Matematicamente.it

Carmelo Di Stefano

Dal problema al modello matematico

Volume secondo

Per il triennio

Carmelo Di Stefano

Dal Problema al Modello matematico
Volume Secondo
Per il triennio

http://mathinterattiva.altervista.org/E-Book.htm

Edizione riveduta e corretta e arricchita di collegamenti multimediali.
Agosto 2019

Se vuoi contribuire a migliorare questo testo, invia segnalazioni di errori, mancanze, integrazioni all'autore carmelodst@alice.it o all'editore info@matematicamente.it. I proprietari di immagini, o di altri contenuti, che sono stati utilizzati impropriamente e inavvertitamente in questo libro, se ritengono di non essere stati citati correttamente sono pregati di mettersi in contatto con l'autore o con l'editore per gli interventi che si riterranno necessari; si fa presente che questo libro non ha scopo di lucro.

PRESENTAZIONE

Nel corso della lettura dei volumi troverai diverse cose, che di seguito ti spiego brevemente.

- All'inizio di alcune unità trovi un breve ripasso di argomenti svolti negli anni precedenti che ti risultano utili per affrontare serenamente la stessa unità. Vanno sotto il nome di **Richiamiamo le Conoscenze**. In alcune unità vi sono anche argomenti di approfondimento, denominati con il titolo ***Quelli che … vogliono sapere di più***
- Le definizioni, i teoremi, i corollari e simili enti matematici, sono contenuti all'interno di appositi box di un uguale colore (verde per le definizioni, celeste per i teoremi e così via)
- Ogni tanto troverai anche un box che ti spiega il significato di alcuni vocaboli, si intitola **Che cosa significa?**
- Poi ci sono tre diversi tipi di box con diverse informazioni storiche, precisamente ci sono quelli intitolati **I Protagonisti**, che contengono informazioni relativamente a famosi matematici citati nelle stesse pagine; invece ne **L'angolo storico** ci sono informazioni di varia natura, su quando per la prima volta si sono incontrate le nozioni di cui si sta parlando e simili informazioni; infine in quelli dal titolo **L'antologia** sono riportati e commentati passi di famose opere matematiche.
- Vi sono anche dei box chiamati **Intervallo matematico** o **Giochiamo alla matematica**, che si riferiscono, i primi ad applicazioni della matematica e gli altri alla cosiddetta matematica ricreativa.
- Tenuto conto delle ultime riforme scolastiche, in particolare della prova multidisciplinare dell'Esame di Stato, che riguarda la matematica e la fisica, ogni tanto troverai anche **L'angolo della MateFisica**, in cui sono trattati argomenti di fisica attinenti quelli di matematica sviluppati nell'unità. In particolare vengono presentati e, a volte svolti, quesiti assegnati agli Esami o nelle Simulazioni che il Ministero prepara durante l'anno.
- Alla fine di ogni argomento vi sono le relative verifiche. In esse sono presenti esercizi di tre livelli di difficoltà, opportunamente indicati. Il Livello 1 è relativo a esercizi che sono spesso semplice applicazione di quanto detto nella teoria; quelli di Livello 2 o contengono calcoli più complicati, o hanno bisogno di un impegno maggiore; infine quelli di Livello 3 riguardano quesiti che devono essere impostati usando la fantasia e non in modo ripetitivo. Questi ultimi sono riferiti ai più volenterosi. Per quelli a cui piace veramente ragionare e impegnarsi, alla fine di ogni unità sono presenti alcuni esercizi molto complessi, che vanno sotto il nome di **La sfida**. Invece per aiutarti all'inizio di ogni gruppo di esercizi di livello 1 o 2 vi sono alcuni esercizi simili svolti.
- Sono talvolta presenti box legati a importanti software matematici, quasi tutti di libero uso. In essi sono presenti dei link a delle applicazioni che descrivono come usare il software per comprendere meglio gli argomenti trattati o dei files che puoi usare solo se hai il software installato.
- Alla fine dell'unità sono presentati, quando possibile, esercizi tratti dagli esami di stato, soprattutto del Liceo Scientifico, riferiti ad anni passati.
- Sono anche presenti dei quesiti tratti da gare matematiche italiane ed internazionali, alcuni quesiti sono anche enunciati in lingua inglese.
- Alla fine di ogni unità vi sono le attività di recupero, formate essenzialmente da una serie di esercizi svolti, da completare e da svolgere interamente.
- Infine sono proposti dei test in formato multimediale, almeno 10 di numero, relativi ai più importanti argomenti dell'unità didattica, essi sono utilizzabili solo on line dal sito http://mathinterattiva.altervista.org.
- Un altro sito da cui puoi scaricare molto materiale didattico gratuito è http://matdidattica.altervista.org.
- Vi sono anche diversi collegamenti multimediali che ti portano a pagine web o a files di qualcuno dei software liberi che sono descritti nel libro, o ancora delle applicazioni che mostrano meglio come si fa una certa procedura o come si dimostra un teorema o altro ancora.

Buon lavoro da Carmelo Di Stefano

Indice

5. Funzioni esponenziali e logaritmiche

5.1 Esponenziali

Richiamiamo le conoscenze	Pag. 8
Verifiche	10
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali	13
Questions in English	14
Uso della calcolatrice per il calcolo di una potenza	14
Potenze ad esponente reale	15
Verifiche	17
Equazioni e disequazioni esponenziali	18
Verifiche	20
Giochiamo alla matematica	27
L'angolo di Derive	27
L'angolo di Microsoft Mathematics	27
La sfida	28
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali	28
Questions in English	29
Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari	29
Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari	29

5.2 Logaritmi

Concetto di logaritmo e curva logaritmica	Pag. 31
Verifiche	35
Proprietà dei logaritmi	39
Verifiche	41
Intervallo matematico	48
Equazioni e disequazioni logaritmiche	49
Verifiche	51
L'angolo di Derive	56
L'angolo di Microsoft Mathematics	56
L'angolo della MateFisica	56
La sfida	58
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali	59
Questions in English	61
Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari	62
Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari	63

6. Geometria dello spazio ambiente

6.1 Rette e piani nello spazio

Richiamiamo le conoscenze Pag. 65
Postulati ed enti primitivi della geometria euclidea dello spazio 66
Posizioni reciproche di piani nello spazio 67
Posizioni reciproche di rette nello spazio 68
Gli angoli diedri 69
Perpendicolarità nello spazio 70
L'antologia 72
Verifiche 73
L'angolo di Cabri3D 77
L'angolo di Geogebra 77
La sfida 77
Temi assegnati agli esami di stato 77
Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari 78
Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari 78

6.2 Geometria dei poliedri

Richiamiamo le conoscenze Pag. 80
I poliedri 81
Verifiche 85
I prismi 87
Verifiche 89
Le piramidi e i tronchi di piramide 93
Verifiche 96
I poliedri regolari 101
Verifiche 104
I poliedri semiregolari 108
Verifiche 111
L'angolo di Cabri3D 112
L'angolo di Geogebra 112
La sfida 113
Temi assegnati agli esami di stato 114
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali 115
Questions in english 116
Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari 117
Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari 119

6.3. Geometria dei solidi di rotazione

Richiamiamo le conoscenze Pag. 121
Il cilindro, il cono e il tronco di cono 122
Verifiche 125
La sfera e le sue parti 130
Verifiche 136
L'angolo di Cabri3D 141
L'angolo di Geogebra 141
La sfida 141
Temi assegnati agli esami di stato 142
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali 142
Questions in english 143
Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari 144
Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari 145

6.4. Il volume

Concetto di volume e volume dei poliedri	Pag. 147
Verifiche	152
Volume dei corpi rotondi	155
Verifiche	157
La sfida	159
Temi assegnati agli esami di stato	159
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali	162
Questions in english	163
Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari	165
Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari	166

6.5. Geometria analitica in 3D

Geometria degli spazi a più di 2 dimensioni	Pag. 168
Verifiche	171
Piani e rette nello spazio cartesiano	174
Verifiche	180
L'angolo della MateFisica	184
L'angolo di Geogebra	183
La sfida	184
Temi assegnati agli esami di stato	185
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali	187
Questions in english	187

7. Goniometria e trigonometria

7.1 Risoluzione dei triangoli

Richiamiamo le conoscenze	Pag. 189
Definizione delle funzioni trigonometriche elementari per angoli acuti	191
Verifiche	197
Risoluzione dei triangoli rettangoli	202
Verifiche	205
L'angolo delle correzioni	214
Risoluzione dei triangoli qualsiasi e teorema dei seni	215
Verifiche	221
Risoluzione dei triangoli qualsiasi e teorema del coseno	227
Verifiche	231
L'angolo delle correzioni	239
L'angolo di Microsoft Mathematics	240
L'angolo della MateFisica	240
La sfida	242
Temi assegnati agli esami di stato	244
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali	249
Questions in english	251
Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari	253
Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari	253

7.2 Goniometria

Definizione delle funzioni trigonometriche elementari per angoli qualsiasi	Pag. 255
Verifiche	259
Unità di misura in radianti e rappresentazione grafica delle funzioni goniometriche elementari	265
Verifiche	271
L’angolo di Geogebra	280
L’angolo della MateFisica	280
Temi assegnati agli esami di stato	283
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali	284
Questions in english	285
Quelli che vogliono sapere di più … Riferimento polare	286
Verifiche	286
Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari	287
Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari	288

7.3 Equazioni e disequazioni goniometriche

Risoluzione di equazioni goniometriche elementari	Pag.290
Verifiche	293
Equazioni omogenee in seno e coseno	302
Verifiche	303
Disequazioni goniometriche	307
Verifiche	308
Temi assegnati agli esami di stato	314
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali	314
Questions in english	315
Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari	315
Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari	316

7.4 Formule goniometriche

Formule di addizione, sottrazione, duplicazione e bisezione degli archi	Pag. 318
Verifiche	328
Equazioni lineari in seno e coseno	346
Verifiche	349
Formule di prostaferesi e di Werner	352
Verifiche	354
L’angolo della MateFisica	358
La sfida	359
Temi assegnati agli esami di stato	361
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali	363
Questions in english	364
Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari	365
Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari	365

7.5 Forma trigonometrica dei numeri complessi

Richiamiamo le conoscenze Pag. 367
Forma trigonometrica, radici ennesime dei numeri complessi
e piano di Argand–Gauss 368
Verifiche 372
Quelli che… vogliono sapere di più
Il campo dei numeri complessi 375
Equazioni in $\mathbb{C}$ 376
Verifiche 378
La sfida 381
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali 383
Questions in english 384
Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari 384
Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari 384

8. Successioni di numeri reali

8.1 L'insieme dei numeri naturali

Assiomi dei numeri naturali Pag. 386
Il concetto di insieme infinito e di numerabilità 387
L'Antologia 387
Verifiche 392
Giochiamo alla matematica 392
Il Principio di induzione 393
Verifiche 395
La sfida 397
Temi di esame assegnati agli esami di stato 398

8.2 Combinatoria

Raggruppamenti semplici e con ripetizione e principio dei cassetti Pag. 400
Verifiche 401
Disposizioni semplici e ripetute 404
Verifiche 406
Permutazioni semplici e ripetute 408
Verifiche 410
Combinazioni semplici e ripetute 413
Verifiche 419
Quesiti di riepilogo 423
L'angolo di Derive 424
L'angolo di Microsoft Mathematics 424
La sfida 424
Temi di esame assegnati agli esami di stato 425
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali 426
Questions in english 430
Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari 431
Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari 432

8.3 Progressioni numeriche

Progressioni aritmetiche	Pag. 434
Verifiche	437
Progressioni geometriche	440
Verifiche	442
La sfida	444
Temi assegnati agli esami di stato	445
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali	445
Questions in english	448
Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari	449
Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari	449

5. Esponenziali e logaritmi

5.1 Esponenziali

Prerequisiti
- Concetto di numero reale
- Elevamento a potenza di esponente intero o razionale
- Proprietà delle potenze
- Uso della calcolatrice

Obiettivi
- Comprendere il concetto di potenza a base ed esponente reale
- Sapere usare le proprietà delle potenze
- Sapere usare la notazione esponenziale
- Sapere impostare e risolvere semplici problemi relativi agli esponenziali
- Comprendere il concetto di logaritmo
- Saper calcolare logaritmi in qualsiasi base usando la calcolatrice scientifica
- Sapere usare i logaritmi per semplificare numeri a molte cifre

Contenuti

- Esponenti di base reale ed esponente intero o razionale
- Potenze a base ed esponente reale
- Equazioni e disequazioni esponenziali
- Applicazioni delle equazioni esponenziali alla risoluzione di problemi del mondo reale

Parole Chiave
Base – Esponente

Richiamiamo le conoscenze

Esponenti di base reale ed esponente intero o razionale

L'operazione di elevamento di un numero a una potenza intera positiva non è altri che una generalizzazione dell'operazione di moltiplicazione.

Definizione A

Diciamo potenza di **base** il numero reale *a* e di **esponente** il numero naturale *b*, il prodotto di *b* fattori uguali ad *a*.

Notazione A

La potenza di *a* alla *b* si indica con a^b.

Dalla stessa definizione nascono immediati risultati di facile dimostrazione, perciò omesse.

Teorema A

Si ha: $a^b \cdot a^c = a^{b+c}, b, c \in \mathbb{N}$; $a^b : a^c = a^{b-c}, b, c \in \mathbb{N}, a \neq 0$; $(a^b)^c = a^{b \cdot c}, b, c \in \mathbb{N}$

Esempio A

Abbiamo: $[(2^3 \cdot 2^5) : 2^2]^4 = [2^{3+5} : 2^2]^4 = [2^{3+5-2}]^4 = 2^{6 \cdot 4} = 2^{24}$.

Sempre sfruttando i risultati del Teorema A, possiamo generalizzare il concetto di potenza ad esponenti numeri interi relativi.

Esempio B

Per la seconda proprietà del Teorema A si ha: $3^4 : 3^6 = 3^{-2}$. D'altro canto si ha anche: $3^4 : 3^6 = \frac{\cancel{3^4}}{3^{\cancel{6}2}} = \frac{1}{3^2}$.

Pertanto possiamo dire che si ha: $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$.

Possiamo allora porre la seguente definizione.

Definizione B

Per ogni numero naturale *b* e per ogni numero reale diverso da zero *a*, si ha: $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$.

Possiamo generalizzare il concetto di potenza anche agli esponenti nulli, sempre usando la proprietà già vista.

Esempio C

Si ha: $5^3 : 5^3 = 5^0$, ma anche: $5^3 : 5^3 = 1$. Pertanto possiamo dire che si ha: $5^0 = 1$.

