontrano i due fili. Un dato non serve, quale? [1,875 m, la distanza fra i paletti]
21. Il triangolo ABC è rettangolo di ipotenusa AB lunga 34 e cateto AC lungo 16. Si tracci il segmento DM perpendicolare ad AB nel suo punto medio M . Determinare la misura dell'area del quadrilatero $AMDC$. [$\approx 162,93$]
22. In una circonferenza il cui raggio misura 5 cm , si tracciano due diametri perpendicolari AB e CD . Si tracci una corda AE che incontra CD in F . Sapendo che $\overline{BE} = 6\text{ cm}$, determinare la misura del segmento AF . [6,25 cm]
23. La base maggiore di un trapezio è tripla della minore, i lati obliqui sono uno doppio della base minore e l'altro differisce di una unità dalla stessa base. Sapendo che un segmento parallelo alle basi e passante per i punti che dividono ciascun lato obliquo nel rapporto $4 : 1$, divide il trapezio in due trapezi di uguale perimetro, determinare la misura dei lati del trapezio. [3; 4; 6; 9]

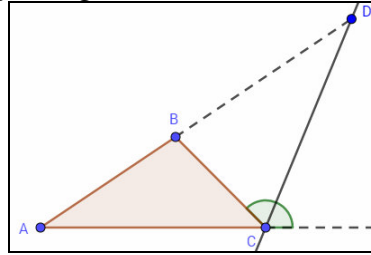


24. In figura sono rappresentate due circonferenze tangenti internamente, di centri C e D , sapendo che si ha: $\overline{BG} = 3\text{ cm}$, $\overline{GD} = 5\text{ cm}$; $\overline{BC} = 2\text{ cm}$. Determinare la misura di AB . Suggerimento: Unire F con G . [$\frac{16}{3}$]
25. Sul prolungamento del lato AD del parallelogramma $ABCD$, si fissi il punto E . Siano F e G le intersezioni di EB con DC e AC rispettivamente. Provare che i triangoli ABG e CFG sono fra loro simili, così come i triangoli DEF e BCF .

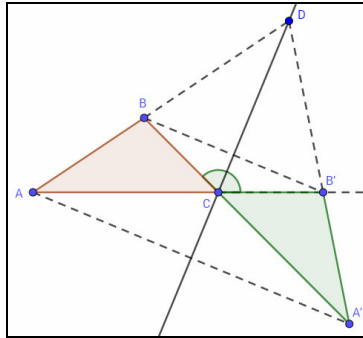
Importanti teoremi sulla similitudine

Fase 1: Osserva

- In figura abbiamo tracciato la bisettrice di un angolo esterno di un triangolo ABC e abbiamo trovato il punto D , intersezione di tale bisettrice con il prolungamento del lato AB , nell'ipotesi in cui tale punto



esista, cioè bisettrice e AB non siano paralleli. Vogliamo provare che vale la proporzione: $\overline{BC} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{AD}$. Per far ciò effettuiamo la seguente costruzione:



in cui $A'B'C$ è simmetrico di ABC rispetto alla bisettrice. Abbiamo poi unito fra loro A e A' , B e B' ; in tal modo abbiamo ottenuto i due triangoli simili DAA' e DBB' . Vale perciò la seguente proporzione:

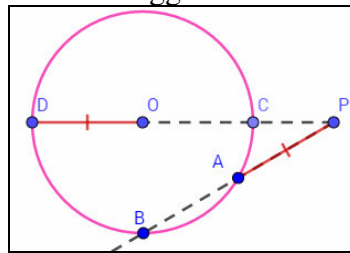
$\frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DA}}$ il cui secondo membro coincide con quello della proporzione che vogliamo provare. Notiamo però che anche i triangoli ACA' e $BB'C$ sono fra loro simili, dato che hanno gli angoli di vertice C opposti al vertice e gli altri uguali perché corrispondenti rispetto alle parallele AA' , BB' tagliate da

AB e AB' rispettivamente. Quindi vale quest'altra proporzione: $\frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{A'C}}$, ma $A'C$ e AC sono fra loro

uguali, quindi si ha: $\frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$. Per la proprietà transitiva dell'uguaglianza dei rapporti otteniamo la

tesi richiesta: $\overline{BC} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{AD}$.

- In figura, CD è un diametro, AB una corda. Il raggio e PA sono uguali e misurano 3, PB misura 7, vo-



gliamo determinare la misura di PC . Applicando il *teorema delle due secanti*, scriviamo la seguente uguaglianza: $\overline{PB} \cdot \overline{PA} = \overline{PD} \cdot \overline{PC}$, dalla quale ricaviamo:

$\overline{PC} = \frac{\overline{PA} \cdot \overline{PD}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PA} \cdot (\overline{PC} + \overline{CD})}{\overline{PB}} = \frac{3 \cdot (\overline{PC} + 6)}{7}$. Confrontando primo e ultimo membro otteniamo

un'equazione nella misura incognita di PC (che indichiamo per brevità con x). Risolviamola:

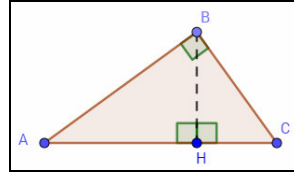
$$x = \frac{3 \cdot (x + 6)}{7} \Rightarrow \frac{7x}{7} = \frac{3x + 18}{7} \Rightarrow 7x - 3x = 18 \Rightarrow 4x = 18 \Rightarrow x = 4,5.$$

- In un triangolo ABC la bisettrice dell'angolo di vertice A divide il lato opposto in parti proporzionali ai numeri 3 e 4. Sapendo che il lato AB misura 8 e il perimetro misura 36, determinare le misure degli altri due. Applicando il *teorema della bisettrice* possiamo dire che vale la seguente proporzione: $\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC}$, in cui D è l'intersezione della bisettrice con BC . Dato che il primo membro della

proporzione vale $\frac{3}{4}$, possiamo ricavare la misura di AC : $3:4=8:\overline{AC} \Rightarrow \overline{AC} = \frac{4 \cdot 8}{3} = \frac{32}{3}$. Infine determiniamo la misura del terzo lato: $\overline{BC} = 2p - (\overline{AB} + \overline{AC}) = 36 - 8 - \frac{32}{3} = \frac{108 - 24 - 32}{3} = \frac{52}{3}$.

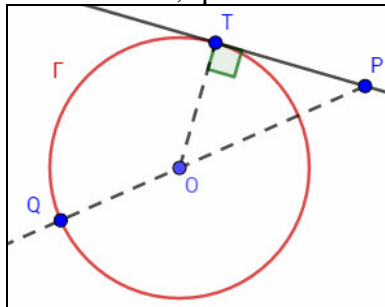
Fase 2: Completa

- Vogliamo provare la validità del *primo teorema di Euclide*, applicato al triangolo rettangolo ABC di ipotenusa BC e relativamente al suo cateto AB . Consideriamo la figura seguente, nella quale abbiamo



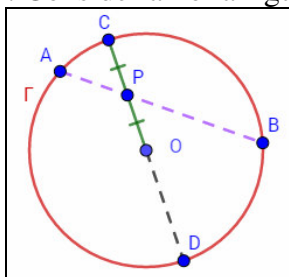
anche tracciato l'altezza AH relativa all'ipotenusa. In questo modo abbiamo suddiviso ABC in due triangoli rettangoli ABH e BCH simili ad ABC e quindi fra loro, per il criterio di similitudine; infatti sono tutti e tre rettangoli, inoltre ABH e BCH hanno entrambi in comune con ABC Concentriamo la nostra attenzione su ABH e ABC : dato che sono simili, possiamo scrivere la seguente proporzione: $\overline{AB} : \dots = \overline{BH} : \dots$, nella quale notiamo la presenza, per due volte, della misura di che, quindi, ricaviamo: $\overline{AB} = \dots$ e che rappresenta proprio l'espressione del primo teorema di Euclide. Teorema che ora possiamo anche enunciare in altra forma sfruttando la proporzione precedente dopo averle applicato la proprietà : $\overline{AC} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{AH}$. Possiamo perciò dire che in un triangolo rettangolo un cateto è fra l'intera ipotenusa e

- Da un punto P esterno a una circonferenza Γ il cui raggio misura 10 è tracciata la tangente PT . Se il segmento di tangenza misura 12, quanto dista il punto di tangenza P dal centro O di Γ ? Consideriamo



la seguente figura: in cui abbiamo tracciato la tangente PT e prolungato il segmento PO fino a raggiungere in A la circonferenza. Noi conosciamo la misura di PT , 12, e quella di AB , Possiamo perciò applicare il teorema, scrivendo: Da questa uguaglianza ricaviamo la misura incognita di PB :; sostituendo x a tale misura, otteniamo un'equazione che risolviamo, considerandone solo la soluzione positiva: Adesso non ci resta che determinare la misura di PO che si ottiene dal precedente valore sottraendone, cioè

- Su una corda AB , scegliamo un punto P che la divide in due parti proporzionali ai numeri 3 e 7. Sapendo che il raggio passante per P , di misura 6, è diviso da P in due segmenti uguali, determinare la misura di AB . Consideriamo la figura seguente in cui abbiamo prolungato il raggio fino a farlo diveni-

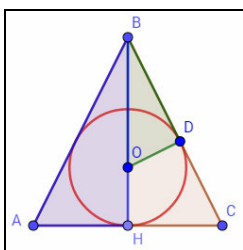


re diametro. In tal modo possiamo applicare il alla corda AB e al, scrivendo: Indichiamo con $3x$ e le misure delle due parti in cui è divisa AB e sostituiamo nella precedente relazione. Abbiamo così un'equazione:

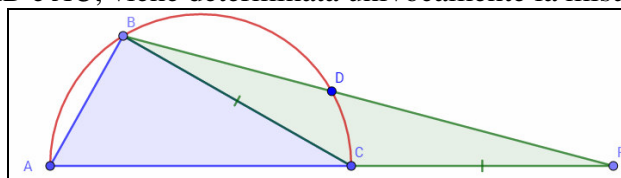
..... da cui ricaviamo la misura di AB :

Fase 3: Prova!

- La bisettrice dell'angolo di vertice A del triangolo ABC divide il lato BC in parti proporzionali ai numeri 4 e 5; sapendo che il lato AB misura 12, determinare la misura di AC . [9,6 oppure 15]
- La bisettrice dell'angolo retto del triangolo rettangolo ABC divide l'ipotenusa BC in due segmenti che misurano 5 e 12. Determinare la misura dei cateti. *Suggerimento*: Impostare un sistema nelle incognite le misure dei cateti. $\left[\frac{85}{13}; \frac{204}{13}\right]$
- Determinare la misura delle due parti in cui la bisettrice dell'angolo retto divide l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti lunghi 8 e 15. [136/23; 255/23]
- Su una corda AB di una circonferenza di raggio di misura 4 e centro O , si sceglie un punto P che la divide in due parti proporzionali ai numeri 3 e 5. Sapendo che P dista 1 unità da O , determinare la misura di AB . [8]
- La corda AB di una circonferenza di centro O è divisa da un punto P in due segmenti lunghi 3 e 8. Se PO è lungo 5 determinare la lunghezza del raggio. [7]
- Due corde si incontrano in un punto P che le divide rispettivamente nei rapporti $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{9}$. Sapendo che la prima corda misura 24 determinare la misura dell'altra. $\left[\frac{\sqrt{15}}{2}\right]$



- In figura ABC è un triangolo isoscele sulla base AC , la circonferenza è inscritta in esso, dimostrare che BOD e ABH sono fra loro simili.
- Utilizzando il precedente risultato e sapendo che $\overline{BH} = 28$; $\overline{HC} = 21$, determinare la misura del raggio della circonferenza inscritta. [10,5]
- Da un punto P esterno a una circonferenza tracciamo due secanti che misurano 10 e 12. Se la parte esterna della prima misura 2, quanto misura la parte esterna dell'altra? [5/3]
- Da un punto P esterno a una circonferenza tracciamo due secanti una delle quali misura 25. Se le parti esterne delle secanti misurano 5 e 7, quanto misura l'altra secante? [125/7 oppure 35]
- Da un punto P esterno a una circonferenza tracciamo due secanti, una delle quali passa per il centro. Se il raggio misura 15 e l'altra secante e la sua parte esterna misurano 18 e 6 rispettivamente, quanto misura la parte esterna della secante diametrale? $[3 \cdot \sqrt{37} - 15]$
- In figura, ABC è inscritto in una semicirconferenza, CBP è isoscele sulla base BP ; spiegare perché, conoscendo le misure di AB e AC , viene determinata univocamente la misura di PB .



- Da un punto P esterno a una circonferenza tracciamo una secante e una tangente; la secante misura 40 e il segmento di tangenza 8. Quanto misura la parte della secante esterna alla circonferenza? [1,6]
- Da un punto P esterno a una circonferenza tracciamo una tangente e una secante che misura 18 e la cui parte esterna misura 8. Quanto misura il segmento di tangenza? [12]

Per svolgere un Test finale di 10 quesiti, collegati al sito

http://mathinterattiva.altervista.org/volume_2_6.htm

6. Geometria del piano

6.3 Equiestensione

Prerequisiti

- Possedere nozioni intuitive di forma
- Possedere nozioni elementari sugli insiemi
- Avere il concetto di ordine
- Criteri di isometria dei triangoli
- Numeri irrazionali
- Radice quadrata

Obiettivi

- Potenziare l'intuizione geometrica per acquisire la consapevolezza che talvolta i propri sensi e l'intuizione possono essere inaffidabili
- Rendere più rigoroso il concetto intuitivo di area
- Affinare le capacità deduttive
- Applicare il teorema di Pitagora e i teoremi di Euclide
- Comprendere il concetto di incommensurabilità

Contenuti

- Nozione di equiestensione
- Area dei poligoni elementari
- Teorema di Pitagora
- Teoremi di Euclide
- Superficie del cerchio

Quelli che vogliono sapere di più

- Applicazioni alla geometria analitica
- Incommensurabilità di segmenti nel piano.
- Generalizzazioni del teorema di Pitagora.
- Formula di Erone

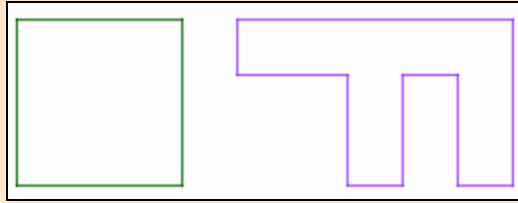
Parole chiave

Equiestensione – Equidecomposizione – Incommensurabilità di segmenti.

Nozione di equiestensione ed area dei poligoni elementari

Il problema

Un imbianchino è stato chiamato per pitturare i due seguenti pannelli in compensato.



Nel momento in cui deve fare un preventivo al proprio cliente, è interessato a sapere se per dipingere i due pannelli è necessaria la stessa quantità di colore. Da cosa dipende questo fatto? Certamente dipende dal numero di mani che deve passare su ciascun pannello, dal grado di diluizione del colore e così via. Ma supponendo che questi parametri siano uguali per entrambi i pannelli, impiegherà più colore per il primo o per il secondo? A questo punto la questione diventa geometrica. La risposta però non dipende dalla forma dei pannelli, questo potrà influire sulla durata del lavoro, poiché nel secondo caso il lavoro richiede certamente maggiore attenzione che non nel primo, ma piuttosto dalla *quantità* di spazio che essi occupano. Se i cartelloni avessero la stessa forma, potremmo confrontare i pannelli per sovrapposizione, stabilendo così se sono uguali o no; qui invece possiamo tentare un altro procedimento e, precisamente, possiamo tentare di dividere le due figure in un certo numero di altre figure a due a due fra loro uguali. Se ciò fosse possibile diremmo che i due pannelli occupano la stessa superficie, diversamente diremmo che ve n'è uno che occupa una superficie maggiore dell'altro.

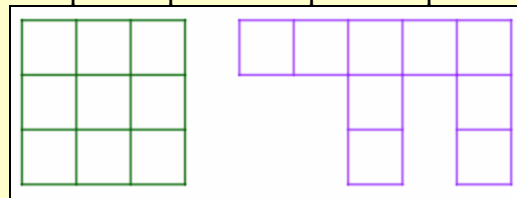
Con riferimento al problema noi diciamo che il concetto di **estensione** è un ente primitivo. Poi chiamiamo **equiestese** due figure aventi la stessa estensione.

Definizione 1

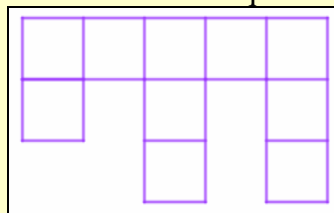
Diciamo che due figure piane date sono **equidecomponibili** se esiste una loro suddivisione in un uguale numero di figure a due a due equiestese.

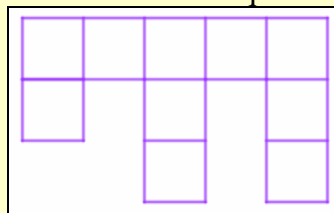
Esempio 1

I poligoni proposti in precedenza sono equiestesi fra loro perché possono equidecomporsi nel seguente



modo, sono cioè formati entrambi da 9 quadratini uguali:



Il seguente poligono  non è invece equiesteso ai precedenti poiché è formato da 10 quadratini uguali ai precedenti.

Naturalmente l'equidecomposizione è un caso particolare di equiestensione, non tutte le figure equiestese sono equidecomponibili, per esempio un cerchio non può essere decomposto mediante poligoni, quindi non può essere equidecomposto a un poligono, ma può essere a esso equiesteso.

L'equiestensione è una relazione binaria di equivalenza: per esempio, pitturare, due pareti equiestese richiede la stessa quantità di vernice. L'equiestensione gode delle tre seguenti proprietà.

Proprietà riflessiva: Ogni figura è equiestesa a se stessa.

Proprietà simmetrica: Se una figura F è equiestesa a una figura F' , anche la F' è equiestesa a F .

Proprietà transitiva: Se una figura F è equiestesa a una figura F' e F' è equiestesa a una figura F'' , anche F e F'' sono equiestese fra loro.

Ricordiamo che il problema dell'isometria fra figure è stato risolto considerando come primitivo il concetto di movimento rigido, cioè spostando le figure sul piano fino a farle coincidere esattamente. Questo procedimento non è possibile con figure che hanno la stessa area ma non sono uguali: non possiamo mai far coincidere un quadrato con un triangolo. Abbiamo quindi bisogno di un altro metodo. Una prima idea è quella che si usa in giochi come il Tangram (o i puzzle), in cui si devono costruire certe figure utilizzando forme predefinite. Se con gli stessi pezzi del Tangram riusciamo a costruire due diverse figure, possiamo essere certi che queste sono fra loro equiestese. Chiameremo questo procedimento **equidecomposizione**, giacché siamo riusciti a suddividere due figure in un certo numero di parti fra loro uguali.

Risulta particolarmente opportuno enunciare alcuni postulati sull'equiestensione.

Postulato 1 (della equidecomponibilità).

Date due figure piane, se esse risultano equidecomponibili sono anche equiestese.

Postulato 2

Due figure piane fra loro uguali sono anche equiestese.

Postulato 3 (dell'unione di figure equiestese).

Data una famiglia F di n figure, non sovrapposte tra loro, e un'altra famiglia F' di n figure, anch'esse non sovrapposte tra loro, a due a due equiestese alle figure di F , l'unione delle figure di F rappresenta una figura equiestesa all'unione delle figure di F' .

Postulato 4 (della differenza di figure equiestese)

Date due figure F e F' fra loro equiestese, le figure che si ottengono da F e F' sottraendo loro due figure fra loro equiestese sono ancora equiestese fra loro.

Consideriamo i precedenti postulati.

Il Postulato 1 è stato qui utilizzato per spiegare il concetto di equidecomponibilità.

Il Postulato 2 rappresenta l'intuizione relativa al fatto che, dato che due figure uguali possono sovrapporsi, è evidente che racchiudono la stessa area.

Il Postulato 3 dice che, se prendiamo alcune figure fra loro equiestese, non importa come disposte sul piano purché non si sovrappongano l'un l'altra, le figure formate sono sempre equiestese fra loro.

Il Postulato 4 dice che se da due figure equiestese *tagliamo* una parte equiestesa le due parti rimanenti hanno ancora la stessa area.

L'equiestensione è collegata al concetto di area. Quindi cerchiamo formule che ci aiutino a determinare il valore numerico che vogliamo associare alle aree delle figure piane, in particolare di alcuni poligoni. Consideriamo unità di misura delle superfici piane l'area racchiusa da un quadrato campione il cui lato misura 1 unità.

Postulato 5

Dato un quadrato di lato unitario, diciamo che la sua area o superficie è una unità quadrata.

In pratica il postulato precedente afferma che un quadrato di lato 1 *cm* ha area 1 *cm*²; di lato 1 yarda (yd) ha area 1 *yd*² e così via.

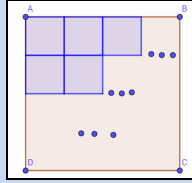
Vale ovviamente il seguente risultato.

Teorema 1

Un quadrato il cui lato misura ℓ unità ha area che misura ℓ^2 unità quadrate.

Dimostrazione

Un quadrato il cui lato misura ℓ unità si può suddividere in ℓ^2 quadrati di lati unitari, basta suddividere ogni



lato in ℓ parti uguali.

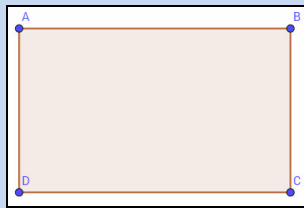
Notazione 1

Per indicare la misura dell'area o superficie di un poligono P , scriviamo S_P .

Vediamo adesso di determinare una formula per il calcolo dell'area di un rettangolo non quadrato.

Teorema 2

Un rettangolo i cui lati rispetto a una unità data misurano a e b , è equiesteso a un quadrato avente il lato che misura $\sqrt{ab}$.

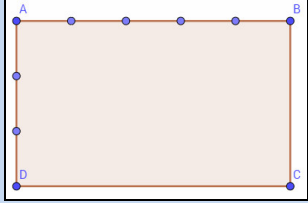
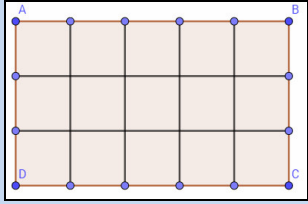


Ipotesi: $\overline{AB} = \overline{CD} = a$; $\overline{BC} = \overline{AD} = b$

Tesi: $S_{ABCD} = a \cdot b$

Dimostrazione

Dimostreremo il teorema solo nel caso in cui le misure dei lati sono entrambe espresse da numeri razionali.

Schema dimostrativo			
Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Scegliamo una unità di misura u in modo che le misure dei lati di ABCD siano espresse da numeri naturali	 I lati AB e CD misurano a e i lati BC e AD b .	Se per esempio i lati, in una certa unità di misura u , sono lunghi $\frac{3}{8}u$ e $\frac{13}{6}u$, possiamo considerare una unità di misura v per cui $\frac{1}{24}u = 1v$, così $\frac{3}{8}u = \frac{9}{24}u = 9v$ e $\frac{13}{6}u = \frac{52}{24}u = 52v$.
2	Suddividiamo il lato AB in a segmenti unitari e da ognuno degli estremi tracciamo un segmento parallelo al lato BC , fino a raggiungere CD . Lo stesso per BC in b segmenti unitari e da ognuno degli estremi tracciamo un segmento parallelo ad AB fino a raggiungere AD .	 La superficie del rettangolo misura $a \cdot b$ unità quadrate.	Abbiamo suddiviso il rettangolo in $a \cdot b$ quadrati unitari.

Dal precedente teorema si deduce la formula per il calcolo della misura dell'area di un rettangolo:

Regola 1

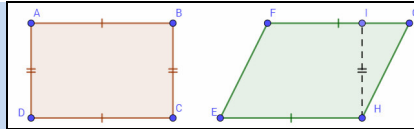
L'area di un rettangolo è data dal prodotto delle misure di due lati non paralleli.

Consideriamo i parallelogrammi.

Teorema 3

Un parallelogramma e un rettangolo con un lato e la corrispondente altezza rispettivamente uguali sono fra loro equiestesi.

Ipotesi: $\overline{AB} = \overline{FG}$; $\overline{BC} = \overline{HI}$



Tesi: $S_{ABCD} = S_{EFGH}$

Dimostrazione

Siano dati il rettangolo $ABCD$ e il parallelogramma $EFGH$ in figura. Possiamo supporre che A, B, E, F siano allineati, così come lo siano D, C, H, G ; ciò perché i due quadrilateri hanno altezze uguali.

Schema dimostrativo			
Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Trasliamo $EFGH$ di un vettore equipollente a quello che trasforma E in D .		
2	EH si sovrappone a DC .		Per l'ipotesi e le proprietà della traslazione.
3	Consideriamo i due triangoli AFD e IGH .	Sono uguali.	Per il criterio di isometria dei triangoli rettangoli, dato che hanno le ipotenuse FD e GH uguali, così come i cateti AD e IC .
4	Consideriamo $ABCD$ ed $EFGH$.	Sono equiestesi.	Perché $ABCD = AFD \cup FBCE$ e $EFGH = IGH \cup FBCE$, considerati come insiemi di punti, quindi per il Postulato 3 si ha la tesi.

Grazie al precedente teorema possiamo enunciare la formula per il calcolo della misura dell'area di un parallelogramma:

Regola 2

L'area di un parallelogramma è data dal prodotto delle misure di un lato e dell'altezza a esso relativa.

Vale anche il seguente corollario del teorema 3.

Corollario 1

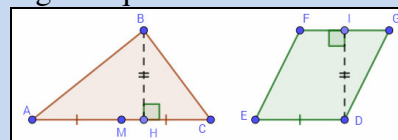
Due parallelogrammi aventi fra loro uguali un lato e l'altezza a esso relativa sono uguali.

Passiamo all'area dei triangoli.

Teorema 4

Un triangolo e un parallelogramma, tali che un lato del triangolo sia uguale al doppio di un lato del parallelogramma e con le relative altezze fra loro uguali, sono poligoni equiestesi.

Ipotesi: $\overline{AM} = \overline{MC} = \overline{DE}$; $\overline{BH} = \overline{DI}$; $BH \perp AC$; $DI \perp DE$



Tesi: $S_{ABC} = S_{DEFG}$

Dimostrazione

Siano dati il triangolo ABC e il parallelogramma $DEFG$ in figura.

Schema dimostrativo			
Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione

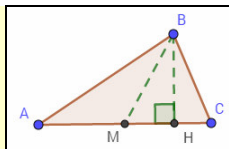
1	Consideriamo il punto medio M di AC e da esso tracciamo la parallela ad AB .		
2	Da B tracciamo la parallela ad AC che incontra la precedente retta in L .		
3	Consideriamo il parallelogramma $ABLM$ e il triangolo ABC .		Si ha: $ABLM = ABJM \cup BLJ$; $ABC = ABJM \cup MJC$.
4	Consideriamo i triangoli BLJ e MJC .		Per il criterio LAL, dato che hanno: $\overline{BJ} = \overline{JC}$, poiché MJ è parallela ad AB e passa per il punto medio di AB , deve passare anche per quello di BC . $\angle BLJ = \angle CMJ$ perché alterni interni rispetto alle parallele BL e AC tagliate da BC . $\angle LJB = \angle MJC$ perché opposti al vertice
5		ABC e $ABLM$ sono equiestesi.	Per il passo 3 e il Postulato 3.
6	Consideriamo $ABLM$ e $DEFG$.	Sono equiestesi.	Per il corollario 1.
7		ABC e $DEFG$ sono equiestesi.	Per la proprietà transitiva dell'equiestensione.

Grazie al teorema 3, possiamo enunciare la formula per il calcolo della misura dell'area di un triangolo.

Regola 3

L'area di un triangolo è data dal semiprodotto delle misure di un lato e dell'altezza a esso relativa: $\frac{l \cdot h}{2}$

Esempio 2

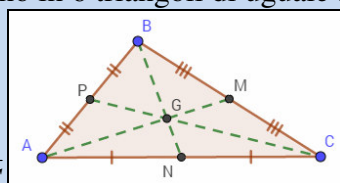


Sia il triangolo ABC in figura, in cui AM è una sua mediana, AH un'altezza. Consideriamo i triangoli ABM e MBC . Diciamo che essi sono equiestesi. Infatti le altezze relative ai lati AM del triangolo ABM e MC del triangolo MBC coincidono con l'unico segmento BH . Pertanto i due triangoli hanno basi fra loro uguali, AM e MC , e relative altezze comuni, quindi sono figure equiestese.

Sfruttando quanto visto nell'esempio precedente possiamo facilmente dimostrare il seguente sorprendente risultato.

Teorema 5

Le mediane di un triangolo lo dividono in 6 triangoli di uguale area.



Ipotesi: $\overline{AP} = \overline{PB}$; $\overline{BM} = \overline{MC}$; $\overline{AN} = \overline{NC}$

Tesi: $S_{APG} = S_{PBG} = S_{BGM} = S_{CGM} = S_{MNC} = S_{AGN}$

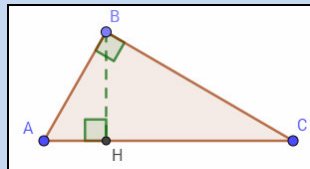
Dimostrazione

Schema dimostrativo			
Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Consideriamo i triangoli AGN e NGC	Sono equiestesi	Per quanto visto nell'esempio 2
2	Consideriamo i triangoli APG e PBG	Sono equiestesi	Per quanto visto nell'esempio 2
3	Consideriamo i triangoli BMG e CGM	Sono equiestesi	Per quanto visto nell'esempio 2
4	Consideriamo i triangoli ABN e NBC	Sono equiestesi	Per quanto visto nell'esempio 2
5	Consideriamo i triangoli ABG e BGC	Sono equiestesi	Perché ottenuti da triangoli equiestesi togliendo una stessa parte equiestesa (AGN e NGC)
6	Consideriamo i triangoli APG e CGM	Sono equiestesi	Perché metà di triangoli equiestesi (ABG e BGC)
7	Consideriamo i triangoli APG e AGN	Sono equiestesi	Ripetendo i passi precedenti

Consideriamo altri semplici teoremi.

Teorema 6

In un triangolo rettangolo la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa è il rapporto fra il prodotto delle misure dei cateti e la misura della stessa ipotenusa.



Ipotesi: $AB \perp BC$, $BH \perp AC$

$$\textit{Tesi: } \overline{BH} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{\overline{AC}}$$

Dimostrazione

È proposta come esercizio. Suggeriamo di determinare l'area del triangolo in due modi diversi.

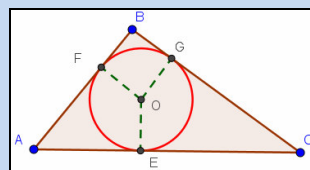
Possiamo provare anche il seguente fatto.

Teorema 7

Il raggio della circonferenza inscritta in un triangolo si ottiene dal rapporto fra la misura dell'area del triangolo e la misura del semiperimetro.

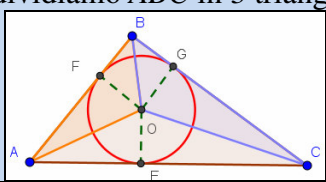
Dimostrazione

Ci riferiamo alla seguente figura in cui ABC è un triangolo qualsiasi e la circonferenza di centro O è inscritta in ABC .



Ipotesi: $\overline{OE} = \overline{OF} = \overline{OG} = r$; $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 2p$

$$\textit{Tesi: } r = \frac{S_{ABC}}{P}$$

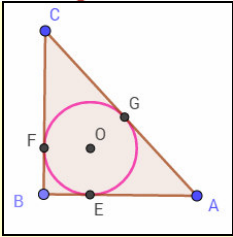
Schema dimostrativo			
Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Uniamo il centro O della circonferenza con i vertici del triangolo.	Suddividiamo ABC in 3 triangoli. 	
2	Consideriamo l'area di ABC .	Si ha: $S_{ABC} = S_{ABO} + S_{BCO} + S_{CAO}$.	Per il postulato 3
3	Consideriamo i raggi che uniscono O con i punti di tangenza i precedenti raggi.	Sono le altezze dei rispettivi triangoli in cui è stato suddiviso ABC .	Per il teorema 10 dell'unità 6.1

4	Calcoliamo l'area di ABC .	$S_{ABC} = S_{ABO} + S_{BCO} + S_{CAO} =$ $= \frac{\overline{AB} \cdot \overline{OF}}{2} + \frac{\overline{BC} \cdot \overline{OG}}{2} + \frac{\overline{AC} \cdot \overline{OE}}{2} =$ $= r \cdot \frac{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}}{2} = r \cdot p$	
---	------------------------------	---	--

La tesi del precedente teorema può così scriversi sotto forma di formula, in cui a , b e c indicano le misure dei lati del triangolo:

$$r = \frac{2 \cdot S_{ABC}}{a + b + c}$$

Esempio 3



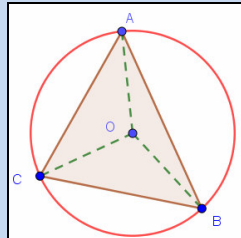
Vogliamo provare che, dato un triangolo rettangolo i cui cateti misurano a e b unità e la cui ipotenusa misura c unità, detta d la misura del diametro della circonferenza inscritta nel triangolo, vale la seguente uguaglianza: $a + b = c + d$. Grazie al teorema precedente possiamo dire che si ha: $d = \frac{4 \cdot S_{ABC}}{a + b + c}$.

Tenuto conto che siamo in un triangolo rettangolo possiamo scrivere: $d = \frac{4 \cdot \frac{a \cdot b}{2}}{a + b + c} = \frac{2 \cdot a \cdot b}{a + b + c}$. Adesso operiamo un artificio algebrico per semplificare la precedente espressione utilizzando il teorema di Pitagora, il fatto cioè che $a^2 + b^2 = c^2$. Moltiplichiamo numeratore e denominatore per la quantità non nulla $a + b - c$, ottenendo: $d = \frac{2ab \cdot (a + b - c)}{(a + b)^2 - c^2} = \frac{2ab \cdot (a + b - c)}{a^2 + b^2 + 2ab - c^2} = \frac{2ab \cdot (a + b - c)}{c^2 + 2ab - c^2} = \frac{2ab \cdot (a + b - c)}{2ab} = a + b - c$. La relazione ottenuta è chiaramente equivalente a quella che si voleva ottenere.

Per completezza enunciamo anche il seguente risultato che riguarda le circonferenze circoscritte ai triangoli.

Teorema 8

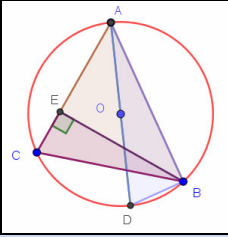
Il raggio della circonferenza circoscritta a un triangolo si ottiene dal rapporto fra il prodotto delle misure dei lati e il quadruplo della misura dell'area del triangolo.



Ipotesi: $A, B, C \in \Gamma$; $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = R$

$$\text{Tesi: } R = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC}}{4S_{ABC}}$$

Schema Dimostrativo				
Passo	Azione	Conseguenza		Giustificazione
1	Da uno dei vertici del triangolo ABC , per esempio da A , tracciamo il diametro AD e quindi il triangolo ABD			Perché inscritto in una semicirconferenza

		Il triangolo ABD è retto nel vertice B	
2	Nel triangolo ABC tracciamo l'altezza BE relativa al lato AC e consideriamo i triangoli CEB e ABD		Per il primo criterio di similitudine, dato che hanno $\angle B\hat{D}A = \angle B\hat{C}E$, angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $\widehat{AB}$ e sono entrambi retti
3	Scriviamo il rapporto di similitudine	$\overline{AD} : \overline{BC} = \overline{AB} : \overline{BE}$	Per il punto 2
4	Determiniamo la misura di AD	$\overline{AD} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AB}}{\overline{BE}}$	Per il punto 3
5	Determiniamo la misura di BE	$\overline{BE} = \frac{2 \cdot S_{ABC}}{\overline{AC}}$	Formula inversa dell'area del triangolo ABC
6	Ricaviamo il raggio della circonferenza	$R = \frac{\overline{AD}}{2} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AB}}{2 \cdot \frac{2 \cdot S_{ABC}}{\overline{AC}}} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC}}{4 \cdot S_{ABC}}$	Per i passi precedenti

Esempio 12

Determiniamo la misura del raggio della circonferenza circoscritta a un triangolo equilatero di lato di misura

1. Ricordiamo che l'area di un tale triangolo è $\frac{l^2}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Quindi avremo: $R = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Passiamo adesso a determinare una formula per determinare l'area di un rombo.

Teorema 9

Un rombo è equiesteso a un triangolo che ha un lato e la relativa altezza uguali alle sue diagonali.

Dimostrazione Per esercizio

Dal risultato precedente possiamo enunciare la regola per il calcolo della misura dell'area di un rombo:

Regola 4

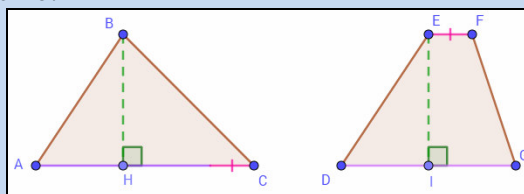
L'area di un rombo è data dal semiprodotto delle misure delle sue diagonali: $\frac{d_1 \cdot d_2}{2}$

Vediamo adesso cosa accade per i trapezio.

Teorema 10

Un trapezio è equiesteso a un triangolo che ha un lato e l'altezza a esso relativa rispettivamente uguali alla somma delle basi e all'altezza del trapezio.

Ipotesi: $\overline{AC} = \overline{GD} + \overline{EF}$; $\overline{BH} = \overline{EI}$

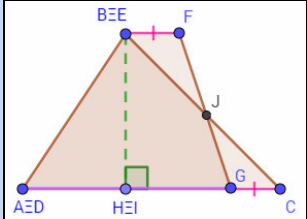
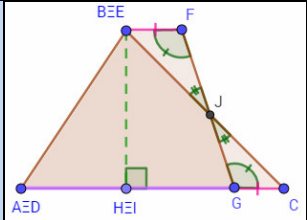


Tesi: $S_{ABC} = S_{DEFG}$

Dimostrazione

Osserviamo che possiamo sempre fare in modo che il triangolo e il trapezio abbiano AC e DG allineati, così come il punto B con EF , ciò perché hanno le altezze BH ed EI uguali. Inoltre, possiamo fare in modo che i lati AB e DE siano paralleli perché, se così non fosse, potremmo costruire un altro triangolo equiesteso ad ABC , che verifica tutte le proprietà dette.

Schema dimostrativo

Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Trasliamo il trapezio rispetto al vettore $\overrightarrow{DA}$.	 Sia J l'intersezione P fra i lati BC e FG.	
2	Consideriamo il trapezio $DEFG$ e il triangolo ABC .	Si ha $DEFG = ABJG \cup EFJ$; $ABC = ABJG \cup CGJ$.	
4	Consideriamo i triangoli EFJ e CGJ .	 Sono uguali.	Per il criterio ALA, dato che hanno: $\overline{EF} = \overline{CG}$ per ipotesi; $\angle \hat{EFJ} = \angle \hat{CGJ}$ perché alterni interni rispetto alle parallele EF e AC tagliate da FG . $\angle \hat{FJE} = \angle \hat{GJC}$ perché opposti al vertice
5		EFJ e CGJ sono equiestesi.	Per il Postulato 1.
6		ABC e $DEFG$ sono equiestesi.	Per il postulato dell'unione di figure equiestese

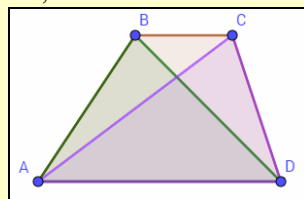
Dal precedente teorema segue la formula per il calcolo della misura dell'area di un trapezio:

Regola 5

L'area di un trapezio è data dal prodotto fra la semisomma delle misure delle sue basi e la misura dell'altezza: $\frac{b_m + b_M}{2} \cdot h$

Esempio 4

Consideriamo un qualsiasi trapezio $ABCD$ e tracciamo le sue diagonali AC e BD . Vogliamo provare che i triangoli ABD e ACD sono fra loro equiestesi, così come lo sono i triangoli ABC e BCD .



In entrambi i casi i triangoli hanno le basi in comune e le relative altezze uguali dato che coincidono con le altezze del trapezio.

Abbiamo visto come determinare l'area di un rettangolo utilizzando quella di un quadrato, quella di un parallelogramma utilizzando quella di un rettangolo adesso vediamo il caso dell'area di un generico poligono convesso.

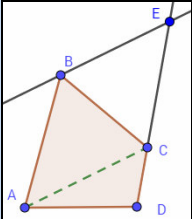
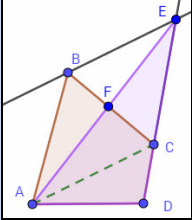
Teorema 11

Qualunque poligono convesso risulta equiesteso a un triangolo.

Dimostrazione

Proveremo la tesi nel caso di un quadrilatero convesso $ABCD$.

Schema dimostrativo			
Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione

1	Consideriamo tre vertici consecutivi, A, B, C ; tracciamo il segmento AC e la parallela a esso passante per B che incontra in E il prolungamento del lato CD .		
2	Consideriamo il triangolo AED e sia F l'intersezione di AE con BC .	 $ABCD = AFCD \cup FEC$	
3	Consideriamo i triangoli ABE e BEC .	Sono equiestesi.	Perché relativamente al loro lato comune BE hanno altezze uguali, dato che i vertici opposti A e C giacciono su una retta parallela a BE .
4		Il quadrilatero $ABCD$ è equiesteso al triangolo AED .	Per i passi 2 e 3

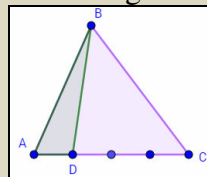
Con analoga costruzione può mostrarsi che un pentagono convesso è equiesteso a un quadrilatero convesso e quindi a un triangolo e così via.

Verifiche

Lavoriamo insieme

La superficie del triangolo ABC è 1 unità quadrata, D è un punto scelto sul segmento AC in modo che si

abbia $\overline{DC} = 3 \cdot \overline{AD}$. Determinare la misura dell'area del triangolo ABD .



Notiamo che l'altezza relativa alla base AD , nel triangolo ABD , coincide con l'altezza relativa ad AB nel triangolo ABC e che, dato che $\overline{DC} = 3 \cdot \overline{AD}$, si ha: $\overline{AD} = \frac{1}{4} \cdot \overline{AC}$. Pertanto si ha:

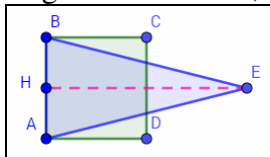
$$S_{ABC} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BH}}{2} = 1 \text{ e } S_{ADB} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BH}}{2} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BH}}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BH}}{2} = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}.$$

In qualcuno dei seguenti problemi potrà essere utile ricordare che l'area di un triangolo equilatero di lato

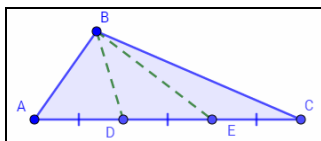
$$\ell \text{ è } \frac{\ell^2}{4} \cdot \sqrt{3}$$

Livello 1

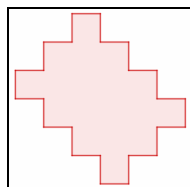
1. Nel triangolo ABC , D è un punto scelto sul segmento BC in modo che si abbia $\overline{BD} = 4\overline{DC}$; sapendo che la superficie del triangolo ADC è 1 u^2 , determinare l'area del triangolo ABC . [5 u²]



2. Nella figura seguente sono disegnati un triangolo isoscele e un quadrato fra loro equiestesi. Sapendo che l'altezza EH del triangolo isoscele è lunga 8 cm , determinare la misura del lato del quadrato. [4 cm]

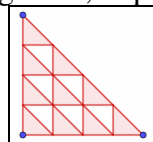


3. Nel triangolo ABC in figura, $\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{EB}$, se l'area del triangolo DBC è 1, determinare l'area di ABC . [1,5]
4. Nel triangolo ABC divido il lato AB in un certo numero di parti uguali. Unisco il primo di questi punti, D , dalla parte di A con C . Se l'area di ABC è 16 e quella di ADC è 2, determinare in quante parti è stato diviso AB . [8]



5. Il poligono in figura è equilatero, i lati consecutivi sono fra loro perpendicolari. Sapendo che il suo perimetro è 24 cm , determinare l'area. [18 cm²]

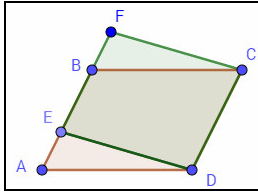
6. Il triangolo in figura è rettangolo isoscele, sapendo che tutti i segmenti segnati sono paralleli ai lati del triangolo grande, e quelli fra loro paralleli sono fra loro uguali, determinare la percentuale di area om-



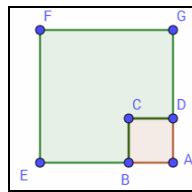
breggiata.

[62,5 %]

7. Determinare l'area di un esagono regolare inscritto in un cerchio di raggio 4 dm . $\left[24 \cdot \sqrt{3}\text{ dm}^2\right]$
8. In un triangolo, la cui superficie è 24 cm^2 , un lato, lungo 6 cm , viene aumentato di 2 cm . Di quanto si deve diminuire la rispettiva altezza, se si vuole ottenere un triangolo equiesteso alla metà di quello dato? $[5\text{ cm}]$
9. ABC è un triangolo rettangolo di ipotenusa AC . Si prolunghi BC di un segmento CD uguale a BC . Si congiunga D con il punto medio E di AB . Se la superficie di ABC è 10 cm^2 , quant'è l'area di BDE ? $[10\text{ cm}^2]$



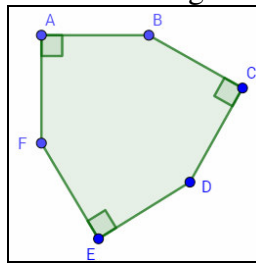
10. In figura $ABCD$ e $CDEF$ sono parallelogrammi, $E \in AB$. Determinare il rapporto delle loro aree. $[1]$
11. Nel triangolo ottusangolo ABC il lato maggiore AB è lungo 12 , l'altezza CH a esso relativa è 4 , sapendo che l'altezza BK è 8 , determinare la misura di AC . $[6]$



12. L'area del quadrato più piccolo in figura è un terzo di quella del più grande. Calcolare il rapporto fra i loro lati. $[\sqrt{3}]$

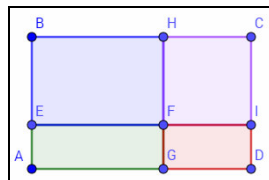
Livello 2

13. La diagonale AC del rettangolo $ABCD$, viene divisa in 7 parti fra loro uguali. Dimostrare che i triangoli con vertice B e due punti consecutivi qualunque, tra quelli determinati sulla diagonale, sono equiestesi.
14. Con riferimento all'esercizio precedente, determinare la misura dell'area di uno qualsiasi dei triangoli equiestesi, sapendo che le dimensioni del rettangolo misurano 21 e 28 cm . $[42\text{ cm}^2]$



15. L'esagono in figura è equilatero e ha retti gli angoli segnati. Determinarne l'area sapendo che il lato misura 1 . *Suggerimento:* Sezionare in modo opportuno l'esagono. $\left[\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right]$

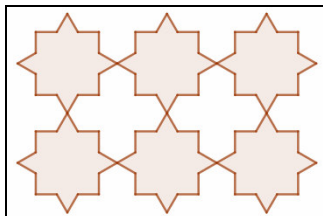
16. Determinare l'area di un esagono regolare inscritto in un cerchio di raggio r . $\left[\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} r^2\right]$



17. Il rettangolo $ABCD$ in figura è suddiviso in 4 rettangoli, tre dei quali hanno aree $12, 28, 42$. Determinare l'area del quarto. $[3 \text{ possibili soluzioni: } 8 \vee 18 \vee 98]$

Livello 3

18. Con riferimento al precedente quesito, se le tre aree sono A_1, A_2 e A_3 , determinare la quarta area $[Il \text{ prodotto di due di esse fratto la terza}]$

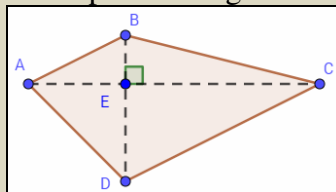


19. In figura è mostrata una decorazione iraniana conservata presso il museo Bastan. Sapendo che il poligono è equilatero e che il suo lato è lungo 1, determinare l'area racchiusa dalla figura stellata e quella della figura a forma di croce.

$$\left[9 + \sqrt{3}; 3 + 5 \cdot \sqrt{3} \right]$$

Lavoriamo insieme

Provare che, in un quadrilatero con le diagonali fra loro perpendicolari, l'area si trova moltiplicando fra loro le misure delle diagonali e dividendo il risultato per 2. In figura abbiamo disegnato un generico quadrilatero



con le diagonali fra loro perpendicolari. In questo modo il quadrilatero risulta suddiviso in 4 triangoli rettangoli: per ottenere la sua area è quindi sufficiente determinare quella di tali

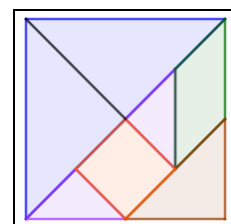
$$\begin{aligned} \text{triangoli. Abbiamo così: } S_{ABCD} &= S_{ABE} + S_{BCE} + S_{CDE} + S_{ADE} = \frac{\overline{AE} \cdot \overline{BE}}{2} + \frac{\overline{BE} \cdot \overline{EC}}{2} + \frac{\overline{EC} \cdot \overline{ED}}{2} + \frac{\overline{AE} \cdot \overline{ED}}{2} = \\ &= \frac{\overline{AE} \cdot (\overline{BE} + \overline{ED}) + \overline{EC} \cdot (\overline{BE} + \overline{ED})}{2} = \frac{\overline{AE} \cdot \overline{BD} + \overline{EC} \cdot \overline{BD}}{2} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2}, \text{ che è quanto si voleva dimostrare.} \end{aligned}$$

Potevamo anche procedere nel seguente altro modo. L'area del quadrilatero è data dalla somma delle aree dei due triangoli in cui ogni diagonale lo suddivide, nei quali la base è una diagonale e le altezze ad essa relative hanno per somma l'altra diagonale. Quindi, per esempio:

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BE}}{2} + \frac{\overline{AC} \cdot \overline{ED}}{2} = \frac{\overline{AC} \cdot (\overline{BE} + \overline{ED})}{2} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2}$$

Livello 1

20. I punti D , E ed F sono rispettivamente scelti sui lati AB , BC e AC del triangolo ABC , in modo che ABE e $DBEF$ siano equiestesi. Dimostrare che i triangoli ADE e DEF sono equiestesi.
21. Provare che l'area di un trapezio isoscele le cui diagonali sono fra loro perpendicolari è la metà di quella del quadrato della sua diagonale.
22. Tenuto conto del risultato enunciato nell'esercizio precedente, determinare la misura della diagonale di un trapezio isoscele con le diagonali fra loro perpendicolari, la cui superficie è 128 cm^2 . [16 cm]
23. Le basi di un trapezio isoscele $ABCD$ sono $\overline{AD} = 28$ e $\overline{BC} = 20$. Sulla base maggiore si consideri un segmento $\overline{FE} = 4$. Da E e da F si traccino le parallele al lato CD , che incontrino la retta per BC rispettivamente in H e in G . Se l'area del trapezio è 384, quant'è quella del parallelogramma $EFGH$? [64]
24. In un trapezio $ABCD$ sia E il punto d'incontro delle diagonali. Dimostrare che i triangoli ABE e CDE sono fra loro equiestesi.
25. Un triangolo equilatero e un esagono regolare hanno il perimetro di uguale misura. Determinare il rapporto fra l'area dell'esagono e quella del triangolo. [3/2]



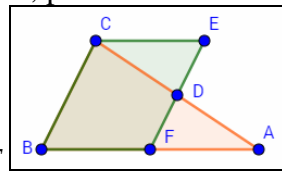
26. Il Tangram è un antico gioco cinese formato da sette pezzi, come in figura, nella quale poligoni colorati nello stesso modo sono uguali. Se la superficie del quadrato più grande è 16 unità, quanto sono le aree delle sette figure?

$$[4; 4; 2; 1; 2; 1; 2]$$

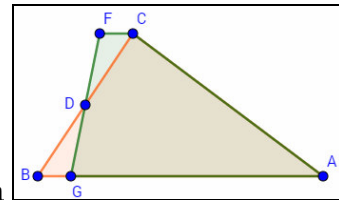
27. Provare che in un triangolo rettangolo vale la seguente relazione: la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa è data dal rapporto fra il prodotto delle misure dei due cateti e quella dell'ipotenusa.

Livello 2

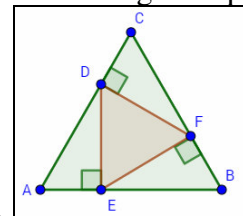
28. Sia dato il triangolo ABC , in cui il punto D divide il lato BC nel rapporto $\frac{BD}{DC} = h$. Provare che anche le superfici dei triangoli ABD e ADC stanno nello stesso rapporto.
29. Dimostrare il teorema 6.
30. Dimostrare il teorema 8.
31. Provare che, unendo i punti medi dei lati di un trapezio rettangolo, si ottiene un parallelogramma equiesteso a metà del trapezio. *Suggerimento*: ricordare che il segmento che unisce i punti medi dei lati di un triangolo è ...
32. Dato un triangolo ABC , si tracci per D , punto medio di AC , la parallela al lato BC , come in figura, e si



costruisca il parallelogramma $BCEF$. Si dimostri che esso è equiesteso ad ABC e che F è punto medio di AB .

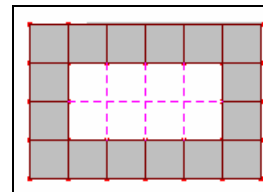


33. Dimostrare che il triangolo ABC e il trapezio $CAGF$ in figura sono equiestesi, sapendo che D è il punto medio di BC , indipendentemente dalla direzione di FG .
34. Dato un trapezio $ABCD$ di basi AB e CD , dal punto medio E del lato CB si conduca la parallela al lato AD e siano F e G i punti d'incontro di questa con le rette rispettivamente di AB e CD . Dimostrare che il parallelogramma $AFGD$ è equiesteso al trapezio dato.
35. In figura il triangolo equilatero DEF ha i vertici appartenenti ai lati del triangolo equilatero ABC , in



modo che i lati dei due triangoli vengano a formare tre angoli retti. Determinare il rapporto fra l'area di ABC e quella di DEF . [3]

36. Quanti rettangoli con i lati entrambi interi, hanno area e perimetro misurati dallo stesso numero? *Suggerimento*: Usare il seguente disegno e determinare una relazione fra il numero di rettangoli che for-

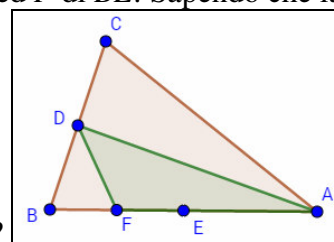


mano il bordo colorato del rettangolo e il perimetro.

[Non ne esistono]

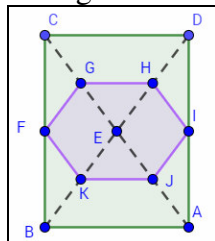
37. Dato il triangolo ABC , siano M e N rispettivamente i punti medi del lato AB e del segmento AM . Si tracci la parallela al segmento CN condotta per il punto M , la quale incontra il lato BC nel punto D . Provare che i triangoli MDC e MDN sono fra loro equiestesi.
38. Dato il parallelogramma $ABCD$, sulla sua diagonale BD si fissi il punto medio E e, sul lato AD , il punto F in modo che $\overline{DA} = 3\overline{DF}$. Provare che il triangolo DFE è equiesteso a $\frac{1}{12}$ del parallelogramma.

39. Nel triangolo ABC in figura, D è punto medio di BC , E di AB ed F di BE . Sapendo che la superficie del



triangolo AFD è 63 dm^2 , quanto vale l'area del triangolo ABC ? [162 dm^2]

40. In figura è disegnato un rettangolo $ABCD$ e un esagono $FGHIJK$, costruito considerando i punti medi dei segmenti BC , CE , DE , DA , AE , BE , rispettivamente con E punto di incontro delle diagonali del rettangolo. Sapendo che i lati del rettangolo sono lunghi 12 cm e 16 cm , determinare la misura del perimetro e dell'area dell'esagono.

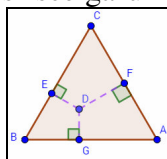


[32 cm ; 72 cm^2]

41. Dimostrare il Teorema 11, mostrando che un pentagono è equiesteso a un triangolo.
 42. Su una mappa la cui scala è $1 : 4000$ è rappresentata una regione a forma di rombo, di cui un angolo misura 60° . Sapendo che sulla mappa la diagonale opposta a detto angolo è lunga 4 cm , determinare la reale estensione della regione. [$\approx 22170 \text{ m}^2$]

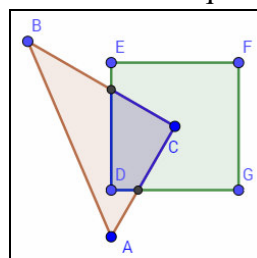
Livello 3

43. Dato un triangolo equilatero ABC , si scelga un punto qualsiasi D al suo interno da cui si traccino i



segmenti perpendicolari ai tre lati. Provare che la somma di questi segmenti è uguale all'altezza del triangolo.

44. Dato un triangolo equilatero ABC , sia P un punto al suo interno le cui distanze dai lati sono rispettivamente 3, 4, 5. Determinare la lunghezza del lato di ABC . [$8\sqrt{3}$]
 45. In un triangolo ABC , le mediane AM e BN si incontrano nel punto G . Chiamando P il punto medio di AN , provare che il triangolo PGN è equiesteso a $\frac{1}{12}$ del triangolo ABC .
 46. Il triangolo ABC è rettangolo in C , $\overline{AC} = 8$, $\overline{BC} = 6$ e C è il centro del quadrato $DEFG$, di lato 6. De-



terminare l'area della superficie comune ai due poligoni. [36]

47. Nel triangolo ABC siano E un punto scelto su AB in modo che $\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{4}{7}$, e D un punto scelto su AC in modo che il rapporto dell'area di $BCDE$ con quella di ABC sia $\frac{5}{7}$. Provare che l'area di AEC è doppia dell'area di AED .

48. Con riferimento all'esercizio precedente, sia $\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = k$ e h il rapporto delle aree di $BCDE$ e ABC . Determinare quanto vale k/h affinché l'area di AEC sia doppia di quella di AED . [4/5]

Lavoriamo insieme

Determinare la misura del raggio di una circonferenza inscritta in un triangolo rettangolo i cui lati misurano a , b e c (con c indichiamo la misura dell'ipotenusa).

Abbiamo visto che il raggio di una circonferenza inscritta in un generico triangolo si ottiene dal rapporto fra l'area e il semiperimetro dello stesso triangolo. Dato che stiamo considerando un triangolo rettangolo di cateti che misurano a e b , l'area sarà $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b$, mentre il semiperimetro sarà $\frac{1}{2} \cdot (a + b + c)$. pertanto il

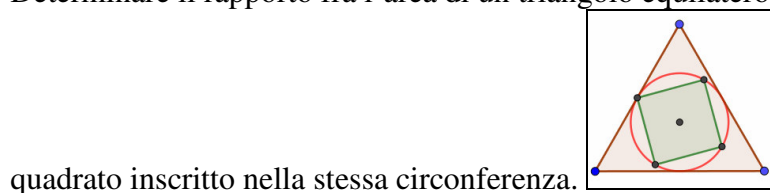
$$\text{raggio cercato misurerà: } r = \frac{a \cdot b}{a + b + c}.$$

Livello 1

49. Determinare la misura del raggio della circonferenza inscritta in un triangolo rettangolo i cui lati misurano 3, 4 e 5 unità. [1]
50. Determinare la misura del raggio della circonferenza inscritta in un triangolo rettangolo i cui lati misurano $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$. [$n \cdot (m - n)$]
51. Dato un triangolo rettangolo, trovare una relazione che lega fra loro l'ipotenusa i , il diametro d del cerchio inscritto nel triangolo e i cateti a e b . $\left[d = 2 \cdot \frac{ab}{a + b + i} \right]$

Livello 2

52. Determinare la misura del perimetro di un triangolo rettangolo circoscritto a una circonferenza di raggio che misura 3 cm, sapendo che la sua ipotenusa misura 17 cm. [40 cm]
53. Determinare la misura dell'area di un triangolo rettangolo il cui cateto maggiore misura 12 cm, sapendo che è circoscritto a una circonferenza di diametro che misura 4 cm. [30 cm²]
54. Determinare la misura del raggio della circonferenza inscritta in un triangolo equilatero, nota la misura ℓ del lato del triangolo. $\left[\frac{\ell}{6} \cdot \sqrt{3} \right]$
55. Sapendo che una circonferenza di raggio unitario è inscritta in un triangolo equilatero determinare la misura del perimetro del triangolo. $\left[6 \cdot \sqrt{3} \right]$
56. Data una circonferenza, consideriamo il triangolo equilatero inscritto, quello circoscritto e l'esagono regolare inscritto. Se ne calcolino le aree e si verifichi che quella dell'esagono è media proporzionale fra quelle dei triangoli. $\left[T_i : \frac{3}{4} \cdot \sqrt{3}r^2; E : \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3}r^2; T_c : 3 \cdot \sqrt{3}r^2 \right]$
57. Determinare il rapporto fra l'area di un triangolo equilatero circoscritto a una circonferenza e l'area del



quadrato inscritto nella stessa circonferenza.

$$\left[\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \right]$$

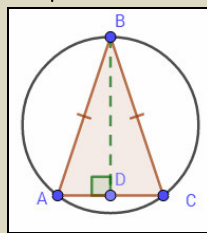
58. Provare che se due triangoli sono simili di rapporto k , anche i raggi delle rispettive circonferenze inscritte stanno nello stesso rapporto. *Suggerimento*: ricordare come si trova il raggio della circonferenza inscritta in un triangolo.

Lavoriamo insieme

Vogliamo determinare la lunghezza del raggio della circonferenza circoscritta a un triangolo isoscele di base b e altezza relativa h . Per utilizzare la formula stabilita dal teorema 9: $R = \frac{abc}{4S_{ABC}}$, che lega R con i lati del triangolo dobbiamo determinare i lati mediante i dati a nostra disposizione. Il lato obliquo, facendo riferi-

mento alla figura seguente, sarà: $\overline{AB} = \sqrt{AD^2 + DA^2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{\frac{b^2 + 4h^2}{4}} = \frac{\sqrt{b^2 + 4h^2}}{2}$. Quindi

$$\text{avremo: } R = \frac{\left(\frac{\sqrt{b^2 + 4h^2}}{2}\right)^2 \cdot \cancel{b}}{\cancel{b}^2 \cdot \frac{\cancel{b} \cdot h}{\cancel{b}^1}} = \frac{b^2 + h^2}{4} \cdot \frac{1}{2h} = \frac{b^2 + h^2}{8h}.$$



Livello 1

59. Determinare la lunghezza del raggio della circonferenza circoscritta a un triangolo isoscele di base 6 e altezza relativa 4. [1,625]
60. Provare che se due triangoli sono simili di rapporto k , anche i raggi delle rispettive circonferenze circoscritte stanno nello stesso rapporto.
61. Determinare l'area e il perimetro di un triangolo isoscele di cui conosciamo l'altezza relativa alla base, 5, e il raggio della circonferenza circoscritta, 4. [5 · √55; 8 · √5 + 2 · √55]
62. Trovare il lato del triangolo equilatero inscritto in una circonferenza di raggio R . [R · √3]
63. Un triangolo isoscele di altezza e base uguale, è inscritto in una circonferenza di raggio 1, determinare la lunghezza del lato obliquo. [4/√5]
64. Determinare perimetro e area di un triangolo isoscele di base 3 e raggio della circonferenza circoscritta 2. [5 + 2 · √7; (12 + 3 · √7)/4]

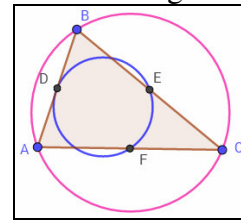
Livello 2

65. Determinare le lunghezze dei lati di un triangolo isoscele inscritto in una circonferenza di raggio R , sapendo che l'altezza relativa alla base è h . [2 · √Rh, 2 · √h · (4R - h)]
66. Dato un triangolo rettangolo ABC le cui misure dei cateti siano indicate con b e c . Siano r e R le misure dei raggi delle circonferenze inscritte e circoscritte ad ABC . Provare che vale la seguente uguaglianza: $2 \cdot (r + R) = b + c$.
67. Determinare il rapporto fra l'area di un quadrato circoscritto a una circonferenza e l'area del triangolo equilatero inscritto nella stessa circonferenza. [16 / (3 · √3)]

Livello 3

68. Sul lato obliquo AB del triangolo ABC , isoscele sulla base BC , si prenda un punto D la cui distanza da A sia un terzo della misura di AB . Un triangolo isoscele di base b è inscritto in una circonferenza di raggio R , determinare il lato obliquo e l'altezza relativa a b . [√(R · (2r + √(4r² - b²))); (2r + √(4r² - b²))/2]
69. A è un terzo della misura di AB . Si prolunghi poi AC dalla parte di C fino a un punto E in modo che il triangolo ADE sia equiesteso ad ABC . Determinare il rapporto fra la misura di AE e quella di AB . [3]
70. In una circonferenza due corde uguali lunghe 7 cm si incontrano perpendicolarmente in modo tale che siano reciprocamente divise nel rapporto 3/4. Quanto misura il raggio? [5/√2 cm]

71. Determinare il rapporto fra il raggio della circonferenza circoscritta a un triangolo ABC e il raggio della



la circonferenza passante per i punti medi dei lati di ABC .

[2]

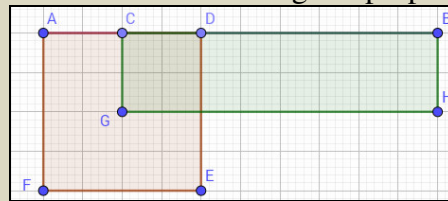
Lavoriamo insieme

Come si risolvevano le equazioni di secondo grado nell'antica Grecia? Si utilizzavano metodi geometrici. Negli *Elementi* di Euclide vi sono proposizioni che servono per questi scopi. In particolare vengono considerate le seguenti equazioni: $ax - x^2 = b^2$, con $a > 0$ (proposizione 5 del libro secondo); $ax + x^2 = b^2$, con $a > 0$ (proposizione 6 del libro secondo).

L'idea è semplice. Nel caso dell'equazione $ax - x^2 = b^2$, che possiamo anche scrivere come $x \cdot (a - x) = b^2$, vogliamo cercare un rettangolo di lati x e $(a - x)$ equiesteso a un quadrato di lato b . Dato che a e b sono i valori noti, dobbiamo cercare, su un segmento AB di misura a , un punto C che divida AB in due parti (di misure x e $a - x$), il prodotto delle cui misure sia b^2 . Non è detto che tale punto esista, nel qual caso l'equazione non ha soluzione.

Vediamo un esempio numerico. Supponiamo di voler risolvere l'equazione $-x^2 + 10x = 16$.

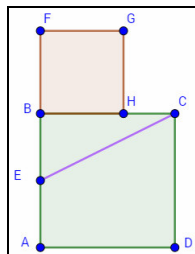
Consideriamo un segmento AB che misura quanto il coefficiente di x , ossia 10 unità. Fissiamo un punto C interno ad AB in modo che $\overline{BC} \cdot \overline{AC} = 16$. L'esempio è scelto in modo che questa ricerca dia risultati interi positivi. In questo caso deve essere $\overline{AC} = 2, \overline{BC} = 8$. Quindi $2 \cdot (10 - 2) = 16$, cioè 2 è una soluzione. Ma anche $8 \cdot (10 - 8) = 16$, cioè anche 8 è una soluzione. Di seguito proponiamo la costruzione geometrica.



AB è il segmento che misura 10 unità, il quadrato $ADEF$ è equiesteso al rettangolo $BHGC$. Il segmento AC e il segmento BC sono le *soluzioni geometriche* dell'equazione.

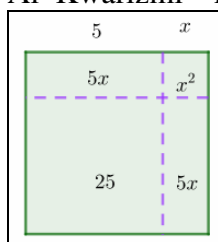
Livello 2

72. Proporre una risoluzione geometrica dell'equazione $5x - x^2 = 4$.
73. Proporre una risoluzione geometrica dell'equazione $2x + x^2 = 9$.
74. Nella figura seguente, $ABCD$ è un quadrato di lato lungo a unità, E è il punto medio di AB , $BFGH$ è un



quadrato ed EF misura quanto EC . Provare che la misura di BF è la soluzione dell'equazione $x^2 + ax = a^2$.

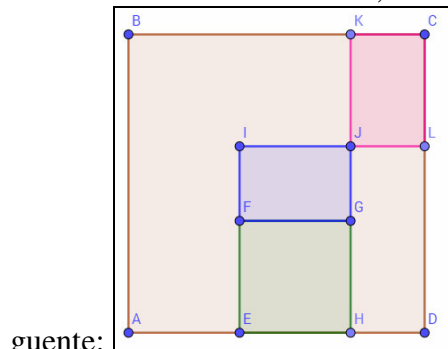
75. Al-Kwarizmi risolve l'equazione $x^2 + 10x = 39$ con la seguente costruzione geometrica.



Da tale figura, ricava l'equazione $(x + 5)^2 = 25 + x^2 + 10x$, visto che $x^2 + 10x = 39$; da

questo dato e dalla precedente uguaglianza, trae l'ulteriore uguaglianza: $(x + 5)^2 = 25 + 39$. Quindi conclude che $x + 5 = 8$ (Al-Kwarizmi non accetta le soluzioni negative) e ottiene l'unica soluzione positiva: $x = 3$. Mediante lo stesso procedimento risolvere le seguenti equazioni. $x^2 + 6x = 16$; $x^2 + 8x = 33$; $x^2 + 12x = 64$; $x^2 + 14x = 32$; $x^2 + 16x = 57$

76. Gerolamo Cardano nel 1545, nell'*Ars Magna* risolve l'equazione $x^2 = 6x + 16$ costruendo la figura se-

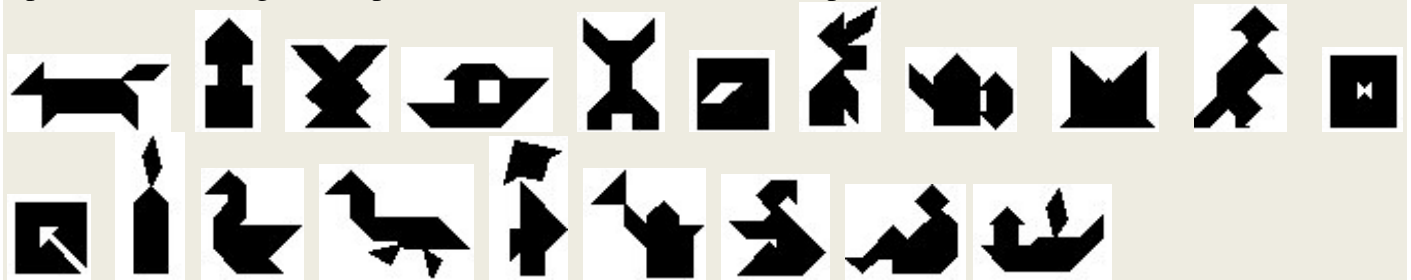


guente: in cui si ha: $\overline{AE} = \overline{EH} = 3$, $\overline{EI} = \overline{ED} = 3 + \overline{HD}$. Risolvere con tale figura l'equazione, spiegando i diversi passaggi.

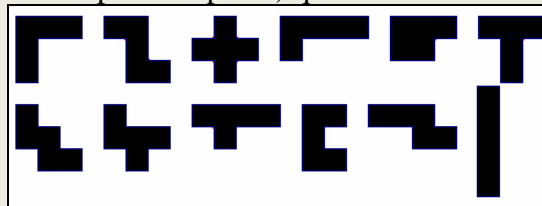
77. Generalizzare il procedimento precedente per risolvere l'equazione $x^2 = ax + N$. $\left[x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4N}}{2} \right]$

Intervallo matematico

Il Tangram è un gioco di origine cinese, divulgatosi in Europa e negli Stati Uniti nel XIX secolo, che si presta ottimamente a trattare questioni di equiestensione in modo ricreativo. Se vuoi costruire in cartoncino, balsa o altro materiale i pezzi del Tangram, considera le risposte dell'esercizio 43. Di seguito sei invitato a riprodurre alcune figure che possono essere costruite con i sette pezzi.



I pentamini sono simili al Tangram, ma sono di concezione più moderna. Sono 12, ciascuno dei quali è formato dall'unione di 5 (ecco perché il prefisso penta) quadratini unitari. Questi pezzi sono i seguenti:

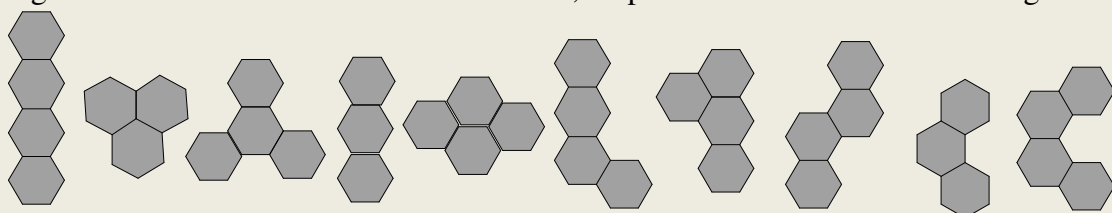


Attività

Formare le seguenti figure



Un'ulteriore generalizzazione sono i cosiddetti esamini, 10 pezzi ottenuti unendo 3 o 4 esagoni regolari.



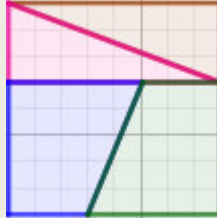
Con essi si possono formare per esempio le seguenti figure, facili da riprodurre:



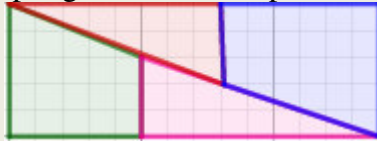
Tutte le figure qui mostrate sono state ottenute mediante il software Object Oriented Programming della MCM Productions, reperibile come shareware presso il sito internet www.mcmprod.com.

Enigmi matematici

Esaminiamo questo paradosso geometrico. Si consideri il seguente quadrato, con il lato di 8 quadratini.



E' costruito utilizzando i quattro poligoni colorati. Il problema nasce quando, con gli stessi quattro pezzi, co-

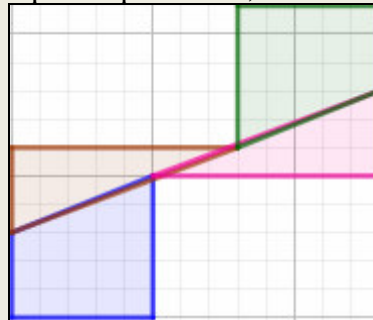


struiamo il seguente rettangolo. Infatti, come è facile notare, i suoi lati sono di 13 e 5 quadratini: ha perciò una superficie di 65 quadratini, mentre quella del quadrato è di 64.

È solo un trucco oppure è sbagliata la composizione? Dobbiamo stabilire se il paradosso dipende dall'esistenza di un buco nascosto nel rettangolo, oppure da una sovrapposizione di parti nel quadrato. Per risolvere questo dubbio conviene calcolare le aree dei quattro componenti. In questo modo si scopre che la diagonale del rettangolo, in realtà, nasconde un parallelogramma. Come si vede ingrandendo la figura.



Attenzione: il paradosso non funziona con qualsiasi misura scelta per le dimensioni del rettangolo e del quadrato. Esso è dovuto al famoso esperto americano di matematica ricreativa Sam Lloyd; suo figlio, con gli stessi pezzi, fornì in seguito un'altra figura ancora più sorprendente, dato che la sua area questa volta misu-



rava 63 unità quadrate. Tale figura è la seguente.

Teorema di Pitagora

Il problema

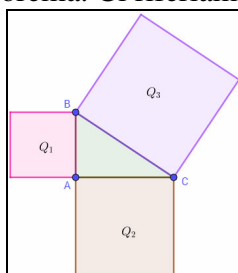
Lucia si è fatta ricostruire una parete della cucina, ma non è convinta che i muratori abbiano fatto un buon lavoro; infatti pensa che la nuova parete non sia ad angolo retto con le due pareti preesistenti. Come può accertarsene avendo a disposizione solo un metro?

Il problema di Lucia può essere risolto mediante il teorema che è certamente il più noto fra tutti, il teorema di Pitagora.

Teorema 12 (di Pitagora).

In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equiesteso alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.

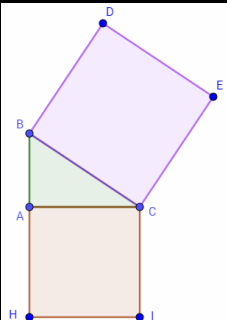
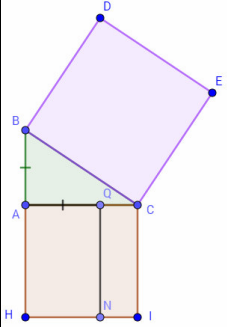
Cerchiamo di comprendere l'enunciato del teorema. Ci riferiamo alla seguente figura.

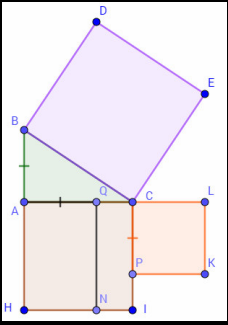
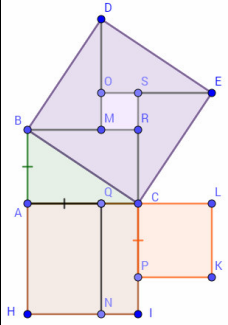
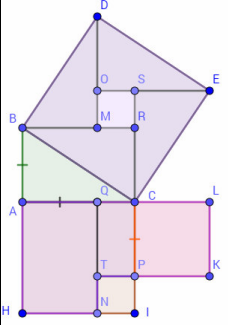


Il triangolo ABC è rettangolo nel vertice A , i quadrilateri sono tutti quadrati i cui lati coincidono con i lati di ABC . Con Q_1 , Q_2 e Q_3 indichiamo le rispettive aree. Il teorema di Pitagora stabilisce la validità della seguente uguaglianza: $Q_1 + Q_2 = Q_3$. Essa è valida per *qualsiasi* triangolo rettangolo e non solo per quello particolare che abbiamo disegnato.

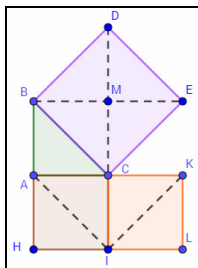
Proponiamo una dimostrazione che si avvale della equidecomponibilità.

Dimostrazione. Supponiamo che il triangolo non sia isoscele, che vi sia perciò un cateto maggiore.

Schema dimostrativo			
Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Costruiamo i quadrati sull'ipotenusa e sul cateto maggiore AC .		
2	Fissato su AC un punto Q in modo che sia $\overline{AB} = \overline{AQ}$, costruiamo il segmento QN perpendicolare ad AC e uguale ad AH .		