Il precedente esempio non è una dimostrazione del fatto che $5^0 = 1$, ma solo un suggerimento a porre per definizione $5^0 = 1$, in modo da mantenere valida la proprietà del rapporto fra potenze di uguale base, anche per esponenti fra loro uguali.

Definizione C

Per ogni numero reale $a \neq 0$, si ha: $a^0 = 1$.

Cosa accade se la base è zero?

Esempio D

Se fosse $0^0 = 1$ dovrebbe essere anche: $0^0 = 0^2 : 0^2 = \frac{0^2}{0^2} = \frac{0}{0}$. Cioè $\frac{0}{0} = 1$, ma noi sappiamo che la scritta $\frac{0}{0}$ non ha significato, poiché esistono infiniti numeri che moltiplicati per zero danno zero.

Definizione D

La scritta 0^0 è priva di significato.

Una ulteriore estensione del concetto di potenza si ha con gli esponenti razionali.

Esempio E

Che significato possiamo dare alla scritta $3^{\frac{1}{2}}$? Poiché si ha: $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3$, abbiamo che il simbolo $3^{\frac{1}{2}}$ è soluzione dell'equazione $x^2 = 3$. Poiché nei numeri reali la detta equazione ha solo le soluzioni $x = \pm\sqrt{3}$ e poiché il simbolo $3^{\frac{1}{2}}$ certamente non rappresenta un numero negativo possiamo dire che $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

Sempre per mantenere la validità delle proprietà delle potenze, stabiliamo la seguente definizione.

Definizione E

Per ogni numero razionale $b = \frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ e per ogni numero reale positivo a, si ha: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Esempio F

Per la definizione precedente si ha: $5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3}$. Cosa succede se la base è negativa? Dipende dall'esponente. $(-5)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{-5^3}$ non ha significato, invece $(-5)^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{-5^5} = -\sqrt[3]{5^5} = -5 \cdot \sqrt[3]{5^2}$ ha significato.

Quindi la potenza a esponente frazionario ha sempre significato per qualsiasi base positiva, mentre per le basi negative dipende dall'esponente. Per evitare problemi evitiamo di definire quindi le potenze ad esponente frazionario e base non positiva.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Semplificare la seguente espressione nel modo più rapido, ossia eseguendo solo quelle potenze che risultano necessarie: $(2^2 \cdot 3^2)^3 \cdot 6^2 \cdot 3^3 \cdot (6^4 \cdot 6^3)^5$.
Cominciamo ad applicare le proprietà enunciate nella teoria. $[(2 \cdot 3)^2]^3 \cdot 6^2 \cdot 3^3 \cdot (6^{4+3})^5 = (6^2)^3 \cdot 6^2 \cdot 3^3 \cdot (6^7)^5 = 6^6 \cdot 6^2 \cdot 3^3 \cdot 6^{35} = 6^{6+2+35} \cdot 3^3 = 6^{43} \cdot 3^3$ Non riusciamo a semplificare ulteriormente l'espressione.

Utilizzando le proprietà delle potenze, semplificare le seguenti espressioni

Livello 1

1. $2^{-2} \cdot 2^3 \cdot 2^{-4} \cdot 2^5 \cdot 2^0$; $2^{-2} \cdot 4^3 \cdot 8^{-4} \cdot 16^5 \cdot 32^{-6} \cdot 64^7$; $2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^7 \cdot 2^4$; $2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4$ $[2^2; 2^{24}; 2^{19}; 2^{10}]$
2. $3^2 \cdot 3^3 \cdot (3^4)^2$; $(5 \cdot 5)^2 \cdot (5^4 \cdot 5)^4$; $7^2 \cdot (7 \cdot 7^2)^3 \cdot (7^4 \cdot 7)$; $2^2 \cdot 2^3 \cdot (2^3)^2 \cdot (2^4)^4$ $[3^{13}; 5^{24}; 7^{16}; 2^{27}]$
3. $(3 \cdot 3^2)^3 \cdot (3^3 \cdot 3)^3$; $[(3^2)^3]^4 \cdot [(3^3)^2]^4$; $(2^2)^3 \cdot (2^3)^2 \cdot (2^6)^2$; $2^4 \cdot (2^2)^2 \cdot (2^3)^4 \cdot (2^4)^3$ $[3^{21}; 3^{48}; 2^{24}; 2^{32}]$
4. $5^3 : 5^4 \cdot (5^3 : 5)^5$; $\left(\sqrt{3}\right)^3 : \left(\sqrt{27}\right)^5 \cdot \left(\sqrt{3^5}\right)^2 : \sqrt{3}$; $\left(\frac{3}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^4 \cdot \frac{7}{3}$ $\left[5^9; \sqrt{3^{-3}}; \left(\frac{3}{7}\right)^5\right]$
5. $\sqrt[3]{11} \cdot \sqrt[3]{121} : \left(\sqrt[3]{11} \cdot \sqrt[3]{11}\right)^4$; $\pi^4 \cdot (\pi^3)^{-2} : \pi^{-3} \cdot (\pi^2 : \pi^5)^{-2}$ $\left[\sqrt[3]{11^{-5}}; \pi^{-11}\right]$

Livello 2

6. $3^2 \cdot 5^2 \cdot 3^3 \cdot 2^3$; $3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$; $-2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 7^4 \cdot 11^3 \cdot 13^2$ $[2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^2; 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2; -2 \cdot 7^5 \cdot 11^4 \cdot 13^2]$
7. $2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot (-2 \cdot 3^3) \cdot (-2 \cdot 5^2) \cdot (-2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^3)$; $[(2^2 \cdot 5^2)^3 \cdot 3^3]^4 : [(2^4 \cdot 3^4)^2 \cdot 5^2]^4$ $[-2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^7; 2^{-8} \cdot 3^{-20} \cdot 5^{16}]$
8. $\left(\frac{\sqrt{2}}{\pi^2}\right)^3 : \left(\frac{\sqrt{8}}{\pi^3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{\pi^2}{\sqrt{32}}\right)^{-3}$; $\left(\frac{2}{3^2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{3^{-2}}{4^6}\right)^3 : \left(\frac{2^7}{81^{-2}}\right)^3$ $[2^{12} \cdot \pi^{-18}; 2^{-60} \cdot 3^{-24}]$
9. $\left(\sqrt{5}\right)^{-3} : \sqrt{125^3} \cdot 5^{-3} \cdot \sqrt{5^5}$; $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-2} : \left(\frac{\pi}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 : \left(\frac{\pi}{6}\right)^3$ $\left[5^{-\frac{27}{2}}; 2\right]$
10. $\left\{\left[\left(5^2 \cdot 7^3\right)^4 \cdot 2^3\right]^4 \cdot 3^2\right\}^5 : \left\{\left[\left(2^4 \cdot 5^3\right)^2 : 3^5\right]^3 \cdot 7^3\right\}^2 \cdot \left\{\left[\left(3^5 : 5^4\right)^3 \cdot 7^2\right]^4 \cdot 2^5\right\}^3$ $[2^{27} \cdot 3^{220} \cdot 5^{-20} \cdot 7^{258}]$

Livello 3

11. Determinare x in modo che valga la seguente uguaglianza: $2^x \cdot (2^3)^2 \cdot (2^x)^3 = 2^{23}$. [17/4]
12. Un'azienda ha avuto una produzione di circa 2^{28} chicchi di riso, per un peso di circa 1° tonnellate. Nel giro di tre anni si prevede di raddoppiare la produzione. Il tecnico del marketing dice che quindi si devono raccogliere 2^{56} chicchi; la segretaria di produzione afferma che dovranno essere invece 4^{28}; il direttore del settore vendite non è d'accordo, saranno 2^{29}; infine il responsabile pubblicitario afferma che il risultato corretto è invece 4^{56}. Chi ha ragione e perché? [Il direttore]
13. Sappiamo che $3^2 > 2^2$ e che $6^5 > 4^5$, possiamo dire che si ha sempre $a > b \Rightarrow a^n > b^n$, per ogni numero intero n? Giustificare la risposta. [No]

Lavoriamo insieme

Semplificare la seguente espressione $\dfrac{\dfrac{3^2 \cdot 9^{-3}}{27^{-4}} + 3}{\dfrac{9 + 3 \cdot 3^{-2}}{3^{-4} \cdot 27}}$.
Ci accorgiamo che tutte le potenze possono essere ricondotte alla base comune 3, quindi effettuiamo intanto questa operazione $\dfrac{\dfrac{3^2 \cdot \left[3^2\right]^{-3}}{\left[3^3\right]^{-4}} + 3}{\dfrac{9 + 3^{-1}}{3^{-4} \cdot 3^3}}$. Osserviamo che non abbiamo ricondotto il 9 a 3^2 perché in quel caso è un

addendo e non un fattore, pertanto non avremmo ricevuto alcun vantaggio da questa espressione, non potendo applicare nessuna delle regole valide per le moltiplicazioni e le divisioni fra potenze. Continuiamo $\dfrac{\dfrac{3^2\cdot 3^{-6}}{3^{-12}}+3}{\dfrac{9+3^{-1}}{3^{-1}}}=\dfrac{\dfrac{3^{-4}}{3^{-12}}+3}{\dfrac{9+\frac{1}{3}}{3^{-1}}}=\dfrac{3^{-4-(-12)}+3}{\dfrac{27+1}{3}\cdot 3}$. Notiamo che abbiamo trasformato una frazione in moltiplicazione e a un'altra abbiamo applicato la proprietà della divisione fra potenze aventi la stessa base $\dfrac{3^{-4+12}+3}{\dfrac{27+1}{\cancel{3}^1}\cdot\cancel{3}^1}=\dfrac{3^8+3}{28}=\dfrac{3^8+3}{28}=\dfrac{6561+3}{28}=\dfrac{6564}{28}=\dfrac{1641}{7}$.

Applicando le proprietà delle potenze semplificare le seguenti espressioni

Livello 1

14. $35\cdot 3^{-3}\cdot 28^{-1}\cdot 98\cdot 108^{-1}$; $3^3\cdot 3^{-4}:3^5\cdot 3^2+3$; $(6^2\cdot 12^{-3})^{-1}:(18^{-3}:16^4)^2$ $[2^{-3}\cdot 3^{-6}\cdot 5\cdot 7^2;\ 2^2\cdot 3^{-4}\cdot 61;\ 2^{42}\cdot 3^{13}]$

15. $(3^3)^2\cdot(5^2)^{-3}:\ 25^3\cdot(5+5^2)$; $(4^2:8^3)^{-4}\cdot(2^{-2}:2^3)^4+16$; $\dfrac{7^2\cdot 7^{-3}\cdot 49^5}{343\cdot 7^{-2}}$ $[2\cdot 3\cdot 5^{-5};\ 17;\ 7^8]$

16. $3^2\cdot 5\cdot 3^{-3}\cdot\ 5^{-2}+3\cdot 5^2\cdot 3^{-2}\cdot\ 5^{-3}$; $\dfrac{\dfrac{3^{-7}}{3^{-4}}}{\dfrac{3^{-3}}{3^{-2}}}$; $2^3\cdot 3^{-2}\cdot\ 4^3\cdot 6^{-2}\cdot 8^5\cdot 9^{-4}$ $[2\cdot 3^{-1}\cdot 5^{-1};\ 3^{-2};\ 2^{22}\cdot 3^{-12}]$

17. $\dfrac{2^3\cdot 4^{-2}\cdot 8^3}{4^{-2}\cdot 16^2}$; $\dfrac{3^{-2}\cdot 9^{-3}\cdot 18^5}{12^{-4}\cdot 18^2}$; $(4^{-2}+3^{-1})\ \cdot(4^{-2}-3^{-1})$ $[2^4;\ 2^{11}\cdot 3^2;\ -2^{-8}\cdot 3^{-2}\cdot 13\cdot 19]$

Livello 2

18. $(2^{-1}+1-2^{-2})\ \cdot(2^{-1}+1-2^{-2})$; $(3^{-1}+3^{-2}-3^{-3})\cdot(3^{-1}+3^{-2}-3^{-3})$ $[2^{-4}\cdot 5^2;\ 3^{-6}\cdot 11^2]$

19. $\dfrac{(2^{-2}+1)\cdot(2^{-2}-1)}{2^{-2}+2\cdot 2^{-2}+1}$; $(2\cdot 3^{-1}-3\cdot 2^{-1}-1)\cdot(2\cdot 3^{-2}-3\cdot 2^{-1}+1)$ $[-2^{-2}\cdot 3\cdot 5\cdot 7^{-1};\ 2^{-3}\cdot 3^{-3}\cdot 5\cdot 13]$

20. $\dfrac{(3^{-3}+9^{-2})\cdot\left[(3^{-3})^2-3^{-3}\cdot 9^{-2}+(9^{-2})^2\right]}{\left[(3^3)^{-2}-(9^{-2})^2\right]^2}$ $[2^{-4}\cdot 3^4\cdot\ 7]$

21. $\dfrac{(2^{-3})^2}{(2^{-2}-6^{-1})\cdot(2^{-2}-3^{-2})}+\dfrac{(6^{-1})^3}{(6^{-1}-3^{-2})\cdot(6^{-1}-2^{-2})}+\dfrac{(3^3)^{-2}}{(3^{-2}-2^{-2})\cdot(3^{-2}-6^{-1})}$ $[2^{-2}\cdot 3^{-2}\cdot 19]$

22. $\dfrac{(3^{-3}\cdot 6^{-2}+4^{-1}\cdot 2^{-2})^2+(3^{-3}\cdot 2^{-2}-4^{-1}\cdot 6^{-2})^2}{(3^{-3}\cdot 12^{-1}+4^{-1}\cdot 18^{-1})^2+(3^{-3}\cdot 18^{-1}-4^{-1}\cdot 12^{-1})^2}$ $[2\cdot 13^{-1}\cdot 41]$

23. $\dfrac{(10^{-2}+15^{-1}-6^{-2})\cdot(10^{-2}-15^{-1}+6^{-2})}{(10^{-2})^2-(15^{-1}-6^{-2})^2}$ $[1]$

24. $\dfrac{1+2\cdot 4^{-2}-(2^{-3})^2-2\cdot 2^{-3}\cdot(-1)+(4^{-2})^2-(-1)^2}{1-2^{-3}+4^{-2}+1}$ $[2^{-4}\cdot 3]$

Lavoriamo insieme

Semplificare l'espressione: $3^{\frac{1}{3}}\cdot 6^{\frac{2}{3}}\cdot 4^{-\frac{3}{4}}\cdot 18^{-\frac{3}{2}}$.