3	Su CI scegliamo un punto P in modo che sia $\overline{CP} = \overline{AB}$. Costruiamo il quadrato di lato CP .		
4		Il quadrato $CLKP$ è equiesteso al quadrato di lato AB .	Per costruzione.
5	Internamente al quadrato $ACDE$, come mostrato in figura, costruiamo quattro triangoli rettangoli uguali ad ABC aventi l'ipotenusa coincidente con un lato. Valgono le uguaglianze: $\overline{BR} = \overline{DM} = \overline{OE} = \overline{SC} = \overline{AC}$; $\overline{BM} = \overline{DO} = \overline{SE} = \overline{RC} = \overline{AB}$;		
6	Prolungato KP fino a incontrare QN in T , nel poligono $AHNTKL$ (che si chiama <i>gnomone</i>) sono valide le seguenti uguaglianze: $\overline{AH} = \overline{QN} = \overline{TK} = \overline{QL}$; $\overline{AQ} = \overline{QT} = \overline{HN} = \overline{LK}$;		
7	Consideriamo il quadrato $BCDE$ e la sua decomposizione.	I 4 triangoli della decomposizione in figura sono fra loro uguali.	Per costruzione
8	Consideriamo lo <i>gnomone</i> $AHNTKL$ e la sua decomposizione.	I triangoli della decomposizione sono uguali fra loro e con i quattro triangoli del passo precedente.	Per il criterio LLL
9	Consideriamo i quadrati $MOSR$ e $PINT$.	Sono fra loro uguali.	Perché il lato è ottenuto come differenza dei cateti AC e AB .
10	Consideriamo lo <i>gnomone</i> $AHNTKL$ e il quadrato $BCDE$.	Sono equiestesi.	Per i passi precedenti.

La dimostrazione vale anche se il triangolo è isoscele; in questo caso la figura di riferimento è la seguente.



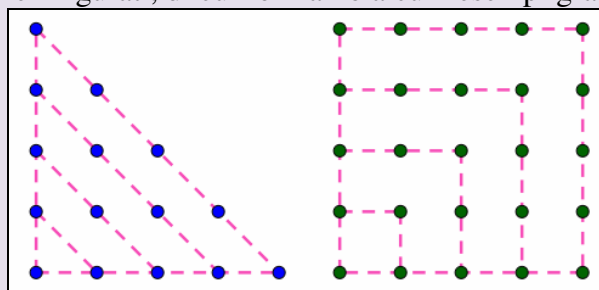
In questo caso deve mostrarsi semplicemente che i quattro triangoli, in cui sono decomposti i due quadrati minori, sono uguali a quelli in cui è decomposto il quadrato maggiore.

L'angolo storico

Nonostante si parli di teorema di Pitagora, è accertato che questa proprietà, almeno in alcuni casi particolari, era nota già agli antichi Cinesi, così come ai Babilonesi e agli stessi Egizi. Ricordiamo che la *camera dei re* della piramide di Cheope è un parallelepipedo in cui il rapporto fra lunghezza e larghezza è $\frac{3}{4}$, quindi la diagonale del pavimento è lunga 5 unità. Probabilmente Pitagora, o la sua scuola, furono i primi a tentare una dimostrazione o comunque una generalizzazione del risultato. Il teorema era applicato sempre solo a lati di misura razionale, dato che per gli antichi era inconcepibile pensare che potesse esistere una grandezza non misurabile mediante numeri interi. Il triangolo su cui più spesso si applicava il teorema era quello i cui lati misuravano 3, 4, 5.

I Pitagorici conoscevano anche la formula generatrice, a partire dalla quale, assegnando valori interi dispari e maggiori di 1 a m , si ottengono infinite terne pitagoriche, cioè di numeri che rappresentano misure di lati di triangoli rettangoli: $\left(\frac{m^2-1}{2}; \frac{m^2+1}{2}; m\right)$. Per esempio per $m = 3$ troviamo la già citata (3, 4, 5).

Vi è un'interessante ipotesi sull'origine della precedente formula. I Pitagorici avevano per motto “*Tutto è numero*”, intendendo con ciò i numeri naturali; avevano perciò associato i numeri anche alle figure geometriche, creando i cosiddetti numeri figurati, di cui forniamo alcuni esempi grafici



Numeri triangolari

Numeri quadrati

Consideriamo i numeri quadrati. Notiamo che per *costruire* il quadrato formato da 9 punti, abbiamo aggiunto al quadrato formato da 4 punti altri 5 punti. Cioè: $3^2 = 2^2 + 5 \Rightarrow (2+1)^2 = 2^2 + (2 \cdot 2 + 1)$. Allo stesso modo, per costruire il quadrato con 16 punti, abbiamo aggiunto altri 7 punti, a quello di 9, cioè $4^2 = 3^2 + 7 \Rightarrow (3+1)^2 = 3^2 + (2 \cdot 3 + 1)$ e così via. In generale possiamo dire che: $(n+1)^2 = n^2 + (2n+1)$. Se supponiamo che $2n+1$ sia un quadrato, per esempio m^2 , abbiamo la seguente uguaglianza:

$$2n+1 = m^2 \Rightarrow n = \frac{m^2-1}{2}; \quad n+1 = \frac{m^2-1}{2} + 1 = \frac{m^2+1}{2}.$$

Abbiamo quindi trovato la formula precedentemente proposta.

Dopo Pitagora sono state fornite centinaia di dimostrazioni di questo teorema, effettuate con diverse tecniche, da quelle puramente geometriche a quelle algebriche, a quelle che si servono della geometria analitica.

I protagonisti



Pitagora è forse il più noto matematico di tutti i tempi, eppure le notizie sulla sua vita sono scarse e frammentarie. Pare sia nato a Samo, una isoletta nel mar Egeo, verso il 580 a.C. Dopo aver effettuato diversi viaggi in Egitto, Babilonia e India e aver appreso numerose nozioni scientifiche e religiose, si stabilì a Cro-

tone, nella Magna Grecia. Qui fondò una vera e propria setta mistico-scientifica. I componenti di tale setta avevano strane idee relativamente al comportamento, al cibo e a tutto ciò che riguardava il modo di vivere. Era soprattutto l'*aritmetica* la scienza che meglio coltivavano, insieme con le discipline di *geometria*, *astronomia* e *musica*, che insieme costituivano il cosiddetto *quadrivio*. Ai numeri interi associavano spesso proprietà *umane*: parlavano così di numeri maschili (i pari) e numeri femminili (i dispari), di numero dell'armonia (il tre), della giustizia (il quattro), del matrimonio (il cinque) e così via.

Il teorema di Pitagora costituisce una peculiarità dei triangoli rettangoli, nel senso che esso è valido solo per tali triangoli. E' cioè una condizione necessaria e sufficiente ad assicurarci che un dato triangolo è rettangolo. Enunciamo e dimostriamo la condizione sufficiente.

Teorema 13 (Inverso del teorema di Pitagora).

Se in un triangolo non equilatero ABC il quadrato costruito sul lato maggiore BC , è equiesteso all'unione dei quadrati costruiti sugli altri due lati, allora il triangolo è rettangolo.

Ipotesi: $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$

Tesi: $AB \perp AC$

Schema dimostrativo			
Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Consideriamo un triangolo rettangolo DEF , di ipotenusa EF , per il quale si ha: $\overline{DE} = \overline{AB}; \overline{DF} = \overline{AC}$	$\overline{DE}^2 + \overline{DF}^2 = \overline{EF}^2$	Per il teorema di Pitagora.
2	Consideriamo i lati BC ed EF .	Sono uguali.	Per il passo 1 e per l'ipotesi: $\overline{EF}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{DF}^2; \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$
3	Consideriamo i triangoli ABC e DEF .	Sono uguali.	Per il criterio LLL.
4	Consideriamo il triangolo ABC .	È rettangolo.	Per il passo 3.

Lucia può finalmente risolvere il suo problema, misurando la lunghezza delle due pareti consecutive e quella della diagonale del pavimento; se queste tre misure verificano il teorema di Pitagora, l'angolo fra le pareti è retto, diversamente non lo è.

Esempio 5

Abbiamo detto che un triangolo i cui lati misurano 3, 4 e 5 unità è rettangolo, poiché $3^2 + 4^2 = 5^2$. Allora tutti i triangoli i cui lati misurano $3u$, $4u$ e $5u$ sono rettangoli quale che sia il numero reale non nullo u . Infatti $(3u)^2 + (4u)^2 = (5u)^2$.

Tenuto conto dell'esempio precedente, che da un punto di vista storico è probabilmente il primo triangolo rettangolo noto e usato nella pratica per la costruzione di superfici a forma di triangolo rettangolo, stabiliamo la seguente terminologia.

Definizione 2

- Una terna di numeri naturali $(a; b; c)$ che possono costituire le misure dei lati di un triangolo rettangolo si dice **terna pitagorica**.
- Una terna pitagorica $(a; b; c)$ con $\text{MCD}(a; b; c) = 1$ si dice **terna pitagorica primitiva**.

Esempio 6

La terna $(3; 4; 5)$ è primitiva, mentre le terne $(6; 8; 10)$, $(9; 12; 15)$, $(12; 16; 20)$ ottenute dalla precedente moltiplicando tutti i numeri rispettivamente per 2, 3, 4 sono terne pitagoriche non primitive.

Vale il seguente teorema.

Teorema 14

Tutte le terne pitagoriche primitive sono del tipo $(m^2 - n^2; 2mn; m^2 + n^2)$, con m e n numeri naturali non entrambi dispari, primi tra loro e con $m > n$.

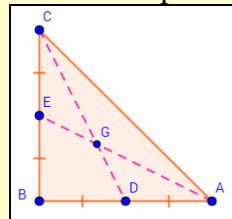
Non dimostriamo il teorema precedente, può provarsi piuttosto, con l'uso dei prodotti notevoli, la sua condizione sufficiente, cioè che una terna $(m^2 - n^2; 2mn; m^2 + n^2)$ è sempre pitagorica, indipendentemente dai valori di m e n . La dimostrazione è proposta come esercizio.

Da un punto di vista algebrico, considerando cioè le misure dei lati, il teorema di Pitagora si può enunciare in uno dei seguenti modi, in cui i indica la misura dell'ipotenusa e c_1 e c_2 le misure dei due cateti:

$$i = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}; \quad c_1 = \sqrt{i^2 - c_2^2}; \quad c_2 = \sqrt{i^2 - c_1^2}$$

Esempio 7

Il triangolo ABC in figura è rettangolo e isoscele, la sua ipotenusa è AC , G è il suo baricentro. Sapendo che i



cateti sono lunghi ciascuno 2 cm , vogliamo determinare la misura del segmento CG . Dato che D è punto medio di AB , BD sarà lungo 1 cm . Il triangolo BCD è evidentemente rettangolo, possiamo quindi applicare a esso il teorema di Pitagora, scrivendo l'uguaglianza: $\overline{CD} = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{BD}^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$. Dato che il baricentro divide ciascuna mediana in due parti in modo che quella che contiene il vertice è doppia rispetto all'altra, possiamo dire che CG , in cm , misura $\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

Vediamo altre applicazioni del teorema di Pitagora.

Esempio 8

Consideriamo un quadrato di lato lungo ℓ e tracciamo la sua diagonale. Così facendo il quadrato è stato suddiviso in due triangoli rettangoli isosceli, possiamo quindi determinare la lunghezza della diagonale in funzione del lato, proprio applicando il teorema di Pitagora. Si ha: $d = \sqrt{\ell^2 + \ell^2} = \sqrt{2\ell^2} = \ell \cdot \sqrt{2}$.

Il precedente esempio permette di enunciare la seguente regola.

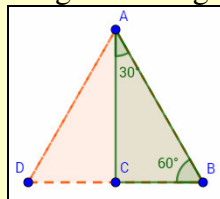
Regola 6

La misura della diagonale di un quadrato si ottiene moltiplicando il lato della misura del suo lato per $\sqrt{2}$. In simboli, $d = \ell \cdot \sqrt{2}$.

Ragionando come abbiamo visto sul quadrato possiamo determinare anche una relazione fra il lato e l'altezza di un triangolo equilatero.

Esempio 9

Consideriamo un triangolo rettangolo ABC , i cui angoli acuti misurano 30° e 60° . Effettuando una simmetria assiale attorno al cateto maggiore AC , otteniamo un altro triangolo rettangolo ACD uguale al precedente, che



unitamente a esso costituisce il triangolo equilatero ABD . Ciò significa che AB è doppio di BC . Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABC , ottenendo la relazione fra lato e altezza

di un triangolo equilatero: $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\overline{AB}^2 \Rightarrow \overline{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}$.

Il precedente esempio permette di enunciare la seguente regola.

Regola 7

La misura dell'altezza di un triangolo equilatero si ottiene moltiplicando la metà della misura del suo lato per $\sqrt{3}$. In simboli $h = \frac{l}{2}\sqrt{3}$.

Come conseguenza della Regola 7, possiamo enunciare il seguente teorema.

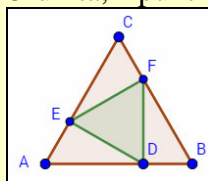
Teorema 15

L'area di un triangolo equilatero è il prodotto di $\sqrt{3}$ per l'area del quadrato che ha per lato la metà del lato del triangolo. In simboli: $S = \frac{\ell^2}{4} \cdot \sqrt{3}$

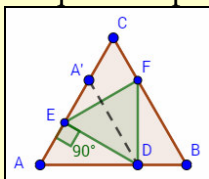
Dimostrazione Per esercizio

Esempio 10

Il triangolo ABC è equilatero e i suoi lati misurano 3 unità, i punti D , E ed F dividono ciascun lato in due



segmenti uno doppio dell'altro. Quanto misura DE ? Consideriamo il triangolo ADE , in esso $\overline{AE} = 2 \cdot \overline{AD}$ e $\angle D\hat{A}E = 60^\circ$. Se su DC fissiamo il punto A' simmetrico di A rispetto ad E , otteniamo un il triangolo $AA'D$ che è isoscele perché AA' misura quanto AD , dato che entrambi sono i $2/3$ del relativo lato di ABC cui appartengono. In effetti è anche equilatero perché l'angolo in A è di 60° . Ma allora DE è mediana e



quindi altezza, perciò $\angle A\hat{E}D$ è retto. Possiamo quindi applicare il teorema di Pitagora al triangolo AED , ottenendo: $\overline{DE} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{AE}^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

Può determinarsi anche una relazione tra il lato di un quadrato e la rispettiva diagonale. Facilmente si prova il seguente teorema.

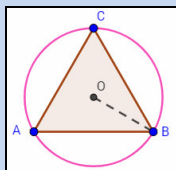
Teorema 16

La diagonale di un quadrato è $\sqrt{2}$ volte la lunghezza del lato. In simboli: $d = \ell \cdot \sqrt{2}$.

Un altro utile risultato è il seguente.

Teorema 17

La misura del lato di un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza è uguale al prodotto della misura del raggio per $\sqrt{3}$. In simboli: $\ell = r \cdot \sqrt{3}$.

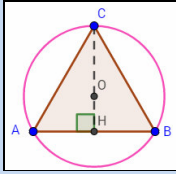


Ipotesi: $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$

Tesi: $\overline{AC} = \sqrt{3} \cdot \overline{OB}$

Schema dimostrativo

Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Consideriamo il punto O .	È sia circocentro che baricentro di ABC .	Perché ABC è equilatero.

2	Tracciamo l'altezza CH e determiniamone la misura mediante il raggio		Per le proprietà della mediana, dato che CH è anche mediana di AB .
		$\overline{CH} = \frac{3}{2} \cdot \overline{CO} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \overline{AB} = \frac{3}{2} \cdot \overline{CO}$	
3	Ricaviamo la misura di AB .	$\overline{AB} = \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \overline{CO} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} \cdot \overline{CO} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{3} \cdot \overline{CO} = \sqrt{3} \cdot \overline{CO}$	

Il ben noto teorema di Pitagora può essere esteso considerando poligoni simili tra loro, non necessariamente quadrati, costruiti sui lati. Vale infatti il seguente risultato.

Teorema 18

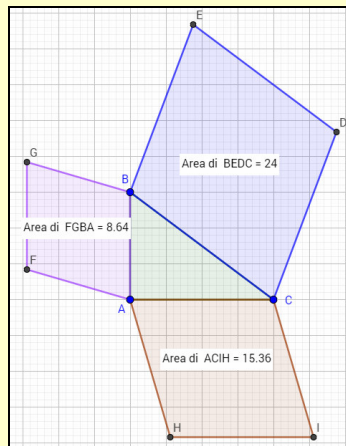
Se sui lati di un triangolo rettangolo si costruiscono dei poligoni fra di loro simili, la somma delle aree dei poligoni costruiti sui cateti uguaglia l'area del poligono costruito sull'ipotenusa.

Non dimostriamo il teorema, ma ne proponiamo un'interpretazione.

Esempio 11

Vediamo di verificare il teorema precedente costruendo sul classico triangolo rettangolo di lati che misurano 3, 4 e 5 unità dei rombi fra loro simili. Costruire sui lati significa che un lato del rombo coincide con un lato del triangolo. Come facciamo a costruire rombi fra loro simili? Dato che le diagonali del rombo lo dividono in quattro triangoli fra loro uguali basta costruire tali triangoli simili fra loro. Così sull'ipotenusa costruiamo un rombo di lato 5 unità e di diagonali che misurano 6 e 8 unità. Sul cateto di misura 3 unità dobbiamo costruire un rombo le cui dimensioni hanno rapporto di similitudine $\frac{3}{5}$ con quello appena costruito, così le sue diagonali misureranno $\frac{18}{5}$ e $\frac{24}{5}$. Infine sul cateto che misura 4 unità costruiremo un rombo le cui

diagonali misurano $\frac{24}{5}$ e $\frac{32}{5}$.



Calcoliamo le misure delle aree dei tre rombi e

verifichiamo la tesi del teorema 17. Abbiamo infatti la validità della seguente uguaglianza:

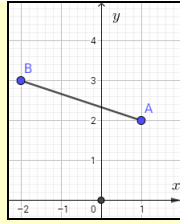
$$\frac{18}{5} \cdot \frac{24}{5} + \frac{32}{5} \cdot \frac{24}{5} = \frac{6 \cdot 8}{2} \Rightarrow \frac{432}{50} + \frac{768}{50} = \frac{48}{2} \Rightarrow 24 = 24.$$

Concludiamo il paragrafo con un'applicazione di geometria analitica. Vogliamo cioè determinare la distanza di due punti nel piano cartesiano mediante il valore delle coordinate dei punti. Vediamo un esempio.

Esempio 12

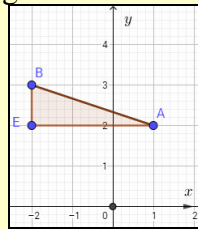
Consideriamo i punti di coordinate (1; 2) e (-2; 3), vogliamo determinare quanto distano in termini

dell'unità di misura stabilita. Consideriamo la figura.



Possiamo sempre considerare AB come

ipotenusa di un particolare triangolo rettangolo.



Pertanto possiamo dire che si ha la validità del Teorema di Pitagora: $\overline{AB} = \sqrt{\overline{BE}^2 + \overline{EA}^2}$. Non è difficile capire che i due cateti possono essere determinati come differenze fra le ascisse e le ordinate di A e B , infatti: $\overline{AB} = \sqrt{(3-2)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$.

Dal precedente esempio possiamo enunciare il seguente risultato generale:

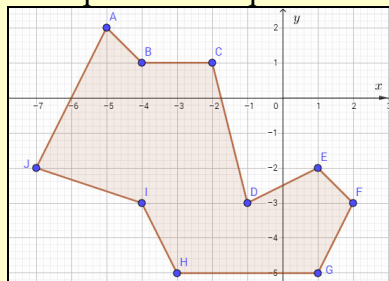
Teorema 19

La distanza fra i punti $A \equiv (x_A; y_A)$ e $B \equiv (x_B; y_B)$ nel piano cartesiano ortogonale monometrico Oxy è data dalla relazione: $\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

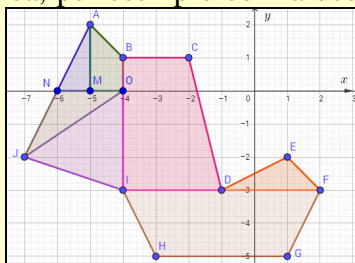
Dimostrazione per esercizio

Esempio 13

In un sistema di riferimento cartesiano abbiamo il seguente poligono. Tenuto conto che ogni punto della griglia indica 1 unità, vogliamo determinare quante unità quadrate misura l'area del poligono.



Il poligono in figura non è uno di quelli per così dire *noti*: non abbiamo quindi a disposizione alcuna formula per determinarne l'area. Procediamo allora con il suo *sezionamento* in poligoni dei quali sappiamo come determinare l'area, per esempio con la decomposizione seguente, che non è certo l'unica e non è detto che



sia la migliore: L'area del poligono si ottiene mediante la somma delle seguenti aree:

$$S_{AMN} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1; S_{ABOM} = \frac{2+1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}; S_{BCDI} = \frac{2+3}{2} \cdot 4 = 10; S_{DEF} = \frac{3 \cdot 1}{2} = \frac{3}{2}; S_{FGHI} = \frac{6+4}{2} \cdot 2 = 10; S_{IJO} = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2}; S_{JNO} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$$

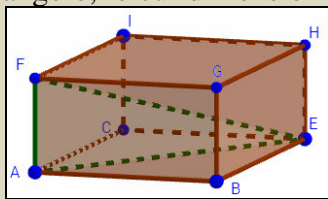
Pertanto l'area cercata in unità quadrate è $1 + 1,5 + 10 + 1,5 + 10 + 4,5 + 2 = 30,5$.

Osserviamo che abbiamo suddiviso il poligono in triangoli e trapezi. La suddivisione è stata fatta in modo che vi fosse sempre un lato che poteva misurarsi in unità intere così come la corrispondente altezza.

Verifiche

Lavoriamo insieme

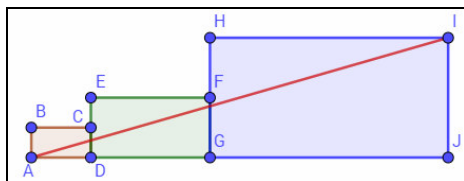
Consideriamo un parallelepipedo rettangolo, le cui dimensioni misurano 1, 2 e 3 cm. Vogliamo determinare



la misura della diagonale del solido. In figura la diagonale da misurare è FE ; per questa operazione possiamo considerare il triangolo rettangolo AFE , del quale conosciamo solo la lunghezza di AF : 1 cm. Per determinare la misura di AE , lavoriamo sul triangolo rettangolo ABE , di cui sono note le misure dei cateti: 2 e 3 cm. Abbiamo quindi: $\overline{AE} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BE}^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$. Pertanto possiamo scrivere: $\overline{FE} = \sqrt{\overline{AF}^2 + \overline{AE}^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{13})^2} = \sqrt{1+13} = \sqrt{14}$.

Livello 1

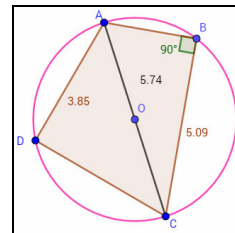
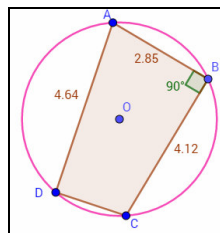
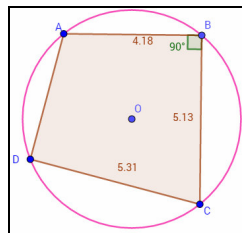
- Determinare la misura della diagonale di un parallelepipedo rettangolo con dimensioni che misurano a , b e c . $\left[\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \right]$
- Determinare la misura della diagonale di un cubo di lato 1. $\left[\sqrt{3} \right]$
- Determinare la misura del lato di un cubo la cui diagonale è lunga 3 cm. $\left[\sqrt{3} \right]$



- I tre rettangoli in figura hanno ciascuno dimensioni doppie di quelle del rettangolo alla propria sinistra. Sapendo che AB è lungo 1 cm e BC 2 cm, determinare la lunghezza di AI . $\left[\sqrt{212} \text{ cm} \right]$
- Un uccello percorre 13 km in orizzontale, poi 4 km in direzione perpendicolare alla precedente, infine altri 5 km in direzione perpendicolare alla precedente ma verso il punto di partenza. Si vuol conoscere la distanza che separa il punto di arrivo da quello di partenza. $\left[\sqrt{80} \text{ km} \right]$
- Si fissi un punto E sul lato AB del quadrato $ABCD$. Se il segmento EB è metà di EC determinare l'area del quadrato mediante la misura di EB . $\left[3EB^2 \right]$
- Sulla diagonale AC del quadrato $ABCD$ si costruisce il quadrato $ACEF$. Quanto vale il rapporto fra l'area di $ACEF$ e quella di $ABCD$? $\left[2 \right]$
- Nel triangolo ABC , rettangolo in C , si sa che i cateti sono lunghi 5 cm e 12 cm. Determinare la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa. $\left[60/13 \text{ cm} \right]$
- Un antico problema cinese. Due persone, Jia e Yi sono ferme nello stesso posto. Nel tempo in cui Jia fa 7 passi Yi ne fa 3. I due si muovono contemporaneamente, Yi verso Est e Jia di 10 passi verso sud. Quanto distano adesso Yi e Jia? $\left[\text{circa 11 passi} \right]$
- Due picchetti sono infilzati perpendicolarmente a un terreno piano e un filo d'acciaio è teso tra le loro cime. Sapendo che la parte sporgente dei picchetti è rispettivamente 2 m e 7 m e che essi sono posti alla distanza di 12 m, determinare la lunghezza del filo. $\left[13 \text{ m} \right]$
- Dal punto medio M di un segmento AB di misura 13 cm, si innalza un segmento perpendicolare MN lungo 6 cm. Si tracci la circonferenza di centro N e diametro uguale ad AB , che incontra AB nei punti P e Q . Determinare le misure di AP e PB . $\left[4 \text{ cm}; 9 \text{ cm} \right]$

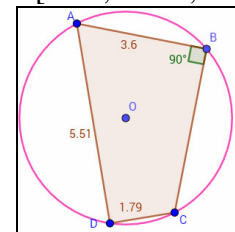
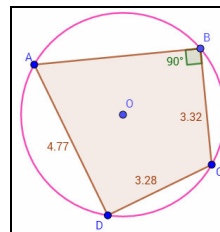
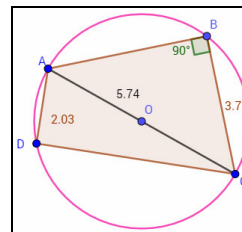
Per i seguenti quesiti ricordare le condizioni affinché un quadrilatero sia inscrittibile in una circonferenza. Tenendo conto delle figure determinare quanto richiesto

12. Il perimetro di $ABCD$



$[\approx 18,57 \text{ cm}; \approx 13,51 \text{ cm}; \approx 15,84 \text{ cm}]$

13. L'area di $ABCD$.



$[\approx 13,58 \text{ cm}^2; \approx 15,69 \text{ cm}^2; \approx 13,07 \text{ cm}^2]$

Lavoriamo insieme

Un antico problema cinese del 300 a. C. Una canna di bambu alta 10 piedi si spezza, in modo tale che la parte rotta, senza staccarsi dal tronco pende fino a raggiungere il terreno a 3 piedi dal tronco. Quanto è lunga la parte di bambu rimasta in piedi?

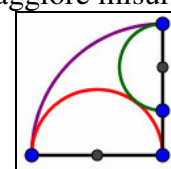
Il problema equivale a determinare il cateto di un triangolo rettangolo (che indichiamo con x), in cui l'ipotenusa è la parte rotta della canna (lunga perciò $10 - x$), conoscendo la lunghezza dell'altro cateto, 3.

Basta scrivere il teorema di Pitagora, che fornisce l'equazione risolvente: $x^2 + 9 = (10 - x)^2$. Risolviamo:

$$x^2 + 9 = 100 - 20x + x^2 \Rightarrow 20x = 91 \Rightarrow x = \frac{91}{20} = 4,55$$

Livello 2

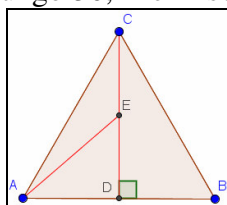
14. Nel trapezio isoscele $ABCD$ l'altezza è 12, una diagonale 20. Determinare l'area del trapezio. [192]
15. Dato un rettangolo $ABCD$, ne costruiamo un altro le cui dimensioni sono segmenti uguali alla somma della diagonale con il lato maggiore di $ABCD$ e alla differenza della diagonale con il lato maggiore di $ABCD$. Costruiamo poi un quadrato il cui lato è uguale al lato minore di $ABCD$. Provare che le due figure così costruite sono fra loro equiestese.
16. Nel triangolo ABC , rettangolo in C , si sa che la mediana CM relativa all'ipotenusa AB è lunga 5 cm e il cateto BC 6 cm. Determinare la misura del segmento MH , con H piede dell'altezza relativa all'ipotenusa. *Suggerimento:* ricordare che la mediana relativa all'ipotenusa misura ... [1,4 cm]
17. Dimostrare che in un triangolo equilatero, di lato lungo 1 unità, la somma dei quadrati delle misure dei segmenti congiungenti il baricentro con ciascuno dei vertici vale 1.
18. Athos è un appassionato di origami. Per il suo hobby utilizza fogli di formato rettangolare, quando piega un foglio fino a far sovrapporre il lato minore sul maggiore, tale piegatura è $2 \cdot \sqrt{10}$ cm. Quanto vale la misura del lato minore? [10 cm]
19. Il raggio del quadrante in figura e il diametro del semicerchio maggiore misurano 6 cm. Quanto misura



il raggio del semicerchio minore, tangente all'altro semicerchio?

[0,375 cm]

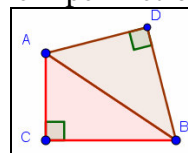
20. In figura ABC è equilatero di lato lungo 30, E e D sono punti medi dei relativi segmenti cui apparten-



gono. Quanto misura AE ?

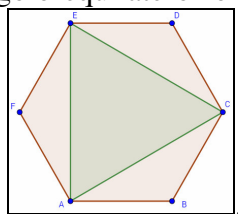
$$\left[\frac{15}{2} \sqrt{7} \right]$$

21. Una scala lunga $2,5\text{ m}$ è appoggiata al muro in modo che la sua base disti 70 cm dalla parete. La persona che sale, improvvisamente, ha un movimento brusco e la cima della scala scivola sul muro di 40 cm . A questo punto di quanto dista la sua base dalla parete? $[1,5\text{ m}]$
22. Un problema di Brahmagupta (598–665). Una canna di bambù alta 18 m è spezzata dal vento in modo che la sua cima tocchi il terreno a 6 m dalla radice. A che altezza dal terreno si è spezzata la canna? $[8\text{ m}]$
23. Dal *Liber Abaci* di Leonardo Pisano detto il Fibonacci (1202): Due torri, una alta 30 passi e l'altra 40, si trovano a una distanza di 50 passi. Tra le due torri si trova una fontana verso la quale due uccellini discendono (uno per ogni torre) alla stessa velocità e raggiungono la fontana allo stesso istante. Quanto dista la fontana da ogni torre? $[32\text{ passi e } 18\text{ passi}]$
24. Un campeggio è costruito a 300 metri dalla strada, un altro campeggio è sulla strada, a 500 metri dal primo in linea d'aria. Si vuole mettere una cabina telefonica sulla strada alla stessa distanza dai due campeggi. Quanto deve essere questa distanza? $[312,5\text{ m}]$
25. I lati di un triangolo misurano, in cm , 11, 12 e 13. Tracciata l'altezza relativa al lato maggiore, determinare la misura dei due segmenti in cui viene divisa la base. $[73/13\text{ cm e } 96/13\text{ cm}]$
26. Dato il triangolo rettangolo isoscele ABC , sulla sua ipotenusa AC costruiamo il triangolo rettangolo isoscele ACD di ipotenusa AD . In che relazione sono AD e AB ? $[\overline{AD} = 2 \cdot \overline{AB}]$
27. I triangoli rettangoli ABC e ABD in figura, hanno l'ipotenusa in comune; sapendo che i cateti di ABC differiscono fra loro di 1 cm , che uno dei cateti di ABD misura 5 cm e che il perimetro del quadrilatero



$ADBC$ è di 40 cm , determinare la misura dell'ipotenusa comune. $[59\text{ cm}]$

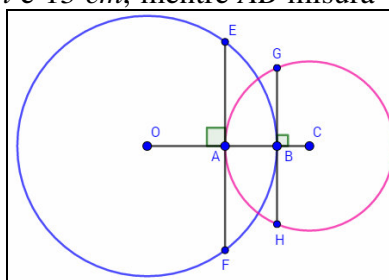
28. Trovare la misura del lato del triangolo equilatero formato unendo alternativamente tre vertici di un



esagono regolare di lato lungo ℓ

$$[\ell \cdot \sqrt{3}]$$

29. Del triangolo rettangolo ABC conosciamo la lunghezza dell'ipotenusa BC , 8, e l'area, 12. Determinare la misura del perimetro. $[8 + 4\sqrt{7}]$
30. I cerchi in figura hanno diametri di 20 cm e 13 cm , mentre AB misura 4 cm . Sapendo che $OC \perp EF$ e

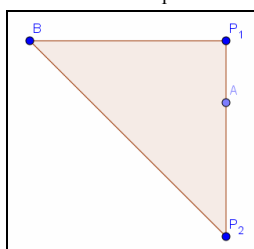


$OC \perp GH$, trovare le misure di EF e GH .

$$[16\text{ cm}; 12\text{ cm}]$$

Livello 3

31. Un problema di Sam Loyd. In figura, due ragazzi partono da A ma in direzioni opposte. In P_1 e P_2 vi sono due ponti. Sappiamo che $\overline{AP_1} = 250$, $\overline{BP_1} = 600$, $\overline{BP_2} + \overline{AP_2} = \overline{AP_1} + \overline{BP_1}$. Quanto distano i due ponti?



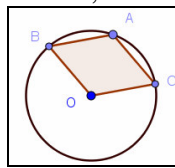
ti?

$$[386\text{ e } 4/11]$$

32. Con riferimento al problema precedente, se $\overline{AP_1} = a$, $\overline{AP_2} = b$, $\overline{BP_1} = c$, determinare la misura di a .

$$\left[\frac{bc}{c+2b} \right]$$

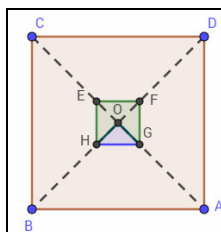
33. In figura è rappresentato un rombo $OBAC$ i cui vertici A , B e C appartengono alla circonferenza il cui



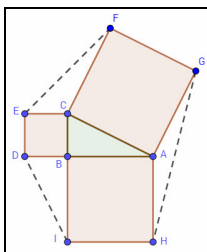
centro O coincide con il quarto vertice del rombo. Esprimere l'area di $OBAC$ in funzione

del raggio r della circonferenza.

$$\left[\frac{\sqrt{3}}{2} r^2 \right]$$



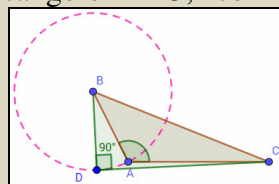
34. Sapendo che il quadrato maggiore in figura ha i lati lunghi 12 cm , mentre quelli del minore sono di 3 cm , determinare quale parte dell'area del quadrato maggiore rappresenta il triangolo OGH . $[1/64]$



35. In figura il triangolo ABC è rettangolo, su ciascuno dei suoi lati abbiamo costruito dei quadrati. Sapendo che l'area di ABC è 6 cm^2 e l'ipotenusa AC è lunga 5 cm , determinare l'area del poligono $DEFGHI$. $[74 \text{ cm}^2]$
36. Risolvere il problema precedente se l'area è A e l'ipotenusa c . $[4A + 2c^2]$

Lavoriamo insieme

Provare che in un triangolo ottusangolo ABC , con BC lato maggiore, si ha: $\overline{BC}^2 > \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$.

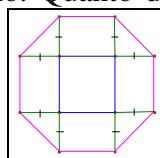


Consideriamo la seguente figura:

Il triangolo ABC è quello dato. Poi abbiamo costruito una circonferenza di centro B e raggio AB e il triangolo rettangolo BCD , di ipotenusa BC . Questo triangolo ha il cateto BD uguale al lato CD maggiore del lato AC . Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo BCD scrivendo: $\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2$. Tenuto conto di quanto abbiamo osservato relativamente alle relazioni esistenti fra i lati di ABC e quelli di BCD , possiamo anche scrivere: $\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 > \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, cioè quanto si voleva provare.

Livello 2

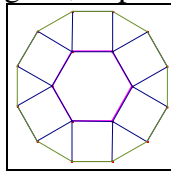
37. Prolunghiamo i lati di un quadrato di lato 1, di uno stesso segmento. Congiungiamo poi gli estremi non comuni al quadrato, ottenendo un ottagono. Quanto deve essere lungo il segmento se vogliamo



che l'ottagono sia regolare?

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

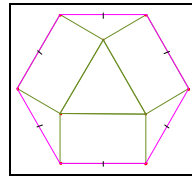
38. Su ciascun lato di un esagono regolare di lato 1, costruiamo un quadrato. Congiungiamo i vertici esterni di tali quadrati, ottenendo un dodecagono, dopo avere provato che tale poligono è regolare, de-



terminarne l'area.

$$\left[3 \cdot (2 + \sqrt{3}) \right]$$

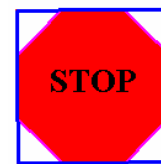
39. Esternamente ai lati di un triangolo equilatero di lato 1, si costruiscano tre rettangoli uguali. Si uniscano i vertici esterni di tali rettangoli. Quanto deve essere l'altro lato del rettangolo, se vogliamo che l'e-



sagono sia regolare?

$$\frac{\sqrt{3}}{3}$$

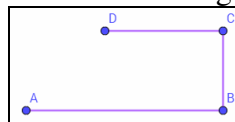
40. Come compito di educazione stradale, Filippo deve costruire da sé il segnale dello STOP. Compra per € 4,00 un foglio quadrato di balsa, dal quale ricava il segnale a forma di ottagono regolare come si ve-



de in figura. Qual è il valore della parte di balsa che non ha utilizzato?

$$[\approx € 0,69]$$

41. Provare che in un triangolo acutangolo ABC vale la seguente legge $\overline{AB}^2 < \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$.



42. Con riferimento alla seguente figura sia $\overline{AB} = x$, $\overline{BC} = y$, $\overline{CD} = z$, determinare per quali fra i seguenti valori assegnati ad x , y e z , $\overline{AD} + \overline{DB}$ è un numero intero. a) (21; 6; 8); b) (21; 8; 6); c) (15; 6; 8); d) (15; 8; 6); e) (12; 3; 4) [b)]

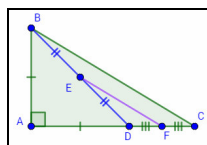
43. Il seguente problema è un adattamento di un quesito di Bhaskara (1150 d.C.). *Un falco è appollaiato su una roccia alta 15 m. Alla base della roccia si trova la tana di un topolino. Il falco vede il topolino che rientra quando questi è distante dalla tana 45 m: nello stesso momento si lancia nel vuoto in linea retta per catturare la preda. Se i due animali viaggiano alla stessa velocità, a quale distanza dalla tana il falco afferrerà il topo?* [20 m]

44. Con riferimento al precedente esercizio, qual è la massima distanza dalla tana in cui deve trovarsi il topolino quando lo vede il falco, perché il piccolo roditore riesca a farla franca? [15 m]

45. Il seguente problema è adattato da un manoscritto cinese del 1115. *Nel mezzo di uno stagno circolare il cui diametro misura 10 m, sorge una canna che sporge di 1 m dall'acqua. Il piccolo Chen lancia una corda afferrando la canna e tirandola a sé, senza riuscire a strapparla dal fondo. In questo modo però la cima della canna raggiunge esattamente il bordo dello stagno. Quanto è profondo lo specchio d'acqua?* [12 m]

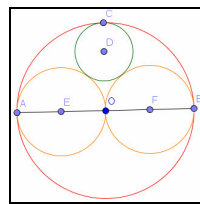
46. Antico problema babilonese. *Il triangolo isoscele ABC è inscritto in una circonferenza di centro O , sapendo che il lato obliquo è lungo 50 e la base 60, determinare la lunghezza del segmento OD , con D punto medio della base.* [8,75]

47. Determinare le lunghezze dei lati di un triangolo rettangolo in cui area e perimetro sono entrambi 30. [5; 12; 13]



48. Il triangolo ABC in figura è rettangolo in A , inoltre si verificano le seguenti uguaglianze: $\overline{AB} = \overline{AD}$, $\overline{BE} = \overline{ED}$, $\overline{DF} = \overline{FC}$. Sapendo che $\overline{BD} = 4 \cdot \sqrt{2}$, $\overline{DC} = 2$, determinare la misura di EF . [2·√5]

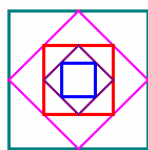
49. In un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa BC , si sceglie un punto D sul cateto AC in modo che si verifichi l'uguaglianza $\overline{BC} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{AB}$. Sapendo che $\overline{CD} = 4$ e $\overline{AB} = 12$, determinare la misura di AD . [12]
50. Con riferimento al problema precedente, variando le misure di AB e CD , accade sempre $\overline{AD} = \overline{AB}$? Giustificare la risposta. [No]
51. Sapendo che le misure di un cateto e dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo sono due numeri consecutivi, detta c quella dell'ipotenusa, determinare la misura dell'altro cateto. Per quali valori di c il problema ha soluzioni? $\left[\sqrt{2c-1}; c > \frac{1}{2} \right]$
52. Il triangolo ABC è rettangolo con ipotenusa AC lunga 17 cm . D è un punto scelto sul cateto AB in modo che i segmenti AD e CD sono lunghi rispettivamente 9 cm e 10 cm . Determinare la misura del cateto BC . [15,4 cm]



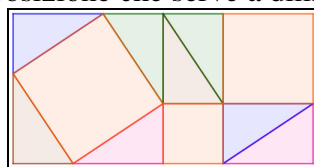
53. AB è diametro di una circonferenza, come mostrato in figura. Gli altri cerchi hanno diametri AO e OB , il cerchio più piccolo è tangente agli altri tre. Se il raggio di quest'ultimo misura 8 , determinare la misura di AB . [48]

Livello 3

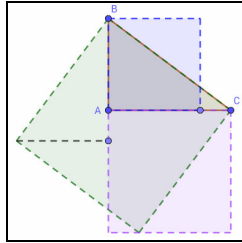
54. Dato un triangolo ABC , sia AM una sua mediana, dimostrare la validità del seguente teorema di Apollonio: $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \frac{\overline{BC}^2}{2} = 2 \cdot \overline{AM}^2$. *Suggerimento:* tracciare l'altezza per il vertice A .
55. In un triangolo rettangolo le mediane relative ai due cateti misurano rispettivamente 3 cm e 4 cm . Determinare la misura dell'ipotenusa. [20 cm]
56. I lati di un triangolo misurano a , b e c . Tracciata l'altezza relativa al lato che misura c , supponendo che il piede di tale altezza sia interno al lato, determinare la misura dei due segmenti in cui viene divisa la base. $\left[\frac{c \pm \sqrt{2b^2 - 2a^2 - c^2}}{2} \right]$
57. Determinare il perimetro di un triangolo ABC in cui le mediane relative a due lati sono fra loro perpendicolari e misurano rispettivamente 3 cm e 6 cm . *Suggerimento:* ricordare le proprietà del baricentro. $\left[2 \cdot \sqrt{17} + 4 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{5} \right]$



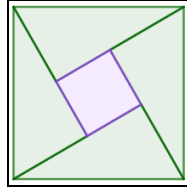
58. Nella figura seguente ciascuno dei quadrati ha i vertici che coincidono con i punti medi dei quadrati in cui sono inscritti. Se la misura del lato del quadrato maggiore è $8 \cdot \sqrt{2}$, quanto misura il lato del quadrato minore? $\left[2 \cdot \sqrt{2} \right]$
59. Un triangolo rettangolo ha i lati misurati da numeri interi e area 84 . Determinare le misure dei lati. *Suggerimento:* scomporre in fattori primi (cosa?) e considerare i vari casi. [7; 24; 25]
60. La figura seguente è un'equidecomposizione che serve a dimostrare il teorema di Pitagora. Fornire una



spiegazione.

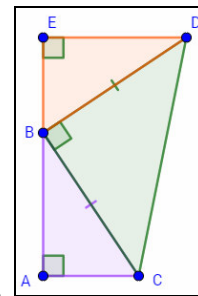


61. La seguente figura si serve delle costruzioni di due dei quadrati non all'esterno dei lati, ma al loro interno. Provare che anche in questo modo si può dimostrare il teorema di Pitagora.
62. Servendosi della seguente figura, dovuta al matematico indiano Bhaskara, dimostrare il teorema di Pitagora in modo algebrico. Per effettuare questa operazione, associare ai lati dei quadrati e dei triangoli



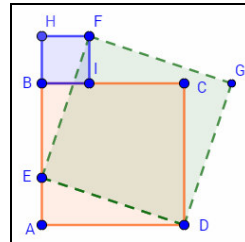
nomi simbolici.

63. Nel 1882, prima di divenire presidente degli stati uniti d'America, John Garfield fornì una dimo-

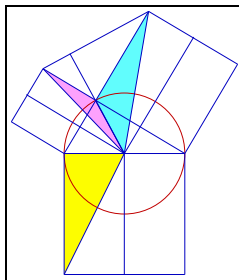


strazione algebrica del teorema di Pitagora mediante la seguente figura, in cui ABC è il triangolo rettangolo di partenza. Giustificarla. *Suggerimento:* Dimostrare l'isometria di certi segmenti.

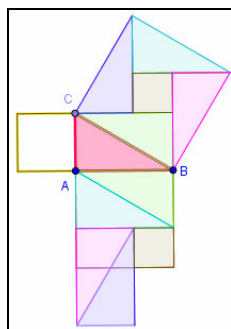
64. Provando che il quadrato $DEFG$ in figura è equiesteso alla somma dei quadrati $ABCD$ e $BHFI$, fornire



una nuova dimostrazione del teorema di Pitagora.

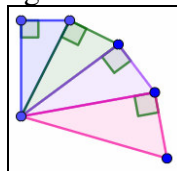


65. La figura seguente è stata costruita nel 1938 da una studentessa americana di 16 anni, per fornire una dimostrazione del teorema di Pitagora. Secondo il suo ragionamento, bisogna provare che il triangolo rettangolo evidenziato ha la stessa area degli altri due triangoli evidenziati messi insieme.



66. La seguente figura servì nel 1888 a una certa E.A.Coolidge, per dimostrare il teorema di Pitagora. Ripetere tale dimostrazione.

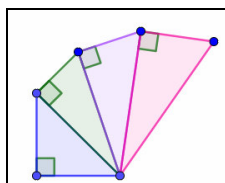
67. Provare che un triangolo rettangolo, in cui il quadrato costruito sull'ipotenusa è equiesteso al doppio del rettangolo le cui dimensioni sono uguali ai cateti, è isoscele.
68. Nel triangolo ABC la mediana AE è perpendicolare alla mediana BD . Trovare la misura di AB , sapendo che BC è lungo 8 dm e AC 6 dm . *Suggerimento:* ricordare le proprietà delle mediane $\left[\sqrt{20}\text{ dm}\right]$
69. Si consideri un punto P interno a un rettangolo $ABCD$ in modo che le misure di PA , PB , PC , e PD siano rispettivamente a , b , c , d . Verificare la seguente uguaglianza $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.
70. I triangoli in figura sono tutti rettangoli, il cateto minore del primo triangolo misura 1. Gli altri triangoli vengono costruiti in modo che siano tutti retti con angoli acuti di 30° e 60° , determinare la misura



dell'ipotenusa del triangolo più grande.

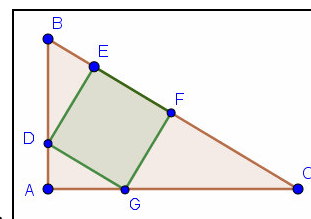
[3,125]

71. Sull'esempio dell'esercizio precedente, si costruiscono triangoli rettangoli a partire da un triangolo isoscele di lato 1 in modo che ogni poligono successivo abbia un cateto di misura unitaria e l'altro coincidente con l'ipotenusa del triangolo precedente. In tal modo le ipotenuse di ciascun triangolo costituiscono le radici quadrate dei successivi numeri naturali. La costruzione è dovuta a Teodoro di Cirene, maestro di Platone vissuto intorno al 390 a.C. Ripetere la costruzione fino a $\sqrt{7}$ e giustificarne i



risultati.

72. Provare che in un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equiesteso ai $\frac{4}{5}$ della somma dei quadrati costruiti sulle mediane relative ai cateti.



73. In figura $DEFG$ è un quadrato inscritto nel triangolo rettangolo ABC . Sapendo che CF è lungo 9 ed EB è lungo 4, determinare la misura del perimetro di ABC . *Suggerimento:* Provare che EF è medio proporzionale fra CF e BE .

$$\left[19 \cdot \frac{5 + \sqrt{13}}{\sqrt{13}}\right]$$

Lavoriamo insieme

François Viète, nonostante fosse un avvocato diede importanti contributi alla matematica, specialmente per la notazione e la simbologia. Nel suo libro *Ad logisticem speciosam notae priores (Prime note sulla logistica speciosa)*¹ del 1631, fra le altre cose presenta un metodo per costruire un triangolo rettangolo mediante le misure di due altri triangoli rettangoli. Vediamo tale metodo.

Consideriamo i triangoli rettangoli di cateti lunghi B e D e ipotenusa Z e di cateti F e G e ipotenusa X . Viète dice che anche i triangoli di cateti $BG + DF$ e $BF - DG$, oppure $BF + DG$ e $BG - DF$, sono rettangoli. Vediamo di provarlo. Cominciamo a scrivere le ipotesi, cioè applichiamo il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli di partenza: $B^2 + D^2 = Z^2$; $F^2 + G^2 = X^2$. Adesso calcoliamo la somma dei quadrati delle altre quantità: $(BG + DF)^2 + (BF - DG)^2 = B^2G^2 + 2BDFG + D^2F^2 + B^2F^2 - 2BDFG + D^2G^2 = B^2 \cdot (F^2 + G^2) + D^2 \cdot (F^2 + G^2) = (B^2 + D^2) \cdot (F^2 + G^2) = Z^2X^2$. Quindi effettivamente il triangolo di cateti $BG + DF$ e $BF - DG$ è rettangolo di ipotenusa ZX . Allo stesso modo si prova che il triangolo di cateti $BF + DG$ e $BG - DF$ è rettangolo di ipotenusa ZX . Chiaramente dobbiamo stare attenti a considerare le misure dei cateti ottenuti

¹ La logistica speciosa è il calcolo simbolico

come differenze, che hanno senso solo se i sottraendi sono minori dei minuendi. Proviamo le formule. Consideriamo i triangoli rettangoli (3; 4; 5) e (7; 24; 25), da essi possiamo costruire le coppie $(3 \cdot 24 + 4 \cdot 7; 3 \cdot 7 - 4 \cdot 24) = (100; -75)$ e $(3 \cdot 7 + 4 \cdot 24; 3 \cdot 24 - 4 \cdot 7) = (117; 44)$. La prima coppia ovviamente non è accettabile; per la seconda si ha: $117^2 + 44^2 = 125^2 = (5 \cdot 25)^2$. Possiamo però scambiare l'ordine nella prima coppia, ottenendo: $(3 \cdot 24 + 4 \cdot 7; 4 \cdot 24 - 3 \cdot 7) = (100; 75)$. Quindi basta considerare le formule di Viète in valore assoluto.

Le formule seguenti valgono ovviamente solo per scelte dei valori numerici assegnati ai simboli che li rendano numeri naturali

Livello 2

74. Possono esistere terne pitagoriche primitive formate da numeri consecutivi? Se sì, quante?
[Solo (3; 4; 5)]
75. Provare che la terna $(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ è pitagorica quali che siano i numeri naturali m e n , con $m > n$.
76. Utilizzando la formula precedente determinare le prime cinque terne pitagoriche primitive.
77. Determinare le terne pitagoriche primitive in cui $n = 1$.
78. Proclo narra che Pitagora determinò la seguente formula per ottenere terne pitagoriche: $[2n + 1, 2n \cdot (n + 1), 2n \cdot (n + 1) + 1]$. Verificare la correttezza di tale formula.
79. Che relazione vi è fra la formula di Pitagora e quella dell'esercizio 59?
[Quella di Pitagora ha $m = n + 1$]
80. Utilizzando la formula di Pitagora determinare le prime cinque terne pitagoriche primitive.
81. La formula di Pitagora è in grado di generare tutte le terne pitagoriche primitive? Giustificare la risposta.
[No; non genera per esempio (20; 21; 29) e tutte quelle in cui il cateto minore è pari]
82. Provare che la terna $\left(\sqrt{m \cdot n}, \frac{m \cdot n}{2}, \frac{m + n}{2}\right)$, dovuta a Platone, è pitagorica quali che siano i numeri naturali m e n tali che $m \cdot n$ sia un quadrato perfetto.
83. Utilizzando la formula precedente determinare cinque terne pitagoriche primitive.
84. Provare che la terna $\left(\frac{m \cdot (n^2 - 1)}{n^2 + 1}, \frac{2 \cdot m \cdot n}{n^2 + 1}, m\right)$, dovuta a Diofanto, è pitagorica quali che siano i numeri naturali m e n tali che le frazioni siano apparenti.
85. Utilizzando la formula precedente determinare cinque terne pitagoriche primitive.
86. Provare che la terna $\left(\sqrt{m}, \frac{m - n^2}{2n}, \frac{m + n^2}{2n}\right)$, dovuta ai matematici indiani Brahmagupta, Mahavira e Bhaskara, è pitagorica quali che siano i numeri naturali m e n tali che m sia un quadrato perfetto e le frazioni siano apparenti.
87. Utilizzando la formula precedente determinare cinque terne pitagoriche primitive.
88. Applicando la formula di Viète generare due nuove terne pitagoriche a partire da a) (3; 4; 5) e (5; 12; 13); b) (3; 4; 5) e (8; 15; 17); a) (7; 24; 25) e (5; 12; 13).
[a) (16; 63; 65) e (33; 56; 65); b) (13; 84; 85) e (36; 77; 85); c) (36; 323; 325) e (204; 253; 325)]
89. Ancora una formula di Viète, dalla terna pitagorica $(B; D; A)$ si ottiene la terna $(A^2, D^2 - B^2, 2 \cdot B \cdot D)$. Dimostrare la formula.
90. Con la precedente formula generare terne pitagoriche a partire da a) (3; 4; 5); b) (8; 15; 17); a) (5; 12; 13)
[a) (7; 24; 25); b) (161; 240; 289); a) (119; 120; 169)]
91. Provare che se $B^2 + D^2 + B \cdot D = A^2$, allora sono rettangoli e sono anche equiestesi i triangoli di cateti $(2AB; D^2 + BD); (2AD; B^2 + BD); (BD; 2AB + 2AD)$. Questo è un risultato di Viète (1591).
92. Applicare la precedente formula al caso $B = 3, D = 5$, ricavando le misure dei lati e l'area comune.
[(40; 42; 58); (24; 70; 74); (15; 112; 113); 840]

Lavoriamo insieme

Vogliamo stabilire se il triangolo di vertici $A \equiv (1; 2)$, $B \equiv (0; 3)$, $C \equiv (1; -3)$ è rettangolo. Calcoliamo le misure dei lati: $\overline{AB} = \sqrt{(1-0)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{2}$; $\overline{AC} = \sqrt{(1-1)^2 + (2+3)^2} = 5$; $\overline{BC} = \sqrt{(0-1)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{37}$. Il triangolo è scaleno. Per stabilire se è rettangolo dobbiamo verificare l'eventuale validità del Teorema di Pitagora: $\overline{BC}^2 = 37 > \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2 + 25 = 27$. Quindi il triangolo non è rettangolo, ma, essendo il quadrato del lato maggiore più grande della somma dei quadrati degli altri due è ottusangolo.

Livello 1

93. Determinare le misure dei seguenti segmenti di cui sono fornite le coordinate degli estremi:

a) $A \equiv (3; 1)$, $B \equiv (3; 2)$; b) $C \equiv (-1; -3)$, $D \equiv (-4; 0)$; c) $E \equiv \left(0; -\frac{1}{2}\right)$, $F \equiv \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right)$;

d) $G \equiv (-3; 2)$, $H \equiv (2; -3)$ e) $I \equiv \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{8}\right)$; $J \equiv \left(-\frac{4}{3}; -\frac{3}{2}\right)$; f) $K \equiv (0; -1)$, $L \equiv (-2; 0)$

$$\left[1; 3\sqrt{2}; \frac{\sqrt{97}}{12}; 5\sqrt{2}; \frac{\sqrt{3469}}{24}; \sqrt{5}\right]$$

94. Determinare la condizione per stabilire se è isoscele un triangolo, di cui sono fornite le coordinate dei vertici in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Usando tale condizione, verificare quali fra i triangoli seguenti, di cui sono date le coordinate dei vertici, sono isosceli.

a) $A \equiv (3; 1)$, $B \equiv (3; 2)$, $C \equiv (1; -3)$; b) $D \equiv (2; 5)$, $E \equiv (3; -3)$, $F \equiv \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$; c) $G \equiv (-3; 2)$, $H \equiv (2; -3)$, $I \equiv \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{8}\right)$; d) $J \equiv (-2; -1)$, $K \equiv (-4; 1)$, $L \equiv (1; 4)$; e) $M \equiv (0; -2)$, $N \equiv (4; 0)$, $P \equiv (-3; 9)$ [d); e)]

95. Determinare le misure dei perimetri dei triangoli dell'esercizio precedente.

$$\left[1 + 2\sqrt{5} + \sqrt{29}; \frac{4\sqrt{65} + 3\sqrt{53} + \sqrt{221}}{4}; \frac{40\sqrt{2} + 5\sqrt{37} + 13\sqrt{5}}{8}; 2\sqrt{2} + 2\sqrt{34}; 2\sqrt{130} + 2\sqrt{5}\right]$$

96. Verificare quali fra i triangoli seguenti, di cui sono date le coordinate dei vertici, sono rettangoli.

a) $A \equiv (1; 2)$, $B \equiv (4; 2)$, $C \equiv (1; 6)$; b) $D \equiv (-4; 0)$, $E \equiv \left(0; -\frac{1}{2}\right)$, $F \equiv \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$; c) $G \equiv (-2; 3)$, $H \equiv (1; -2)$, $I \equiv (3; 6)$; d) $J \equiv \left(-\frac{4}{3}; -\frac{3}{2}\right)$, $K \equiv (0; -1)$, $L \equiv (-2; 0)$; e) $M \equiv (-1; -1)$, $N \equiv (-2; 3)$, $P \equiv (7; 1)$

[a); c); e)]

97. Determinare le misure delle aree di ciascuno dei triangoli rettangoli dell'esercizio precedente.

[6; 17; 17]

Livello 2

98. Determinare i punti P sull'asse x , la cui distanza dal punto $A \equiv (-3; 6)$ è 10 unità. [(-11; 0), (5; 0)]

99. Determinare i punti di ordinata uguale a -4 che distano 5 unità dall'origine degli assi coordinati.

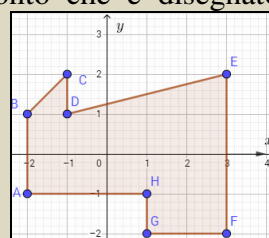
[(-3; 4), (3; 4)]

100. Determinare i punti P sull'asse y , la cui distanza dal punto $A \equiv (-3; 4)$ è 5 unità.

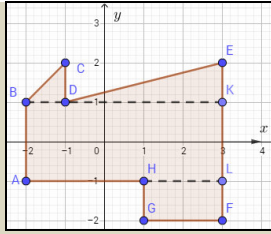
[(8; 0), (0; 0)]

Lavoriamo insieme

Determinare l'area del poligono in figura, tenuto conto che è disegnato in un sistema di riferimento



cartesiano ortogonale, in cui l'unità di misura è u . Suddividiamo il poligono nel

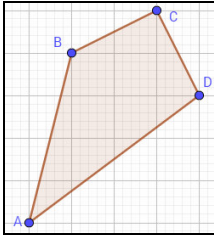


seguito modo.

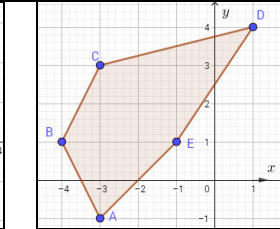
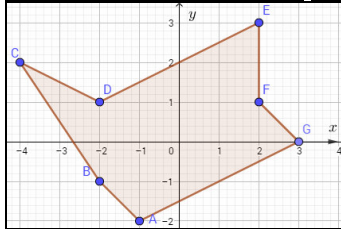
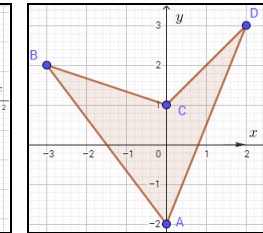
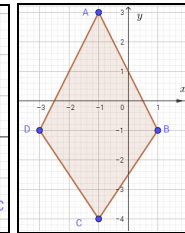
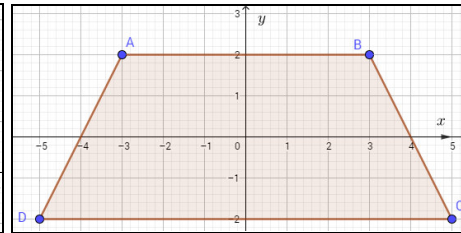
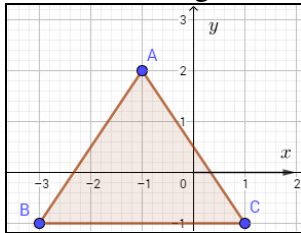
Il calcolo dell'area è reso molto più semplice. Abbiamo così:

$$S_{ABCDEFGH} = S_{BCD} + S_{DEK} + S_{ABKL} + S_{FGHL} = \frac{1}{2} \cdot (1 \cdot 1) + \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 1) + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 2 = \frac{1}{2} + 2 + 10 + 2 = 14 + \frac{1}{2} = \frac{28+1}{2} = \frac{29}{2}.$$

Livello 1



101. In figura un trapezio è posto in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, nel quale ognuno dei punti evidenziati ha per coordinate due numeri interi. Trovare la misura del perimetro del trapezio, relativamente all'unità di misura del sistema di riferimento. [9]
102. Determinare l'area dei poligoni seguenti, tenuto conto che sono disegnati in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, in cui l'unità di misura è u .



[6; 32; 14; 7,5; 16; 11]

103. Determinare l'area dei poligoni i cui vertici hanno le seguenti coordinate: a) $A \equiv (-2; 1)$, $B \equiv (-4; -2)$, $C \equiv (3; -2)$, $D \equiv (5; 1)$; b) $A \equiv (-1; -1)$, $B \equiv (4; -1)$, $C \equiv (-1; 4)$; c) $A \equiv (-2; 2)$, $B \equiv (-2; -2)$, $C \equiv (3; -2)$, $D \equiv (1; 2)$ [a) 21; b) 12,5; c) 16]

Livello 2

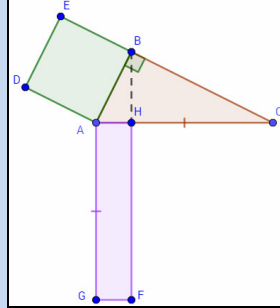
104. Un ottagono regolare $ABCDEFGH$ è disegnato su un sistema di riferimento cartesiano, con i vertici che si succedono nell'ordine delle lettere in verso antiorario. Se $A \equiv (4; 0)$, $B \equiv (0; 4)$, $E \equiv (p; q)$, calcolare il valore di $p - q$. *Suggerimento:* ricordare quanto misura un angolo interno di un ottagono regolare [−4]

Teoremi di Euclide

Altri importanti risultati relativi ai triangoli rettangoli sono presentati da Euclide nei suoi *Elementi*, e sono perciò noti sotto il nome di teoremi di Euclide. Cominciamo a vedere il primo di essi.

Teorema 18 (1° di Euclide)

In un triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equiesteso al rettangolo le cui dimensioni sono uguali all'ipotenusa e alla proiezione di detto cateto sull'ipotenusa.



Ipotesi: $AB \perp BC$, $BH \perp AC$

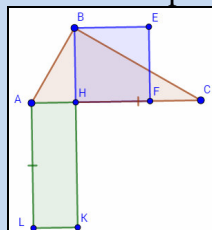
Tesi: $\overline{AB}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{AC}$

Schema dimostrativo			
Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Applichiamo il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABC	$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$	
2	Applichiamo il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo BCH	$\overline{BC}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{HC}^2$	
3	Sostituiamo l'espressione 2 nell'espressione 1	$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BH}^2 - \overline{HC}^2$	
4	Semplifichiamo la 3	$\overline{AB}^2 = (\overline{AH} + \overline{HC})^2 - \overline{BH}^2 - \overline{HC}^2 =$ $= \overline{AH}^2 + 2\overline{AH} \cdot \overline{HC} + \cancel{\overline{HC}^2} - \overline{BH}^2 - \cancel{\overline{HC}^2}$	Poiché $\overline{AC} = \overline{AH} + \overline{HC}$
5	Semplifichiamo la 4	$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + 2\overline{AH} \cdot \overline{HC} - (\overline{AB}^2 - \overline{AH}^2) =$ $= \overline{AH}^2 + 2\overline{AH} \cdot \overline{HC} - \overline{AB}^2 + \overline{AH}^2$	Abbiamo applicato il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABH
6	Semplifichiamo la 5	$2\overline{AB}^2 = 2\overline{AH}^2 + 2\overline{AH} \cdot \overline{HC} \Rightarrow$ $\Rightarrow \overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{AH} \cdot \overline{HC} = \overline{AH} \cdot (\overline{AH} + \overline{HC}) =$ $= \overline{AH} \cdot \overline{AC}$	Questa è la tesi

Il secondo risultato è invece il seguente.

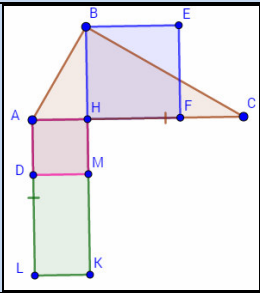
Teorema 19 (2° di Euclide).

In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equiesteso al rettangolo le cui dimensioni sono uguali alle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.



Ipotesi: $AB \perp BC$; $BH \perp AC$

Tesi: $\overline{BH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{HC}$

Schema dimostrativo			
Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Ricaviamo la misura di AB	$\overline{AB}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{AC}$	Per il 1° teorema di Euclide.
2	Suddividiamo il rettangolo $AHKL$ nel quadrato $AHMD$ e nel rettangolo $DMKL$.		
3	Consideriamo i quadrati dei lati AB , BH , AH .	$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2$	Per il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo ABH .
4		$\overline{AH} \cdot \overline{AC} = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2$	Per la proprietà transitiva applicata alle uguaglianze dei passi 1 e 3.
5		$\begin{aligned} \overline{BH}^2 &= \overline{AH} \cdot \overline{AC} - \overline{AH}^2 = \\ &= \overline{AH} \cdot (\overline{AC} - \overline{AH}) = \overline{AH} \cdot \overline{HC} \end{aligned}$	Dal passo 4.

Forniamo ora l'interpretazione algebrica dei teoremi di Euclide.

Teorema 20

In un triangolo rettangolo in cui l'ipotenusa misura i unità e la proiezione di un cateto sull'ipotenusa misura p unità, il detto cateto misura $\sqrt{i \cdot p}$ unità.

Teorema 21

In un triangolo rettangolo in cui le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa misurano p_1 e p_2 unità, l'altezza relativa all'ipotenusa misura $\sqrt{p_1 \cdot p_2}$ unità.

Esempio 14

- Nel triangolo ABC , rettangolo in C , le proiezioni dei due cateti AC e BC sull'ipotenusa AB sono lunghe rispettivamente 3 cm e 7 cm . Determinare le misure dei cateti. Dato che conosciamo le misure delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa, si ricorre al 1° teorema di Euclide. Abbiamo perciò $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AH} \cdot \overline{AB}} = \sqrt{30}\text{ cm}$ e $\overline{BC} = \sqrt{\overline{BH} \cdot \overline{AB}} = \sqrt{70}\text{ cm}$.

- Nel triangolo rettangolo ABC , di ipotenusa BC , l'altezza relativa all'ipotenusa e il cateto AB sono lunghi rispettivamente 12 cm e 13 cm . Determinare la misura dell'ipotenusa. Appliciamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABH per determinare la misura del cateto BH : troviamo che è lungo 5 cm .

Adesso possiamo ricavare la misura dell'ipotenusa applicando il 1° teorema di Euclide: $\overline{BC} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BH}} =$

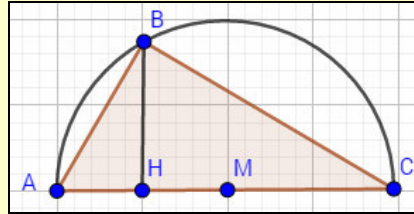
$$\frac{169}{5} = 33,8\text{ cm (in cm)}.$$

- Nel triangolo rettangolo ABC , le proiezioni dei cateti AB e AC sull'ipotenusa BC sono lunghe rispettivamente 9 cm e 16 cm . Determinare la misura dell'altezza AH relativa all'ipotenusa. Si può applicare il 2° teorema di Euclide: $\overline{AH} = \sqrt{\overline{BH} \cdot \overline{CH}} = \sqrt{9 \cdot 16}\text{ cm} = 12\text{ cm}$.

Un ultimo esempio.

Esempio 15

Grazie al fatto che un triangolo inscritto in una semicirconferenza è retto, possiamo costruire con riga e compasso, un segmento la cui misura è la radice quadrata di un numero. Vediamo come. Sia un segmento la cui misura valga a unità, vogliamo costruire un segmento la cui misura valga $\sqrt{a}$ unità. Applicando algebricamente il II teorema di Euclide a un triangolo rettangolo i cui cateti hanno proiezioni sull'ipotenusa che misurano a e 1 , abbiamo che l'altezza relativa all'ipotenusa ha misura $\sqrt{a}$ ed è quindi il segmento cercato.



Per ottenere effettivamente la costruzione, consideriamo i due segmenti adiacenti AH e HC di misura a e 1 , dati del problema. Il loro segmento somma è l'ipotenusa AC . Costruiamo adesso il punto medio M di tale ipotenusa, quindi la semicirconferenza di diametro l'ipotenusa. Tracciamo poi la perpendicolare ad AC per H , il punto d'incontro B con la semicirconferenza è il terzo vertice del triangolo ABC che per il corollario 2 è rettangolo in C . Quindi per quanto premesso, BH misura $\sqrt{a}$. In particolare nella figura vediamo che HC è lungo 4 cm e BH è lungo 2 cm , che è proprio la radice quadrata di 4 .

Verifiche

Lavoriamo insieme

Del triangolo rettangolo ABC conosciamo le lunghezze del cateto AB , 5, e della sua proiezione BH sull'ipotenusa, 4, vogliamo determinarne l'area. Abbiamo bisogno di conoscere la lunghezza dell'altro cateto. Grazie al primo teorema di Euclide possiamo ricavare la lunghezza dell'ipotenusa. Otteniamo:

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BH} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BH}} = \frac{25}{4} = 6,25.$$

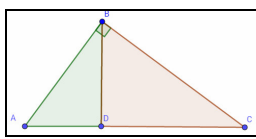
Adesso applichiamo il teorema di Pitagora, determinando l'altro cateto:

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{\frac{625}{16} - 25} = \sqrt{\frac{625 - 400}{16}} = \sqrt{\frac{225}{16}} = \frac{15}{4} = 3,75.$$

Pertanto l'area cercata è $S_{ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{2} = \frac{5 \cdot \frac{15}{4}}{2} = \frac{75}{8} = 9,375$

Livello 1

1. Nel triangolo rettangolo ABC sappiamo che l'ipotenusa è lunga 17 cm, mentre un cateto è lungo 8. Determinare le misure delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa. $\left[\frac{64}{17}, \frac{225}{17} \right]$
2. Nel triangolo rettangolo ABC , il cateto AB è lungo 5 cm e la sua proiezione sull'ipotenusa $\frac{25}{13}$ cm. Determinare la misura dell'altro cateto. $[12 \text{ cm}]$
3. Nel triangolo rettangolo ABC l'altezza relativa all'ipotenusa è lunga 5 cm e un cateto 13 cm. Determinare la misura della proiezione dell'altro cateto sull'ipotenusa. $\left[\frac{25}{12} \text{ cm} \right]$
4. Nel triangolo rettangolo ABC l'altezza relativa all'ipotenusa è lunga 8 cm e un cateto 7 cm. Determinare la misura dell'ipotenusa. $[\text{Dati incoerenti}]$
5. Nel triangolo ABC , rettangolo in C , si sa che l'altezza CH relativa all'ipotenusa è lunga 8 cm e la proiezione HB del cateto CB su AB , misura 6 cm. Determinare il perimetro di ABC . $[40 \text{ cm}]$
6. Nel triangolo rettangolo isoscele ABC sappiamo che l'ipotenusa è lunga $\sqrt{8}$ cm. Determinare le misure delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa. $[\sqrt{2} \text{ cm}]$



7. In figura, il triangolo rettangolo ABC è ottenuto incollando il triangolo rettangolo ABD di cateti lunghi 3 e 4, con il triangolo rettangolo di cateti lunghi 4 e x . Quanto misura x ? $\left[\frac{16}{3} \right]$

Livello 2

8. Il triangolo rettangolo ABC ha area 24, se il suo cateto AB è lungo 4, determinare la lunghezza della sua proiezione sull'ipotenusa. $\left[\frac{2\sqrt{10}}{5} \right]$
9. Del triangolo rettangolo ABC conosciamo le lunghezze del cateto AB , 6, e della proiezione CH dell'altro cateto sull'ipotenusa, 5, determinarne l'area. $[9\sqrt{5}]$
10. Del triangolo rettangolo ABC conosciamo le lunghezze del cateto AB , 13, e dell'altezza AH relativa all'ipotenusa, 12, determinarne l'area. $[202,8]$
11. Del triangolo rettangolo ABC conosciamo la lunghezza del cateto AB , 3, e l'area, 20. Determinare la lunghezza dell'altezza relativa all'ipotenusa. $\left[\frac{120}{41} \right]$

12. Il triangolo rettangolo ABC ha l'ipotenusa AB , lunga 7 cm . Tracciamo l'altezza CH relativa all'ipotenusa e, dal punto H , il segmento HP perpendicolare al cateto BC . Sapendo che la proiezione AH del cateto AC sull'ipotenusa è lunga 2 cm , determinare la misura di HP .

$$\left[5 \cdot \sqrt{\frac{2}{7}} \text{ cm} \right]$$

Lavoriamo insieme

Nel triangolo rettangolo ABC , l'ipotenusa è lunga 12 cm e l'altezza AH ad essa relativa ne misura 5 . Determinare le misure delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa. Indichiamo la misura in cm della proiezione BH con x (con $0 < x < 12$); ovviamente l'altra proiezione HC misurerà $(12 - x)\text{ cm}$. Applicando il secondo teorema di Euclide al triangolo ABC , possiamo scrivere che $\overline{AH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{HC}$, cioè che $25\text{ cm}^2 = x \cdot (12 - x)\text{ cm}^2 \Rightarrow x^2 - 12x + 25 = 0 \Rightarrow x = (6 \pm \sqrt{11})$. Questi valori rappresentano le misure, in centimetri, delle proiezioni.

Livello 2

13. Determinare una formula che calcoli l'area di un triangolo rettangolo note le lunghezze a e p di un cateto e della sua proiezione sull'ipotenusa.
14. Determinare una formula che calcoli l'area di un triangolo rettangolo note le lunghezze a e h di un cateto e dell'altezza relativa all'ipotenusa.
15. Su una retta si fissino nell'ordine quattro punti A, B, C, D tali che $\overline{BC} = 2\overline{AB}, \overline{CD} = \overline{AC}$. Considerate le circonferenze che hanno BD e AC come diametri, si dimostri che la loro corda comune biseca AC . *Suggerimento:* Si tenga conto del fatto che un triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo con ipotenusa il diametro.
16. Tenuto conto della costruzione del segmento che misura $\sqrt{a}$, proposta nell'esempio 15, costruire un segmento che misura $\sqrt{a \cdot b}$, con a e b numeri reali positivi scelti a piacere.

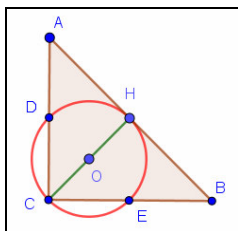
$$\left[\frac{a^2 \cdot \sqrt{a^2 - p^2}}{2p} \right]$$

$$\left[\frac{a^2 h}{2\sqrt{a^2 - h^2}} \right]$$

Livello 3

17. Tenuto conto del risultato precedente dimostrare la validità della seguente disuguaglianza: $\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$. Dedurre che l'uguaglianza fra le due quantità vale solo se $a = b$.
18. In una circonferenza di raggio 10 , si traccino le corde AB e CD fra loro parallele, in modo che la somma dei loro quadrati sia 100 , mentre la reciproca distanza è 1 , determinare le lunghezze delle corde. *Suggerimento:* applicare opportunamente il II teorema di Euclide.

$$\left[50 \pm 2\sqrt{349} \right]$$



19. In figura ABC è un triangolo rettangolo di ipotenusa AB , CH è l'altezza relativa ad AB , la circonferenza ha diametro CH e incontra AC in D e BC in E . Provare che $\overline{BC} \cdot \overline{CE} = \overline{AC} \cdot \overline{CD}$. *Suggerimento:* Congiungere H con D e con E e applicare il I teorema di Euclide ai triangoli ...
20. Il seguente problema è stato trovato su una tavoletta babilonese. Il triangolo rettangolo ABC è diviso dal segmento ED , parallelo al cateto AC , nel trapezio $ECAD$ e nel triangolo BED . Sappiamo che $\overline{AC} = 30$; $S_{ECAD} - S_{BED} = 420$; $\overline{BE} - \overline{EC} = 20$. Determinare le misure di BE, EC, ED . *Suggerimento:* Impostare un sistema

$$[60; 40; 18]$$

Superficie del cerchio

Abbiamo già considerato la circonferenza come un poligono con infiniti lati, quando abbiamo trattato della sua lunghezza, vogliamo quindi ripetere le procedure per determinare la misura dell'area del cerchio. Ripetiamo quanto già detto nell'unità 6.1, che ciascun poligono regolare può essere sia inscritto che circoscritto a una circonferenza siamo in grado di determinare un metodo per calcolare approssimativamente l'area di un cerchio.

Definizione 3

Dato un poligono regolare, diciamo suo **apotema** il raggio della circonferenza inscritta nel poligono.

Risulta di semplice dimostrazione (basta suddividere il poligono in n triangoli isosceli uguali, congiungendo il centro della circonferenza con i vertici) il seguente risultato.

Teorema 22

Un poligono regolare è equiesteso a un triangolo che ha la base e la relativa altezza rispettivamente uguali al suo semiperimetro e al suo apotema.

Grazie al precedente teorema possiamo enunciare la seguente regola.

Regola 1

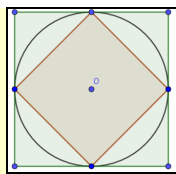
L'area di un poligono regolare si ottiene moltiplicando la misura del suo semiperimetro per quella del suo apotema.

In formula la precedente regola si enuncia così, S indica la misura dell'area, p quella del semiperimetro, a la misura dell'apotema.

$$S = p \cdot a$$

A questo punto determineremo un valore approssimato dell'area del cerchio, così come visto per la misura della sua circonferenza con il seguente procedimento detto di Eudosso–Archimede o di esaustione.

Esempio 16

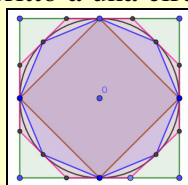


Consideriamo la seguente figura nella quale sono presentati il quadrato q inscritto e quello Q circoscritto a una stessa circonferenza Γ . È ovvio che se indichiamo con s_4 e S_4 le misure delle aree di q e Q rispettivamente e con C la misura dell'area del cerchio, avremo la seguente catena di disuguaglianze:

$$s_4 < C < S_4 \quad (*)$$

Allora $(C - s_4)$ rappresenterà l'errore per difetto che si ottiene considerando s_4 come misura dell'area di Γ ; mentre $(C - S_4)$ rappresenterà l'errore per eccesso che si ottiene considerando A_4 come misura dell'area di Γ .

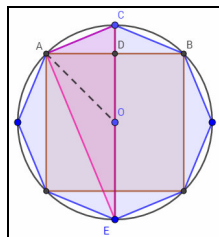
Per semplificare i conti, consideriamo il raggio di misura 1 unità. In tal modo il lato l_4 di q misura $\sqrt{2}$ (infatti la sua diagonale misura quanto il diametro, ossia 2, quindi si ha $2 \cdot l_4^2 = 4$, cioè $l_4 = \sqrt{2}$) mentre il lato L_4 di Q misura 2. Perciò la (*) diviene: $2 < C < 4$. Chiaramente, se invece inscriviamo e circoscriviamo un ottagono regolare i valori per difetto e per eccesso risultano più prossimi al valore effettivo dell'area racchiusa dal cerchio. Consideriamo le figure seguenti per visualizzare l'area dell'ottagono inscritto e quella dell'ottagono circoscritto a una circonferenza in relazione alle aree dei quadrati inscritto e circoscritto nella



stessa circonferenza.

Per continuare nel procedimento di approssimazione visto nell'esempio precedente dobbiamo trovare una relazione che lega fra loro il poligono di n lati con quello di $2n$ lati, nei due casi in cui il poligono è inscritto o circoscritto.

Cominciamo a considerare quel che accade passando dal quadrato all'ottagono regolare. Con riferimento alla successiva figura vogliamo determinare la misura del lato AC dell'ottagono regolare inscritto mediante la

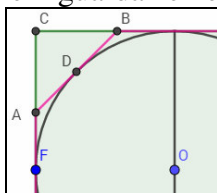


misura nota del lato AB del quadrato. Applichiamo il I teorema di Euclide al triangolo ACE (rettangolo perché inscritto in una semicirconferenza), scriviamo: $\overline{AC}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{CE} = (1 - \overline{OD}) \cdot \overline{CE}$

D'altro canto se applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo AOD otteniamo: $\overline{OD}^2 = 1 - \left(\frac{l_4}{2}\right)^2 = 1 - \frac{l_4^2}{4}$.

Quindi: $\overline{AC}^2 = l_8^2 = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{l_4^2}{4}}\right) \cdot 2 = 2 - 2 \cdot \sqrt{\frac{4 - l_4^2}{4}} = 2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{4 - l_4^2}}{2} \Rightarrow l_8 = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_4^2}} \Rightarrow l_8 = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

Mentre per quel che riguarda le relazioni fra i lati dei corrispondenti poligoni circoscritti, consideriamo



quest'altra figura, dalla quale si ricava facilmente che $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AC}^2$ e $\overline{AC} = \overline{FC} - \overline{AF}$. Quindi si ha:

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 = L_8^2 &= 2 \cdot \left(\frac{L_4}{2} - \frac{L_8}{2}\right)^2 \Rightarrow L_8 = \sqrt{2} \cdot \left(1 - \frac{L_8}{2}\right) \Rightarrow 2 \cdot L_8 = \sqrt{2} \cdot (2 - L_8) \Rightarrow (2 + \sqrt{2}) \cdot L_8 = 2 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow L_8 &= \frac{2\sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \Rightarrow L_8 = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4}{2 \cdot \sqrt{2} + 2} = \frac{4}{2 \cdot (\sqrt{2} + 1)} = \frac{2}{\sqrt{2} + 1} = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

Per quel che riguarda l'area del cerchio invece vale il seguente risultato.

Teorema 23

Un cerchio è equiesteso a un triangolo rettangolo i cui lati sono uguali alla misura della sua circonferenza e a quella del suo raggio.

Dal precedente teorema deriva la ben nota formula per determinare l'area racchiusa da un cerchio di raggio che misura r .

$$C = \pi \cdot r^2$$

Infine per la determinazione dell'area di un settore circolare possiamo enunciare il seguente risultato abbastanza intuitivo.

Teorema 24

Un settore circolare di una circonferenza di raggio r , che determina un angolo al centro che misura α gradi

ha una misura pari a $\frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{360}$.

Esempio 17

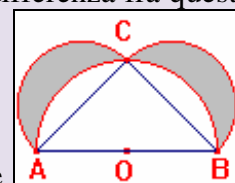
È ovvio che per esempio un quarto di cerchio, che determina un angolo al centro di 90° abbia un'area che è la quarta parte del cerchio.

L'angolo storico

Il procedimento di esaustione è detto così per via del fatto che esso tende a “esaurire” l’area di una figura inscrivendo in essa altre figure delle quali è nota l’area. Esso è detto di Eudosso–Archimede, poiché è stato enunciato per la prima volta da Eudosso di Cnido ed è stato ampiamente usato da Archimede per molte delle sue più importanti dimostrazioni, da quella che ha condotto alla determinazione del primo valore approssimato del numero π , alla determinazione del volume della piramide, della sfera e via dicendo. Vi è da dire però che la prima idea di inscrivere dei poligoni in un cerchio per determinarne l’area è dovuta al sofista Antifone vissuto nel V secolo a.C., mentre l’altro sofista Brisone (attivo nel 450 a.C.) pensò di migliorare l’approssimazione circoscrivendo dei poligoni.

La quadratura del cerchio. Strettamente legato al problema del calcolo dell’area di un cerchio vi è quello della cosiddetta quadratura del cerchio. Ossia sin dall’antichità, ci riferiamo alla matematica greca anteriore al III secolo a.C., ci si è posto il problema se poteva costruirsi solo con riga e compasso un quadrato, o più in generale un poligono, la cui area fosse equiestesa a quella di un cerchio. Solo nel secolo scorso, si è provato che il problema è privo di soluzioni. Vi è però da dire che nel V secolo a.C. il matematico Ippocrate di Chio aveva dato l’esempio di una figura non poligonale che risultava invece quadrabile: le cosiddette lunule, il che aveva fornito la falsa speranza che fosse risolvibile anche il problema maggiore.

Noi considereremo solo uno dei quattro casi trattati da Ippocrate, un altro lo vedremo negli esercizi. Consideriamo un triangolo rettangolo isoscele ABC inscritto in una semicirconferenza di centro O e diametro AB . Sui suoi cateti costruiamo due altri semicerchi. Chiameremo lunule di Ippocrate la differenza fra questi due



semicerchi e il semicerchio maggiore, cioè le aree evidenziate nella figura seguente. Ippocrate dimostrò che le due lunule, fra loro uguali, sono equiestese al triangolo ABC. Poiché ABC è chiaramente costruibile con riga e compasso abbiamo effettivamente quadrato le lunule. Vediamo di provare quanto detto. L’area di una lunula, per esempio quella determinata dal cateto AC, si può trovare togliendo dall’area del semicerchio di diametro AC il segmento circolare di base lo stesso AC. Grazie al teorema di Pi-

tagora si prova facilmente che $\overline{AC}^2 = \frac{\overline{AB}^2}{2}$. Allora l’area della lunula varrà

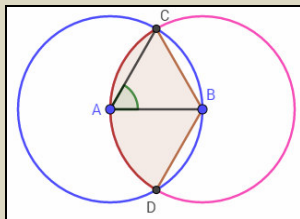
$$\frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{\overline{AC}}{2} \right)^2 - \left[\frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{\overline{AB}}{2} \right)^2 - \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CO}}{4} \right] = \frac{\pi}{16} \cdot \overline{AB}^2 - \frac{\pi}{16} \cdot \overline{AB}^2 + \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CO}}{4} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CO}}{4}$$

che è quel che voleva provarsi.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Due cerchi di raggio 1 cm, hanno il segmento AB che unisce i due centri anch'esso di misura 1 cm. Quanto misura l'area della figura ottenuta dall'intersezione dei due cerchi? Ci riferiamo al seguente disegno



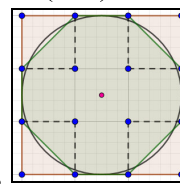
Essa può essere ottenuta dalla somma fra l'area del settore circolare DAC e i due segmenti circolari di basi BC e BD . Tenuto conto che i segmenti AC , BC e AB sono uguali, ABC è equilatero e perciò $\angle BAC = 60^\circ$, quindi il settore DAC insiste su un angolo al centro di 120° , è perciò $1/3$ del cerchio, la sua area è $\frac{\pi}{3} \text{ cm}^2$.

Per quanto riguarda i segmenti circolari, fra loro uguali, ciascuno di essi può trovarsi come differenza fra il settore circolare che determinano (e che ha area $\frac{\pi}{6} \text{ cm}^2$) e i triangoli equilateri di lato 1. Pertanto hanno area

$$\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \text{ cm}^2. \text{ Infine, l'area cercata è } \left[\frac{\pi}{3} + 2 \cdot \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \right] \text{ cm}^2 = \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ cm}^2.$$

Livello 1

- Nel papiro di Rhind o Ahmes (circa 1650 a. C), viene detto che l'area di un cerchio di diametro 9 Khet (antica misura egizia) è 64 khet quadrati, applicando la regola $A = \left(\frac{8}{9} d \right)^2$, con d misura del diametro.

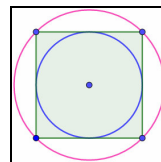


La giustificazione di questa regola si trova nella seguente figura, in cui abbiamo inserito il cerchio in un reticolo di 9 maglie quadrate. Diciamo che approssimativamente l'area del cerchio è uguale all'area dell'ottagono, non regolare, che abbiamo tracciato, cioè all'area dei cinque quadrati posti a croce e di 4 triangoli rettangoli, complessivamente quindi di 7 quadrati. Ciascuno di tali quadrati

ha lato che è $1/3$ del diametro, quindi l'area è $7 \cdot \left(\frac{1}{3} d \right)^2 = \frac{7}{9} d^2 = \frac{63}{81} d^2 \approx \frac{64}{81} d^2 = \left(\frac{8}{9} d \right)^2$. Tenuto conto

di questa approssimazione, calcolare il valore associato a π dagli egizi. [256/81 $\approx$ 3,16]

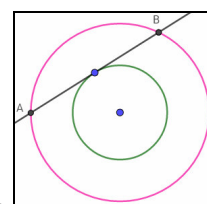
- Determinare la misura della corona circolare formata dalla circonferenza inscritta e da quella circo-



scritta allo stesso quadrato il cui lato misura 1 unità.

$$\left[\frac{\pi}{4} \right]$$

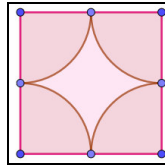
- Trovare l'area della corona circolare determinata dai due cerchi in figura, sapendo che $\overline{AB} = 10 \text{ cm}$. [25 π]
- Un antico problema babilonese. Una città ha un contorno circolare dalla lunghezza incognita. Ho



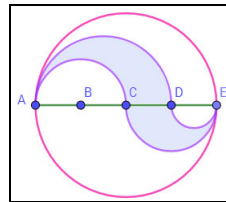
viaggiato dal centro della città per 5 miglia in tutte le direzioni, tracciando così un secondo contorno circolare, sapendo che l'area fra i due contorni è 6,15 miglia quadrate, trovare il diametro della città.

[circa 10,4 miglia]

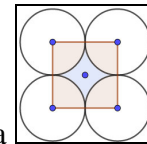
5. Un quadrato di lato che misura 2 è inscritto in una semicirconferenza. Quanto misura l'area del semicerchio? [2,5 π]
6. Consideriamo i cerchi che hanno il centro coincidente con i vertici di un quadrato e raggio uguale a



metà del lato stesso, come esemplificato in figura. Se il lato del quadrato è 10 cm, quanto misura l'area della parte di quadrato non appartenente ai cerchi? [100 – 25 π]



7. Determinare l'area della regione colorata in figura, sapendo che il diametro del cerchio misura 24 cm e che i segmenti AB, BC, CD e DE sono uguali. [36 π]



8. Quattro cerchi di raggio 3 cm sono sistemati nel modo mostrato in figura. I loro centri sono vertici di un quadrato. Quanto misura l'area della regione del quadrato che non contiene alcun punto dei cerchi? [36 – 9 π]

Lavoriamo insieme

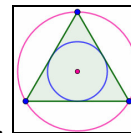
Due cerchi concentrici sono tali che l'area del maggiore è tripla di quella del minore, se la differenza fra i raggi misura 1 cm, quanto misura il raggio del cerchio maggiore?

Diciamo r e $(r + 1)$ le misure dei due raggi, in cm. Le aree, in cm^2 , sono perciò $\pi \cdot r^2$ e $\pi \cdot (r + 1)^2$, inoltre si ha la validità della seguente uguaglianza: $\pi \cdot (r + 1)^2 = 3 \cdot \pi \cdot r^2 \Rightarrow (r + 1)^2 = 3 \cdot r^2 \Rightarrow r^2 + 2r + 1 = 3r^2 \Rightarrow 2r^2 - 2r - 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{1 + \sqrt{1 + 2}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ cm. Naturalmente abbiamo considerato solo la soluzione positiva.

Infine: $r + 1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$ cm

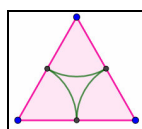
Livello 2

9. Determinare la misura della corona circolare formata dalla circonferenza inscritta e da quella circo-



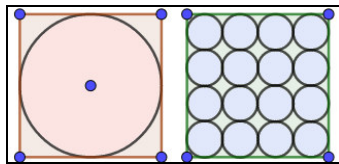
scritta allo stesso triangolo equilatero il cui lato misura 1 unità.

$\left[\frac{\pi}{4} \right]$



10. Il triangolo in figura è equilatero, gli archi hanno per estremi i punti medi dei lati e hanno centro nei tre vertici del triangolo. Determinare l'area della zona delimitata da tali archi, sapendo che il lato del triangolo misura 4 cm. $\left[(4\sqrt{3} - 2\pi) \text{ cm}^2 \right]$

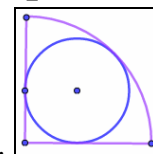
11. Una teglia quadrata di lato 2 m viene usata da un fornaio per preparare dei biscotti tutti uguali e di forma circolare. Sappiamo che i biscotti sono sistemati in modo da lasciare il minor numero possibile di spazi vuoti e in modo che ve ne siano lo stesso numero su ciascuna riga e ciascuna colonna e che toccano i bordi della teglia. Qual è l'area della teglia occupata dai biscotti? [4 π]



12. Nelle due figure seguenti i quadrati sono uguali e i cerchi più piccoli sono tutti uguali fra di loro, tangenti a due a due e i quadrati sono tangenti ai cerchi. Quale delle due zone colorate è maggiore? [Sono uguali]

13. Un cerchio è inscritto in un esagono regolare la cui area misura $24 m^2$, determinare l'area del cerchio.

$$\left[\frac{16\sqrt{3}\pi}{3} m^2 \right]$$

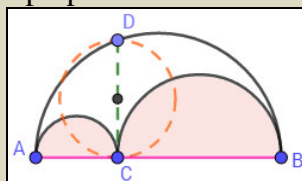


14. Determinare la misura del raggio del cerchio inscritto in un quarto di cerchio di raggio r .

$$\left[(\sqrt{2}-1)r \right]$$

Lavoriamo insieme

Nella seguente figura la zona colorata in chiaro fu chiamata da Archimede *arbelos* o coltello del ciabattino. Essa è formata prendendo a caso un punto C su un segmento AB e costruendo le semicirconferenze di diametri AB , AC e CB . Vogliamo provare che l'*arbelos* è equiesteso al cerchio che ha per diametro il segmento CD , dove D è l'intersezione della perpendicolare ad AB condotta per C con la circonferenza.



L'area richiesta può trovarsi come differenza fra l'area del semicerchio maggiore e quella dei due semicerchi minori. Per semplicità indichiamo con $2x$ la misura di AC , con $2y$ quella di CB . Allora l'area

cercata misurerà: $\frac{1}{2} \cdot [\pi \cdot (x+y)^2 - \pi \cdot x^2 - \pi \cdot y^2] = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (x^2 + y^2 + 2xy - x^2 - y^2) = \pi \cdot xy$. Adesso

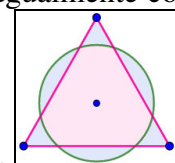
andiamo a calcolare la misura del segmento DC , il quale può considerarsi altezza relativa all'ipotenusa del triangolo rettangolo ABD (che non è segnato in figura), quindi è $\overline{DC} = \sqrt{\overline{AC} \cdot \overline{CB}} = \sqrt{2x \cdot 2y} = 2 \cdot \sqrt{xy}$, per il II teorema di Euclide, pertanto l'area del cerchio tratteggiato, di diametro DC misura anch'essa $\pi \cdot (\sqrt{xy})^2 = \pi \cdot xy$

Livello 3

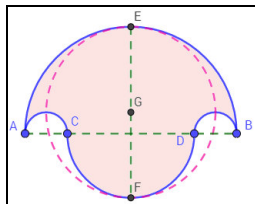
15. Un contadino ha messo nel suo campo dei sistemi di irrigazione a forma circolare, una pompa è messa nel centro del cerchio e irriga girando attorno a sé stessa. Le pompe sono poste tutte alla stessa distanza fra di loro in modo che l'acqua spruzzata da uno non invada il terreno irrigato dall'altro e in modo che si irighi la maggior parte possibile di terreno. Qual è la percentuale di terreno che non sarà irrigato?

$$\left[\frac{\pi-4}{\pi} \approx 21,5\% \right]$$

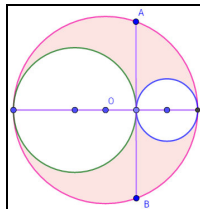
16. Un triangolo equilatero e un cerchio hanno lo stesso centro, l'area del triangolo che non fa parte del cerchio è uguale all'area del cerchio che non fa parte del triangolo (in figura le parti ugualmente colo-



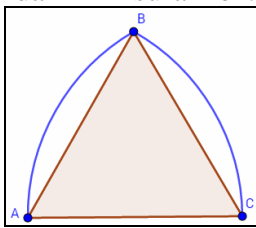
rate). Se il raggio del cerchio misura 1 cm , determinare la misura del lato del triangolo.



17. La seguente figura fu chiamata da Archimede *salinon* o saliera. Essa è formata prendendo a caso, ma in modo che AC e BD siano uguali, due punti C e D su un segmento AB e costruendo le semicirconferenze di diametri AB , AC e BD dalla stessa parte rispetto ad AB e la semicirconferenza di diametro CD dal lato opposto. Provare che il *salinon* è equiesteso al cerchio che ha per diametro il segmento EF , intersezione dell'asse di AB con le due semicirconferenze di diametri AB e CD .

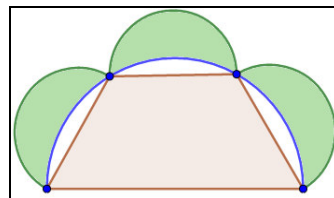


18. Un problema di Archimede. In figura i cerchi sono tangenti a due a due, la corda AB del cerchio maggiore è tangente a entrambi i cerchi minori. Se il raggio del cerchio maggiore misura 3 cm e la corda AB misura 4 cm , determinare la misura dell'area della ragione colorata. $[4\pi\text{ cm}^2]$

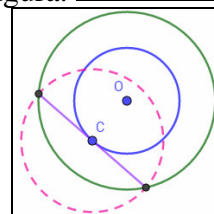


19. In figura, ABC è un triangolo equilatero di lato lungo 1 cm , AC e CB sono due archi uguali ottenuti facendo centro in B e A rispettivamente e raggio uguale ad AB . Determinare l'area della figura.
- $$\left[\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12} \text{ cm}^2 \right]$$

20. Una delle quadrature di lunule da parte di Ippocrate. Sul diametro di un semicerchio si costruisce un trapezio isoscele con tre lati fra loro uguali. Su tali lati si costruiscono semicerchi. Provare che il tra-

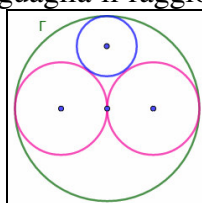


pezio è equiesteso alla somma delle tre lunule evidenziate in figura.



21. Due cerchi concentrici di centro O sono posti come in figura. Si consideri una corda del cerchio maggiore che sia tangente al cerchio minore e pensata come diametro vi si costruisca un altro cerchio di centro C . Che relazione vi è fra l'area di quest'ultimo cerchio e quella della corona circolare? [Sono uguali]

22. Dato un cerchio Γ di centro O , si traccino i cerchi tangenti internamente a Γ e tangenti esternamente fra di loro, il cui diametro uguaglia il raggio di Γ . Si tracci infine un quarto cerchio tangente esterna-

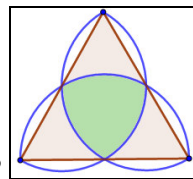


mente ai predetti tre cerchi. Detta r la misura del raggio di quest'ultimo cerchio determinare la misura del raggio di Γ . $[3r]$

23. Un falegname vuole tagliare 4 cerchi uguali da un pezzo di legno a forma di cerchio di raggio 1 m. Determinare le misure dei raggi di ciascun cerchio, in modo che essi abbiano la massima area possibile.

$$\left[(\sqrt{2}-1)m \right]$$

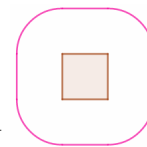
24. Su ogni lato di un triangolo equilatero di lato che misura 4 cm sono costruiti dei semicerchi, come mo-



strato in figura. Quanto misura l'area della loro intersezione?

$$\left[\frac{2}{3} \pi \text{ cm}^2 \right]$$

25. Un terreno a forma di quadrato, della superficie di 1 km², è stato contaminato da dei rifiuti radioattivi. A causa delle radiazioni nessuno può vivere a meno di un chilometro dall'area contaminata. Disegnare



e trovare l'area della regione non abitabile.

$$\left[(4 + \pi) \text{ km}^2 \right]$$

L'Antologia

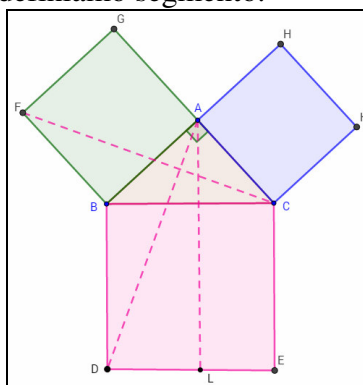
Leggiamo la dimostrazione del teorema di Pitagora riportata negli *Elementi* di Euclide, libro I proposizione 47.

Nei triangoli rettangoli il quadrato del lato opposto all'angolo retto è uguale alla somma dei quadrati dei lati che comprendono l'angolo retto.

Sia ABC un triangolo rettangolo avente l'angolo BAC retto; dico che il quadrato di BC è uguale alla somma dei quadrati di BA, AC.

Infatti, si descrivano il quadrato BDEC su BC, e su BA, AC i quadrati GB, HC [Euclide, che indica i quadrati con due vertici opposti, ha provato nella proposizione 46 come possa costruirsi un quadrato su un segmento dato], per A si conduca AL parallela all'una o all'altra indifferente delle rette BD, CE, e si traccino le congiungenti AD, FC.

Tracciamo la costruzione proposta da Euclide, per seguire meglio il discorso; ricordiamo che per Euclide spesso la retta coincide con ciò che noi definiamo segmento.

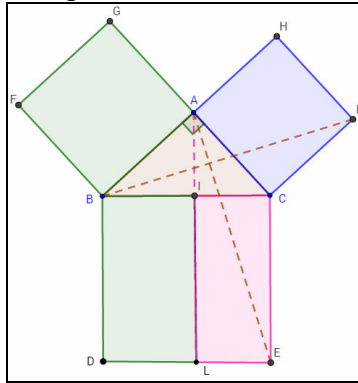


Ora poiché ciascuno dei due angoli BAC, BAG è retto, le due rette AC, AG, che giacciono da parti opposte rispetto alla retta BA, formano con essa, e coi vertici nel punto A, angoli adiacenti la cui somma è uguale a due retti; quindi CA è in linea retta con AG. Per la stessa ragione pure BA è in linea retta con AH.

E poiché l'angolo DBC è uguale all'angolo FBA – difatti ciascuno dei due è retto –, si aggiunga in comune a essi l'angolo ABC; tutto quanto l'angolo DBA è quindi uguale a tutto quanto l'angolo FBC. Ora poiché DB è uguale a BC, e FB a BA, i due lati DB, BA sono uguali rispettivamente ai due lati FB, BC; e l'angolo DBA è uguale all'angolo FBC, per cui la base

AD è uguale alla base FC, e il triangolo ABD è uguale al triangolo FBC. Ma il parallelogramma BL [Euclide chiama parallelogramma un rettangolo e lo indica con due vertici opposti] è il doppio del triangolo ABD – essi hanno difatti la stessa base BD e sono compresi tra le stesse parallele BD, AL –, mentre il quadrato GB è il doppio del triangolo FBC: difatti essi hanno, di nuovo, la stessa base FB e sono compresi fra le stesse parallele FB, GC; è quindi uguale anche il parallelogramma BL al quadrato GB.

Lo stesso discorso può ripetersi sull'altro quadrato, considerando la figura in cui abbiamo ugualmente colorato i poligoni che sono stati provati essere equiestesi.



Similmente, tracciate le congiungenti AE, BK, si potrà dimostrare che pure il parallelogramma CL è uguale al quadrato HC; tutto quanto il quadrato BDEC è perciò uguale alla somma dei due quadrati GB, HC. E il quadrato BDEC è descritto su BC, mentre i quadrati GB, HC sono descritti su BA, AC. Quindi il quadrato del lato BC è uguale alla somma dei quadrati dei lati BA, AC.

Quelli che vogliono sapere di più

Incommensurabilità di segmenti nel piano

Ricordiamo il concetto di unità di misura lineare. Per misurare la lunghezza di un segmento scegliamo un segmento *campione*, a cui conveniamo di assegnare la misura 1, e a partire da esso misuriamo tutti i segmenti suoi multipli, mentre con un procedimento inverso possiamo misurare i suoi sottomultipli.

La questione che si erano posti migliaia di anni fa i Pitagorici è se qualunque segmento potesse essere misurato in questo modo. Essi avevano dato una risposta positiva in fiducia, poiché credevano solo nell'esistenza dei numeri naturali e dei numeri che noi chiamiamo razionali, ossia quelli che sono rapporto di numeri interi (ai tempi dei Pitagorici non si accettavano i numeri negativi). In particolare essi parlavano di segmenti commensurabili intendendo con ciò che il rapporto delle misure dei due segmenti fosse un numero razionale. Secondo quanto si racconta, la scoperta che la diagonale e il lato di uno stesso quadrato non possono mai essere commensurabili creò lo sconforto fra i Pitagorici e fu causa di morte per naufragio per colui che la rese pubblica.

Definizione 4

- Due segmenti, per i quali esiste una unità di misura nella quale entrambi i segmenti hanno misura determinata da un numero razionale, si dicono **commensurabili** fra loro.
- Due segmenti non commensurabili fra loro si dicono **incommensurabili**.

L'esempio più importante di segmenti fra loro incommensurabili è quello della diagonale e del lato dello stesso quadrato. Infatti, applicando il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo isoscele i cui cateti sono ipotenusa è la diagonale, ovviamente avremo: $2\ell^2 = d^2 \Rightarrow \frac{d}{\ell} = \sqrt{2}$. Noi già sappiamo che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale, ma non lo abbiamo mai provato, vediamo di farlo.

Teorema 25

Non esiste alcun numero razionale il cui quadrato sia uguale a 2.

Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che vi siano due numeri interi primi tra loro, p e q , tali che sia $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. Scegliamo p e q primi tra loro, perché diversamente potremmo ridurre la frazione ai minimi termini. Dovrebbe aversi $p^2 = 2q^2$, cioè p deve essere un numero pari, cioè un numero del tipo $p = 2n$. Si ha quindi $(2n)^2 = 2q^2$, ossia $4n^2 = 2q^2$, da cui semplificando $q^2 = 2n^2$, che significa che anche q è pari. Ciò non è possibile poiché abbiamo supposto che p e q non avessero divisori in comune. Quindi il numero indicato con $\sqrt{2}$, il cui quadrato è uguale a 2 è irrazionale.

Il fatto che non tutte le coppie di segmenti siano commensurabili conduce a questioni che a prima vista possono sembrare inaspettate.

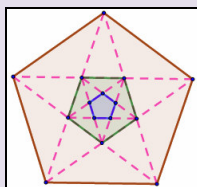
Esempio 18

- Si chiede di disegnare sul piano cartesiano ortogonale un triangolo isoscele i cui vertici hanno entrambe le coordinate intere. Tenuto conto di quel che sappiamo sui triangoli isosceli, una soluzione può essere costituita dal triangolo di vertici: $A \equiv (-2; 3)$, $B \equiv (2; 3)$, $O \equiv (0; 0)$. Numerosi altri esempi possono darsi.
- Se invece si chiedesse di disegnare sul piano cartesiano ortogonale un triangolo equilatero i cui vertici hanno entrambe le coordinate intere, ciò non sarebbe possibile. Ciò dipende dal fatto che il lato di un triangolo equilatero e la rispettiva altezza sono grandezze incommensurabili, dato che il loro rapporto dipende da $\sqrt{3}$ che è un numero irrazionale.

L'angolo storico

I Pitagorici erano convinti che mediante i numeri interi e le loro proporzioni (quindi anche i numeri razionali) potesse misurarsi tutto. Fu quindi sconvolgente scoprire che in una figura semplice come un quadrato la diagonale e il suo lato non potessero essere espressi entrambi con numeri razionali. Su questo fatto sono tramandate diverse leggende, nelle quali si racconta che uno dei discepoli, Ippaso da Metaponto, ebbe l'ardire di rivelare la scoperta al di fuori della ristretta cerchia degli adepti della setta pitagorica e fu punito dalla divinità morendo in un naufragio.

Alcuni storici dubitano che i Pitagorici avessero le necessarie conoscenze matematiche per condurre una dimostrazione come quella da noi mostrata nel Teorema 25, presente negli *Elementi* di Euclide, opera scritta 200 anni dopo i Pitagorici. Si pensa quindi che Ippaso avesse pensato a una costruzione geometrica simile alla seguente.



Tracciamo un pentagono regolare e le sue diagonali, tutte uguali fra loro, ottenendo un pentagramma stellato, proprio il simbolo dei Pitagorici. Le intersezioni dei lati di questo poligono costituiscono i vertici di un altro pentagono regolare. Tracciamo le diagonali di quest'ultimo e otteniamo un altro pentagono regolare. Anche se gli antichi matematici avevano timore a parlare di procedimenti infiniti, Ippaso si rese probabilmente conto che il procedimento poteva generalizzarsi, ottenendo quindi pentagoni regolari all'infinito.

Questo fatto significa che non esiste una unità di misura rispetto alla quale una diagonale e un lato di un pentagono regolare abbiano la misura espressa da un numero razionale. Quindi la diagonale e il lato di un pentagono regolare sono fra loro incommensurabili. Quanto misura la diagonale rispetto al lato? Si può provare

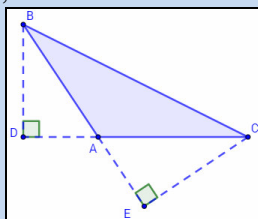
che, scelto il lato come unità, la diagonale misura $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Generalizzazioni del teorema di Pitagora

Euclide ha provato anche le seguenti generalizzazioni del teorema di Pitagora, le cui dimostrazioni lasciamo per esercizio.

Teorema 26

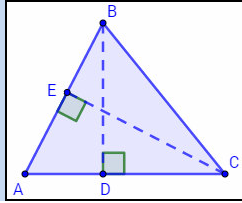
Dato il triangolo ottusangolo ABC di lato maggiore BC , dette D ed E rispettivamente le proiezioni del punto B sulla retta per AC e di C sulla retta per AB , si ha: $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2\overline{AC} \cdot \overline{AD} = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2\overline{AB} \cdot \overline{AE}$



Il teorema precedente può enunciarsi a parole: *Il quadrato costruito sul lato maggiore di un triangolo ottusangolo è equiesteso alla somma dei quadrati costruiti sugli altri lati, aumentata del doppio del rettangolo le cui dimensioni sono uno dei rimanenti lati e la proiezione dell'altro lato sul primo.*

Teorema 27

Dato un triangolo acutangolo ABC , dette D ed E rispettivamente le proiezioni del punto C su AB e del punto B su AC , si ha: $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{BD} = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{BC} \cdot \overline{CE}$



Il teorema è così enunciato a parole: *Il quadrato costruito su un lato di un triangolo acutangolo è equiesteso alla somma dei quadrati costruiti sugli altri lati, diminuita del doppio del rettangolo le cui dimensioni sono uno dei rimanenti lati e la proiezione dell'altro lato sul primo.*

Come applicazione dei precedenti teoremi proviamo un risultato che permette di calcolare l'area di un triangolo conoscendone le misure dei lati.

Teorema 28 (di Erone)

In un triangolo di lati lunghi a, b, c indicata con $p = \frac{a+b+c}{2}$, la lunghezza del semiperimetro, l'area si determina con la seguente formula: $\sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$.

Schema dimostrativo

Passo	Azione	Conseguenza	Giustificazione
1	Calcoliamo l'area di ABC , supposto acutangolo.	$S_{ABC} = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{b^2 - d^2}}{2} = \frac{a \cdot \sqrt{(b-d) \cdot (b+d)}}{2}$	Abbiamo applicato il teorema di Pitagora ad AHC , con H piede dell'altezza condotta da A
2	Determiniamo d mediante i lati di ABC .	$d = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$	Ricaviamo d da $c^2 = a^2 + b^2 - 2ad$ che è l'espressione del Teorema 27
3	Sostituiamo d nella formula dell'area.	$S_{ABC} = \frac{a \cdot \sqrt{\left(b - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right) \cdot \left(b + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)}}{2} =$ $= \frac{a \cdot \sqrt{\left(\frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right) \cdot \left(\frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)}}{2} =$ $= \frac{a \cdot \sqrt{\left(\frac{c^2 - (a-b)^2}{2a}\right) \cdot \left(\frac{(a+b)^2 - c^2}{2a}\right)}}{2}$	
4	Semplifichiamo l'espressione precedente	$S_{ABC} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{[c - (a-b)] \cdot [c + (a-b)]}{2a} \cdot \frac{[(a+b) - c] \cdot [(a+b) + c]}{2a}} =$ $= \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{(b+c-a) \cdot (a-b+c) \cdot (a+b-c) \cdot (a+b+c)}{4a^2}}$	Abbiamo scomposto in fattori le differenze di quadrati.
5	Poniamo $p = \frac{a+b+c}{2}$	$S_{ABC} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{a} \cdot \sqrt{\frac{(a+b+c-2a) \cdot (a+b+c-2b) \cdot (a+b+c-2c) \cdot (a+b+c)}{4}} =$ $= \sqrt{\frac{(2p-2a) \cdot (2p-2b) \cdot (2p-2c) \cdot 2p}{16}} = \sqrt{\frac{2p-2a}{2} \cdot \frac{2p-2b}{2} \cdot \frac{2p-2c}{2} \cdot \frac{2p}{2}} =$ $= \sqrt{(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c) \cdot p}$	Tesi.

Esempio 19

Calcoliamo l'area del triangolo rettangolo di lati 3, 4 e 5. Si ha: $p = 6$:

$$\sqrt{6 \cdot (6-3) \cdot (6-4) \cdot (6-5)} = \sqrt{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 6$$

Verifiche

Lavoriamo insieme

Vogliamo provare che il numero $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ è un numero irrazionale.

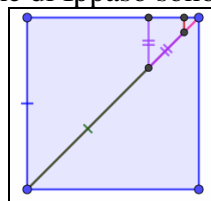
Supponiamo per assurdo che esista $q \in \mathbb{Q}$: $\sqrt{2} + \sqrt{3} = q$. Ciò vuol dire che $\sqrt{3} = q - \sqrt{2}$.

Se l'uguaglianza è vera fra le basi, continuerà a esserlo anche se innalziamo al quadrato entrambi i membri.

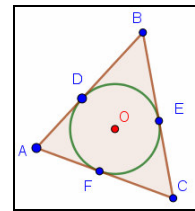
Così $3 = q^2 - 2\sqrt{2}q + 2$. Ma ciò non è possibile, perché allora potremmo scrivere $2 \cdot \sqrt{2} = q^2 - 1$, cioè $\sqrt{2}$ dovrebbe essere un numero razionale mentre sappiamo che ciò non è vero.

Livello 2

1. Provare che $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ sono numeri irrazionali.
2. Provare che $\sqrt{2} + \sqrt{5}, \sqrt{2} + \sqrt{3}, \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ sono numeri irrazionali.
3. Le coppie seguenti sono costituite da segmenti fra loro commensurabili? Giustificare la risposta.
 - a) Il lato e l'altezza a esso relativa di un triangolo equilatero. [No]
 - b) La diagonale e l'altezza di un trapezio isoscele. [Dipende]
 - c) Entrambe le coppie formate da diagonale-base e diagonale-altezza di un rettangolo. [Dipende]
 - d) Il lato di un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza e il raggio della stessa. [No]
 - e) Il lato di un triangolo equilatero circoscritto a una circonferenza e il raggio della stessa. [No]
 - f) Il lato di un esagono regolare e il raggio della circonferenza circoscritta allo stesso. [Sì]
 - g) Il lato di un esagono regolare e il raggio della circonferenza inscritta nello stesso. [Sì]
4. Provare che i pentagoni determinati nella costruzione di Ippaso sono regolari.



5. Considerare la seguente costruzione su un quadrato, in cui lati ugualmente segnati sono uguali. Giustificare che la costruzione ripetuta all'infinito può essere considerata una giustificazione del fatto che il lato di un quadrato e la sua diagonale sono segmenti fra di loro incommensurabili.
6. Determinare l'area del triangolo di lati lunghi 5, 6 e 7. $\left[6\sqrt{6} \right]$
7. Usando la formula di Erone determinare l'area di un triangolo equilatero di lato ℓ . $\left[\frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4} \right]$
8. Usando la formula di Erone determinare l'area di un triangolo isoscele di lati $(a; a; b)$. $\left[\frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{4} \right]$
9. Usando la formula di Erone determinare l'area di un triangolo di lati $(a; a + 1; a + 2)$. Quando il problema ha soluzione? $\left[\frac{(a+1) \cdot \sqrt{3 \cdot (a-1) \cdot (a+3)}}{4}; a > 1 \right]$
10. Si consideri il triangolo ABC i cui lati sono lunghi 10 cm, 12 cm e 14 cm. Costruiamo un altro triangolo DEF in cui un lato è uguale al lato maggiore di ABC e gli altri due sono uguali alla metà degli altri due lati di ABC . Determinare l'area di DEF . [Dati incoerenti]
11. Di un triangolo conosciamo le misure di due lati, 13 e 5, e l'area, 30. Determinare la misura del terzo lato. [12]



12. In figura la circonferenza di centro O è inscritta nel triangolo ABC . Sapendo che $\overline{AD} = 6$, $\overline{BD} = 8$, $\overline{OD} = 4$, determinare le misure dei lati BC e AC . Suggestione: usare il teorema di Erone. [15; 13]
13. $ABCD$ è un quadrilatero in cui $\angle DAB = \angle DBC$. Sapendo inoltre che i lati AD , AB e BC misurano rispettivamente 15 cm , 9 cm e 20 cm e che la diagonale BD misura 12 cm , determinare la misura del quarto lato. Suggestione: considerare attentamente le misure dei lati [16cm]
14. Usando la formula di Erone provare che l'area di un triangolo può trovarsi anche in funzione delle sue tre altezze, mediante la seguente formula:

$$S_{ABC} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right) \cdot \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}\right) \cdot \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right)}}$$

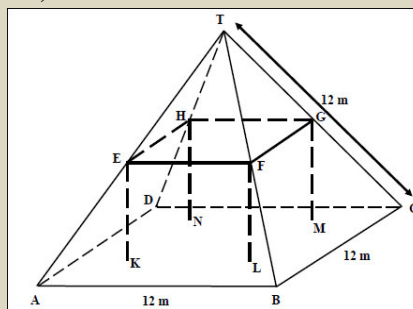
15. In un trapezio, le misure b della base minore, h dell'altezza e m della base maggiore verificano la seguente proprietà: $h - b = m - h$. Indichiamo con A e p l'area e il perimetro del poligono. Quali delle seguenti affermazioni sono vere? A) Se $h = \sqrt{a}$ con a numero naturale, A è un numero naturale B) A è un numero naturale solo se b , h e m sono numeri naturali C) E' sufficiente conoscere la misura di h per trovare quella di S D) p è sicuramente un numero naturale E) h è sicuramente un numero pari [A]; C]

Per la prova Invalsi

Quesiti sulle aree

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato nelle prove OCSE-PISA e intitolato *Fattorie*. In questa pagina è riportata la fotografia di una fattoria con il tetto a forma di piramide. Di seguito si trova un modello matematico del **tetto** della fattoria realizzato da uno studente, con alcune misure.



Il pavimento della soffitta, $ABCD$ nel modello, è un quadrato. Le travi che sostengono il tetto sono gli spigoli di un blocco (prisma rettangolare) $EFGHKL MN$. E è il punto medio di AT , F è il punto medio di BT , G è il punto medio di CT e H è il punto medio di DT . Tutti gli spigoli della piramide nel modello sono lunghi 12 m . a) Calcola l'area del pavimento della soffitta $ABCD$. b) Calcola la lunghezza di EF , uno degli spigoli orizzontali del blocco.

a) L'area del pavimento della soffitta è ovviamente $12^2\text{ m}^2 = 144\text{ m}^2$.

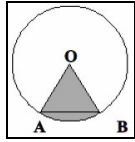
b) Mentre per la lunghezza di EF dobbiamo tenere conto della similitudine dei triangoli ATB e ETF e poiché TE è la metà di AT , così come TF è la metà di TB , anche EF è la metà di AB , quindi misura 6 m .



1. (Invalsi 2003) Osserva attentamente la figura. Se p è la percentuale dell'area colorata del quadrato (calcolata rispetto all'intera area del quadrato), quale delle seguenti affermazioni è vera? [D]
A) $5\% \leq p < 10\%$ B) $10\% \leq p < 15\%$ C) $15\% \leq p < 20\%$ D) $20\% \leq p < 25\%$ E) $p \geq 25\%$

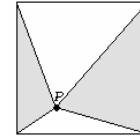
2. (Invalsi 2003) L'area di un cerchio è 100 cm^2 . Quanto è lungo il suo raggio? [D]

A) 10 cm B) $10\pi \text{ cm}$ C) $10/\pi \text{ cm}$ D) $10/\sqrt{\pi} \text{ cm}$ E) $10\sqrt{\pi} \text{ cm}$

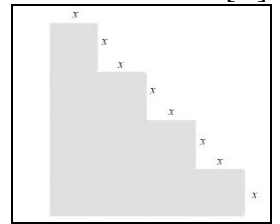


3. (Invalsi 2004) La figura rappresenta il triangolo equilatero ABO e il cerchio di centro O e raggio OA . Qual è l'area del settore circolare delimitato dai raggi OA ed OB ? [D]

A) La terza parte dell'area del cerchio B) La quarta parte dell'area del cerchio C) La quinta parte dell'area del cerchio D) La sesta parte dell'area del cerchio

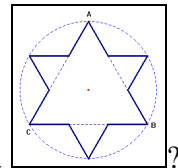


4. (Invalsi 2004) Disegna le altezze uscenti da P dei due triangoli colorati. Qual è il rapporto tra l'area del quadrato e l'area della regione colorata? A) 2,5 B) 2 C) $\frac{1}{2}$ D) Varia al variare di P [B]



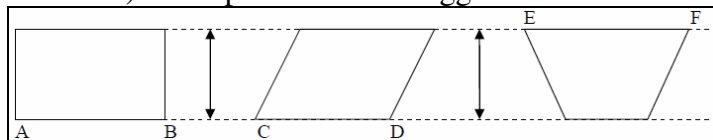
5. (Invalsi 2004) Indicando con A l'area e con P il perimetro della seguente figura: quale tra le seguenti coppie di uguaglianze è vera? [B]

A) $A = 13x^2$; $P = 16x$ B) $A = 10x^2$; $P = 16x$ C) $A = 36x^2$; $P = 14x$ D) $A = 10x^2$; $P = 14x$



6. (Invalsi 2005) Se l'area del triangolo equilatero ABC è 10 cm^2 , qual è l'area della stella? A) $(10 + 10/9) \text{ cm}^2$ B) $(10 + 10/3) \text{ cm}^2$ C) 13 cm^2 D) 15 cm^2 [B]

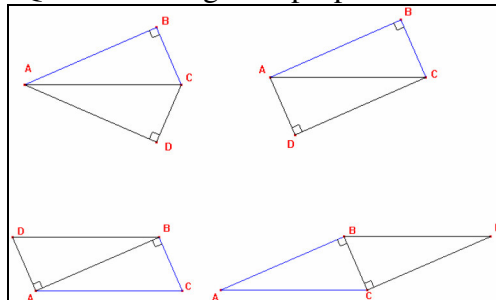
7. (Invalsi 2005) Se D e d sono le misure delle diagonali di un rombo, a quale delle seguenti figure è equivalente il rombo? A) Un triangolo di base D e altezza d B) Un rettangolo di base D e altezza d C) Un parallelogramma di lati D e d D) Un trapezio di base maggiore D e altezza d [A]



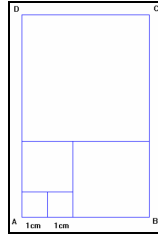
8. (Invalsi 2007) Nella figura i segmenti AB , CD , EF sono congruenti. Quale delle seguenti proposizioni è vera? [A]

A) Solo due quadrilateri hanno uguale area B) Solo due quadrilateri hanno uguale perimetro C) I quadrilateri hanno tutti uguale perimetro D) I quadrilateri hanno tutti uguale area.

9. (Invalsi 2007) Nella figura sono rappresentati quattro quadrilateri, formati dagli stessi due triangoli rettangoli tra loro congruenti. Quale tra le seguenti proposizioni è vera? [A]

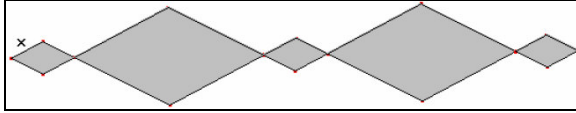


A) I quadrilateri hanno tutti la stessa area, ma non lo stesso perimetro B) Il quadrilatero di perimetro maggiore ha anche area maggiore C) I quadrilateri hanno tutti lo stesso perimetro D) I quadrilateri hanno tutti la stessa area, e lo stesso perimetro [A]



10. (Invalsi 2007) Il rettangolo $ABCD$ in figura è costruito con cinque quadrati; i due più piccoli hanno lato di 1 cm . Quanto vale l'area di $ABCD$? A) 15 cm^2 B) 36 cm^2 C) 40 cm^2 D) 64 cm^2 [C]

11. (Invalsi 2007) Una decorazione è formata da cinque rombi simili, di diversa grandezza, come in figura.

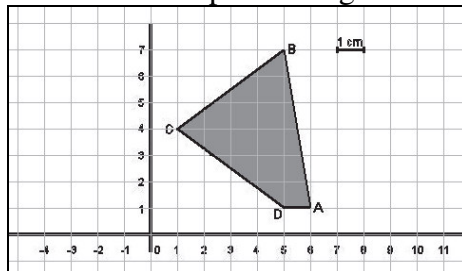


ra. I rombi grandi hanno area nove volte quella dei rombi piccoli. Chiamando x la lunghezza del lato del rombo piccolo, il perimetro della figura è... [B]

A) $28x$ B) $36x$ C) $60x$ D) $84x$

12. (Invalsi 2011) Le dimensioni di una piazza rettangolare di una grande città sono circa $620\text{ m} \times 120\text{ m}$. Le stime comparse sui giornali sul numero di partecipanti a una manifestazione che ha riempito la piazza variano da 100000 a oltre 1000000. Sapendo che diverse fotografie scattate durante la manifestazione evidenziano una densità di circa 4 persone al metro quadro, che cosa si può concludere circa l'effettivo numero dei partecipanti? A) Le stime dei giornali sono tutte errate perché dalle informazioni disponibili i partecipanti non potevano essere più di 20000 B) Una stima ragionevole è di circa 300000 partecipanti C) Ha ragione chi ha parlato di più di un milione di partecipanti D) La piazza non può contenere molte persone più di uno stadio, quindi c'erano meno di 150000 partecipanti. [B]

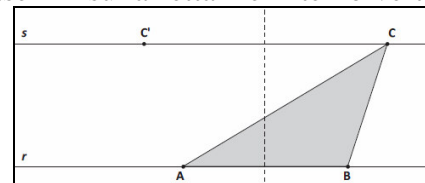
13. (Invalsi 2011) L'unità di misura riportata sugli assi cartesiani rappresenta 1 cm . Calcola l'area del



quadrilatero $ABCD$.

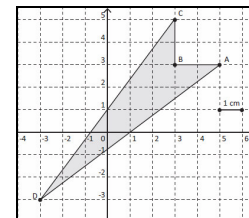
[15 cm^2]

14. (Invalsi 2012) ABC è uno degli infiniti triangoli aventi la base AB sulla retta r e il terzo vertice in un



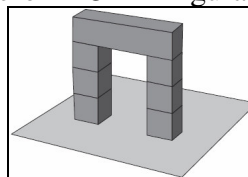
punto qualunque della retta s parallela a r e passante per C . Fra gli infiniti triangoli descritti sopra, quali hanno la stessa area di ABC ?

A) Soltanto il triangolo ABC' , simmetrico di ABC rispetto all'asse di AB B) Soltanto il triangolo isoscele di base AB C) Soltanto il triangolo rettangolo in A e il triangolo rettangolo in B D) Tutti gli infiniti triangoli di base AB [D]



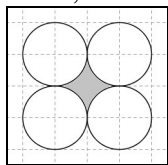
15. (Invalsi 2012) Calcola l'area del quadrilatero $ABCD$ in figura.

[12 cm^2]



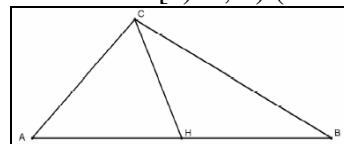
16. (Invalsi 2012) L'arco mostrato in figura è formato da sei cubi di lato L e da un parallelepipedo di dimensioni $L, L, 4L$. Si vuole dipingere l'arco; quanto misura la superficie da colorare? A) $42L^2$ B) $40L^2$ C) $38L^2$ D) $36L^2$ [C]

17. (Invalsi 2013) Ricorda che la lunghezza di una circonferenza si calcola moltiplicando il suo diametro per π e che l'area di un cerchio si ottiene moltiplicando il quadrato del suo raggio per π . Quattro circonferenze, ciascuna con diametro 10 cm, sono tangenti a due a due come mostrato nella seguente figura.



- a) Il perimetro della regione evidenziata in grigio quanto misura, in centimetri? A) 20π B) 10π C) 5π D) 4π b) La superficie della regione evidenziata in grigio quanto misura?

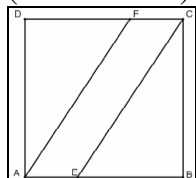
[a) B; b) $(100 - 25\pi) \text{ cm}^2$]



18. (Invalsi 2013) H è il punto medio del lato AB del triangolo ABC . I triangoli AHC e HBC hanno la stessa area perché? A) la distanza di C da AB è la stessa nei due triangoli e $AH = HB$ B) la mediana CH divide il triangolo in due triangoli congruenti C) hanno come altezza comune CH e le relative basi sono della stessa lunghezza D) i triangoli CHA e CHB sono tutti e due triangoli isosceli [A]

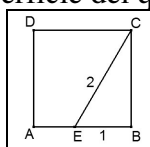
19. (Invalsi 2013) Su una risma di carta di fogli di formato A4 è scritto: 80 g/m^2 (cioè 80 grammi al metro quadrato); A4 $210 \cdot 297 \text{ mm}$ (cioè le dimensioni di un foglio A4 sono 0,210 metri per 0,297 metri). Un foglio A4 pesa all'incirca A) 0,5 grammi B) 1,5 grammi C) 5 grammi D) 10 grammi [C]

20. (Invalsi 2013) Considera il quadrato $ABCD$ il cui lato misura 6 cm. AE e FC misurano ciascuno 2 cm.

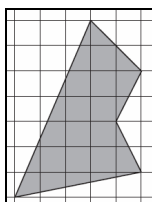


Quanto misura la superficie del quadrilatero $AECF$?

[12 cm^2]

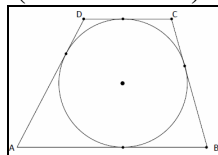


21. (Invalsi 2013) $ABCD$ è un quadrato, il segmento EC è lungo 2 dm e il segmento EB è lungo 1 dm. La superficie del quadrato $ABCD$ misura A) 3 dm^2 B) 4 dm^2 C) 5 dm^2 D) $4 \cdot \sqrt{3} \text{ dm}^2$ [A]



22. (Invalsi 2014) Osserva la figura. Se il lato di ogni quadretto della griglia corrisponde a 1 m, allora la superficie del poligono misura quanti m^2 ? [18,5]

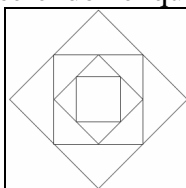
23. (Invalsi 2014) Il trapezio $ABCD$, circoscritto a un cerchio di raggio 5 cm, ha l'area di 120 cm^2 .



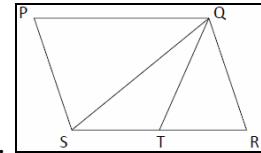
Quanto misura la somma delle basi AB e DC ?

[24 cm]

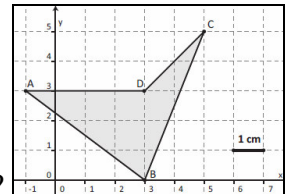
24. (Invalsi 2014) Si è costruita la figura che vedi inserendo nel quadrato più grande un secondo quadrato i



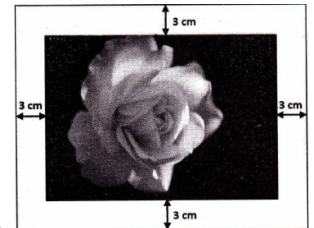
cui vertici sono i punti medi dei lati del primo. Si è ripetuta la stessa procedura, inserendo altri due quadrati. Se la superficie del quadrato più grande misura 64 cm^2 , quanto misura il lato del quadrato più piccolo? A) 2 cm B) $2\sqrt{2} \text{ cm}$ C) 4 cm D) $4\sqrt{2} \text{ cm}$ [B]



25. (Invalsi 2014) $PQRS$ è un parallelogramma e T è il punto medio di SR . Qual è il rapporto tra l'area del triangolo QST e l'area del parallelogramma? [1/4]
26. (Invalsi 2015) Considera il numero π , esso può essere definito come A) il rapporto tra l'area di un cerchio e il suo raggio B) il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro C) il rapporto tra l'area di un cerchio e il suo diametro D) il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo raggio. [B]
27. (Invalsi 2015) π è un numero irrazionale. Questo significa che A) è un numero decimale periodico semplice B) è un numero decimale limitato C) è un numero decimale periodico misto D) è un numero decimale illimitato non periodico [D]
28. (Invalsi 2015) Il rapporto tra gli spigoli di due cubi è 5. Qual è il rapporto tra i loro volumi? [D]
A) 5 B) 15 C) 25 D) 125

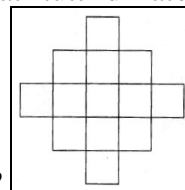


29. (Invalsi 2015) Qual è l'area del quadrilatero $ABCD$ rappresentato in figura? [9 cm²]
30. (Invalsi 2015) Una bibita è venduta in lattine di forma cilindrica con il diametro di base di 6 cm e l'altezza di 9 cm. Qual è la capacità della lattina? A) esattamente $\frac{1}{4}$ di litro B) poco più di $\frac{1}{4}$ di litro C) poco più di $\frac{1}{2}$ di litro D) esattamente $\frac{1}{2}$ litro [C]
31. (Invalsi 2017) Franco incolla una fotografia rettangolare di dimensioni 22 cm $\times$ 15 cm su un cartoncino-



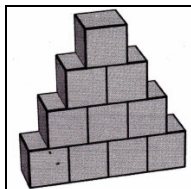
no. Attorno alla fotografia resta una cornice larga 3 cm, come vedi in figura. Qual è l'area del cartoncino? A) 450 cm² B) 504 cm² C) 588 cm² D) 525 cm² [B]

32. (Invalsi 2017) La seguente figura è composta da 13 quadrati tutti di lato 1 cm. Se il lato di ciascun



quadrato si dimezza allora la superficie della figura diventa?

[3,25 cm²]

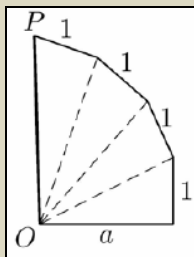


33. (Invalsi 2017) Dieci cubi di spigolo L sono stati incollati insieme, come mostrato in figura. L'area della superficie totale del solido così ottenuto è: A) 30 L² B) 36 L² C) 32 L² D) 35 L² [C]

Quesiti sui Teoremi di Pitagora ed Euclide

Lavoriamo insieme

Il seguente quesito è stato assegnato nelle prove Invalsi 2005. Nella figura tutti i triangoli sono rettangoli e hanno i lati delle misure indicate. Quale delle seguenti uguaglianze fornisce la misura di OP in funzione della misura a ?



della misura a ? A) $\overline{OP} = \sqrt{a+4}$ B) $\overline{OP} = \sqrt{a^2+4}$ C) $\overline{OP} = \sqrt{a^2+3}$ D) $\overline{OP} = \sqrt{a^2+16}$

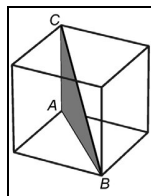
Calcoliamo l'ipotenusa del triangolo rettangolo di cateti a e 1 : $\sqrt{1+a^2}$, questa è cateto del successivo triangolo. Pertanto le ipotenuse dei successivi triangoli misurano: $\sqrt{1+1+a^2} = \sqrt{2+a^2}$, $\sqrt{1+2+a^2} = \sqrt{3+a^2}$ e infine $\sqrt{1+3+a^2} = \sqrt{4+a^2}$, che è la risposta B).

34. (Invalsi 2003) Nella tabella seguente sono riportate le lunghezze dei lati di 5 triangoli espresse in centimetri.

Triangolo	lato	lato	lato
1	3	4	5
2	5	12	13
3	10	12	16
4	9	12	15
5	10	14	16

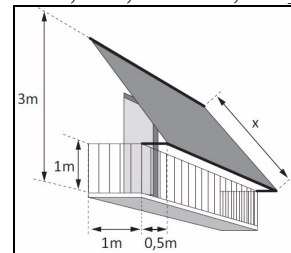
Elenca tutti i triangoli che sono rettangoli. Solo i triangoli...

- A) 1 e 2 B) 1 e 4 C) 1, 2 e 4 D) 1, 4 e 5 E) 3, 4 e 5 [C]
 35. (Invalsi 2005) Si dice che tre numeri a , b , c formano una terna pitagorica se $a^2 + b^2 = c^2$. Quale tra i seguenti numeri è quello che forma una terna pitagorica con $a = 12$ e $b = 16$? [C]
 A) 4 B) 10 C) 20 D) 28

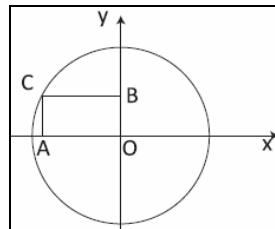


36. (Invalsi 2011) Nella figura è rappresentato un cubo. Il triangolo ABC ha come lati uno spigolo del cubo, la diagonale di una sua faccia e una diagonale del cubo. a) Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa. A) Il lato AB è uguale al lato AC ; b) Il triangolo ABC è rettangolo; c) Il lato BC è il più lungo dei tre; d) L'angolo ABC è di 45° [Falso; Vero; Vero; Falso]
 B) Se lo spigolo del cubo misura 1 m , quanto misurano i lati del triangolo ABC ?

[$AC = 1\text{ m}$; $AB = 1,4\text{ m}$; $BC = 1,7\text{ m}$]

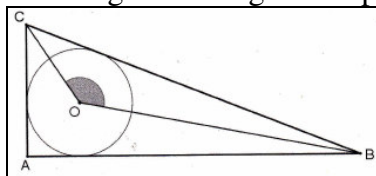


37. (Invalsi 2012) Occorre confezionare una tenda da sole per il balcone in figura. La tenda deve essere fissata al muro a 3 m di altezza dal pavimento del balcone, che è largo 1 m . La tenda deve sporgere $0,5\text{ m}$ dalla ringhiera che è alta 1 m . Trova la lunghezza x della tenda [2,5 m]



38. (Invalsi 2014) La circonferenza disegnata accanto ha come centro l'origine O degli assi cartesiani e C è un suo punto. A e B sono le proiezioni sugli assi cartesiani di C . Il diametro della circonferenza è 12 cm . Qual è la lunghezza del segmento AB ? [6 cm]

39. (Invalsi 2017) ABC è un triangolo rettangolo di ipotenusa BC e O è il centro della circonferenza in-



scritta nel triangolo.

Si vuole dimostrare che l'ampiezza dell'angolo $\widehat{BOC}$ (segnato in figura) è 135° . Completa il testo della dimostrazione scegliendo tra i seguenti termini e prestando attenzione al fatto che ogni termine essere utilizzato una sola volta:

supplementari	alterni interni	opposti al vertice	complementari	interni di un triangolo	180°	90°	45°	360°
---------------	-----------------	--------------------	---------------	-------------------------	-------------	------------	------------	-------------

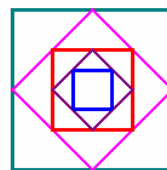
Dimostrazione: Il centro O della circonferenza inscritta è il punto di incontro delle bisettrici degli angoli interni del triangolo ABC . Gli angoli $\widehat{ACB}$ e $\widehat{ABC}$ sono , cioè la loro somma misura perché sono angoli acuti di un triangolo rettangolo. Per quanto affermato in precedenza la somma degli angoli $\widehat{OCB}$ e $\widehat{OAC}$ misura Quindi, poiché la somma degli angoli misura possiamo concludere che $\widehat{BOC} = 135^\circ$, che è la tesi.

[complementari; 90° ; 45° ; interni di un triangolo; 180°]

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi

1. Dato un rettangolo si scelga un punto P a piacere al suo interno, diciamo a, b, c, d , nell'ordine le misure delle distanze di P dai quattro vertici del rettangolo. Dimostrare che $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.



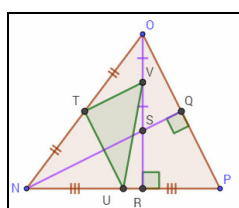
2. Generalizziamo la costruzione in figura per un totale di n quadrati, in che relazione sono

il lato del quadrato maggiore con quello minore?

$$\ell = \frac{L}{(\sqrt{2})^{n-1}}$$

3. Nel triangolo ABC la mediana AM è perpendicolare alla mediana BN . Trovare la misura di AB , in termini dei rimanenti lati lunghi $2b$ e $2c$.

$$2 \cdot \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{5}}$$



4. Nel triangolo ONP in figura, si ha: $\overline{OV} = \overline{VS}$, $\overline{OT} = \overline{TN}$, $\overline{NU} = \overline{UP}$, $OR \perp NP$, $NQ \perp OP$. Se $\overline{OP} = 40$ e $\overline{NS} = 30$, determinare la misura di VU . Suggestimento: ricordare che i segmenti che congiungono i punti medi dei lati di un triangolo sono ... [25]

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Davanti a ogni esercizio vi è un simbolo che si riferisce alla gara da cui è tratto. Cioè:

AHSME = Annual High School Mathematics Examination

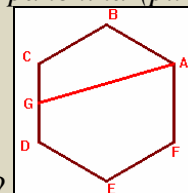
OMI = Olimpiadi della Matematica italiane

MT = Mathematics Teacher, rivista della NCTM

Lavoriamo insieme

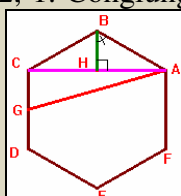
Il seguente problema è stato assegnato agli AHSME del 1986.

Un parco ha forma di esagono regolare con lato 2 km. Partendo da un vertice (che in figura è indicato con A, Alice cammina per 5 km lungo il perimetro del parco, raggiungendo una panchina (punto G), dove si

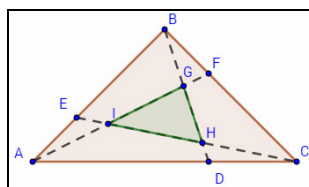


riposa. Se avesse camminato in linea retta quanti chilometri avrebbe percorso?

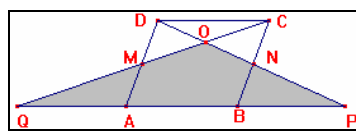
Dobbiamo determinare la misura del segmento AG conoscendo le misure dei segmenti AB, BC e CG, rispettivamente 2, 2, 1. Conguiamo A con C e tracciamo il segmento BH perpendicolare ad esso, come



illustrato in figura. Sappiamo che gli angoli interni di un esagono regolare misurano 120° , pertanto il triangolo ABH è un triangolo rettangolo con un angolo di 60° , quello di vertice B, e uno di 30° , nel vertice A. Ciò significa che BH è 1 km e AH è $\sqrt{3}$ km. Ma allora AC è lungo $2\sqrt{3}$ km. Quindi la distanza cercata è ipotenusa del triangolo ACG: $AG = \sqrt{1^2 + (2\sqrt{3})^2} \text{ km} = \sqrt{1 + 4 \cdot 3} \text{ km} = \sqrt{13} \text{ km}$.



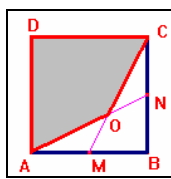
- (AHSME1952) Nel triangolo in figura i punti D, E e F sono scelti in modo da dividere ciascun lato in due parti, una doppia dell'altra. Provare che il triangolo GHI è $\frac{1}{7}$ del triangolo ABC. *Suggerimento:* Togliere e aggiungere triangoli in modo opportuno, in modo da ricavare l'area di GHI mediante quella di ABC.
- (AHSME1953) Da un pezzo di metallo di forma perfettamente quadrata è tagliato un disco circolare in modo che esso abbia la massima area possibile. Da questo disco si ritaglia una piastra a forma perfettamente quadrata in modo che la sua area sia la massima possibile. Determinare la percentuale di metallo scartata. [50%]
- (AHSME1973) Se il raggio di una circonferenza è lungo 12 cm, determinare quella di una corda che biseca perpendicolarmente tale raggio. $[12\sqrt{3} \text{ cm}]$
- (AHSME1973) Due triangoli uguali i cui angoli interni misurano 30° , 60° e 90° sono posti in modo da avere una porzione di piano e l'ipotenusa in comune. Sapendo che l'ipotenusa misura 12 unità, determinare l'area della parte comune di piano. $[12\sqrt{3}]$



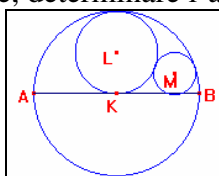
- (AHSME1974) Nel parallelogramma ABCD in figura, DP biseca BC in N e incontra il prolungamento di AB in P. Dal vertice C, è tracciato il segmento CQ che biseca AD in M e

incontra il prolungamento di AB in Q . DP e CQ si incontrano in O . Sapendo che l'area del parallelogramma è k , determinare l'area del triangolo QPO .

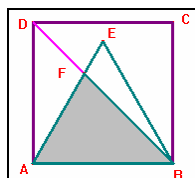
$$\left[\frac{9}{8}k \right]$$



6. (AHSME1975) Nella figura seguente AB e AD sono lati adiacenti del quadrato $ABCD$; M è il punto medio di AB , N è il punto medio di BC , AN e CM si intersecano in O . Determinare il rapporto delle aree di $AOCD$ e $ABCD$. *Suggerimento*: unire O con B . [2/3]
7. (AHSME1976) Due triangoli ABC e DEF sono tali che $\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{DF} = \overline{EF}$. Inoltre $\overline{AB} = 2\overline{FH}$, con FH altezza condotta da F al lato opposto DE . Quali fra i seguenti enunciati possono essere considerati veri? a) $\hat{A}CB + \hat{D}FE = 90^\circ$ b) $\hat{A}CB + \hat{D}FE = 180^\circ$ c) ABC e DEF sono equiestesi d) ABC è equiesteso al doppio di DEF . [b) e c)]
8. (AHSME1976) In un triangolo ABC i punti D , E e F sono i rispettivi punti medi di AB , DB e BC . Se la superficie di ABC è 96 unità quadrate, determinare l'area di AEF . [36]



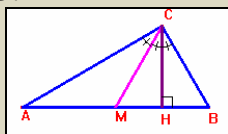
9. (AHSME 1976) Nella figura seguente il cerchio di centro K ha diametro AB . Il cerchio di centro L è tangente al precedente e ad AB in K . Il cerchio di centro M è tangente a entrambi i due cerchi e al diametro AB . Determinare il rapporto dell'area del cerchio di raggio maggiore rispetto a quella del cerchio di raggio minore. *Suggerimento*: lavorare sul triangolo che ha per vertici i centri dei tre cerchi. [16]
10. (AHSME1978) I lati opposti di un esagono regolare distano 12 unità. Determinare la misura del lato dell'esagono. *Suggerimento*: ricordare quanto misura l'angolo interno di un esagono regolare. $[4\sqrt{3}]$



11. (AHSME1978) In figura il triangolo ABE è equilatero, $ABCD$ è un quadrato, F è il punto d'intersezione della diagonale BD con il lato AE . Se AB è lunga $\sqrt{1+\sqrt{3}}$ unità, di quante unità quadrate è l'area di ABF ? $\left[\frac{\sqrt{3}}{2} \right]$
12. (AHSME 1979) L'ipotenusa di un triangolo rettangolo è lunga h unità, mentre il raggio del cerchio in esso inscritto è r unità. Determinare il rapporto dell'area del cerchio rispetto a quella del triangolo. $\left[\frac{\pi r}{h+r} \right]$
13. (AHSME1979) Un esagono regolare ha l'apotema (raggio della circonferenza inscritta nell'esagono) lungo 2 cm. Determinare l'area del quadrilatero ottenuto unendo i punti medi di quattro lati consecutivi dell'esagono. $[3\sqrt{3}]$

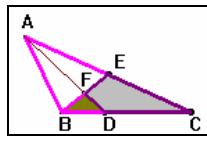
Lavoriamo insieme

Il seguente quesito è stato assegnato agli AHSME del 1973. In un triangolo rettangolo ABC , l'altezza CH e la mediana CM trisecano l'angolo retto C . Se l'area del triangolo CHM è k unità quadrate, determinare l'area del triangolo ABC .

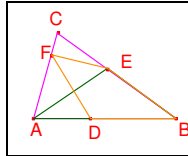


Consideriamo la figura I triangoli rettangoli CMH e CHB hanno entrambi un angolo di

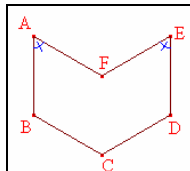
30° e, avendo in comune il cateto CH , a esso adiacente, sono uguali, quindi anche equiestesi. Il triangolo ACM ha la stessa altezza di CMH , cioè CH , ma base relativa doppia, quindi la sua area è doppia di quella di CMH : $2k$ unità quadrate. Quindi l'area del triangolo ABC è $4k$ unità quadrate.



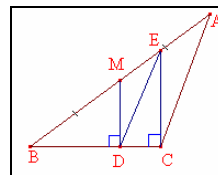
14. (AHSME1980) Nel triangolo ABC in figura, E è il punto medio di AC , D è un punto posto su BC in modo che si ottenga $\overline{DC} = 2\overline{BD}$ e F è il punto d'intersezione di AD e BE . Determinare il rapporto dell'area di BDF rispetto a quella di $FDCE$. (Suggerimento: congiungere E con il punto medio di DC e dimostrare che F è il punto medio di BE) [1/5]
15. (AHSME1980) $ABCD$ è un quadrilatero convesso per cui $\angle \hat{A}BC = 90^\circ$. Sapendo che i lati AB , BC , CD e DA misurano nell'ordine 3, 4, 12 e 13 cm, determinare l'area di $ABCD$. [36]



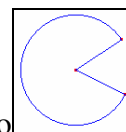
16. (AHSME1983) Il triangolo ABC in figura ha area 10, D , E ed F sono tre punti scelti rispettivamente sui lati AB , BC e CA in modo che ABE e $DBEF$ siano equiestesi. Sapendo che $\overline{AD} = 2$, $\overline{DB} = 3$, determinare il valore comune dell'area. Suggerimento: tracciare AE . [6]



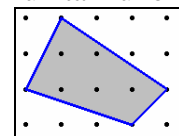
17. (AHSME1983) Nella figura seguente i lati AF e BC sono paralleli, come lo sono i lati AB ed ED e i lati CD ed EF . Tutti i lati sono lunghi 1, inoltre gli angoli segnati sono di 60° , determinare l'area della figura. [$\sqrt{3}$]



18. (AHSME1984) Nel triangolo ottusangolo ABC in figura, M è il punto medio di AB , MD ed EC sono perpendicolari a BC . sapendo che l'area di ABC è 24, determinare l'area di BED . Suggerimento: Tracciare l'altezza da A . [12]

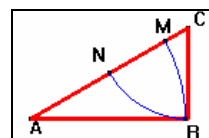


19. (AHSME 1985) In figura è mostrato il *mostro* di un videogioco. Sapendo che la sua *bocca* ha un'apertura di 60° e che le sue *labbra* sono lunghe 1, determinare la lunghezza del suo contorno. [$\frac{5}{3}\pi + 2$]



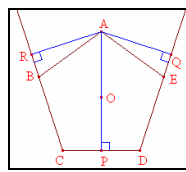
20. (AHSME1985) In una tavola vengono piantati alcuni chiodi distanti un'unità l'uno dall'altro. Se ne

uniscono con un elastico 4, formando il quadrilatero mostrato in figura. Determinare la sua area. [6]

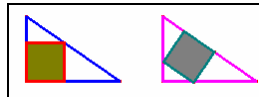


21. (AHSME1985) Nel triangolo rettangolo ABC in figura, si ha $\overline{AB} = 12$, $\overline{BC} = 5$. Si tracciano due archi di cerchio, uno di centro A e raggio AB e l'altro di centro C e raggio BC , che tagliano l'ipotenusa rispettivamente nei punti M e N . Determinare la misura di MN . [4]

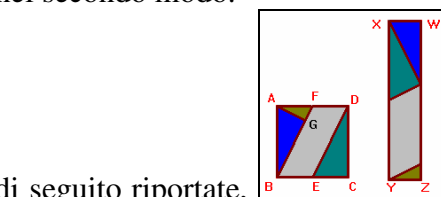
22. (AHSME1985) La diagonale BD di un rettangolo $ABCD$ è divisa in tre segmenti di lunghezza unitaria da due rette parallele r e r' che hanno queste proprietà: passano rispettivamente per A e per C e sono perpendicolari a DB . Determinare l'area del rettangolo. $[3\sqrt{2}]$



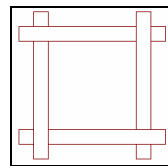
23. (AHSME1986) Il pentagono $ABCDE$ in figura è regolare. AP , AR e AQ sono perpendicolari rispettivamente alle rette per CD , BC e DE , O è il centro del pentagono. Sapendo che OP è lungo 1, determinare la lunghezza di $\overline{AO} + \overline{AQ} + \overline{AR}$. $[4]$



24. (AHSME1987) Nelle due figure che seguono sono presentati due diversi modi di inscrivere un quadrato in un triangolo rettangolo isoscele. Non è detto che i due quadrati siano uguali, i due triangoli rettangoli invece lo sono. Sapendo che nel primo modo l'area del quadrato risulta 441 cm^2 , determinare l'area del quadrato inscritto nel secondo modo. $[392 \text{ cm}^2]$



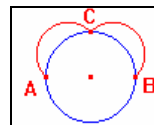
25. (AHSME1988) Nella prima delle due figure di seguito riportate, un quadrato di lato 2 viene diviso in quattro parti in modo che E e F siano i punti medi di lati opposti e AG sia perpendicolare a BF . Con queste quattro parti viene costruito il rettangolo $XYZW$. Determinare il rapporto fra le dimensioni XY e YZ del rettangolo. $[5]$



26. (AHSME1988) In figura vi sono quattro strisce rettangolari uguali di carta, sovrapposte l'una all'altra. Sapendo che i rettangoli hanno dimensioni 1 e 10, determinare l'area della parte di piano coperta dalle strisce. $[36]$

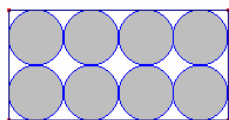
27. (AHSME1989) Nel triangolo ABC si ha: $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 7$, $\overline{AC} = 9$, sapendo inoltre che D è un punto su AC in modo che sia $\overline{BD} = 5$, determinare il valore del rapporto $\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}$. Suggerimento: tracciare l'altezza BH . $[19/8]$

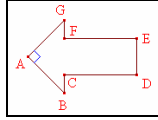
28. (AHSME1990) Un triangolo ha i lati misurati da numeri interi, se il suo perimetro è 8, quanto vale la sua area? Suggerimento: Provare che di triangoli del genere c'è n'è uno solo. $[\sqrt{8}]$



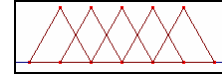
29. (OMI1991) Disegniamo schematicamente la faccia di Topolino prendendo un cerchio di raggio unitario, due punti diametralmente opposti A , B , il punto C in modo che sia $\overline{AC} = \overline{CB}$ e due semicerchi di diametro rispettivamente AC e CB . Quanto vale complessivamente l'area delle orecchie di Topolino? $[1 - \frac{3}{2}\pi]$

30. (OMI1991) Una grande piazza presenta la pavimentazione di cui uno schema è mostrato in figura. I cerchi sono scuri, la parte a essi esterna è chiara. Quanto vale la percentuale di area ricoperta dalla zona scura? $[\approx 79\%]$

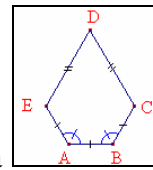




31. (AHSME1991) Nella freccia in figura gli angoli di vertici A , C , D , E , F sono retti, i lati BC e FG sono lunghi 5, CD ed EF 20 e DE 10. Sapendo che AB e GA sono uguali determinare l'area ricoperta dalla freccia. [300]

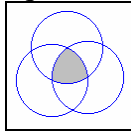


32. (AHSME1992) In figura sono rappresentati cinque triangoli equilateri, ciascuno di lato lungo $2 \cdot \sqrt{3}$. Sapendo che i vertici di ciascun triangolo diverso da quelli estremi, sono punti medi dei lati dei triangoli adiacenti, determinare l'area ricoperta dai cinque triangoli. $[12\sqrt{3}]$
33. (OMI1992) Se P è un punto interno a un triangolo acutangolo ABC tale che i tre triangoli APB , APC , BPC abbiano la stessa area, allora il punto P coincide con a) Il baricentro b) L'ortocentro c) L'incentro d) Il circocentro e) Nessuno dei precedenti Giustificare la risposta. [a]
34. (AHSME1993) Un quadrato di perimetro 20 è inscritto in un quadrato di perimetro 28. Qual è la massima distanza fra un vertice del quadrato interno e un vertice di quello esterno? $[\sqrt{65}]$



35. (AHSME1993) Il pentagono convesso $ABCDE$ in figura ha gli angoli di vertici A e B di 120° , inoltre i lati AB , BC ed EA sono lunghi 2, i lati CD e DE 4. Determinare l'area del pentagono. $[7\sqrt{3}]$

36. (OMI1994) Nel trapezio $ABCD$ la base minore DC è $\frac{2}{3}$ della base maggiore AB . Sapendo che la superficie del triangolo ABD è 24 cm^2 , quanto vale l'area dell'intero trapezio? $[40 \text{ cm}^2]$



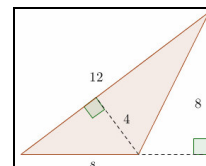
37. (OMI 1994) Nella figura seguente, ogni circonferenza passa per i centri delle altre due. Sapendo che la lunghezza del raggio delle circonferenze è 1, qual è l'area della figura evidenziata? $\left[\frac{\pi - \sqrt{3}}{2} \right]$

Questions in English

Working together

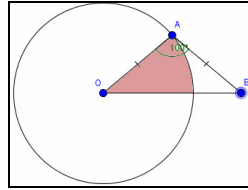
This question was assigned at AHSME in 1995. *The sides of a triangle have lengths 11, 15, and k , where k is an integer. For how many values of k is the triangle obtuse?*

Since the longest side of a triangle must be less than the sum of the other two sides, it follows that $4 < k < 26$. For the triangle to be obtuse, either $11^2 + 15^2 < k^2$, or $11^2 + k^2 < 15^2$. Therefore the 13 suitable values of k are 5, 6, 7, 8, 9, 10, 19, 20, 21, 22, 23, 24 and 25.