Scomponiamo le basi in fattori primi:

$$3^{\frac{1}{3}}\cdot 6^{\frac{2}{3}}\cdot 4^{-\frac{3}{4}}\cdot 18^{-\frac{3}{2}}=3^{\frac{1}{3}}\cdot(2\cdot 3)^{\frac{2}{3}}\cdot(2^2)^{-\frac{3}{4}}\cdot(2\cdot 3^2)^{-\frac{3}{2}}=3^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{-2\cdot\frac{3}{4}}\cdot 2^{-\frac{3}{2}}\cdot 3^{-2\cdot\frac{3}{2}}=3^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{-\frac{3}{2}}\cdot 2^{-\frac{3}{2}}\cdot 3^{-3}$$

Adesso moltiplichiamo fra loro le potenze di uguale base, applicando la ben nota regola secondo la quale gli esponenti si sommano e le basi restano invariate.

$$3^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{-\frac{3}{2}}\cdot 2^{-\frac{3}{2}}\cdot 3^{-3}=2^{\frac{2}{3}-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-3}=2^{\frac{4-9-9}{6}}\cdot 3^{\frac{1+2-9}{3}}=2^{-\frac{14}{6}}\cdot 3^{-\frac{6}{3}}=2^{-\frac{7}{3}}\cdot 3^{-2}$$

Semplificare le seguenti espressioni

Livello 1

25. $2^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{-\frac{2}{5}}:8^{\frac{1}{7}}$; $5^{\frac{1}{2}}\cdot 25^{\frac{1}{3}}\cdot 75^{\frac{2}{3}}$; $12^{\frac{3}{4}}\cdot 18^{\frac{5}{2}}$; $24^{\frac{1}{3}}\cdot 48^{\frac{2}{3}}:72^{\frac{4}{3}}$ $\left[2^{-\frac{94}{105}};3^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{5}{2}};2^4\cdot 3^{\frac{23}{4}};2^{-\frac{1}{3}}\cdot 5^{-\frac{5}{3}}\right]$

26. $\dfrac{2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{5}{8}}\cdot 2^{\frac{9}{32}}}{2^{\frac{3}{4}}\cdot 2^{\frac{7}{16}}\cdot 2^{\frac{11}{64}}}$; $\dfrac{15^{\frac{2}{5}}\cdot 20^{\frac{3}{5}}}{12^{\frac{1}{5}}\cdot 25^{\frac{4}{5}}}$; $\dfrac{2^{\frac{2}{3}}\cdot 64^{\frac{1}{3}}\cdot 128^{\frac{1}{2}}\cdot 16^{\frac{1}{4}}}{32^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{\frac{1}{6}}\cdot 256^{\frac{1}{3}}\cdot 8^{\frac{2}{3}}}$; $a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{-\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{4}}\cdot b^{-\frac{1}{2}}$ $\left[2^{\frac{3}{64}};2^{\frac{4}{5}}\cdot 3^{\frac{1}{5}}\cdot 5^{-\frac{3}{5}};2^{-\frac{1}{3}};a^{-\frac{7}{4}}\cdot b\right]$

Livello 2

27. $\left(5^{\frac{1}{2}}-3^{\frac{1}{2}}\right)^2$; $\left(2^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{3}}\right)^3$; $\left(1+7^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(1-7^{\frac{1}{2}}\right)$ $\left[8-2\cdot\sqrt{15};3\cdot 18^{\frac{1}{3}}+3\cdot 12^{\frac{1}{3}}+5;-6\right]$

28. $\left(5^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(5^{\frac{2}{3}}-10^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}}\right)$; $\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{4}}\right)^2+\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^2$ $\left[7;2a+2\cdot\sqrt{b}\right]$

29. $\left(2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{6}}\right)^2-\left(2^{\frac{1}{3}}-3^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(2^{\frac{2}{3}}+6^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{2}{3}}\right)-3\cdot\left(1+3^{-\frac{2}{3}}\right)$ $\left[2^{\frac{3}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{6}}\right]$

30. $\left(2^{\frac{1}{2}}-3^{\frac{1}{4}}+1\right)\cdot\left(2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{4}}+1\right)-2^{\frac{3}{2}}+\left(2^{\frac{1}{4}}-3^{\frac{1}{2}}-1\right)\cdot\left(2^{\frac{1}{4}}+3^{\frac{1}{2}}-1\right)-2^{\frac{1}{2}}\cdot\left(1-2^{\frac{3}{4}}\right)$ $\left[1-\sqrt{3}\right]$

31. $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{4}}\right)\cdot\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{4}}\right)-\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{4}}\right)^2+2\cdot\left(a^{\frac{1}{3}}+1\right)\cdot\left(b^{\frac{1}{4}}-1\right)+2\cdot\left(b^{\frac{1}{4}}-1\right)^2$ $\left[-2a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{4}}\right]$

32. $\left(a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}-c^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{2}}\right)-\left(a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{3}}\right)^2-a^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(4a^{\frac{1}{2}}-1\right)\cdot b^{\frac{1}{3}}$ $\left[a^{-\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{3}}-c\right]$

Lavoriamo insieme

La notazione esponenziale è molto usata nelle scienze, per esempio in fisica o in chimica. Ciò infatti rende più semplice risolvere certi problemi. Sappiamo per esempio che la distanza media della terra dal sole è 150 milioni di chilometri, mentre la velocità della luce è di 300000 *Km*/*s*. Se volessimo determinare in quanto tempo la luce del sole arriva fino a noi dovremmo semplificare la frazione $\frac{150000000}{300000}=\frac{15\cdot 10^7}{3\cdot 10^5}=5\cdot 10^2$. Sono perciò necessari 500 secondi o $8^m 48^s$.

Usando la notazione esponenziale e la seguente tabella in cui sono riportati i dati sui pianeti del nostro sistema solare, risolvere i seguenti problemi. La velocità della luce è di 3 · 10 ⁸ m/s

Livello 2

Pianeta	**Distanza media dal sole (in *m*)**	**Raggio medio (in *Km*)**	**Massa (in *Kg*)**
Mercurio	$5,79\cdot 10^{10}$	$2,433\cdot 10^3$	$3,18\cdot 10^{23}$
Venere	$1,082\cdot 10^{11}$	$6,08\cdot 10^3$	$4,881\cdot 10^{24}$
Terra	$1,496\cdot 10^{11}$	$6,378\cdot 10^3$	$5,976\cdot 10^{24}$
Marte	$2,28\cdot 10^{11}$	$3,386\cdot 10^3$	$6,41\cdot 10^{23}$
Giove	$7,783\cdot 10^{11}$	$7,137\cdot 10^4$	$1,9\cdot 10^{27}$
Saturno	$1,429\cdot 10^{12}$	$6,037\cdot 10^4$	$5,681\cdot 10^{26}$
Urano	$2,875\cdot 10^{12}$	$2,56\cdot 10^4$	$8,678\cdot 10^{25}$
Nettuno	$4,504\cdot 10^{12}$	$2,27\cdot 10^4$	$1,026\cdot 10^{26}$
Plutone	$5,91\cdot 10^{12}$	$1,1\cdot 10^3$	$1,3\cdot 10^{26}$

33. Determinare quante volte il raggio della Terra è più grande di quello di Mercurio. [≈ 2,6]
34. Determinare quante volte il raggio di Saturno è più grande di quello di Plutone. [≈ 54,9]
35. Determinare quante volte il raggio di Venere è più piccolo di quello di Nettuno. [≈ 3,7]
36. Determinare quante volte il pianeta Giove è più pesante di Venere. [≈ 389]
37. Determinare quante volte il pianeta Urano è più leggero di Giove. [≈ 22]
38. Determinare dopo quanti minuti la luce del sole raggiunge Mercurio. [$\approx 3^m 13^s$]
39. Determinare dopo quante ore la luce del sole raggiunge il pianeta Saturno. [$\approx 1^h 19^m 23^s$]
40. Determinare dopo quante ore la luce del sole raggiunge il pianeta Plutone. [$\approx 5^h 28^m 20^s$]
41. L'elettrone ha una massa di circa $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ Kg. Determinare un valore approssimato della massa del protone sapendo che è circa 1800 volte quella dell'elettrone. [$\approx 1{,}639 \cdot 10^{-27}$ Kg]
42. Quanti Km è lungo l'anno luce (la distanza che la luce percorre in un anno)? [$\approx 9{,}46 \cdot 10^{12}$ Km]

43. 1000 chicchi di riso arborio pesano circa 37,9 g (fonte Ente Nazionale risi). Quanti chicchi di riso arborio vi sono in media in un chilo? [26385]
44. In un pacco da 1 Kg di riso Carnaroli vi sono circa 30120 chicchi, quanto pesano 1000 di questi chicchi in media? [33,2 g]
45. Con la produzione di 15 tonnellate di riso Roma, 1000 dei quali in media pesano 34,1 g (fonte Ente Nazionale risi), quante confezioni con in media 21944 chicchi si possono confezionare? [20000]

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.

A = Abacus, rivista on line
B = Giochi della Bocconi
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
OMI = Olimpiadi della Matematica

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato all' AHSME 1975: *Determinare la somma delle cifre del numero* $(10^{408} + 1)^2$.
Sviluppiamo il quadrato: $(10^{408} + 1)^2 = 10^{816} + 2 \cdot 10^{408} + 1$. Adesso chiediamoci che tipo di numero è il risultato. 10^{816} è formato da 1 e 816 zeri, allo stesso modo $2 \cdot 10^{408}$ è formato da 2 seguito da 408 zeri. Quando sommiamo questi due numeri avremo ancora un numero con 817 cifre, che sono 1 (la prima), 2 (quella di posto 409 dalla fine) e poi tutti zeri. Sommando a questo numero 1 otterremo $1\underbrace{0....0}_{407}2\underbrace{0....0}_{407}1$, la somma delle sue cifre è chiaramente 1 + 2 + 1 = 4.

1. (AHSME1976) Sia il numero: $P = 2^{\frac{1}{7}} \cdot 2^{\frac{3}{7}} \cdot ... \cdot 2^{\frac{2n+1}{7}}$, in cui tutte le frazioni hanno denominatore uguale a 7 e numeratori i numeri dispari in successione. Qual è il più piccolo numero n per cui P è maggiore di 1000? [8]
2. (AHSME1995) Un campo rettangolare è largo 300 piedi e lungo 400 piedi. Mediamente si trovano tre formiche per ogni pollice quadrato [12 pollici = 1 piede]. Fra i seguenti numeri quale approssima meglio il numero di formiche in tutto il campo? [(C)]
(A) 5×10^5 (B) 5×10^6 (C) 5×10^7 (D) 5×10^8 (E) 5×10^9
3. (B1999) La Signora e il Signor Settimi hanno 7 figli nati tutti, stranamente, il 7 luglio. Ogni anno, per il loro compleanno la signora Settimi offre ad ogni figlio una torta con tante candeline quanti sono i suoi anni. Giovanni Settimi, il più giovane, si ricorda che 5 anni fa le candeline erano, in totale, la metà di quelle di quest´anno. Quante candeline saranno accese quest´anno? [10]
4. (B2000) In un dado "normale", la somma dei punti su due facce opposte è sempre uguale a 7. Enrico ha messo su un tavolo tre dadi "normali", uno sopra l´altro a formare una torre. Sulla faccia superiore del dado in cima alla torre c´è un 4. Quanto vale la somma dei punti nelle cinque facce nascoste (comprese tra due dadi o il tavolo)? [17]
5. (B2003) Leone è velocissimo nei calcoli e chiede a Paolo: "Qual è l'ultima cifra di 2003^{2003}?" Aiuta Paolo. [7]

Questions in English

Nota: Gli anglosassoni usano il punto decimale come la nostra virgola.

6. (AHSME1999) What is the sum of the digits of the decimal form of the product $2^{1999} \cdot 5^{2001}$? [7]
7. (HSMC1999) List the numbers 2^{100} ; 3^{75} and 5^{50} in order from smallest to largest. [$2^{100} < 5^{50} < 375$]
8. (HSMC2005) If $P = 3^{2000} + 3^{-2000}$ and if $Q = 3^{2000} - 3^{-2000}$, what is $P^2 - Q^2$? [4]

Uso della calcolatrice per il calcolo di una potenza

L'utilizzo almeno di una calcolatrice scientifica è ormai indispensabile. Vogliamo vedere quindi come usare una calcolatrice tascabile o un software matematico come potrebbe essere Derive® o uno simile.
Per quanto riguarda l'elevamento a potenza in genere ogni calcolatrice ha il suo tasto, noi ci riferiamo alla calcolatrice incorporata nel sistema operativo Windows®, in cui è [x^y]. Quindi per immettere 2^3 si digiteranno in sequenza i tasti [2] [x^y] [3]. Si deve fare particolare attenzione a immettere le potenze negative, infatti in genere le calcolatrici hanno due simboli per il meno, uno che è quello che si usa per la sottrazione e l'altro, nella nostra calcolatrice di riferimento indicato con [±], che invece è il cosiddetto cambio segno, cioè il simbolo per indicare i numeri negativi. Quindi potrebbe succedere che immettendo [2] [x^y] [-] [3] la calcolatrice emetta un messaggio di errore, o come per la nostra calcolatrice, la digitazione del tasto [-] annulla la digitazione del tasto [x^y], quindi il risultato, errato, sarà – 1. Invece il modo corretto di immissione è [2] [x^y] [±] [3]. Analogamente possono esservi errori segnalati o, peggio, non segnalati che danno risultato sbagliato, immettendo potenze frazionarie. Per esempio $2^{3/4}$, immesso come [2] [x^y] [3] [/] [4] viene inteso come $2^3/4$ e fornisce il risultato errato 2, invece del risultato corretto di circa 0,4849. Per evitare problemi quindi dobbiamo usare le parentesi, cioè immettere [2] [x^y] [(] [3] [/] [4] [)].
Inoltre ogni calcolatrice utilizza la notazione cosiddetta scientifica per indicare i numeri "grandi", cioè numeri che superano il numero di cifre che una calcolatrice riesce a visualizzare, di solito 8.. La calcolatrice di Windows ha molte più cifre, quindi in effetti per 2^{30}scriverà il risultato con tutte le cifre, cioè 1073741824, ma per 2^{300} scriverà 2,0370359763344860862684456884094e+90, la scritta e+90, significa semplicemente 10^{90}. Per immettere le potenze di 10 si usa il tasto [10^x].

Potenze ad esponente reale

Problema

Che significato possiamo dare alle scritte $2^{\sqrt{2}}, \sqrt{2}^{\sqrt{3}}, \pi^{\pi}$?

Abbiamo già ricordato che significato dare alle potenze a esponente razionale e abbiamo già visto che in generale non hanno senso potenze di base negativa ed esponente razionale. Per generalizzare il concetto agli esponenti reali consideriamo la procedura mostrata nel seguente esempio.