38. (MT1993) Find the missing side, s , of the triangle. [6]
39. (MT1993) Point M is the centroid, or intersections of the medians, of right triangle ABC , with $AC \perp BC$. Points X , Y , and Z are the feet of the perpendiculars from M to AB , BC and AC , respectively. Find the area of triangle XYZ , if $AC = 3$ and $BC = 12$. [4]

40. (MT1992) In isosceles triangle AOB , where $AO = AB$, the measure of vertex angle A is 100° . Point O is the center of a circle whose radius is 6. Find the area of the shaded² region. (The answer may be left

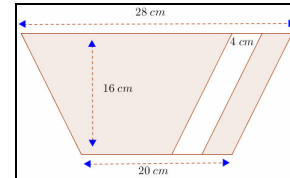


in terms of π)

[4π]

41. (AHSME1995) A pentagon is formed by cutting a triangular corner from a rectangular piece of paper. The five sides of the pentagon have lengths 13, 19, 20, 25 and 31, although this is not necessarily their order around the pentagon. The area of the pentagon is?

[745]



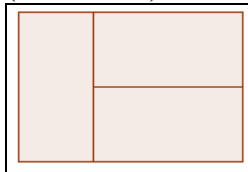
42. (MT1994) Find the area of the shaded region.

[320 cm^2]

43. (MT1995) Given isosceles trapezoid $ABCD$ with $AB = CD$, $BD = 18$, and altitude $BE = 12$, find its area.

[$72\sqrt{5}$]

44. (MTR1997) Three congruent quadrilaterals are placed to form a larger rectangle as shown,



with an area of 1350 cm^2 . find the area of a square that has the same perimeter as that of the larger rectangle.

[1406.25 cm^2]

45. (AHSME1999) Consider all triangles ABC satisfying the following conditions: $AB = AC$, D is a point on AC for which $BD \perp AC$, AD and CD are integers, and $BD^2 = 57$. Among all such triangles, the smallest possible value of AC is?

[11]

46. (AHSME1999) A circle is circumscribed about a triangle with sides 20, 21, and 29, thus dividing the interior of the circle into four regions. Let A , B , and C be the areas of the non-triangular regions, with C being the largest. Then

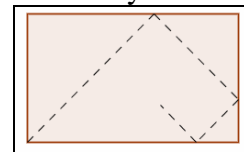
[B]

(A) $A + B = C$ (B) $A + B + 210 = C$ (C) $A^2 + B^2 = C^2$ (D) $20A + 21B = 29C$ (E) $\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} = \frac{1}{C^2}$

47. (MT1991) In the triangle ABC , $\overline{AB} = 8$, $\angle CAB = 30^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$, find the measure of BC .

[$4\sqrt{2}$]

48. (MT1993) A ball is rolled from the corner of a 3 m by 5 m room and it continually rolls off each wall at



45° angle. How far does it travel before reaching its first corner again?

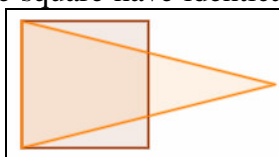
[$15\sqrt{2}\text{ m}$]

49. (MT1993) A circular table is pushed into the corner of a room so that it touches both walls. On the edge of the table is a scratch 8 inches from one wall and 9 inches from the other. What is the diameter of the table?

[58"]

50. (MT1993) An archery target is 1 m in diameter. If 10% of the arrows striking the target strike the bull's eye, what is the diameter of the bull's eye? Assume that the arrows strike randomly. [$\approx 31.6\text{ cm}$]

51. (MT1994) The isosceles triangle and the square have identical areas. Express the altitude h as a function of the base s .



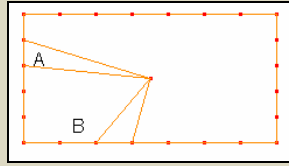
[$h = 2s$]

² colorata, ombreggiata

Working together

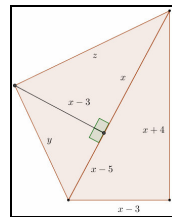
This question was assigned at AHSME in 1996.

Two opposite sides of a rectangle are each divided into n congruent segments, and the endpoints of one segment are joined to the center to form triangle A. The other sides are each divided into m congruent segments, and the endpoints of one of these segments are joined to the center to form triangle B. See figure for $n = 5$, $m = 7$. What is the ratio of the area of triangle A to the area of triangle B?



Let the base of the rectangle be b and the height a . Triangle A has an altitude of length $b/2$ to a base of length a/n , and triangle B has an altitude of length $a/2$ to a base of length b/m . Thus the required ratio of ar-

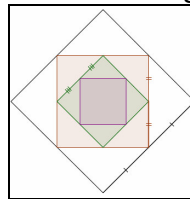
reas is $\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{n} \cdot \frac{b}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{b}{m} \cdot \frac{a}{2}} = \frac{m}{n}$.



52. (MT1995) Find the values of x , y and z .

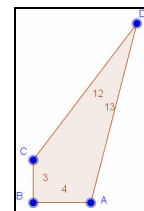
$$[x = 11, y = 10, z = \sqrt{185}]$$

53. (MT1995) If the innermost square has sides one unit long, determine the perimeter of the outermost



square.

$$[8\sqrt{2}]$$



54. (MT1995) What is the area of quadrilateral in figure?

$$[36]$$

Working together

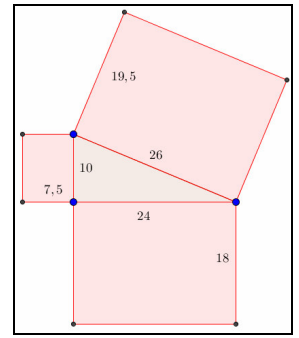
This is a question assigned at AHSME in 1995. The radius of Earth at the equator is approximately 4000 miles. Suppose a jet flies once around Earth at a speed of 500 miles per hour relative to Earth. If the flight path is a negligible height above the equator, then, among the following choices, the best estimate of the number of hours of flight is?

The length of the flight path is approximately the circumference of Earth at the equator, which is $2\pi \cdot 4000 = 8000\pi \approx 25133$ miles. The time required is about $25133/500 \approx 50$ hours.

55. (AHSME1996) Given a circle of radius 2, there are many line segments of length 2 that are tangent to the circle at their midpoints. Find the area of the region consisting of all such line segments. $[\pi]$

56. (MT1995) Each side of a triangle ABC is 75 units in length. Point D is the foot of the perpendicular drawn from A to side BC . Point E is the midpoint of AD . Find BE . $[\approx 49.6]$

57. (MT1995) Similar rectangles are constructed on the sides of a right triangle as shown. Find their areas

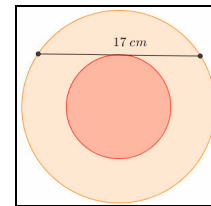


and a relationship among those areas. Have you seen a similar relationship?

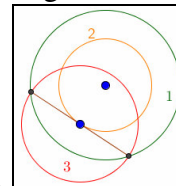
[The rectangle constructed on the hypotenuse is equivalent to the sum of the other two rectangles; Pythagoras's theorem]

58. (MT1996) The diagonals of a rhombus are 12 and 24. Find the radius of the circle inscribed in the rhombus.

$$\left[\frac{12}{5} \sqrt{5} \right]$$



59. (MT1993) Find the shaded area between the two concentric circles. $[\approx 227 \text{ cm}^2]$
60. (MT1993) A square kilometre of land has become contaminated with radioactive waste. Because of the radiation non one can live within one kilometre of any point within the contaminated area. Find the number of square kilometres in the uninhabitable area (including the interior of the square). $[5 + \pi]$
61. (MT1993) An archery target is 1 m in diameter. If 10% of the arrows striking the target strike the bull's eye, what is the diameter of the bull's eye? Assume that the arrows strike randomly. $[\approx 31.6 \text{ cm}]$
62. (MT1996) Two parallel chords in a circle have lengths 10 and 14, and the distance between them is 6. the chord parallel to these chords and midway between them is of length $\sqrt{a}$, where a is? $[184]$



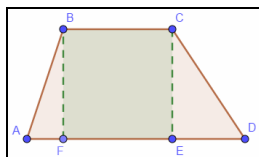
63. (MT1997) A circular track³ is formed by circles 1 and 2 in figure. The diameter of circle 3 is a chord of circle 1 and is tangent to circle 2. what is the relationship between the circular track and circle 3? $[\text{Area of 3 is the same as area of the circular track}]$

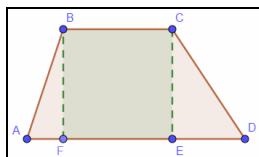
³ Corona circolare

Attività di recupero

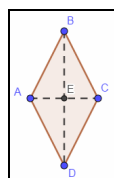
Area dei poligoni elementari

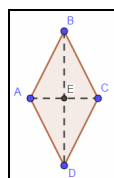
Fase 1: Osserva



- In figura  il trapezio $ABCD$ è formato unendo il quadrato $AEFD$ e i triangoli rettangoli ABF e CDE . Sapendo che si ha: $\overline{AD} = x$, $\overline{BF} = y$, $\overline{DE} = z$, vogliamo determinare la formula per il calcolo dell'area della superficie di un generico trapezio di cui si conoscono le misure delle basi e dell'altezza. Cominciamo con l'osservare che la base minore misura x , mentre la base maggiore misura $x + y + z$. L'area del trapezio è data ovviamente dalla somma delle aree del quadrato e dei due triangoli. Dato che i triangoli sono rettangoli, come base e altezza relativa possiamo considerare i due cateti; quindi l'area del trapezio è: $\frac{x \cdot y}{2} + y^2 + \frac{y \cdot z}{2} = y^2 + \frac{y \cdot (x + z)}{2} = y \cdot \frac{2y + x + z}{2} = y \cdot \frac{y + (x + y + z)}{2}$. Questa rappresenta proprio la ben nota formula per il calcolo dell'area di un trapezio: somma delle misure delle basi (y e $x + y + z$) per quella dell'altezza (y) diviso due.
- In un rettangolo i lati stanno fra loro come i numeri 4 e 5 e il perimetro misura 16. Determinare l'area. Indichiamo con $4x$ e $5x$ rispettivamente le misure dei due lati, il perimetro sarà perciò: $2 \cdot (4x + 5x) = 2 \cdot 9x = 18x$. Ma questo valore simbolico deve corrispondere al valore numerico, cioè a 16. Quindi si ha: $18x = 16 \Rightarrow x = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}$. I lati misurano perciò $4 \cdot \frac{8}{9} = \frac{32}{9}$ e $5 \cdot \frac{8}{9} = \frac{40}{9}$. L'area è quindi il prodotto di queste due misure ed è perciò $\frac{32}{9} \cdot \frac{40}{9} = \frac{1280}{81}$.
- In un trapezio la base maggiore supera di 3 quella minore, le loro misure stanno fra loro come i numeri 5 e 7, mentre l'altezza è metà della base maggiore. Determinare l'area del trapezio. Per calcolare l'area del trapezio abbiamo bisogno di conoscere le misure delle basi e dell'altezza. In virtù della seconda informazione in nostro possesso, indichiamo con $5x$ e $7x$ le misure delle basi, con $3,5x$ quella dell'altezza. La prima informazione può tradursi nella seguente equazione: $7x - 5x = 3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = 1,5$. Quindi le misure delle basi sono 7,5 e 10,5 e quella dell'altezza è 5,25. L'area cercata è perciò $\frac{7,5 + 10,5}{2} \cdot 5,25 = 9 \cdot 5,25 = 47,25$.

Fase 2: Completa ...



- In figura  il rombo $ABCD$ è formato unendo i quattro triangoli rettangoli uguali ABE , BCE , CDE e DAE . Sapendo che si ha: $\overline{AE} = x$, $\overline{BE} = y$, vogliamo determinare la formula per il calcolo dell'area di un generico rombo di cui si conoscono le misure delle diagonali. Cominciamo con l'osservare che le diagonali misurano e L'area del rombo è data dalla somma Dato che i triangoli sono rettangoli, come base e altezza relativa possiamo considerare i Quindi l'area del rombo è Questo risultato può anche scriversi nel modo seguente: $\frac{2x \cdot 2y}{2}$. Questa rappresenta proprio la ben nota formula per il calcolo dell'area di un rombo:
- In un rombo le diagonali stanno fra loro come i numeri 3 e 8 e la maggiore supera di 5 unità la minore.

Determinare l'area. Indichiamo con $3x$ e rispettivamente le misure delle diagonali, la loro differenza sarà perciò Questo valore simbolico deve corrispondere al valore numerico, cioè a Quindi si ha: $\Rightarrow x = \dots$. Le diagonali misurano perciò ... e L'area ècioè

- Un parallelogramma e un triangolo hanno la stessa area. Sapendo che, nell'ordine, il rapporto fra due lati dei poligoni è $\frac{4}{9}$ e che l'altezza relativa del primo differisce di 2 unità da quella del secondo, determinare l'area comune ai due poligoni. Indichiamo con $4x$ e le misure dei lati del parallelogramma e del triangolo rispettivamente. Le relative altezze misureranno quindi y e Quindi l'area del parallelogramma misurerà, quella del triangolo invece Questi valori devono essere uguali, scriviamo perciò Abbiamo ottenuto un'equazione in due incognite che è perciò, almeno apparentemente, indeterminata. Mettiamo in evidenza l'incognita x : Abbiamo così ottenuto un prodotto che deve fare zero, applichiamo il principio di annullamento del prodotto, che ci conduce a queste due equazioni entrambe di primo grado e in un'incognita: e La prima è già risolta ma la sua soluzione non è accettabile perché parliamo di misure di lati che non possono evidentemente essere nulle, la seconda invece fornisce la soluzione..... In conclusione, nonostante abbiamo determinato le misure delle altezze che sono e, essendo nulle le misure delle basi, il problema non ha soluzione.

Fase 3: Prova!

Risolvere i seguenti problemi

1. Trovare la formula per calcolare l'area di un generico trapezio isoscele, considerato come unione di un quadrato il cui lato misura x e di due triangoli rettangoli i cui cateti misurano x e y . $[x \cdot (x + y)]$
2. Trovare la formula per calcolare l'area di un generico trapezio rettangolo, considerato come unione di un quadrato il cui lato misura x e di un triangolo rettangolo i cui cateti misurano x e y . $[x \cdot (x + y/2)]$
3. Trovare la formula per calcolare l'area di un generico triangolo isoscele, considerato come unione di due triangoli rettangoli i cui cateti misurano x e y . $[x \cdot y]$
4. Determinare l'area di un quadrato di perimetro p . $[p^2/16]$
5. Determinare la misura del perimetro di un quadrato di area A . $[4\sqrt{A}]$
6. In un triangolo rettangolo i cateti differiscono di 3 e hanno per somma 12; determinare l'area del triangolo. $\left[\frac{135}{8} \right]$
7. In un trapezio isoscele di area 40, l'altezza misura 5 e le basi stanno fra loro come i numeri 3 e 9. Determinare le misure delle basi. $[4; 12]$
8. In un rombo di area 24, le diagonali differiscono di 8, determinare la loro misura. $[4; 12]$
9. In un rombo di area 28, la somma delle diagonali è 15, determinare la loro misura. $[7; 8]$
10. L'area di un rombo ha lo stesso valore numerico della somma delle misure delle diagonali. Determinare in che relazione stanno le diagonali fra loro. $\left[D = \frac{2d}{d-2} \right]$
11. Con riferimento al problema precedente, le misure delle diagonali possono essere rappresentate da qualsiasi numero reale positivo? Motivare la risposta. $[Devono essere entrambe maggiori di 2]$
12. Un trapezio rettangolo ha l'altezza uguale alla base minore che, a sua volta, è metà della base maggiore. Se l'area è 10 quanto misura l'altezza? $\left[\frac{2\sqrt{15}}{3} \right]$
13. In un trapezio le basi e l'altezza stanno fra loro come i numeri 4, 6 e 5. Se l'area è 100, quanto misura la base maggiore? $[12]$
14. Un quadrato e un rombo hanno la stessa area, la diagonale maggiore del rombo è 3 unità in più del lato del quadrato, quella minore 0,5 unità in meno. Determinare la misura del lato del quadrato. $[1 \vee 1,5]$

Teorema di Pitagora

Fase 1: Osserva

- Di un triangolo rettangolo conosciamo le misure dell'ipotenusa, 13 cm, e di un cateto, 5 cm; vogliamo trovare la misura del perimetro del detto triangolo. Grazie al teorema di *Pitagora*, indicando con x la misura in centimetri del cateto incognito possiamo scrivere: $x^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow x^2 + 25 = 169 \Rightarrow x^2 = 169 - 25 \Rightarrow x = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$. Avendo trovato la misura dell'altro cateto, determiniamo immediatamente la misura del perimetro: $(5 + 12 + 13) \text{ cm} = 30 \text{ cm}$.
- Vogliamo provare che vi è un solo triangolo rettangolo le misure dei cui lati sono numeri naturali fra loro consecutivi. Indichiamo con x , $x + 1$ e $x + 2$ le misure dei lati: ovviamente $x + 2$ indica la misura dell'ipotenusa. Applicando il teorema di *Pitagora* abbiamo: $x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2$. Risolviamo questa equazione di secondo grado: $x^2 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow 2x^2 + 2x + 1 - x^2 - 4x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3$

$$= 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = 3 \\ \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases} \text{ . Dato che stiamo considerando misure, la solu-}$$

zione negativa non si accetta, quindi l'unica terna pitagorica formata da numeri consecutivi è (3, 4, 5). Questo triangolo ha anche un'altra particolarità: la sua area è il successivo numero naturale, cioè 6; infatti

essa, calcolata mediante la nota formula, risulta: $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$.

- La somma dei cateti di un triangolo rettangolo è 23, l'ipotenusa misura 17, determinare l'area. Indichiamo con x e y le misure incognite dei cateti, la prima informazione si traduce nell'equazione: $x + y = 23$. Per determinare l'altra equazione necessaria per costruire il sistema risolvibile, utilizziamo il teorema di *Pitagora*: $x^2 + y^2 = 17^2$. Pertanto il sistema risolvibile è: $\begin{cases} x + y = 23 \\ x^2 + y^2 = 289 \end{cases}$. Per risolverlo possiamo utilizza-

re il metodo di sostituzione o l'artificio di scrivere la seconda equazione nel modo seguente: $(x + y)^2 - 2xy = 289$. Vediamo entrambi gli svolgimenti:

$$\text{a) Metodo di sostituzione. } \begin{cases} x = 23 - y \\ (23 - y)^2 + y^2 = 289 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 23 - y \\ 529 - 46y + y^2 + y^2 = 289 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 23 - y \\ 2y^2 - 46y + 240 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 23 - y \\ y^2 - 23y + 120 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Risolviamo la seconda equazione: } y = \frac{23 \pm \sqrt{529 - 480}}{2} = \frac{23 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{23 \pm 7}{2} = \begin{cases} \frac{23+7}{2} = 15 \\ \frac{23-7}{2} = 8 \end{cases} \text{ . I due valori}$$

rappresentano le misure dei due cateti.

$$\text{b) Metodo con artificio. } \begin{cases} x + y = 23 \\ (x + y)^2 - 2xy = 289 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 23 \\ 23^2 - 2xy = 289 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 23 \\ 529 - 2xy = 289 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 23 \\ -2xy = 289 - 529 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 23 \\ xy = 120 \end{cases}$$

Risolvere il sistema equivale a trovare due numeri di cui si conoscono somma e prodotto, ossia la seguente equazione di secondo grado: $z^2 - 23z + 120 = 0$, che è la stessa equazione risolta in precedenza

nell'incognita y e quindi ha le stesse soluzioni. A questo punto l'area è: $\frac{8 \cdot 15}{2} = 4 \cdot 15 = 60$.

Fase 2: Completa ...

- Di un triangolo rettangolo conosciamo l'area, 24 cm^2 , e quella di un cateto, 3 cm; vogliamo trovare la misura del perimetro del triangolo. Possiamo determinare la misura dell'altro cateto grazie alla formula inversa dell'area, in cui indichiamo con b e h le misure di base e altezza: $b = \frac{2 \cdot A}{h}$. Perciò nel nostro caso si ha: Adesso applichiamo il teorema di per determinare la misura dell'ipotenusa, che indichiamo con x : $x^2 = \dots \Rightarrow \dots$. Quindi la misura del perimetro è:

- In un rombo la differenza delle diagonali è 3 cm e la loro somma 17 cm ; determinare la misura del perimetro. Indichiamo con x e, le misure delle diagonali. Utilizziamo la seconda informazione per determinare la loro misura:, troviamo così il valore di x che rappresenta la misura della diagonale minore, mentre quella maggiore misura, Adesso applichiamo il teorema di *Pitagora* per determinare la misura del lato, che indichiamo con y , tenendo conto che in questo caso dobbiamo servirci delle misure delle semidiagonali: Quindi il perimetro misura, in centimetri:
- La differenza dei cateti di un triangolo rettangolo misura 7 e l'ipotenusa 35 ; determinare la misura del perimetro. Indichiamo con x e y le misure incognite dei cateti; la prima informazione si traduce nella seguente equazione Per determinare un'altra equazione e quindi costruire il sistema risolvibile utilizziamo il teorema di *Pitagora*, che in questo caso è Pertanto il sistema risolvibile è: che risolviamo con il metodo di sostituzione
Risolviamo la seconda equazione:
Poiché è accettabile solo il valore positivo, uno dei cateti misura; la misura dell'altro cateto si ottiene dalla prima equazione dopo aver sostituito il valore precedentemente trovato, cioè
Quindi la misura del perimetro è:

Fase 3: Prova!

Risolvere i seguenti problemi applicando il teorema di Pitagora

- Determinare la misura della diagonale di un quadrato il cui lato misura 7 . $\left[7\sqrt{2} \right]$
- Con riferimento al problema precedente, esiste un numero naturale che misuri il lato del quadrato in modo che anche la misura della diagonale sia rappresentata da un numero naturale? Giustificare la risposta. [No, sono segmenti incommensurabili]
- Determinare la misura del perimetro di un quadrato la cui diagonale misura 2 . $\left[4\sqrt{2} \right]$
- Determinare la misura dell'altezza di un triangolo equilatero il cui lato misura 6 . $\left[3\sqrt{3} \right]$
- Con riferimento al precedente problema, esiste un numero naturale che misuri il lato del triangolo in modo che anche la misura dell'altezza sia rappresentata da un numero naturale? Giustificare la risposta. [No, sono segmenti incommensurabili]
- Determinare l'area di un triangolo equilatero il cui lato misura 3 . $\left[\frac{9\sqrt{3}}{4} \right]$
- Determinare l'area di un triangolo equilatero la cui altezza misura 1 . $\left[\frac{\sqrt{3}}{3} \right]$
- Determinare la misura del lato obliquo di un trapezio isoscele le cui basi misurano 22 e 6 e la cui altezza è uguale alla base minore. $[10]$
- Un trapezio isoscele ha il perimetro di 52 cm , le basi differiscono di 10 cm e la loro somma uguaglia la somma dei lati obliqui. Determinare l'area. $[156\text{ cm}^2]$
- La somma dei cateti di un triangolo rettangolo è 34 , l'ipotenusa misura 26 . Determinare le misure del perimetro e l'area. $[60; 120]$
- L'area di un triangolo rettangolo la cui ipotenusa misura 51 , è 540 . Determinare la misura del perimetro. $[120]$
- In un triangolo rettangolo la misura dell'ipotenusa supera di 5 e di 3 rispettivamente le misure dei due cateti. Determinare la misura del perimetro. $\left[16 + 3\sqrt{30} \right]$
- In un triangolo rettangolo il rapporto fra i cateti è $\frac{7}{4}$ e l'ipotenusa misura 28 . Determinare l'area. $\left[\frac{10976}{65} \right]$

14. In un triangolo rettangolo i lati stanno fra loro come i numeri 3, 5 e 8. Determinare l'area. [Ø]
 15. In un trapezio isoscele l'altezza è lunga 5 unità, la base maggiore supera di 3 unità quella minore. Determinare la misura del lato obliquo. $\left[\frac{\sqrt{109}}{2} \right]$

Teoremi di Euclide

Fase 1: Osserva

- Un cateto di un triangolo rettangolo misura, in *cm*, 7 e la sua proiezione sull'ipotenusa sempre in *cm*, 4. Determinare la misura dell'ipotenusa. Basta considerare il primo teorema di *Euclide* per il quale, indicando con x la misura dell'ipotenusa, vale la seguente uguaglianza: $7^2 = 4 \cdot x$, in realtà equazione, che, risolta, fornisce la misura richiesta: $49 = 4x \Rightarrow x = \frac{49}{4}$.
- Un triangolo rettangolo, di area 20, ha l'ipotenusa che misura 5. Determinare le misure delle parti in cui l'ipotenusa è divisa dall'altezza a essa relativa. Dato che l'area di un triangolo si ottiene dal semiprodotto fra le misure di un lato e dell'altezza a esso relativa, possiamo determinare la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa: $A = \frac{\ell \cdot h}{2} \Rightarrow \ell = \frac{2A}{h} \Rightarrow \frac{2 \cdot 20}{5} = 8$. Adesso applichiamo il secondo teorema di Euclide, indicando con x e $5 - x$ le misure delle due parti in cui viene divisa l'ipotenusa: $x \cdot (5 - x) = 64$. Risolviamo l'equazione: $5x - x^2 - 64 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 64 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 256 < 0$. L'equazione è priva di soluzione, quindi i dati sono incompatibili e anche il problema non ha soluzione.
- Supponiamo invece che la misura dell'ipotenusa sia 10; l'altezza a essa relativa risulta 4 e l'equazione diviene: $x \cdot (10 - x) = 16 \Rightarrow 10x - x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow \Delta = 100 - 64 = 36 \Rightarrow$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{10+6}{2} = 8 \\ \frac{10-6}{2} = 2 \end{cases}$$
 . I valori ottenuti sono le soluzioni cercate.
- Un cateto di un triangolo rettangolo misura 6 e la proiezione dell'altro cateto sull'ipotenusa 2. Determinare la misura dell'ipotenusa. Indichiamo con x la misura dell'ipotenusa, con y quella del cateto incognito. Per il teorema di Pitagora abbiamo: $6^2 + y^2 = x^2$, per il primo teorema di *Euclide* invece abbiamo: $2 \cdot x = y^2$. Abbiamo così ottenuto il seguente sistema risolvibile: $\begin{cases} 36 + y^2 = x^2 \\ 2x = y^2 \end{cases}$. Adesso sostituiamo il valore di y^2 della seconda equazione nella prima: $\begin{cases} 36 + 2x = x^2 \\ 2x = y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 36 = 0 \\ 2x = y^2 \end{cases}$. Risolviamo la prima equazione: $x = \frac{2 \pm \sqrt{4+144}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{148}}{2} = \frac{2 \pm 2 \cdot \sqrt{37}}{2} = 1 \pm \sqrt{37}$. Dato che accettiamo solo la soluzione positiva, la misura dell'ipotenusa è: $1 + \sqrt{37}$. Il problema poteva anche risolversi, indicando con x la misura della proiezione del cateto noto, utilizzando solo un'equazione di secondo grado. Infatti, per il primo teorema di *Euclide*: $x \cdot (x + 2) = 36 \Rightarrow x^2 + 2x - 36 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+144}}{2} \Rightarrow x = -1 + \sqrt{37}$ (accettiamo solo la soluzione positiva); quindi la misura dell'ipotenusa è: $2 + (-1 + \sqrt{37}) = 1 + \sqrt{37}$.

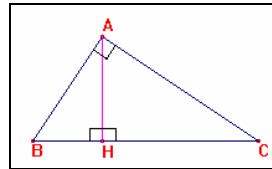
Fase 2: Completa ...

- La proiezione di un cateto sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo è lunga 3 *cm*, l'altezza relativa all'ipotenusa 4 *cm*. Determinare la misura dell'ipotenusa. Per il secondo teorema di *Euclide*, indicando

con x la misura della proiezione dell'altro cateto sull'ipotenusa, si ha: $4^2 = \dots \Rightarrow \dots$
L'ipotenusa misura quanto la somma delle misure delle due proiezioni, cioè $\dots$

- L'ipotenusa di un triangolo rettangolo misura 13, l'altezza a essa relativa 6; determinare la misura del perimetro. Indichiamo con x e y le misure incognite delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa. La prima informazione si traduce nella seguente equazione: $\dots$ Per la seconda invece applichiamo il secondo teorema di Euclide: $\dots$ Abbiamo così ottenuto il seguente sistema risolvibile:

$\begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases}$. Un sistema del genere si risolve mediante la seguente equazione di secondo grado: $z^2 - 13z$



$+ 36 = 0 \Rightarrow z = \dots$ Adesso possiamo applicare il teorema di *Pitagora* ai due triangoli rettangoli determinati dall'altezza relativa all'ipotenusa (con riferimento alla figura i triangoli ABH e AHC), per calcolare le misure dei cateti, che indichiamo con z e t , e che, in questi triangoli, devono considerarsi ipotenuse: $z^2 - 42 = 6^2$ e $\dots \Rightarrow \dots$ Quindi il perimetro misura: $\dots$

- In un triangolo rettangolo un cateto misura 12, la sua proiezione sull'ipotenusa misura 4. Determinare la misura del perimetro. Indichiamo con x e y le misure del cateto incognito e dell'ipotenusa rispettivamente. Appliciamo il primo teorema di *Euclide* al cateto noto, scrivendo la seguente equazione: $\dots$, da cui ricaviamo il valore dell'ipotenusa: $\dots$ Quindi possiamo determinare l'altro cateto o con il teorema di *Pitagora*: $\dots$, o con il secondo teorema di *Euclide* (tenuto conto che la proiezione del cateto incognito sull'ipotenusa misura $36 - 4 = 32$): $\dots$ Infine il perimetro misura: $\dots$

Fase 3: Prova!

Risolvere i seguenti problemi applicando i teoremi di Euclide

1. Determinare la misura di un cateto di un triangolo rettangolo la cui proiezione sull'ipotenusa misura 7 e la cui ipotenusa misura 28. [14]
2. Determinare la misura dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo in cui un cateto e la sua proiezione sull'ipotenusa misurano rispettivamente 15 e 8. $\left[\frac{225}{8} \right]$
3. Determinare la misura dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo in cui un cateto e la proiezione dell'altro cateto sull'ipotenusa misurano rispettivamente 12 e 4. $\left[2 + 2\sqrt{37} \right]$
4. Determinare la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo le proiezioni dei cui cateti sull'ipotenusa misurano 4 e 9. [6]
5. Determinare la misura dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo in cui la proiezione di un cateto sull'ipotenusa è 6 e l'altezza relativa all'ipotenusa misura 12. [30]
6. Calcolare l'area di un triangolo rettangolo le proiezioni dei cui cateti sull'ipotenusa misurano 12 e 27. [351]
7. In un triangolo rettangolo un cateto misura 30, la proiezione dell'altro cateto sull'ipotenusa misura $\frac{128}{17}$. Determinare la misura del perimetro. [80]
8. Determinare la misura delle proiezioni sull'ipotenusa di due cateti di misura 25 e 60 rispettivamente. $\left[\frac{125}{13}, \frac{720}{13} \right]$
9. In un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa divide quest'ultima in due segmenti proporzionali ai numeri 4 e 9. Sapendo che l'area del triangolo è 156, determinare la misura dell'ipotenusa. [26]
10. In un triangolo rettangolo un cateto misura 65, la sua proiezione sull'ipotenusa e l'altezza relativa

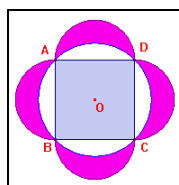
all'ipotenusa stanno fra loro come i numeri 3 e 4, determinare la misura dell'altro cateto.

$$\left[\frac{260}{3} \right]$$

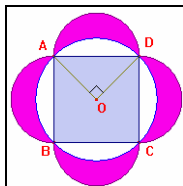
Superficie del cerchio e lunghezza della circonferenza

Fase 1: Osserva

- Consideriamo una circonferenza di raggio di misura 1. Quanto misura l'arco che insiste su un angolo al centro di 72° ? Applicando la formula $l = \frac{2 \cdot \alpha^\circ \cdot \pi \cdot r}{360^\circ}$, si ha: $l = \frac{2 \cdot 72^\circ \cdot \pi}{360^\circ} = \frac{2 \cdot \pi}{5}$. Del resto potevamo osservare più semplicemente che 72° è un quinto di 360° , quindi l'arco è un quinto della circonferenza. Allo stesso modo il settore circolare così determinato sarà anch'esso un quinto del cerchio, cioè avrà area $\frac{2 \cdot \pi}{5}$, dato che $1^2 = 1$. Osserviamo però che la prima misura si riferisce a una lunghezza, la seconda invece a una superficie, cioè l'arco misura $\frac{2 \cdot \pi}{5}$ in unità lineari (centimetri, metri, ...) l'area del settore invece $\frac{2 \cdot \pi}{5}$ in unità quadrate (cm^2 , m^2 , ...).



- Consideriamo la seguente figura: ottenuta costruendo il quadrato $ABCD$, la circonferenza a esso circoscritta e le semicirconferenze di diametro ciascuno dei lati di $ABCD$. Vogliamo calcolare l'area delle zone colorate di rosso, che chiamiamo *lunule*, nell'ipotesi in cui la circonferenza abbia raggio di lunghezza unitaria. È evidente che, essendo le *lunule* uguali, basta calcolare l'area di una di esse e moltiplicarla per 4 per ottenere il risultato finale. L'area di una lunula si ottiene sottraendo all'area del relativo semicerchio quella del segmento circolare di base il lato del quadrato. Cominciamo con il calcolare l'area di un semicerchio e poi la misura del lato del quadrato. Per far ciò consideriamo quest'altra figura.



Si nota subito che il triangolo AOD è rettangolo di ipotenusa AD , quindi $\overline{AD} = \sqrt{\overline{AO}^2 + \overline{OD}^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, perciò l'area del semicerchio di diametro AD è:

$$\frac{\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi \cdot \frac{2}{4}}{2} = \frac{\pi \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

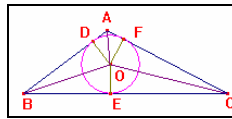
Per calcolare l'area del segmento circolare di base la corda AD , dall'area

del settore circolare AOD , che è un quarto del cerchio maggiore e quindi vale $\frac{\pi}{4}$, sottraiamo l'area del

triangolo rettangolo AOD che è: $\frac{\overline{AO} \cdot \overline{OD}}{2} = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$. Perciò l'area del segmento circolare è $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$. Infi-

ne, dato che l'area di una lunula è: $\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, l'area richiesta è $4 \cdot \frac{1}{2} = 2$. Per inciso notiamo che quest'area è uguale a quella del quadrato.

- Vogliamo provare che la misura del raggio della circonferenza inscritta in un triangolo di area A e peri-



metro di misura $2p$ è $\frac{A}{p}$. Consideriamo la figura seguente

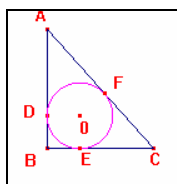
O con i punti di tangenza dei lati abbiamo tracciato i raggi OD , OE e OF , unendolo con i vertici di ABC abbiamo diviso in tre triangoli, OAB , OBC e OCA . La somma delle aree di questi triangoli è evidentemente uguale all'area di ABC . Per calcolare tali aree consideriamo come basi i lati di ABC ; in questo mo-

do le altezze relative saranno i raggi della circonferenza, quindi: $A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{OD} + \overline{BC} \cdot \overline{OE} + \overline{AC} \cdot \overline{OF}}{2}$. Ma i

raggi hanno la stessa misura, che indichiamo con r , quindi possiamo scrivere:

$$A = \frac{\overline{AB} \cdot r + \overline{BC} \cdot r + \overline{AC} \cdot r}{2} = r \cdot \frac{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}}{2}. \text{ Il numeratore della frazione è la misura } 2p \text{ del perimetro}$$

di ABC , quindi scriviamo: $A = r \cdot \frac{2p}{2} = r \cdot p$, da cui ricaviamo quanto volevamo provare: $r = \frac{A}{p}$.



- In figura il triangolo rettangolo ABC è circoscritto a una circonferenza. Vogliamo calcolare la misura del perimetro di ABC , conoscendo le misure dei suoi cateti, a e b , e quella del raggio r della circonferenza inscritta. Abbiamo appena mostrato che si ha: $A = r \cdot p \Rightarrow p = \frac{A}{r}$. Dato che ABC è un trian-

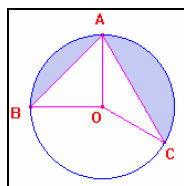
golo rettangolo, l'area si ottiene dal semiprodotto dei cateti, cioè $A = \frac{a \cdot b}{2}$, quindi $r \cdot p = \frac{a \cdot b}{2} \Rightarrow p =$

$$\frac{a \cdot b}{2r} \quad 2p = \frac{a \cdot b}{r}. \text{ Verifichiamolo sul triangolo di cateti di misura 3 e 4. In questo caso l'ipotenusa misura}$$

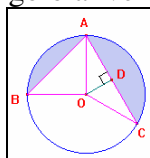
5 e quindi il perimetro misura $2p = (3 + 4 + 5) = 12$ e l'area è $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$. Quindi $r = \frac{A}{p} = \frac{6}{6} = 1$. Applicando

l'altra formula trovata abbiamo: $2p = \frac{3 \cdot 4}{1} = 12$, che è effettivamente vero.

Fase 2: Completa ...



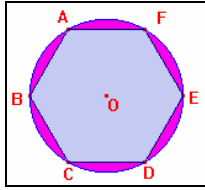
- In figura AB è il lato del quadrato inscritto nella circonferenza di raggio di misura 1, AC è il lato del triangolo equilatero inscritto; vogliamo trovare l'area della regione colorata. Ciascuna delle due parti colorate è un segmento circolare, quindi basta sottrarre all'area di ciascun settore circolare che inter-cetta il segmento, l'area del relativo..... Per quanto riguarda i due settori circolari, basta notare che quello determinato dalla corda AB , è un quarto del cerchio, quindi ha area, quello determinato da AC è invece del cerchio, quindi ha area Passiamo alle aree dei triangoli. AOB è rettangolo iso-scele, quindi la sua area si calcola facilmente: AOC è un triangolo isoscele di base AC , con angolo al vertice di; quindi se tracciamo l'altezza relativa alla base, otteniamo due triangoli



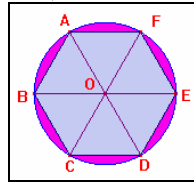
rettangoli i cui angoli acuti sono 60° (la metà di 120°) e 30° e che quindi possono considerarsi metà di un triangolo equilatero di lato il raggio (AO oppure OC). Perciò OD misura quanto metà del raggio, cioè, mentre AD , che è l'altezza del triangolo equilatero, misura volte il lato, che mi-

sura 1. Pertanto l'area del triangolo AOC è il doppio di quella di AOD , cioè è e quindi possiamo calcolare l'area della zona colorata che è:

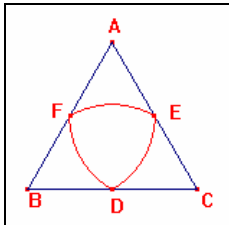
- Calcolare l'area colorata di rosso della parte di cerchio di raggio di misura 1, esterna all'esagono regolare



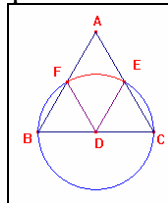
in esso inscritto. Se congiungiamo i vertici con il centro, suddividendo così l'esagono in sei triangoli equilateri fra loro uguali, il lato dell'esagono regolare inscritto in una circonferenza misura



....., in questo caso 1. Al solito dobbiamo calcolare l'area di un segmento circolare e moltiplicare poi per..... Ciascun settore circolare insiste su un angolo di, quindi è del cerchio, misura cioè Il triangolo equilatero ha il lato che misura 1, quindi la sua altezza misura Infine l'area di ciascun segmento circolare vale, perciò l'area complessiva è



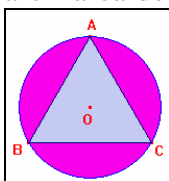
- In figura ABC è un triangolo equilatero, D, E, F sono i punti medi dei suoi lati, la figura colorata di rosso è costituita dagli archi delle circonferenze di centro i punti D, E, F e diametro i lati. Determinare la misura della lunghezza di questa curva se il lato del triangolo equilatero misura 2. È ovvio che i tre archi sono fra loro, basta perciò calcolare la misura di uno solo di essi. Nella figura seguente in cui abbiamo riprodotto quella di partenza unitamente alla circonferenza cui appartiene l'arco



EF e i raggi che determinano i suoi estremi. Basta calcolare la misura del raggio e la misura dell'angolo $F\hat{D}E$. Ma il raggio è, misura perciò L'angolo è invece di angolo piatto, cioè di angolo giro. Quindi anche l'arco misura della circonferenza di raggio di misura 1, cioè Infine la curva misura

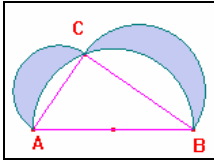
Fase 3: Prova!

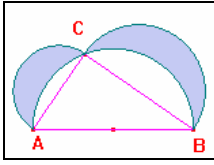
1. Determinare la misura dell'area del settore circolare che determina un angolo al centro di 18° , in un cerchio di raggio di misura 1. [$\pi/20$]
2. L'area di un settore circolare di un cerchio di raggio di misura 1 è $\frac{7}{8}\pi$, quanto misura l'angolo al centro da esso determinato? [315°]
3. Determinare l'area della parte di cerchio di raggio di misura 1, esterna al triangolo equilatero in esso

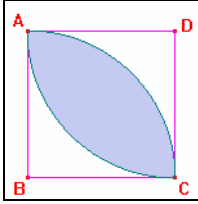


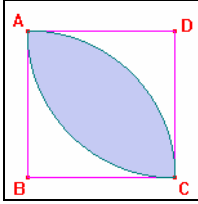
inscritto.

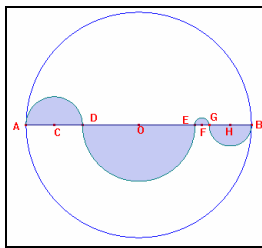
$$\left[\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{4} \right]$$

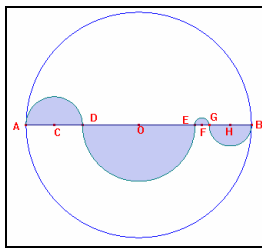


4. In figura  ABC è un triangolo inscritto in una semicirconferenza, quindi è rettangolo, e sui suoi cateti abbiamo costruito altre due semicirconferenze. Chiamiamo lunule le zone colorate. Se i cateti misurano 6 e 8 rispettivamente determinare l'area delle lunule, verificando che è equivalente all'area di ABC . [24]



5. In figura  $ABCD$ è un quadrato, la regione colorata è determinata dagli archi intersezione fra le circonferenze di centri B e D e raggi che misurano quanto il lato del quadrato. Determinare l'area di tale regione, nell'ipotesi che il lato del quadrato misuri 1. $\left[\frac{\pi - 2}{2} \right]$



6. In figura  D è punto medio di AO , E di OB , G divide EB nel rapporto 1 : 4. Se la circonferenza ha raggio di misura 40, determinare l'area della regione colorata. [6 π]
7. Un triangolo ABC è inscritto in una semicirconferenza di diametro di misura 4; quanto vale la massima area ricopribile da ABC ? [4]
8. Trovare la misura del raggio della circonferenza inscritta in un triangolo rettangolo di cateti che misurano 5 e 12. [2]
9. Trovare la misura del perimetro di un triangolo di area 20, circoscritto a una circonferenza di raggio che misura 4. [10]
10. Trovare l'area di un triangolo di perimetro di misura 14, circoscritto a una circonferenza di raggio che misura 3. [21]

Per svolgere un Test finale di 10 quesiti, collegati al sito

http://mathinterattiva.altervista.org/volume_2_6.htm

7. Matematica dell'incertezza

7.1 Calcolo delle Probabilità

Prerequisiti

- Enunciato logico
- Insiemi, sottoinsiemi e operazioni su di essi
- Rappresentazione di un insieme per elenco e mediante i diagrammi di Eulero – Venn
- Sottoinsiemi di un insieme
- Cardinalità di un insieme
- Frazioni
- Percentuali

Obiettivi

- Valutare la possibilità di accadere degli eventi quotidiani
- Calcolare le probabilità laplaciane di semplici eventi
- Riconoscere eventi equiprobabili
- Comprendere la nozione di evento aleatorio
- Risolvere semplici problemi di calcolo delle probabilità
- Distinguere eventi compatibili da eventi incompatibili

Contenuti

- Concetto di evento aleatorio. Probabilità secondo Laplace di eventi semplici
- Unione di eventi elementari
- Estrazioni con e senza rigenerazione. Eventi indipendenti. Probabilità condizionata.

Parole chiave

Fenomeno – Evento aleatorio – Eventi compatibili – Eventi incompatibili

Concetto di evento aleatorio. Probabilità secondo Laplace di eventi semplici

Nella vita di ogni giorno usiamo spesso la parola probabile, così come l'avverbio probabilmente ma non sempre in modo opportuno.

Esempio 1

Gianna dice alla sua amica Caterina che *probabilmente* in serata la andrà a trovare. In questo modo Gianna sta dichiarando che quasi sicuramente la sera si vedranno.

Il precedente esempio mostra come, comunemente, con la parola probabile intendiamo dire *quasi sicuramente*. Questo approccio non coincide con quello matematico, che invece alla parola *probabile* nelle sue varianti associa un numero, che misura in qualche modo la nostra fiducia sul fatto che quanto da noi affermato si verifichi o meno.

Esempio 2

Marzia è appassionata del gioco del lotto e non manca mai di fare una piccola puntata. Piuttosto che puntare su due o più numeri (ambo, terno, ...) a lei piace giocare su un numero secco. Poiché è anche superstiziosa si è convinta che il 45 sia il suo numero fortunato e punta sempre su di esso finché non esce. In questo modo ha perso per ben 30 volte di fila. A questo punto si è convinta che la prossima volta *probabilmente* il 30 uscirà, poiché non è possibile che non debba uscire mai.

Il precedente esempio è abbastanza familiare. Quanti di noi hanno la stessa convinzione di Marzia, che se in un certo gioco, il lotto come la roulette o altri simili, non si verifica un certo evento per molte sessioni consecutive, allora la prossima sarà la volta buona!

Vediamo quindi di cercare di affrontare con la matematica la questione e per farlo abbiamo bisogno di stabilire alcune definizioni. Prima però osserviamo che non è sempre facile associare un numero alla sua probabilità di accadere

Esempio 3

- Che probabilità ha di accadere che in Agosto a Roma nevichi? Ciascuno di noi dirà certamente 0, eppure in passato il fatto è successo.
- Con che probabilità una squadra di calcio può vincere tutte le partite del campionato cui partecipa? Questo fatto nel campionato italiano non è mai successo, ma possiamo essere sicuri che non accadrà mai, o comunque nei prossimi 10 o 15 anni? Ovviamente no.
- Con che probabilità lanciando una moneta uscirà testa? Pensiamo il 50%, dato che vi sono due possibilità esce testa o non esce.

L'esempio precedente ha mostrato alcuni fatti. Vediamoli.

1. Non possiamo associare una data probabilità all'accadere di un fatto basandoci solo sul fatto che esso è accaduto sempre o non è accaduto mai. Ciò vale in particolare per i casi del mondo reale che dipendono da molteplici fattori, come un dato evento atmosferico, o l'esito di una gara sportiva.
2. È invece più semplice affrontare la questione della probabilità dell'avverarsi di un fatto come l'esito del lancio di una moneta, in cui le possibilità sono relativamente piccole.

Quanto osservato ci suggerisce quindi di considerare soltanto la probabilità di eventi simili al lancio di una moneta e quindi cominciamo a stabilire quali sono.

Definizione 1

Dato un fenomeno F , diciamo suo **spazio degli eventi** E l'insieme di tutti i possibili modi, diversi fra di loro, in cui F può presentarsi.

Esempio 4

- Se F è il fenomeno *lancio di una moneta non truccata* (ossia non vi è nessun marchingegno che favorisca l'uscita di una faccia piuttosto di un'altra), il suo spazio degli eventi sarà l'insieme $E = \{T; C\}$, dove T

indica l'evento Testa e C l'evento Croce.

- Se F è il fenomeno *uscita di un numero al gioco della roulette* avremo $E = \{0; 1; 2; 3; \dots; 35; 36\}$.

La concezione alla base di questo concetto di probabilità che chiamiamo *classica* o anche *secondo Laplace*, è il fatto che ognuno dei modi in cui si può presentare il fenomeno deve essere considerato ugualmente possibile. Quindi non possiamo utilizzarla se, ad esempio, dobbiamo valutare la probabilità che domani piova o che l'Argentina vinca i prossimi mondiali di calcio, o che Filippo si sposi entro l'anno e simili.

Poniamo un'altra definizione.

Definizione 2

Diciamo **evento aleatorio** o semplicemente **evento**, un sottoinsieme dello spazio degli eventi E di un fenomeno F.

Che cosa significa?

Aleatorio. Dal latino *alea* che significa dado.

Esempio 5

- L'evento *uscita di un numero dispari lanciando un dado* è il sottoinsieme $\{1; 3; 5\}$ dello spazio degli eventi $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
- L'evento *uscita di un numero maggiore di 12, in una certa giocata della roulette* è il sottoinsieme $\{12; 13; \dots; 36\}$.

Vediamo adesso come possiamo misurare la probabilità dell'accadere di un certo evento.

Esempio 5

- Dato che alla roulette vi sono 37 numeri, da 0 a 36, che probabilità affidiamo all'uscita del numero 19? Poiché uno solo dei 37 numeri è quello che cerchiamo, diciamo che la probabilità del suo accadere sarà $1/37$.
- Invece la probabilità che il numero sia compreso tra 13 e 25 è ovviamente più alta. Infatti stavolta i casi a favore dell'accadere dell'evento sono 13, mentre le possibilità rimangono 37. Quindi è naturale dire che la probabilità di questo evento è $13/37$.

Sulla base del precedente esempio poniamo queste ulteriori definizioni.

Definizione 3

- Diciamo numero dei **casi possibili** di un dato evento la cardinalità dello spazio di eventi E a cui esso appartiene;
- Diciamo numero dei **casi favorevoli** al suo accadere, la propria cardinalità.

Definizione 4

- Dato un evento il cui spazio degli eventi sia finito, diciamo sua **probabilità secondo Laplace** il rapporto fra il numero dei casi favorevoli al suo verificarsi e quello dei casi possibili, nell'ipotesi che tutti i casi abbiano la stessa possibilità di accadere.
- Si dice **evento certo** un evento che ha probabilità 1 di accadere;
- Si dice **evento probabilisticamente impossibile** un evento che ha probabilità zero di accadere.

Ovviamente in base alla definizione precedente, la probabilità di un evento è un numero razionale compreso tra 0 e 1. In particolare vale 0 la probabilità dell'evento formato dall'insieme vuoto e 1 quella dell'evento cosiddetto universale, cioè quello che coincide con lo spazio degli eventi.

Abbiamo anche detto che i casi debbono avere la stessa probabilità di accadere, infatti se in un'urna vi sono palline di due colori diversi, non possiamo dire che la probabilità di estrarne una di uno dei due colori è $1/2$, poiché i casi possibili sono 2 (i due colori) e quelli favorevoli uno (il colore che ho scelto). Infatti se vi sono 20 palline bianche e 1 nera, è ovviamente più probabile estrarre una pallina bianca piuttosto che una nera.

Esempio 6

- Consideriamo il fenomeno *lancio di un dado regolare*, il cui spazio degli eventi è $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. La probabilità dell'evento *esce un punteggio maggiore di 2*, è $\frac{4}{6} = \frac{2}{3} \approx 0,67$, poiché i casi favorevoli sono 4. Invece è 0 la probabilità dell'evento *esce un numero maggiore di 8* ed è 1 la probabilità dell'evento *esce un numero compreso tra 1 e 6*.
- Nel fenomeno *estrazione di una carta da un mazzo di 52 carte da ramino*, il cui spazio degli eventi, è {asso di cuori; due di cuori; ..., regina di picche; re di picche}, che ha 52 elementi, la probabilità dell'evento *esce una figura* è $\frac{12}{52} = \frac{3}{13} \approx 0,23$, dato che i casi favorevoli sono {fante di cuori, regina di cuori, re di cuori, ..., fante di picche, regina di picche, re di picche}, che ha 12 elementi. Talvolta la probabilità possiamo indicarla in percentuale, così la precedente è circa il 23%.
- Possiamo studiare il fenomeno *estrazione di una pallina nera da un'urna in cui vi sono 30 palline nere e altre rosse*? No, poiché non sappiamo quante sono le rosse, quindi possiamo calcolare il numero dei casi favorevoli, 30, ma non quello dei casi possibili.

Nella definizione 4 abbiamo parlato di evento probabilisticamente impossibile e non semplicemente di evento impossibile. Ciò perché vogliamo distinguere gli eventi che hanno probabilità zero di accadere dagli eventi fisicamente impossibili. Infatti, dire che l'evento è probabilisticamente impossibile non equivale a dire che non è possibile che esso si manifesti. Vediamo qualche esempio.

Esempio 7

- L'evento *estrazione di una pallina rossa da un'urna che contiene solo palline nere* è fisicamente impossibile, quindi in questo caso il concetto di impossibilità probabilistica coincide con quello intuitivo che usiamo nel linguaggio ordinario.
- Invece l'evento *uscita di una pallina rossa da un'urna che contiene $10^{10000} + 1$ palline, 10^{10000} delle quali nere* non è probabilisticamente impossibile; infatti la probabilità che si verifichi anche se è un numero molto vicino a zero, non è esattamente zero. Ma nella pratica noi diremo che è zero.

Spesso nel calcolo delle probabilità si fanno errori banali perché ci si lascia fuorviare dalle apparenze. Vediamo un esempio.

Esempio 8

In una scuola si effettua una lotteria, inserendo in un'urna 12 palline rosse e 6 gialle e, in un'altra urna, 20 palline rosse e 10 gialle. A turno si chiama ciascun alunno e gli si chiede di scegliere l'urna nella quale pescare una pallina. Chi sceglierà una pallina gialla vincerà un premio.

Rita viene chiamata per prima. Dopo aver pensato un po' decide di scegliere di pescare nella seconda urna, perché in essa vi sono più palline gialle che nella prima.

Rita ha avuto ragione nella sua scelta? Ragioniamo un attimo. La probabilità non è un numero assoluto, bensì un rapporto. Quel che conta quindi non è quante palline gialle vi sono in ciascuna urna, ma quante ve ne sono rispetto al totale. Così la probabilità di estrarre una pallina gialla dalla prima urna è $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$: quella

di estrarla dalla seconda urna è $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$. Quindi in questo caso non vi è alcun vantaggio a scegliere un'urna piuttosto che un'altra.

Poniamo una definizione.

Definizione 5

Diremo **equiprobabili** due eventi relativi che hanno la stessa probabilità di verificarsi.

L'angolo storico

Nel 1654 il cavaliere di Méré, Antoine Gombaud (1610 – 1685), noto giocatore, pensò di porre a un suo amico, il grande matematico Blaise Pascal, alcuni quesiti riguardanti il gioco dei dadi. In particolare poneva un problema simile al seguente. Due giocatori, che indichiamo con A e B, puntano un'uguale somma e giocano a dadi in modo che chi vince 5 partite su 9 vince tutta la posta. A un certo momento il giocatore A ha vinto 4 partite, mentre il giocatore B ne ha vinte 3. A causa dell'irruzione improvvisa dei gendarmi il gioco viene interrotto, come deve essere divisa la posta? Il cavaliere pensa che non sia giusto dividerla in parti uguali poiché A ha più "probabilità" di B di vincere la partita. Pascal scrisse a un altro grande matematico dell'epoca: Pierre de Fermat esponendo la questione. Nell'angolo dell'antologia vengono riportate interessanti teorie che i due studiosi, pur non pubblicando nulla al riguardo, si scambiarono nella loro corrispondenza. Anche gli algebristi italiani del '500, in particolare il monaco Luca Pacioli, Nicolò Tartaglia e Gerolamo Cardano, si erano posti il problema del Calcolo delle probabilità con diverse conclusioni.

In seguito, l'olandese Christian Huygens, proprio traendo spunto dalla lettura della corrispondenza fra Fermat e Pascal, nel 1657 scrisse un articolo riguardante il gioco dei dadi. Nel 1713 fu pubblicato anche dallo svizzero Jacques Bernoulli l'*Ars conjectandi* (Arte di congetturare), in cui venivano riportate alcune formule utilizzate ancora oggi. Da allora molti altri eminenti matematici si sono occupati del calcolo delle probabilità che oggi viene considerata una delle più importanti discipline matematiche.

I protagonisti



Pierre Simon Laplace Nacque a Beaumont-en-Auge in Francia il 28 Marzo 1749. All'età di 16 anni fu ammesso all'Università di Caen per studiare teologia, ma si occupò prevalentemente di matematica. I suoi contributi alla teoria della probabilità sono contenuti in *Théorie analytique des probabilités* del 1812 e in *Essai philosophique des probabilités* del 1814. Morì a Parigi il 5 Marzo 1827.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Possiamo trattare con la probabilità classica lo studio dell'evento *domani mi sveglierò prima delle 8?* Ovviamente no, dato che non possiamo calcolare né i casi possibili, né quelli favorevoli. È vero che posso dire che vi sono solo due possibilità: *mi sveglio prima* o *mi sveglio dopo*, ma è anche vero che non hanno la stessa probabilità di accadere.

Stabilire quale fra i seguenti eventi può trattarsi con l'approccio di Laplace

Livello 1

1. Probabilità che nella prossima estrazione del lotto della ruota di Venezia esca il 12. [Sì]
2. Probabilità che il mio primogenito sia un maschio. [Sì]
3. Probabilità che la Ferrari vinca il prossimo Gran Premio automobilistico. [No]
4. Probabilità che l'aereo Milano – Catania delle 13:00 arrivi con meno di dieci minuti di ritardo. [No]
5. Probabilità di ottenere un voto sufficiente nel prossimo compito di matematica. [No]
6. Probabilità di ricevere una motocicletta in regalo per il prossimo compleanno. [No]
7. Probabilità che il prezzo della benzina non aumenti più del 10 % nel prossimo anno. [No]
8. Probabilità di fare 13 al totocalcio giocando 4 colonne diverse. [Sì]
9. Probabilità di vincere il primo premio a una lotteria acquistando un biglietto. [Sì, se conosco il totale dei biglietti venduti]
10. Probabilità di selezionare il numero di cellulare di un amico digitando delle cifre a caso. [Sì]
11. Probabilità di avere un incidente andando a sciare. [No]
12. Probabilità di incontrare una diva del cinema sull'aereo. [No]
13. Probabilità di trovare un biglietto da 100 euro facendo una passeggiata. [No]
14. Probabilità di ritrovare la borsa che abbiamo dimenticato sull'autobus. [No]
15. Probabilità di andare a ballare sabato prossimo. [No]

Lavoriamo insieme

Lanciamo una moneta regolare in aria per due volte successive. Qual è la probabilità che entrambe le volte otteniamo testa? Lo spazio degli eventi è formato da coppie ordinate, in cui il primo elemento registra il risultato del primo lancio, il secondo quello del secondo. Dato che una moneta ha due facce, avremo $E = \{(T, T); (T, C); (C, T); (C, C)\}$. Quanti di essi sono favorevoli al nostro evento? Uno cioè (T; T). Quindi la probabilità è $\frac{1}{4}$.

Livello 1

16. Scegliendo a caso un ragazzo da un gruppo di 20 amici, la probabilità che abbia un doppio nome (come Marco Antonio o Gian Luca) è $\frac{3}{4}$. Quanti sono i ragazzi con un solo nome? [5]
17. Scegliendo a caso un ragazzo da un gruppo di 18 amici, la probabilità che sia maggiorenne è $\frac{5}{8}$. Quanti sono i minorenni? [Dati incoerenti]
18. Calcolare la probabilità che lanciando un dado regolare esca un punteggio rappresentato da un numero primo. [1/2]
19. Un'urna contiene 25 palline bianche, 30 verdi e 35 rosse. Determinare la probabilità che estraendo una pallina essa sia rossa. [5/18]
20. Qual è la probabilità di estrarre una carta rossa da un mazzo di 52 carte da poker? [1/2]
21. Qual è la probabilità di estrarre una figura rossa da un mazzo di 52 carte da poker? [3/26]
22. Qual è la probabilità di ottenere un numero multiplo di 3 come primo estratto al bingo? Se non escono numeri multipli di 3 da 50 giocate, la precedente probabilità cambia? Giustificare la risposta. [1/3; No]
23. Nel gioco della briscola gli assi, i tre e le figure hanno dei punti, le altre no. Determinare la probabilità che estraendo a caso una carta da un mazzo regolare di 40, essa valga qualcosa. [1/2]
24. Nel gioco della briscola l'asso vale 11 punti, il tre 10 punti, il re 4 punti, il cavallo 3 punti, il fante o donna 2 punti. Qual è la probabilità di estrarre una carta da un mazzo regolare di 40, il cui valore sia maggiore di 3 punti? [3/10]

25. Alla roulette oltre che su un numero si può puntare anche il cosiddetto cavallo (due numeri vicini); la trasversale piena (tre numeri sulla stessa linea orizzontale) e il carré (quattro numeri uniti). Determinare le relative probabilità di vincere. [2/37; 3/37; 4/37]
26. In un'urna sono posti dei bigliettini con i seguenti nomi di squadre di calcio: Inter, Juve, Milan, Napoli, Roma. Determinare la probabilità che estraendo un bigliettino questo abbia scritto un nome a) Che contenga la lettera a; b) Sia lungo 4 lettere; c) Finisca per consonante; d) Contenga più consonanti che vocali; e) Inizi per vocale. [3/5; 3/5; 2/5; 2/5; 1/5]
27. In un'urna vi sono 20 palline bianche, 30 nere e 40 rosse, con che probabilità una pallina presa a caso è a) bianca; b) nera; c) non rossa. [2/9; 1/3; 5/9]
28. Alla roulette la puntata Cheval o cavalli o coppie di numeri equivale a puntare su 2 numeri vicini, con che probabilità si vince, puntando su 4 Cheval distinti? [8/37]
29. Alla roulette la puntata Carré o quartine, equivale a puntare su 4 numeri a quadrato, con che probabilità si vince, puntando su tre Carré distinte? [12/37]
30. Alla roulette la puntata Douzaine o dozzine, equivale a puntare sui numeri da 1 a 12 o da 13 a 26 o da 27 a 36, con che probabilità si vince puntando su una sola Douzaine? [12/37]
31. Alla roulette la puntata Colonne, equivale a puntare sulla prima, seconda o terza colonna del tavolo, con che probabilità si vince, puntando su una sola colonna? [12/37]

Livello 2

32. Elena pensa un numero di 3 cifre multiplo di 7; con quale probabilità la sua amica Aleandra riuscirà a indovinarlo al primo tentativo? [32/225]
33. Malcolm dice ad Alex di essere nato in Marzo in un giorno il cui valore numerico è dispari ma non divisibile per 3; qual è la probabilità che Alex lo indovini al primo tentativo? [10/31]
34. Un numero è scelto a caso nell'insieme: $\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}; \frac{1}{8}\right\}$, con che la probabilità esso rappresenta un numero a) decimale limitato; b) periodico semplice; c) periodico misto. [4/7; 2/7; 1/7]
35. In un dado regolare un bambino disegna un puntino in più nei punteggi dispari. Se adesso lo lancia, con che probabilità otterrà un punteggio a) pari; b) dispari; c) multiplo di 3; d) numero primo? [1; 0; 1/3; 1/3]
36. In un dado regolare un bambino disegna un puntino in più in una faccia. Se in questo modo la probabilità di ottenere un punteggio multiplo di 3 è aumentata, in quale faccia ha aggiunto il puntino? [2 o 5]
37. In un mazzo di 52 carte da poker tutte le figure rosse sono sostituite con assi di picche, tutte le figure nere con il re di cuori. Con che probabilità una carta pescata a caso è rossa? [1/2]
38. Ho dimenticato il pin del mio cellulare, ricordo solo che è formato da 5 cifre, le prime due sono 12 e l'ultima 3. Qual è la probabilità che riesca a indovinare il pin al primo tentativo? [1/90]
39. Se nell'esercizio precedente sapessi che le due cifre che non ricordo sono uguali quanto diventa la probabilità? E se sono uguali fra loro ma diverse da quelle che ricordo? [1/10; 1/7]
40. La mia amica Eliana mi ha detto che per andare a casa sua debbo prendere un tram di cui ricordo solo che era formato da 3 cifre consecutive come 123 o 321, con che probabilità riesco a prendere quello giusto, se dalla fermata in cui lo prendo passano tutti i tram che hanno numeri di questo tipo? Non ci sono tram che iniziano per 0. [1/14]
41. Una password deve essere formata da 3 cifre diverse (scelte da 0 a 9) e 2 lettere uguali (scelte nell'alfabeto a 26 lettere), quante sono le diverse password che possono costruirsi? [18720]

Lavoriamo insieme

Lanciamo due dadi: quanti sono i casi possibili? È facile sbagliare, dicendo 12, poiché ogni dado si può presentare con 6 diverse facce. In realtà noi dobbiamo contare sei diversi esiti del secondo dado per ciascuno dei sei diversi punteggi del primo, quindi sono i seguenti 36 casi: (1; 1), (1; 2), ... (1; 6), (2; 1), (2; 2), ... (2; 6) ... (6; 1), ... (6; 6).

Livello 2

42. Uno dei primi problemi di probabilità fu presentato a Galileo da un giocatore di dadi, il quale aveva osservato che in un gioco dell'epoca, nel quale si lanciavano 3 dadi regolari a forma di cubo, i punteggi

10 e 11 si ottenevano più frequentemente dei punteggi 9 e 12. Calcolare le rispettive probabilità dei due eventi.

$$\left[\frac{27}{216}; \frac{25}{216} \right]$$

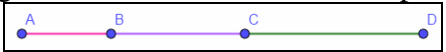
43. Lanciando due dadi otteniamo punteggi che vanno da 2 a 12. Con che probabilità otteniamo 5? Qual è il punteggio più probabile da ottenere? [1/9; 7]
44. Nel lancio di due dadi con che probabilità otteniamo un punteggio multiplo di 4? [1/4]
45. Lanciare due dadi a 6 facce è lo stesso che lanciarne uno a 12 facce? Giustifica la risposta. [No]
46. Quanti sono i casi possibili nel lancio di un dado a 12 facce? [144]
47. Con che probabilità lanciando due dadi a 12 facce otteniamo 15? [5/72]
48. Scegliamo due cifre a caso da 1 a 9 e scriviamo un numero nell'ordine di scelta, con che probabilità il numero scritto è multiplo di 6, nel caso in cui le cifre possono essere uguali? E se non possono esserlo? [12/81; 11/72]
49. Data la funzione $f: A = \{-1, -2, -3, -4, -5\} \rightarrow B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ definita dalla legge $f(x) = -x$. Determinare la probabilità che scelto un elemento a caso in A esso appartenga al dominio di f . Determinare la probabilità che scelto un elemento a caso in B esso appartenga al codominio di f . [3/5; 1/2]
50. Riccardo ha scommesso con un amico che lanciando due dadi riesce a ottenere 9 al primo tentativo; per aumentare la sua probabilità di vincere aggiunge un puntino in una delle facce di uno dei dadi, tranne che nel 6. In quale faccia deve aggiungere il puntino? Quanto diventa la probabilità? [Nel 2; 5/36]
51. In un'urna vi sono 25 palline con su scritto un numero naturale da 1 a 25 e 75 palline con i numeri naturali da 26 a 50, 3 palline per ogni numero. Determinare la probabilità che estraendo a caso una pallina contenga un numero primo. [0,27]
52. In un sacchetto sono poste 4 bacchettine di legno, che misurano, in *cm*, rispettivamente 1, 2, 3 e 4. Tiziana estrae a caso tre bacchettine; qual è la probabilità che con esse possa costruire un triangolo? *Suggerimento*: tenere conto della disuguaglianza triangolare. [1/4]
53. La questione è la stessa dell'esercizio precedente, ma le bacchette misurano, in *cm* 3, 3, 4 e 5. Qual è la probabilità che Tiziana formi un triangolo a) isoscele; b) equilatero; c) rettangolo; d) rettangolo e isoscele. [1/2; 0; 1/2; 0]

Lavoriamo insieme

Klaus e Hans giocano con due dadi a forma di cubo e hanno stabilito che chi per primo ottiene 7, riceverà un numero di figurine uguale al numero di quelle che già possiede moltiplicato per il reciproco della probabilità che ha di effettuare quel lancio. Se Klaus vince 90 figurine, quante ne aveva?

La probabilità di fare 7 lanciando due dadi a 6 facce è $6/36 = 1/6$ (i casi favorevoli sono 1-6; 2-5; 3-4; 4-3; 5-2; 6-1). Quindi se Klaus aveva n figurine ne riceve $6n$, pertanto deve essere $6n = 90$, cioè $n = 15$.

Livello 3

54. Stabilire una legge per determinare il punteggio più probabile ottenibile lanciando due dadi a N facce (con $N = 4, 6, 8, 12, 20$). Quanto vale questa probabilità? [$N + 1$; $1/N$]
55. Lanciando tre dadi, quanti sono i casi possibili? [216]
56. Il segmento CD in figura è il doppio di AB , BC e la metà degli altri due insieme. Scelto un punto a caso su AD , qual è la probabilità che appartenga anche a BC ?  [1/3]
57. In un'urna vi sono palline bianche e nere. Se si aggiungono 4 palline bianche la probabilità di estrarre una pallina bianca diventa $\frac{11}{16}$, mentre se ne aggiungiamo 4 nere la predetta probabilità diviene $\frac{5}{8}$. Quante palline nere vi sono nell'urna? [20]

Lavoriamo insieme

Giocando una sola colonna al totocalcio, gli eventi *fare 14* e *fare zero*, sono equiprobabili? Di solito si dice di sì, in realtà è facile capire che non è vero, infatti per fare 14 debbo indovinare tutti i risultati, e ciò è possibile in un solo modo, per fare zero debbo sbagliarli tutti, ma poiché ogni risultato lo posso sbagliare in 2 modi diversi, la probabilità è molto più alta. Ci spieghiamo meglio, semplificando nel caso in cui ci siano solo 3 partite, se la colonna vincente è 1X2, allora sia 21X che 211, 221, 22X, X1X, X11, X21, X2X sono

tutte con tutti i risultati sbagliati, quindi consegui 0 punti. Tenuto conto che le possibili colonne, con 3 partite, sono 27, la probabilità di fare 3 è $1/27$, quella di fare 0 è invece $8/27$, quindi molto più grande.

Livello 1

58. Consideriamo i numeri usciti in una certa estrazione sulla ruota di Napoli. Determinare quale fra i seguenti eventi è più probabile: escono i numeri 1, 2, 3, 4, 5 oppure 13, 41, 25, 78, 61. Giustificare la risposta. [Equiprobabili]
59. Consideriamo il gioco della roulette e i punteggi usciti in tre giocate successive. Determinare quale fra i seguenti eventi è più probabile: escono i numeri 1, 1, 1 oppure 1, 2, 3 o ancora 1, 3, 11? Giustificare la risposta. [Equiprobabili]
60. In un'urna che contiene 100 palline numerate da 1 a 100, se ne estrae una. Determinare la probabilità che la pallina estratta abbia un'etichetta il cui numero sia multiplo di 13. Determinare nello stesso fenomeno eventi equiprobabili al precedente. [7/100; numero multiplo di 14]
61. Si lancia un dado e si valuta il punteggio ottenuto. Determinare quali fra i seguenti eventi sono equiprobabili all'evento *esce un numero pari*. a) *Esce un numero dispari* b) *Esce un numero multiplo di 3* c) *Esce un numero primo* d) *Esce un numero il cui quadrato è maggiore di 13* e) *Esce un numero il cui quadrato contiene la cifra 6*. [a); c); d)]
62. Lanciamo due dadi regolari a forma di cubo e valutiamo i punteggi ottenuti. Quale punteggio è equiprobabile all'uscita di 6? [Uscita di 8]
63. Il signor Gianni ha giocato i numeri 13, 41 e 72 come terno secco, sono però usciti i numeri 13, 41 e 71. Allora il signor Gianni dice di non avere vinto per un punto. Ha ragione a dire così? Giustificare la risposta. [No]
64. Lanciando una moneta 6 volte è più probabile ottenere la sequenza TCTCTC oppure TTTCCC? Giustificare la risposta. [Equiprobabili]
65. Ci sono due urne, in una ci sono 40 palline nere e 5 rosse, nell'altra 60 nere e 7 rosse. Se si vince estraendo una pallina rossa, da quale delle due urne conviene estrarre? [La prima]

Livello 2

66. In quanti modi si può fare zero al totocalcio giocando una colonna? [2^{14}]
67. Un giocatore di dadi chiese ragione a Galileo Galilei del seguente problema. Lanciando tre dadi a forma di cubo, ciascuno dei punteggi 9, 10, 11 e 12 ha esattamente sei modi diversi di uscire (per esempio $9 = 1 + 2 + 1 = 1 + 3 + 5 = 1 + 4 + 4 = 2 + 2 + 5 = 2 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3$), quindi i quattro eventi dovrebbero essere equiprobabili. Invece la sua esperienza di giocatore gli suggeriva che 10 e 11 uscivano più frequentemente di 9 e 12. Galileo disse che in effetti era proprio così, cioè gli eventi non erano equiprobabili. Sapete spiegare le ragioni addotte da Galileo?
68. Da un mazzo di 52 carte da poker estraiamo una carta. Quale fra i seguenti eventi è equiprobabile all'evento *la carta ha un valore superiore al 7*? a) *La carta è una figura* b) *La carta è di seme rosso* c) *La carta ha un punteggio pari* d) *La carta ha un punteggio la somma delle cui cifre è multipla di 3* e) *La carta ha un punteggio il cui quadrato contiene una sola volta la cifra 1*. [Nessuno]
69. Lanciando due dadi a forma di cubo si possono ottenere 11 diversi punteggi, dieci di questi sono a due a due equiprobabili. Determinare a) quale punteggio non è equiprobabile a nessuno degli altri 10; b) detto N un punteggio diverso da quello del punto a), quale punteggio è a esso equiprobabile? [7; 14 – N]

Quesiti sugli insiemi

70. Consideriamo gli insiemi $X = \{5; 6; 7; 8\}$, $Y = \{4; 5; 7; 9; 11\}$, $W = \{0; 3; 5; 7; 8\}$ e $Z = \{0; 2; 4; 6\}$. Determinare la probabilità che scegliendo due insiemi a caso a) la loro unione abbia un numero pari di elementi; b) la loro differenza abbia 3 elementi; c) la loro intersezione abbia 1 elemento; d) la loro differenza simmetrica abbia un numero dispari di elementi. [1/2; 7/12; 1/3; 2/3]
71. Consideriamo gli insiemi $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$, $B = \{1; 2; 4; 5\}$, $C = \{2; 3; 7; 8\}$, $D = \{0; 7\}$ ed $E = \{4\}$. Determinare la probabilità che scegliendo tre insiemi distinti a caso (che indichiamo con X, Y e Z) si abbia a) $(X \cup Y) \cap Z = Z$; b) $|(X \cup Y) \cap Z| = 1$; c) $(X \cup Y) \cap Z = \emptyset$. [1/5; 7/15; 1/15]
72. Usando tutte le cifre da 1 a 3, due bambini scrivono ciascuno un numero di tre cifre. Determinare la probabilità che a) abbiano scritto lo stesso numero; b) una cifra sia stata scritta esattamente nella stessa posizione (come prima, seconda o terza); c) d) esattamente due cifre siano scritte esattamente nella stessa posizione. [1/6; 1/2; 0]

73. Consideriamo gli insiemi $A = \{3; 4; 5\}$, $B = \{4; 5; 6\}$, $C = \{3; 5; 7\}$, i cui elementi si considerano misure di segmenti. Determinare la probabilità che prendendo a caso un numero da ciascuno dei tre insiemi, con i segmenti che hanno tali misure si possa costruire a) Un triangolo; b) Un triangolo isoscele; c) Un triangolo equilatero; d) Un triangolo scaleno [25/27; 8/27; 1/27; 17/27]
74. Dato l'insieme $A = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$, scelti a caso due elementi diversi a e b in A , si determini la probabilità affinché l'equazione $ax + b = 0$. (ricordiamo che vi sono 42 diverse scelte) a) abbia soluzioni in $\mathbb{N}$; b) abbia soluzioni in $\mathbb{Z}$; c) abbia soluzioni in $\mathbb{Q}$; d) sia una contraddizione; e) sia un'identità. [5/21; 10/21; 5/6; 3/21; 0]
75. Considerando l'insieme $A = \{-1; 0; 1\}$, si costruisca una equazione del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, scegliendo a caso i coefficienti (anche fra loro uguali) nell'insieme di partenza. Determinare la probabilità che l'equazione detta a) sia di primo grado; b) abbia due soluzioni coincidenti; c) abbia due soluzioni reali distinte; d) abbia due soluzioni reali opposte; e) abbia due soluzioni reali reciproche; e) sia una equazione spuria con una soluzione negativa. [6/27; 2/27; 10/27; 2/27; 0; 2/27]

Quesiti sui polinomi

76. Determinare la probabilità che estraendo a caso un polinomio dall'insieme $A = \{(x - 2y) \cdot (x + 2y); (ax + by) \cdot (ay - bx); (3 + a) \cdot (3 - a); (-x + z) \cdot (x + z); (x - y + 1) \cdot (x + y + 1)\}$, esso rappresenti un prodotto notevole del tipo *differenza di quadrati*. $\left[\frac{2}{5}\right]$
77. Determinare la probabilità che estraendo a caso un polinomio dall'insieme $A = \{(x^2 + y) \cdot (x^4 - x^2y + y^2); (a + 2b) \cdot (a^2 - ab + 4b^2); (1 + 2x) \cdot (1 + 4x^2 + 2x); (3m + n) \cdot (9m^2 + 3mn - n^2); (w + 4t) \cdot (w^2 - 16t^2 + 4tw)\}$, esso rappresenti un prodotto notevole del tipo *somma di cubi*. $\left[\frac{1}{5}\right]$
78. Determinare la probabilità che estraendo a caso un polinomio dall'insieme $A = \{(3m - n) \cdot (3m^2 + 3mn + n^2); (4 - c^2) \cdot (16 - 4c^2 + c^4); (2 - 3x) \cdot (4 + 9x^2 + 6x); (m^2 - n) \cdot (m^2 + m^2n + n^2); (wz - 2) \cdot (w^2z^2 - 2wz + 4)\}$, esso rappresenti un prodotto notevole del tipo *differenza di cubi*. $\left[\frac{1}{5}\right]$
79. Determinare la probabilità che estraendo a caso un polinomio dall'insieme $A = \{x^2 + y^2; a^2 + b^2 + 2ab; m^2 - n^2 - 2mn; 2a^2 + 4ab + b^2; 9a^2 + 25b^2 + 15ab; a^2 + a^4 + 9\}$, costituisca lo sviluppo di un quadrato di binomio. $\left[\frac{1}{5}\right]$
80. Determinare la probabilità che estraendo a caso un polinomio dall'insieme $A = \{x^2 + xy; a + b; a^2 + b; x^2 + x - 1; 2x^2 - 3x^3 + 4x; ab - ab^2; 2 + a - a^2; 3x\}$, esso sia a) omogeneo; b) ordinato secondo le potenze crescenti di una variabile; c) ordinato secondo le potenze decrescenti di una variabile; d) completo; e) omogeneo e completo. $\left[\frac{3}{8}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; 0\right]$

Quesiti sulle scomposizioni di polinomi e le frazioni algebriche

81. Si estraiga a caso un monomio dall'insieme $A = \{ab, 3a^3, a^2bc, 4xyz, 12ax^2y, 3^2, a^2b^2, bxy^2\}$, determinare la probabilità che a) il suo grado totale sia 3; b) il suo grado totale sia almeno 2; c) abbia una sola lettera con il grado massimo e sia quella che precede le altre in ordine alfabetico; d) ciascuna delle sue lettere abbia grado non superiore a 2; e) tutte le lettere presenti abbiano lo stesso grado. [1/4; 7/8; 1/4; 7/8; 3/8]
82. Si estraiga dall'insieme $A = \{mn, m^2nm, mnp^2, m^0nm, 2mpqp, m^{-1}nm^2, 31\}$, un monomio a caso. Determinare la probabilità che esso sia espresso in forma semplificata. [2/7]
83. Si estraggano dall'insieme $A = \{ab^2c, abc^2, 2abbc, 3a^{-1}a^2b^2b^0c, 2^2abc, abc^3c^{-1}, bac, cacb\}$, due monomi a caso. Determinare la probabilità che essi siano simili. (Ci sono 28 casi) [2/7]
84. Consideriamo l'insieme $A = \{abc, ab^2c, a^2b^2c, 2am, 4bcn, 3mnp\}$, scelti a caso due monomi in A determinare la probabilità che il loro MCD sia uguale a: (Suggerimento: si ottengono 15 diverse coppie di monomi) a) 1; b) b ; c) m ; d) abc ; e) un monomio di grado almeno 3. [1/5; 0; 1/15; 2/15; 1/5]
85. Dato l'insieme $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ ed i polinomi $f(x) = x^4 - x^2 + x - 1$, $g(x) = x^2 - x + a$, dove a rappresenta un generico elemento dell'insieme A . Determinare la probabilità affinché la divisione di $f(x)$ per $g(x)$ abbia per resto un polinomio a) di I grado; b) il cui termine noto è 0; c) il cui termine noto è un

- numero intero positivo divisibile per 3; d) il cui coefficiente direttore è un numero pari; e) il cui coefficiente direttore è un numero divisibile per 3. [1; 1/5; 3/5; 0; 2/5]
86. Siano dati l'insieme $A = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ e il polinomio $P(x) = x^5 - 13x^3 + 36x$; determinare la probabilità che scegliendo a caso un elemento $a \in A$, il resto della divisione di $P(x)$ per il binomio $x - a$, sia a) uguale a 0; b) un numero positivo; c) un numero dispari. [5/7; 1/7; 0]
87. Dato l'insieme $A = \{1; 2; 3; \dots; 10\}$, determinare la probabilità che, scelto a caso un elemento $a \in A$, il binomio $x^2 - a$ risulti scomponibile in $\mathbb{Q}$. [3/10]
88. Dati gli insiemi $A = \{1; 2; 3; 4\}$ e $B = \left\{\frac{1}{4}; \frac{1}{9}; \frac{3}{4}; \frac{1}{16}; 1; 4; 5\right\}$, determinare la probabilità che, scelti a caso un elemento $a \in A$ e un elemento $b \in B$, il trinomio $x^2 + ax + b$ risulti un quadrato di binomio. (*Suggerimento*: vi sono 28 possibili accoppiamenti). [3/28]
89. Dato l'insieme $A = \{-8; -4; -1; 1; 2; 8; 12\}$, determinare la probabilità che, scelto a caso un elemento $a \in A$, il binomio $x^3 - a$ risulti scomponibile in $\mathbb{Q}$. [4/7]
90. Dati gli insiemi $A = \{-2; -1; 1; 2; 5\}$ e $B = \{-4; -3; 1; 6; 7\}$, scelti a caso un elemento $a \in A$ e un elemento $b \in B$, determinare la probabilità che il trinomio $x^2 + ax + b$ risulti fattorizzabile in $\mathbb{Q}$. [1/5]
91. Dato l'insieme $A = \{-13; -8; -7; 7; 8; 13\}$, scelto a caso un elemento $a \in A$, determinare la probabilità che la frazione $\frac{x^2 + ax + 12}{x^4 - 5x^2 + 4}$ risulti ridotta ai minimi termini. [1/3]
92. Dato l'insieme $A = \{-25; -14; -11; -10; 10; 11; 14; 25\}$, scelto a caso un elemento $a \in A$, determinare la probabilità che la frazione $\frac{x^2 + ax + 24}{x^2 + x + a}$ risulti ridotta ai minimi termini. [1]
93. Date le seguenti frazioni algebriche, in cui a è un elemento scelto a caso nell'insieme $A = \{-4; -3; -2; \dots; 4\}$, determinare la probabilità che esse risultino ridotte ai minimi termini. a) $\frac{x^2 - a}{x + a}$; b) $\frac{x^2 - ax + 4}{x^2 - a}$; c) $\frac{x^3 + a}{x \cdot (x + 2) \cdot (x^2 - 1)}$; d) $\frac{x^3 - a^3}{(x^2 - 4) \cdot (x^2 - 2x + 1)}$; e) $\frac{x^2 + a^3}{x \cdot (x^2 + x - 12) \cdot (x^2 - 3x - 4)}$ [7/9; 8/9; 2/3; 2/3; 7/9]

Quesiti sui numeri irrazionali

94. Dati gli insiemi $A = \{1; 4; 8; 9; 16; 25; 27; 36; 64; 91\}$ e $B = \{2; 3; 4\}$ si scelgano a caso un elemento $a \in A$ e un elemento $b \in B$: determinare la probabilità che il radicale $\sqrt[b]{a}$: a) rappresenti un numero intero; b) sia irriducibile. [13/30; 3/10]
95. Dati tutti i radicali del tipo $\sqrt{a}$, con a numero naturale compreso tra 1 e 50, determinare la probabilità che, sceltone uno a caso, esso sia: a) irriducibile; b) apparente; c) riducibile ma non apparente; d) simile a $\sqrt{2}$. [3/5; 7/50; 13/50; 1/10]
96. Dato l'insieme $A = \{\sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{8}; \sqrt{12}; \sqrt{18}\}$, determinare la probabilità che, scelti a caso due elementi da A : a) la loro somma sia formata da un solo radicale; b) il loro prodotto sia un numero razionale. [2/5; 2/5]

L'Antologia

Il seguente passo è estratto da una lettera spedita da Pascal a Fermat e datata mercoledì 29 luglio 1654. L'argomento è proprio quello di cui abbiamo già riferito, ossia del come ripartire una data posta quando il gioco viene interrotto. Ecco l'opinione di Pascal. La traduzione è stata modernizzata, ma il contenuto è fedele all'originale.

Ecco il modo in cui io saprò il valore di ciascuna delle possibilità che hanno due giocatori, quando, per esempio, si vince in 3 lanci e ciascuno ha scommesso 32 pistole ⁽¹⁾. Supponiamo che il primo di loro abbia già due punti e l'altro 1. Adesso devono effettuare un altro lancio, il cui risultato potrà essere uno dei seguenti.

Se vince il primo, egli vincerà l'intera posta, cioè 64 pistole.

Se invece vince l'altro, il punteggio diverrà 2 a 2, di conseguenza se essi si accorderanno per dividere la posta, ciascuno riavrà indietro le sue 32 pistole. Consideriamo allora, Signore, che se vince il primo avrà 64 pistole, se invece dovesse perdere, ne avrà 32. Se il gioco dovesse interrompersi prima di questo quarto lancio e la posta dovesse essere divisa, il primo dovrebbe dire "Io sono certo di avere 32 pistole, anche se questo lancio non mi sarà favorevole. Le altre 32 pistole può darsi che le vinca io come può essere che le vinca tu. Perciò queste 32 pistole le divideremo e le altre 32 saranno invece tutte mie". Così il primo dovrebbe avere 48 pistole e il secondo 16.

Adesso supponiamo che il primo abbia 2 punti e il secondo nessuno e che si apprestino ad effettuare il terzo lancio. Se esso sarà favorevole al primo, egli vincerà 64 monete; se vince l'altro, il punteggio sarà 2 a 1, come nel caso precedente già trattato. Ma ho già mostrato che in quel caso il primo riceverebbe 48 pistole e il secondo 16. Perciò se il gioco dovesse interrompersi prima del terzo lancio, il primo potrebbe dire: "Se vinco, guadagnerò tutta la posta, 64 pistole, se perdo, 48 pistole saranno legittimamente mie. Perciò dammi 48 monete e le rimanenti 16 le divideremo metà ciascuno." Così il primo avrà 48 più 8 pistole, cioè 56.

Ora supponiamo che il primo abbia solo un punto e l'altro nulla. Vedete, Signore, che se effettuiamo un lancio, e sarà favorevole al primo, egli avrà 2 punti e l'altro zero, se quindi il gioco dovesse interrompersi dopo il lancio gli andrebbero 56 monete. Se dovesse perdere saranno in parità e, interrompendo il gioco, avrebbero 32 monete a testa. Egli dovrebbe allora dire all'avversario: "Se non volete continuare a giocare, datemi le 32 monete di cui sono certo e dividiamo quel che resta sottraendo queste monete da 56; quel che prenderei, se il lancio fosse a mio favore, cioè 24 monete, le divideremo fra noi a metà. Così voi prenderete 12 pistole e io 32 più 12, cioè 44.

Adesso consideriamo una lettera di Fermat a Pascal, sempre sull'argomento già trattato della divisione della posta. La lettera è datata venerdì 25 settembre 1654. Essa si riferisce al caso di 3 giocatori, la vittoria è sempre con 3 punti, il primo ha 2 punti e gli altri uno a testa. Ed è la risposta a una lettera spedita da Pascal il 24 agosto 1654, in cui con considerazioni diverse, questi traeva la stessa conclusione, ossia che la ripartizione doveva essere nei rapporti 17 : 5 : 5.

Il primo può vincere con un solo lancio o al secondo lancio o al terzo. Se vince al primo lancio, è necessario che egli faccia 1 lancio favorevole con un dado a 3 facce ⁽²⁾ al primo tentativo.

Un solo dado gli dà 3 possibilità. Così il primo dovrà avere, in caso di interruzione, $\frac{1}{3}$ della posta, poiché in tal caso sfrutterebbe solo $\frac{1}{3}$ delle sue possibilità.

Se gioca due volte, può vincere in due modi, o vince il secondo al primo lancio ed egli vince il

⁽¹⁾ La pistola era una moneta di uso comune in Francia, ai tempi di Pascal.

⁽²⁾ Fermat si riferisce alla terminologia usata da Pascal nella lettera del 24 agosto. Questi dice che, dato che i giocatori sono tre, l'esito di ogni lancio equivale al lancio di un dado con 3 facce, su ciascuna delle quali è scritto il nome di uno dei giocatori.

terzo, o il primo lancio è a favore del terzo ed il secondo lancio è a suo favore. Ma due dadi producono 9 possibilità. Il primo giocatore deve perciò avere $\frac{2}{9}$ della posta.

Che il primo vinca in tre lanci, potrà accadere in due modi, o il secondo vince il primo lancio, il terzo il secondo ed egli il terzo; oppure il primo vince al primo lancio, il secondo al secondo ed egli vince al terzo. Ma tre dadi danno 27 possibilità delle quali il primo giocatore ha $\frac{2}{27}$ di vincere giocando tre volte.

La somma delle tre possibilità dà la probabilità finale che ha il primo di vincere, cioè $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} = \frac{17}{27}$.

In modo analogo Fermat fa vedere che il secondo e il terzo hanno ciascuno una probabilità uguale a $\frac{5}{27}$, conclude quindi dicendo che, se la partita viene interrotta sul punteggio di 2 – 1 – 1, la posta deve essere divisa nel rapporto 17 – 5 – 5.

Unione di eventi elementari

Naturalmente non sempre ci chiediamo che accada esattamente un fatto, ma più spesso che accada almeno uno fra diversi fatti.

Esempio 9

- Alla roulette posso puntare sul rosso e anche sul numero 32, quindi la mia probabilità di vincita è che esca rosso o 32. In particolare, siccome il 32 è un numero rosso, se uscisse tale numero vincerei entrambe le puntate. Quindi *o* è usato in senso inclusivo, come il *vel* della logica.
- Se invece avessi puntato sul nero e sul 32 non potrebbero accadere entrambi i fatti, quindi vincerei solo se esce un numero nero o esce il 32 e in questo caso quindi *o* è usato in senso esclusivo, come l'*aut* della logica.

Nell'esempio precedente abbiamo intanto osservato che la cosiddetta probabilità unione di due eventi può essere interpretata in due modi diversi, a seconda che gli eventi possano accadere entrambi oppure no. È bene perciò porre una definizione.

Definizione 6

Diciamo che due eventi A e B appartenenti allo stesso spazio degli eventi E , sono **compatibili** se possono accadere entrambi, diversamente li diremo **incompatibili**.

Esempio 10

- Quindi gli eventi alla roulette *esce un numero rosso* e *esce il numero 32*, sono compatibili.
- Sono invece incompatibili gli eventi *esce un numero nero* e *esce il numero 32*.

Come possiamo calcolare la probabilità dell'unione di due eventi? Cominciamo a considerare il caso più semplice, ossia se gli eventi sono incompatibili.

Esempio 11

La probabilità che esca un numero nero alla roulette è $18/37$, dato che abbiamo 18 numeri rossi, 18 neri e lo zero che non ha colore. La probabilità che esca il 32 è ovviamente $1/37$. In pratica ho 19 possibilità di vincere, quindi la probabilità è chiaramente la somma delle singole probabilità, cioè $18/37 + 1/37 = 19/37$.

Vale quindi il seguente ovvio risultato.

Teorema 1

La probabilità dell'evento unione di due eventi incompatibili A e B è data dalla seguente formula:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Possiamo estendere il precedente risultato anche agli eventi compatibili?

Esempio 12

Supponiamo che nel lancio di un dado punti sul fatto che esca un punteggio maggiore di 2 o pari. Le singole probabilità dei due eventi sono $4/6$ e $3/6$. Se quindi fosse vera la regola per la probabilità unione anche in questo caso, la probabilità dovrebbe essere $(4 + 3)/6 = 7/6$, che ovviamente è assurdo.

L'esempio precedente ci convince che la formula stabilita dal Teorema 1 vale solo per eventi incompatibili, non è difficile però trovare una regola valida per eventi compatibili.

Esempio 13

L'assurdità del caso precedente nasce dal fatto che i due eventi hanno come casi favorevoli rispettivamente $\{3, 4, 5, 6\}$ e $\{2, 4, 6\}$, con due eventi che si ripetono, cioè $\{4, 6\}$. Ora è ovvio che se uscisse 4 non vincerei doppia posta, ma solo una. Quindi i casi favorevoli non sono 7 bensì solo quelli diversi, ossia 5, e pertanto la probabilità di vincita sarebbe $5/6$.

Tenuto conto del precedente esempio possiamo enunciare il seguente risultato.

Teorema 2

La probabilità dell'evento unione di due eventi compatibili A e B è data dalla seguente formula:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

In effetti nel precedente teorema potremmo eliminare l'aggettivo compatibili, ottenendo il seguente risultato che comprende anche il Teorema 1.

Teorema 2'

La probabilità dell'evento unione di due eventi A e B è data dalla seguente formula:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Infatti se gli eventi sono incompatibili si ha: $A \cap B = \emptyset$ e la precedente formula coincide con quella stabilita dal Teorema 1.

Se gli eventi sono incompatibili la regola stabilita dal Teorema 1 può estendersi facilmente a più di due eventi.

Teorema 3

La probabilità dell'evento unione di n eventi incompatibili A e B è data dalla somma delle probabilità dei singoli eventi.

Vediamo un esempio.

Esempio 14

Con che probabilità, lanciando una moneta tre volte esce almeno una volta testa? L'enunciato equivale al seguente: *con che probabilità lanciando 3 volte una moneta otteniamo solo 1 testa o solo 2 teste o 3 teste?* Cioè la probabilità di tre eventi incompatibili. Calcoliamo la probabilità che esca *solo* una testa. I casi possibili sono i seguenti 8: {TTT, TTC, TCT, CTT, TCC, CTC, CCT, CCC}. Le probabilità dei nostri tre eventi sono ovviamente: $3/8 + 3/8 + 1/8 = 7/8$.

Non è così facile invece generalizzare il risultato del Teorema 2 a più di due eventi.

Esempio 15

Con che probabilità, lanciando un dado otteniamo: *un punteggio pari o un punteggio minore di 5 o un punteggio maggiore di 2?* I casi sono ovviamente compatibili. Le singole probabilità sono: $3/6$, $4/6$ e $4/6$. Come dovremmo calcolare l'unione? Sommando i precedenti ed eliminando le intersezioni a due a due? Vediamo. *Un punteggio pari e un punteggio minore di 5* significa {2; 4}; *un punteggio pari e un punteggio maggiore di 2* significa {4; 6}; infine *un punteggio minore di 5 e un punteggio maggiore di 2*, significa {3, 4}. Quindi le relative probabilità sono: $2/6$, $2/6$ e $2/6$. Se fosse vero che $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$, allora la nostra probabilità sarebbe: $3/6 + 4/6 + 4/6 - 2/6 - 2/6 - 2/6 = 5/6$. Contiamo quanti sono in effetti i casi favorevoli: {1, 2, 3, 4, 5, 6}, cioè l'evento universale, quindi la probabilità dovrebbe essere 1.

Non consideriamo il caso generale dell'unione di più di due eventi compatibili, trattiamo solo quello di tre eventi.

Teorema 4

La probabilità dell'evento unione di tre eventi A , B e C è data dalla seguente formula:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Esempio 16

Quindi per calcolare la probabilità dell'esempio precedente, dobbiamo considerare anche la probabilità dell'evento *Un punteggio pari e un punteggio minore di 5 e un punteggio maggiore di 2*, che significa {4},

con probabilità $1/6$, quindi la probabilità cercata diventa: $3/6 + 4/6 + 4/6 - 2/6 - 2/6 - 2/6 + 1/6 = 1$, che coincide con quanto già calcolato.

Fra gli eventi incompatibili, ce ne sono due particolari.

Esempio 17

Nel lancio di un dado gli eventi *esce il punteggio 5* e *esce il punteggio 6* sono fra loro incompatibili. L'evento *esce un punteggio pari* è incompatibile con l'evento *esce un punteggio dispari*. La differenza fra le due coppie di eventi incompatibili consiste nel fatto che, mentre puntando sull'uscita della loro unione, la probabilità ottenuta non è la certezza, dato che possono uscire punteggi diversi da 5 e da 6; nel secondo caso ciò non è possibile, se punto sull'uscita di *un punteggio pari o dispari* o la certezza di vincere.

In pratica i due ultimi eventi visti nell'esempio precedente esauriscono tutte le possibilità, ossia si completano a vicenda, l'uno contiene *tutti* i casi che non contiene l'altro. Associamo ad eventi del genere un nome particolare.

Definizione 7

Diciamo evento **complementare** di un dato evento A , definito in uno spazio di eventi E , l'evento B , anch'esso definito in E , tale che $A \cup B = E$ e $A \cap B = \emptyset$.

Notazione 1

Dato un evento A indichiamo il suo **evento complementare** con A^c .

Dal teorema 1, segue immediatamente il seguente risultato.

Corollario 1

Vale la seguente formula, valida per ogni evento A : $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Dimostrazione

Dato che $E = A \cup A^c$ e che $A \cap A^c = \emptyset$, la legge stabilita dal teorema 1 diviene: $P(E) = P(A) + P(A^c)$, cioè $1 = P(A) + P(A^c)$ ricavando rispetto a $P(A^c)$, otteniamo la tesi.

Consideriamo qualche esempio.

Esempio 18

Riprendiamo l'esempio 14, piuttosto che calcolare tutte le probabilità a noi favorevoli sarebbe stato molto più semplice calcolare l'evento complementare, ossia *non esce almeno 1 testa*, cioè *escono tutte croci*, la cui probabilità è ovviamente $1/6$. In tal modo la probabilità cercata sarebbe stata semplicemente $1 - 1/6 = 5/6$.

Verifiche

PASSE		0			MANQUE			
		1	2	3				
		4	5	6				
		7	8	9				
		10	11	12				
PAIR		13	14	15	IMPAIR			
		16	17	18				
		19	20	21				
		22	23	24				
		25	26	27				
		28	29	30				
		31	32	33				
		34	35	36				
12 ^P		12 ^M	12 ^D			12 ^D	12 ^M	12 ^P

Per ogni riferimento alla roulette vale la seguente figura

Lavoriamo insieme

- Alla roulette ho puntato 1 euro sul rosso e uno su *manque* (numeri da 1 a 18), con che probabilità vincerò? I due eventi sono ovviamente compatibili, dato che fra i primi 18 numeri, 9 sono rossi. Quindi dobbiamo usare il risultato del Teorema 2. La probabilità che esca un numero rosso è $18/37$; quella che esca un numero *manque* è anch'essa $18/37$; la probabilità che esca un numero rosso e *manque* è $9/37$. Quindi la probabilità cercata è $18/37 + 18/37 - 9/37 = 27/37 \approx 73\%$.
- Se avessi puntato invece sul primo carrè (numeri 1, 2, 4, 5) e sulla terza colonna (numeri 3, 6, 9, 12, ..., 36), invece gli eventi sarebbero incompatibili, quindi la probabilità di vincita sarebbe stata somma delle singole probabilità, cioè $4/37 + 12/37 = 16/37 \approx 43\%$.

Livello 1

1. Nello spazio degli eventi elementari dell'estrazione di una carta da un mazzo da ramino, quali fra i seguenti eventi sono incompatibili con l'evento *esce una figura*? a) *esce una carta di cuori* b) *esce una carta minore di 7* c) *esce una carta nera* d) *esce una carta multipla di 5* [b); d)]
2. Nello spazio degli eventi elementari dei risultati di una giornata di un torneo a 6 squadre, quali fra i seguenti eventi sono compatibili con l'evento *ci sono almeno 2 vittorie*? a) *ci sono solo vittorie* b) *ci sono più pareggi che vittorie* c) *c'è almeno un pareggio* d) *non ci sono vittorie* [a); b); c)]
3. Siano due eventi A e B , appartenenti allo stesso spazio degli eventi, con $P(A) = \frac{4}{9}$ e $P(B) = \frac{7}{12}$, è richiesto il calcolo di $P(A \cup B)$. Perché senza conoscere nei dettagli gli eventi A e B , possiamo dire che gli eventi sono compatibili? Giustificare la risposta.
4. Lanciando un dado qual è la probabilità di ottenere un numero pari o multiplo di 3? [2/3]
5. Con che probabilità il primo estratto in una ruota del lotto è multiplo di 4 o di 5? [2/5]
6. Alla roulette puntiamo sul carrè (13, 14, 16, 17) e sulla prima colonna (1, 4, 7, 10, ..., 31, 34), con che probabilità vinciamo? [14/37]
7. Da un mazzo di carte da scopa estraiamo una carta a caso, con che probabilità è una figura di bastoni o l'asso di coppe? [1/10]
8. In un'urna inseriamo dei bigliettini con su scritti i seguenti nomi di donna: {Eva, Anna, Carla, Teresa, Chiara, Alice}, con che probabilità estraendo un biglietto a caso esso contiene un nome che è formato da 4 lettere o inizia per vocale? Inizia per vocale o finisce per a? [1/6; 1]
9. In una classe vi sono 12 maschi e 10 femmine. Di questi 22 alunni, 15 sono maggiorenni. Con che probabilità scegliendo a caso uno studente sarà maschio o maggiorenne? [Non si può rispondere, perché ...]
10. Con riferimento al problema precedente, se sappiamo che dei maggiorenni 8 sono maschi, quanto vale la probabilità? [19/22]
11. Determinare la probabilità che, da un'urna contenente 100 biglie numerate da 1 a 100, se ne estragga una il cui numero verifichi una almeno delle seguenti proprietà: a) sia un numero divisibile per 5 o per 3; b) sia un numero maggiore di 16 o minore di 79. [0,47]

Livello 2

12. Lanciando due dadi qual è la probabilità di ottenere un punteggio maggiore di 8 o pari? [25/36]
13. Lanciando 3 monete con che probabilità otteniamo solo 1 testa o solo 1 croce? [3/4]
14. Lanciando 3 monete con che probabilità otteniamo almeno 1 testa o almeno 1 croce? [1]
15. Lanciando 3 monete con che probabilità otteniamo solo 1 testa o solo 2 croci? [3/8]
16. Scegliamo a caso un mese, con che probabilità il suo nome inizia per vocale o ha 30 giorni? [1/2]
17. Lanciamo 2 dadi e i punteggi ottenuti li scriviamo uno accanto all'altro a formare un numero di 2 cifre. Qual è la probabilità che tale numero sia pari o un multiplo di 3? [25/36]
18. Dall'insieme dei primi 10 numeri primi scegliamo a caso un elemento. Qual è la probabilità che una delle sue cifre sia 2 o 3? [1/2]
19. Determinare la probabilità che, da un'urna contenente 100 biglie numerate da 1 a 100, se ne estragga una il cui numero sia divisibile per 4 e maggiore di 21 o divisibile per 3 e minore di 84. [0,42]
20. Determinare la probabilità che da un'urna contenente 200 biglie numerate da 1 a 200, se ne estragga una il cui numero sia divisibile per 7 minore di 172 o divisibile per 6 maggiore di 83. [41/200]
21. Determinare la probabilità che un numero di 3 cifre le abbia tutte pari o tutte dispari. [0,21]
22. Determinare la probabilità che un numero di 3 cifre ne abbia solo una pari e diversa da zero, o solo una dispari. [25/36]
23. I 26 studenti di una classe praticano ciascuno almeno uno sport. In particolare 15 giocano a calcio, e 18 a tennis. Qual è la probabilità che scegliendo a caso uno degli studenti esso pratichi uno solo dei due sport? [19/26]

Livello 3

24. A causa di un problema tecnico, nonostante i 70 passeggeri di un aereo abbiano avuto assegnato un posto, la Compagnia decide che ciascuno può sedersi dove desidera. Con che probabilità solo 1 dei passeggeri siederà in un posto diverso da quello assegnato? [0]
25. Determinare la probabilità che un numero di 3 cifre abbia solo una cifra uguale a 2 o solo una uguale a 3. [101/225]
26. In un'urna vi sono palline di colore bianco, rosso e verde. La probabilità di estrarre una pallina bianca è $\frac{2}{9}$, quella di estrarne una rossa è $\frac{1}{3}$. Se togliamo 5 palline verdi, la probabilità di estrarre una pallina bianca o rossa diviene $\frac{10}{17}$. Quante palline di ogni colore vi sono nell'urna? [20; 30; 40]
27. In un'urna vi sono palline di colore bianco, rosso e giallo. La probabilità di estrarre una pallina bianca è $\frac{12}{29}$, quella di estrarne una rossa o gialla è $\frac{20}{29}$. Se aggiungiamo altre 2 palline rosse, la probabilità di estrarre una pallina rossa diviene $\frac{1}{3}$. Quante palline di ogni colore vi sono nell'urna? [Dati incoerenti]

Lavoriamo insieme

In un'urna ci sono 100 palline numerate da 1 a 100. Ne estraiamo una a caso, con che probabilità il numero che essa porta è multiplo di 2 o di 3 o di 5?

Stiamo calcolando la probabilità dell'unione di 3 eventi a due a due compatibili, che, detti A , B e C i tre eventi, grazie al Teorema 4 è: $P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$. Calcoliamo quindi le diverse probabilità. $P(A) = 50/100$ (i numeri sono metà pari e metà dispari); $P(B) = 33/100$ (i multipli di 3, vanno da $3 \cdot 1$ a $3 \cdot 33 = 99$); $P(C) = 20/100$ (da $5 \cdot 1$ a $5 \cdot 20 = 100$). $A \cap B$ è dato dai multipli di 2 e di 3, cioè di 6, quindi $P(A \cap B) = 16/100$ (da $6 \cdot 1$ a $6 \cdot 16 = 96$); $A \cap C$ sono i multipli di 10, perciò $P(A \cap C) = 10/100$; $B \cap C$ i multipli di 15 e $P(B \cap C) = 6/100$ (da $15 \cdot 1$ a $15 \cdot 6 = 90$). Infine $A \cap B \cap C$ sono i multipli di 2 e di 3 e di 5, quindi di 30, quindi $P(A \cap B \cap C) = 3/100$ (da $30 \cdot 1$ a $30 \cdot 3 = 90$).

La probabilità cercata è allora pari a $P(A \cup B \cup C) = \frac{50+33+20-16-10-6+3}{100} = \frac{74}{100}$.

Livello 1

28. Determinare la probabilità che estraendo 1 carta da un mazzo di 52 carte da poker, essa sia una figura o una carta di quadri o una carta il cui punteggio è superiore a 5. [37/52]

29. Alla roulette puntiamo una fiche su ciascuno dei seguenti eventi: *manque* (da 1 a 18), rosso e seconda colonna (2, 5, 8, ..., 35). Con che probabilità esce un punteggio che ci fa vincere almeno una volta? [31/37]
30. In un'urna sono poste 30 palline, numerate da 1 a 30. Con che probabilità una pallina estratta a caso ha un numero multiplo di uno almeno fra i numeri 4, 6 o 10? [11/30]
31. In un'urna sono poste 50 palline, numerate da 1 a 50. Con che probabilità una pallina estratta a caso ha un numero che finisce per 2 o inizia per 3 o è pari? [31/50]
32. Lanciamo una moneta tre volte consecutive, con che probabilità otteniamo più teste croci?
33. Alla tombola rimangono da estrarre i seguenti numeri: {2, 5, 8, ..., 89}, in cui ogni numero a parte il primo è uguale al precedente aumentato di 3. Con che probabilità il prossimo numero estratto sarà pari o di 2 cifre o minore di 30? [1]

Livello 2

34. In un'urna sono poste 10 palline con i numeri pari da 2 a 20 e 20 palline con i numeri dispari da 1 a 19 (ciascun numero è su due palline). Con che probabilità una pallina estratta a caso ha un numero multiplo di 5 o pari o che finisce per 7? [3/5]
35. Determinare la probabilità che scegliendo un numero di 3 cifre esso risulti divisibile per 3 o con la cifra delle unità uguale a 2 o con la cifra delle decine uguale a 7. [23/50]
36. Nel club dei tre hobbies gli iscritti praticano almeno uno fra i seguenti hobbies: filatelia, numismatica, figurine. Scegliendo un iscritto a caso, sappiamo che la probabilità che sia un filatelico è $2/3$; che sia un numismatico è $4/9$; che collezioni figurine è $4/9$; che sia filatelico e numismatico $1/9$; filatelico e collezionista di figurine $5/36$; numismatico e collezionista di figurine $1/6$. Con che probabilità segue tutti e tre gli hobbies? [1/36]
37. Determinare la probabilità che estraendo il primo numero sulla ruota di Milano questo sia multiplo di 3 o abbia almeno una cifra uguale a 4. [21/45]

Livello 3

38. In un'urna sono poste 250 palline, numerate da 1 a 250. Con che probabilità una pallina estratta a caso ha un numero che è divisibile per 6 o per 7 ma minore di 150 o per 9 ma maggiore di 125. [33/125]
39. Stabilire la formula per calcolare $P(A \cup B \cup C \cup D)$. $[P(A) + P(B) + P(C) + P(D) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap D) + P(A \cap C \cap D) + P(B \cap C \cap D) - P(A \cap B \cap C \cap D)]$
40. Consideriamo gli insiemi $A = \{3; 5; 7; 9\}$, $B = \{2; 4; 5; 6; 7\}$, $C = \{0; 1\}$, $D = \{1; 4; 6\}$. Determinare la probabilità che scegliendo due insiemi a caso la loro unione abbia sei elementi o che la loro intersezione non sia vuota. [2/3]
41. Consideriamo gli insiemi $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{1; 4; 5; 6\}$, $C = \{2; 5\}$, $D = \{0; 1; 3; 4\}$ ed $E = \{0; 2; 3\}$. Determinare la probabilità che scegliendo due insiemi a caso la loro unione abbia sei elementi o la loro intersezione sia vuota. [2/5]
42. Siano date le funzioni $f: x \rightarrow -x$ e $g: x \rightarrow -2x + 1$, entrambe definite da $M = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$ a $N = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Determinare la probabilità che a) scelto un elemento a caso in M esso appartenga al dominio di f o a quello di g ; b) scelto un elemento a caso in N esso appartenga al codominio di f o a quello di g . [1; 2/3]

Lavoriamo insieme

Lanciamo due dadi con che probabilità otteniamo un punteggio superiore a 5? Dovremmo calcolare la probabilità dell'unione degli eventi incompatibili: *esce 6; esce 7; esce 8; esce 9; esce 10; esce 11; esce 12*. È più semplice calcolare la probabilità dell'evento complementare, ossia *esce 2; esce 3; esce 4; esce 5*. Ricordiamo che i casi possibili sono 36. La probabilità del complementare è $1/36 (1 + 1 = 2) + 2/36 (1 + 2 = 3, 2 + 1 = 3) + 3/36 + 4/36 = 10/36$. Allora la probabilità dell'evento iniziale è $1 - 10/36 = 26/36 = 13/18$.

Utilizzando l'evento complementare risolvere i seguenti quesiti

Livello 1

43. Le probabilità di due eventi dello stesso spazio degli eventi sono $3/7$ e $4/7$, possiamo dire che certamente i due eventi sono complementari? Giustificare la risposta. [No]
44. Le probabilità di due eventi dello stesso spazio degli eventi sono $3/7$ e $5/7$, possiamo dire che certamente i due eventi non sono complementari? Giustificare la risposta. [Sì]
45. Con che probabilità lanciando due dadi otteniamo un punteggio minore di 10? [5/6]
46. Con che probabilità scegliendo una carta da un mazzo da 52 non è una figura rossa? [49/52]

- 47. Con che probabilità alla roulette puntando una fiche sul rosso, una sul Pair (pari) e una sui primi dodici non vinciamo? [8/37]
- 48. Con che probabilità scegliendo un numero a caso fra i primi 100 naturali non è un numero primo? [3/4]
- 49. Con che probabilità scegliendo un pallina a caso da un'urna in cui ce ne sono 20 rosse, 30 verdi, 40 blu e 50 gialle, questa non è verde? [11/14]

Livello 2

- 50. Determinare la probabilità che lanciando 4 monete ci siano almeno 1 testa. [15/16]
- 51. Determinare la probabilità che lanciando 5 monete ci siano almeno 2 testa. [13/16]
- 52. Determinare la probabilità che lanciando 3 dadi non otteniamo sempre lo stesso punteggio su ogni dado? [35/36]

Estrazioni con e senza rigenerazione. Eventi indipendenti. Probabilità condizionata

Sia negli esempi che negli esercizi abbiamo trattato il caso di estrazioni di carte, palline, numeri e così via, ma lo abbiamo fatto sempre supponendo di effettuare una sola estrazione. Vogliamo considerare adesso il caso in cui estraiamo più di una volta. Così facendo nasce però un problema, a partire dalla seconda estrazione, dato che abbiamo a che fare con casi diversi a seconda che l'oggetto estratto per primo venga eliminato e quindi non risulta più estraibile, come nel caso del gioco del lotto, o venga rimesso in gioco come quando ripetiamo lo stesso evento. Per esempio lanciare 2 volte un dado equivale a un' estrazione ripetuta con gli stessi oggetti dentro l'urna sia nella prima che nella seconda estrazione.

Chiariamo meglio con un esempio.

Esempio 19

- Da un'urna contenente 10 palline bianche e 20 nere estraiamo due palline in successione, qual è la probabilità che siano entrambe bianche? Dato che le estraiamo in successione è come se lo facessimo contemporaneamente, quindi le due palline estratte possono avere lo stesso colore ma non possono essere la *stessa* pallina. Così la probabilità che la prima pallina estratta sia bianca è $10/30$, mentre che lo sia anche la seconda è $9/29$. Infatti in questo caso le palline nell'urna sono solo 29 dato che una la abbiamo tolta e, nell'ipotesi in cui la prima sia stata bianca, le bianche sono adesso una in meno. Quindi i casi possibili sono $29 \cdot 30$ e quelli favorevoli $9 \cdot 10$, per una probabilità di $\frac{9 \cdot 10}{29 \cdot 30} = \frac{3}{29} \approx 10\%$
- Se invece, dopo avere estratto la prima pallina e avere osservato che è bianca (diversamente non sarebbe possibile che entrambe le palline estratte siano bianche), rimettiamo la pallina estratta nell'urna la seconda pallina avrà la stessa probabilità della prima di essere bianca, cioè $10/30 = 1/3$. Quindi i casi possibili sono $30 \cdot 30$ e quelli favorevole $10 \cdot 10$ e la probabilità complessiva è $\frac{10 \cdot 10}{30 \cdot 30} = \frac{1}{9} \approx 11\%$.

Cominciamo a porre alcune definizioni.

Definizione 8

- Data l'estrazione di più di un oggetto da un'urna che contiene almeno due oggetti, diciamo che l'estrazione avviene **con rigenerazione** se ogni oggetto che si estrae viene registrato e poi rimesso nell'urna.
- Se invece gli oggetti estratti sono eliminati, diciamo che l'estrazione avviene **senza rigenerazione**.

In vista dell'esempio precedente possiamo enunciare il seguente risultato.

Teorema 5

Se in un'urna ci sono n oggetti di un tipo e m oggetti di un altro tipo, la probabilità che estraendo due oggetti essi siano del primo tipo è data da: $\frac{n \cdot (n-1)}{(m+n) \cdot (m+n-1)}$ in caso di non rigenerazione e da $\frac{n^2}{(m+n)^2}$ in caso di rigenerazione.

Il teorema precedente si può generalizzare facilmente a più di due estrazioni.

Esempio 20

Se nell'urna dell'esempio precedente avessimo estratto tre palline, la probabilità che fossero tutte bianche sarebbe stata $\frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{28 \cdot 29 \cdot 30} = \frac{6}{203} \approx 3\%$ se non rigeneriamo e $\frac{10^3}{30^3} = \frac{1}{27} \approx 3,7\%$.

Non è un caso che per gli stessi eventi, il caso con rigenerazione sia più probabile dell'altro.

Dobbiamo osservare una importante questione. Quando abbiamo calcolato la probabilità che estraendo due palline entrambe fossero bianche abbiamo fatto n'ipotesi non esplicitata che però è fondamentale per risol-

vere la questione. Ossia che nella prima estrazione la pallina fosse bianca, perché se ciò non accade, ovviamente non ha senso calcolare con che probabilità la seconda pallina è bianca. Poniamo una definizione.

Definizione 9

Dati due eventi A e B , diciamo probabilità di A **condizionata** dall'evento B , o anche **probabilità di A dato B** , la probabilità che si verifichi A nell'ipotesi che si sia già verificato B .

Notazione 2

La probabilità di A dato B si indica con il simbolo $P(A | B)$.

Esempio 21

Nell'esempio 20 abbiamo calcolato che la probabilità che siano entrambe bianche le palline estratte senza rigenerazione da un'urna che ne contiene 10 bianche e 20 nere è $\frac{9 \cdot 10}{29 \cdot 30} = \frac{3}{29}$. La probabilità che la seconda pallina è bianca, dato che la prima lo è stata, è $\frac{9}{29}$. Possiamo quindi scrivere che $\frac{9}{29} = \frac{10}{30} \cdot \frac{3}{29}$. Ma $\frac{10}{30}$ è la probabilità che la prima pallina estratta è bianca, mentre $\frac{3}{29}$ è la probabilità che siano entrambe bianche.

Sulla falsariga del precedente esempio possiamo dimostrare il seguente risultato.

Teorema 6

Si ha $P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Vediamo un altro esempio.

Esempio 22

Se invece l'estrazione avviene senza ripetizione la probabilità che entrambe le palline siano bianche è $\frac{10 \cdot 10}{30 \cdot 30} = \frac{1}{9}$. E in questo caso quindi $\frac{10}{30} = \frac{10}{30}$, cioè la probabilità che la seconda pallina estratta sia bianca dato che lo era la prima non cambia, cioè il primo evento, ovviamente, non influisce sull'accadere del secondo.

L'esempio precedente mostra due eventi che non si influenzano a vicenda, come accade in tutte le estrazioni con rigenerazione. Diamo un nome a questo tipo di eventi.

Definizione 10

Diciamo che l'evento B è **indipendente** dall'evento A se $P(B|A) = P(B)$.

Se B è indipendente da A è facile capire che anche A è indipendente. Del resto se il fatto che esca rosso la seconda volta non è influenzato dal fatto che è uscito rosso la prima volta, vale anche il viceversa.

Osserviamo anche che se due eventi sono indipendenti, allora il teorema 6 si semplifica e diventa il seguente.

Teorema 7

Se A e B sono eventi indipendenti nello stesso spazio degli eventi, allora $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

- Da un mazzo di carte da scopa estraiamo due carte successivamente, con che probabilità sono due figure? La prima carta è una figura con una probabilità di $12/40 = 3/10$. La seconda è una figura, dato che stiamo supponendo che la prima lo è stata con una probabilità di $11/39$. Pertanto la probabilità richiesta è $\frac{11 \cdot 12}{39 \cdot 40} = \frac{11}{130} \approx 8,5\%$.
- Se invece, dopo avere estratto la prima carta e avere osservato che è una figura, la rimettiamo nel mazzo, rimescoliamo ed estraiamo una seconda carta, la probabilità cercata diventa $\frac{12^2}{40^2} = \frac{9}{100} = 9\%$.

Negli esercizi seguenti se non è specificato altrimenti, devono considerarsi le diverse ipotesi con e senza rigenerazione

Livello 3

- Da un'urna con 10 palline bianche e 15 nere, si estraggono 2 palline. Determinare la probabilità che esse siano a) tutte bianche; b) tutte nere. $[(4/25; 3/20); (9/25; 7/20)]$
- Da un'urna con 30 palline bianche e 20 nere, si estraggono 3 palline. Determinare la probabilità che esse siano a) tutte bianche; b) tutte nere. $[(29/140; 27/125); (57/980; 8/125)]$
- Da un'urna con 12 palline bianche e 25 nere, si estraggono 4 palline. Determinare la probabilità che esse siano a) tutte bianche; b) tutte nere. $[(33/4403; 20736/1874161); (2530/13209; 390625/1874161)]$
- Da un'urna con 15 palline bianche e 12 nere, si estraggono 5 palline. Determinare la probabilità che siano a) tutte bianche; b) tutte nere. $[(77/2070; 3125/59049); (44/4485; 1024/59049)]$
- Con che probabilità, in tre estrazioni successive, il primo estratto nella ruota di Napoli è a) il numero 17; b) un numero pari; c) un numero maggiore di 50. $[1/729000; 1/8; 64/729]$
- Con che probabilità, alla roulette esce per 5 volte consecutive a) il rosso; b) il numero 0; c) un numero della prima dozzina? $[\approx 2,7\%; \approx 10^{-6}\%; \approx 0,36\%]$
- Mescoliamo un mazzo di carte da scopa e in successione estraiamo 3 carte, con che probabilità tutte le carte sono a) di denari; b) figure. $[3/247; 11/494]$
- In una classe di 15 maschi e 18 femmine, sorteggiamo 3 studenti da portare a vedere uno spettacolo teatrale, con che probabilità sono tutti dello stesso sesso? $[41/176]$
- La mattina Carlo si alza molto presto, per non svegliare la moglie sceglie al buio le calze dal cassetto. Se ci sono 8 paia di calze messe in ordine qualsiasi, ogni coppia di colori diversi a tinta unita, con che probabilità Carlo prende due calze rosse? $[1/120]$
- Con riferimento al precedente quesito, con che probabilità sceglie due calze dello stesso colore? *Suggerimento* conviene considerare l'evento complementare. $[1/15]$

Lavoriamo insieme

Da un'urna con 10 palline bianche e 20 nere si estraggono 2 palline, con che probabilità hanno colori diversi? Dobbiamo stare attenti al fatto che la detta probabilità, a differenza di quella in cui chiediamo che le palline siano entrambe bianche o entrambe nere, è una probabilità unione di due eventi incompatibili. Infatti equivale a chiedersi con che probabilità estraiamo la prima pallina bianca e la seconda nera o la prima nera e la seconda bianca. In ogni caso gli eventi hanno la stessa probabilità, cioè $\frac{10 \cdot 20}{30 \cdot 29} = \frac{20}{87} \approx 23\%$ in caso di non

rigenerazione e $\frac{10 \cdot 20}{30 \cdot 30} = \frac{2}{9} \approx 22\%$, con la rigenerazione. Quindi le relative probabilità sono il doppio, cioè $\frac{40}{87}$ o $\frac{4}{9}$.

Livello 2

- Con che probabilità, in tre estrazioni successive, il primo estratto nella ruota di Napoli è lo stesso numero? $[1/8100]$

12. Con che probabilità, alla roulette esce lo stesso numero per 4 volte consecutive? $[\approx 0,002\%]$
13. Mescoliamo un mazzo di carte da scopa e in successione estraiamo 2 carte, con che probabilità le carte sono una figura e un asso? $[4/65]$
14. In una classe di 12 maschi e 10 femmine, sorteggiamo 2 studenti da portare a vedere uno spettacolo teatrale, con che probabilità sono di diverso sesso? $[40/77]$
15. In un'urna vi sono 12 biglie indistinguibili al tatto, metà bianche e metà nere. Se ne estraggono 2 senza rigenerazione. Determinare la probabilità che abbiano diverso colore. $[6/11]$
16. Se nel precedente problema avessimo chiesto che avessero lo stesso colore, sarebbe cambiato il risultato? Giustificare la risposta. $[\text{Sì}; 5/11]$
17. In un'urna vi sono delle biglie indistinguibili al tatto, 3 sono bianche, 7 verdi e 4 rosse. Se ne estraggono 3 senza rigenerazione. Determinare la probabilità che a) abbiano lo stesso colore; b) tutte di colore diverso (sono 6 casi) c) 2 siano bianche. $[10/91, 1/26, 33/364]$

Nei seguenti esercizi l'estrazione è senza rigenerazione

18. Da un'urna con 12 palline bianche e 14 nere, si estraggono 3 palline. Determinare la probabilità che siano a) tutte dello stesso colore; b) 2 bianche e una nera. $[73/325, 231/650]$
19. Da un'urna con 5 palline bianche e 20 nere, si estraggono 4 palline. Determinare la probabilità che siano a) tutte dello stesso colore; b) 2 bianche e 2 nere (6 casi). $[97/253, 38/253]$
20. Da un'urna con 10 palline bianche, 8 verdi e 5 nere, si estraggono 3 palline. Determinare la probabilità che siano a) tutte dello stesso colore; b) di colori diversi. $[186/1771, 400/1771]$
21. Da un'urna con 10 palline bianche, 20 rosse e 15 nere, si estraggono 3 palline. Determinare la probabilità che siano a) tutte dello stesso colore; b) di colori diversi (6 casi). $[343/2838, 100/473]$
22. Da un'urna con 10 palline bianche, 5 rosse, 7 verdi e 13 nere, si estraggono 4 palline. Determinare la probabilità che siano a) tutte dello stesso colore; b) di colori diversi (24 casi). $[193/10472, 390/187]$
23. Calcolare la probabilità che, scegliendo a caso un numero di telefono, esso abbia le ultime 4 cifre tutte diverse tra di loro. $[63/125]$
24. Disponiamo 4 carte in fila, una per ognuno dei quattro semi e tutte diverse fra loro. Determinare la probabilità che le carte rosse siano poste in posizione fra loro adiacente. (Ci sono 24 casi). $[1/2]$
25. In una scatola mettiamo delle monete secondo la seguente regola. Lanciamo una moneta in aria, se esce testa inseriamo 2 euro nella scatola, se esce croce mettiamo 1 euro. Determinare la probabilità che dopo tre lanci, la scatola contenga: a) 6 euro; b) 5 euro; c) 3 euro; d) 2 euro. $[1/8; 3/8; 1/8; 0]$
26. Determinare la probabilità che lanciando un dado ed estraendo una pallina da un'urna che ne contiene dodici numerate da 1 a 12, si ottengano in entrambi i casi due numeri primi.

Livello 3

27. Con riferimento all'esercizio 20. Determinare la probabilità che fra quelle estratte ve ne sia esattamente una bianca. $[780/1771]$
28. Con riferimento all'esercizio 21. Determinare la probabilità che quelle estratte siano di 2 soli colori. $[695/2838]$
29. Con riferimento all'esercizio 22. Determinare la probabilità che fra quelle estratte ve ne siano al massimo 2 rosse. $[3193/10472]$
30. Mescoliamo un mazzo di carte da scopa e in successione estraiamo 4 carte, con che probabilità le carte sono di diverso seme? $[500/27417]$
31. In un'urna vi sono 20 palline di due colori, bianche e rosse. Sapendo che la probabilità di estrarre senza restituzione due palline bianche è $\frac{1}{19}$, determinare quante sono quelle rosse. $[15]$
32. In un'urna vi sono 10 palline di due colori, bianche e rosse. Sapendo che la probabilità di estrarre senza restituzione due palline bianche è maggiore di $\frac{113}{300}$ della probabilità di estrarne due rosse con restituzione, determinare quante sono quelle bianche. $[7]$
33. Da un'urna contenente 30 palline di 3 colori diversi, bianche, verdi e rosse, ne estraiamo due con rigenerazione. Se la probabilità che siano la prima bianca e l'altra rossa è $\frac{2}{45}$ e che siano la prima bianca e l'altra verde è $\frac{17}{180}$, determinare quante palline di ogni colore vi sono nell'urna. $[5; 8; 17]$

Lavoriamo insieme

- Quattro carte sono disposte in fila una accanto all'altra con la faccia nascosta. Due delle carte sono di cuori, le altre di picche. Qual è la probabilità che due carte dello stesso seme siano messe una accanto all'altra? Chiamiamo C_1, C_2, P_1, P_2 le quattro carte. I modi diversi di disporli sono 24, poiché la prima carta può scegliersi fra 4, la seconda fra le 3 rimaste, quindi sono $4 \cdot 3 = 12$ possibilità, la terza fra le due rimaste e i casi sono diventati $12 \cdot 2 = 24$, l'ultima ha solo una possibilità. I casi favorevoli sono (indichiamo solo le carte di cuori e quelle di picche senza distinguerle, per il momento) CCPP, CPPC, PCCP, PPCC. In effetti è più facile considerare i casi sfavorevoli, che sono solo CPCP e PCPC. Il primo caso equivale ai seguenti $C_1P_1C_2P_2, C_1P_2C_2P_1, C_2P_1C_1P_2, C_2P_2C_1P_1$. Altri 4 casi per PCPC. Quindi 8 casi sono sfavorevoli e 16 favorevoli. La probabilità è $16/24 = 2/3$.
- Quanto vale la precedente probabilità se sappiamo che la seconda carta è una carta di cuori? Adesso i casi possibili diminuiscono perché la seconda carta non può essere di picche, quindi ci sono solo CCPP, PCCP, PCPC, ognuno 4 possibilità, totale 12 casi. I casi sfavorevoli adesso sono solo PCPC, cioè 4. La probabilità condizionata è perciò $4/12 = 1/3$.

Livello 2

- Mescoliamo 4 carte, 2 assi e 2 figura e le disponiamo in fila. Tenuto conto che uno degli assi si riconosce perché ha un segno e quindi lo possiamo mettere dove vogliamo, con che probabilità gli assi sono le prime due carte? $[1/3]$
- Massimo e Roberto fanno una scommessa. Massimo lancia due dadi e scommette che farà 7. Che probabilità ha di vincere? E se uno dei due dadi è truccato ed esce sempre il 3? $[1/6; 1/6]$
- Giovanni inserisce 5 palline bianche e 5 nere in un'urna, quindi scommette che estrae a caso tre palline in successione e queste sono tutte bianche. Che probabilità ha di vincere? Se una delle palline bianche ha un piccolo difetto e si riconosce al tatto, quanto diventa la probabilità? E se invece la pallina riconoscibile è una nera? $[1/12; 1/6; 5/42]$
- In una scatola immettiamo delle monete secondo la seguente regola. Lanciamo una moneta in aria, se esce testa inseriamo 1 euro nella scatola, se esce croce mettiamo 5 euro. Determinare la probabilità che dopo quattro lanci, la scatola contenga a) 16 euro sapendo che nel primo lancio è uscita testa; b) 12 euro sapendo che nei due lanci dispari la moneta non ha avuto lo stesso esito. $[1/8; 1/4]$
- Lanciamo due dadi regolari. Determinare la probabilità che si ottenga 7 dato che a) si ottiene un punteggio dispari; b) si ottiene un punteggio superiore a 6; c) il primo dado mostra un punteggio dispari; d) il secondo dado mostra un punteggio pari; e) il punteggio di uno dei due dadi è dispari; f) i dadi hanno lo stesso punteggio; g) i dadi hanno diversi punteggi. $[1/3; 2/7; 1/6; 1/6; 1/5]$
- Vengono lanciate tre monete bicolori, da una parte bianche e dall'altra nere. Sapendo che una almeno delle tre cade con la faccia nera rivolta verso l'alto, determinare la probabilità che tutte e tre abbiano rivolta la faccia nera verso l'alto. $[1/7]$
- Determinare la probabilità di ottenere esattamente 3 volte testa, lanciando 5 monete regolari, se le prime due monete sono truccate ed esce sempre testa? E se invece sappiamo che nei primi tre lanci si sono ottenute esattamente due teste? $[3/8; 1/2]$
- Il fornaio ha dimenticato di togliere 50 panini del giorno precedente, prima di inserirne 200 freschi. Qual è la probabilità che il primo cliente acquisti 3 panini tutti freschi? Qual è la probabilità che ve ne siano solo 2 freschi, dato che il primo panino è certamente fresco? $[\approx 51\%; \approx 32\%]$
- Da un mazzo formato da 3 carte nere e 4 bianche estraiamo due carte; con quale probabilità le due carte sono nere, dato che la prima lo è certamente? $[1/3]$

Livello 3

- Consideriamo il cosiddetto paradosso dei tre prigionieri. Due di tre prigionieri, indicati con A, B e C , sono stati condannati a morte. Qual è la probabilità che A non sia stato condannato a morte? Qual è la probabilità che A non sia stato condannato a morte dato che sa che B è stato condannato a morte? $[1/3; 1/2]$
- In un'urna c'è una pallina che sappiamo essere bianca o nera, ma non siamo certi quale sia il suo colore effettivo. Inseriamo nell'urna una pallina bianca. A questo punto estraiamo una pallina e questa è bianca, con quale probabilità la pallina rimasta è bianca? $\left[\frac{2}{3} \right]$

45. Vi sono 4 urne: la prima contiene 7 palline verdi e 4 rosse, la seconda 4 verdi e 2 rosse, la terza 2 verdi e 5 rosse, l'ultima 1 verde e 2 rosse. Estraendo da ciascuna urna una pallina qual è la probabilità che la seconda pallina estratta sia verde, dato che delle 4 palline estratte 3 sono verdi? Qual è la probabilità che 2 siano verdi, dato che la quarta estratta è verde? [97/99; 83/231]
46. Lanciamo tre dadi; con quale probabilità otteniamo il punteggio 12, dato che il primo dado è truccato e permette solo l'uscita dei punteggi 4 e 5 con uguale probabilità? [11/72]

Lavoriamo insieme

Lanciare un dado e una moneta sono due eventi evidentemente indipendenti, infatti il punteggio uscito sul dado non influenza il risultato della moneta e viceversa. Pertanto la probabilità di ottenere 6 e testa è dato dal prodotto delle singole probabilità, come affermato dal Teorema 7, cioè è $1/6 \cdot 1/2 = 1/12$.

Livello 1

47. Lanciamo due dadi, con che probabilità otteniamo su entrambi 3? E su entrambi lo stesso punteggio? [1/36; 1/6]
48. Martina va al cinema. Se la probabilità di arrivare prima che il film sia cominciato, nel qual caso non sarà ammessa in sala, è del 85%, mentre la probabilità che Ester la accompagni è del 90%. Con che probabilità Martina ed Ester riusciranno a vedere il film? [76,5%]
49. Karl punta un euro sul rosso su due roulette distinte, con che probabilità vince entrambe le volte? [1/4]
50. Nel gioco del *piatto*, si punta su una carta da un mazzo italiano da 40, se esce un punteggio maggiore di 5 si vince, diversamente si perde. Puntare su due carte consecutive sono eventi indipendenti? Puntare sulla prima carta uscita in due smazzate successive? Giustificare le risposte. [No; Sì]
51. Con riferimento al precedente quesito calcolare la probabilità che si vinca nel secondo caso entrambe le volte. [1/4]
52. La probabilità che Gianna stasera rientri prima delle 8 è del 75%, che rientri prima delle 8 e guardi il film in tv, del 60%. Con che probabilità Gianni guarderà il film in tv, a casa o fuori? [80%]

Livello 2

53. La probabilità che Marco domani vada a scuola è del 40%, dato che ha un forte raffreddore; la probabilità che non possa andare a scuola a causa di uno sciopero dei tram è del 75%, dato che un tale sciopero è previsto, ma non tutti vi parteciperanno. Con che probabilità Marco domani andrà a scuola? [10%]
54. Tenuto conto delle statistiche degli anni scorsi, il volo Catania Roma ha una probabilità del 72% di partire puntuale e del 20% di partire pieno. Con che probabilità il prossimo volo Catania Roma partirà in ritardo e con posti vuoti? [14,4%]
55. Per andare a trovare il suo amico Armando che abita in campagna, Matteo deve prendere l'autobus delle 8:00 che lo porta in stazione alle 8:20, da dove dovrà prendere il treno delle 8:25, che arriva al Paese della Cuccagna alle 9:30, da dove, alle 9:35 parte l'unico tram a cavalli che porta da Armando. Se la probabilità che Matteo arrivi in tempo alla fermata del bus è del 95%; che il bus arrivi in tempo per il treno è del 84% e che il treno arrivi in tempo per prendere il tram è del 78%. Con che probabilità Matteo andrà da Armando? [$\approx 62\%$]
56. La probabilità che Vanda al ristorante prenda un primo è del 60%, che prenda un secondo del 70%, che prenda il pasto completo con il dolce, del 50%. Con che probabilità prende il dolce? [Dati incoerenti]

Livello 3

57. Quanto deve valere massimo la probabilità che Vanda prenda un pasto completo, lasciando invariate le altre due probabilità, affinché il problema abbia soluzione? [42%]

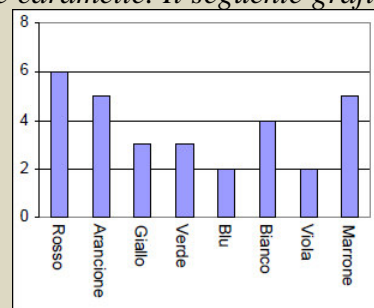
Enigmi matematici

- Consideriamo il seguente problema noto sotto il nome di paradosso dell'asso a sorpresa, enunciato dal matematico inglese Henry Whitehead nel 1939. Supponiamo di avere quattro carte, l'asso di picche, l'asso di cuori e due altre carte. Se si prendono due carte contemporaneamente, qual è la probabilità di avere entrambi gli assi? Indichiamo con AC l'asso di cuori, con AP quello di picche, con C1 e C2 le altre due carte. I casi possibili, tutti ugualmente possibili, sono i seguenti 6: (AC, AP), (AC, C1), (AC, C2), (AP, C1), (AP, C2), (C1, C2). Non abbiamo considerato gli altri sei casi che si ottengono dai precedenti scambiando di posto le carte, perché esse vengono prese contemporaneamente. Vi è un solo caso favorevole: (AP, AC). Quindi la probabilità cercata è $\frac{1}{6}$.
- Supponiamo ora che per qualche motivo uno degli assi, non sappiamo però quale, sia riconoscibile e venga perciò pescato certamente. Qual è allora la probabilità che anche la seconda carta estratta sia un asso?. Il caso favorevole è sempre uno, mentre quelli possibili sono diventati 5, dato che non potrà più capitare il caso (C1, C2); quindi la probabilità è adesso $\frac{1}{5}$.
- Adesso abbiamo il fatto paradossale. Supponiamo che la carta riconoscibile sia non un asso qualsiasi ma quello di cuori; la probabilità che sia estratto anche l'altro asso è variata? Intuitivamente pensiamo di no, invece i casi possibili sono divenuti 3, cioè i seguenti: (AC, C1), (AC, C2), (AC, AP). Quindi la probabilità adesso vale $\frac{1}{3}$.

Per la prova Invalsi

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato ai quesiti OCSE-PISA. *La mamma permette a Roberto di prendere una caramella da un sacchetto. Roberto non può vedere le caramelle. Il seguente grafico mostra il nu-*



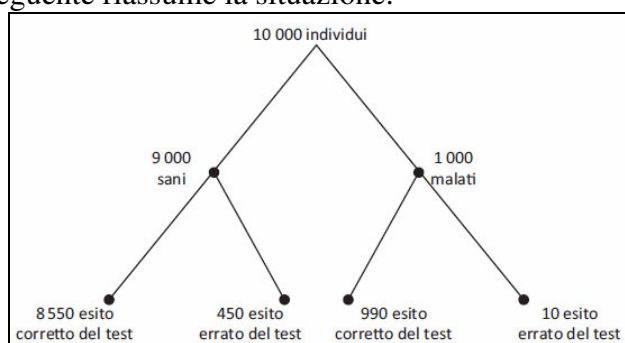
mero di caramelle di ciascun colore che ci sono nel sacchetto.

Qual è la probabilità che Roberto prenda una caramella di colore rosso? A) 10% B) 20% C) 25% D) 50%

Anche se nel grafico non sono segnati i valori dispari, è ovvio che i numeri rappresentati devono essere interi, (non possono esserci 3,15 caramelle!), pertanto ci sono 5 caramelle Arancione e 5 Marrone, 3 caramelle Gialle e 3 Verdi. In totale quindi vi sono $6 + 2 \cdot 5 + 4 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 30$ caramelle, quelle rosse sono 6, quindi la probabilità richiesta è $\frac{6}{30} = \frac{1}{5} = 20\%$. La risposta corretta è la B.

- (OCSE-PISA) In una pizzeria, puoi prendere la pizza normale con due ingredienti base: formaggio e pomodoro. Puoi chiedere anche una pizza a tua scelta con l'aggiunta di altri ingredienti scegliendo tra quattro diversi ingredienti: olive, prosciutto, funghi e salame. Riccardo vuole ordinare una pizza con altri due ingredienti diversi. Tra quante diverse combinazioni può scegliere Riccardo? [6]
- (OCSE-PISA) È stato trasmesso un documentario sui terremoti e sulla frequenza con cui si verificano. Tale documentario comprendeva un dibattito sulla prevedibilità dei terremoti. Un geologo ha dichiarato: «*Nei prossimi venti anni, la probabilità che un terremoto si verifichi a Zedopoli è due su tre*». Quale delle seguenti affermazioni esprime meglio il significato di ciò che ha detto il geologo? A) Dato che $\frac{2}{3} \times 20 = 13,3$, tra il 13° e il 14° anno da oggi ci sarà un terremoto a Zedopoli. B) $\frac{2}{3}$ è maggiore di $\frac{1}{2}$, pertanto ci sarà senza dubbio un terremoto a Zedopoli durante i prossimi 20 anni. C) La probabilità che a Zedopoli vi sia un terremoto durante i prossimi 20 anni è maggiore della probabilità che non

- vi siano terremoti. D) È impossibile dire che cosa accadrà, perché nessuno può essere certo di quando si verificherà un terremoto. [C]
3. (Invalsi 2003) Se lanci un normale dado numerato da 1 a 6, ciascun numero ha probabilità $1/6$ di uscire. In 4 lanci successivi sono usciti i numeri 2, 3, 4 e 3. Se lanci il dado una quinta volta, qual è la probabilità che esca 3? A) Maggiore di $1/6$, perché nei 4 tiri precedenti il punteggio 3 è uscito 2 volte su 4 B) $1/6$, perché il dado non si ricorda degli eventi passati C) Minore di $1/6$, perché il punteggio 3 è già uscito e ora è più probabile che escano gli altri D) $1/2$, come indica il calcolo dei casi favorevoli (due) sul totale dei casi (quattro) E) Le informazioni date non consentono di rispondere [B]
4. (Invalsi 2004) Se lanci una normale moneta, Testa e Croce hanno entrambe probabilità $1/2$ di uscire. In 4 lanci successivi, sono usciti Testa, Croce, Testa, Testa. Se lanci la moneta una quinta volta, qual è la probabilità che esca Testa? A) Maggiore di $1/2$ B) Uguale a $1/2$ C) Minore di $1/2$ D) Le informazioni date non consentono di rispondere. [B]
5. (Invalsi 2004) Su 3600 auto revisionate 720 hanno le gomme usurate. Qual è la probabilità di trovare tra le auto revisionate una con le gomme usurate? A) $1/3600$ B) $1/720$ C) $1/5$ D) $5/2$ [C]
6. (Invalsi 2005) Un'urna contiene 20 gettoni numerati da 1 a 20. Si estrae un gettone: è un numero pari. Senza reinserire il gettone, se ne estrae un secondo. Qual è la probabilità di estrarre un numero dispari? A) $9/10$ B) $10/19$ C) $9/19$ D) $9/20$ [B]
7. (Invalsi 2007) È lanciato un dado non truccato a forma di ottaedro (solido regolare a otto facce), le cui facce sono numerate da 1 a 8. Qual è la probabilità che esca una faccia il cui numero è multiplo di 3? A) $1/8$ B) $1/4$ C) $3/8$ D) $1/2$ [B]
8. (Invalsi 2007) Un mazzo di carte da poker è composto da 52 pezzi, 12 dei quali sono figure. Pescando a caso una carta, qual è la probabilità che si verifichi l'evento: *esce una figura o un asso*? [C]
A) $1/13$ B) $3/13$ C) $4/13$ D) $6/13$
9. (Invalsi 2007) Un'urna contiene 50 gettoni colorati. 20 sono di colore verde, 18 di colore rosso, 10 di colore blu. Qual è la probabilità di pescare un gettone che non sia né verde, né rosso e né blu? [D]
A) $16/25$ B) $3/5$ C) $9/25$ D) $1/25$
10. (Invalsi 2007) La probabilità di estrarre una pallina rossa da un'urna contenente 100 palline è $3/50$. Quante sono le palline rosse contenute nell'urna? A) 3 B) 6 C) 12 D) 18 [B]
11. (Invalsi 2011) La corriera passa alle 6:30 alla fermata dove sale Giorgio. Nel 40% dei casi è in orario, nel 50% dei casi ha un ritardo di 5 minuti e nei rimanenti casi ha un ritardo di 10 minuti. Se Giorgio arriva alla fermata alle 6:34, che probabilità ha di prendere la corriera? [D]
A) 10% B) 40% C) 50% D) 60%
12. (Invalsi 2012) Si sa che in una popolazione di 10000 individui il 10% è affetto da una malattia, mentre il 90% è sano. Il test che diagnostica la presenza della malattia è affidabile solo parzialmente: nel 5% dei casi rileva la malattia su un individuo sano e nell'1% dei casi non rileva la malattia su un individuo malato. Il diagramma seguente riassume la situazione:



a) Utilizzando i dati del diagramma ad albero, completa la seguente tabella.

	Esito corretto del test	Esito errato del test	Totale
Sani		450	
Malati			
Totale	9540		10000

b) Qual è la probabilità che l'esito del test sia corretto per una persona scelta a caso da quella popolazione? A) 99,0% B) 97,0% C) 95,4% D) 85,5% c) Qual è la probabilità che un individuo, preso a caso

tra tutti quelli che hanno avuto un esito corretto al test, sia sano? Scrivi il risultato in percentuale con una cifra dopo la virgola. [a) 8550; 9000; 990; 10; 1000; 460; b) C); c) 89,6 %]

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato nei quesiti Invalsi del 2013. *Una fabbrica utilizza due diversi macchinari, M1 e M2, per produrre tondini. M1 ha un indice di qualità uguale a 0,96 (cioè la probabilità che un tondino che esce da M1 non sia difettoso è del 96%), mentre M2 ha indice di qualità uguale a 0,98.*

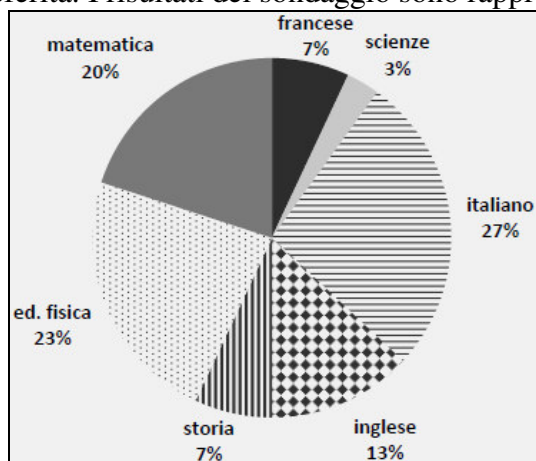
a) *La probabilità che un tondino esca da M2 difettoso è:* A) 0,02 B) 0,04 C) 0,96 D) 0,98

Dal significato associato al termine *indice di qualità*, la probabilità che il tondino che esca da M2 non sia difettoso è 0,98, quindi che lo sia è $1 - 0,98 = 0,02$. La risposta corretta è A.

b) *Per la realizzazione di tondini metallici, M1 e M2 lavorano in serie, cioè ogni tondino viene lavorato prima da M1 e poi da M2. Supponiamo che gli eventi “M1 produce un tondino non difettoso” e “M2 produce un tondino non difettoso” siano fra loro indipendenti; allora la probabilità che un tondino non sia difettoso alla fine del ciclo di produzione (cioè dopo essere stato lavorato sia da M1 che da M2) è:* A) 98% B) 94,08% C) 6% D) 1,94%.

Poiché gli eventi sono indipendenti, la probabilità dell'evento intersezione è uguale al prodotto delle probabilità dei singoli eventi, quindi in questo caso $0,96 \cdot 0,98 = 0,9408 = 94,08\%$. La risposta corretta è B.

13. (Invalsi 2013) In una scuola frequentata da 800 studenti si sceglie un campione di 300 studenti per un sondaggio sulla materia preferita. I risultati del sondaggio sono rappresentati nel seguente diagramma.



- a) Qual è il numero di studenti del campione che non hanno indicato come materia preferita la matematica? b) Qual è la probabilità che uno studente, scelto a caso dal campione, abbia indicato come materia preferita la matematica? A) $1/20$ B) $1/15$ C) $1/7$ D) $1/5$ [640; D]
14. (Invalsi 2014) È stato effettuato un sondaggio su un campione di 1500 donne di età compresa tra i 25 e i 55 anni per conoscere la loro opinione su una rivista mensile dedicata alla salute. Si sono ottenuti i seguenti risultati:

	Occupate	Disoccupate
Giudizio positivo	450	276
Giudizio negativo	367	407

- a) Quante sono le donne che hanno espresso un giudizio positivo? b) Quante sono le donne disoccupate intervistate? c) Scegliendo a caso una delle donne intervistate, qual è la probabilità che abbia espresso un giudizio negativo? d) Scegliendo a caso una delle donne intervistate tra quelle che hanno espresso un giudizio positivo, qual è la probabilità che sia una donna occupata? [726; 683; 0,516; $\approx 0,62$]
15. (Invalsi 2014) “Prato fiorito” è un gioco per computer che si gioca su una scacchiera. Cliccando sui riquadri della scacchiera, a volte si può scoprire un fiore nascosto. Per esempio, nella scacchiera di 9×9



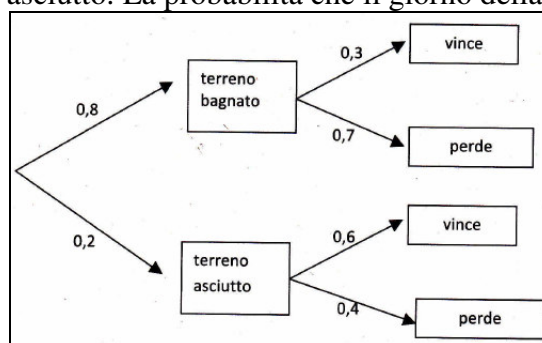
riquadri rappresentata in figura sono nascosti 10 fiori.

- a) Qual è la probabilità di scoprire al primo tentativo un fiore nella scacchiera rappresentata in figura? b) È possibile personalizzare il gioco impostando le dimensioni della scacchiera (cioè il numero di righe e di colonne) e il numero di fiori nascosti. Se si gioca con una scacchiera di 12×20 riquadri, quale deve essere il numero dei fiori nascosti perché la probabilità di scoprire un fiore al primo tentativo sia $1/8$? [10/81; 30]
16. (Invalsi 2015) Da un mazzo di 52 carte da gioco (composto da 13 carte per ognuno dei semi: cuori, quadri, fiori, picche) sono stati tolti i 4 assi. a) Si estrae una carta a caso. Qual è la probabilità che sia di cuori? b) Da un mazzo di 52 carte uguale al precedente sono state tolte alcune carte di fiori. Dopo questa operazione la probabilità di estrarre, a caso, una carta di fiori è $6/45$. Quante carte di fiori sono state tolte? [1/4; 7]
17. (Invalsi 2015) Nel foglietto illustrativo contenuto nella confezione di un farmaco, alla voce “Effetti collaterali” si legge che: “il 2% dei pazienti trattati con il farmaco ha accusato vertigini; il 7% dei pazienti trattati con il farmaco ha avuto bruciori di stomaco”. I due tipi di effetti collaterali sono indipendenti l’uno dall’altro. a) Qual è la probabilità che un paziente che ha assunto il farmaco non abbia bruciori di stomaco? b) Qual è la probabilità che un paziente che ha assunto il farmaco manifesti entrambi gli effetti collaterali? A) 9% B) 0,14% C) 14% D) 0,9% [93% ; B]
18. (Invalsi 2015) Un’urna contiene 40 palline identiche tranne che per il colore: 23 sono rosse e 17 blu. Si estraiono contemporaneamente due palline dall’urna. Entrambe sono blu. Senza reintrodurre le due palline estratte, si estrae dall’urna una terza pallina. Qual è la probabilità che anche la terza pallina sia blu? [5/16]
19. (Invalsi 2015) Si lancia 300 volte un dado non truccato a 6 facce. Quante volte ci si aspetta di ottenere un numero maggiore di 4? A) circa 100 volte B) circa 50 volte C) circa 30 volte D) circa 150 volte [A]
20. (Invalsi 2017) La seguente tabella indica di quanto è aumentata ogni anno in percentuale la produzione di un’azienda rispetto all’anno precedente negli anni dal 2010 al 2015.

Anno	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Aumento percentuale annuo	+2%	+5%	+12%	+8%	+4%	+8%

Basandoti sui dati della tabella indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è, vera (V) o falsa (F)

- A) Nel periodo 2010 - 2015 il massimo di produzione si è avuto nel 2015; B) Dal 2014 al 2015 la produzione è raddoppiata; C) Dal 2012 al 2013 la produzione è diminuita [V; F; F]
21. (Invalsi 2017) In una gara motociclistica la moto M ha probabilità di vincere la gara: 0,3 se il terreno è bagnato; 0,6 se il terreno è asciutto. La probabilità che il giorno della gara il terreno sia asciutto è 0,2.