Esempio 1

Noi sappiamo che i numeri irrazionali, in generale, sono numeri con infinite cifre decimali che non ubbidiscono a regole particolari. Per esempio $\sqrt{2} = 1,41421356...$ e per quanto ci possiamo sforzare non riusciamo a trovare, se non calcolandola, una determinata cifra decimale. Questo non accade sempre, perché ci sono infiniti numeri le cui infinite cifre decimali ubbidiscono a una particolare regola e sono irrazionali, per esempio 0,1234567… ottenuto scrivendo tutti i numeri interi uno appresso all'altro.

Quindi i numeri irrazionali non si distinguono dai razionali solo perché le cifre decimali devono essere calcolate con qualche strana procedura. Vi è però una procedura che lega un qualsiasi numero irrazionale a infiniti numeri irrazionali, che è quella detta dell'approssimazione. Vediamo un esempio.

Esempio 2

Dire che $\sqrt{2} = 1,41421356...$, vuol dire che si ha la validità delle seguenti disuguaglianze:

$$1 < \sqrt{2} < 2; 1,4 < \sqrt{2} < 1,5; 1,41 < \sqrt{2} < 1,42; 1,414 < \sqrt{2} < 1,415...$$

cioè ogni numero irrazionale si può sempre scrivere all'interno di una disuguaglianza in modo che la differenza fra il valore maggiore (approssimazione per eccesso) e quello inferiore (approssimazione per difetto) sia una potenza di 10. Infatti $2 - 1 = 1 = 10^0$, $1,5 - 1,4 = 0,1 = 10^{-1}$, $1,42 - 1,41 = 0,01 = 10^{-2}$ …

Vale quindi il seguente risultato che non dimostriamo.

Teorema 1

Per ogni numero reale r esistono due successioni di numeri razionali $\{a_n\},\{b_n\}$ per cui si ha: $a_n < r < b_n, |b_n - a_n| = 10^{-n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Le successioni stabilite nel teorema precedente si chiamano **sezioni razionali del numero reale *r***.
Nel teorema precedente abbiamo usato il vocabolo successione solo per dire che i numeri di tale oggetto matematico possono essere sistemati in una sequenza nella quale ciascuno è individuato dalla sua posizione, così per esempio a_5 indica il quinto elemento e a_{34} indica il trentaquattresimo.
La proprietà precedente ci permette di dare significato alle potenze ad esponente reale, come vediamo in un esempio.

Esempio 3

- Che significa $2^{\sqrt{2}}$? Il numero reale r che verifica le seguenti infinite uguaglianze:

$$2^1 < r < 2^2; 2^{1,4} < r < 2^{1,5}; 2^{1,41} < r < 2^{1,42}; 2^{1,414} < r < 2^{1,415}, ...$$

  cioè r è il numero determinato dalle sezioni razionali che si ottengono innalzando 2 alle sezioni razionali di $\sqrt{2}$. Poiché $2^{1,414} \approx 2,6647$ e $2^{1,415} \approx 2,6665$, possiamo dire che $2^{\sqrt{2}}$ approssimato alle prime due cifre decimali è 2,66.
- E che significa $(-2)^{\sqrt{2}}$? Stavolta nasce un problema, dato che hanno senso scritte come

$$(-2)^1 - 2; (-2)^{1,4} = (-2)^{7/5} = \sqrt[5]{(-2)^7}$$

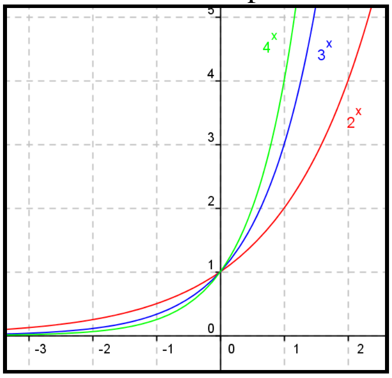
ma non hanno senso scritte come $(-2)^{1,414} = (-2)^{707/500} = \sqrt[500]{(-2)^{707}}$. Pertanto non possiamo ripetere la procedura di approssimazioni vista in precedenza.

Tenuto conto del precedente esempio abbiamo allora la seguente definizione.

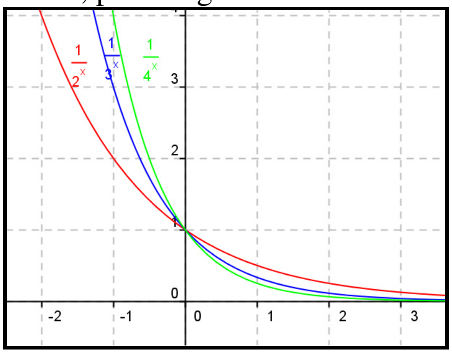
Definizione 1

Dato un numero reale positivo *a* e un numero reale *b*, diciamo a^b il numero reale determinato dalle sezioni razionali del numero reale *a* innalzato alle sezioni razionali del numero reale *b*.

Quindi non ha alcun senso la scritta $a^x, a \leq 0$. Possiamo anche rappresentare le funzioni esponenziali, di cui mostriamo semplicemente il grafico che facilmente si comprende:



Se la base è maggiore di 1 all'aumentare di essa ovviamente si ottengono valori sempre maggiori per esponenti positivi e sempre minori, ma positivi, per *x* negativo. Esattamente il contrario accade per basi comprese tra 0 e 1.



Verifiche

Lavoriamo insieme

Trovare la 2012[a] *cifra decimale del numero irrazionale* 0,135791113… *le cui cifre decimali si ottengono scrivendo uno dopo l'altro tutti gli infiniti numeri dispari*.
Ragioniamo nel modo seguente. I primi 5 numeri dispari occupano i primi 5 posti, i successivi numeri dispari, da 11 a 99, sono in numero di 45, e avendo due cifre ciascuno occupano altre 90 cifre decimali. Poi i numeri da 101 a 999 sono 450 e occupano 450 × 3 = 1350 posizioni. Siamo così arrivati alla cifra decimale che occupa il posto 5 + 90 + 1350 = 1445. Quindi dobbiamo considerare altre 2012 – 1445 = 567 cifre decimali. Poiché i numeri adesso hanno 4 cifre, da 1001 in poi, dobbiamo vedere quale numero occupa la posizione 567. Poiché 567 = 4 × 141 + 3, vuol dire che la cifra cercata è la terza del 142–mo numero dispari di 4 cifre. Poiché 1001 = 2 × 500 + 1, il numero cercato è 2 × (500 + 141) + 1 = 1283. La sua terza cifra è 8, che è perciò la cifra cercata.

Determinare la* 2016[a] *cifra decimale dei seguenti numeri irrazionali

Livello 2

1. 0,1234567891011… (le cifre decimali sono tutti i numeri interi). [8]
2. 0,24681012… (le cifre decimali sono tutti i numeri interi pari). [4]
3. 0,3691215182124… (le cifre decimali sono tutti i numeri interi multipli di 3). [1]
4. 0,112233445566… (le cifre decimali sono tutti i numeri interi ripetuti due volte). [2]
5. 0,11335577991111… (le cifre decimali sono tutti i numeri interi dispari ripetuti due volte). [4]

Lavoriamo insieme

Determinare i primi 5 *elementi delle sezioni razionali del numero* $\sqrt{3}$.
Consideriamo i successivi quadrati dei numeri interi, poiché $1^2 = 1 < 3 < 2^2 = 4$, possiamo dire che i primi due elementi delle due sezioni razionali sono rispettivamente {1} e {2}. Adesso consideriamo i successivi quadrati dei numeri decimali del tipo 1,*a* con *a* cifra da 0 a 9. Poiché $1{,}7^2 = 2{,}89 < 3 < 1{,}8^2 = 3{,}24$; i successivi elementi delle sezioni sono: {1; 1,7} e {2; 1,8}. Procedendo in questo modo otterremo: {1; 1,7; 1,73; 1,732; 1,7320; 1,73205} e {2; 1,8; 1,74; 1,733; 1,7321; 1,73206}.

Determinare i primi cinque elementi delle sezioni razionali che determinano i seguenti numeri reali

Livello 1

6. $\sqrt{5}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{11}$; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[4]{5}$; π; $1+\pi$; π^2

Livello 2

7. $2^{\sqrt{3}}$; $3^{\sqrt{2}}$; $4^{\sqrt{5}}$; $2^{1+\sqrt{3}}$; $3^{1-\sqrt{2}}$; $5^{\sqrt[3]{2}}$; $2^{\sqrt[4]{2}}$; $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$; $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$; 2^{π}; $3^{1-\pi}$; $4^{1+\pi}$; $\sqrt{2}^{1+\sqrt{3}}$; $\sqrt{3}^{\pi}$; $\pi^{\sqrt{2}}$

Equazioni e disequazioni esponenziali

Problema

Tommaso ha acquistato un vaso da un antiquario, il quale gli ha assicurato che è originale del VI secolo a.C. Come può essere sicuro di non essere stato imbrogliato?

Il problema precedente può essere risolto utilizzando una tecnica nota come carbonio datazione. Tutti i materiali di origine organica, quindi anche i manufatti di argilla, contengono un elemento chimico noto come Carbonio 14, indicato con C_{14}. Il Carbonio è uno degli elementi indispensabili per la vita, ed ha 6 protoni e 6 neutroni, quindi il suo numero chimico è 12, il C_{14} ha invece 6 protoni e 8 neutroni e per questo motivo viene chiamato *isotopo*. Esso è un isotopo radioattivo, quindi quando l'organismo muore, in questo caso quando si cuoce l'argilla del vaso, che diviene terracotta, non vi è più assunzione di C_{14}. Si sa che ogni 5700 anni la percentuale di tale isotopo presente nell'organismo si dimezza, quindi basta misurare quanta percentuale è rimasta per avere una datazione "abbastanza" precisa del vaso.

Esempio 4

Supponiamo che Tommaso abbia fatto analizzare il vaso e la rilevazione ha stabilito che la percentuale di C_{14} presente sul vaso è del 72%, quale dovrebbe essere quindi la datazione del vaso? Dobbiamo risolvere un'equazione che tenga conto che ogni 5700 anni la percentuale diventa pari a 0,5 di quello che era prima. Così per esempio dopo 2×5700 anni sarà la metà della metà, cioè $0{,}5^2 = 0{,}25 = 25\%$ di quello che era, dopo 3×5700 anni sarà $0{,}5^3 = 0{,}125 = 12{,}5\%$ di quello che era. In generale, dopo x anni sarà $0{,}5^x$. Quindi noi vogliamo sapere per quale x si ha: $0{,}72 = 0{,}5^x$.

La precedente equazione è di un tipo che ancora non conosciamo, vediamo di definirla.

Definizione 2

Un'equazione che, dopo tutte le possibili semplificazioni, presenta l'incognita come esponente, si dice **equazione esponenziale**.

In generale non è semplice risolvere un'equazione esponenziale. Per esempio quella precedente, al momento non sappiamo risolverla se non per tentativi, cioè prendendo una calcolatrice scientifica e ponendo dei valori all'esponente, per cercare di vedere quando otteniamo valori vicini a 0,72.

Esempio 5

Poiché $0{,}72 > 0{,}5$, non è difficile capire che l'esponente da cercare deve essere più piccolo di 1. Consideriamo i seguenti calcoli. $0{,}5^{0{,}15} \approx 0{,}90$; $0{,}5^{0{,}35} \approx 0{,}78$; $0{,}5^{0{,}45} \approx 0{,}73$; $0{,}5^{0{,}47} \approx 0{,}72$; possiamo perciò dire che il vaso è di circa $5700 \times 0{,}47 = 2679$ anni fa, e quindi la datazione proposta dall'antiquario è ragionevole, poiché VI secolo a.C. significa circa 2600 anni fa.

Nel paragrafo sui logaritmi risolveremo in modo più rigoroso la precedente equazione. Adesso vediamo invece alcune equazioni che possono risolversi con gli strumenti che conosciamo.

Esempio 6

Vogliamo risolvere l'equazione $2^x = 128$. Poiché possiamo scriverla nel modo seguente: $2^x = 2^7$ possiamo dire che la sua soluzione è $x = 7$, dato che ovviamente se due potenze sono uguali e hanno la stessa base debbono avere anche lo stesso esponente.

Vale il seguente intuitivo risultato.

Teorema 2

L'equazione $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, con $a > 0$, $f(x)$, $g(x)$ espressioni nell'incognita x, è equivalente (cioè ha le stesse soluzioni) all'equazione $f(x) = g(x)$.

Esempio 7

Vogliamo risolvere l'equazione $3^{2x-1} = 9^{4x-2}$. La riscriviamo: $3^{2x-1} = 3^{2\cdot(4x-2)}$, quindi uguagliamo gli esponenti: $2x - 1 = 8x - 4 \Rightarrow 6x = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. Verifichiamo: $3^{2\cdot\frac{1}{2}-1} = 9^{4\cdot\frac{1}{2}x-2} \Rightarrow 3^0 = 9^0 \Rightarrow 1 = 1$.

Ci sono altre equazioni esponenziali che possono risolversi facilmente.

Esempio 8

Vogliamo risolvere l'equazione $9^x + 2 \cdot 3^x - 3 = 0$. In questo caso non è difficile capire che se poniamo $3^x = y, 9^x = \left(3^x\right)^2 = y^2$, otteniamo una semplice equazione di secondo grado in y.

$$y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{2} = 1 \\ \frac{-2-4}{2} = -3 \end{cases}$$

Queste ovviamente non sono le soluzioni dell'equazione di partenza, ma servono per trovare quelle. Infatti sostituiamone il valore nell'uguaglianza che ha stabilito la posizione iniziale: $3^x = 1 \vee 3^x = -3$. Ovviamente la seconda equazione non ha soluzioni, poiché abbiamo visto che le potenze a base positiva sono sempre numeri positivi. Mentre la prima la risolviamo semplicemente: $3^x = 3^0 \Rightarrow x = 0$, che è perciò l'unica soluzione dell'equazione.

La risoluzione delle disequazioni esponenziali avviene sempre passando dalla risoluzione delle equazioni esponenziali. Dobbiamo fare attenzione solo al valore della base, poiché noi sappiamo che, $3^4 > 3^3 \Rightarrow 4 > 3$ mentre $(1/3)^4 < (1/3)^3 \Rightarrow 4 > 3$. Quindi abbiamo la seguente regola:

Regola 1

Si ha: $a^{f(x)} \underset{(<)}{>} a^{g(x)} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \underset{(<)}{>} g(x) & se\ a > 1 \\ f(x) \underset{(>)}{<} g(x) & se\ 0 < a < 1 \end{cases}$.

Esempio 9

- Vogliamo risolvere la disequazione $4^{2x} > 4^{x^2-1}$. Tenuto conto della regola precedente essa equivale alla disequazione: $2x > x^2 - 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 < 0 \Rightarrow 1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$.
- Invece $0,23^{x^2+1} < 0,23^{3x+2}$ equivale a $x^2 + 1 > 3x + 2 \Rightarrow x^2 - 3x - 1 > 0 \Rightarrow x < \frac{3-\sqrt{13}}{2} \vee x > \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

CVerifiche

Lavoriamo insieme

Risolvere l'equazione esponenziale $8^{3x+1} = \sqrt[x]{4^{5x-2}}$.

Osserviamo che entrambi i membri sono potenze di 2, quindi esprimiamoli in tal modo: $2^{3\cdot(3x+1)} = 2^{\frac{2\cdot(5x-2)}{x}}$. A questo punto possiamo uguagliare gli esponenti, ottenendo la seguente equazione algebrica:

$$3\cdot(3x+1) = \frac{2\cdot(5x-2)}{x} \Rightarrow 9x^2+3x = 10x-4, x \neq 0 \Rightarrow 9x^2-7x+4=0 \Rightarrow \Delta = 49-144<0$$

Pertanto neanche l'equazione esponenziale ha soluzioni reali.

Risolvi le seguenti equazioni esponenziali

Livello 1

1. $3^{2x-1} = 27$; $2^{12x-1} = \sqrt{2^3}$; $\frac{1}{4} = 16^{2x-3}$; $5^{x-2} = 1$; $7^{14x} = \frac{1}{49}$ $\left[2; \frac{5}{24}; \frac{5}{4}; 2; -\frac{1}{7}\right]$

2. $\left(\frac{5}{4}\right)^{3x+1} = \frac{25}{16}$; $25^{x+1} = 5^{2x^2-1}$; $27^{x-2} = 9^{3x-2}$; $15^{2x^2-x} = 225^{\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}}$ $\left[\frac{1}{3}; \frac{1\pm\sqrt{7}}{2}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right]$

3. $2^{2x}\cdot 2^x = \sqrt{8^{x+1}}\cdot 16$; $3^{2x-1} = \frac{\sqrt[3]{9}}{27^x}$; $7^{x^2-1} = \frac{49^{x-1}}{343^{x+1}}$; $16^{2x+4}\cdot 64^x = \frac{8^{x+7}}{\sqrt[3]{2}}$ $\left[\frac{11}{3}; \frac{1}{3}; \varnothing; \frac{14}{33}\right]$

4. $17^{x+1} = \sqrt[3]{289^x}$; $32^{x^2+x-1}\cdot 128^x = \frac{1024}{\sqrt[3]{2}}$; $13^{3x}\cdot 169^{2x+1} = 1$ $\left[-3; \frac{-18\pm 2\cdot\sqrt{246}}{15}; -\frac{2}{7}\right]$

5. $14^{2x^2-3x}\cdot\sqrt[3]{14} = 196^{2+x}$; $2^{14x-1} = \sqrt[x]{4^{x-2}}\cdot 128$ $\left[\frac{15\pm\sqrt{489}}{12}; \varnothing\right]$

Livello 2

6. $\frac{2^{4x-1}\cdot 8^{x+3}}{16^{\frac{x-1}{2}}} = \sqrt[x+1]{4}$; $\frac{\sqrt[x+2]{14^3}\cdot 196^{2x-1}}{14^{3x+2}} = 1$; $\frac{10^{4x+1}\cdot 100^x}{0,01^{3x-1}} = \frac{0,1^{2x-5}}{1000^{2x+1}}$ $\left[\frac{-15\pm\sqrt{65}}{10}; 1\pm\sqrt{6}; 0,15\right]$

7. $\frac{3^{x-1}\cdot 9^{x+1}\cdot 27^x}{81^{x-2}\cdot 243^{x+2}} = 3$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-2}\cdot\frac{9}{4} = \left(\frac{4}{9}\right)^{x-1}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}}$; $\frac{5^{x+2}\cdot 125^{2x-\frac{1}{3}}}{625^{4x-1}} = \sqrt[x-1]{25}$ $\left[-\frac{2}{3}; \frac{5}{2}; \varnothing\right]$

8. $\frac{\sqrt[x-1]{2^x}\cdot 4^{\frac{x-2}{3}}}{8^{2x-3}} = \frac{\sqrt{2^{x+1}}}{16^{2x-1}}$; $\frac{\sqrt[x+1]{5^{2x+1}}\cdot 25^{x+2}}{125^{\frac{x+15}{3}}} = 625^{\frac{x-1}{x+1}}$; $\frac{\sqrt[3x-2]{16^3}\cdot 64^{5x}}{4^{2x-1}} = 256^{x-2}$ $\left[\frac{-6\pm\sqrt{283}}{13}; 6\pm\sqrt{42}; \varnothing\right]$

9. $\frac{\sqrt[3x-2]{7^{x-1}}\cdot 49^{2x-4}}{7^{\frac{x-3}{2}}} = \sqrt[4]{343^x}$; $12^{5x-1} = \frac{144^{x-3}}{1728^{x-2}}$; $\frac{\sqrt[2x-9]{19^x}\cdot 361^{2x-1}}{19^{3x-2}} = \sqrt[5]{19^x}$ $\left[\frac{16\pm 4\cdot\sqrt{5}}{11}; \frac{1}{6}; 0 \vee \frac{31}{8}\right]$

Lavoriamo insieme

Risolvere l'equazione esponenziale: $3\cdot 9^x - 10\cdot 3^x + 3 = 0$.

Riscriviamola: $3\cdot 3^{2x} - 10\cdot 3^x + 3 = 0$, adesso poniamo $3^x = y$, $9^x = 3^{2x} = y^2$, e risolviamo l'equazione

$$3y^2-10y+3=0 \Rightarrow y = \frac{5\pm\sqrt{25-9}}{3} = \frac{5\pm 4}{3} = \begin{cases} \frac{5+4}{3} = 3 \\ \frac{5-4}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Risostituiamo: $3^x = 3 \Rightarrow x = 1 \vee 3^x = 1/3 \Rightarrow 3^x = 3^{-1} \Rightarrow x = -1$.

Risolvi le seguenti equazioni esponenziali

Livello 1

10. a) $4^x + 6\cdot 2^x - 16 = 0$; b) $4\cdot 4^x - 9\cdot 2^x + 2 = 0$; c) $3\cdot 27^{2x} - 244\cdot 27^x + 81 = 0$ [a) 1; b) $-2 \vee 1$; c) $-1/3 \vee 4/3$]
11. a) $9\cdot 9^x - 82\cdot 3^x + 9 = 0$; b) $25\cdot 5^{2x} - 126\cdot 5^x + 5 = 0$; c) $5\cdot 25^x + 14\cdot 5^x - 3 = 0$ [a) $-2 \vee 2$; b) $-2 \vee 1$; c) -1]
12. a) $4\cdot 4^x + 9\cdot 2^x + 2 = 0$; b) $49\cdot 7^{2x} - 50\cdot 7^x + 1 = 0$; c) $16\cdot 8^{2x} - 17\cdot 8^x + 1 = 0$ [a) $\varnothing$; b) $-2 \vee 0$; c) $-4/3 \vee 0$]
13. a) $256\cdot 0{,}25^{2x} - 68\cdot 0{,}25^x + 1 = 0$; b) $32\cdot 16^x - 65\cdot 4^x + 2 = 0$; c) $4^x + 31\cdot 2^x - 32 = 0$
[a) $1 \vee 3$; b) $-5/2 \vee 1/2$; c) 0]
14. a) $25\cdot 0{,}04^x - 3126\cdot 0{,}2^x + 125 = 0$; b) $9\cdot 3^x - 244\cdot \sqrt{3^x} + 27 = 0$; c) $9^x - 2\cdot 3^x - 3 = 0$
[a) $-3 \vee 2$; b) $-4 \vee 6$; c) 1]

Livello 2

15. a) $9^{x-1} - 10\cdot 3^{x-2} + 1 = 0$; b) $9^{x-2} - 30\cdot 3^{x-4} + 1 = 0$; c) $9^x + 2\cdot 3^x - 15 = 0$ [a) $0 \vee 2$; b) $1 \vee 3$; c) 1]
16. a) $25^{x+1} - 126\cdot 5^x + 5 = 0$; b) $4^{x+2} - 10\cdot 2^x + 1 = 0$; c) $(4/25)^x - 133/20\cdot(2/5)^x + 5/2 = 0$
[a) 1; b) $-3 \vee -1$; c) $-2 \vee 1$]
17. a) $375\cdot(25/9)^x - 706\cdot(5/3)^x + 135 = 0$; b) $8\cdot(9/4)^x - 6\cdot(3/2)^x - 27 = 0$; c) $4^x + 3\cdot 2^{x-1} + 2 = 0$
[a) $-3 \vee 1$; b) 2; c) $\varnothing$]
18. a) $2^{2x+7} - 9\cdot 2^{x+2} + 1 = 0$; b) $9^{x+1} - 730\cdot 3^x + 81 = 0$; c) $49^{x+1} - 16808\cdot 7^x + 343 = 0$
[a) $-5 \vee -2$; b) $-2 \vee 4$; c) $-2 \vee 3$]
19. a) $5\cdot 25^{x+1} - 30\cdot 5^x + 1 = 0$; b) $4\cdot(9/16)^x + 5\cdot(3/4)^x - 6 = 0$; c) $3\cdot(25/9)^x - 2\cdot(5/3)^x - 5 = 0$
[a) $-2 \vee -1$; b) 1; c) 1]

Livello 3

20. a) $2^{3x+5} - 35\cdot 4^{x+1} + 49\cdot 2^x - 4 = 0$; b) $2^{2x-\frac{3}{4}} - 2^{x-\frac{1}{4}} - 2^{x-\frac{1}{2}} + 1 = 0$; c) $5^{2x-\frac{2}{3}} = 2\cdot 5^{x-\frac{1}{3}} - 1$
[a) $-3 \vee -2 \vee 2$; b) $1/4 \vee 1/2$; c) 1/3]
21. a) $4^{x+2} - 2^{x+5/2} - 2^{x+2} + \sqrt{2} = 0$; b) $9^x - 10\cdot 3^{x+\frac{1}{2}} + 27 = 0$; c) $4^{x-1} - 3\cdot 2^{x-\frac{3}{2}} + 1 = 0$
[a) $-2 \vee -3/2$; b) $1/2 \vee 5/2$; c) $1/2 \vee 3/2$]
22. a) $36^x - 6^{x+\frac{3}{2}} - 6^{x-1} + \sqrt{6} = 0$; b) $49^x - 7^{x+\frac{3}{4}} = 7^{x+\frac{1}{2}} - \sqrt[4]{7^5}$; c) $4^x - 2^{x+\pi} - 2^{x+\frac{3}{5}} + 2^{\pi+\frac{3}{5}} = 0$
[a) $-1 \vee 3/2$; b) $1/2 \vee 3/4$; c) $3/5 \vee \pi$]
23. a) $8^x - 5\cdot 4^x + 2^{x+1} + 8 = 0$; b) $3^{3x+1} - 4\cdot 9^x - 17\cdot 3^x + 6 = 0$; c) $5^{-2x-3} - 6\cdot 5^{-x-2} + 1 = 0$
[a) $1 \vee 2$; b) $-1 \vee 1$; c) $-2 \vee -1$]
24. Spiegare perché l'equazione $a^{2x} + b\cdot a^x + c = 0$ non ha soluzioni reali qualunque siano a, b e c numeri reali positivi.
25. (Liceo scientifico 2013/2014) Si determinino i valori reali di x per cui: $\left[\frac{1}{5}\cdot\left(x^2 - 10x + 26\right)\right]^{x^2-6x+1} = 1$.
$\left[x = 3 \pm 2\cdot\sqrt{2} \vee x = 3 \vee x = 7\right]$
26. Se $2^{2015} - 2^{2014} + 2^{2013} - 2^{2012} = k\cdot 2^{2012}$, quanto vale k? [5]

Lavoriamo insieme

Risolvere il seguente sistema di equazioni esponenziali: $\begin{cases} \dfrac{2^{x-y}}{2^{x+y}} = 8 \\ \dfrac{9^{x-2y}}{3^{2y-1}} = 1 \end{cases}$.

Come già visto per le equazioni, dato che è possibile scriviamo le equazioni come uguaglianza di potenze con uguale base: $\begin{cases} 2^{x-y-x-y} = 2^3 \\ 3^{2x-4y-2y+1} = 3^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{-2y} = 2^3 \\ 3^{2x-6y-2y+1} = 3^0 \end{cases}$.

Uguagliamo gli esponenti, ottenendo un sistema di due equazioni lineari in due incognite:

$$\begin{cases}-2y=3\\2x-6y+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-\dfrac{3}{2}\\2x-\cancel{6}^{3}\cdot\left(-\dfrac{3}{\cancel{2}^{1}}\right)+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-\dfrac{3}{2}\\2x+9+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-\dfrac{3}{2}\\x=-5\end{cases}.$$

Risolvi i seguenti sistemi di equazioni esponenziali, in cui le lettere rappresentano numeri reali positivi

***Livello* 1**

27. $\begin{cases}2^{x+3}=8\\9^{3y-2}=\dfrac{1}{3}\end{cases};\ \begin{cases}\sqrt{7^x}=\dfrac{1}{49}\\12^{4y-3}=\dfrac{\sqrt[3]{144}}{12^x}\end{cases};\ \begin{cases}\dfrac{4^{x+3}}{32^{y-1}}=1\\\dfrac{18^{2y}}{324^{x-1}}=18^{x+y}\end{cases}$ $\left[\left(x=0,y=\dfrac{1}{2}\right);\left(x=-4,y=\dfrac{23}{12}\right);\left(x=\dfrac{21}{13},y=\dfrac{37}{13}\right)\right]$

28. $\begin{cases}2^{x+y}=\dfrac{1}{16}\\3^{x+y-1}=\sqrt{3}\end{cases};\ \begin{cases}\sqrt{5^{x+2y}}=5^x\\25^{y-2x}=\dfrac{1}{125}\end{cases};\ \begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt[3]{169^{x+y}}}=\dfrac{13^{x+y}}{\sqrt{13}}\\6^{2y+x-1}=\dfrac{36}{\sqrt{6^{x-3y}}}\end{cases}$ $\left[\varnothing;\left(x=1,y=\dfrac{1}{2}\right);\left(x=\dfrac{57}{20},y=-\dfrac{51}{20}\right)\right]$