Il diagramma può aiutare a determinare, per esempio, la probabilità che il terreno sia asciutto e che la moto M perda la gara. Essa è $0,2 \cdot 0,4 = 0,08$. Qual è la probabilità che la moto M vinca la gara? [0,36]

22. (Invalsi 2017) Due urne A e B contengono ciascuna tre bigliettini numerati con i numeri 1, 2 e 3. a) Si estrae un bigliettino dall’urna A e poi un bigliettino dall’urna B. Completa l’elenco di tutti i possibili esiti che si possono ottenere: (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), b) Si estrae un bigliettino dall’urna A e poi uno dall’urna B e si esegue la somma dei due numeri estratti. Fra tutte le possibili somme che si possono ottenere, qual è la più probabile? [(2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3); 4]

23. (Invalsi 2017) Una fabbrica utilizza due diverse macchine M1 e M2 che lavorano indipendentemente l'una dall'altra. Ciascuna delle due macchine produce chiavette USB da 16 GB e da 32 GB nelle percentuali descritte dalla seguente tabella.

	chiavette USB da 16 GB	chiavette USB da 32 GB	Totale
M ₁	18%	42%	60%
M ₂	22%	18%	40%
Totale	40%	60%	100%

- a) Qual è la probabilità di estrarre dalla produzione della fabbrica una chiavetta da 16 GB prodotta da M₁? B) Qual è la probabilità che una chiavetta USB estratta dalla produzione della fabbrica sia da 16 GB? [18%; 40%]

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi

- In un mazzo di 52 carte da poker si sono smarrite alcune carte. In tal modo la probabilità di estrarre una carta rossa non è cambiata, mentre la probabilità di estrarre una figura nera è diminuita di $\frac{17}{598}$.
Quante carte si sono smarrite e quante di esse sono nere ma non figure? *Suggerimento*: si ottiene un sistema indeterminato, ma una sola soluzione è accettabile per il problema. [6; 1]
- Dato l'evento estrazione di un numero scritto in base 2, ma di valore in base decimale compreso tra 10 e 20, calcolare la probabilità dei seguenti eventi: a) il numero estratto abbia più cifre 1 che cifre 0; b) il numero estratto abbia esattamente 3 cifre 1; c) il numero estratto abbia al più 4 cifre 1. $\left[\frac{5}{11}; \frac{4}{11}; 1\right]$
- Un punto è scelto a caso all'interno di un quadrato. Qual è la probabilità che il triangolo formato dal punto e dagli estremi di un lato del quadrato sia un triangolo acutangolo? $[1 - \pi/8]$

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.

AHSME = Annual High School Mathematics Examination

OMI = Olimpiadi della Matematica italiane

MT = Mathematics Teacher, rivista della NCTM

Lavoriamo insieme

Il seguente quesito è comparso nel numero di Gennaio 1992 del Mathematics Teacher, rivista edita dal National Council of Teachers of Mathematics, associazione americana.

Alfa, Beta e Gamma sono tre cavalli che hanno la stessa possibilità di vincere. Se i tre fanno una corsa a cui partecipano solo essi, con che probabilità arriveranno rispettando l'ordine alfabetico?

Si tratta di considerare tutti i modi di scrivere i 3 nomi in ordine, che sono 6: ABG, AGB, BAG, BGA, GAB e GBA. Di questi ovviamente solo il primo è quello richiesto. Quindi la probabilità è 1/6.

- (AHSME1973) Ci sono due carte: una rossa su entrambi i lati, l'altra rossa su un lato e verde sull'altro. Le due carte sono indistinguibili al tatto. Si sceglie a caso una delle due carte e si posa sul tavolo. Se la faccia superiore della carta è rossa, qual è la probabilità che anche la faccia inferiore sia rossa? $[2/3]$
- (AHSME1974) Un dado è lanciato per sei volte, determinare la probabilità di ottenere il punteggio cinque almeno cinque volte. $[31/46656]$
- (AHSME1976) Si consideri l'insieme dei punti che, nel piano cartesiano ortogonale, hanno entrambe le coordinate intere che in valore assoluto non superano 4. Se ne scelga uno a caso, qual è la probabilità che il punto scelto disti dall'origine non più di due unità? *Suggerimento*: si consideri la circonferenza con centro nell'origine e raggio 2 unità. $[\pi/16]$

4. (AHSME1983) In un'urna si immettono tre sfere numerate da 1 a 3. Si estraggono tre sfere in successione, rimettendo nell'urna ogni volta la sfera estratta. Se la somma dei numeri sulle sfere estratte è 6, con che probabilità abbiamo estratto sempre la sfera numero 2? [1/27]
5. (AHSME1983) Sapendo che $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, determinare minimo e massimo valore che può assumere $P(A \cup B)$. [1/12; 7/12]
6. (AHSME1985) Da ogni classe formata da ragazzi e ragazze viene prescelto uno studente come rappresentante. Ogni studente ha la stessa probabilità di essere scelto, tenuto conto però del loro numero la probabilità che sia scelto un maschio è $\frac{2}{3}$ di quella che venga scelta una femmina. Determinare il rapporto fra il numero dei maschi e il numero totale degli studenti. [2/5]
7. (OMI1991) Abbiamo due dadi uguali, ciascuno ha una faccia rossa, due facce gialle e tre facce blu. Qual è la probabilità che lanciandoli insieme si ottengano due facce dello stesso colore? [7/18]
8. (MT1993) 4 lettere sono scelte a caso dalla parola MATHEMATICS. Con che probabilità con esse si può formare la parola MATH? (Ovviamente non importa l'ordine in cui sono scelte) [4/165]
9. (MT1994) Due dadi vengono lanciati e i punteggi che escono sono diversi fra loro. Con che probabilità uno dei due mostra un 6? [1/3]

Lavoriamo insieme

Il seguente quesito è comparso nel numero di Dicembre 1995 del Mathematics Teacher.

Tre dadi sono lanciati. Qual è la probabilità che i dadi non abbiano tutti lo stesso punteggio?

I casi possibili sono ovviamente $6^3 = 216$. Piuttosto che calcolare i casi favorevoli, calcoliamo quelli “sfavorevoli”, ossia in quanti modi tutti e tre i dadi mostrano lo stesso punteggio. Ovviamente sono 6. Quindi i casi favorevoli sono $216 - 6 = 210$. Infine la probabilità cercata è $210/216 = 35/36 \approx 97,2\%$.

10. (MT1995) Tre dadi sono lanciati. Qual è la probabilità che abbiano tutti diverso punteggio? [5/9]
11. (MT1995) Anna dice che c'è il 55% di probabilità che vada al cinema domani se piove a mezzogiorno e il 30% se non piove. La probabilità di pioggia per domani a mezzogiorno è del 40%. Con che probabilità Anna andrà al cinema domani? [40%]
12. (MT1997) Se due palline sono tolte a caso da un sacchetto che ne contiene di bianche e di nere, la probabilità che siano entrambe bianche è $1/3$. Se invece ne togliamo tre, la probabilità che siano tutte bianche diventa $1/6$. Quante palline di ogni colore vi sono nel sacchetto? [6 bianche e 4 nere]
13. (OMI2003) Quattro ragazzi vogliono telefonare tutti contemporaneamente alle rispettive ragazze. Ogni cellulare può funzionare su quattro frequenze distinte. Se due cellulari si attivano sulla stessa frequenza la comunicazione cade. Se ogni ragazzo non sa che frequenza scelgono gli altri tre, qual è la probabilità che tutti e quattro riescano a parlare con le loro ragazze? [A]
A) $3/32$ B) $3/64$ C) $1/256$ D) $1/16$ E) $9/128$
14. (OMI2012) Da un mazzo di 40 carte se ne estrae una, che subito viene reinserita nel mazzo; il mazzo viene poi mescolato, e successivamente si estrae una nuova carta. Qual è la probabilità che la nuova carta sia la stessa carta estratta in precedenza? A) $1/1600$ B) $1/40$ C) $1/80$ D) $1/20$ E) $1/(40 \cdot 39)$ [B]
15. (OMI2013) Leo lancia 7 volte una moneta (non truccata) ottenendo due volte testa e cinque volte croce. Se la lancia ancora una volta, con quale probabilità otterrà testa? [E]
A) $1/8$ B) $1/7$ C) $1 - 1/27$ D) $35/27$ E) $1/2$
16. (OMI2013) In un'urna ci sono 8 palline blu e 7 palline rosse. Mirco estrae due palline, una dopo l'altra (senza rimettere nell'urna la prima pallina estratta, prima di estrarre la seconda). Qual è la probabilità che le due palline estratte siano dello stesso colore? [C]
A) $1/4$ B) $1/2$ C) $7/15$ D) $8/15$ E) nessuna delle precedenti
17. (OMI2014) Agata, Nina e Leo decidono che al “Via!” ciascuno di loro dirà (a caso) BIM, oppure BUM, oppure BAM. Qual è la probabilità che dicano tutti e tre la stessa cosa? A) Meno di $1/12$ B) tra $1/12$ e $1/10$ C) tra $1/10$ e $1/8$ D) tra $1/8$ e $1/6$ E) più di $1/6$ [C]

Questions in English

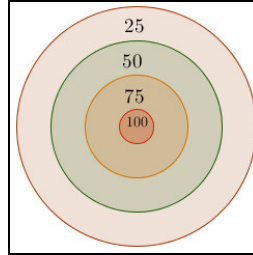
Working together

This question was assigned at AHSME in 1996.

Four distinct points, A, B, C, and D, are to be selected from 1996 points evenly spaced around a circle. All quadruples are equally likely to be chosen. What is the probability that the chord AB intersects the chord CD?

Because all quadruples are equally likely, we need only examine the six clockwise orderings of the points: ACBD, ADBC, ABCD, ADCB, ABDC, and ACDB. Only the first two of these equally likely orderings satisfy the intersection condition, so the probability is $2/6 = 1/3$.

18. (MT1993) The dart board has a 7" radius with each region of the dart board 2" wide., except the bull's eye³, which has a 1" radius. If a dart is thrown at random and is guaranteed to hit the board, what is the



probability that it will hit the ring worth 50 points?

[16/49]

19. (MT1993) using the dart board in previous problem, if three darts are thrown randomly and guaranteed to hit the target, what is the probability of getting a total score of 150? [24256/117649]
20. (MT1994) A sack holds three box lunches: one taco, one gyro and one sushi. Two are randomly drawn. Find the probability of getting the gyro. [2/3]
21. (MT1995) 20 unique pizzas are randomly delivered to 20 people who ordered them. What is the probability that exactly 19 people will receive the correct pizza? [0]
22. (AHSME1997) Two six-sided dice are fair⁴ in the sense that each face is equally likely to turn up. However, one of the dice has the 4 replaced by 3 and the other die has the 3 replaced by 4. When these dice are rolled, what is the probability that the sum is an odd⁵ number? [5/9]
23. (AHSME1999) Six points on a circle are given. Four of the chords joining pairs of the six points are selected at random. What is the probability that the four chords are the sides of a convex quadrilateral? [1/91]

Working together

This question was assigned at AHSME in 1996.

A fair standard six-sided die is tossed three times. Given that the sum of the first two tosses equals the third, what is the probability that at least one "2" is tossed?

There are 15 ways in which the third outcome is the sum of the first two outcomes.

(1,1,2) (2,1,3) (3, 1, 4) (4, 1, 5) (5, 1, 6) (1,2,3) (2,2,4) (3,2,5) (4,2,6) (1, 3, 4) (2,3,5) (3, 3, 6) (1, 4, 5) (2,4,6) (1, 5, 6)

Since the three tosses are independent, all of the 15 possible outcomes are equally likely. At least one "2" appears in exactly eight of these outcomes, so the required probability is $8/15$.

24. (MT1996) In a class of 37 students, what is the probability of the occurrence of four or more having the same month of birth? [1]
25. (MT1996) A box contains five distinct rods measuring 15, 30, 40, 60, and 90 cm in length. Three of these rods are randomly chosen. What is the probability that they can be arranged to form a triangle? [3/10]
26. (MT1996) Three coins were tossed. Given that at least one coin landed heads up, determine the probability that all three coins landed heads up. [1/7]
27. (MT1997) A number is selected at random from the set of consecutive integers {53, 54, ..., 199}. Which of these events is most probable? The number selected A) has digits that sum to a multiple of 5; B) is a multiple of 5; C) contains at least one digit. [C]

³ Il centro del bersaglio, letteralmente l'occhio del toro

⁴ Onesti, cioè non truccati

⁵ dispari

Working together

This question was assigned at AHSME in 1995.

If a , b and c are three (not necessarily different) numbers chosen randomly and with replacement from the set $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, the probability that $ab + c$ is even is?

The quantity $ab + c$ will be even if ab and c are both even or both odd. Furthermore, ab will be odd only when both a and b are odd, since there are 3 even numbers in the set, and the events are independent, the

probability of ab being odd is $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$.

Thus the probability of ab being even is $1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$.

The probability of c being odd is $\frac{3}{5}$ and of being even is $\frac{2}{5}$.

Hence, the required probability is $\frac{9}{25} \cdot \frac{3}{5} + \frac{16}{25} \cdot \frac{2}{5} = \frac{27+32}{125} = \frac{59}{125}$.

28. (MT1997) Three vertices of a regular hexagon are randomly selected. What is the probability that an isosceles triangle would be formed by connecting these three vertices? [2/5]
29. (MT1997) After the ace of spade⁶ is removed from an ordinary deck of cards, the cards are shuffled and the top card is discarded without its face value known. What is the probability that the next card is an ace? [1/17]

⁶ picche

Attività di recupero

Concetto di evento aleatorio. Probabilità secondo Laplace di eventi semplici

Fase 1: Osserva

- Consideriamo il fenomeno estrazione di un numero a caso dall'insieme $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, fra tutti gli eventi relativi a questo fenomeno consideriamo quello che si riferisce al fatto che il numero estratto sia un quadrato perfetto. Quali sono i quadrati perfetti contenuti in A ? Sono gli elementi dell'insieme $B = \{1; 4; 9\}$. Possiamo allora dire che il numero dei casi favorevoli all'evento considerato è 3, mentre quello dei casi possibili è 9. Quindi la probabilità del nostro evento è $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.
- Lasciamo inalterato il precedente fenomeno ma variamo l'evento. Stavolta vogliamo stabilire la probabilità che il numero estratto sia un numero pari. Sia cioè un numero dell'insieme $C = \{2; 4; 6; 8\}$ che ha 4 elementi. La probabilità cercata è perciò $\frac{4}{9}$.
- Adesso l'evento consiste nella ricerca della probabilità che il numero estratto abbia una cifra. Naturalmente l'insieme dei casi favorevoli coincide con A , quindi la probabilità è $\frac{9}{9} = 1$. Abbiamo a che fare con un evento certo.
- Vogliamo sapere con quale probabilità estraiamo numeri maggiori di 10. L'insieme dei casi possibili è evidentemente vuoto. L'evento è probabilisticamente impossibile.
- In un'urna immettiamo 100 palline indistinguibili al tatto, così suddivise per colore, 50 bianche, 20 nere e 30 rosse. Estraiamo una pallina a caso con quale probabilità essa è di colore bianco? Dato che vi sono 50 palline su 100 a essere bianche, la probabilità cercata è $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.
- Allo stesso modo che in precedenza si calcolano facilmente le probabilità che la pallina estratta sia nera, $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$, o rossa, $\frac{30}{100} = \frac{3}{10}$. Naturalmente la somma delle tre probabilità vale la certezza, cioè 1.
- In un'urna vi sono alcune palline bianche, 20 rosse e 30 verdi, se la probabilità di estrarre una pallina bianca è $\frac{2}{7}$, quante sono le palline bianche? Dire che la probabilità di estrarre una pallina bianca è $\frac{2}{7}$, equivale a dire che tutte le palline nell'urna le suddividiamo in 7 parti uguali e le bianche rappresentano 2 di questi gruppi, quindi le altre palline, che sono $20 + 30 = 50$, rappresentano gli altri 5 gruppi. Ma allora ogni gruppo contiene 10 palline e le bianche sono 20. In effetti la probabilità di estrarre una bianca è $\frac{20}{20 + 20 + 30} = \frac{20}{70} = \frac{2}{7}$.

Fase 2: Completa ...

- Consideriamo l'insieme $A = \{10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19\}$, estraiamo da esso un numero a caso. Vogliamo sapere con quale probabilità il numero estratto è dispari. L'insieme dei casi favorevoli è $B = \{11; 13; \dots\dots\dots\}$, pertanto la probabilità cercata è $\frac{\dots\dots\dots}{10}$.
- Stavolta vogliamo calcolare la probabilità che il numero estratto sia primo. I numeri primi in A sono quelli dell'insieme $C = \{11; 13; \dots\dots\dots\}$, la probabilità è quindi $\dots\dots\dots$.
- Con quale probabilità il numero estratto è divisibile per 5? L'insieme su cui lavorare è $\{\dots\dots\dots\}$ la probabilità è $\dots\dots\dots$.
- Qual è la probabilità di estrarre un numero il cui quadrato sia compreso tra 120 e 150? Il primo numero su cui soffermarci è 11, poiché $11^2 = \dots\dots\dots$, l'ultimo è invece $\dots\dots\dots$ pertanto i casi favorevoli al nostro evento sono $\dots\dots\dots$ la probabilità è $\dots\dots\dots$.
- Infine, con quale probabilità estraiamo numeri che hanno entrambe le cifre pari? L'insieme dei casi

favorevoli è perciò la probabilità è abbiamo a che fare con un evento

- In un'urna abbiamo immesso 40 palline bianche, 25 nere e 35 rosse. Estraiamo una pallina a caso, con quale probabilità essa sarà bianca? Dato che tutte le palline sono la probabilità cercata è $\frac{40}{\dots}$.
- Calcola tu le probabilità che la pallina estratta sia nera,, o rossa,
- Lanciamo un dado regolare a 12 facce, con quale probabilità verrà fuori un punteggio rappresentato da un numero primo? I numeri primi compresi nei primi 12 sono {2, 3,}, cioè un totale di, quindi la probabilità è
- Da un mazzo di carte da gioco italiane, quelli a 40 carte con 4 semi e 3 figure per seme, estraiamo a caso una carta, con quale probabilità non è una figura? Dato che le figure sono un totale di, le non figure sono le rimanenti, pertanto la probabilità è
- In un'urna vi sono alcune palline rosse insieme a 15 palline nere e 25 verdi. Se la probabilità di estrarre una pallina verde è $\frac{5}{8}$, quante sono tutte le palline? Basta scrivere $\frac{5}{8}$ come una frazione equivalente in cui il numeratore è 25, cioè $\frac{5}{8} = \frac{25}{\dots}$, ciò permette di dire che tutte le palline sono Vi è però un problema, infatti $15 + 25 = 40$, ciò vuol dire che nell'urna vi sono un totale di ... palline rosse, il che contraddice quanto abbiamo detto all'inizio. Il problema non è ben posto.

Fase 3: Prova!

1. Dato l'insieme $A = \{100; 101; 110; 111; 1000; 1001; 1010; 1100; 1110; 1111\}$. Estraiamo un numero a caso, con quale probabilità contiene più 1 che zero? Con quale probabilità il numero estratto contiene un numero dispari di 1? [1/2; 2/5]
2. Consideriamo l'insieme $B = \{1; 2; 4; 8; 9; 12; 16; 25; 36\}$, con quale probabilità un numero estratto a caso da B è un quadrato perfetto? Con quale probabilità è una potenza di 2? [2/3; 5/9]
3. Estraiamo un numero a caso dall'insieme $C = \{12; 123; 131; 132; 124; 125; 152\}$, con quale probabilità contiene più cifre dispari che cifre pari? Con quale più cifre pari che cifre dispari? [5/7; 1/7]
4. Con quale probabilità estraendo un numero dall'insieme C precedente questo ha cifre la cui somma è un numero pari? Il cui prodotto è dispari? [4/7; 1/7]
5. Dall'insieme $D = \{6; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32\}$ estraiamo un numero a caso, con quale probabilità è divisibile per 4? Con quale probabilità è divisibile per 6? [7/8; 3/8]
6. Con quale probabilità un numero estratto dall'insieme D precedente ha più di 6 divisori? Meno di 4 divisori? [1/8; 0]
7. In un'urna vi sono 25 palline bianche, 40 rosse e 20 nere. Calcolare la probabilità di estrarre una pallina di un dato colore nei tre casi. [5/17; 8/17; 4/17]
8. In un'urna vi sono 20 palline bianche, 25 nere, 30 rosse e 35 verdi. Determinare la probabilità di estrarre una pallina di un dato colore nei 4 casi possibili. [2/11; 5/22; 3/11; 7/22]
9. In un'urna vi sono alcune palline bianche, 24 rosse e 40 verdi, se la probabilità di estrarre una pallina bianca è $\frac{13}{17}$, quante sono le palline bianche? [208]
10. In un'urna vi sono alcune palline bianche, 25 rosse e 10 verdi, se la probabilità di estrarre una pallina rossa è $\frac{5}{12}$, quante sono le palline bianche? [25]
11. In un'urna vi sono alcune palline bianche, 30 rosse e 20 verdi, se la probabilità di estrarre una pallina bianca è $\frac{4}{7}$, quante sono le palline bianche? [Dati incoerenti]
12. In un'urna vi sono alcune palline bianche, 40 rosse e 25 verdi, se la probabilità di non estrarre una pallina verde è $\frac{8}{13}$, quante sono le palline bianche? [0]
13. Da un mazzo di carte italiane da 40 estraiamo una carta, con quale probabilità ha un valore compreso tra 2 e 5? Con quale probabilità ha un valore compreso tra 3 e 6 ed è di bastoni? [2/5; 1/10]
14. Da un mazzo di carte italiane da 40 estraiamo una carta, con quale probabilità non è una figura? Con

quale probabilità non è una figura di denari?

[7/10; 37/40]

15. Alla roulette con quale probabilità esce un numero nero dispari della prima colonna?

[2/37]

Unione di eventi elementari

Fase 1: Osserva

- Consideriamo l'insieme $A = \{10; 11; 12; 13; 14; 15; 16\}$ estraiamo da A un numero a caso. Consideriamo i seguenti due eventi elementari: il numero estratto sia pari, il numero estratto sia divisibile per 3. L'insieme dei casi favorevoli al primo evento è $\{12; 14; 16\}$, l'insieme dei casi favorevoli al secondo evento è $\{12; 15\}$. Notiamo che il 12 compare in entrambi gli insiemi, ma è ovvio che vi è un solo 12, quindi non possiamo contarli per due. Ciò significa che l'insieme dei casi favorevoli all'evento intersezione, estrazione di un numero pari e divisibile per 3 (cioè un numero divisibile per 6) è $\{12\}$. Quindi possiamo dire che la probabilità che il numero estratto sia pari è $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, che sia divisibile per 3 è $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, che sia pari e divisibile per 3 è $\frac{1}{6}$. Quindi la probabilità che il numero estratto sia pari o divisibile per 3 è $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
- Lanciamo un dado a otto facce, vogliamo determinare la probabilità che il punteggio ottenuto sia divisibile per 4 o un numero primo. L'insieme dei casi favorevoli al primo evento è $\{4; 8\}$, quello dei casi favorevoli al secondo evento è $\{2; 3; 5; 7\}$. L'evento intersezione è vuoto, non vi sono numeri primi divisibili per 4, quindi gli eventi sono incompatibili. La probabilità cercata è allora $\frac{2}{8} + \frac{4}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.
- In un'urna vi sono 10 palline nere, 15 bianche e 20 verdi. Estraiamo una pallina, con quale probabilità è bianca o verde? Ancora una volta i due eventi sono incompatibili, non vi sono palline sia bianche che verdi. La probabilità cercata è perciò $\frac{10}{10+15+20} + \frac{20}{10+15+20} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$.
- Lanciamo due dadi regolari a forma di cubo, quanti diversi casi possono presentarsi? Saremmo tentati di dire 12, in effetti sono 36. Infatti, pensiamo di avere un dado rosso e uno blu, per ogni diverso punteggio, da 1 a 6, presentato dal dado rosso vi sono 6 diversi punteggi per quello blu, per un totale quindi di $6 \cdot 6 = 36$. Qual è la probabilità di ottenere 7? Quali sono i casi favorevoli? Scriviamoli: (1; 6) (2; 5), (3; 4), (4; 3), (5; 2), (6; 1). Che sono un totale di 6. Pertanto la probabilità cercata è $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
- Con riferimento al lancio di due dadi, con quale probabilità otteniamo un punteggio multiplo di 3 o di 4? I punteggi multipli di 3 sono 3, 6, 9, 12; quelli multipli di 4: 4, 8, 12. Come si vede gli eventi sono compatibili, essendo il punteggio 12 comune a entrambi. Scriviamo gli insiemi dei casi favorevoli ai diversi punteggi. 3: $\{(1; 2), (2; 1)\}$, 6: $\{(1; 5), (2; 4), (3; 3), (4; 2), (5; 1)\}$, 9: $\{(3; 6), (4; 5), (5; 4), (6; 3)\}$, 12: $\{(6; 6)\}$, 4: $\{(1; 3), (2; 2), (3; 1)\}$, 8: $\{(2; 6), (3; 5), (4; 4), (5; 3), (6; 2)\}$. Abbiamo perciò un totale di $2 + 5 + 4 + 1 + 3 + 5 = 18$ casi favorevoli, pertanto la probabilità cercata è $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.
- Estraiamo il primo numero alla tombola, con quale probabilità è multiplo di 3 o di 5? I multipli di 3 sono 30, vanno infatti da $3 \cdot 1$ a $3 \cdot 30 = 90$, quelli di 5 sono 18, da $5 \cdot 1$ a $5 \cdot 18 = 90$. Gli eventi sono però compatibili, i multipli di 15, che sono 6 (da $15 \cdot 1$ a $15 \cdot 6 = 90$), sono comuni ai due eventi. Quindi la probabilità cercata è $\frac{30+18-6}{90} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$.

Fase 2: Completa ...

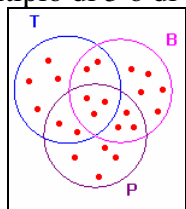
- Consideriamo l'insieme $A = \{1; 2; 3; \dots; 89; 90\}$ delle possibili estrazioni del primo numero al gioco della tombola. Con quale probabilità il numero estratto avrà cifre che sommate danno 6 o un numero divisibile per 4? L'insieme dei casi favorevoli al primo evento è $\{6; 15; 24; 33; 42; 51; 60\}$, quello re-

lativo al secondo evento è $\{4; 8; 12; \dots\}$. L'evento intersezione non è vuoto, ma è formato da $\{ \dots \}$. Possiamo perciò dire che la probabilità cercata è $\frac{7}{90} + \frac{\dots}{90} - \frac{\dots}{90} = \dots$

- Da un mazzo di carte italiane da 40 estraiamo una carta, con quale probabilità è un sette o una carta di denari? L'insieme dei casi favorevoli al primo evento ha elementi, quello relativo al secondo ne ha invece L'intersezione è formata da elementi. Pertanto la probabilità cercata è
- Da un'urna che contiene 10 palline bianche, 15 nere, 20 rosse e 25 verdi estraiamo una pallina, con quale probabilità è nera o rossa? La probabilità di estrarre una pallina nera è, mentre quella di estrarre una pallina rossa è dato che gli eventi sono Cioè la loro intersezione è possiamo dire che la probabilità totale cercata è
- Lanciamo due dadi a 8 facce di ottaedro, il numero dei casi possibili è Con quale probabilità otteniamo 10? I casi possibili sono i seguenti $\{(2; 8), (3; 7), \dots\}$, per un totale di quindi la probabilità è Con quale probabilità otteniamo 10 o un punteggio per cui uno dei dadi è 3? Gli eventi sono, dato che l'intersezione è formata da $\{ \dots \}$ L'insieme dei casi favorevoli al secondo evento è $\{(3; 1), (3; 2), \dots\}$, per un totale di casi. Infine la probabilità totale è

Fase 3: Prova!

1. Da un mazzo di carte italiane da 40 estraiamo una carta, quali fra i seguenti eventi sono compatibili con l'evento la carta estratta è una figura di spade? A) la carta estratta è una figura. B) la carta estratta è una carta di denari. C) la carta estratta ha un valore numerico compreso tra 3 e 7. D) la carta estratta ha un valore numerico superiore a 5. E) la carta estratta è una donna. [A); D); E]
2. Lanciamo un dado a 20 facce, quali fra i seguenti eventi sono compatibili con l'evento esce un punteggio divisibile per 4? A) esce un punteggio dispari. B) esce un punteggio primo. C) esce un punteggio multiplo di 3. D) esce un punteggio multiplo di 5. E) non esce un punteggio le cui cifre hanno per somma 3. [C); D); E]
3. Dall'insieme $X = \{11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20\}$ estraiamo un numero a caso, con quale probabilità è pari o divisibile per 3? Con quale probabilità è pari o primo? Con quale probabilità è divisibile per 5 o per 7? [3/5; 9/10; 3/10]
4. Lanciamo un dado a 12 facce, con quale probabilità il punteggio ottenuto è pari o multiplo di 5? Dispari o multiplo di 3? Multiplo di 3 o di 7? [7/12; 2/3; 5/12]



5. Nel diagramma seguente rappresentiamo gli studenti di una classe, suddivisi secondo chi di loro sa giocare a tennis (T), pallavolo (P), basket (B). Scegliendo uno studente a caso, con quale probabilità sa giocare a tennis? Solo a basket? A tennis o pallavolo? A pallavolo o basket ma non a entrambi i giochi? [11/23; 5/23; 18/23; 13/23]
6. In un campeggio vi sono 200 persone, 120 sono italiane, le altre straniere. 50 degli italiani e 60 degli stranieri sono donne. Scelto un ospite a caso fra ai presenti, con quale probabilità è una donna o non è di nazionalità italiana? Con quale probabilità è di nazionalità italiana o un maschio? [13/20; 7/10]
7. Il 25% di ragazzi di una classe conosce il russo e il 40% il tedesco. Sapendo che la probabilità di scegliere uno studente a caso che parli russo o tedesco è 50%, quale percentuale di ragazzi parla entrambe le lingue? [15%]
8. Abbiamo colorato alcune bandierine completamente verdi, altre completamente rosse e altre rosse e verdi. Se la probabilità di estrarre una bandiera completamente rossa è 0,48 e quella di estrarre una bandiera rossoverde è 0,24, con quale probabilità estraiamo una bandiera completamente verde? [76%]
9. Lanciamo due dadi a forma di cubo, con quale probabilità otteniamo 11? Con quale probabilità un punteggio primo? Con quale probabilità l'unione dei precedenti? [1/18; 5/12; 5/12]
10. Lanciamo due dadi a forma di cubo, con quale probabilità otteniamo un numero il cui quadrato ha le

cifre pari? Con quale probabilità un punteggio contenente almeno una cifra pari? Con quale probabilità l'unione dei precedenti? [7/36; 19/36; 19/36]

11. Lanciamo due dadi a 12 facce, con quale probabilità otteniamo 12? Con quale probabilità un punteggio contenente almeno un 5? Con quale probabilità l'unione dei precedenti? [11/144; 7/72; 25/144]
12. Lanciamo due dadi a 20 facce, con quale probabilità otteniamo 24? Con quale probabilità un punteggio in cui una almeno delle facce sia 12? Con quale probabilità l'unione dei precedenti? [17/400; 39/400; 11/80]
13. Lanciamo 3 monete regolari, con quale probabilità otteniamo solo una testa? Con quale solo due croci? Con quale l'unione dei precedenti? [3/8; 3/8; 3/8]
14. Lanciamo 4 monete regolari, con quale probabilità otteniamo solo una testa? Con quale solo una croce? Con quale l'unione dei precedenti? [1/4; 1/4; 1/2]
15. Lanciamo 5 monete regolari, con quale probabilità otteniamo solo due teste? Con quale solo una croce? Con quale l'unione dei precedenti? [5/16; 5/32; 15/32]

Estrazioni con e senza rigenerazione. Eventi indipendenti. Probabilità condizionata.

Fase 1: Osserva

- In un'urna vi sono 10 palline bianche e 15 rosse. Estraiamo due palline. Con quale probabilità sono entrambe bianche? Per la prima estrazione non vi sono problemi, la probabilità che la pallina estratta sia bianca è $\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$. Per la seconda estrazione dobbiamo distinguere il fatto che essa avvenga con restituzione, così la probabilità non muta, da quello in cui non vi sia la restituzione. In quest'ultimo caso sono rimaste 24 palline nell'urna e dobbiamo supporre che le palline rosse non siano mutate, mentre le bianche siano divenute 9. Quindi la probabilità della seconda estrazione è $\frac{9}{24}$. I casi possibili sono $25 \cdot 24$, che costituiscono tutti i possibili accoppiamenti delle 25 palline iniziali con le 24 rimaste dopo la prima estrazione, allo stesso modo i casi favorevoli sono $10 \cdot 9$. Quindi la probabilità cercata è $\frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{20}$.
- Lanciamo una moneta per tre volte, con quale probabilità otteniamo tutte le volte testa? Lanciare una moneta per tre volte equivale a estrarre con restituzione una pallina da un'urna che ne contiene due di diversi colori. La probabilità che venga fuori testa è naturalmente $\frac{1}{2}$ ogni volta che lanciamo la moneta. Quindi la probabilità di ottenere tre volte testa è $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Avremmo potuto interpretare il problema anche in altro modo, considerando tutti i casi possibili, che sono i seguenti, in cui con T indichiamo l'uscita della faccia chiamata testa e con C quella chiamata croce: TTT, TTC, TCT, CTT, TCC, CTC, CCT, CCC. Dato che uno solo di questi casi è quello che ci interessa la probabilità è appunto $\frac{1}{8}$.
- Da un'urna con 10 palline bianche e 15 nere, estraiamo in successione tre palline, con quale probabilità almeno una delle tre palline è bianca? Dire almeno una bianca, significa che può accadere uno qualsiasi dei seguenti fatti: tutte bianche (una sola possibilità), due bianche e una rossa (tre possibilità a seconda che la pallina rossa venga estratta per prima, seconda o terza), una sola bianca e le altre rosse (Ancora tre possibilità). Tutti e sette i casi sono fra loro a due a due incompatibili, quindi dobbiamo sommare le sette probabilità. Tutte le tre palline bianche si ottengono con probabilità $\frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} \cdot \frac{8}{23} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{8}{23} = \frac{6}{115}$, siamo infatti nell'ipotesi di non restituzione. I tre casi in cui si estraggono due palline bianche sono fra loro equiprobabili, basta quindi calcolare una probabilità e moltiplicare poi per 3. Perciò abbiamo: $3 \cdot \frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} \cdot \frac{15}{23} = \frac{27}{92}$. Infine la probabilità di ottenere una sola pallina bianca

è $3 \cdot \frac{10}{25} \cdot \frac{15}{24} \cdot \frac{14}{23} = \frac{21}{46}$. Possiamo concludere che la probabilità di estrarre tre palline in modo che una

almeno sia bianca è pari a $\frac{6}{115} + \frac{27}{92} + \frac{21}{46} = \frac{369}{460} \approx 80\%$.

Fase 2: Completa ...

- Da un'urna che contiene 20 palline bianche e 10 rosse estraiamo due palline, con quale probabilità sono entrambe bianche? La probabilità che la prima sia bianca è, per la seconda estrazione dobbiamo considerare i due casi che essa avvenga con o senza restituzione. Nel primo caso la probabilità rimane uguale, cioè ancora, nel secondo invece le palline rimaste sono e di queste quelle bianche sono Quindi la probabilità è Concludendo possiamo dire che la probabilità che entrambe le palline bianche è per l'estrazione con restituzione e per quella senza restituzione.
- Nell'urna precedente effettuiamo ancora due estrazioni, con quale probabilità otteniamo due palline di diverso colore? I casi da considerare sono due: la prima estratta è bianca, la seconda rossa oppure la prima rossa e la seconda bianca. Essendo i due eventi incompatibili la probabilità totale si ottiene sommando le due singole probabilità. Nel caso con restituzione la probabilità è perciò Mentre in quello senza restituzione è
- Lanciamo una moneta per 4 volte, quanto vale la probabilità di ottenere una testa e 3 croci? I casi da considerare sono i seguenti: TCCC, CTCC, la probabilità di ciascuno di essi è uguale, quindi basta calcolarne una e moltiplicare il risultato per La probabilità di ottenere testa è, quella di ottenere croce è Pertanto la probabilità cercata è
- Da un'urna con 12 palline bianche e 15 nere estraiamo tre palline senza restituzione, con che probabilità otteniamo almeno due palline nere? Dobbiamo considerare due casi, che le palline siano tutte nere e che due siano nere e una bianca. Quest'ultimo caso comprende sottocasi. Cominciamo a calcolare la prima probabilità essa è $\frac{15}{27} \cdot \frac{14}{26} \cdot \frac{13}{25} = \dots$. Per la seconda probabilità calcoliamo la probabilità che la prima estratta sia bianca e le altre nere e poi moltiplichiamo il risultato per Abbiamo così $\dots \cdot \frac{12}{27} \cdot \frac{11}{26} \cdot \frac{10}{25} = \dots$. Per ottenere la probabilità voluta dobbiamo le precedenti probabilità. Quindi la probabilità cercata è

Fase 3: Prova!

Se non altrimenti espresso nei seguenti esercizi considerare le due ipotesi con e senza restituzione

1. Da un'urna con 20 palline bianche e 15 nere estraiamo due palline. Con quale probabilità sono entrambe bianche. Con quale probabilità sono entrambe nere? Con quale di colori diversi?
[16/49, 38/119, 9/49, 3/17, 24/49, 60/119]
2. Da un'urna con 12 palline bianche, 15 rosse e 18 nere estraiamo due palline. Con quale probabilità sono entrambe bianche? Con quale probabilità sono entrambe nere? Con quale entrambe rosse? Con quale una bianca e l'altra rossa?
[16/225, 1/15, 4/25, 17/110, 1/9, 7/66, 8/45, 2/11]
3. Da un'urna con 20 palline bianche, 25 rosse e 30 nere estraiamo tre palline. Con quale probabilità sono tutte bianche? Con quale probabilità sono tutte nere? Con quale tutte rosse? Con quale di 3 colori diversi?
[64/3375, 228/13505, 8/125, 812/13505, 16/75, 600/2701]
4. Da un mazzo di 40 carte da scopa estraiamo in successione 4 carte, con quale probabilità otteniamo i quattro assi?
[1/91390]
5. Da un'urna con 20 palline bianche e 15 nere estraiamo tre palline. Con quale probabilità almeno una è nera? *Suggerimento:* considerare l'evento complementare.
[279/343, 1081/1309]
6. Da un'urna con 20 palline bianche e 10 nere estraiamo quattro palline. Con quale probabilità al massimo due sono bianche?
[1/9, 2/21]
7. Da un'urna con 10 palline bianche, 15 rosse e 20 nere estraiamo tre palline. Con quale probabilità almeno una è bianca?
[386/729, 139/258]
8. Lanciamo 3 monete regolari, con quale probabilità otteniamo almeno una testa? Con quale almeno due croci?
[7/8; 1/2]

9. Lanciamo 4 monete regolari, con quale probabilità otteniamo almeno una testa? Con quale almeno una croce? Con quale l'unione dei precedenti? [15/16; 15/16; 1]
10. Lanciamo 5 monete regolari, con quale probabilità otteniamo almeno due teste? Con quale al massimo una croce? Con quale l'unione dei precedenti? [13/16; 3/16; 13/16]
11. Da un mazzo di 40 carte da scopa estraiamo in successione 3 carte, con quale probabilità almeno una delle carte estratte è un asso? [137/494]
12. Da un mazzo di 40 carte da scopa estraiamo in successione 4 carte, con quale probabilità almeno due delle carte estratte sono re? [785/18278]
13. Da un mazzo di 52 carte da ramino estraiamo in successione 3 carte, con quale probabilità sono tutte dello stesso seme? Con quale almeno due sono di cuori? [22/425, 47/850]
14. Da un mazzo di 52 carte da ramino estraiamo in successione 3 carte, con quale probabilità almeno due sono rosse? [1/2]
15. Lanciamo un dado regolare a forma di cubo per tre volte di fila, con che probabilità otteniamo almeno un 6? [91/216]

Per svolgere un Test finale di 10 quesiti, collegati al sito

http://mathinterattiva.altervista.org/volume_2_7.htm

7 Incertezza e realtà fisica

7.2 Statistica descrittiva

Prerequisiti

- Frazioni e percentuali.
- Piano cartesiano.
- Circonferenza e settori circolari.
- Aritmetica elementare.
- Calcolo delle probabilità.

Obiettivi

- Acquisire l'abitudine a trattare grandi quantità di dati, rappresentandole graficamente.
- Determinare e interpretare gli indici centrali più comuni.
- Determinare e interpretare gli scarti più comuni.
- "Leggere", "interpretare" e utilizzare i sondaggi d'opinione.
- "Leggere", "interpretare" e utilizzare i grafici.
- Creare modelli statistici di semplici situazioni reali.

Contenuti

- Prime nozioni
- Rappresentazioni grafiche
- Indici centrali
- Variabilità

Parole Chiave

Aerogramma – Campione statistico – Distribuzione statistica – Frequenza – Istogramma – Modalità – Media aritmetica – Media ponderata – Mediana – Moda – Scarto quadratico medio – Scarto semplice medio – Varianza

Prime nozioni

Il problema

Un pasticcere vuole aprire un negozio in una certa località e, per far ciò, ha pensato di licenziarsi dal bar nel quale lavora e di mettersi in proprio. Poiché investirebbe in questa nuova attività tutti i suoi risparmi, vorrebbe avere qualche informazione sul livello di vita, sui gusti e sul consumo di dolci degli abitanti di quella zona, che gli indichi se è il caso di fare questo passo.

Quanto sopra descrive una situazione concreta nella quale risulta importante acquisire dei dati che consentano, successivamente, di fare una scelta ponderata. Un primo problema che si presenta è la modalità con cui devono essere acquisiti i dati.

Definizione 1

L'operazione di raccogliere informazioni di tipo qualitativo o quantitativo da un insieme di persone o cose viene chiamata **indagine statistica**.

Quindi in una indagine statistica si raccolgono i dati in modo che siano il più possibile attendibili. Poiché il pasticcere non può intervistare tutta la sua potenziale clientela, deve fare una scelta e intervistarne solo una parte. Ed ecco un'altra questione: che caratteristiche deve avere l'insieme degli intervistati per essere attendibile?

Definizione 2

Dato un insieme sul quale vuole effettuarsi una indagine statistica, chiamiamo suo **campione statistico** il sottoinsieme sul quale effettivamente si opera.

Di un campione statistico non importa soltanto la cardinalità ma anche e soprattutto la costituzione.

Esempio 1

Se il pasticcere intervistasse solo bambini, probabilmente riceverebbe delle informazioni così entusiastiche relative a pasticcini e gelati che intraprenderebbe immediatamente l'attività; viceversa se intervistasse solo persone che soffrono di diabete, le informazioni ottenute gli scongiurerebbero l'apertura del negozio.

Come dovrà comportarsi quindi il pasticcere? Dovrà stabilire le caratteristiche che possono incidere sulla risposta di ciascun intervistato, per esempio il sesso, l'età, il reddito medio e via dicendo.

Esempio 2

Nel caso del pasticcere sarà certamente importante stabilire le fasce di età dei potenziali clienti; invece non gli interesserà sapere se una data persona parla o no correntemente l'inglese.

Il passo successivo da compiere per un'indagine statistica sarà quello di determinare la composizione del campione rappresentativo dell'universo che si sta esaminando.

Esempio 3

Sempre con riferimento al nostro esempio, supponiamo che la popolazione interessata sia formata dal 55% di donne, dal 20% di persone con meno di 10 anni, dal 15% di persone con un reddito familiare superiore a 50 milioni lordi l'anno, dal 23% di pensionati. Se il pasticcere ritiene che tutte le precedenti caratteristiche influiscano sulla quantità di dolci consumati periodicamente, dovrà scegliere un campione in cui le percentuali non si discostino di molto da quelle dette. Diversamente rischia di ottenere informazioni poco utili.

Sottolineiamo il fatto che le informazioni ottenute dal pasticciere, anche se provenissero da tutte le persone che potrebbero essere sue clienti, non avranno mai la certezza matematica. Potrebbe capitare infatti che una persona che ha dichiarato di comprare almeno un chilo di dolci a settimana, si ammali improvvisamente, venga a perdere il lavoro, inizi una dieta, o più semplicemente non abbia voluto dire la verità per burla o per motivi personali. Da quanto detto finora appare chiaro che la statistica, così come abbiamo visto con il calcolo delle probabilità, non deve intendersi come una disciplina matematica nel senso stretto, giacché essa fornisce solo misure di rischi, non dà certezze, come del resto è giusto che accada quando si ha a che fare con fenomeni che si riferiscono alla vita reale. Ricordiamo per esempio che spesso i cosiddetti exit poll che vengono effettuati per le elezioni forniscono risposte del tutto errate, proprio perché per vari motivi gli intervistati all'uscita del seggio elettorale mentono sul voto realmente espresso.

Stabilito come scegliere il campione statistico e come deve essere condotta l'indagine, si passa all'analisi dei dati. Come fa il pasticciere a capire se vale la pena di aprire il suo negozio oppure no? Ha bisogno di stabilire un modo per misurare quantitativamente le informazioni ottenute. Dobbiamo quindi cominciare a trattare la rappresentazione e l'interpretazione numerica dei dati. Cominciamo con l'osservare che un campione statistico, in quanto insieme, è privo di elementi ripetuti, non così i dati che, invece, non costituiscono un insieme.

Esempio 4

Se interroghiamo 100 persone su una questione in cui le risposte possibili sono *Sì*, *No* e *Non so*, suddividiamo le 100 persone in tre sottoinsiemi, ognuno dei quali ha una cardinalità che varia da un minimo di zero a un massimo di 100.

Definizione 3

Diciamo **modalità** di un certo fenomeno che deve essere indagato statisticamente l'insieme dei valori su cui indagare, scelti tra quelli che il fenomeno può assumere.

Esempio 5

Se si vuole indagare sul numero di nati in Italia nello scorso anno, si potrebbe scegliere di valutare il numero dei nati vivi e dei nati morti, oppure quello dei nati maschi e dei nati femmina, o ancora quello dei nati nelle isole, al sud, al centro e al nord, o tutti i precedenti insieme, o ancora altre caratteristiche.

Definizione 4

Dato un fenomeno indagato statisticamente, diciamo **frequenza assoluta** di una sua modalità il numero di volte in cui la stessa modalità si è presentata.

Esempio 6

Se alla domanda *Quale musica preferisce?*, rivolta a 93 persone, 35 hanno risposto rock, 41 rap, 13 classica e 4 non hanno risposto, diciamo che la frequenza di coloro che, nel dato campione, prediligono il rock è 35.

Nell'esempio precedente il numero 35 non fornisce molte informazioni, mentre è importante stabilire il rapporto fra questo numero e il totale delle persone intervistate. Per esempio se avessimo intervistato 40 persone vorrebbe dire che quasi tutti preferiscono il rock, viceversa se fossero state 400 avrebbe significato che quasi nessuno ama il rock. Quindi un dato più significativo è il rapporto del detto valore rispetto al totale degli intervistati, in questo caso

$\frac{35}{93} \approx 0,38 = 38\%$.

Definizione 5

Dato un fenomeno indagato statisticamente diciamo **frequenza relativa** di una sua modalità il rapporto fra la frequenza assoluta della modalità e la cardinalità dell'insieme delle modalità.

Esempio 7

Con riferimento all'esempio precedente, calcoliamo le frequenze relative, mostrate nella figura a lato. Osserviamo che la somma è pari al 100%, fatto che dovrebbe sempre accadere, ma che a volte, può differire

Frequenza relativa	Frequenza Percentuale
35/93	≈38%
41/93	≈44%
13/93	≈14%
4/93	≈4%

di 1-2 unità da 100% a causa delle approssimazioni usate.

Adesso possiamo associare ciascuna modalità con la relativa frequenza assoluta.

Definizione 6

Dato un fenomeno indagato statisticamente, diciamo sua **distribuzione statistica**, l'insieme delle coppie i cui elementi sono le modalità e le rispettive frequenze assolute.

Esempio 8

Ancora con riferimento al sondaggio musicale, possiamo dire che la distribuzione statistica associata al fenomeno in esso descritto è l'insieme {(rock, 35), (rap, 41), (classica, 13), (non risponde, 4)}.

Capita a volte che le modalità da considerare siano troppe, in questo caso conviene raggrupparle.

Esempio 9

I seguenti dati sono relativi al numero di laureati dell'anno solare 2006 aggiornati al 27/05/2006, essi sono distinti per facoltà, tipo corso e corso di studio e raggruppati per classe di voto. Noi presentiamo solo quelli di alcune facoltà. Come si vede, invece di riportare tutte le possibili votazioni, da 66 a 110 e lode, i dati sono raggruppati in classi non uniformi per ampiezza.

Classe di voto/ Facoltà	66-90	91-100	101-105	106-110	110 e lode
Agraria	11	24	10	6	1
Farmacia	16	38	26	13	12
Giurisprudenza	78	92	20	6	1
Medicina	10	19	4	7	1
Scienze MFN	10	80	37	38	21

Il primo problema che nasce dal precedente tipo di raggruppamento, e che risulterà molto importante per la determinazione di certi valori statistici, è stabilire il significato di questi dati. Noi sappiamo per esempio che 13 laureati in Farmacia hanno conseguito un voto da 106 a 110, ma non sappiamo altro e quindi non siamo in grado di stabilire quanti di essi hanno avuto 106 o 109 o qualsiasi altro voto compreso nell'intervallo. Questo è ovviamente un problema poiché in questo modo le informazioni non sono *precise*, ma del resto la possibilità di avere tutti i dati raggruppati per singolo voto farebbe sì che avremmo una distribuzione troppo vasta e quindi più difficile da studiare. Pensate per esempio cosa accadrebbe con la distribuzione degli abitanti di una città suddivisi per altezza. Avremmo da considerare valori in intervalli troppo ampi, diciamo da circa 50 *cm* per i neonati, fino a più di 2 metri. Non solo, ma possiamo accontentarci di suddividere per *cm* o dobbiamo considerare anche i *mm*? In tal modo i dati a disposizione sarebbero quasi impossibili da trattare, ecco perché è meglio suddividere in classi. Approfondiremo meglio questo problema in seguito.

L'angolo storico

La statistica intesa come disciplina che raccoglie dati e informazioni a fini politici, economici, fiscali, ... è antichissima. Sono state ritrovate tavolette in caratteri cuneiformi presso i Sumeri (da 4000 a 2000 anni prima di Cristo), in cui erano elencati uomini e beni materiali. Addirittura uno dei libri che formano la Bibbia: *I Numeri*, dedica tutta la sua prima parte al censimento effettuato da Mosé subito dopo la fuga

dall'Egitto. Ricordiamo che anche il censimento della popolazione narrato nei Vangeli, che portò Giuseppe e Maria a recarsi a Betlemme, è stato storicamente accertato. Questi rilevamenti avevano carattere totale e non campionario.

Si deve arrivare alla metà del XVII secolo perché vengano posti i fondamenti della statistica descrittiva. È il tedesco Hermann Conring (1606 – 1681) a essere considerato il fondatore della statistica su basi scientifiche. Un suo allievo, l'ungherese Martin Schmeitzel usò per la prima volta in un testo il vocabolo statistica, intitolando la raccolta delle sue lezioni all'Università di Jena *Collegium politico-statisticum*. La prima applicazione “seria” della statistica, cioè l'elaborazione di tavole di mortalità per prevedere l'insorgere di epidemie, si effettuò in Inghilterra verso la metà del 1600. Ciò diede inizio alla cosiddetta statistica investigativa.

La parola statistica ha un'origine italiana, essendo derivata da Stato. Ne è testimonianza il titolo di un libro del 1589, *Ristretto della civile, politica, statistica e militare scienza*, dell'italiano Gerolamo Ghilini. Con lo sviluppo del calcolo delle probabilità, fra il XVIII e il XIX secolo, la statistica cominciò a fondarsi su basi più strettamente matematiche, divenendo così scienza. Fra i più importanti studiosi ricordiamo Francis Galton (1822 – 1911), che introdusse diversi importanti concetti statistici, come i quartili e i decili. Iniziò anche lo studio delle correlazioni fra caratteri statistici diversi, come l'altezza dei padri e quella dei relativi figli. Ricordiamo anche il francese Auguste Bravais (1811 – 1863) e l'inglese Karl Pearson (1857 – 1936). Entrambi questi studiosi si occuparono approfonditamente di correlazione di eventi. Concludiamo ricordando il nostro Corrado Gini (1884 – 1965), a cui si deve la fondazione dell'Istituto Centrale di Statistica, l'attuale ISTAT, negli anni trenta del XX secolo.

Queste informazioni sono state ricavate da G. Leti *Statistica descrittiva*, Il Mulino, Bologna 1983.

Verifiche

Livello 1

- Consideriamo i seguenti caratteri statistici: *sex, religione, età, titolo di studio, reddito medio, conoscenza di una lingua straniera, attività lavorativa, composizione media della famiglia, numero di auto possedute dalla famiglia, hobbies, stato di salute, orientamento politico*. Di seguito sono proposte alcune attività per la cui realizzazione si richiede una indagine statistica, decidere quali dei precedenti caratteri sono indispensabili per ottenere risultati interessanti. Eventualmente aggiungere altri caratteri oltre quelli qui citati. a) Apertura di un supermercato in una certa zona; b) Apertura di una palestra; c) Vendita di una enciclopedia; d) Vendita di DVD educativi; e) Apertura di un cinema; f) Elezioni politiche; g) Indagine sul sesso; h) Indagine sui gusti musicali dei giovani; i) Indagine sui programmi televisivi preferiti dai bambini; j) Produzione di un nuovo modello di automobile.

Lavoriamo insieme

Sappiamo che il 19% dei laureati in Filosofia dell'Università di Milano dell'anno solare 2006, ha ottenuto un voto di laurea compreso tra 101 e 105. Se in totale i laureati sono stati 111, quanti di essi hanno avuto tale voto? In pratica vogliamo sapere quanto vale il 19% di 111, cioè il risultato dell'operazione $111 \cdot 0,19 = 21,09$. Ovviamente tale valore non ha senso reale, poiché i laureati sono rappresentati da un numero intero. Concludiamo perciò che 19% è un valore approssimato e i laureati che hanno ottenuto da 101 a 105 sono stati 21. Se invece avessimo saputo che il 23% dei laureati in lettere ha avuto 110 e lode e che essi sono in totale 24, potremmo calcolare quanti sono stati i laureati in lettere in totale. In questo caso noi sappiamo che $T \cdot 0,23 = 24$, quindi $T = \frac{24}{0,23} \approx 104$.

Livello 1

Calcolare le frequenze relative riferite ai seguenti dati ISTAT

- Raccolta rifiuti urbani in Kg per abitante, per i capoluoghi di provincia piemontesi, riferiti all'anno

	Provincia	Torino	Vercelli	Novara	Biella	Cuneo	Verbania	Asti	Alessandria
2001	Indifferenziati	465,2	528,8	365,1	438,7	402,5	275,7	391,3	508,4
	Differenziati	136,0	55,2	138,7	158,0	162,1	298,0	95,5	138,2

- Lunghezza di coste balneabili in Km per alcune regioni italiane riferite all'anno 1998

Regione	Liguria	Toscana	Lazio	Campania	Calabria	Puglia	Abruzzo	Marche
Costa balneabile	274,0	381,9	244,7	348,0	617,7	689,6	113,3	148,2
Totale costa	349,3	601,1	361,5	469,7	715,7	865,0	125,8	173,0

- Opere consultate nelle Biblioteche statali italiane riferite all'anno 1996

Manoscritti	179903
Volumi	21685763
Opere consultate	3591881

- Cause di morte per i maschi in Italia, riferite all'anno 1996

Causa	Mal. Infet.	Tumore	Mal. Sist. Circ.	Mal. App. resp.	Mal. App. dig.	Mal definite	Cause violente	Altre
Numero	1451	90882	110186	19597	13857	3603	16720	27756

- Iscritti scuole superiori in Italia riferiti all'anno scolastico 1997/98

Professionali.	Tecnici	Licei
565723	1049682	1002180

Livello 2

- Dai dati Istat relativi al 1998 si evince che in Emilia Romagna vi erano 125569 ettari di aree protette, che rappresentavano il 4% delle aree protette italiane e il 5,7% del totale della superficie della regione. Inoltre rappresentavano 3,2 ettari per ogni 100 abitanti. Da questi dati stimare il numero di ettari di aree protette in Italia, la superficie in ettari dell'Emilia Romagna e la sua popolazione.

[314148; 22045,4; 3926844]

8. Dai dati Istat relativi al 1998 si evince che 103,8 Km delle coste del Veneto erano balneabili. Se esse rappresentavano il 65,3% del totale, quanti Km di coste ha il Veneto? [158,9]
9. Dai dati Istat relativi al 1998 si evince che 57,1 Km delle coste della Sicilia avevano un inquinamento permanente. Se esse rappresentavano il 10% del totale delle coste non balneabili, quanti Km di coste sono state considerate balneabili in Sicilia nel 1998? [Dati insufficienti per rispondere]
10. Sappiamo che dei laureati in Filosofia del 2006 alla Statale di Milano, il 2% ha avuto da 66 a 90 e il 7% da 91 a 100. Sappiamo inoltre che i secondi sono il quadruplo dei primi, come si spiega questo fatto, dato che 7 non è il quadruplo di 2? [Sono valori approssimati]
11. Con riferimento al precedente quesito, se in 2 hanno avuto da 66 a 90, quanti sono in totale i laureati in Filosofia? [da 100 a 114]
12. Se 60 laureati del 2006 alla Statale di Milano in scienze motorie hanno avuto un voto inferiore a 106 e il 5% ha avuto un voto da 106 in poi, quanti sono in totale i laureati? [63]
13. I seguenti dati Istat sono relativi all'incidenza percentuale dei capitoli di spesa sulla spesa totale per coppie con 2 figli nel 1997. Da essi calcolare le spese assolute per singolo capitolo.

Spesa totale in lire	Alimenti bevande	Abbigliam. calzature	Abitazione energia	Arredam. art. casa	Spese sanitarie	Trasporti comunic.	Spettacoli cultura	Altre spese
4924081	19,9	7,6	23,3	6,6	3,8	18,2	8,3	12,3

Rappresentazioni grafiche

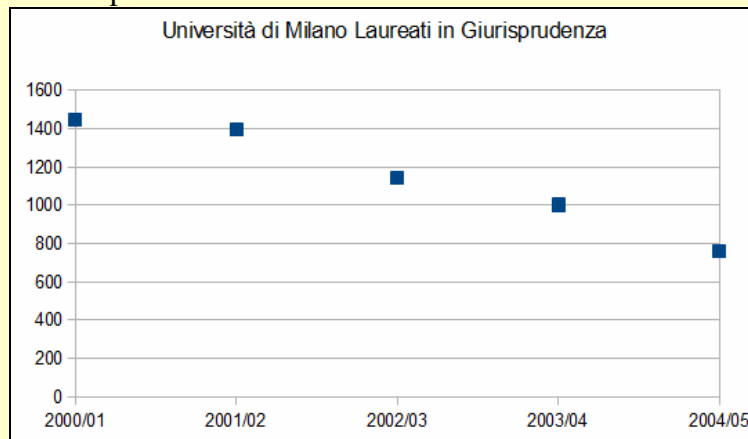
Per visualizzare meglio i dati raccolti si usano le rappresentazioni grafiche.

Esempio 10

I dati seguenti si riferiscono ai laureati in Giurisprudenza dell'Università Statale di Milano negli ultimi 5

anni, aggiornati al 27/05/2006. Si osserva subito che il numero dei laureati è in costante diminuzione, ma si vede meglio rappresentando graficamente i dati. Questo grafico illustra l'andamento temporale dei laureati ed è molto utile in tutte quelle distribuzioni di cui si vuole seguire l'andamento temporale dei dati.

A.A.	2000/01	2001/02	2002/03	2003/04	2004/05
Laureati	1445	1395	1142	1001	760



Definizione 7

Una distribuzione statistica nella quale le diverse modalità vengono studiate al variare del tempo, si chiama **serie temporale**

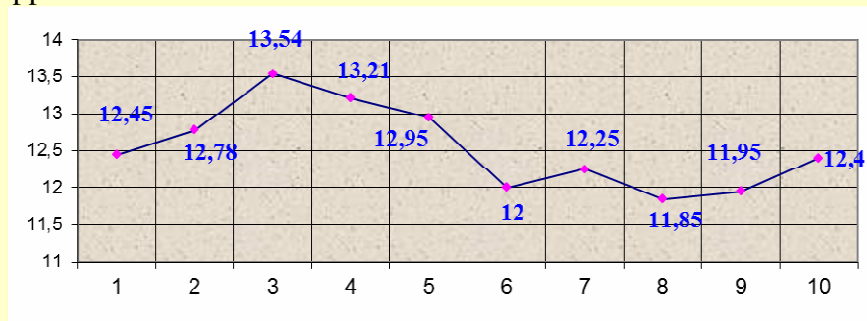
Definizione 8

La rappresentazione di una distribuzione statistica mediante dei punti su un piano cartesiano ortogonale si chiama **grafico a dispersione**.

Possiamo seguire meglio l'andamento temporale unendo i valori con segmenti.

Esempio 11

Il grafico seguente rappresenta il valore ufficiale di chiusura di un titolo azionario in un arco di 10 giorni.



Non dobbiamo dimenticare che queste sono solo alcune rilevazioni, non tutte, così questo grafico ci fornisce un'idea generale che può anche risultare errata; potrebbe per esempio accadere che il prezzo € 12,78 sia diventato € 13,54, passando per valori molto minori di € 12,78 o molto maggiori di € 13,54 che non sono rappresentati solo perché non sono stati rilevati. Inoltre non è detto che l'andamento sia continuo: se il titolo ha fatto segnare € 12,80 e € 12,90 può non essere mai stato trattato a € 12,85 o a qualsiasi altro valore compreso tra i detti estremi.

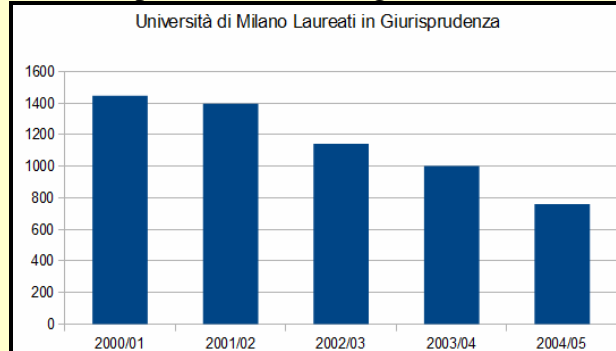
Definizione 9

La rappresentazione di una distribuzione statistica mediante punti su un piano cartesiano ortogonale, in modo che ciascun punto sia collegato al seguente mediante un segmento, si chiama **grafico a linee**.

Vediamo ancora come visualizzare in altro modo una distribuzione statistica.

Esempio 12

Possiamo rappresentare i dati dell'Esempio 10 anche nel seguente modo.

**Definizione 10**

La rappresentazione di una distribuzione statistica su un piano cartesiano ortogonale, in modo che ciascun dato, o classe di dati, sia rappresentato da un rettangolo di base arbitraria e altezza pari alla frequenza assoluta, si chiama **istogramma**.

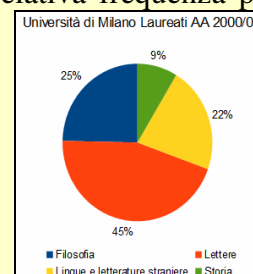
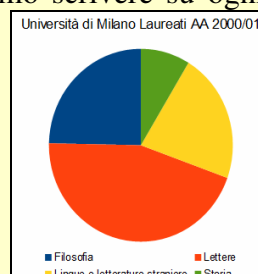
Che cosa significa?

Istogramma. *Gramma* si usa spesso nella lingua italiana per riferirsi a rappresentazioni scritte o grafiche (ricordiamo diagramma, grammatica,...). *Isto* è derivato dal greco *histos* che ha il significato di *trama*. Quindi l'istogramma è una rappresentazione grafica mediante delle barre.

Presentiamo un ultimo tipo di rappresentazione grafica.

Esempio 13

Vogliamo rappresentare i laureati dell'A.A. 2000/01 della facoltà di Lettere e Filosofia della Università Statale di Milano, suddivisi per corso di laurea. In questi casi non sono significativi i precedenti tipi di grafici, perché ci interessa di più vedere, all'interno dei laureati in Lettere e Filosofia quanti di essi sono laureati per ciascuno dei corsi di laurea. Allora usiamo la prima rappresentazione a lato. Così facendo stiamo ripartendo il totale dei laureati in proporzione al corso di laurea. Quindi immediatamente vediamo che i laureati in lettere sono la maggioranza che rappresenta poco meno del 50%. Ovviamente se volessimo avere maggiori informazioni potremmo scrivere su ogni fetta la relativa frequenza percentuale, come mostrato



nella seconda figura.

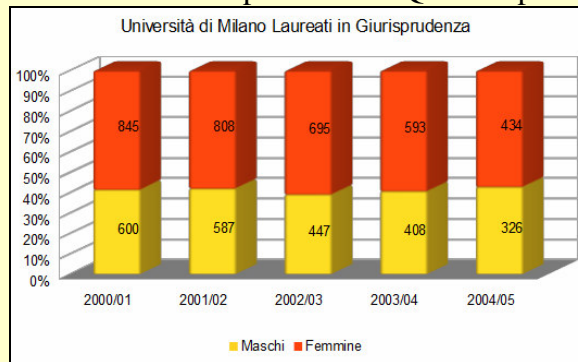
Definizione 11

La rappresentazione di una distribuzione statistica, in modo che l'intera distribuzione sia rappresentata da un cerchio suddiviso in settori circolari proporzionali alle relative frequenze assolute delle modalità, si chiama **aerogramma o diagramma a torta**.

In alcuni casi possiamo usare un formato misto fra i precedenti, se vogliamo visualizzare sia un andamento nel tempo che una distribuzione dei dati all'interno di ciascun valore temporale.

Esempio 14

Rappresentiamo i dati dell'Esempio10 distinguendo anche, per ogni anno accademico, i maschi e le femmine, distinguendo i valori assoluti nonché le percentuali. Questo tipo di istogramma si dice in pila.

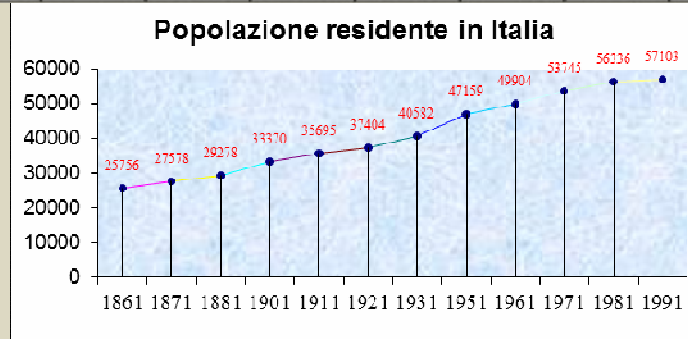


Verifiche

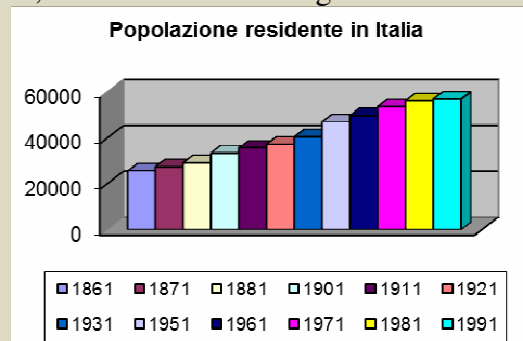
Lavoriamo insieme

Nella tabella seguente è riportata la popolazione residente in Italia, espressa in migliaia di unità, come risulta da alcuni censimenti (dati ISTAT).

1861	1871	1881	1901	1911	1921	1931	1951	1961	1971	1981	1991
25 756	27 578	29 278	33 370	35 695	37 404	40 582	47 159	49 904	53 745	56 336	57 103



Con l'aiuto delle rappresentazioni grafiche vogliamo interpretare questi risultati. Cominciamo con un grafico a linee. Questo grafico ci suggerisce quel che già vediamo dalla tabella, ossia la popolazione è sempre aumentata da un censimento al successivo. Ci mostra però qualcosa che può sfuggire dalla lettura della tabella, cioè che la popolazione non è cresciuta sempre nello stesso modo, piccole variazioni percentuali nei primi tre censimenti, una crescita più netta in quelli centrali e poi un assestamento verso gli ultimi dati. Non dobbiamo però dimenticare che in questo grafico vi sono dei "buchi", ossia la differenza fra due successivi censimenti non è sempre di 10 anni, ma per due volte è di 20 anni. Inoltre in uno dei due casi i valori mancanti si riferiscono a un periodo di guerre, che ha ovviamente fatto diminuire la popolazione. Proviamo a variare il tipo di grafico, considerando un istogramma tridimensionale.



Questo grafico, ottenuto come il precedente con Excel, è sicuramente più efficace del primo non solo perché più colorato, ma anche perché appare più netta la differenza fra un valore e il precedente.

Livello 1

- Nella tabella seguente (dati ISTAT), sono riportate le precipitazioni medie, espresse in millimetri di pioggia, relative all'anno 1992 riscontrate in alcune località italiane. Raggrupparle in classi di ampiezza 50 mm, 100 mm. e 200 mm. Quindi fornire una rappresentazione grafica mediante un istogramma in tutti e tre i casi.

Località	Firenze	Perugia	Potenza	Reggio C.	Crotone	Brindisi	Pescara	Rimini
Quantità	836	749	398	383	353	424	136	714

- Nella seguente tabella sono raccolti i valori della popolazione maschile e femminile, espressa in migliaia di unità, risultata residente in Italia in alcuni censimenti (dati ISTAT). Rappresentare i dati su uno stesso grafico mediante diagrammi a dispersione e istogrammi. Discutere i risultati.

Anno	1911	1921	1931	1936	1951	1961	1971	1981	1991
Maschi	18608	18814	20181	20826	23259	24784	26476	27056	27405
Femmine	18313	19042	20862	21573	24257	25840	27661	29051	29006

3. Con riferimento alla tabella precedente, determinare le percentuali di maschi e femmine relative a ciascun censimento, rappresentandoli con degli aerogrammi. Rappresentare poi con un diagramma a dispersione i valori percentuali relativi all'intera tabella.
4. Data la seguente distribuzione statistica relativa ai voti ottenuti da uno studente in una certa materia, rappresentarli in un diagramma a dispersione, un istogramma e un aerogramma, raggruppando i detti voti prima in classi di ampiezza 0,5 e poi di ampiezza 1. Si tenga conto che + significa aggiungere 0,25; – togliere 0,25.

6	6+	7-	8	4	5-	6	6+	6 ½	5-	7 ½	7	8-
---	----	----	---	---	----	---	----	-----	----	-----	---	----

5. Rappresentare con un aerogramma il numero di nati nel 1991, come risulta dai seguenti dati ISTAT,

NORD	CENTRO	SUD	ISOLE
175881	136910	162621	80763

suddivisi per aree geografiche.

6. Rappresentare con un diagramma a linee, l'andamento di un titolo azionario come risulta dalle seguen-

ORARIO	9:30	10:30	11:30	12:30	13:30	14:30	15:30	16:30	17:30
VALORE	12,40	12,35	12,26	12,28	12,32	12,30	12,24	12,27	12,26

ti rilevazioni intervallate di 1 ora.

7. Nella seguente tabella (dati ISTAT) sono riportati i consumi interni delle famiglie italiane, in miliardi di lire del 1995, dal 1990 al 1999. Costruire un grafico a linee.

1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
1004266	1033071	1046852	1019186	1041953	1064471	1073110	1105399	1129125	1148315

8. Nella seguente tabella (dati ISTAT), sono riportati i tassi ufficiali di disoccupazione italiana, dal 1988 al 1999, costruire con essi un grafico a linee.

1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
12,3	12	11,4	10,9	11,5	10,1	11,1	11,6	11,6	11,7	11,8	11,4

9. Nella seguente tabella sono riportati (dati ISTAT del 1999, espressi in miliardi di lire) i valori delle importazioni ed esportazioni di beni dello stato italiano. Rappresentarli nello stesso diagramma a linee; determinare poi la differenza fra i due valori, ottenendo il così detto *saldo commerciale*, che si rappresenterà unitamente ai due precedenti.

ANNI	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Import.	209910	217703	225767	232111	232991	272382	335661	321286	357587	378783	394271
Esport.	192797	203515	209744	219436	266214	308046	381175	388885	409128	426183	419124

10. Con un diagramma a linee descrivere la curva dell'altezza di un giovane come si evince dalle rileva-

ETÀ	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
ALTEZZA	72	94	110	125	140	168	174	178	178	178

zioni a lato, espresse in centimetri.

11. Nella tabella seguente sono riportati (dati ISTAT del 1999 espressi in miliardi di lire) i valori delle importazioni e delle esportazioni del 1998 per lo stato italiano, suddivise in grandi settori. Rappresentarli in due distinti aerogrammi. Sulla base di questi dati determinare quale fra i settori indicati è il più vantaggioso in termini assoluti e quale lo è in termini percentuali per l'Italia.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Importazioni	20738	29790	35268	6539	52584	95986	50748	26154	28549	32427
Esportazioni	11246	5734	16867	16533	36472	151800	47083	17771	67882	54793

Legenda: A = Prodotti agricoltura, silvicoltura e pesca; B = Prodotti energetici; C = Minerali ferrosi e non ferrosi; D = Minerali e prodotti non metallici; E = Prodotti chimici; F = Prodotti metalmeccanici; G = Mezzi di trasporto; H = Prodotti industrie alimentari, bevande e tabacco; I = Prodotti tessili, cuoio, abbigliamento; J = Legno, carta, gomma e altri prodotti.

12. I seguenti dati (Fonte EUROSTAT) si riferiscono al prodotto interno lordo dal 1991 al 1999, espresso in milioni di euro del 1995, di 4 nazioni europee. Rappresentare in un unico grafico gli istogrammi relativi a ciascuna nazione. Determinare poi le relative variazioni percentuali, segnandole in un unico

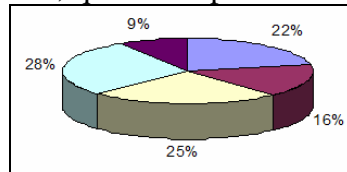
NAZIONE	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Italia	798605	804679	797568	815173	839008	848179	863581	876806	889298
Germania	1786030	1826064	1806207	1848589	1880509	1894708	1922198	1963566	1992230
Francia	1141005	1157860	1146348	1168723	1188102	1201207	1224559	1263963	1301851
Spagna	N.R.	N.R.	N.R.	N.R.	447062	457524	475072	493865	512376

diagramma a linee.

LEGENDA: N. R. = Non rilevato.

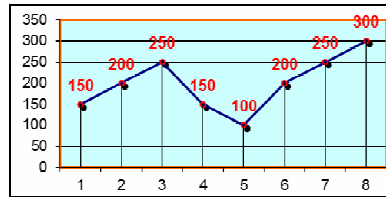
Livello 2

13. Il seguente aerogramma rappresenta la suddivisione delle quote azionarie di una certa azienda. Se le azioni sono in totale 12345000, quante ne possiede l'azionista di maggioranza e quante quello di minoranza?



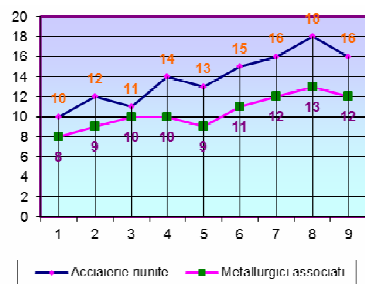
noranza?

[3456600; 1111050]



14. Dalla lettura del seguente grafico a linee, determinare la variazione percentuale dalla posizione 2 alla posizione 7, l'intervallo a estremi consecutivi, in cui si sono avuti il maggiore apprezzamento percentuale e quello in cui si è avuto maggiore deprezzamento percentuale.

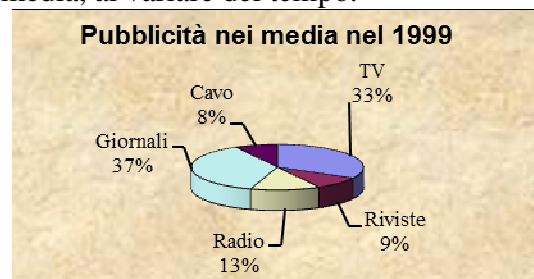
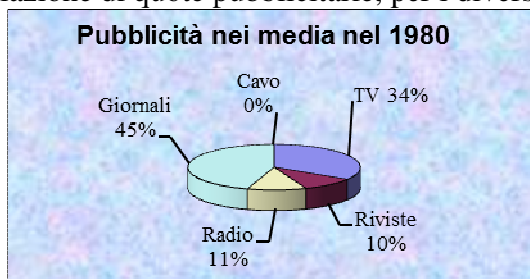
[25%; [5, 6]; [3, 4]]



15. Nel grafico a lato è riportato l'andamento di due titoli azionari in alcune rilevazioni contemporanee. Dalla lettura di tale grafico determinare a) la variazione percentuale che hanno avuto i due titoli nel totale delle osservazioni ; b) gli intervalli a estremi consecutivi, di maggiore apprezzamento per entrambi i titoli; c) gli intervalli a estremi consecutivi, di maggiore deprezzamento dei due titoli; d) la rilevazione in cui maggiore è stata la differenza fra i valori dei due titoli; e) quale dei due titoli ha mostrato un andamento più regolare.

[a) 40%, 50% ; b) [7-8], [3-4] ; c) [8-9], [4-5] ; d) 8 ; e) Metallurgici associati]

16. I due diagrammi seguenti (dati Sole 24 Ore) illustrano la ripartizione pubblicitaria in diversi mezzi di comunicazione nel 1980 e nel 1999. Mediante tali dati costruire un istogramma che metta a confronto la variazione di quote pubblicitarie, per i diversi media, al variare del tempo.

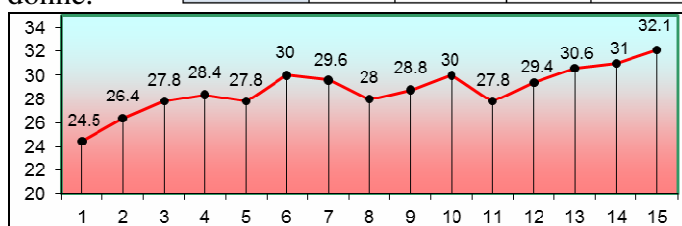


17. Utilizzando la rappresentazione grafica dell'istogramma in pila, rappresentare e discutere i dati a lato, che si riferiscono al consumo di alcolici, come risulta da un'indagine effettuata fra i consumatori di alcolici statunitensi. Da questi dati determinare la distribuzione totale del consumo alcolico fra uomini e

Bevanda	Birra	Liquori	Vino	Spumanti
Uomini	84%	54%	49%	41%
Donne	16%	46%	51%	59%

donne.

[57% uomini, 43% donne]



18. Nel diagramma a lato è illustrato l'andamento del prezzo, in dollari, di un barile di petrolio nel periodo maggio – giugno 2000, con rilevamenti ogni

4 giorni. Mediante tale grafico determinare a) il periodo di massimo apprezzamento assoluto; b) il periodo di massimo deprezzamento assoluto; c) la variazione percentuale in tutto l'arco dei rilevamenti.

[a) 5-6; b) 10-11; c) +31%]

19. Nella tabella seguente (dati ISTAT), sono riportati i valori relativi ai quozienti di fecondità secondo l'età della madre (ossia il numero di figli nati ogni 1000 donne in età feconda (15–49 anni)), rilevati in alcuni trienni. Rappresentare i dati mediante istogrammi, prima relativamente a ciascun triennio, poi in tutto l'arco temporale interessato.