29. $\begin{cases}\sqrt{2^x}=4^{x^2-1}\\2^{y+1}=\dfrac{32^x}{\sqrt{8^{y-x}}}\end{cases};\ \begin{cases}\sqrt{7^{2x+3y}}=343^{x-1}\\15^{3x+7y}=\dfrac{1}{\sqrt[y]{225^x}}\end{cases};\ \begin{cases}\sqrt{3^{x-3}}=81\\5^{2y+1}=5\cdot\sqrt{5}\end{cases}$ $\left[\left(x=\dfrac{1\pm\sqrt{65}}{8},y=\dfrac{-3\pm13\cdot\sqrt{65}}{40}\right);\varnothing;\left(x=11,y=\dfrac{1}{4}\right)\right]$

30. $\begin{cases}a^{x+y}=a^{2y-1}\\b^{y^2-1}=b^{1-x}\end{cases};\ \begin{cases}\sqrt[y]{a^x}=\dfrac{1}{a^{y+1-2x}}\\\dfrac{\sqrt[y-1]{a^{x+1}}}{a^{2x-1}}=1\end{cases};\ \begin{cases}\sqrt{2^{x^2-1}}=\dfrac{4}{64^{1-x-y}}\\a^{3x+5y}=\dfrac{\sqrt[4]{a^{x-y}}}{a^{x+2}}\end{cases}$

$\left[\left(x=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2},y=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}\right);\left(x=\dfrac{1}{8},y=-\dfrac{1}{2}\right)\vee(x=y=2);\varnothing\right]$

31. $\begin{cases}\sqrt{a^{2x+1}}=\dfrac{a^{x-3}}{\sqrt{a^{y-2}}}\\b^{y-x}=\dfrac{\sqrt[x]{a^y}}{a^{2x-1}}\end{cases};\ \begin{cases}a^{x+y-1}=\dfrac{1}{a^{2x-y}}\\b^{2x+y}=\dfrac{b}{\sqrt{b^{x-2}}}\end{cases}$ $\left[(x=1,y=-5)\vee(x=5,y=-5);\left(x=\dfrac{1}{2},y=\dfrac{3}{4}\right)\right]$

32. $\begin{cases}\sqrt{b^{x+y-1}}=\dfrac{b^x}{b^{-y}}\\c^y=c^{x-1}\cdot\sqrt{c^{x+y}}\end{cases};\ \begin{cases}a^{2x}=\sqrt[x]{a^{2y-z}}\\a^{x+y-2z}=\dfrac{a^{2x-1}}{a^{1-3y}}\\3^{z-1}=9^{x-3y}\end{cases};\ \begin{cases}2^{x+y}=2^{y-2x}\\3^{2x-1}=3^{z+y}\\4^{2z-x-1}=2^{x+y-1}\end{cases}$ $\left[\left(x=\dfrac{1}{4},y=-\dfrac{5}{4}\right);\varnothing;(x=0,y=-1,z=0)\right]$

33. $\begin{cases}4^{x+y}=8\\2^{x-z}=4\\8^{y-z}=\sqrt{2}\end{cases};\ \begin{cases}a^x=a^y\\b^{x-y}=b^{z+1}\\c^{z-1}=c^{y-1}\end{cases}$ $\left[\left(x=\dfrac{5}{3},y=-\dfrac{1}{6},z=-\dfrac{1}{3}\right);(x=y=z=-1)\right]$

34. $\begin{cases}6^{2x+3y-1}=36^x\\12^{3x-y+z}=144^{x-z}\\\sqrt[3]{5^{2x-y}}=\sqrt{5^{z+1}}\end{cases};\ \begin{cases}\pi^{3x+2}=\pi^{3y-z}\\\sqrt[4]{\pi^{x+y-z}}=\dfrac{1}{\pi^{x-y}}\\2^{3x-y+1}=16^{-2x+3y}\end{cases}$ $\left[\left(x=\dfrac{4}{5},y=\dfrac{1}{3},z=-\dfrac{7}{45}\right);\left(x=-\dfrac{10}{19},y=-\dfrac{7}{19},z=-\dfrac{29}{19}\right)\right]$

Lavoriamo insieme

Risolvere il sistema $\begin{cases} 2^{x+1} - 3^{y-1} + 5^z = \dfrac{86}{3} \\ 3 \cdot 2^x - 4 \cdot 3^{y-1} + 5^{z-1} = \dfrac{29}{3} \\ 2^{x+1} + 3^y = 5 \end{cases}$.

Intanto scriviamo meglio: $\begin{cases} 2 \cdot 2^x - \dfrac{3^y}{3} + 5^z = \dfrac{86}{3} \\ 3 \cdot 2^x - \dfrac{4}{3} \cdot 3^y + \dfrac{5^z}{5} = \dfrac{29}{3} \\ 2 \cdot 2^x + 3^y = 5 \end{cases}$, quindi poniamo: $2^x = a$, $3^y = b$, $5^z = c$, ottenendo il sistema lineare: $\begin{cases} 2a - \dfrac{1}{3}b + c = \dfrac{86}{3} \\ 3a - \dfrac{4}{3}b + \dfrac{1}{5}c = \dfrac{29}{3} \\ 2a + b = 5 \end{cases}$. Con qualsiasi metodo si voglia risolvere le sue soluzioni sono sempre $a = 2$, $b = 1$, $c = 25$. Quindi le effettive soluzioni: $2^x = 2$; $3^y = 1$; $5^z = 25 \Rightarrow x = 1$; $y = 0$; $z = 2$.

Livello 2

35. $\begin{cases} 2^x + 3^y = \dfrac{13}{3} \\ 3^{2y-1} + 4^x = \dfrac{433}{27} \end{cases}$; $\begin{cases} 16^x + 25^y = 29 \\ 5^y + 2 \cdot 4^x = 9 \end{cases}$; $\begin{cases} 7^{x+1} - 2 \cdot 3^{y-1} = \dfrac{9259}{7} \\ 5 \cdot 3^{y+1} + 2 \cdot 7^x = \dfrac{299}{3} \end{cases}$ $\left[(x=2, y=-1); \left(x = \dfrac{1}{2}, y = 1\right); (x=2, y=-2)\right]$

36. $\begin{cases} 3^x + 2 \cdot 5^y = \dfrac{31}{75} \\ 2 \cdot 3^{x+1} + 5^{y-2} = \dfrac{1251}{625} \end{cases}$; $\begin{cases} 2^{x-y} + 5^y = 127 \\ 3 \cdot 5^y - 2^{x-y+1} = 371 \end{cases}$; $\begin{cases} 2^x + 3^y = 745 \\ 2^{x-1} + 3^{y-1} = 251 \end{cases}$ [$(x = -1, y = -2)$; $(x = 4, y = 3)$; $(x = 4, y = 6)$]

37. $\begin{cases} 2^{x+y} + 3^x = 41 \\ 4 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^{x+y} = -60 \end{cases}$; $\begin{cases} 2^x - 3^y = -1 \\ 2^x + 3^y = 17 \end{cases}$; $\begin{cases} 3^{x+2y} - 3^{x+5y-1} = \dfrac{26}{81} \\ 3^{x+2y+1} + 3^{x+5y} = \dfrac{28}{27} \end{cases}$ $\left[(x=2, y=3); (x=3, y=2); \left(x = \dfrac{1}{3}, y = -\dfrac{2}{3}\right)\right]$

38. $\begin{cases} 4^{x-1} + 3 \cdot 2^{y+1} = \dfrac{1}{2} + 6 \cdot \sqrt{2} \\ 4^{x+1} - 2^{y+2} = 8 - 4 \cdot \sqrt{2} \end{cases}$; $\begin{cases} 5^x - 3^{y-x+1} = -\dfrac{2024}{25} \\ 3^{y-x+2} + 5^{x+1} = \dfrac{1216}{5} \end{cases}$ $\left[\left(x = \dfrac{1}{2}, y = \dfrac{1}{2}\right); (x = -2, y = 1)\right]$

39. $\begin{cases} 2^x + 3^y - 2^z = 3 \\ 2^x - 3^y - 2^z = -15 \\ 2^x + 3^y + 2^z = 19 \end{cases}$; $\begin{cases} 2^x + 2^{y+1} + 2^{z-1} = 5 \\ 2^{x+1} + 2^y - 2^z = 2 \\ 2^x + 2^{y-1} + 2^z = \dfrac{5}{2} \end{cases}$ [$(x = 1, y = 2, z = 3)$; $(x = -1, y = 1, z = 0)$]

40. $\begin{cases} 2^{x+y}+3^{x-y}-2^{x-z}=\dfrac{49}{12} \\ 2^{x+y+1}-3^{x-y-1}-2^{x-z}=\dfrac{275}{36} \\ 2^{x+y}+3^{x-y}+2^{x-z}=\dfrac{55}{12} \end{cases}$; $\begin{cases} 6^{x+y}-5^{x-y}=\dfrac{179}{5} \\ 6^{x+y-2}+5^{x-y+4}=126 \end{cases}$ $\left[\left(x=\dfrac{1}{2}, y=\dfrac{3}{2}, z=\dfrac{5}{2}\right);\left(x=\dfrac{1}{2}, y=\dfrac{3}{2}\right)\right]$

Lavoriamo insieme

Risolvere la disequazione esponenziale $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x^2-x-1}>\sqrt[4]{\dfrac{27}{8}}$.

Intanto scriviamo tutto con la stessa base: $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x^2-x-1}>\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{4}}$. Poiché la base è minore di 1, passiamo alla disequazione fra gli esponenti cambiando il verso: $x^2 - x - 1 < -3/4 \Rightarrow 4x^2 - 4x - 1 < 0$.

Risolviamo: $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}<x<\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali

***Livello* 1**

41. $3^{x^2-1}\geq\sqrt[5]{3}$; $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{x+1}\leq\dfrac{9}{16}$; $13^{2x^2-x+1}>\sqrt[3]{13^{x+2}}$ $\left[x\leq-\dfrac{\sqrt{30}}{5}\vee x\geq\dfrac{\sqrt{30}}{5}; x\geq 1; \forall x\in\mathbb{R}\right]$

42. $11^{4x}>\dfrac{121^{x-1}}{\sqrt{11}}$; $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{x-1}{3}}<27^{x+1}$; $4^{2x^2}>\sqrt[5]{2^{x+1}}$; $3^x > 27$ $\left[x>-\dfrac{5}{4}; x>-\dfrac{4}{5}; x<-\dfrac{4}{5}\vee x>\dfrac{1}{4}; x>3\right]$

43. $5\cdot 5^{x+1}<\dfrac{1}{125^{2x}}$; $3^{2x-1}<\dfrac{1}{3}$; $\sqrt{7^{x+3}}>49^{x-2}$; $2^{2x+1}<\dfrac{4\cdot\sqrt{2^x}}{8^{2x-1}}$ $\left[x<-\dfrac{2}{7}; x<0; x<\dfrac{11}{3}; x<\dfrac{8}{15}\right]$

44. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{4x+7}\leq\sqrt[x]{9^{x+1}}$; $27^{4x^2-2x}<\dfrac{\sqrt[3]{9^{x+2}}}{3^{x-2}}$ $\left[-2\leq x\leq-\dfrac{1}{4}\vee x>0; \dfrac{17-\sqrt{1729}}{72}<x<\dfrac{17+\sqrt{1729}}{72}\right]$

45. $3^{2x+1}\geq 3\cdot\sqrt[x+1]{81^{x-2}}$; $\dfrac{\sqrt[x-1]{5^2}}{25^{x+1}}>125^{2x-3}$; $\dfrac{\sqrt{\pi^{x-1}}\cdot\pi^{x+1}}{\pi}>1$ $\left[x>-1; x<\dfrac{15-\sqrt{65}}{16}\vee 1<x<\dfrac{15+\sqrt{65}}{16}; x>\dfrac{1}{3}\right]$

46. $4^{x^2-1}<\dfrac{1}{16^{3x-2}}$; $\sqrt[x+3]{\dfrac{7}{8}}\leq\left(\dfrac{64}{49}\right)^{2x-3}$ $\left[-3-\sqrt{14}<x<-3+\sqrt{14}; -3<x\leq\dfrac{-3-\sqrt{77}}{4}\vee x\geq\dfrac{-3+\sqrt{77}}{4}\right]$

Lavoriamo insieme

Risolvere la disequazione esponenziale $8^x + 2^{2x-1} - 2^{x+1} < 1$.

Intanto scriviamo tutto con la stessa base: $2^{3x} + 1/2\cdot 2^{2x} - 2\cdot 2^x - 1 < 0$. Sostituiamo: $2^x = y$; $2^{2x} = y^2$; $2^{3x} = y^3$, ottenendo una disequazione di III grado: $y^3 + 1/2\cdot y^2 - 2y - 1 < 0$. Verifichiamo se vi sono numeri interi che annullano il polinomio, che possono essere solo fra i divisori del termine noto, quindi solo ±1. Si ha: $1 + 1/2 - 2 - 1 \neq 0$, e $-1 + 1/2 + 2 - 1 \neq 0$, perciò non vi sono zeri interi. Allora riscriviamo: $2y^3 + y^2 - 4y - 2 < 0$ e proviamo se vi sono zeri razionali, stavolta dobbiamo considerare il rapporto fra il termine noto e il primo coefficiente, quindi proviamo con $y = \pm 1/2$: $2\cdot 1/8 + 1/4 - 4\cdot 1/2 - 2 \neq 0$, che non va, e $2\cdot(-1/8) + 1/4 - 4\cdot(-1/2) - 2 = 0$, che invece ci permette di determinare uno zero, quindi possiamo scomporre il polinomio:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & 1 & -4 & -2 \\ -\frac{1}{2} & & -1 & 0 & 2 \\ \hline & 2 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

. Pertanto: $2\cdot\left(y+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(2y^2-4\right)<0 \Rightarrow (2y+1)\cdot(2y^2-4)<0$, le cui soluzioni sono, come facilmente si vede: $y<-\sqrt{2}\vee-\frac{1}{2}<y<\sqrt{2}$, il che conduce alle disequazioni: $2^x<-\sqrt{2}\vee-\frac{1}{2}<2^x<\sqrt{2}$. La prima disequazione non ha ovviamente soluzioni, essendo gli esponenziali quantità sempre positive. La seconda dunque equivale a $2^x<\sqrt{2}$ e le soluzioni sono: $2^x<2^{\frac{1}{2}}\Rightarrow x<\frac{1}{2}$.