TRIENNI/ETÀ	15 – 20	21 – 24	25 – 29	30 – 34	35 – 39	40 – 44	45 – 49
1930–32	24,4	135,3	176,5	157,7	118,2	53,3	6,3
1950–52	22,5	110,1	142,1	114,5	72,8	29,7	2,8
1960–62	27,2	121,1	156,7	111,8	61,0	22,7	1,7
1970–72	36,6	139,2	152,2	98,2	51,0	15,7	1,2
1980–82	26,0	102,3	111,5	65,6	26,5	6,0	0,4
1990–92	12,3	58,2	90,0	68,1	28,0	5,2	0,2

20. Con riferimento ai dati della tabella precedente, determinare il quoziente totale di fecondità per triennio. [672,01; 494,50; 502,20; 494,1; 338,3; 262]

	Piemonte	Lombardia	Veneto	Campania	Sicilia
Piemonte	95433	5227	1499	2485	4171
Lombardia	4568	156048	3442	3275	5380
Veneto	707	2809	63081	686	654
Campania	3026	7442	1704	98454	1313
Sicilia	4785	10165	1712	1108	73780

21. Nella tabella a lato (dati ISTAT) sono riportati i valori relativi alle iscrizioni e cancellazioni anagrafiche per trasferimento, secondo la regione, per l'anno 1990, riferite a 5 regioni italiane. Determinare i flussi migratori, ossia stabilire la composizione percentuale degli emigrati e degli immigrati regione per regione.

22. Nella seguente tabella (dati ISTAT), sono riportati il numero di iscritti in corso, il numero dei “fuori corso” e il numero dei laureati relativamente all'A.A. 1991/92 delle Università Italiane di alcuni corsi di laurea (dati ISTAT). Tenuto conto dei valori riportati quale corso di laurea a) è risultato più “difficile”; b) ha avuto una durata più “lunga” del previsto? [a) Architettura; b) Medicina]

Corso di laurea.	Iscritti in corso.	Iscritti fuori corso.	Laureati.
Architettura	63407	27503	4537
Economia e commercio	141664	61376	10644
Fisica	10605	6058	1065
Giurisprudenza	161284	81699	14244
Ingegneria civile	22690	9923	1942
Ingegneria elettronica	36678	15703	2854
Lettere	51010	24135	4279
Matematica	12319	5095	1340
Medicina	42259	31316	9687
Scienze Biologiche	25228	15376	3329

23. Ripetere quanto detto nell'esercizio precedente per la seguente tabella, relativa ai maschi di cinque regioni italiane, come risultava dal censimento del 1981. I valori si riferiscono alle percentuali dell'intera popolazione maschile di ciascuna regione.

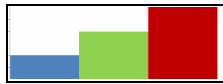
	Piemonte	Toscana	Lazio	Campania	Sicilia
Celibi	42,8	40,4	46	52,3	49,0
Coniugati	52,9	55,7	50,8	45,1	48,3
Separati	1,1	0,8	0,9	0,3	0,4
Vedovi	2,9	2,9	2,0	2,2	2,1
Divorziati	0,3	0,2	0,3	0,1	0,2



24. Dato l'aerogramma a lato, quale degli istogrammi proposti rappresenta la stessa distribuzione statistica? Costruire poi per ciascun istogramma l'aerogramma equivalente. [C]



25. Dato l'istogramma a lato, quale degli aerogrammi proposti rappresenta la stessa distribuzione statistica? Costruire poi per ciascun aerogramma l'istogramma equivalente. [B]



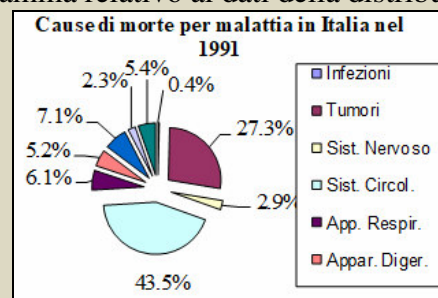
Lavoriamo insieme

Nella tabella seguente riportiamo i dati ISTAT relativi alle cause di morte per malattia registrate nel 1997 in Italia, raggruppate per grandi gruppi di cause e per aree geografiche.

	Infezioni	Tumori	Sistema Nervoso	Sist. Circolat.	App. Resp.	Apparato Digerente	Altre	Non determinato	Traumi e avvelen.
NORD	929	67139	6853	93759	13221	11322	13376	4729	12335
CENTRO	644	48792	5382	75286	9723	8199	11600	3363	9340
SUD	285	21894	2116	44543	6647	6159	8829	2323	4908
ISOLE	175	12628	1418	26613	4175	2798	5150	2141	3064

Mediante questa tabella possiamo determinare la probabilità frequentista che, per esempio, una persona morta al nord di malattia sia morta di tumore. Per far ciò basta dividere il numero di morti di tumore per il numero totale di morti per malattie in quell'area geografica. Pertanto in questo caso è $P = \frac{67139}{223663} \approx 30\%$.

Dalla tabella notiamo già che la maggior causa di morte per malattia, relativamente al 1991, in qualsiasi area geografica in Italia sono stati problemi al sistema circolatorio, includendo in ciò anche le malattie cardiache. Concludiamo presentando un aerogramma relativo ai dati della distribuzione riferiti all'intera nazione.



Livello 3

26. Nella tabella seguente (dati ISTAT), sono riportati i valori relativi ai nati vivi in alcuni trienni, espressi in numero di nati per ogni 1000 donne in età feconda (15 – 49 anni). Sono altresì riportati i nati vivi per 1000 abitanti. Rappresentare i dati nello stesso grafico a dispersione.

Trienni	Nati vivi per 1000 abitanti	Nati vivi per 1000 donne in età feconda
1930 – 32	29,4	94,3
1950 – 52	18,4	70,0
1960 – 62	18,3	72,5
1970 – 72	16,6	68,0
1980 – 82	11,3	46,5
1990 – 92	9,9	38,5

Con riferimento alla precedente tabella calcolare una stima del numero di abitanti donne in età feconda in ciascun triennio, in percentuale rispetto al totale della popolazione.

[32,7; 38,04; 39,6; 40,9; 41,1; 38,9]

27. Tenuto conto della tabella dell'esercizio precedente, determinare la probabilità che una donna scelta a caso fra quelle erano feconde: a) nel triennio 1960–62, avesse un'età compresa tra 30 e 34 anni; b) nel triennio 1980–82, avesse un'età compresa tra 21 e 39 anni; c) nel triennio 1930–32, avesse o un'età compresa tra 15 e 34 anni o un'età compresa tra 25 e 44 anni. [a) 22,2%; b) 90,2 %; c) 99,1%]
28. Relativamente alla tabella dell'esercizio 24, calcolare la probabilità che uno studente che nell'A.A. 1991/92 risultava iscritto in una delle Università italiana e in uno dei corsi di laurea indicati nella tabella: a) si sia laureato in quell'anno; b) si sia laureato in Matematica, essendo iscritto in tale corso; c) fosse fuori corso in un corso di laurea tecnico – scientifico. [a) 6,4%; b) 7,7%; c) 34,2%]

Indici centrali

Il problema

Abbiamo raccolto i dati, li abbiamo rappresentati e ora li vogliamo analizzare. Come possiamo rappresentare l'intera distribuzione statistica con un solo valore?

Cominciamo a porre una definizione.

Definizione 12

Data una distribuzione statistica a valori numerici, chiamiamo suo **indice centrale** un elemento che rappresenti tutte le sue modalità.

Esempio 15

Da una rilevazione ISTAT nelle scuole elementari italiane, nell'a.s. 1997/98 risultavano iscritti 2820919 alunni a fronte di 282403 insegnanti. Ovviamente non tutti gli insegnanti hanno lo stesso numero di alunni. Ma se *facessimo finta* di volere affidare a ogni insegnante lo stesso numero di alunni quale dovrebbe essere questo numero? Dobbiamo semplicemente distribuire tutti i 2820919 alunni ai 282403 insegnanti, cioè dobbiamo svolgere la divisione $\frac{2820919}{282403}$ il cui risultato è circa 9,989. Ovviamente questo valore è privo di significato perché il numero di alunni deve essere intero. Quindi diciamo che ci sono circa 10 alunni per insegnante.

Il precedente modo di procedere, *facendo finta* che tutti i componenti di una popolazione abbiano la stessa altezza, lo stesso peso, lo stesso reddito e così via, è un modo di procedere molto utilizzato nella pratica.

Definizione 13

Data una distribuzione statistica numerica di cardinalità finita diciamo **media aritmetica** delle sue modalità il numero ottenuto dal rapporto fra la somma delle modalità e la loro cardinalità totale.

In alcuni casi il calcolo della media aritmetica può essere facilitato.

Esempio 16

Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno
1245,24	1220,31	1254,12	1245,24	1245,24	1245,24
Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre
1220,31	1260,12	1245,24	1220,31	1260,12	2014,24

Supponiamo che un impiegato abbia ricevuto gli stipendi indicati in tabella, durante un certo anno, le differenze dovute a volte ad ore di straordinario, altre a tassazioni, che hanno reso lo stipendio diverso. Vogliamo calcolare il suo reddito medio annuo, cioè vogliamo stabilire quanto avrebbe preso mensilmente se avesse avuto sempre lo stesso stipendio. Ci accorgiamo che ci sono alcuni valori che si ripetono (1245,24 per 5 volte, 1220,31 per 3 volte e 1260,12 per 2 volte). Piuttosto che sommare tutte le modalità, conviene allora moltiplicare ciascun valore per le relative frequenze e poi dividere per la somma delle frequenze:

$$\frac{1245,24 \cdot 5 + 1220,31 \cdot 3 + 1254,12 \cdot 1 + 1260,12 \cdot 2 + 2014,24 \cdot 1}{12} \approx 1306,31.$$

Definizione 14

Data una distribuzione statistica numerica di cardinalità finita diciamo **media aritmetica ponderata o pesata** delle sue modalità, il numero ottenuto dal rapporto fra la somma dei prodotti delle differenti modalità per la rispettiva frequenza, e la somma delle frequenze.

Notazione 1

La media aritmetica ponderata delle modalità della distribuzione $\{(a_1, f_1), (a_2, f_2), \dots, (a_n, f_n)\}$, si indica con il simbolo $\mu = \frac{a_1 \cdot f_1 + a_2 \cdot f_2 + \dots + a_n \cdot f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$.

Esempio 17

Per indicare la precedente media di tredici elementi in modo abbreviato indichiamo le 8 modalità con i simboli $a_1, a_2, \dots, a_8$ e le relative frequenze con $f_1, f_2, \dots, f_8$. Così scriveremo: $\mu = \frac{a_1 \cdot f_1 + a_2 \cdot f_2 + \dots + a_8 \cdot f_8}{f_1 + f_2 + \dots + f_8}$.

Nasce un altro problema, come calcolare la media per dati raggruppati in classi? Vediamo un esempio.

Esempio 18

Età	23,5	27,5	32	36
Numero di laureati	279	325	143	44

Nella tabella a lato, sono riportati il numero di laureati in Economia e commercio nell'Università di Bari nel 2004, suddivisi per classi di età (dati MIUR). Se volessimo calcolare l'età media di un laureato come possiamo fare? Per applicare la formula stabilita per la media ponderata dobbiamo sostituire l'intervallo con un suo rappresentante. In questi casi in genere si considera il punto medio dell'intervallo, così per esempio alla classe [22; 25] sostituiamo $\frac{22+25}{2} = 23,5$; alla classe [26; 29] è

$\frac{26+29}{2} = 27,5$ e a [30; 34], $\frac{30+34}{2} = 32$. Ovviamente, come già detto in precedenza stiamo effettuando un

abuso, perché nessuno dice che per esempio i 279 laureati di età compresa tra 22 e 25 anni siano distribuiti uniformemente, cioè, avendo 4 classi di età, $\frac{1}{4}$ dei laureati hanno 22 anni, $\frac{1}{4}$ hanno 23 anni e così via. In questo caso poi 279 non è neanche multiplo di 4 e quindi a maggior ragione ciò non è possibile. Ma non avendo altre informazioni siamo costretti ad agire in questo modo. Ecco la nuova tabella:

Età	22-25	26-29	30-34	≥ 35
Numero di laureati	279	325	143	44

Nasce però un altro problema, che significa maggiore o uguale di 35 anni? Anche in questo caso non abbiamo altre informazioni, quindi dobbiamo effettuare una ulteriore supposizione. Allora o stabiliamo che l'intervallo abbia la stessa ampiezza degli altri, cioè 4 o 5 anni, e perciò lo consideriamo come l'intervallo 35-39 o 35-40 e gli associamo il termine centrale come rappresentante: $\frac{35+39}{2} = 37$ o 37,5. Oppure consideriamo per esempio che, altre informazioni ci suggeriscono che

non ci sono stati laureati di età superiore ai 37 anni per esempio e perciò consideriamo come rappresentante della classe il numero $\frac{35+37}{2} = 36$. Ovviamente ogni scelta produrrà una media diversa. L'età media è

$\frac{23,5 \cdot 279 + 27,5 \cdot 325 + 32 \cdot 143 + 36 \cdot 44}{279 + 325 + 143 + 44} = \frac{21654}{791} \approx 27,4$ anni. Scegliendo come rappresentante dell'ultima

classe 37 avremmo ottenuto sempre un valore approssimato di 27,4 anni; scegliendo invece 37,5 avremmo ottenuto 27,5. In questo caso quindi, essendo il numero di laureati della classe *aperta* relativamente piccolo rispetto al resto, il risultato finale non è molto influenzato dalla scelta dell'ampiezza.

Osserviamo che negli esempi svolti la media aritmetica non è un valore soddisfacente a rappresentare l'intera distribuzione, perché per esempio non ha alcun significato, come nel primo esempio del numero di alunni per docente. Ma anche nell'esempio precedente potremmo obiettare che 27,4 anni pur essendo un valore *ragionevole*, però non è un valore appartenente alla distribuzione, dato che essa conteneva 23,5; 27,5; 32 e 36. Questi due fatti accadono spesso nel calcolo della media aritmetica. Per evitarli possiamo cercare altri rappresentanti.

Esempio 19

Con riferimento ai dati dell'esempio precedente, poiché la maggior parte dei laureati ha un'età di circa 27,5 anni potremmo assumere questo valore come rappresentante dell'età dei laureati.

Ovviamente il precedente indice centrale ha un significato molto diverso rispetto alla media aritmetica.

Definizione 15

Diciamo **moda** di una distribuzione statistica di cardinalità finita, la o le modalità che presentano la massima frequenza.

Una distribuzione con una sola modalità più frequente si dice *unimodale*, con due *bimodale* e così via; in generale una distribuzione con più di una moda si dice *plurimodale*. La moda, si capisce anche il perché di questo nome, si usa soprattutto nei sondaggi d'opinione ed è in qualche modo la traduzione del modo di dire: “la maggioranza ha sempre ragione”. Con la moda si determina appunto la “tendenza” della maggior parte degli intervistati.

Esempio 20

Un cartolaio vuole evitare che si ripeta quel che è successo l'anno prima, quando ha gli sono rimasti invenduti decine di diari, perché i ragazzi preferivano diari – agende, mentre lui aveva acquistato soprattutto diari legati a personaggi di cartoni animati. Quindi quest'anno ha effettuato un sondaggio fra la sua clientela, chiedendo quale diario preferirebbero acquistare. Dai risultati della sua indagine, raccolti nella successiva tabella, il cartolaio ha rilevato che la preferenza, almeno fra la sua clientela abituale, quest'anno è per i diari con protagonisti i personaggi dei cartoni giapponesi, pertanto provvederà ad acquistare più diari del genere.

Pers. Disney	Manga	Barbie e simili	Agende	Smemoranda	Altri
20%	32%	10%	8%	18%	12%

Osserviamo tuttavia che, per quanto seria e scrupolosa possa essere l'indagine, nessuno garantisce al cartolaio di vendere effettivamente tutti o la maggior parte dei diari acquistati.

Potremmo anche fare un altro tipo di ragionamento.

Esempio 21

Consideriamo la seguente distribuzione di altezze di un gruppo di undici amici: {172; 170; 168; 170; 169; 184; 182; 159; 167; 168; 171}. Se calcolassimo la media aritmetica essa varrebbe circa 170,9 cm. Invece mettiamo le altezze in ordine crescente: {159; 167; 168; 168; 169; 170; 170; 171; 172; 182; 184}. Dato che i valori sono undici vi è un termine centrale, cioè il sesto, che in questo caso è 170, che divide gli 11 valori in modo che vi siano 5 valori non superiori a 170 e 5 non inferiori a 170. Scegliere 170 come indice centrale equivale a sapere che *almeno il 50% degli amici ha un'altezza di almeno 170 cm* e un *50% che ha un'altezza di al più 170 cm*.

Diamo un nome a questo nuovo indice centrale.

Definizione 16

Data una distribuzione statistica numerica di cardinalità finita, ordinato in modo crescente o decrescente, diciamo sua **mediana**

- il numero che occupa la posizione $n + 1$, se i termini sono in numero dispari: $2n + 1$;
- la media aritmetica degli elementi che occupano le posizioni n e $(n + 1)$, se i termini sono in numero pari: $2n$.

La mediana in pratica divide la distribuzione in due insiemi ugualmente numerosi i cui valori sono rispettivamente tutti *non inferiori alla mediana* e tutti *non superiori alla mediana*.

Esempio 22

Se agli amici dell'esempio precedente se ne fosse aggiunto un altro, alto 165 cm, la distribuzione sarebbe divenuta {159; 165; 167; 168; 168; 169; 170; 170; 171; 172; 182; 184}. A noi interessano gli elementi che occupano le posizioni 6 e 7, che lasciano 5 elementi prima e 5 dopo. Essi sono 169 e 170, quindi la mediana è la loro media aritmetica, cioè 169,5.

L'angolo storico

Il termine **mediana** è stato usato per la prima volta da Francis Galton nel 1881. Invece il termine **moda** è stato coniato nel 1895 da Karl Pearson.

Come possiamo calcolare la mediana nel caso di una distribuzione per classi di valori?

Esempio 23

Riprendiamo l'esempio 18 dei laureati in Economia e Commercio. Vogliamo sapere qual è la minima età del 50% dei laureati. Tutti i laureati sono in numero di $791 = 2 \cdot 395 + 1$, che è un numero dispari. Pertanto la mediana è l'elemento che occupa la posizione 395. Essendo i valori già ordinati crescentemente per età possiamo dire che questo elemento fa parte della classe [26; 29]. Ma che numero compreso tra 26 e 29 dobbiamo prendere? Facciamo sempre un'ipotesi, cioè che i 325 laureati siano distribuiti uniformemente nella classe, cioè che il primo di essi abbia 26 anni, il 325° ne abbia 29 e poi i 3 anni che separano questi due siano ripartiti uniformemente tra tutti. Cioè il secondo abbia $\left(26 + \frac{3}{325}\right)$ anni, il terzo abbia $\left(26 + \frac{6}{325}\right)$ anni, e così via aggiungendo sempre $\frac{3}{325}$ a ogni elemento successivo. In questo modo effettivamente il 325° avrà $\left(26 + \frac{3}{325} \cdot 325\right) = 29$ anni. Allora dato che il primo elemento della classe è in realtà il 280° di tutta la distribuzione ordinata, il 395° elemento della distribuzione occuperà la posizione $(395 - 279) = 116$ nella classe [26; 29] ed avrà perciò un'età teorica di $\left(26 + \frac{3}{325} \cdot 116\right) \approx 27,07$ anni.

In effetti potremmo generalizzare il concetto di mediana considerando piuttosto che il valore che separa gli elementi ordinati della distribuzione in due classi ugualmente numerose, in n classi ugualmente numerose. Per esempio in 4 parti, considerando così i cosiddetti **quartili**, q_1 , q_2 , q_3 e q_4 ; essi rappresentano il 25%, il 50% (perciò q_2 è la mediana), il 75% e il 100% della distribuzione.

Vi sono ancora altri indici centrali.

Esempio 28

Abbiamo già parlato in altre unità di questo corso della cosiddetta capitalizzazione composta, nella quale gli interessi vengono liquidati alla fine del prestito, insieme con il rimborso della somma. Il che significa che l'interesse si va a sommare al capitale che così aumenta. Abbiamo visto anche la validità della seguente formula $C_n = C_0 \cdot (1 + i)^n$, in cui C_n indica il capitale maturato dopo n rate, C_0 è il capitale inizialmente investito e i è il tasso di interesse espresso come numero decimale. Così, nel caso di un capitale iniziale di € 8200,00, impiegato a capitalizzazione composta con tasso del 3,1% per 15 anni, con cedola annuale, si riceverà alla fine del prestito un capitale di $€ 8200,00 \cdot (1 + 0,031)^{15} \approx € 12962,65$.

Negli ultimi anni vengono proposti dei nuovi certificati di deposito il cui tasso è variabile, legato a certi indici (prezzo del petrolio, valore di una o più azioni, ecc...). Supponiamo per esempio che un risparmiatore abbia depositato una certa somma vincolata per cinque anni, ottenendo i tassi rispettivi del 2,35%, 2,73%, 3,15%, 3,24%, 3,68%. Vogliamo sapere a quale tasso fisso annuale in ipotesi di capitalizzazione composta avrebbe dovuto investirli per ottenere la stessa somma finale. Per semplificare le idee supponiamo che il risparmiatore avesse investito 1000 euro, nella tabella seguente seguiamo l'evolversi del suo capitale.

Capitale iniziale	Tasso	Interesse	Capitale maturato
1000,00	2,35%	23,50	1023,50
1023,50	2,73%	≈27,94	≈27,94 + 1023,50 = 1051,44
≈ 1051,44	3,15%	≈ 33,12	≈ 1051,44 + 33,12 = 1084,56
≈ 1084,56	3,24%	≈ 35,14	≈1084,56 + 35,14 = 1119,70
≈ 1119,70	3,68%	≈ 41,20	≈ 1119,70 + 41,20 = 1160,90

Se avesse impiegato i soldi a un tasso fisso i , abbiamo invece visto che il suo capitale sarebbe stato $(1 + i)^5$. Ma questo valore deve essere pari ai diversi valori del capitale di partenza aumentato dell'interesse annuo. Cioè $(1 + i)^5 = 1023,5 \cdot 1027,3 \cdot 1031,5 \cdot 1032,4 \cdot 1036,8$, il che significa che $(1 + i) = \sqrt[5]{1023,5 \cdot 1027,3 \cdot 1031,5 \cdot 1032,4 \cdot 1036,8} \approx 1030,3$, quindi $i \approx 3,03 \%$.

Nell'esempio precedente abbiamo considerato un nuovo indice centrale relativo a una distribuzione statistica

Definizione 19

Data una distribuzione statistica numerica di cardinalità finita, $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ ad elementi positivi, diciamo sua **media geometrica** la quantità $G = \sqrt[N]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_N}$

La media geometrica si usa per determinare il valore medio di una distribuzione in cui ciascuno degli elementi della distribuzione si ottiene dal precedente moltiplicandolo per un dato fattore. Data la presenza di una radice che potrebbe avere indice pari, imponiamo che tutti i valori siano positivi.

Esempio 29

Tre operai sbrigano uno stesso lavoro in 6, 8 e 9 ore rispettivamente. Un operaio “medio” che cioè lavorasse in media quanto i tre, in quanto tempo sbrigherebbero il lavoro? Poiché ogni operaio in un'ora sbriga rispettivamente $\frac{1}{6}, \frac{1}{8}$ e $\frac{1}{9}$ del lavoro, se i tre lavorano insieme ciascuno concorre al lavoro con questa percentuale, perciò ogni ora vengono svolti $\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} = \frac{12 + 9 + 8}{72} = \frac{29}{72}$ del lavoro. Questo significa che ciascuno dei tre mediamente in un'ora ha svolto $\frac{1}{3} \cdot \frac{29}{72} = \frac{29}{216}$ del lavoro, quindi un operaio che lavora quanto i tre in media completerà il lavoro in $\frac{216}{29} = \frac{3}{\frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}} \approx 7.45$ (ore).

Abbiamo così definito ancora un indice centrale.

Definizione 20

Data una distribuzione statistica numerica di cardinalità finita, $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ ad elementi diversi da zero, diciamo sua **media armonica** la quantità $H = \frac{N}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{x_i}}$

Abbiamo imposto che tutti gli elementi non siano nulli perché di essi prendiamo il reciproco.

Verifiche

Lavoriamo insieme

I seguenti dati ISTAT si riferiscono al numero di Kg di concimi chimici per ettaro di terra coltivata in Italia

Anno	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
Kg/Ettaro	145,5	145,7	136,7	145,6	150,9	150,5	172,3	174,3	161,8

in alcuni anni.

Vogliamo calcolare quanti Kg per ettaro mediamente sono stati usati in Italia nei 9 anni indicati. Basta sommare i valori e dividere per 9, ottenendo così $\frac{1383,3}{9} \approx 153,7$.

Date le seguenti distribuzioni statistiche, calcolarne la media aritmetica e rispondere alle altre eventuali domande

Livello 1

1. Biblioteche statali: consistenza del materiale, consultazioni, prestiti (Dati ISTAT) Media per riga.

Anno	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1993	1994
Biblioteche statali	42	42	47	47	49	46	50	50
Manoscritti	140868	143381	143731	147148	159362	159422	162504	163315
Volumi	15669407	15874223	16133067	16361424	16740783	16884696	20485525	21229466
Opere consultate	3379657	3840622	3433517	3552974	3850811	3718685	2963070	3013284

[46,625; 152466,4; 17422324; 3469078]

2. Prezzo medio della benzina nell'anno 2008.

[1,40]

Data	01/03	02/05	02/05	01/07	03/08	08/09	04/10	09/11	08/12
Prezzo medio	1,373	1,444	1,504	1,544	1,489	1,468	1,438	1,221	1,12

3. Delitti denunciati all'Autorità giudiziaria (Dati ISTAT) Media per tipo di delitto.

Tipo di delitto	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Omicidi volontari	2783	2678	2773	2631	2571	2529
Furti	1369692	1333118	1338446	1393974	1401471	1478221
Rapine	31515	29981	28614	31244	32896	37782
Estorsioni	3214	3340	3261	3842	3352	3534
Sequestro di persona	84	86	98	89	85	91
Stupefacenti	33310	38290	38269	38954	41420	43014
Altri delitti	819305	765984	856027	952257	958959	860577

[2661; 1385820; 32005; 3424; 89; 38876; 868852]

4. Potenza eolica installata a fine 2011. Di quanto il valore italiano è minore della media, in percentuale?

Paese	Cina	USA	Germania	Spagna	India	Francia	Italia
Potenza in MW	62412	47084	29075	21726	16078	6836	6743

[27136,29; ≈302%]

5. Prezzi medi al consumo del pane al Kg, in Italia, riportati in Euro correnti. (Dati ISTAT) Qual è la variazione percentuale del prezzo del pane dal 1970 al 2010? In quale quinquennio il prezzo del pane è aumentato percentualmente di più?

[€ 1,28; ≈ 2889%; 75-80]

ANNO	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
PREZZO	0,09	0,15	0,44	0,84	1,19	1,72	2,07	2,35	2,69

6. Prezzi medi al consumo del pane al Kg, in Italia, riportati in Euro del 2010. (Dati ISTAT) Possiamo dire che il trend intravisto tenuto conto del valore assoluto del prezzo del pane è rimasto uguale a quello considerandone il valore relativo?

ANNO	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
PREZZO	1,53	1,48	1,96	1,94	2,09	2,36	2,54	2,58	2,69

[€ 2,13; No, il prezzo non è in costante aumento, ci sono anzi quinquenni in cui il prezzo diminuisce]

7. Consumo giornaliero di litri di benzina di una compagnia di taxi. [≈ 6,87]

Litri	5	6	7	8	9	10
Num. Auto	14	15	10	16	5	3

8. Prezzi medi al consumo del latte in Lt, in Italia, riportati in Euro del 2010. (Dati ISTAT) Possiamo dire che dal 1970 al 2010 il prezzo del latte ha avuto un comportamento simile a quello del pane?

ANNO	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
PREZZO	1,14	1,17	1,19	1,22	1,29	1,35	1,35	1,37	1,42

[€ 1,28; No, il latte nel 95-00 ha avuto sempre un aumento di prezzo; il pane invece ha avuto due periodi (70-75 e 80-85) di decrescita. D'altro canto però gli aumenti del prezzo del pane sono stati considerevolmente più alti, specialmente nel periodo 75-80]

9. Numero massimo di posti a sedere per autobus di una compagnia. [≈ 43]

Numero Posti	12	15	20	30	52	54
Numero Bus	3	4	2	8	24	12

10. Numero di scarpa di candidati per l'ammissione in una scuola militare. [≈ 42,8]

Numero scarpa	39	40	41	42	43	44	45	46	47
Numero Candidati	2	15	24	38	55	36	20	5	2

11. Popolazione residente in Italia, espressa in milioni, relativamente a 8 censimenti ufficiali (dati ISTAT).

Data	21/4/1931	4/11/1951	15/10/1961	24/10/1971	25/10/1981	20/10/1991	21/10/2001	9/10/2011
Popolazione	41,6	47,5	50,6	54,1	56,6	56,8	57	59,4

[52,95]

Livello 2

Nei seguenti esercizi per le classi di ampiezza non specificata, considerarle omogenee con le altre.

12. Numero di azioni trattate in un giorno in borsa per alcune società (in migliaia). [≈ 404286]

Numero scambi	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	>600
Numero Società	25	45	78	104	27	36

13. Stipendio medio mensile dei dipendenti di una società (in migliaia di euro). [≈ 1415,15]

Stipendio	<1000	1000-1200	1201-1400	1401-1600	1601-1800	>1800
Num. Dipendenti	10	24	57	68	27	12

14. Ripartizioni percentuali degli iscritti di leva nati nel 1972 per classi di stature relativamente ad alcune regioni italiane (dati ISTAT). [174,06; 174,53; 173,77; 172,44; 170,33]

Regione	155-159	160-164	165-169	170-174	175-179	180-184	185-189	190-194
Piemonte	1,3	6	17,4	28,7	26	14,4	5	1,2
Emilia Romagna	1,1	5,2	16,2	27,8	27,3	15,4	5,5	1,5
Lazio	1,3	6,1	17,9	30,1	26,1	13,3	4,1	1,1
Puglia	2,3	8,8	21,4	30,7	23	10,3	2,9	0,6
Sardegna	4,6	13,9	27,4	28,8	17,2	6,3	1,5	0,3

15. Per far sì che risulti più difficile copiare, il professor De Pignolis assegna 6 diversi compiti di matematica, in ogni gruppo vi sono rispettivamente 3, 4, 4, 5, 3 e 4 ragazzi. Dato che il voto medio di ciascun gruppo è stato rispettivamente 5,25, 5,75, 6,75, 4,25, 7,25 e 6,25, determinare il voto medio della classe. [≈ 5,82]

16. La media aritmetica del voto in matematica dei ragazzi della I A è 5,38, quella dei ragazzi della I B è 5,72, infine quella dei ragazzi della I C è 5,63. Sapendo che nelle tre classi vi sono rispettivamente 24, 27 e 22 studenti, determinare la media in matematica degli alunni delle classi prime. [≈ 5,58]

17. Le seguenti sono le distribuzioni statistiche dei voti di due studenti in una stessa materia. Calcolare le

Studente A	6	4	5	3	7	4	4
Studente B	5	6	5	4	6	7	3

relative medie aritmetiche, indicate con μ_A, μ_B . [≈ 4,7; ≈ 5,1]

18. Si consideri la distribuzione unione delle due distribuzioni dell'esercizio precedente e se ne calcoli la relativa media aritmetica μ . Si verifichi che, a parte qualche errore nelle approssimazioni, vale la seguente uguaglianza: $\mu = \frac{\mu_A + \mu_B}{2}$. [≈ 4,93]

19. Di seguito sono riportati i compensi, espressi in Euro, percepiti da un professionista in due distinte

I giornata	25	36	42	18	74	58	94	29	31
II giornata	47	51	24	32	36	58	72	15	19

giornate di lavoro da diversi clienti. Si calcolino le rispettive medie aritmetiche μ_A, μ_B . [$\approx 45,2$; $\approx 39,3$]

20. Con riferimento all'esercizio precedente si calcoli la media aritmetica μ_C relativa alle due giornate. Si

verifichi che, a parte qualche errore nelle approssimazioni, si ha: $\mu_C = \frac{\mu_A + \mu_B}{2}$. [$\approx 42,3$]

21. Calcolare la media aritmetica della distribuzione statistica S formata dai primi 10 numeri naturali. Ripetere il procedimento per le distribuzioni formate dai primi 11, 12, 13, 14 e 15 numeri naturali. Enunciare quindi una congettura su quale può essere la media aritmetica della distribuzione formata dai primi n numeri naturali. Per quali valori di n la media è un elemento della distribuzione?

[5,5; 6; 6,5; 7; 7,5; 8; $\frac{n+1}{2}$; n dispari]

22. Calcolare la media aritmetica della distribuzione statistica S formata dai primi 10 numeri naturali pari. Ripetere il procedimento per le distribuzioni formate dai primi 11, 12, 13, 14 e 15 numeri naturali pari. Enunciare quindi una congettura su quale può essere la media aritmetica della distribuzione formata dai primi n numeri naturali pari. Per quali valori di n la media è un elemento della distribuzione?

[11; 12; 13; 14; 15; 16; $n+1$; qualsiasi n]

23. Uno studente per calcolare la media μ di tre numeri, a , b e c , calcola la media fra c e la media di a e b . Se $a < b < c$, possiamo dire che la procedura è corretta? Giustifica la risposta. [No]

Lavoriamo insieme

Un insieme di 35 numeri ha per media 22, eliminiamo un numero e la media diviene 20. Quale numero abbiamo tolto? Apparentemente il problema sembra privo di soluzione, sono poche le informazioni in nostro possesso, almeno così ci pare. Ragioniamo un attimo. Cosa significa che la media dei 35 numeri è 22? Che la somma di tutti i numeri è $35 \cdot 22 = 770$. Allora cosa significa che se eliminiamo un numero la media diviene 20? Che adesso abbiamo 34 numeri, ogni numero vale 20, quindi la loro somma è $34 \cdot 20 = 680$. Perciò il numero eliminato è semplicemente $770 - 680 = 90$.

Risolvere i seguenti problemi

Livello 1

24. La media aritmetica di un numero e del suo quadruplo è 20, trovare il numero. [6]
25. La media di 5 numeri è 7, ne togliamo uno e la media dei numeri rimanenti diventa 6. Che numero abbiamo tolto? [11]

Livello 2

26. La media di alcuni numeri è 120, se uno dei numeri è aumentato di 300, la media diviene 135. Quanti sono i numeri? [20]
27. Agli esami di stato il voto è espresso in centesimi. In un certo Istituto i promossi in media hanno ricevuto 65 punti, mentre i bocciati hanno avuto un voto medio di 35. Sapendo che tutti i candidati erano 70 e che il voto medio complessivo è stato 53, determinare il numero dei promossi. [42]
28. Un insegnante di matematica effettua lo stesso test in due classi e il punteggio è espresso in centesimi. Se la media della prima classe è 90 e quella della seconda è 75, mentre la media delle due classi insieme è 81, quanti studenti vi sono nella seconda classe se nella prima ve ne sono 20? [30]
29. 9 dei 10 componenti di una squadra di calcio, escluso il portiere, hanno segnato 15 reti a stagione ciascuno, il bomber ha segnato 9 reti in più della media di tutti e 10. Quante reti ha segnato la squadra nella stagione? [160]
30. La media di un insieme numerico è 41, eliminiamo il numero 74 e la media dei rimanenti numeri diviene 38. Quanti sono gli elementi dell'insieme? [12]
31. Il numero medio di francobolli che hanno cinque ragazzi è 68, i primi quattro ne hanno rispettivamente 75, 62, 84 e 53. Quanti ne ha il quinto? [66]
32. La media di sette numeri naturali diversi è 7. Qual è il massimo valore possibile che può assumere uno dei sette numeri? [28]

33. Aumentiamo tutti i numeri di un dato insieme di una stessa quantità k , cosa accade alla media dei numeri? [aumenta di k]
34. Un insieme è formato da $(n - 1)$ elementi uguali a 1 e un elemento pari a $\frac{24}{25}$. Determinare n sapendo che la media aritmetica dell'insieme è $\frac{624}{625}$. [25]
35. Un insieme è formato da 15 elementi uguali fra loro e un elemento pari a 45. Determinare il valore comune dei 15 elementi sapendo che la media aritmetica dell'insieme è 60. [61]
36. Calcoliamo la media μ di n numeri e la aggiungiamo agli n numeri. Poi calcoliamo la media di questi $n + 1$ numeri, in che relazione è con μ ? [Sono uguali]
37. Alex ha una media aritmetica esattamente uguale a 7, possiamo dire con certezza che A) Ha preso sempre 7 in ogni verifica; B) Non ha preso meno di 4 in ogni verifica; C) Non ha preso più di 9 in ogni verifica; D) Ha preso sempre voti interi (cioè non ha preso per esempio 7+ o 7 e mezzo); E) Nessuna delle precedenti è vera con certezza [B]
38. Al primo anno del corso di laurea di Ingegneria di una certa Università, sono previste le materie di Analisi matematica I, Geometria, Chimica, Economia, Statistica, Informatica. Ciascuno degli insegnamenti ha un valore in crediti così distribuito, le materie matematiche valgono 9 crediti, Informatica 12 crediti e le rimanenti 6 crediti. Uno studente ha superato gli esami con i seguenti voti, nell'ordine, {27, 24, 30, 25, 28, 27}. Qual è la sua media, tenuto conto dei crediti? Quanto dovrebbe valere, in crediti, la materia di Statistica perché la media divenga 27? [$\approx 26,7$;
39. Con riferimento al precedente quesito se calcolassimo la media delle materie con uguale valore in crediti e poi calcolassimo la media di queste medie, lo studente risulterebbe favorito o sfavorito? Giustificare la risposta. [Avvantaggiato, la media diverrebbe $\approx 27,2$]
40. Con riferimento al precedente quesito, possiamo dire che la media delle medie ha sempre un valore maggiore della media ponderata dei valori?
[No, p.e. se le 4 materie in cui si sono ottenuti i migliori voti valgono 12 crediti e le rimanenti 6 crediti, la media ponderata è 27,3 mentre la media delle medie è 26,25]

Lavoriamo insieme

Un insegnante è abituato a valutare i propri alunni con voti espressi in centesimi. Erika ha ottenuto nell'anno una media di 87, calcolata su 10 voti. L'insegnante decide di eliminare dai suoi voti il migliore e il peggiore, che sono rispettivamente 95 e 55. Quanto vale adesso la media di Erika?

Indichiamo con $v_1, v_2, \dots, v_{10}$ i voti incogniti che ha preso Erika; sappiamo che $\frac{v_1 + v_2 + \dots + v_{10}}{10} = 87$.

Supponiamo che i voti migliore e peggiore siano v_9 e v_{10} , tanto il nome simbolico che assegniamo a tali voti è influente per il nostro problema. Ciò significa che la media adesso è misurata da $\frac{v_1 + v_2 + \dots + v_8}{8}$.

La quantità incognita è perciò il numeratore della frazione precedente. Possiamo determinarlo sfruttando ciò che sappiamo e scrivendo quanto segue: $\frac{v_1 + v_2 + \dots + v_8 + 55 + 95}{10} = 87 \Rightarrow \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_8}{10} = 87 - 15 = 72 \Rightarrow v_1 + v_2 + \dots + v_8 = 720$. Dividendo per 8 determiniamo quindi la media cercata che è, perciò, 90.

Livello 3

41. In un'assemblea scolastica aperta a insegnanti e studenti, il 19% dei primi e il 95% dei secondi hanno votato a favore della costituzione di un corso pomeridiano di musica rock. Se hanno votato tutti gli studenti e gli insegnanti della scuola e i favorevoli sono stati il 91% del totale, per ogni insegnante quanti studenti vi sono nella scuola? [18]
42. Gli angoli interni di un poligono convesso hanno una misura media di 150° , quanti lati ha il poligono?
Suggerimento: ricordare come si trova la somma degli angoli interni di un poligono convesso. [12]
43. La media aritmetica di a e b è 10, mentre quella di b e 10 è $c/2$. Calcolare la media di a e c . [15]

44. La media aritmetica di tre numeri è 19, se sostituiamo il numero minore con il maggiore la media diviene 22, se invece sostituiamo il numero maggiore con il minore la media diviene 16. Determinare i 3 numeri. [Problema indeterminato]
45. La media dei numeri $\{x; x; y; z\}$ è 5,5; quella dei numeri $\{y; z\}$ è 8. Determinare la media dei numeri $\{x; y; z\}$. [19/3]
46. La certificazione ISO9000 viene assegnata a tutti quei prodotti che superano severi tests di affidabilità. Una ditta che produce cerniere per porte richiede questo riconoscimento. La commissione procede alla scelta di un campione di 500 cerniere. Se non più del 10% di tale campione si discosta dalla lunghezza prefissata di *cm.* 15 per non più dello 0,1%, viene rilasciata la relativa certificazione. In tabella sono presentati i risultati del campionamento. Completare la tabella in modo che la ditta riceva il certificato. [14,99: min 0; 15,03 max 204]

Lunghezza	14,97	14,98	14,99	15,00	15,01	15,02	15,03
Frequenza	12	15		125	114	30	

47. Risolvere il precedente quesito nel caso in cui lo scarto è al massimo di 0,1 *cm.* [Impossibile]
48. In relazione al precedente quesito, qual è la massima percentuale che può discostarsi per non più di 0,1 *cm*, affinché il problema abbia soluzioni? [11,4%]
49. Sia μ_A la media aritmetica di N elementi e μ_B quella di altri H elementi, quanto vale la media μ_C di tutti gli $(N + H)$ elementi?
- $$\left[\mu_C = \frac{N \cdot \mu_A + H \cdot \mu_B}{N + H} \right]$$
50. La media di n numeri naturali diversi è n . Qual è il massimo valore possibile che può assumere uno degli n numeri?
- $$\left[\frac{n^2 + n}{2} \right]$$
51. Una macchina percorre 50 *km* alla media di 100 *km/h* e altri 50 *km* alla media di 80 *km/h*. Possiamo dire che la sua velocità media nell'intero percorso è di 90 *km/h*, cioè la media delle due velocità? Giustificare la risposta. [No, è circa 88,9 *km/h*]
52. Una macchina cammina per 30 minuti alla media di 100 *km/h* e per 20 minuti alla media di 80 *km/h*. Possiamo dire che la sua velocità media nell'intero percorso è di 90 *km/h*, cioè la media delle due velocità? Giustificare la risposta. [No, è circa 92 *km/h*]
53. Una macchina percorre 50 *km* alla media di 100 *km/h* e altri 40 *km* alla media di 100 *km/h*. Possiamo dire che la sua velocità media nell'intero percorso è di 100 *km/h*, cioè la media delle due velocità? Giustificare la risposta. [Si]
54. Tenuto conto degli esercizi seguenti possiamo dire che la velocità media in due percorsi è uguale alla media delle velocità nei due percorsi solo se hanno la stessa velocità? [No, basta che i due percorsi vengano effettuati nello stesso tempo]
55. In generale se un tratto a è effettuato a una velocità v_1 e un tratto b a una velocità v_2 , la velocità media nel tratto $a + b$ quanto vale, in termini di a , b , v_1 e v_2 ?
- $$\left[\frac{v_1 \cdot v_2 \cdot (a + b)}{av_2 + bv_1} \right]$$
56. In generale se per un tempo t_1 si cammina a una velocità v_1 e per un tempo t_2 si cammina a una velocità v_2 , la velocità media nel tempo totale, quanto vale, in termini di t_1 , t_2 , v_1 e v_2 ?
- $$\left[\frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2} \right]$$
57. Indichiamo con $\mu(x, y)$ la media aritmetica fra x e y . In che relazione sono $\mu(x, y, z)$ e $\mu(\mu(x, y), z)$ se $x < y < z$? [Il primo valore è sempre minore del secondo]
58. Dati due numeri calcoliamo la loro media aritmetica (a) e la loro media geometrica (g), poi calcoliamo la media aritmetica dei loro quadrati (q). In che relazione sono fra loro $a^2 - g^2$ e $q^2 - a^2$. [Sono uguali]
59. Consideriamo un insieme i cui primi due elementi sono x e y , ogni elemento successivo al secondo si ottiene come media aritmetica di tutti quelli che lo precedono. Qual è il termine di posto 1000?

$$\left[\text{Tutti i termini successivi al secondo sono uguali a } \frac{x + y}{2} \right]$$

60. In una certa popolazione il rapporto fra donne e uomini è $\frac{f}{m}$. Sapendo che la media aritmetica delle età delle donne è d , mentre quella degli uomini è u , determinare la media delle età della popolazione.

$$\left[\frac{d \cdot f + m \cdot u}{f + m} \right]$$

La mediana

Lavoriamo insieme

Riprendiamo in considerazione il prezzo medio della benzina durante il 2008, rilevato in alcune giornate,

Data	01/03	02/05	02/05	01/07	03/08	08/09	04/10	09/11	08/12
Prezzo medio	1,373	1,444	1,504	1,544	1,489	1,468	1,438	1,221	1,12

che riportiamo di seguito. La media si calcola in € 1,40. Vogliamo invece calcolare la mediana. Dobbiamo scrivere i dati in ordine crescente: {1,12; 1,221; 1,373; 1,438; 1,444; 1,468; 1,489; 1,504; 1,544}. Dati che i valori sono in numero dispari, 9, abbiamo il termine centrale, cioè il quinto che è proprio la mediana, ossia € 1,444. Se avessimo avuto solo 8 rilevazioni, mancando per esempio il dato finale, che rappresenta anche il più piccolo dei valori, dovremmo considerare la media aritmetica fra il 4° e il 5° elemento, cioè $\frac{1,444 + 1,468}{2} = 1,456$.

Livello 1

61. Si calcoli la mediana M_e della seguente distribuzione statistica $S = \{1, 5, 8, 4, 6, 2, 7, 9, 5, 3, 5\}$. Si consideri poi la distribuzione S' i cui elementi sono i reciproci di quelli di S e se ne calcoli la relativa mediana M_e' . Verificare che $M_e = \frac{1}{M_e'}$. Questo fatto accade per tutte le distribuzioni? Si dia una spiegazione. [5; Sì se la distribuzione non contiene zeri]
62. Di seguito i dati relativi all'Indice della Produzione Industriale italiana nel 2010. Possiamo dire che nel 2010 il 25% degli indici mensili è stato superiore a quale valore? [85,85]

Mese	Gen	Feb	Mar	Apr	Mag	Giu	Lug	Ago	Set	Ott	Nov	Dic
Indice	77,2	86,9	97,4	89	93,8	93,3	99,2	52	96,6	94,4	95,5	82,7

63. Di seguito i dati relativi all'Indice del Fatturato delle Industrie alimentari, delle bevande e del tabacco italiane nel 2010. Possiamo dire che nel 2010 il 75% degli indici mensili è stato inferiore a quale valore? [122,95]

Mese	Gen	Feb	Mar	Apr	Mag	Giu	Lug	Ago	Set	Ott	Nov	Dic
Indice	92,5	100,3	123,7	107,7	112,2	120,4	116,4	105,6	122,7	114,7	125,3	130,3

64. Di seguito i dati relativi al numero di incidenti stradali in Italia nel 2009. Possiamo dire che nel 2009 il 50% del numero di incidenti mensili è stato inferiore a quale valore? [5090,5]

Mese	Gen	Feb	Mar	Apr	Mag	Giu	Lug	Ago	Set	Ott	Nov	Dic
Incidenti	4338	4128	5228	4953	5753	5317	5357	3382	4856	5521	5468	4657

65. Di seguito i dati relativi agli arrivi di clienti negli esercizi alberghieri nei mesi estivi in Italia nel 2009. Possiamo dire che nell'estate 2009 il 50% del numero di arrivi mensili è stato superiore a quale valore?

Mese	Giu	Lug	Ago	Set
Presenze	4017099	4697548	5859594	3743958

[4357324]

Livello 2

66. In una distribuzione statistica formata da 10 elementi ordinati in maniera crescente, si sa che la differenza fra due qualsiasi elementi consecutivi è uguale a 7. Sapendo che la mediana vale 43,5 determinare gli elementi della distribuzione. [12; 19; 26; ...; 75]
67. La media di x , 3 , $4x - 3$, $x + 4$, -16 , 9 e $x - 4$, è 4. Quanto vale la mediana? [5]

68. Sia la media che la mediana di un insieme di cinque distinti numeri naturali è 7, mentre il range è 6. Quali sono i numeri? $[\{5, 6, 7, 8, 9\} \text{ oppure } \{4, 6, 7, 8, 10\}]$
69. La lista ordinata di numeri $\{18, 21, 24, a, 36, 37, b\}$ ha mediana 30 e media 32. Calcolare a e b . $[30, 58]$
70. Provare che la media e la mediana di un numero qualunque di numeri interi consecutivi hanno lo stesso valore.
71. Chiamiamo progressione aritmetica una successione di numeri disposti in ordine crescente o decrescente, in modo che la differenza fra due termini consecutivi sia costante (per esempio 1, 4, 7, 10, 13, ... in cui la differenza costante è 3). Provare che la media aritmetica di una progressione aritmetica è uguale alla media fra il minimo e il massimo valore. Può accadere che la mediana di una progressione aritmetica coincida con la media aritmetica? Se sì quando? $[\text{Sempre}]$
72. Sia la media che la mediana di un insieme di 5 diversi numeri naturali è uguale a 7, mentre il range è 6. quali sono i numeri? $[\{4, 5, 7, 9, 10\} \text{ oppure } \{4, 6, 7, 8, 10\}]$

Utilizzando il concetto di media geometrica risolvere i problemi seguenti

Livello 2

73. Supponiamo che limitatamente ai primi anni di vita, un giovane in media aumenti annualmente la propria statura del 7%. Se quando è nato era lungo 50cm, quanto sarà alto a 20 anni? $[\approx 1,93 \text{ m}]$
74. Un giovane, che alla nascita era alto 50 cm, all'età di 20 anni è alto 180 cm; di quanto è aumentata mediamente la sua statura annuale? $[3,3 \text{ cm}]$
75. Un risparmiatore ha investito una certa somma in regime di capitalizzazione composta, per 7 anni, con i seguenti tassi di interesse annuali, legati al tasso d'inflazione medio: 3,15%, 3,5%, 3,72%, 4,12%, 4,25%, 4,0%, 3,85%. Quale sarebbe stato il valore del tasso fisso d'interesse con capitalizzazione composta nei sette anni? $[\approx 3,78\%]$
76. Per pesare un oggetto si usa una bilancia a due braccia. Per ridurre al minimo gli errori si effettuano diverse pesate, scambiando il peso incognito e quelli noti fra le due braccia. I risultati ottenuti sono presentati nella tabella. Utilizzando il concetto di media geometrica determinare il peso dell'oggetto.

Peso in grammi	13,72	13,73	13,74	13,75	13,76	13,77
Frequenza	3	4	2	5	1	2

Attenzione a ben considerare le frequenze nella formula. $[\approx 13,74]$

77. In un laboratorio viene effettuato il seguente esperimento. Si innesta una coltura batterica e si osserva il suo comportamento. Dopo un'ora il numero dei suoi elementi è raddoppiato. Allora viene aggiunto un particolare reagente che triplica il numero degli elementi sempre in un'ora. Due ore dopo viene aggiunto un altro reagente che quadruplica il numero degli elementi. Infine dopo tre ore si smette l'osservazione della coltura. Si vuol sapere di quanto la coltura batterica avrebbe aumentato il numero dei suoi elementi ogni ora, se lo avesse fatto in modo costante. $[\approx 3,24]$
78. Un giardiniere, con tre acquisti successivi, raddoppia ogni volta il numero di piante che già possiede. Ne acquista poi altre e, per 4 volte, triplica il numero delle sue piante, e ancora per 2 volte moltiplica per nove il suo vivaio. Infine con gli ultimi tre acquisti moltiplica ogni volta per 6 le piante che ha. Di quanto avrebbe dovuto aumentare, ogni volta nello stesso modo, ogni acquisto per avere alla fine lo stesso numero di piante? $[\approx 3,87]$

79. Dimostrare che la media geometrica G di due numeri a e b , è soluzione dell'equazione $\frac{G-a}{b-G} = \frac{a}{G}$.

Livello 3

80. Un risparmiatore ha investito una certa somma in regime di capitalizzazione composta, per 10 anni, con i seguenti tassi di interesse annuali per i primi 7 anni: 3,05%, 3,1%, 3,02%, 4,2%, 4,5%, 4,0%, 3,5%. Gli ultimi 3 anni riceve invece un tasso fisso stabilito in partenza. Se vuole ottenere un tasso medio annuo del 3,75% quanto deve essere il tasso fisso? $[\approx 4,18\%]$
81. Con riferimento al precedente quesito, tenuto conto che il tasso fisso non può essere superiore al 5%, qual è il massimo tasso medio annuale ottenibile? $[\approx 3,95\%]$

82. Data l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, esprimere la media aritmetica e la media geometrica delle sue soluzioni, supposte reali e positive, in funzione dei coefficienti.
- $$\left[\mu = -\frac{b}{2a}; G = \sqrt{\frac{c}{a}} \right]$$
83. Due numeri reali positivi sono tali che la loro media aritmetica eguaglia la media geometrica. Determinare il rapporto fra il maggiore e il minore dei due numeri.
- $$\left[7 + 4\sqrt{3} \right]$$

Utilizzando il concetto di media armonica risolvere i problemi seguenti

Livello 2

84. 5 operai sbrigano uno stesso lavoro rispettivamente in 3, 3,5, 4, 4,5, 5 ore. Un operaio che lavora in media quanto i cinque in quanto tempo effettuerà il lavoro? $[\approx 3,87 \text{ ore}]$
85. Tre muratori, A, B e C, riescono a innalzare un muro rispettivamente in 2 ore, 2 ore e 24 minuti, 2 ore e 48 minuti. Un muratore che lavorasse quanto i tre mediamente, in quanto tempo innalzerà un muro? Lavorando per una giornata lavorativa di 8 ore, quanti muri innalzerà? $[\approx 2^{\text{h}}21^{\text{m}}; \approx 3,4]$
86. 4 mietitrebbie riescono ad arare un ettaro di terreno coltivato a grano, rispettivamente in $3^{\text{h}}25^{\text{m}}$, $3^{\text{h}}40^{\text{m}}$, $4^{\text{h}}10^{\text{m}}$, $4^{\text{h}}30^{\text{m}}$. Per quanto tempo dovrà lavorare una mietitrebbia che lavora mediamente quanto le quattro per arare un campo di 15 ettari? $[\approx 3^{\text{h}}54^{\text{m}}; \approx 58^{\text{h}}23^{\text{m}}]$
87. Dimostrare che la media armonica H di due numeri a e b , è soluzione dell'equazione $\frac{H-a}{b-H} = \frac{a}{b}$.
88. Verificare che $H \leq G \leq \mu$.

Livello 3

89. 5 operai sbrigano uno stesso lavoro rispettivamente in 2, 3, 4, 5 e x ore. Se un operaio che lavora in media quanto i cinque effettua il lavoro in 4 ore, quanto vale x ? $[\text{Impossibile}]$
90. Con riferimento al precedente quesito, se il quinto operaio riesce a sbrigare il lavoro in non meno di 1 ora e non più di 10 ore, fra quali valori è compreso il tempo medio di costruzione? $[2^{\text{h}}12^{\text{m}} \text{ e } 3^{\text{h}}36^{\text{m}}]$

Intervallo Matematico

Vogliamo considerare dei fatti che a prima vista sembrano frutto di magia. Il signor Verdi vuole stipulare una polizza assicurativa onnicomprensiva. È indeciso su quale compagnia scegliere, avendone individuate due che gli sembrano particolarmente serie. Per evitare ogni dubbio chiede alle due compagnie i dati statistici relativi al numero di sinistri denunciati con il numero di sinistri effettivamente liquidati, riportati in tabella.

COMPAGNIA A						
	Furti in casa	Incidenti auto	Furti auto	Infortuni	Malattie	Totale
Denunciati	175	918	150	1040	150	2433
Liquidati	146	726	85	217	12	1186
Percentuale	83,4%	79,1%	56,7%	20,9%	8,0%	48,7%
COMPAGNIA B						
	Furti in casa	Incidenti auto	Furti auto	Infortuni	Malattie	Totale
Denunciati	45	250	115	48	83	541
Liquidati	35	182	62	8	4	291
Percentuale	77,8%	72,8%	53,9%	16,7%	4,8%	53,8%

Considerando i dati individuali non vi è dubbio che dovrebbe scegliersi la compagnia A, dato che le percentuali di liquidazioni per singolo sinistro sono sempre maggiori. Accade però un fatto strano, la percentuale di sinistri liquidati in totale risulta invece superiore per la seconda compagnia. Questo fatto viene denominato con il nome di *paradosso di Simpson*, dal nome dello statistico che lo enunciò nel 1951. Ci si aspetterebbe infatti che se i singoli eventi hanno peso maggiore anche il totale pesi di più. Ciò sarebbe stato vero se il numero di incidenti denunciati fosse stato uguale per entrambe le compagnie, essendo il numero complessivo di eventi denunciati alla compagnia B inferiore a quelli della A, possono accadere invece questi fatti paradossali.

Variabilità

Gli ultimi esempi ci spingono a studiare il comportamento di una distribuzione statistica da altri punti di vista, a considerare per esempio l'ampiezza della distribuzione, cioè la differenza fra il valore massimo e quello minimo.

Definizione 21

Data una distribuzione statistica a valori numerici, diciamo suo **range** la differenza fra i valori massimo e minimo che essa presenta.

A cosa può servire conoscere il valore del range di una distribuzione? Dipende. Un valore relativamente piccolo (rispetto ai valori in gioco), ci suggerisce che la distribuzione è “abbastanza” uniforme, ossia i suoi valori differiscono poco fra loro; un valore elevato invece non dà nessuna informazione specifica.

Esempio 30

- Consideriamo la seguente distribuzione che si riferisce alla misurazione dello spessore, espressa in *mm*, di un campione di 8 circuiti elettronici.

0,23	0,25	0,24	0,26	0,23	0,22	0,25	0,27
------	------	------	------	------	------	------	------

 Il range è $(0,27 - 0,22) \text{ mm} = 0,05 \text{ mm}$. La media del campione $\bar{m} = \frac{0,22 + 0,23 \cdot 2 + 0,24 + 0,25 \cdot 2 + 0,26 + 0,27}{8} \text{ mm} = 0,24375 \text{ mm}$.

Vediamo che il rapporto del range con la media è $\frac{0,05}{0,24375} \approx 20\%$. Come si nota un valore molto alto.

- Consideriamo invece la distribuzione relativa a 10 rilevamenti del prezzo di un'azione in una giornata, espresso in euro,

122,3	122,8	123,1	122,9	123,2	123,5	123,3	123,0	122,4	122,6
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

. Il range è $\text{€ } 123,50 - \text{€ } 122,30 = \text{€ } 1,20$, in valore assoluto molto più alto del precedente, ma relativamente molto più basso; infatti $\mu = \frac{122,3 + 122,8 + 123,1 + 122,9 + 123,2 + 123,5 + 123,3 + 123,0 + 122,4 + 122,6}{10} \text{ €} = 122,91 \text{ €}$, e il rapporto è appena $\frac{1,2}{122,91} \approx 0,97\%$.

Abbiamo visto nel paragrafo precedente diversi indici centrali, puntualizzando che non ne esiste uno migliore degli altri, dato che ciascuno ha dei meriti e dei demeriti. Per esempio se avessimo una distribuzione uniforme, nella quale tutti i valori sono uguali, uno qualunque dei tre indici può considerarsi come rappresentante; non è così in una distribuzione in cui vi è concentrazione massima, cioè in cui tutti i valori, tranne uno, sono nulli.

Abbiamo anche visto che, nonostante i suoi difetti, spesso utilizziamo la media aritmetica piuttosto che gli altri indici. Cerchiamo allora di trovare un metodo per valutare la *bontà* della media aritmetica. Una buona idea è quella di introdurre un nuovo concetto che misuri in qualche modo quanto ciascun valore differisce dalla media aritmetica.

Definizione 22

Data una distribuzione statistica formata da n elementi che indichiamo genericamente con x_i e la cui media aritmetica è μ , diciamo suo **scarto semplice medio** la quantità $S = \frac{|x_1 - \mu| + |x_2 - \mu| + \dots + |x_n - \mu|}{n}$.

Cerchiamo di capire perché nella definizione, abbiamo considerato i valori assoluti degli scarti.

Esempio 31

Calcoliamo lo scarto semplice medio della distribuzione: $\{1; 1; 1; 2; 2; 3; 3; 4; 5; 6\}$, la cui media vale $\mu = \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 4 + 5 + 6}{10} = 2,8$. La somma degli scarti è: $\frac{-5,4 - 1,6 + 0,4 + 1,2 + 2,2 + 3,2}{10} = 0$, invece

$$s = \frac{|3 \cdot (1-2,8)| + |2 \cdot (2-2,8)| + |2 \cdot (3-2,8)| + |4-2,8| + |5-2,8| + |6-2,8|}{10} = \frac{5,4+1,6+0,4+1,2+2,2+3,2}{10} = 1,4.$$

Abbiamo perciò visto che la somma degli scarti è nulla, mentre quella dei loro valori assoluti no. Questo non è un caso, ma un fatto generale. Vale infatti il seguente risultato.

Teorema 4

Per ogni distribuzione statistica $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ di media μ si ha: $(x_1 - \mu) + (x_2 - \mu) + \dots + (x_n - \mu) = 0$.

Dimostrazione per esercizio.

Stabilito che lo scarto semplice medio deve calcolarsi con i valori assoluti, poiché diversamente la somma dei valori che superano la media equilibrerà quella di quelli a essa inferiori, vediamo un'applicazione che ci fa capire come usare tale grandezza per misurare quanto la media aritmetica è un buon rappresentante.

Esempio 32

Nella tabella seguente sono riportati, suddivisi per classi di età il numero dei lavoratori italiani regolarmente

Fascia di età	15 – 24	25 – 34	35 – 54	55 – 64	65 e più
Lavoratori	2330	5741	10.051	2024	339

iscritti a Istituti previdenziali nel 1993, come risulta dai dati ISTAT. I valori sono espressi in migliaia di unità. Per calcolare l'età media dei lavoratori dobbiamo prendere in considerazione un rappresentante per ciascuna classe, che è la mediana. Per l'ultima classe consideriamo un valore presumibile, per cui modifichiamo la tabella nel modo seguente.

Età mediana	19,5	29,5	45,5	59,5	67,5
Lavoratori	2330	5741	10.051	2024	339

Quindi: $\mu = \frac{19,5 \cdot 2330 + 29,5 \cdot 5741 + 45,5 \cdot 10051 + 59,5 \cdot 2024 + 67,5 \cdot 339}{2330 + 5741 + 10051 + 2024 + 339} \approx 39,81$. Perciò nel 1993 un lavoratore

italiano aveva mediamente circa 39 anni e 296 giorni (0,81 anni sono $0,81 \cdot 365 \approx 296$ giorni). Adesso vediamo quanto ogni singolo valore si discosta da questa media

$$s = \frac{|19,5 - 39,81| \cdot 2330 + |29,5 - 39,81| \cdot 5741 + |45,5 - 39,81| \cdot 10051 + |59,5 - 39,81| \cdot 2024 + |67,5 - 39,81| \cdot 339}{2330 + 5741 + 10051 + 2024 + 339} =$$

$$\frac{212941,67}{20485} \approx 10,395. \text{ Quindi lo scarto semplice medio è di ben 10 unità, valore molto alto, perché}$$

confrontato con la media è $\frac{10,395}{39,81} \approx 26\%$. La media aritmetica in questo caso non è un buon rappresentante.

Definiamo adesso una quantità che misura meglio la dispersione della distribuzione.

Definizione 23

Data una distribuzione statistica formata da n elementi, ognuno dei quali è indicato genericamente con x_i e la

cui media è μ , diciamo suo **scarto quadratico medio** la quantità $\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + \dots + (x_n - \mu)^2}{n}}$.

Definizione 24

Data una distribuzione statistica chiamiamo sua **varianza**, il quadrato dello scarto quadratico medio: σ^2 .

Esempio 33

- Calcoliamo lo scarto quadratico medio della distribuzione dell'esempio 31.

$$\sigma = \sqrt{\frac{3 \cdot (1 - 2,8)^2 + 2 \cdot (2 - 2,8)^2 + 2 \cdot (3 - 2,8)^2 + (4 - 2,8)^2 + (5 - 2,8)^2 + (6 - 2,8)^2}{10}} =$$

$$= \sqrt{\frac{9,72 + 1,28 + 0,08 + 1,44 + 4,84 + 10,24}{10}} = \sqrt{\frac{27,6}{10}} \approx 1,66.$$

- Adesso calcoliamo quello della distribuzione {4; 4; 5; 5; 6; 6; 7; 7; 8; 8} che ha media 6

$$\sigma = \sqrt{\frac{2 \cdot [(4 - 6)^2 + (5 - 6)^2 + (6 - 6)^2 + (7 - 6)^2 + (8 - 6)^2]}{10}} = \sqrt{\frac{20}{10}} = \sqrt{2} \approx 1,41.$$

Rimane sempre il problema di stabilire il significato dello scarto quadratico medio. Con riferimento all'esempio precedente, quale delle due distribuzioni si discosta meno dalla media? Apparentemente la seconda perché ha un valore minore. Ma abbiamo imparato a diffidare dai valori assoluti, quel che conta è il valore relativamente alle grandezze in gioco. Consideriamo allora un'altra grandezza.

Definizione 25

Diciamo **coefficiente di variazione** di una distribuzione statistica formata da n elementi, il rapporto $\frac{\sigma}{\mu}$, fra la sua media aritmetica μ e il suo scarto quadratico medio σ .

Esempio 34

Calcoliamo il coefficiente di variazione delle due distribuzioni dell'esempio 25. Abbiamo $\frac{\sigma}{\mu} \approx \frac{1,66}{2,8} = 0,593$ e $\frac{\sigma}{\mu} \approx \frac{1,41}{6} = 0,235$. Pertanto la seconda distribuzione è più “regolare” della prima, dato che la sua variazione attorno alla media è di circa il 23%, mentre la prima invece appare molto più “dispersa”, avendo un coefficiente di variazione superiore al 59%.

In generale possiamo dire che se la distribuzione è uniforme, allora sia lo scarto semplice sia lo scarto quadratico medio sono nulli, se invece siamo nell'estremo opposto, ossia le n modalità di una distribuzione statistica sono tutte nulle tranne una che assume valore uguale a k , si ha

$$\mu = \frac{k}{n} \quad \text{e} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\left(0 - \frac{k}{n}\right)^2 \cdot (n-1) + \left(k - \frac{k}{n}\right)^2 \cdot 1}{n}} = \frac{k}{n} \sqrt{n-1}.$$

Quindi più vicino a zero è il valore di σ e più uniforme è la distribuzione, migliore è la media come suo rappresentante.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Calcolare lo scarto quadratico medio della distribuzione {2; 3; 5; 4; 5; 7; 4; 5; 6; 2; 8; 6}. Dato che

N	X_i	$(X_i - \bar{m})$	$(X_i - \bar{m})^2$
1	2	-2.75	7.5625
2	3	-1.75	3.0625
3	5	0.25	0.0625
4	4	-0.75	0.5625
5	5	0.25	0.0625
6	7	2.25	5.0625
7	4	-0.75	0.5625
8	5	0.25	0.0625
9	6	1.25	1.5625
10	2	-2.75	7.5625
11	8	3.25	10.5625
12	6	1.25	1.5625
Σ	57	0	38.25

$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \mu)^2 + (x_2 - \mu)^2 + \dots + (x_{12} - \mu)^2}{12}}$ conviene costruire la seguente tabella:

cui nell'ultima riga abbiamo immesso le somme delle colonne soprastanti. Così la media aritmetica vale

$\mu = \frac{57}{12} = 4,75$. Infine lo scarto quadratico medio è $\sigma = \sqrt{\frac{38,25}{12}} \approx 1,78$ Mentre il coefficiente di variazione

è $\frac{1,78}{4,75} \approx 0,37$.

Determinare lo scarto semplice medio, lo scarto quadratico medio e il coefficiente di variazione relativo delle seguenti distribuzioni statistiche. I risultati sono forniti con 3 cifre decimali

Livello 1

- {10; 11; 10; 12; 14; 11; 12; 11; 13; 10; 14} ; {2,5; 3,25; 2,72; 3,14; 3; 2,83; 2,78; 3,15} [1,432; 0,240]
- {112; 113; 112; 113; 111; 112; 113; 111} ; {70; 73; 78; 65; 91; 82; 70; 93; 100; 81; 82; 74; 77} [0,781; 9,690]
- {-2; 1; -2; -1; 2; 1; 2; -1; -2; 0} ; {12; 18; 20; 13; 18; 22; 24; 19; 11; 23; 30; 28; 11; 15; 28} [1,536; 6,120]
- {3; 4; 3,5; 5; 4,5; 4,75; 2; 3,25; 4; 4,5; 4,75; 6; 6,25} ; {7; 7,5; 6,75; 5; 6,25; 5,75; 7; 6,75; 5; 5,25} [1,129; 0,869]
- {168; 170; 172; 170; 171; 173; 165; 167; 167; 180; 164; 171; 173} [3,990]

Livello 2

Determinare scarto quadratico medio e coefficiente di variazione delle seguenti distribuzioni

- Dati ISTAT relativi al numero di occupati italiani nel 1999, suddivisi per fasce di età. [8,203; 0,224]

Fascia di età	15 - 24	25 - 34	35 - 54	55 - 64	65 - 70
Occupati	1782	5878	10818	1878	334

- Dati ISTAT relativi al numero di disoccupati italiani nel 1999, per fasce di età. [11,449; 0,403]

Fascia di età	15 - 24	25 - 34	35 - 54	55 - 64	65 - 70
Percentuale di disoccupati	32862	14515	6036	4815	2557

- Dati ISTAT relativi al Costo del lavoro per unità di prodotto, espressi in relazione ai prezzi del 1995, considerati pari a 100. [17,752; 0,207]

Anni	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Costo	50,9	58,4	62,6	67,5	71,3	74,1	76,4	80	87	94,7	98,4	100,9	100,3	100	105,2	106,1	103,4	105,4

- Dati ISTAT relativi all'indice delle retribuzioni lorde per dipendente, espressi in relazione ai prezzi del 1995, considerati pari a 100. [13,507; 0,141]

Anni	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Indice	70.3	75.6	85.4	90.6	93.8	97.3	100.0	104.7	108.5	111.4	113.3

10. Provare che lo scarto quadratico medio può calcolarsi utilizzando la formula:

$$\sigma = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N} - \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}\right)^2}.$$

11. Usando la formula precedente calcolare lo scarto quadratico medio delle distribuzioni degli esercizi precedenti.



L'angolo di Excel

Su <http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quinto%20volume/Capitolo%2012/12-1-1.exe> scarichi un'applicazione che mostra come usare Excel per calcolare medie e varianze di distribuzioni statistiche, nonché come rappresentare graficamente le stesse.

Su <http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quinto%20volume/Capitolo%2012/12-1-1.xlsx> scarichi il relativo file.

Attività.

Svolgere con Excel tutti gli esercizi relativi al calcolo di medie e di scarti.



L'angolo di Microsoft Mathematics

Su <http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quinto%20volume/Capitolo%2012/12-1-2.exe> scarichi un'applicazione che mostra come Microsoft Mathematics tratta funzioni statistiche.

Su <http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quinto%20volume/Capitolo%2012/12-1-2.rar> scarichi il relativo file.



L'angolo di Geogebra

Su <http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quinto%20volume/Capitolo%2012/12-1-3.exe> scarichi un'applicazione che mostra come usare Geogebra per calcolare medie e varianze di distribuzioni statistiche, nonché come rappresentare graficamente le stesse. Su <http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quinto%20volume/Capitolo%2012/12-1-3.rar> scarichi il relativo file.

Per la prova Invalsi

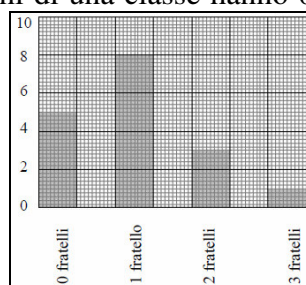
Quesiti sulle nozioni generali ed i grafici

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente assegnato nelle prove OCSE-PISA. *Nella scuola di Martina, l'insegnante di scienze fa delle verifiche nelle quali il punteggio massimo è 100. Martina ha un punteggio medio di 60 nelle sue prime quattro verifiche di scienze. Alla quinta verifica, prende 80. Qual è la media dei punteggi in scienze di Martina dopo tutte e cinque le verifiche?*

Abbiamo a che fare con un problema di media ponderata. Se mediamente ha avuto 60 nelle prime 4 prove, la somma dei suoi punteggi è $60 \cdot 4 = 240$. Con la quinta prova tale somma diventa $240 + 80 = 320$. Quindi la media dei cinque punteggi è $320/5 = 64$.

1. (Invalsi 2003) La figura indica quanti alunni di una classe hanno 0, 1, 2, 3 fratelli. Quanti sono gli a-



lunni che hanno almeno 1 fratello?

[12]

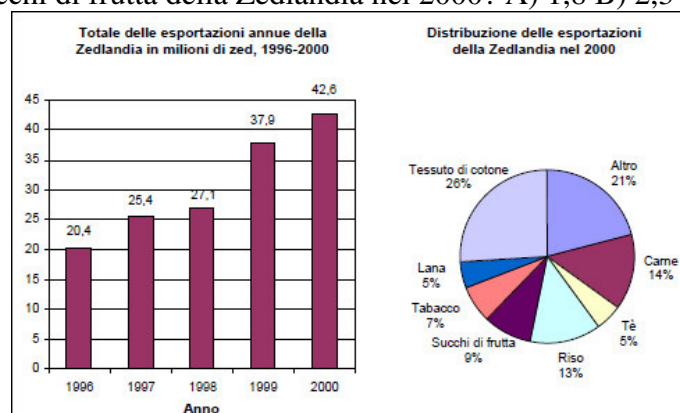
2. (OCSE PISA) Nell'ambito di una ricerca sull'ambiente, gli studenti hanno raccolto informazioni sui tempi di decomposizione di diversi tipi di rifiuti che la gente butta via.

Tipo di rifiuto	Tempo di decomposizione
Buccia di banana	1–3 anni
Buccia d'arancia	1–3 anni
Scatole di cartone	0,5 anni
Gomma da masticare	20–25 anni
Giornali	Pochi giorni
Bicchieri di plastica	Oltre 100 anni

Uno studente prevede di presentare i risultati con un diagramma a colonne. Scrivi un motivo per cui un diagramma a colonne non è adatto per rappresentare questi dati.

[I dati sono molto diversi, qualunque unità di misura scegliamo sulle ordinate avremo un grafico poco leggibile; inoltre che significa “pochi giorni”?]

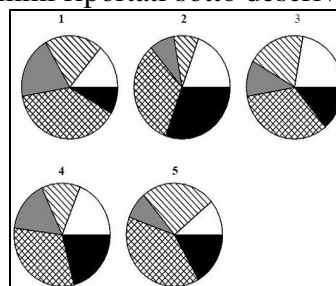
3. (OCSE PISA) I seguenti grafici forniscono alcune informazioni sulle esportazioni della Zedlandia, un Paese in cui si usa lo zed come moneta corrente. a) Qual è stato l'ammontare totale (in milioni di zed) delle esportazioni della Zedlandia nel 1998? b) Quale è stato l'ammontare, in milioni di zed, delle esportazioni di succhi di frutta della Zedlandia nel 2000? A) 1,8 B) 2,3 C) 2,4 D) 3,4 E) 3,8.



[a) 37,9; b) E]

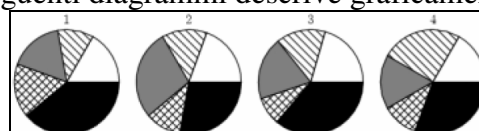
Provincia	Superficie (km ²)	Colore
Frosinone	3240	[Pattern 1]
Latina	2251	[Pattern 2]
Rieti	2749	[Pattern 3]
Roma	5352	[Pattern 4]
Viterbo	3612	[Pattern 5]

4. (Invalsi 2003) La tabella mostra la superficie delle varie province del Lazio. Quale dei diagrammi riportati sotto descrive graficamente i dati della tabella? [4]

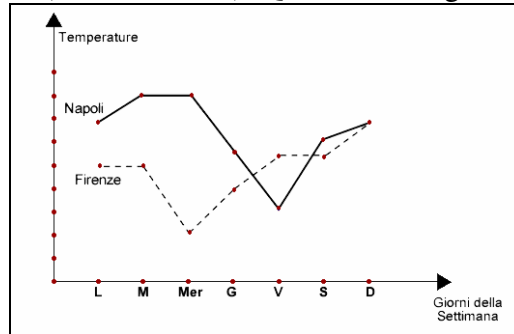


Provincia	Superficie (km ²)	Legenda
Avellino	2792	[Pattern 1]
Benevento	2071	[Pattern 2]
Caserta	2639	[Pattern 3]
Napoli	1171	[Pattern 4]
Salerno	4922	[Pattern 5]

5. (Invalsi 2004) La tabella mostra la superficie delle varie province della Campania. Quale dei seguenti diagrammi descrive graficamente i dati della tabella? [3]



6. (Invalsi 2005) Il seguente grafico visualizza l'andamento delle temperature rilevate a mezzogiorno per una settimana (nel grafico L = lunedì, M = martedì, Mer = mercoledì, ecc.) in due città italiane: Firenze (linea tratteggiata) e Napoli (linea continua). Quale tra le seguenti affermazioni è vera? [C]



- A) Per cinque volte, a mezzogiorno, a Napoli faceva più caldo che a Firenze B) Da lunedì a venerdì a mezzogiorno a Napoli faceva più caldo che a Firenze C) In tre giorni, a mezzogiorno, la temperatura nelle due città era la stessa D) Nelle due città non si è mai registrata la stessa temperatura.
7. (Invalsi 2007) La seguente tabella raccoglie la composizione di una classe relativamente al mese di nascita.

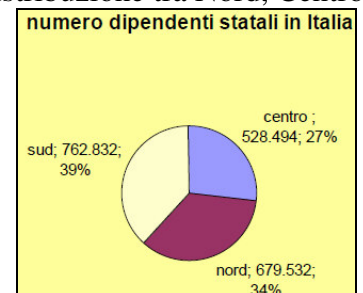
Mese di nascita	Numero alunni
Gennaio-Febbraio-Marzo	6
Aprile-Maggio-Giugno	8
Luglio-Agosto-Settembre	4
Ottobre-Novembre-Dicembre	6

Quale tra i seguenti areogrammi rappresenta la distribuzione?

[A]



8. (Invalsi 2007) I dipendenti dello Stato in Italia sono 1.978.869, e la loro distribuzione tra Nord, Centro

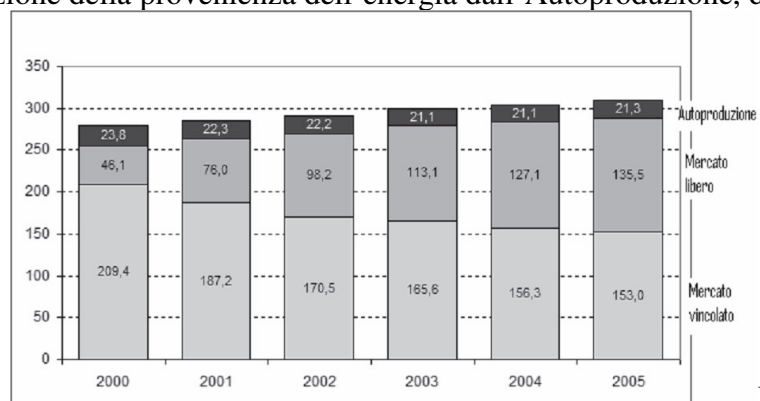


e Sud è data dal seguente diagramma (dal *Sole 24 ore* del 7 agosto 2005).