Livello 2

47. $\frac{5^{2x+1}-25}{3^{4x+1}-\sqrt[7]{3}}>0$; $\frac{4^{3x+7}-\sqrt[7]{32}}{\sqrt{2^{2x-3}}-4}\le 0$; $\frac{\sqrt[x]{27}-81}{0,1^{x^2-2x}-100}\ge 0$ $\left[x<-\frac{3}{14}\vee x>\frac{1}{2};-\frac{31}{14}\le x<\frac{7}{2};x<0\vee x\ge\frac{3}{4}\right]$

48. $\frac{0,32^{x-3}-16^{3x-1}}{0,25^{3x+5}-\sqrt[5]{8}}>0$; $4^x-5\cdot\sqrt{2}\cdot 2^x+8\ge 0$ $\left[x<-\frac{53}{30}\vee x>\frac{19}{17};x\le\frac{1}{2}\vee x\ge\frac{5}{2}\right]$

49. $\frac{0,125^{x^2-1}-\sqrt[4]{2}}{\sqrt{5^{x+1}}-\sqrt[6]{5}}>0$; $27\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^x-30\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+8<0$ $\left[x<-\frac{\sqrt{33}}{6}\vee-\frac{2}{3}<x<\frac{\sqrt{33}}{6};1<x<2\right]$

50. $\frac{\sqrt[4]{5^x}-0,2}{6^{3x}-\sqrt[7]{216}}\le 0$; $\frac{8^{x+2}-16}{0,01^{3x-2}-0,1^x}>0$; $\frac{0,4^{x^2+1}-1}{2^{5x+2}-\sqrt{32^{x+1}}}<0$ $\left[-4\le x<\frac{1}{7};-\frac{2}{3}<x<\frac{4}{5};x<\frac{1}{5}\right]$

51. $4^x-12\cdot 2^x+32>0$; $3^{2x+1}-28\cdot 3^x+9\le 0$; $4^{x+1}-9\cdot 2^x+2>0$ $[x<2\vee x>3; -1\le x\le 2; x<-2\vee x>1]$

52. $\frac{3^{2x}}{4^{2x-1}}-7\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x+3\le 0$; $40\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{2x}-641\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^x+250<0$; $32\cdot 2^x-18\cdot 2^{x/2}+1>0$

$[0\le x\le 1; -1<x<3; x<-8\vee x>-2]$

53. $2^{x+2}-5\cdot\sqrt{2}^{x+1}+1\ge 0$; $3\cdot 27^{x+1}+51\cdot 9^x-29\cdot 3^x+1>0$ $[x\le -3\vee x\ge 1; x<-3\vee x>-1]$

54. $3\cdot\left(\frac{16}{9}\right)^x+2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^x-8>0$; $49^x+5\cdot 7^x+6\le 0$; $\sqrt[3]{2^{2x}}-3\cdot\sqrt[3]{2^{x+1}}+2^{5/3}\ge 0$ $[x>1; \emptyset; x\le 1\vee x\ge 4]$

55. $\frac{1}{4^{x-4}}-\frac{5}{2^{x-3}}+1<0$; $8^x-4^x-2^{x+2}+4<0$; $\frac{\sqrt[x]{7}-343}{0,2^{4x-7}-125}<0$ $\left[3<x<5;0<x<1;x<0\vee\frac{1}{3}<x<1\right]$

Livello 3

56. $\frac{4\cdot 16^x-9\cdot 4^x+2}{9\cdot 27^{2x}-82\cdot 27^x+9}<0$; $\frac{2\cdot 4^x+3\cdot 2^x-2}{\frac{1}{9^{x-1}}+\frac{17}{3^x}-2}<0$ $\left[-1<x<-\frac{2}{3}\vee\frac{1}{2}<x<\frac{2}{3};x<-1\vee x>2\right]$

57. $\frac{8\cdot 0,125^{2x}-33\cdot 0,125^x+4}{0,2^{2x-1}-26\cdot 0,2^x+5}\ge 0$; $\frac{5^{2x}-2\cdot 5^x-15}{13^{2x+1}-170\cdot 13^x+13}>0$ $\left[x\ge-\frac{2}{3}\vee x<-1\wedge x\ne 1;x>-1\wedge x\ne 1\right]$

58. $\frac{2\cdot 16^{2x}-9\cdot 16^x+4}{8^{2x+1}-17\cdot 8^x+2}>0$; $\frac{4^x-31\cdot 2^x-32}{3\cdot 9^{x+1}-4\cdot 3^{x+1}+1}\le 0$ $\left[x<-1\vee-\frac{1}{4}<x<\frac{1}{3}\vee x>\frac{1}{2};x<-2\vee-1<x\le 5\right]$

59. $\frac{0,25^{2x}-12\cdot 0,25^x+32}{32\cdot 8^{2x}-12\cdot 8^x+1}\le 0$; $\frac{7^{2x+1}-50\cdot 7^x+7}{9^{4x+1}-82\cdot 81^x+9}\le 0$ $\left[-\frac{3}{2}\le x<-\frac{2}{3}\vee x\ne-1;-1\le x<-\frac{1}{2}\vee\frac{1}{2}<x\le 1\right]$

60. $\frac{9\cdot 27^{2x}-82\cdot 27^x+9}{27\cdot 81^{2x}-82\cdot 81^x+3}>0$; $\frac{9^{x+1}-28\cdot 3^x+3}{2^{2x+5}-3\cdot 2^{x+2}+1}>0$ $\left[x<-\frac{3}{5}\vee-\frac{2}{3}<x<\frac{1}{4}\vee x>\frac{2}{3};x<-3\vee x>1\right]$

Lavoriamo insieme

Risolvere il sistema di disequazioni esponenziali $\begin{cases} \sqrt{3}^{x} \ge 9^{x+2} \\ 0,5^{\frac{2x-1}{2}} > 4^{x^2-x} \end{cases}$.

Risolviamo singolarmente le due disequazioni: $\begin{cases} 3^{1/2x} \ge 3^{2x+4} \\ 2^{-\frac{2x-1}{2}} > 2^{2x^2-2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x \ge 2x+4 \\ -\frac{2x-1}{2} > 2x^2-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 4x+8 \\ -2x+1 > 4x^2-4x \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -3x \ge 8 \\ 4x^2-2x-1<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le -\frac{3}{8} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$. Non vi sono soluzioni comuni perché $-\frac{3}{8} < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, pertanto il sistema è privo di soluzioni.

Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni esponenziali

Livello 1

61. $\begin{cases} 2^{x-1} > \frac{1}{16} \\ 3^{2x-3} > \sqrt[5]{27} \end{cases}$; $\begin{cases} a^{x+3} > a^{x^2-1}, a>1 \\ b^{5x-2} > b^{1-3x}, 0<b<1 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{5^{13+x}}{\sqrt{5^{2x+3}}} \ge 25^{x} \\ 3^{2x^2+x-1} < 1 \end{cases}$ $\left[x > \frac{9}{5}; \frac{1-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{3}{8}; -1 < x < \frac{1}{2}\right]$

62. $\begin{cases} 5^{5x+3} \cdot 25^{x+1} < \frac{\sqrt{5}}{125^{x-1}} \\ \sqrt{2^{x^2-1}} \ge 8 \cdot \sqrt[4]{32^{x+1}} \end{cases}$; $\begin{cases} 16^{2x+5} < \sqrt{2} \cdot 4^{2x^2} \\ 31^{7x+1} < 31 \cdot \sqrt[7]{31^{5x-2}} \end{cases}$; $\begin{cases} 4^{3-4x} < 64^{5x+2} \\ 13^{x^2-3} \le 169^{2x-7} \end{cases}$ $\left[x \le \frac{5-\sqrt{177}}{4}; x < \frac{4-\sqrt{94}}{4}; \varnothing\right]$

63. $\begin{cases} \frac{\sqrt[x]{2^{3x+8}}}{2} < 8^{\frac{2x-3}{5}} \\ 11^{\frac{3x+4}{x-1}} < 121^{\frac{3x+5}{2x-3}} \end{cases}$; $\begin{cases} 4^{x+1} \cdot 8^{x-1} < 2^{4x-5} \cdot 16^{1-4x} \\ 5^{12x} \le \frac{25^{x^2+3} \cdot \sqrt{5}}{125^{\frac{2x-3}{4}}} \end{cases}$ $\left[-\frac{2}{5} < x < 0 \vee x > \frac{19+\sqrt{1321}}{12}; x < 0\right]$

64. $\begin{cases} 14^{11-x} < \frac{196^{2x+1}}{\sqrt{14}} \\ 17^{2x^2+x} > 17^{4x+1} \cdot \sqrt[3]{289^{x+1}} \end{cases}$; $\begin{cases} \left(a^2+2\right)^{4+2x} < \left(a^2+2\right)^{3x-1} \\ \left(\frac{1}{a^2+3}\right)^{2x^2-3x+1} \le \left(\frac{1}{a^2+3}\right)^{x+4} \end{cases}$ $\left[x > \frac{11+\sqrt{241}}{12}; x \ge \frac{2+\sqrt{10}}{2}\right]$

65. $\begin{cases} 3^{x^2+5} < \frac{1}{27^{4x^2-x}} \\ 8^{x^2+7} \le \sqrt[5]{2^{x^2+x}} \end{cases}$; $\begin{cases} 6^{2x} < 36^{1-x^2+x} \\ 0,13^{4x+1} > 0,13^{4+7x} \end{cases}$; $\begin{cases} \left(\frac{4}{5}\right)^{1-5x} > \left(\frac{5}{4}\right)^{3-3x} \\ \left(\frac{3}{4}\right)^{2-x^2} \le \left(\frac{16}{9}\right)^{2-3x} \end{cases}$ $\left[\varnothing; -1 < x < 1; \frac{1}{2} < x \le \sqrt{15}-3\right]$

66. $\begin{cases} 12^{3x} \cdot \sqrt{12} > \frac{144}{12^{x+1}} \\ 0,33^{4x+1} < \frac{1}{0,33^{\frac{3x+5}{6x-2}}} \end{cases}$; $\begin{cases} 0,1^{2x} \cdot 0,01^{4-2x} \le 10^{x} \cdot 100 \\ 0,25^{4x+1} \cdot 0,5^{5x+1} < 0,125^{5x-2} \end{cases}$ $\left[x < \frac{1}{3}; x < \frac{9}{2}\right]$

Livello 2

67. $\begin{cases} 3^{2x-1} < 81 \\ 0,4^{3x+1} > \left(\frac{2}{5}\right)^{5-2x} \\ \sqrt[x-1]{7^{x+1}} < 49^{x} \end{cases}$; $\begin{cases} 3 \cdot \sqrt[5]{9^{x+2}} < 27^{4x+1} \\ 4^{2x-1} \cdot 0,5^{4-2x} > 8^{1-x} \\ 0,2^{x^2} < 5^{4+3x} \cdot \sqrt{125^{\frac{3x-1}{3}}} \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{6^{31+2x}}{36^{1+23x}} > \frac{6^{1-5x}}{\sqrt{6}} \\ \frac{9^{2x^2-4x}}{3^{x^2+1}} \le \frac{27^{x^2+7}}{3} \end{cases}$ $\left[\frac{3-\sqrt{17}}{4} < x < \frac{4}{5}; x > 1; -\frac{21}{8} \le \vee x < \frac{19}{26}\right]$

68. $\begin{cases} 5^{1+4x} > 0{,}04^{1+3x} \\ 0{,}008^{x^2-3} > 25^{4+x^2} \\ \sqrt[x]{0{,}3^{x+5}} \geq 0{,}09^{2x+1} \end{cases}$; $\begin{cases} 0{,}23^{2x-6} \cdot \sqrt[x]{0{,}23^{3x}} > 1 \\ 0{,}54^{3x} \cdot 0{,}54^{4x-1} < 1 \\ 4^x + 2^{x+1} + 1 > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 9^x + 4 \cdot 3^x + 4 < 0 \\ \dfrac{5^{x^2-4x}}{7^{x^2}} \leq \dfrac{12^{x^2+3}}{31} \end{cases}$ $\left[-\dfrac{3}{10} < x < 0; \dfrac{1}{7} < x < \dfrac{3}{2}; \varnothing\right]$

69. $\begin{cases} 4^{2x} - 10 \cdot 4^x + 16 > 0 \\ 27^{2x} - 30 \cdot 27^x + 81 < 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{5^{1+7x}}{25^{2-3x}} < \dfrac{0{,}04^x}{5} \\ 49^{2x} - 8 \cdot 49^x + 7 > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} 4^{2x+1} \cdot 8^{1+x} > \sqrt{32^{\frac{x-1}{3x+2}}} \\ 8^{2x-1} - 6 \cdot 8^{x-1} + 1 < 0 \end{cases}$ $\left[\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{1}{2}; x < 0; \dfrac{1}{3} < x < \dfrac{2}{3}\right]$

Giochiamo alla matematica

Diverse sono le questioni che hanno un fondo giocoso e che riguardano le potenze. Una delle più famose e interessanti è quella delle cosiddette **torri di Hanoi.** Il problema è riportato in letteratura per la prima volta nel 1883 ed è associato al grande matematico "ricreativo" Edouard Lucas come gioco d'intrattenimento. L'interpretazione "leggendaria" gli viene invece data da De Parville nel 1884, ed è abbastanza simile al seguente enunciato: *Un monaco buddista ha avuto assegnato il compito di spostare una torre composta da* 64 *dischi di diverso diametro, infilati in un lungo piolo e posti l'uno sull'altro in modo da rispettare l'ordine della grandezza del diametro (il disco più grande è posto alla base) in un altro piolo. Le consegne sono precise: il monaco non potrà mai poggiare un disco più grande su uno più piccolo, ma potrà avvalersi di un terzo piolo di "appoggio". Se riuscirà a completare il lavoro durante la sua vita terrena sarà ricompensato con il paradiso.* Per risolvere il problema possiamo ragionare nel modo seguente. Se abbiamo un solo disco ovviamente basta fare una sola mossa, quindi indicando con H_1 il numero di mosse necessarie a spostare 1 disco, abbiamo $H_1 = 1$. Se invece avessimo due dischi con 1 mossa spostiamo il disco più piccolo su uno dei pioli liberi, con un'altra mossa spostiamo il disco più grande sul piolo voluto e infine con una terza mossa spostiamo il disco grande sul piccolo. Cioè $H_2 = 3$. Ora possiamo fare il seguente ragionamento per 3 dischi. Noi sappiamo che per spostarne due occorrono 3 mosse. Allora in 3 mosse spostiamo i due dischi più piccoli su un piolo, poi con 1 mossa spostiamo il disco maggiore sul piolo voluto e quindi con altre 3 mosse spostiamo i due dischi sul terzo. Cioè $H_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 2 \cdot H_2 + 1$. Non è difficile capire che questa legge vale anche per esempio per 35 dischi, cioè $H_{35} = 2 \cdot H_{34} + 1$, cioè in generale abbiamo

$$H_{64} = 2 \cdot H_{63} + 1 = 2 \cdot (2 \cdot H_{62} + 1) + 1 = 2^2 \cdot H_{62} + 2 + 1 = 2^2 \cdot (2 \cdot H_{61} + 1) + 2 + 1 =$$
$$= 2^3 \cdot H_{61} + 2^2 + 2 + 1 = \ldots = 2^{61} \cdot H_3 + 2^{60} + 2^{59} + \ldots + 2 + 1 = 2^{63} + 2^{62} + \ldots + 2 + 1$$

La somma delle 64 potenze di 2, si dimostra (si vedrà nell'unità delle progressioni geometriche) che è uguale a $2^{64} - 1$. In quanto tempo il monaco può fare tutto queste mosse, che sono un numero di 20 cifre? Anche se facesse una mossa al secondo servirebbero più di 584 miliardi di anni, che forse sono troppi anche per un monaco buddista.