Dal diagramma quale delle seguenti affermazioni possiamo dedurre? A) I dipendenti dello Stato sono ugualmente distribuiti tra le tre zone. B) Più di un terzo dei dipendenti statali sono al Centro. C) Tra Nord e Sud lavorano meno del 70% dei dipendenti dello Stato. D) Più di un terzo dei dipendenti statali sono nel Nord.

[D]

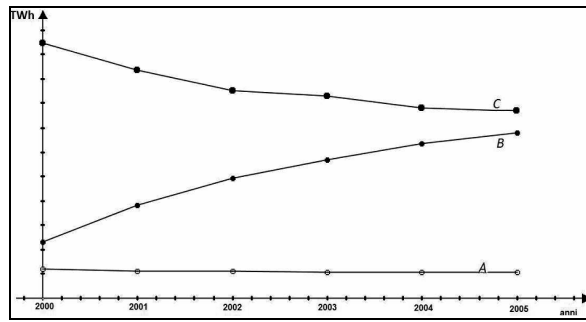
9. (Invalsi 2011) Nel diagramma della prima figura sono riportati i consumi elettrici (in TWh - terawattora) in Italia dal 2000 al 2005 in funzione della provenienza dell'energia dall'Autoproduzione, dal Mer-



cato libero o dal Mercato vincolato.

I grafici

A, B e C nella seconda figura sono stati costruiti con gli stessi dati rappresentati nel diagramma della



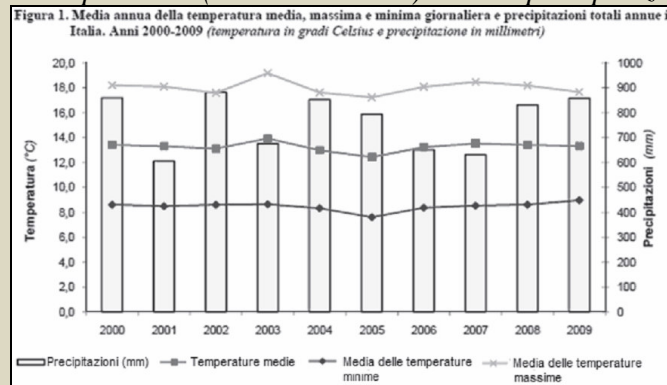
prima figura.

Confronta le due figure e associa a ogni grafico, la corrispondente provenienza di energia.

[A) Autoproduzione; B) Mercato vincolato; C) Mercato libero]

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato alle prove Invalsi del 2011. Osserva il seguente grafico che rappresenta l'andamento delle temperature (scala a sinistra) e delle precipitazioni piovose (scala a destra) in Italia negli ultimi anni.



in Italia negli ultimi anni.

Indica per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa o se non si può ricavare dal grafico.

A) Nel decennio 2000-2009 la temperatura media annua è risultata più alta di 0,8 gradi rispetto al periodo 1971-2000.

Non si può ricavare perché non abbiamo i dati 1971-2000.

B) L'anno 2003 è quello in cui si è registrato il più alto valore per la media delle temperature massime.

Vero. Si evince dal grafico.

C) L'anno 2005 è quello in cui si è registrato il più alto valore per la media delle temperature minime.

Falso. Dal grafico si evince che è stato il più basso valore.

D) L'anno in cui la media delle temperature massime è stata più alta è anche quello in cui le precipitazioni sono state minori.

Falso. La media delle temperature massime è stata più alta nel 2003; le precipitazioni sono state minori nel 2001.

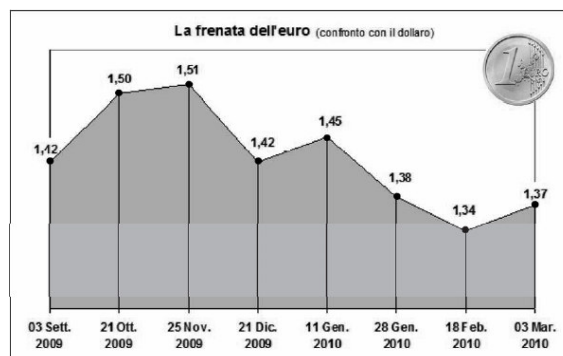
E) L'anno 2005 è quello in cui c'è stato il giorno più freddo.

Non si può ricavare. Abbiamo temperature medie non sappiamo i singoli valori.

F) Il 2004 è stato l'anno più piovoso.

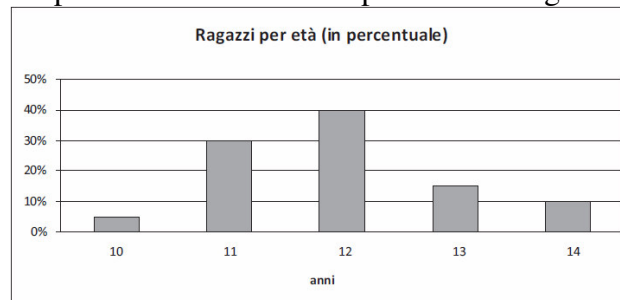
Falso. Dal grafico si rileva che è stato il 2002.

10. (Invalsi 2011) Il grafico rappresenta l'andamento del cambio euro-dollaro nel periodo 3 settembre 2009 - 3 marzo 2010.



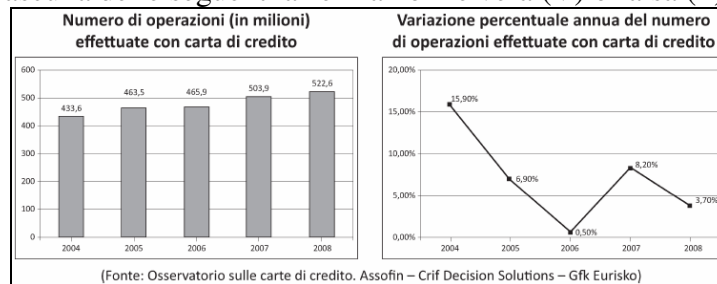
a) In base al grafico in quale periodo mi sarebbe convenuto cambiare i miei euro in dollari per andare negli Stati Uniti? A) Dal 3 settembre al 21 ottobre 2009 B) Dal 21 ottobre al 25 novembre del 2009 C) Dall'11 gennaio al 28 gennaio 2010 D) Dal 18 febbraio al 3 marzo 2010. b) Se Maria il 18 febbraio 2010 cambia 1000 euro in dollari, quanti dollari riceve in cambio? c) Sempre lo stesso giorno (18 febbraio), quanti euro deve cambiare Maria per avere 1000 dollari? [B; 1340; 746,27]

11. (Invalsi 2012) Un gruppo di boyscout è formato da ragazzi di età compresa tra i 10 e i 14 anni. La distribuzione delle frequenze percentuali delle età è riportata nel diagramma seguente:



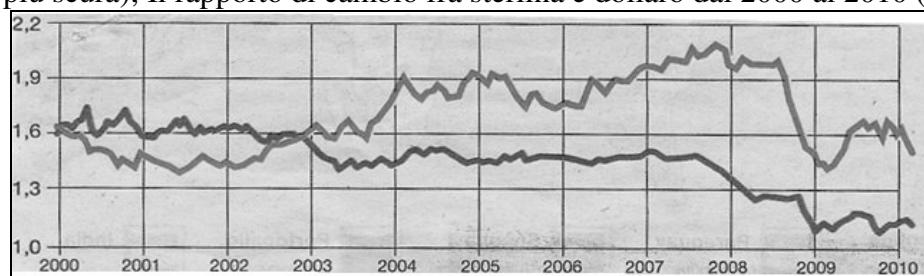
Sulla base dei dati riportati nel diagramma, indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F). a) Più dell'80% dei ragazzi ha meno di 13 anni; b) Meno del 70% dei ragazzi ha più di 11 anni; c) La percentuale di ragazzi che hanno 12 o 14 anni è uguale alla percentuale di ragazzi che hanno 10 o 11 o 13 anni. [F; V; V]

12. (Invalsi 2012) Osserva i seguenti grafici relativi alle operazioni effettuate con carte di credito dal 2004 al 2008. Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F).

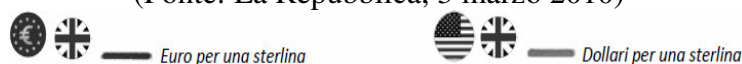


Il numero di operazioni effettuate con carte di credito è diminuito dal 2004 fino al 2006, poi è aumentato e, successivamente, è di nuovo diminuito fino al 2008; I due grafici sono in contraddizione perché il primo mostra una continua crescita nel tempo, mentre il secondo no. L'aumento del numero di operazioni effettuate con carte di credito che si è avuto dal 2006 al 2007 è stato superiore all'aumento che si è avuto dal 2007 al 2008. Nel 2006 il numero di operazioni effettuate con carte di credito si è quasi azzerato. [F; F; V; F]

13. (Invalsi 2013) Nel seguente grafico sono indicati: Il rapporto di cambio fra sterlina ed euro dal 2000 al 2010 (linea più scura); Il rapporto di cambio fra sterlina e dollaro dal 2000 al 2010 (linea più chiara)



(Fonte: La Repubblica, 3 marzo 2010)



Dalle informazioni riportate sul grafico puoi dedurre che: A) dal 2000 al 2010 occorre più dollari che euro per acquistare una sterlina B) dal 2000 al 2010 occorre più euro che dollari per acquistare una sterlina C) dal 2003 al 2010 occorre più dollari che euro per acquistare una sterlina D) dal 2003 al 2010 occorre più euro che dollari per acquistare una sterlina [C]

14. (Invalsi 2013) Una popolazione batterica aumenta nel tempo con un tasso di crescita costante (cioè la variazione percentuale del numero di batteri tra un qualunque giorno e il giorno precedente è costante). La seguente tabella riporta il numero N di milioni di batteri della popolazione al trascorrere dei giorni:

numero di giorni trascorsi	0	1	2	3	4	5	...
numero N di batteri (in milioni)	1000	1100	1210	1331	...	...	

Quale fra i seguenti grafici può rappresentare l'andamento del numero N di batteri al variare del tempo t, in almeno 20 giorni? [Grafico 4]

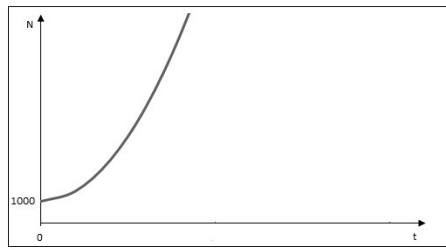


Grafico 1

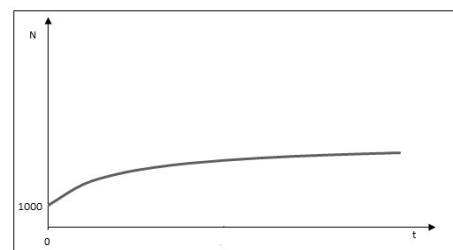


Grafico 2

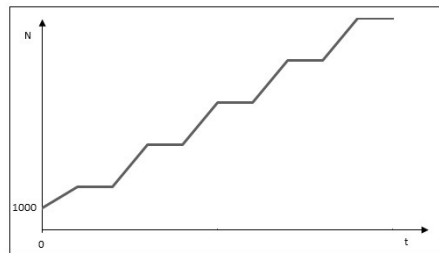


Grafico 3

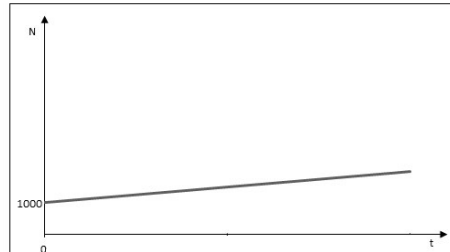
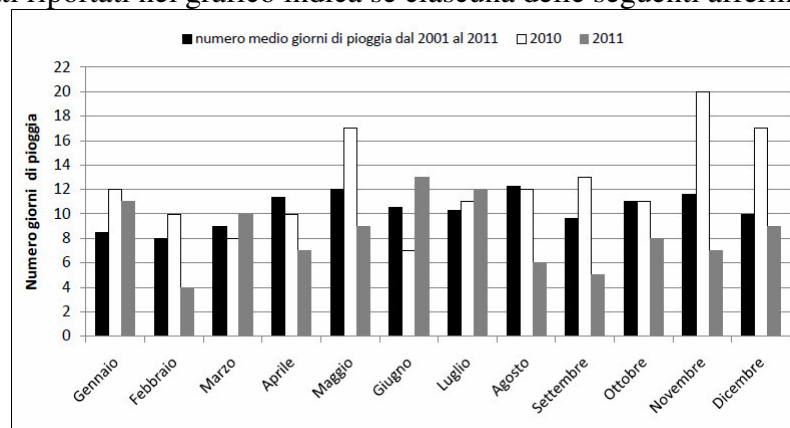


Grafico 4

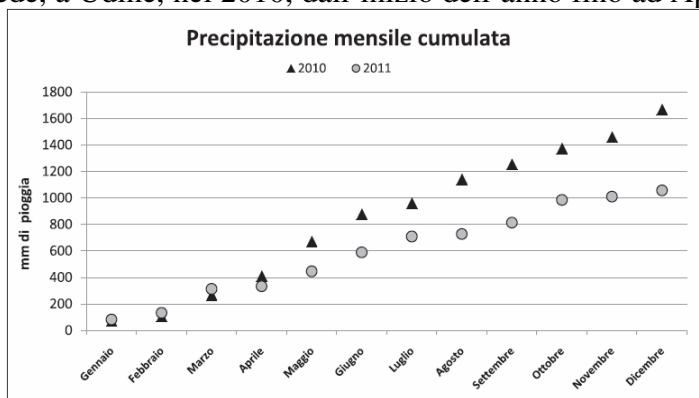
Quanti milioni di batteri ci saranno il quinto giorno? [1610,51]

15. (Invalsi 2014) Osserva il grafico che riporta alcuni dati raccolti dalla stazione meteorologica di Udine. Sulla base dei dati riportati nel grafico indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.



Nel mese di Settembre 2010 ci sono stati più giorni di pioggia che nel mese di Settembre 2011; Nel periodo 2001-2011, Aprile è stato il mese con il maggior numero medio di giorni di pioggia; Nel 2010, Giugno è stato il mese con il minor numero di giorni di pioggia. [V; F; V]

La figura seguente mostra la precipitazione mensile cumulata del 2010 e del 2011. Per esempio, come si vede, a Udine, nel 2010, dall'inizio dell'anno fino ad Aprile sono caduti all'incirca 400 mm di pioggia.

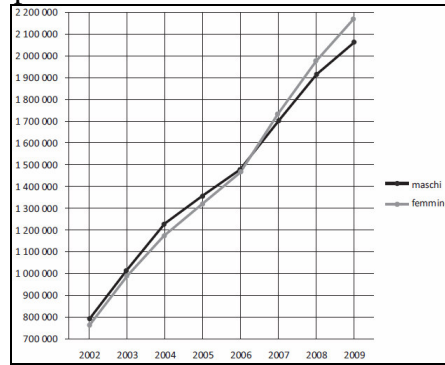


gia.

Sulla base dei dati rappresentati in figura, indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F). a) Nei mesi di Maggio e Giugno 2010 sono caduti complessivamente circa 500 mm di pioggia; b) Da Aprile in poi la precipitazione mensile cumulata del 2010 è stata maggiore della precipitazione mensile cumulata del 2011; c) Sia nel

2010 sia nel 2011, a partire da Gennaio ogni mese è piovuto sempre di più fino ad avere un massimo di precipitazioni in Dicembre. [F; V; F]

16. (Invalsi 2015) Il seguente grafico rappresenta la popolazione straniera residente in Italia, suddivisa per



sempre, negli anni dal 2002 al 2009 (fonte ISTAT).

Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F). a) Fra il 2002 e il 2005 i maschi erano più numerosi delle femmine. b) Nel 2009 la differenza tra numero di femmine e numero di maschi era massima. c) Nel 2008 il numero delle femmine ha superato per la prima volta il numero dei maschi. d) Dal 2002 al 2007 i maschi sono più che raddoppiati. [V; V; F; V]

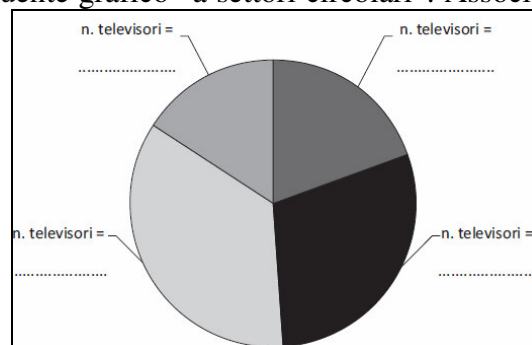
17. (Invalsi 2015) Un sondaggio condotto su un gruppo di 51 studenti sul numero di televisori presenti in casa ha dato i seguenti risultati

Numero di televisori in casa	Numero di studenti
1	10
2	15
3	18
4	8
Totale	51

a) Quale percentuale di studenti ha in casa meno di 3 televisori?

[≈ 49%]

b) Dalla tabella iniziale è stato ricavato il seguente grafico “a settori circolari”. Associa a ciascun set-

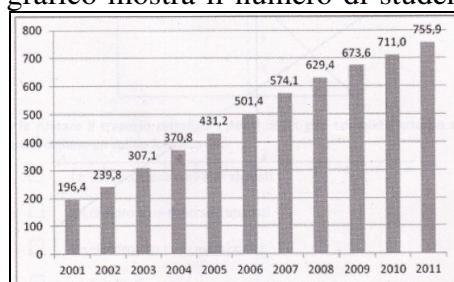


tore il numero di televisori presenti in casa.

[Dallo spicchio più in alto a sinistra, in senso orario: 4, 1, 2, 3]

18. (Invalsi 2015) Andrea, Beatrice, Carlotta e Dario vogliono effettuare un'indagine statistica sui gusti musicali degli studenti delle scuole superiori della loro città. Andrea propone di intervistare tutti i 245 alunni delle classi quinte di due scuole superiori della città; Beatrice propone di intervistare un numeroso gruppo, scelto a caso, di ragazzi all'uscita da una discoteca della città; Carlotta propone di intervistare 200 studenti, scelti a caso tra tutti gli studenti delle scuole superiori della città; Dario propone di pubblicare le domande dell'intervista sul giornalino della sua scuola e di raccogliere le risposte pervenute. In assenza di altre informazioni, il campione più rappresentativo per l'indagine è quello proposto da A) Andrea B) Beatrice C) Carlotta D) Dario [C]

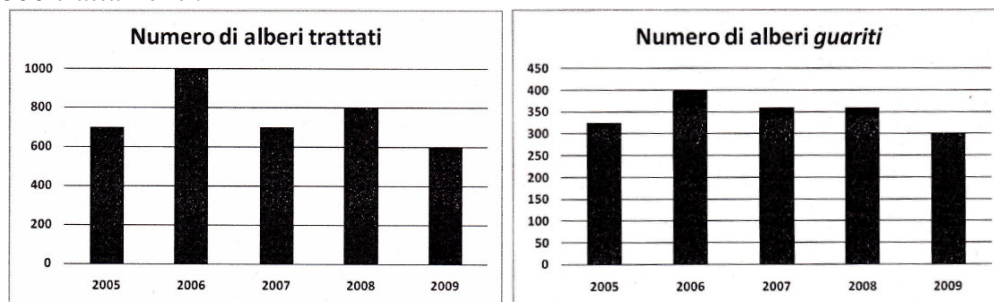
19. (Invalsi 2017) Il seguente grafico mostra il numero di studenti stranieri presenti in Italia dal 2001 al



2011, espresso in migliaia.

a) Di quanto sono aumentati gli studenti

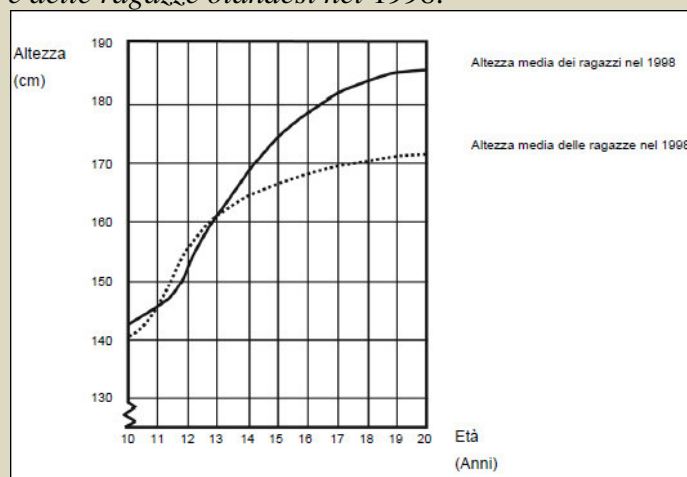
- stranieri tra il 2002 e il 2004? b) Di quanto sono aumentati in percentuale gli studenti stranieri nel 2008 rispetto al 2006? A) Circa del 64% B) Circa dell'80% C) Circa del 26% D) Circa del 20% [131; C]
20. (Invalsi 2017) In un parco, da alcuni anni, viene somministrato un prodotto a una certa specie di alberi per eliminare un parassita che ne causa la morte. I grafici rappresentano: il numero di alberi sottoposti a trattamento negli anni indicati e il numero di alberi completamente guariti nello stesso anno del trattamento. Sulla base dei dati riportati nei grafici indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F). a) Nel 2005 è guarito meno del 40% degli alberi trattati b) Nel 2009 la percentuale di alberi guariti rispetto a quelli trattati è inferiore a quella del 2006 c) Nei cinque anni sono stati effettuati circa 3800 trattamenti. [F; F; V]



Quesiti sugli indici centrali e sulla dispersione

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato nell'ambito delle prove OCSE-PISA. *Il grafico seguente mostra l'altezza media dei ragazzi e delle ragazze olandesi nel 1998.*



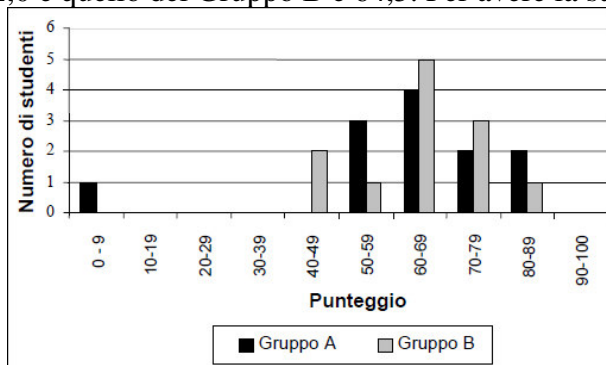
- A partire dal 1980 l'altezza media delle ragazze di 20 anni è aumentata di 2,3 cm arrivando a 170,6 cm. Qual era l'altezza media delle ragazze di 20 anni nel 1980?
Ovviamente era 2,3 cm in meno di quella del 1998, cioè $(170,6 - 2,3) \text{ cm} = 168,3 \text{ cm}$.
- Spiega in che modo il grafico mostra che, in media, la crescita delle ragazze è più lenta dopo i 12 anni.
Perché dai 10 ai 12 anni passa da 140 cm a circa 160 cm, diciamo approssimativamente 158 cm, con un incremento perciò di 18 cm, che rispetto ai 140 cm iniziali è di $\frac{18}{140} \approx 12,9\%$. Invece da 12 anni a 20 l'aumento è di circa 14 cm (considerando come valore a 20 anni circa 172 cm) che in percentuale rispetto al valore iniziale di 158 cm è $\frac{14}{158} \approx 8,9\%$. Inoltre si nota anche che la curva da 10 a 12 anni è molto più ripida che nel successivo periodo 12-20 anni.
- In base al grafico, in che periodo della vita le ragazze sono, in media, più alte dei maschi della stessa età? Dobbiamo considerare le ascisse per le quali le rispettive ordinate della curva tratteggiata sono maggiori di quelle della curva continua. Ciò accade da 11 a 13 anni.

21. (OCSE-PISA) In Zedlandia sono stati effettuati alcuni sondaggi di opinione per determinare il livello di popolarità del Presidente in vista delle prossime elezioni. Quattro editori di giornali hanno svolto

sondaggi indipendenti su scala nazionale. I risultati dei quattro sondaggi dei giornali sono i seguenti: Giornale 1: 36,5% (sondaggio effettuato il 6 gennaio su un campione di 500 cittadini con diritto di voto, scelti a caso), Giornale 2: 41,0% (sondaggio effettuato il 20 gennaio su un campione di 500 cittadini con diritto di voto, scelti a caso), Giornale 3: 39,0% (sondaggio effettuato il 20 gennaio su un campione di 1.000 cittadini con diritto di voto, scelti a caso), Giornale 4: 44,5% (sondaggio effettuato il 20 gennaio su 1.000 lettori che hanno telefonato alla redazione per votare). Quale giornale è più attendibile per prevedere il livello di popolarità del Presidente, se le elezioni si svolgono il 25 gennaio? Scrivi due motivi che giustifichino la tua risposta.

[3 perché è più recente di 1, coinvolge più cittadini di 2 e la scelta è a caso]

22. (OCSE-PISA) Risultati di una verifica. Il grafico seguente mostra i risultati di una verifica di scienze, ottenuti da due gruppi di studenti, indicati come Gruppo A e Gruppo B. Il punteggio medio del Gruppo A è 62,0 e quello del Gruppo B è 64,5. Per avere la sufficienza, gli studenti devono ottenere almeno 50



punti.

In base a questo grafico, l'insegnante sostiene che, nella verifica, il Gruppo B è andato meglio del Gruppo A. Gli studenti del Gruppo A non sono d'accordo con l'insegnante. Essi cercano di convincere l'insegnante che il Gruppo B non è necessariamente andato meglio. Con l'aiuto del grafico, suggerisci agli studenti del Gruppo A una spiegazione matematica che potrebbero usare.

[Potrebbero calcolare gli scarti, mostrando la maggiore variabilità di risultati del gruppo B]

23. (OCSE-PISA) Verifica di scienze. Nella scuola di Martina, l'insegnante di scienze fa delle verifiche nelle quali il punteggio massimo è 100. Martina ha un punteggio medio di 60 nelle sue prime quattro verifiche di scienze. Alla quinta verifica, prende 80. Qual è la media dei punteggi in scienze di Martina dopo tutte e cinque le verifiche? [64]
24. (OCSE-PISA) L'automobile migliore. Una rivista di automobilismo usa un sistema di punteggi per valutare le nuove automobili e assegna il premio «Auto dell'Anno» all'automobile con il punteggio totale più alto. Vengono valutate cinque nuove automobili e i loro punteggi sono mostrati nella seguente tabella.

Automobile	Dispositivi di sicurezza (S)	Consumo di carburante (C)	Aspetto estetico (E)	Accessori interni (A)
CA	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	2
N1	1	3	3	3
KK	3	2	3	2

Ai punteggi corrispondono le seguenti valutazioni: 3 punti = Eccellente; 2 punti = Buono; 1 punto = Mediocre. Per calcolare il punteggio totale di un'automobile, la rivista di automobilismo usa la seguente formula, che è una somma ponderata dei singoli punteggi: $\text{Punteggio totale} = (3 \cdot S) + C + E + A$. Calcola il punteggio totale ottenuto dall'automobile «Ca». Il produttore dell'automobile «Ca» ha ritenuto ingiusta la regola utilizzata per calcolare il punteggio totale. Scrivi una regola per calcolare il punteggio totale che permetta all'automobile «Ca» di vincere. La tua regola dovrà includere tutte e quattro le variabili e dovrai scrivere la regola usando solo numeri positivi. [3S + C + E + 3A]

25. (Invalsi 2003) La media dei voti di un alunno in quattro compiti in classe è 6 e mezzo. Se in ciascuno dei compiti avesse preso mezzo punto in più, quanto avrebbe di media? [B]
- A) Resta la stessa. B) 7 C) 8 D) 8 e mezzo E. Dipende dai voti dei compiti.

26. (Invalsi 2005) Marco ha svolto quattro verifiche di matematica ottenendo una media aritmetica di 7,5. Se nelle prime tre ha ottenuto i seguenti voti: 8; 6 e 9, qual è il voto della quarta verifica? [C]
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8
27. (Invalsi 2005) Antonio, Carlo, Giovanni, Filippo e Matteo fanno una gara di tiro a segno. Antonio e Filippo totalizzano ciascuno 14 punti, Carlo totalizza 16 punti, Giovanni ne totalizza 12 e Matteo 10. Qual è il punteggio medio realizzato dai 5 amici? A) 9,6 B) 10,4 C) 13 D) 13,2 [C]
28. (Invalsi 2007) La seguente tabella descrive la composizione di un nucleo familiare e le relative età.

Componente	Età
padre	40
madre	38
1° figlio	12
2° figlio	8
3° figlio	2

- Quale sarà l'età media di tale nucleo familiare tra 5 anni? A) 20 B) 21 C) 23 D) 25 [D]
29. (Invalsi 2011) Nella tabella che vedi sono riportati i dati relativi alla distribuzione di alunni e insegnanti nella scuola secondaria di primo grado in Italia.

Aree geografiche	Scuole	Classi	Alunni (compresi i ripetenti)		Ripetenti		Insegnanti
			Maschi e femmine	Femmine	Maschi e femmine	Femmine	
ITALIA	7939	82446	1727339	826869	51407	16199	212041
Nord	3381	33131	711292	339508	19615	5679	86312
Centro	1358	14656	312700	150098	8066	2508	36570
Sud	3200	34659	703347	337263	23726	8012	89159

- Sulla base dei dati in tabella, indica se le seguenti affermazioni sono vere o false. a) Nel Nord gli alunni maschi sono meno delle femmine; b) In Italia il rapporto insegnanti/classi è inferiore a 3; c) Nel Sud ci sono mediamente più di 10 classi per scuola. [Falso; Vero, circa 2,6; Vero, circa 10,8]
30. (Invalsi 2011) La seguente tabella riporta il peso alla nascita, suddiviso in 4 classi, di 30 neonati:

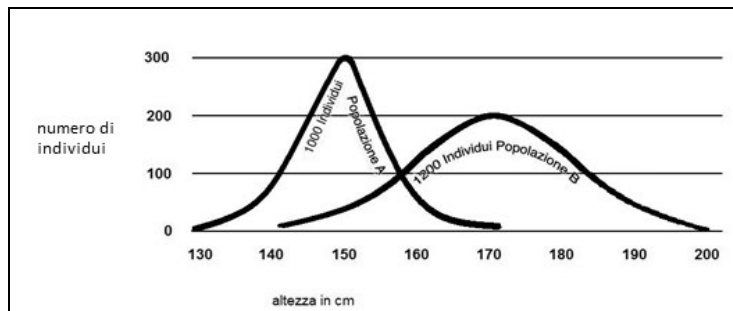
Classi di peso (in kg)	Numero neonati
Da 1 kg e fino a 2 kg	7
Più di 2 kg e fino a 3 kg	8
Più di 3 kg e fino a 4 kg	12
Più di 4 kg e fino a 5 kg	3

- Quale delle seguenti espressioni devi usare per trovare il peso medio dei 30 neonati? [C]
A) $\frac{1,5+2,5+3,5+4,5}{30}$ B) $\frac{7+8+12+3}{4}$ C) $\frac{1,5 \cdot 7 + 2,5 \cdot 8 + 3,5 \cdot 12 + 4,5 \cdot 3}{30}$ D) $\frac{1,5 \cdot 7 + 2,5 \cdot 8 + 3,5 \cdot 12 + 4,5 \cdot 3}{4}$
31. (Invalsi 2012) La professoressa Rossi vuole verificare il livello delle conoscenze in scienze nelle classi 1A e 1B. Decide di somministrare lo stesso test nelle due classi. Elaborando i punteggi del test ottiene i seguenti risultati:

	Classe 1 A	Classe 1 B
Media aritmetica	6,5	6,5
Scarto quadratico medio (o deviazione standard)	1,1	2,3

La professoressa chiede a Martina, una sua alunna di 1B, di commentare i risultati ottenuti dagli alunni delle due classi. Martina afferma che i risultati indicano che gli alunni delle due classi hanno lo stesso livello medio di conoscenze, ma gli studenti della classe 1A hanno ottenuto complessivamente punteggi più vicini alla media. Martina ha ragione? Giustificare la risposta.

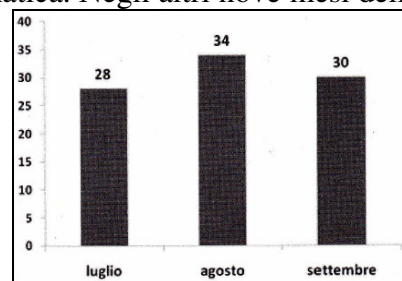
- [Sì, perché le medie sono uguali e gli scarti della 1A sono mediamente più piccoli di quelli della 1B]
32. (Invalsi 2013) Nel seguente grafico sono riportate le distribuzioni delle altezze di 1000 individui di una popolazione A e di 1200 individui di una popolazione B. Sulla base delle informazioni fornite dal grafico, indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F).



- a) Gli individui della popolazione A sono mediamente più alti degli individui della popolazione B
 b) Ogni individuo della popolazione A è più alto di ogni individuo della popolazione B
 c) Più della metà degli individui della popolazione A ha un'altezza minore di 155 cm
 d) Gli individui più alti della popolazione B sono più bassi degli individui più alti della popolazione A [V; F; V; V]
33. (Invalsi 2013) Un automobilista percorre i primi 120 km di un certo percorso alla velocità media di 60 km/h e i successivi 120 km alla velocità media di 120 km/h. Qual è la sua velocità media durante l'intero percorso? A) 70 km/h B) 80 km/h C) 90 km/h D) 100 km/h [B]
34. (Invalsi 2014) Osserva la seguente tabella, che riporta la distribuzione di frequenza degli stipendi mensili dei dipendenti di un'azienda. Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F).

Stipendio (in €)	N° dipendenti
1000	12
1300	145
1800	20
3500	8
5000	6

- a) La moda della distribuzione è 145 b) La mediana della distribuzione è 1300 euro c) La media aritmetica della distribuzione è minore di 1800 euro [F; V; V]
35. (Invalsi 2015) Una stazione meteorologica nelle Alpi ha misurato le temperature, in gradi centigradi (°C), durante un giorno di dicembre. I dati raccolti sono riportati nella seguente tabella.
- | | | | | | | | | |
|-------------|----|-----|-----|----|----|----|----|----|
| ora | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 |
| temperatura | -8 | -10 | -10 | -3 | +1 | -1 | -3 | -6 |
- a) Qual è l'escursione termica, cioè la differenza tra la temperatura massima e la temperatura minima, nel giorno considerato? b) Qual è la temperatura media TM relativa alle misure riportate in tabella? [11 °C; -5 °C]
36. (Invalsi 2015) Lo stesso test di matematica è stato proposto a due diversi gruppi di studenti. Il primo gruppo, composto da 20 studenti, ha ottenuto un punteggio medio di 85 e il secondo, composto da 80 studenti, ha ottenuto un punteggio medio di 65. Qual è il punteggio medio ottenuto dai 100 studenti dei due gruppi? Scrivi i calcoli che fai per trovare la risposta e poi riporta il risultato. [69]
37. (Invalsi 2017) Il grafico riporta il numero di e-book reader (lettori di libri elettronici) venduti nei mesi di luglio, agosto e settembre da un negozio di informatica. Negli altri nove mesi dell'anno lo stesso ne-



- gozio ha venduto in media 18 e-book reader al mese. Qual è il numero medio mensile di e-book reader venduti in quell'anno dal negozio? A) circa 24 B) circa 21 C) circa 31 D) circa 28 [B]
38. (Invalsi 2017) Con una bilancia si è misurata 10 volte la massa di una lastra di alluminio ottenendo le seguenti misure in chilogrammi: 10,55; 10,76; 10,60; 10,87; 10,64; 10,67; 10,84; 10,46; 10,55; 10,70. Quale fra i seguenti indici statistici è quello più adatto a rappresentare la massa della lastra di alluminio? A) Lo scarto quadratico medio (o deviazione standard) B) La varianza C) La moda D) La media aritmetica [D]

39. (Invalsi 2017) Agli alunni di una classe viene chiesto per quanto tempo al giorno, in media, utilizzano la connessione a Internet con i loro dispositivi (PC, Tablet, Smartphone, ...). I risultati del sondaggio sono riportati nella seguente tabella:

Minuti di connessione a Internet	Frequenze assolute
Da 0 minuti fino a 60 minuti	2
Più di 60 minuti fino a 120 minuti	4
Più di 120 minuti fino a 180 minuti	12
Più di 180 minuti fino a 300 minuti	8

Quale tra le seguenti espressioni permette di calcolare il tempo medio giornaliero di connessione a Internet degli alunni della classe? A) $\frac{2+4+12+8}{4}$ B) $\frac{30 \cdot 2 + 90 \cdot 4 + 150 \cdot 12 + 240 \cdot 8}{2+4+12+8}$

C) $\frac{30+90+150+240}{4}$ D) $\frac{60 \cdot 2 + 120 \cdot 4 + 180 \cdot 12 + 300 \cdot 8}{2+4+12+8}$ [B]

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

1. Consideriamo un insieme i cui primi due elementi sono x e y , ogni elemento successivo al secondo si ottiene come media aritmetica dei due che lo precedono. Qual è l'espressione del termine di posto n

con $n > 2$?

$$\left[\frac{\left[2^{n-2} + (-1)^{n-1} \right] \cdot x + \left[2^{n-1} - (-1)^{n-1} \right] \cdot y}{3 \cdot 2^{n-2}} \right]$$

Quesiti assegnati in gare nazionali o internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.

AHSME = Annual High School Mathematics Examination

HSMC = A&M University High School Mathematics Contest

OMI = Olimpiadi della Matematica

AMC = American Mathematical Contest

MT = Mathematics Teacher, rivista della NCTM

Lavoriamo insieme

Consideriamo un quesito assegnato agli AHSME 1995. *5 numeri naturali hanno media 12 e range 18, moda e mediana sono entrambe 8. Quali sono tutti i valori che può assumere il secondo più grande numero dei cinque?*

Essendo gli elementi in numero dispari la mediana è il terzo numero, in grandezza. Poiché la moda è anch'essa 8 vuol dire che almeno due elementi sono uguali a 8. Quindi gli elementi possono essere $\{a, b, 8, 8, c\}$, con $1 \leq a \leq b \leq 8$ oppure $\{a, 8, 8, b, c\}$ con $1 \leq a \leq 8 \leq b$. Poiché il range è 18 possiamo dire che $c = a + 18$. Cioè $\{a, b, 8, 8, a + 18\}$ oppure $\{a, 8, 8, b, a + 18\}$. E dato che la media è 12 vuol dire che i cinque numeri sommati danno 60. Quindi abbiamo: $2a + b + 34 = 60 \Rightarrow 2a + b = 26$. Ora le coppie di numeri interi (a, b) che verificano la precedente equazione appartenenti alla prima cinquina non ne esistono perché sia a che b non possono superare 8 e $2 \cdot 8 + 8 = 24$. Nel secondo caso invece ci sono ben 6 soluzioni: $(8, 10)$, $(7, 12)$, $(6, 14)$, $(5, 16)$, $(4, 18)$, $(3, 20)$, che danno le seguenti cinquine:

$\{8, 8, 8, 10, 26\}$, $\{7, 8, 8, 12, 25\}$, $\{6, 8, 8, 14, 24\}$, $\{5, 8, 8, 16, 23\}$, $\{4, 8, 8, 18, 22\}$, $\{3, 8, 8, 20, 21\}$

- (AHSME 1955) Dati 4 numeri interi effettuiamo il seguente procedimento, scegliamo tre dei quattro numeri, effettuiamo la loro media aritmetica e aggiungiamo il risultato al quarto numero. Ripetendo il procedimento descritto in tutti i modi possibili otteniamo 29, 23, 21 e 17. Determinare i quattro numeri. [3; 9; 12; 21]
- (AHSME 1958) Determinare la media aritmetica di $\frac{x+a}{x}$ e $\frac{x-a}{x}$, per $x \neq 0$. [1]
- (AHSME 1959) Da un insieme di 50 numeri, la cui media aritmetica è 38, eliminiamo i numeri 45 e 55. Quanto vale la media aritmetica dei 48 numeri rimanenti? [37,5]

4. (AHSME 1962) Determinare la media aritmetica dell'insieme formato da $(n - 1)$ elementi uguali a 1 e un elemento pari a $1 - \frac{1}{n}$. $\left[1 - \frac{1}{n^2}\right]$
5. (AHSME 1964) Dati due numeri positivi a e b , con $a < b$, consideriamo la loro media aritmetica e la loro media geometrica e ne effettuiamo la differenza. Di quale delle seguenti quantità tale differenza è sempre minore? A) $\frac{(a+b)^2}{ab}$ B) $\frac{(a+b)^2}{8b}$ C) $\frac{(b-a)^2}{ab}$ D) $\frac{(b-a)^2}{8a}$ E) $\frac{(b-a)^2}{8b}$ [D]
6. (AHSME 1965) Dati 5 numeri, calcoliamo le seguenti medie aritmetiche: m , di tutti i numeri, k , dei primi due numeri; l , degli ultimi tre numeri; p di k ed l . Quale fra le seguenti scritte è vera indipendentemente dalla scelta dei cinque numeri? A) $m = p$ B) $m \geq p$ C) $m > p$ D) $m < p$ E) Nessuna [E]
7. (AHSME 1973) Consideriamo l'operazione binaria $*$ definita dalla legge $x * y = \frac{x+y}{2}$. Quali fra le seguenti proprietà sono verificate da questa operazione? A) proprietà associativa; B) proprietà commutativa; C) distributività della media rispetto alla somma (cioè $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$); D) distributività della somma rispetto alla media (cioè $a + (b * c) = (a + b) * (a + c)$); E) esistenza di un elemento neutro. [B), C)]
8. (AHSME 1982) Su una lavagna scriviamo n numeri interi consecutivi a partire da 1. Poi cancelliamo uno dei numeri scritti. In tal modo la media dei numeri rimasti è $\frac{602}{17}$. Che numero è stato cancellato? Suggerimento: considerare quale può essere la media maggiore e quale la media minore a seconda del numero cancellato, quindi determinare un intervallo di valori all'interno del quale sta la media calcolata. [7]
9. (AHSME 1983) In una certa popolazione il rapporto fra donne e uomini è 11:10. Sapendo che la media aritmetica delle età delle donne è 34, mentre quella degli uomini è 33, determinare la media delle età della popolazione. $[\approx 33,05]$
10. (AHSME 1987) Nella tabella seguente sono riportati i valori esatti, in percentuale, della distribuzione di frequenze di una serie di misure. È stato dimenticato di scrivere il numero totale delle misure effettuate, qual è il suo minimo valore possibile? [8]

Valore misurato	Frequenza percentuale
0	12,5
1	0
2	50
3	25
4	12,5

11. (AHSME 1988) X , Y e Z sono tre insiemi disgiunti di persone. Nella tabella seguente consideriamo alcune medie relative a tali insiemi. Determinare la media dell'insieme $X \cup Y \cup Z$. [34]

Insieme	X	Y	Z	$X \cup Y$	$X \cup Z$	$Y \cup Z$
Media	37	23	41	29	39,5	33

12. (AHSME 1991) 100 studenti hanno partecipato all'AHSME l'anno scorso ottenendo un punteggio medio di 100. I non senior erano il 50% in più dei senior. Determinare la media dei senior sapendo che è stata il 50% più alta di quella dei non senior. [125]
13. (OMI 1992) In una classe vi sono tre ragazzi per ogni due ragazze. Se l'età media dei ragazzi è 15 anni e 5 mesi e quella delle ragazze è 14 anni e 7 mesi, qual è l'età media della classe? [15 anni e 1 mese]
14. MT1992) Le età dei 10 membri del Girl's Club va dai 4 ai 13 anni, ed ogni ragazza ha una diversa età. Le ragazze sono a due a due sorelle e fanno parte di 5 famiglie diverse. La somma delle età delle coppie di sorelle sono 10, 13, 17, 22 e 23. Quanti anni ha la sorella della ragazza che ha 7 anni? [10]
15. (AHSME 1994) La media di un campione di 5 osservazioni è 10, la mediana è 12. qual è il minimo valore che può assumere il range di tale campione? [5]
16. (AHSME 1995) Una distribuzione di 5 numeri naturali ha media 12 e range 18. La mode e la mediana sono entrambe 8. Quanti sono i diversi valori che può assumere il secondo più grande elemento della distribuzione? [6]

17. (AHSME 1997) Consideriamo la successione $1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots$, il cui n -esimo termine è $(-1)^{n+1} \cdot n$. Qual è la media dei primi 200 termini della successione? [−0,5]
18. (AHSME 1997) Una distribuzione di numeri interi ha moda 32 e media 22. Il più piccolo dei numeri è 10. La mediana m è un elemento della distribuzione. Se m fosse sostituito da $m + 10$, media e mediana della nuova distribuzione sarebbero 24 e $m + 10$, rispettivamente. Se m fosse sostituito da $m - 8$, la mediana della nuova distribuzione sarebbe $m - 4$. Quanto vale m ? [20]
19. (HSMC 1999) Durante i primi 4 giorni da che ha iniziato un nuovo lavoro, Arthur si è svegliato alle 5:30, 5:30, 7:10 e 7:30. In media a che ora avrebbe dovuto alzarsi ogni giorno? [6:25]
20. (HSMC 2000) Un insegnante assegna due diverse prove di uno stesso esame, A e B) Gli esaminandi sono 85 e possono scegliere una sola delle due prove da svolgere. La media, in centesimi, di chi ha svolto la prova A è 68; la media di chi ha svolto la B è 73. Se la media ottenuta da tutti gli esaminandi è 70, quanti studenti hanno svolto la prova A? [51]
21. (AMC 2000) La distribuzione $\{n, n + 3, n + 4, n + 5, n + 6, n + 8, n + 10, n + 12, n + 15\}$ ha mediana 10. Qual è la media? [11]
22. (AMC 2000) Quando la media, la mediana e la moda della distribuzione $\{10, 2, 5, 2, 4, 2, x\}$ sono ordinate in modo crescente, formano una progressione aritmetica non-costante. Qual è la somma di tutti i possibili valori reali di x ? [20]
23. (AMC 2000) Mrs. Walter ha svolto un esame di matematica in una classe di 5 studenti. Ha scritto i voti, in centesimi, in ordine casuale su un foglio elettronico, che ha calcolato automaticamente la media ogni volta che ha immesso un voto. Mrs. Walter ha notato che dopo ogni immissione la media era sempre intera. I voti, in ordine crescente, sono $\{71, 76, 80, 82, 91\}$. Quale voto è stato immesso per ultimo? [80]
24. (AMC 2001) La media di 3 numeri è 10 in più del minimo dei numeri e 15 in meno del massimo. La mediana dei 3 numeri è 5. Quanto fa la somma? [30]
25. (AMC 2001) Il polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verifica la proprietà che la media dei suoi zeri, il prodotto dei suoi zeri e la somma dei suoi coefficienti sono tutti uguali fra loro. Se l'intersezione con l'asse y del grafico di $y = P(x)$ è 2, quanto vale b ? [−11]

Question in English

Working together

This is a question assigned at HSMC, level BEST in 2001.

The batting average for a baseball player is determined by dividing his total number of hits for the season by his total number of official at bats for the season. A baseball player had an average of 0,250 prior to his game yesterday. The player had 0 hits in 4 official at bats in his game yesterday and his average dropped to 0.2475. How many hits does this player have for the season?

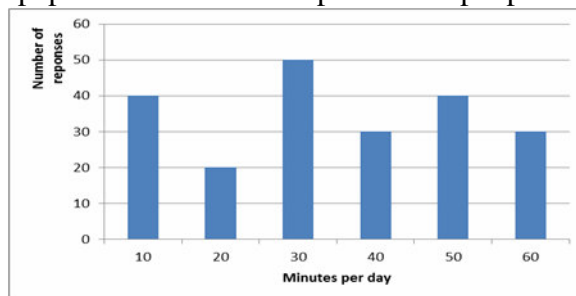
Tell that the average is 0,250 in n batting, means that $\frac{h}{n} = 0,25$, where h is the sum of all the hits. After

other 4 hits we have: $\frac{h}{n+4} = 0,2475$. Thus, dividing term by term: $\frac{n+4}{n} = \frac{0,25}{0,2475} \Rightarrow 0,2475n + 0,99 =$

$0,25n \Rightarrow 0,0025n = 0,99 \Rightarrow n = 396$. At last: $\frac{h}{396} = 0,25 \Rightarrow h = 396 \cdot 0,25 = 99$.

26. (MT1994) The average of seven different whole numbers is 7. what is the largest possible value of any of these numbers? [34]
27. (AHSME 1995) Kim earned scores of 87, 83 and 88 on her first three mathematics examinations. If Kim receives a score of 90 on the fourth exam, then her average will [B]
(A) remain the same (B) increase by 1 (C) increase by 2 (D) increase by 3 (E) increase by 4
28. (AHSME 1997) In the sixth, seventh, eighth and ninth basketball games of the season, a player scored 23, 14, 11, and 20 points, respectively. Her points-per-game average was higher after nine games than it was after the first five games. If her average after ten games was greater than 18, what is the least number of points she could have scored in the tenth game? [29]

29. (AHSME 1998) A speaker talked for sixty minutes to a full auditorium. Twenty per cent of the audience heard the entire talk and ten per cent slept through the entire talk. Half of the remainder heard one third of the talk and the other half-heard two thirds of the talk. What was the average number of minutes of the talk heard by members of the audience? [33]
30. (HSMC 1999) Find the mean of all even numbers that can be formed using exactly three of the digits 2, 3, 5 and 7. [552]
31. (HSMC 2000) A class of 100 students were scheduled to take an exam. The instructor created three versions of the exam and distributed them to the students. The class average on the exam was 75.62. Fewer than 30 students took version 1 and fewer than 30 students took version 2. If the average on version 1 was 80, the average on version 2 was 82 and the average on version 3 was 70, then how many students took version 1 of the exam? [25]
32. (HSMC 2000) The average of two numbers is 15. Find the smaller number if the smaller is $\frac{2}{3}$ the larger. [12]
33. (HSMC 2000) Let x and y be two distinct positive real numbers whose arithmetic mean is 13 and whose geometric mean is 12. Find x and y . [$x = 8, y = 18$]
34. (HSMC 2001) The results of a recent survey of subscribers to the local daily newspaper were summarized in the table below showing the number of people who responded and the number of minutes per day they devote to reading the newspaper. What fractional part of the people surveyed spend 20 to 40



minutes per day reading the paper?

$$\left[\frac{10}{21} \right]$$

35. (HSMC 2001) After making a trip of 48 miles, a man found that if he had increased his average speed by 8 mph, he could have made the trip in 1 hour less time. Find his original rate in miles per hour. [16]
36. (HSMC 2001) The arithmetic mean of eight numbers is 75. If the mean of three of these numbers is 60, find the mean of the remaining five numbers. [84]

Working together

This question was assigned at AHSME in 1996.

Six numbers from a list of nine integers are 7, 8, 3, 5, 9, and 5. The largest possible value of the median of all nine numbers in this list is?

The largest possible median will occur when the three numbers not given are larger than those given. Let a , b , and c denote the three missing numbers, where $9 \leq a \leq b \leq c$. Ranked from smallest to largest, the list is 3, 5, 5, 7, 8, 9, a , b , c , so the median value is 8.

37. (MT1992) 25 people took part in a free-throw competition. The first participant scored x points, the second scored y points, the third scored the arithmetic mean of the number of points scored by the first two, and each subsequent competitor scored the arithmetic mean of the number of points scored by all the previous ones. How many points did the last competitor score? [$(x + y)/2$]
38. (MT1992) If the digits used in writing the numerals 1, 2, ..., 100 are listed, what are their mean, median and mode? [901/192; 5; 1]
39. (MT1993) The arithmetic mean of Ed's ten test scores is 87. The teacher throws out the top and bottom scores, which are 55 and 95. What is the mean of the remaining set of scores? [90]
40. (MT1996) A list of five positive integers has mean 12 and range 18. the mode and median are both 8. How many different values are possible for the second largest element of the list? [6]

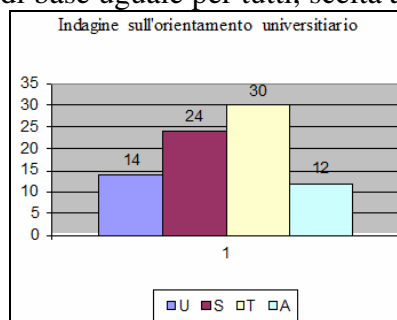
41. (HSMC 2002) Before taking his last test in a class, the arithmetic mean of Brian's test scores is 91. He has determined that if he scores 98 on his last test, the arithmetic mean of all his test scores will be exactly 92. How many tests, including the last test, does Brian take for this class? [7]
42. (HSMC 2003) Jack had the following quiz scores: 75, 85, 90, 60, 55. If one more quiz will be given, what is the lowest score Jack can get so as to have an average of 70 or better? [55]
43. (HSMC 2005) Henry took five tests and his average score was 57 points. He scored at least 50 points on each test. There were 100 points possible on each test. What is the highest score that Henry could have earned on any of the five tests? [85]
44. (HSMC 2006) The mean of a set of eight numbers is 3 and the mean of another set, of twelve numbers, is A) If the mean of the combined set of twenty numbers is 10,2, what is the value of A? [15]
45. (HSMC 2007) Before the final exam, Sara had test scores of 91, 89, 83, 78, 76, and 75. Her teacher uses the average of the test scores to assign the final grade. Sara has the option of keeping her current average or replacing the highest and lowest scores test scores with a single score on a final exam. If she chooses the replacement option, what is the lowest score she can receive and still maintain at least the average she currently has? [84]
46. (HSMC 2008) Hasse had an average score of 85 on his first eight quizzes. He had an average score of 81 on his first nine quizzes. What score did he make on his ninth quiz? [49]
47. (HSMC 2008) For each positive integer n , the mean of the first n terms of a certain sequence is n . What is the 2008th term of the sequence? [4015]

Attività di recupero

Rappresentazioni grafiche

Fase 1: Osserva

- Consideriamo la seguente distribuzione di frequenze, ottenuta da un rilevamento effettuato su un campione di 80 studenti, ai quali è stato chiesto che tipo di studi universitari pensano di intraprendere dopo il diploma: $I = \{(\text{facoltà umanistiche}; 12), (\text{facoltà scientifiche}; 24), (\text{facoltà tecniche}; 30), (\text{altre facoltà}; 14)\}$. Per rappresentare graficamente la precedente distribuzione mediante un istogramma, associamo a ciascuna modalità un rettangolo di base uguale per tutti, scelta a piacere, e di altezza pari alla

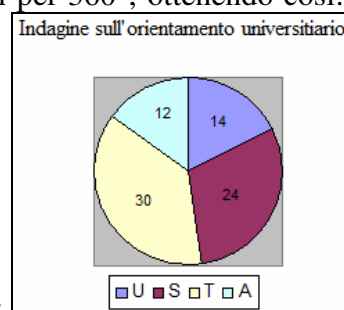


frequenza, ottenendo la seguente immagine.

Se volessimo rappresentare la stessa distribuzione con un aerogramma dovremmo calcolare le frequenze relative in percentuale, dividendo ciascuna frequenza assoluta per il numero di rilevazioni, cioè 80. Otteniamo così:

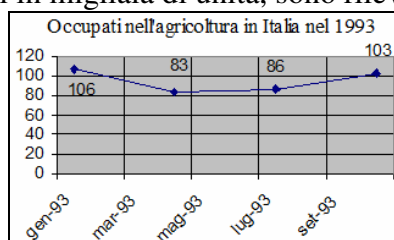
$$\left\{ \left(U; \frac{14}{80} = 0,175 \right), \left(S; \frac{24}{80} = 0,3 \right), \left(T; \frac{30}{80} = 0,375 \right), \left(A; \frac{12}{80} = 0,15 \right) \right\};$$

per ottenere il valore percentuale basta moltiplicare per 100 i precedenti valori decimali: $\{(U; 17,5\%), (S; 30\%), (T; 37,5\%), (A; 15\%)\}$. Perciò dovremmo dividere un cerchio di raggio arbitrario in quattro parti, in modo tale che ciascuna di esse sia proporzionale ai numeri 17,5; 30; 37,5 e 15. Il che non è molto facile; se volessimo servirci di un goniometro per semplificare il lavoro dobbiamo stabilire a quale angolo corrisponde ciascuna percentuale, per far ciò dobbiamo moltiplicare i valori decimali per 360° , ottenendo così: $\{(U; 63^\circ), (S;$

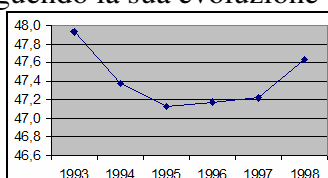


$120^\circ), (T; 135^\circ), (A; 54^\circ)\}$, ottenendo perciò il seguente grafico:

- Consideriamo il grafico a linee seguente, relativo al numero di occupati a tempo parziale nell'agricoltura in Italia nel 1993, i cui dati, espressi in migliaia di unità, sono rilevati a ogni trimestre (dati ISTAT).



- Nel seguente grafico a linee invece rappresentiamo il cosiddetto tasso di attività in percentuale per i cittadini italiani con più di 15 anni, seguendo la sua evoluzione dal 1993 a 1998 (dati ISTAT).



I grafici a linee permettono di fornire in modo molto rapido, con un “colpo d’occhio”, informazioni rela-

tive all'andamento qualitativo di un dato allo scorrere del tempo.

Fase 2: Completa ...

- Consideriamo i seguenti dati, relativi al tasso di disoccupazione in Italia nel 1993, con dati rilevati a ogni trimestre (dati ISTAT).

gen-93	apr-93	lug-93	ott-93
6,1	6,8	6,4	7,1

Vogliamo rappresentarli con un grafico a linee. Per far ciò basta considerare i punti la cui ascissa è e la cui ordinata è Dopodiché uniremo i con dei Ecco il grafico cercato (che tu disegnerai)

- Vogliamo rappresentare con un istogramma la seguente distribuzione statistica, relativa alla bibita scelta durante un rinfresco da ciascuno degli invitati. $A = \{(\text{analcolico}; 15), (\text{caffè}; 20), (\text{succo di frutta}; 25), (\text{bibita gassata}; 30), (\text{altro}; 10)\}$. Intanto dobbiamo fissare l'ampiezza della base a piacere, poi riportiamo ciascun valore della frequenza sull'asse delle, ottenendo quindi il grafico seguente (costruisci tu il grafico). Volendo rappresentare gli stessi dati in un aerogramma, calcoliamo intanto le frequenze relative, che sono $\left\{ \frac{15}{\dots} = \dots, \frac{20}{\dots} = \dots, \dots = \dots, \dots = \dots, \dots = \dots \right\}$. Per determinare l'ampiezza del settore circolare che rappresenta ciascun valore dobbiamo moltiplicare ciascuno dei valori precedenti per, ottenendo così: $\{ \dots, \dots, \dots, \dots, \dots \}$. Adesso possiamo rappresentare il nostro aerogramma.

Fase 3: Prova!

Rappresenta mediante istogrammi e aerogrammi le seguenti distribuzioni statistiche

- $\{(\text{carne bovina}; 20); (\text{carne equina}; 5); (\text{carne ovina}; 10); (\text{carne suina}; 25); (\text{altra carne}; 10)\}$
- $\{(\text{hot dog}; 24); (\text{hamburger}; 18); (\text{cheese burger}; 12); (\text{vegetariano}; 14); (\text{altro}; 5)\}$
- $\{(\text{bicicletta}; 32); (\text{skate boarda}; 4); (\text{pattini}; 12); (\text{monopattino}; 28); (\text{altro}; 3)\}$
- $\{(\text{calcio}; 42); (\text{pallavolo}; 15); (\text{pallacanestro}; 18); (\text{pallamano}; 10); (\text{pallanuoto}; 6); (\text{altro}; 2)\}$
- $\{(\text{italiano}; 21); (\text{matematica}; 8); (\text{scienze naturali}; 12); (\text{lingua straniera}; 20); (\text{informatica}; 32); (\text{disegno}; 5); (\text{altro}; 2)\}$
- $\{(\text{Azionario italiano}; 120); (\text{Obbligazionario italiano}; 48); (\text{Azionario estero}; 18); (\text{Obbligazionario estero}; 16); (\text{Misto italiano}; 28); (\text{misto estero}; 23)\}$
- $\{(\text{Gialli}; 23); (\text{Rosa}; 4); (\text{Avventura}; 15); (\text{Fantascienza}; 41); (\text{altro}; 31)\}$
- $\{(\text{auto sportiva}; 10); (\text{utilitaria}; 41); (\text{ammiraglia}; 15); (\text{motocicletta}; 13); (\text{fuoristrada}; 8)\}$

Rappresentare con un diagramma a linee le seguenti serie temporali.

- Altezza di un individuo seguita in dieci anni successivi: $\{152; 154; 158; 164; 166; 168; 172; 175; 176; 176\}$.
- Forza lavoro, in migliaia di unità, della popolazione italiana dai 15 anni in su (Dati ISTAT)

1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
22,783	22,662	22,664	22,778	22,895	23,180	23,361

- Rapporto del numero di occupati rispetto al totale per i cittadini italiani che hanno un'età compresa tra 25 e 64 anni (dati ISTAT)

1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
58,7	57,7	57,3	57,5	57,4	57,9	58,5

- Tasso di disoccupazione in Italia per i cittadini di età compresa tra 25 e 64 anni (dati ISTAT)

1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
6,6	7,7	8,3	8,4	8,7	8,9	8,8

- Indice degli ordinativi per le industrie italiane di calzature (dati ISTAT)

1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
61,3	62,3	64,3	72,3	84,9	100,0	101,7	102,3	93,7	97,3

- Numero di iscritti al primo anno delle scuole secondarie superiori in Italia (dati ISTAT)

1983-84	1984-85	1985-86	1986-87	1987-88	1992-93	1993-94	1994-95	1995-96	1996-97	1997-98
715889	726538	751259	759685	712997	699567	671878	644198	633596	631314	621319

15. Numero di procedimenti civili sopravvenuti nei tribunali italiani (dati ISTAT)

1993	1994	1995	1996	1997	1998
448277	454233	370650	285765	281738	282608

Indici centrali**Fase 1: Osserva**

- Il concetto di media aritmetica ha un fondamento per così dire *democratico*, nel senso che calcolare la media aritmetica di una distribuzione consiste nel *far finta* che tutte le modalità siano uguali. Così parliamo di reddito medio intendendo dire quanto varrebbe il reddito di una certa popolazione se ciascuno dei suoi elementi avesse lo stesso reddito; allo stesso modo parliamo di altezza media, peso medio e così via. Consideriamo la distribuzione dei voti che uno studente ha ottenuto durante l'anno in una data materia in ordine temporale: {4+; 5-; 6; $6\frac{1}{2}$; $4\frac{1}{2}$; 4; 7-; 6}. Per assegnare allo studente il voto finale l'insegnante potrebbe decidere di *far finta* che l'alunno abbia preso sempre lo stesso voto, deve perciò calcolare la media aritmetica della distribuzione. Prima però deve trasformare i segni + e - in numeri. Per far ciò sostituisce al simbolo + il numero + 0,25, al simbolo - il numero - 0,25, a $\frac{1}{2}$ il numero + 0,5. La distribuzione diverrà perciò: {4,25; 4,75; 6; 6,5; 4,5; 4; 6,75; 6}. Calcoliamo adesso la media: $\frac{4,25+4,75+6+6,5+4,5+4+6,75+6}{8} = \frac{42,75}{8} = 5,34375$, quindi il voto da assegnare sarà circa 5, dato che si assegnano solo voti interi sarà 5.
- Vogliamo determinare il reddito medio di dieci impiegati, tenuto conto che la distribuzione a essi associata è {1250; 1300; 1150; 1200; 1150; 1400; 1700; 1000; 1250; 1800}. Applichiamo semplicemente la formula: $\frac{1250+1300+1150+1200+1150+1400+1700+1000+1250+1800}{10} = \frac{13200}{10} = 1320$. In pratica è come se ciascun impiegato guadagnasse 1320 euro.
- In effetti nel precedente esercizio potevamo notare che alcune modalità si ripetono, possiamo quindi semplificare i calcoli sfruttando questo fatto, considerando quindi la cosiddetta distribuzione di frequenze: {(1250; 2), (1300; 1), (1150; 2), (1200; 1), (1400; 1), (1700; 1), (1000; 1), (1800; 1)}, calcoliamo perciò la media ponderata: $\frac{1250 \cdot 2 + 1300 + 1150 \cdot 2 + 1200 + 1400 + 1700 + 1000 + 1800}{10} = \frac{13200}{10} = 1320$. Naturalmente il risultato non cambia.
- Data la seguente distribuzione di altezze degli studenti di una classe {168; 169; 172; 172; 175; 168; 165; 184; 157; 182; 183; 168; 167; 175; 174; 175; 176; 159; 180}, vogliamo suddividere la classe in due gruppi, ugualmente numerosi, di ragazzi rispettivamente più bassi e più alti. Il problema equivale a determinare la mediana della distribuzione. Intanto ordiniamo la distribuzione: {157; 159; 165; 167; 168; 168; 168; 169; 172; 172; 174; 175; 175; 175; 176; 180; 182; 183; 184}. Poiché abbiamo 19 studenti abbiamo un elemento che “separa” i due gruppi ciascuno formato da 9 studenti. Tale elemento è proprio la mediana ed è l'elemento che occupa la decima posizione, cioè 172.
- Se il giorno in cui abbiamo voluto formare i due gruppi lo studente alto 167 era assente, i presenti sarebbero 18. Quindi avremmo già i seguenti due gruppi di 9 senza elemento di separazione: {157; 159; 165; 168; 168; 168; 169; 172; 172} e {174; 175; 175; 175; 176; 180; 182; 183; 184}. Avremmo però un “più alto dei bassi”, cioè 172, e un “più basso degli alti”, cioè 174. In questo caso considereremo come mediana, cioè come separazione dei due gruppi la loro media aritmetica: $\frac{172+174}{2} = 173$.
- Supponiamo di avere la seguente distribuzione di frequenze relativa ai voti del primo quadrimestre in matematica degli studenti di una classe prima (il primo numero è il voto, il secondo il numero di allievi che lo hanno conseguito): {(2; 2), (3; 2), (4; 5), (5; 6), (6; 6), (7; 4), (8; 3), (9; 1)}. Vogliamo dividere i 29 studenti in due gruppi ugualmente numerosi dei “meno bravi” e dei “più bravi”

rispettivamente. La distribuzione è già ordinata, dobbiamo però tenere conto delle frequenze, dato che non abbiamo 8 modalità quanti i voti, bensì 29 quanto i ragazzi. Perciò la mediana non sarà la media aritmetica fra 5 e 6, ma il voto conseguito dallo studente che, nell'ordinamento dal voto minore al maggiore, occupa la posizione numero 15. Per semplificare i calcoli consideriamo le cosiddette frequenze cumulate, cioè la seguente tabella:

Voto minore o uguale a	Numero di studenti
2	2
3	$2 + 3 = 5$
4	$5 + 5 = 10$
5	$10 + 6 = 16$
6	$16 + 6 = 22$
7	$22 + 4 = 26$
8	$26 + 2 = 28$
9	$28 + 1 = 29$

In tal modo notiamo che lo studente che occupa la posizione numero 15 ha conseguito 5 che è perciò il voto mediano.

- Data la seguente distribuzione di frequenze relative alle preferenze registrate durante un'intervista sui gruppi rock più in voga negli anni '70 {(Pink Floyd; 12), (Deep Purple; 18), (Genesis; 3), (Led Zeppelin; 15), (Rolling Stones; 11), (Altri; 4)}. Vogliamo stabilire quale gruppo rock, relativamente agli intervistati era più in voga. Ciò riguarda il maggior numero di preferenze, cioè la cosiddetta moda. In questo caso abbiamo una sola modalità più frequente, pertanto abbiamo a che fare con una distribuzione unimodale, la cui moda è Deep Purple che è perciò il gruppo più amato dagli intervistati.

Fase 2: Completa ...

- Vogliamo calcolare il valore medio di un titolo azionario in un dato giorno tenuto conto dei seguenti 15 prezzi rilevati a intervallo di 30' dalle 9:30 alle 17:30: {3,15; 3,20; 3,30; 3,30; 3,25; 3,25; 3,28; 3,32; 3,33; 3,29; 3,27; 3,25; 3,24; 3,25; 3,26}, sommiamo i valori, ottenendo:, dividiamo tale valore per e otteniamo così il prezzo medio che è perciò
- Nella precedente distribuzione osserviamo che alcuni valori si ripetono, pertanto costruiamo la distribuzione delle frequenze: {(3,15; 1), (3,20; 1), (3,30; 2),}, adesso moltiplichiamo ciascuna modalità per la rispettiva frequenza, ottenendo così i seguenti valori: {3,15; 3,20; 6,60;} sommiamo tali valori, ottenendo e dividiamo per ottenendo ancora il risultato precedente cioè
- Consideriamo la seguente distribuzione dei pesi di alcuni ragazzi {62; 65; 68; 45; 54; 55; 65; 62; 66; 68; 52; 59; 80; 53; 65} vogliamo determinare l'elemento mediano che divide i ragazzi nei due gruppi, ugualmente numerosi, dei "più leggeri" e dei "più pesanti". Per far ciò dobbiamo intanto ordinare la distribuzione, scrivendo: {52; 53; 54;}. Adesso, dato che le modalità sono in numero diciamo che la mediana della distribuzione è l'elemento che occupa la posizione numero quindi il numero.
- Se alla precedente distribuzione aggiungiamo un altro studente, di peso 65, la distribuzione ha un numero di elementi, quindi la mediana si ottiene mediante il seguente calcolo:, dato che consideriamo la degli elementi che occupano le posizioni numero e Pertanto la mediana adesso è
- Vogliamo determinare la mediana delle seguenti distribuzioni di frequenze di voti conseguiti a un esame universitario da parte dei promossi: {(18; 5), (19; 3), (20; 6), (21; 2), (22; 5), (24; 3), (25; 1), (27; 4), (28; 5), (30; 4)}. Consideriamo la somma delle frequenze: dato che questo è un numero per calcolare la mediana dobbiamo considerare gli elementi che occupano le posizioni e per facilitare il calcolo costruiamo la seguente distribuzione delle frequenze cumulate.

Voto minore o uguale a	Numero di studenti
18	5
19	$5 + 3 = 8$
20	$8 + 6 = 14$
21	
22	
24	
25	
27	
28	
30	

Ciò significa che i due elementi cercati hanno avuto rispettivamente come voto: ... e ... Quindi la mediana è la loro cioè

- Abbiamo intervistato alcuni ragazzi relativamente ai loro gusti in materia di gelati, ottenendo i seguenti risultati:

Gusto	Preferenze
Cioccolato	5
Torrone	7
Fragola	12
Cedro o limone	5
Zuppa inglese	4
Pistacchio	12
Altri gusti	8

Qual è il gusto maggiormente preferito dagli intervistati? Basta considerare il valore o i valori che hanno maggiore frequenza. In questo caso ne abbiamo quindi siamo in presenza di una distribuzione possiamo perciò dire che vi sono gusti preferiti, cioè

Fase 3: Prova!

Determinare le medie aritmetiche delle seguenti distribuzioni statistiche

- Delle distribuzioni statistiche dell'attività precedente, dal numero 9 in poi.
[166,1; 22,9; 57,9; 8,2; 84; 688022; 353879]
- Pesi di un gruppo di amici: {54; 56; 58; 55; 52; 60; 65; 53; 68; 72}. [59,3]
- Altezze degli studenti di una stessa classe {165; 168; 172; 172; 169; 181; 159; 182; 175; 175; 174; 168; 169; 176; 175}. [172]
- Costo medio di un litro di benzina verde in alcune rilevazioni ugualmente distanziate nel tempo: {1,42; 1,43; 1,55; 1,64; 1,44; 1,52; 1,55; 1,43; 1,43; 1,61; 1,60; 1,59; 1,60}. [1,53]
- Numero medio di unità scolastiche di scuola materna in Italia in rilevazioni annuali dall'a.s. 1992 – 93 all'a.s. 1997-98 (dati ISTAT): {27599; 26914; 26573; 26296; 26410; 25825}. [26602,8]
- Numero medio di insegnanti nelle scuole medie inferiori in Italia negli anni scolastici dal 1982-83 al 1987-88 (dati ISTAT) {282006; 282135; 291694; 294259; 295461; 294602}. [290026,2]
- Numero medio di biblioteche statali in alcune rilevazioni annuali che vanno dal 1982 al 1998 in Italia (dati ISTAT) {42; 42; 47; 47; 49; 46; 50; 50; 47; 47; 47; 47}. [46,75]
- Numero medio di musei statali italiani in alcune rilevazioni annuali dal 1983 al 1988 (dati ISTAT) {81; 85; 83; 80; 90; 90; 101; 136; 144; 152; 162; 171}. [114,6]
- Numero medio di permessi di lavoro rilasciati a cittadini non italiani dal 1993 al 1998 (dati ISTAT): {649102; 677791; 729159; 986020; 1022896; 1090820}. [859298]
- Trasformare le distribuzioni precedenti per le quali ha senso farlo, in distribuzioni di frequenze e calcolarne la media aritmetica ponderata.

Calcolare la mediana delle seguenti distribuzioni statistiche

- {11; 15; 12; 16; 15; 14; 13; 11; 18; 14; 16; 12} [14]

12. {2; 5; 1; 3; 2; 4; 2; 6; 5; 2; 5; 4; 8; 4} [4]
 13. {102; 105; 103; 100; 103; 102; 105; 102; 103; 104; 106; 105; 108} [103]
 14. {2,3; 2,4; 2,3; 2,25; 2,2; 2,3; 2,4; 2,3; 2,5; 2,3; 2,2; 2,23; 2,25; 2,35} [2,3]
 15. {74; 75; 74; 78; 79; 84; 85; 87; 88; 86; 85; 87; 75; 79; 84; 86; 82} [84]

Calcolare la mediana delle seguenti distribuzioni di frequenze

16. {(24; 5); (25; 3); (26; 4); (27; 3); (28; 2); (29; 4); (30; 2)} [26]
 17. {(12,3; 3); (12,4; 5); (12,7; 8); (12,9; 4); (13; 4); (13,1; 2)} [12,7]
 18. {(5,4; 2); (5,5; 3); (5,6; 5); (5,7; 2); (5,75; 4); (5,8; 3); (5,9; 1); (6; 4)} [5,725]
 19. {(2,12; 3); (2,15; 4); (2,18; 3); (2,2; 4); (2,23; 4); (2,25; 3); (2,28; 1)} [2,2]
 20. {(1000; 4); (1100; 3); (1200; 5); (1400; 5); (1500; 3); (1800; 2); (2000; 1)} [1200]

21. Determinare la moda delle distribuzioni di frequenza assegnate negli esercizi da 16 a 20.

[24; 12,7; 5,6; 2,15 $\vee$ 2,2 $\vee$ 2,23; 1200 $\vee$ 1400]

Variabilità**Fase 1: Osserva**

- Lo scarto quadratico medio di una distribuzione statistica intende misurare quanto in media un valore qualsiasi della distribuzione differisce dalla media aritmetica. Minore è il valore di σ e più uniforme è la distribuzione, ossia più vicine fra loro sono le singole modalità, quindi migliore indice centrale è la media aritmetica. Vogliamo determinare lo scarto quadratico medio della distribuzione {1; 5; 2; 3; 4; 5; 1; 2; 1; 1; 2; 3; 5; 6; 6; 4; 5; 4; 1; 1} ottenuta lanciando 20 volte un dado regolare di forma cubica. Cominciamo a determinare la media aritmetica. Per semplificare i calcoli trasformiamo la distribuzione in una distribuzione di frequenze: {(1; 6), (2; 3), (3; 2), (4; 3), (5; 4), (6; 2)}. Abbiamo allora: $\bar{x} = \frac{1 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 2}{20} = \frac{62}{20} = 3,1$. Quindi in media è come se avessimo ottenuto tutte e 20 volte il punteggio 3,1 (che chiaramente non esiste e non è possibile ottenere). determiniamo allora di quanto ciascuno dei 20 punteggi differisce da questo valore medio. Consideriamo sempre le frequenze: $\sigma = \sqrt{\frac{(1-3,1)^2 \cdot 6 + (2-3,1)^2 \cdot 3 + (3-3,1)^2 \cdot 2 + (4-3,1)^2 \cdot 3 + (5-3,1)^2 \cdot 4 + (6-3,1)^2 \cdot 2}{20}} = \sqrt{\frac{63,8}{20}} \approx 1,78$, quindi in media ciascun punteggio differisce da 3,1 di 1,78. calcoliamo il coefficiente di variazione che è un valore relativo, quindi fornisce un'informazione migliore. $\nu = \frac{\sigma}{\bar{x}} \approx \frac{1,78}{3,1} \approx 0,57$, quindi mediamente ogni punteggio differisce del 57% dalla media, che è un valore alquanto elevato.

Fase 2: Completa ...

- Consideriamo la distribuzione $A = \{5; 5; 4; 6; 7; 8; 8; 4; 5; 7; 6; 2; 5; 4; 6; 8; 4; 5; 6\}$ dei voti conseguiti alla fine del primo quadrimestre dagli studenti di una classe nell'insegnamento di statistica. Vogliamo determinare lo scarto quadratico medio di questa distribuzione. Cominciamo con lo scrivere la distribuzione di frequenze: {(2; 1), (4; 4),}. calcoliamo adesso la media ponderata: $\bar{x} = \frac{2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + \dots}{\dots} = \dots$. Questo è il voto medio della classe. Adesso vediamo quanto in media il voto di uno studente differisce dal precedente. $\sigma = \sqrt{\frac{(2-\dots)^2 \cdot 1 + (4-\dots)^2 \cdot 2 + \dots}{\dots}} = \sqrt{\frac{\dots}{\dots}} \approx \dots$. Infine calcoliamo il coefficiente di variazione: $\nu \approx \frac{\dots}{\dots} \approx \dots$. Perciò in media ogni voto differisce dal voto medio del%.

Fase 3: Prova!

1. Calcolare gli scarti quadratici medi delle distribuzioni assegnate negli esercizi da 1 a 9 dell'attività precedente. Risposte approssimate ai centesimi. [8,54; 0,25; 0,51; 0,75; 16,39; 47635,02; 75483,52; 6,50; 5,75; 0,08; 551,73; 5741,19; 2,45; 33,84; 178178,9]

2. Calcolare i coefficienti di variazione delle distribuzioni assegnate negli esercizi da 1 a 9 dell'attività precedente. Risposte approssimate ai centesimi.

[0,051; 0,011; 0,009; 0,092; 0,20; 0,070; 0,21; 0,11; 0,033; 0,051; 0,021; 0,020; 0,052; 0,30; 0,21]

Per svolgere un Test finale di 10 quesiti, collegati al sito

http://mathinterattiva.altervista.org/volume_2_7.htm