L'angolo di Derive

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%205/5-1-1.exe trovi un'applicazione per vedere come Derive risolve equazioni e disequazioni esponenziali; http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%205/5-1-1.dfw per scaricare il relativo file Derive.

Attività Risolvere gli esercizi proposti in precedenza, verificando i risultati

L'angolo di Microsoft Mathematics

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%205/5-1-2.exe avvii un'applicazione che mostra come risolvere equazioni e disequazioni esponenziali, con Microsoft Mathematics. Il relativo file lo scarichi su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%205/5-1-2.gcw.

La sfida

1. Determinare la somma delle cifre del numero $(10^n + 1)^3$, $n \in \mathbb{N}$ [8]
2. Determinare la somma delle cifre del numero $(10^n + 1)^4$, $n \in \mathbb{N}$ [16]
3. Determinare la somma delle cifre del numero $(10^n + 1)^m$, $n, m \in \mathbb{N}$ [2^m]
4. Determinare la somma delle cifre del numero $(10^n + 9)^2$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ [19]
5. Poiché $80^2 = 6400$, cioè il quadrato di un numero di due cifre è un numero di 4 cifre, possiamo dire che è sempre vero che il quadrato di un numero di n cifre è un numero con $2n$ cifre? Se la risposta è negativa, quante cifre può avere? [No, il quadrato di un numero di n cifre ha da $2n – 1$ cifre a $2n$ cifre]
6. Possiamo dire che $10^{30} + 10^{29} > 10^{31}$?
[No, perché $10^{30} + 10^{29} = 10^{29} \cdot (10 + 1) = 10^{29} \cdot 11$, mentre $10^{31} = 10^{29} \cdot 10^2$]

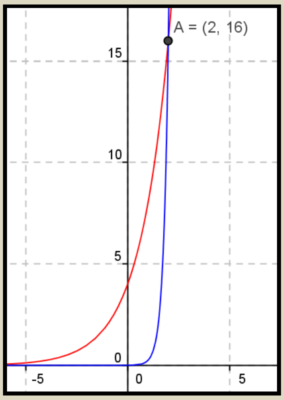
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
AL = Alabama University Mathematics Contest
HSMC = Texas University High School Mathematics Contest

Lavoriamo insieme

Il seguente quesito è stato assegnato agli HSMC del 2002. *Trovare le intersezioni dei grafici* $y = 2^{x+2}$ *e* $y = 4^{3x–4}$. Basta risolvere un'equazione esponenziale: $2^{x+2} = 4^{3x–4} \Rightarrow 2^{x+2} = 2^{6x–8} \Rightarrow x + 2 = 6x – 8 \Rightarrow x = 2$

Verifichiamo tracciando i grafici con Geogebra.



1. (AHSME 1951) Se $a^x = c^q = b$ e $c^y = a^x = d$, quale delle seguenti uguaglianze è vera? [A]
A) $xy = qz$ B) $x/y = q/z$ C) $x + y = q + z$ D) $x – y = q – z$ E) $x^y = q^z$.
2. (AHSME 1952) Risolvere $\begin{cases} z^x = y^{2x} \\ 2^x = 2 \cdot 4^x \\ x + y + z = 16 \end{cases}$ nell'insieme dei numeri naturali. [$x = 4$, $y = 3$, $z = 9$]
3. (AHSME 1957) Risolvere $9^{x+2} = 240 + 9^x$. [$x = 1/2$]
4. (AHSME 1958) Se $4^x – 4^{x-1} = 24$, quanto vale $(2x)^x$? [$5^{5/2}$]
5. (AHSME 1960) Quali soluzioni hanno in comune le equazioni $3^{x+y} = 81$ e $81^{x–y} = 3$? [x=17/8, y = 15/8]
6. (AHSME 1961) Risolvere l'equazione $2^{2x} – 3^{2y} = 55$, con $x, y \in \mathbb{Z}$. [$x = 3$, $y = 1$]
7. (AHSME 1962) Risolvere $(x – 8) \cdot (x – 10) = 2^y$, con $x, y \in \mathbb{Z}$. [($x = 12$, $y = 3$), ($x = 6$, $y = 3$)]
8. (AHSME 1964) Sapendo che si ha: $2^x = 8^{y+1}$ e $9^y = 3^{x-9}$, determinare il valore di $x + y$. [27]
9. (HSMC 2005) Risolvere $3^x – 3^{-x} = 80/9$ [$x = 2$]
10. (HSMC 2008) Risolvere $27^x – 9^{x–1} – 3^{x+1} + 1/3 = 0$. [$x = 1/2 \vee x = –2$]
11. (AL 2008) Se $2^{2^x} + 4^{2^x} = 56$, quanto vale $2^{2^{2^x}}$? [128]
12. (AL 2009) Quante soluzioni reali ha l'equazione $e^{5x} + e^{4x} – 3e^{3x} – 17e^{2x} – 30e^x = 0$? [1]

Questions in English

Working together

This is a question assigned at HSMC in 2007. *Solve for x*: $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.
We rewrite the equation in the following way:

$$4^x + \frac{4^x}{2} = 3^x \cdot 3^{\frac{1}{2}} + \frac{3^x}{3^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow 4^x \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3^x \cdot \left(3^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}\right) \Rightarrow 4^x \cdot \frac{3}{2} = 3^x \cdot \left(\frac{3+1}{3^{\frac{1}{2}}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4^x \cdot \frac{3}{2} = 3^x \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{8}{\sqrt{27}} \Rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

13. (HSMC 1999) List the numbers 2^{100}, 3^{75} and 5^{50} in order from smallest to largest. [$2^{100} < 5^{50} < 3^{75}$]
14. (NC 2002) Find the non–zero solution for x: $8^x = \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2}$. [$x = -3/2$]
15. (HSMC 2006) Given that x is a real number which satisfies the equation $2^{2^x} + 4^{2^x} = 42$. What is the value of $\sqrt{2^{2^{2^x}}}$? [8]
16. (HSMC 2008) If $2^n - 2^{n-2} = 192$, what is the value of n? [8]
17. (AL2007) The equation $3^{x^2} = 81^{2x-3}$ has *two* solutions. What is the sum of the solutions ? [8]
18. (AL2007) Solve for n: $5^n + 5^n + 5^n + 5^n + 5^n = \left(\sqrt{5}\right)^{10}$. [4]
19. (AL2008) How many real number solutions are there for the equation $\left(x^2 + 4x + 5\right)^{x^2+1} = 1$? [1]
20. (AL 2009) If $2^x \cdot 4^x \cdot 8^x = \sqrt{2}$, then what is x? [1/12]
21. (HSMC 2011) Find x if $2^{16^x} = 16^{2^x}$. [2/3]

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Medicina 2000) Se A è un numero negativo allora $(-A)^{0,5}$ è sicuramente un numero
A) uguale a 1 B) reale C) Sempre uguale a 0,5 D) Sempre un numero intero E) sempre 0
2. (Ingegneria – Politecnico di Torino 1999). Sia n un numero intero positivo. Allora $3^{n+1} - 3^n$ è uguale a
A) 3 B) 3^n C) $3^{\frac{n+1}{n}}$ D) $(2 \cdot 3)^n$ E) $2 \cdot 3^n$
3. (Ingegneria 2002). La metà di $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$ è uguale a A) $\left(\frac{1}{4}\right)^{25}$ B) $\left(\frac{1}{2}\right)^{51}$ C) $\left(\frac{1}{4}\right)^{50}$ D) $\left(\frac{1}{2}\right)^{25}$ E) $\left(\frac{1}{2}\right)^{49}$
4. (Ingegneria 2009). Dato un numero reale x, la seguente relazione $\frac{2^x \cdot 2}{\sqrt{4^{x+1}}}$ vale
A) $\frac{1}{2^x}$ B) 0 C) $\frac{1}{2}$ D) 2 E) 1

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_4_5.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	2	3	4
B	E	B	E

5. Esponenziali e logaritmi

5.2 Logaritmi

Prerequisiti

- Concetto di esponente
- Potenze reali di base ed esponente reale
- Equazioni e disequazioni esponenziali

Obiettivi

- Comprendere il concetto di logaritmo
- Sapere utilizzare i logaritmi nella risoluzione di semplici problemi di modellistica matematica
- Sapere usare le proprietà principali dei logaritmi
- Sapere risolvere equazioni e disequazioni logaritmiche
- Sapere risolvere equazioni e disequazioni esponenziali con i logaritmi

Contenuti

- Concetto di logaritmo e curva logaritmica
- Proprietà dei logaritmi
- Applicazione dei logaritmi nella risoluzione di equazioni esponenziali
- Equazioni e disequazioni logaritmiche

Parole Chiave

Argomento – Base – Logaritmo – Numero *e* o di Nepero

Concetto di logaritmo e curva logaritmica

Poiché non vi è nulla di più ostico nell'applicazione matematica, né che reca maggiori difficoltà nei calcoli, che la moltiplicazione, la divisione, l'estrazione di radici quadrate e cubiche di numeri grandi... ho cominciato a pensare come risolvere questi problemi.
John Napier, Mirifici logarithmorum canonis descriptio

Riprendiamo in considerazione l'equazione esponenziale $0{,}72 = 0{,}5^x$, che era scaturita fuori dal problema sulla datazione del vaso di epoca romana, nell'unità precedente. Abbiamo visto che siamo riusciti a risolverla con metodi di approssimazione, successivamente abbiamo visto che se fossimo riusciti a scrivere l'equazione come uguaglianza fra potenze di uguale base avremmo risolto facilmente e senza approssimazioni. Il problema è che, in questo caso, ciò non è possibile. Però possiamo sempre ripetere i procedimenti di approssimazione visti prima e costruire così una tabella nella quale inserire un certo numero di potenze del genere, da potere consultare.

Esempio 1

Se riuscissimo a scrivere $10^z = 0{,}72$ e $10^y = 0{,}5$; l'equazione da risolvere diverrebbe $10^z = 10^{yx}$, e quindi la soluzione si otterrebbe semplicemente uguagliando gli esponenti: $z = xy$ da cui $x = \frac{z}{y}$.

Quindi basterebbe costruire una tabella di potenze di 10 da cui ricavare i valori (approssimati) di z e di y che risolvono il problema. Cominciamo intanto a porre una definizione.

Definizione 1

Diciamo **logaritmo in base 10 e di argomento positivo *a***, il numero reale soluzione dell'equazione esponenziale $10^x = a$, $a > 0$.

Notazione

Il logaritmo decimale si indica con $log(a)$.

Esempio 2

Si ha $log(10) = 1$, $log(100) = 2$, …, $log(10^x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$; $log\left(\frac{1}{1000}\right) = log(10^{-3}) = -3$.

Per la stessa definizione, $log(x)$ ha significato solo se è $x > 0$.

L'angolo storico

Il problema di effettuare moltiplicazioni e divisioni fra numeri molto "grandi" rendeva difficile soprattutto il lavoro degli astronomi. A partire dal XVI secolo si cercò di inventare uno strumento matematico che potesse semplificare tali calcoli. Per fare ciò si osservò che si potevano effettuare somme e sottrazioni invece che moltiplicazioni e divisioni usando le proprietà delle potenze con uguale base. Si deve a John Napier (1550–1617), latinizzato in Nepero, un nobile scozzese, l'invenzione e anche la scelta del nome, dei logaritmi (dal greco: *lògon*, ragione, nel suo senso però di *rapporto*, cioè divisione e *arithmòs* (*numero*). Le sue idee furono presentate nel 1614, nel lavoro intitolato *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*. Spesso le idee vengono a maturazione contemporaneamente e così un altro inglese, Henry Briggs (1561 –1630), nel 1624 scrisse *Arithmetica logarithimica*, in cui riportò le tavole dei logaritmi decimali di 30000 numeri naturali, ciascuno con 14 cifre decimali. Per onor del vero qualche anno prima di Napier, lo svizzero Jobst Bürgi (1552–1632) aveva avuto le stesse idee che però furono pubblicate solo nel 1620, sotto il titolo *Arithimetische und Geometrice Progress Tabulen*.

Per calcolare i logaritmi è molto utile la calcolatrice scientifica, in cui osserviamo la presenza di due tasti del genere. Uno indicato in genere con log per il logaritmo decimale e un altro con ln per un altro tipo di logaritmo che vedremo successivamente. Per calcolare un logaritmo basta premere il tasto e poi il relativo argomento, per esempio digitando log 2 calcoleremo *log*(2), che la calcolatrice ci dice essere circa 0,30102999. I logaritmi hanno importanti applicazioni in diverse questioni, per esempio in problemi finanziari. Spesso i risparmiatori acquistano delle obbligazioni, cioè prestano denaro a una banca o allo Stato, in cambio di un interesse, cioè di una certa somma con cadenze periodiche (trimestrali, semestrali, annuali, …). Tali operazioni vengono dette di capitalizzazione. Le più usate capitalizzazioni sono quella cosiddetta semplice e quella chiamata composta. Nella prima, l'interesse si ottiene alla scadenza del periodo previsto mentre la somma rimane a maturare interessi fino alla prossima scadenza. Per esempio un BTP[1] decennale produce un interesse ogni sei mesi sempre uguale e relativo alla somma inizialmente versata, che sarà interamente restituita alla fine dei 10 anni. A noi interessa il secondo tipo di capitalizzazione, nel quale invece l'interesse maturato non viene liquidato alla fine del periodo, ma viene aggiunto al capitale iniziale, in modo che alla successiva scadenza l'interesse maturato sarà calcolato su un capitale maggiore.
Chiariamo meglio con un esempio.

Esempio 3

Supponiamo di versare una certa somma, per esempio € 10000,00 a una banca, vincolandola per 15 anni, ricevendo in cambio un interesse annuale del 3%, in regime di capitalizzazione composta. Ciò vuol dire che alla fine del primo anno l'interesse maturato sarà di € 10000,00 × 0,03 = € 300,00. Questa somma non sarà liquidata, ma verrà aggiunta al capitale che così diventa € 10300,00. In questo modo il secondo anno l'interesse sarà di € 10300,00 × 0,03 = € 309,00 e così via fino alla scadenza naturale del prestito.

Possiamo quindi dire che vale la seguente legge di capitalizzazione composta

Teorema 1

Un capitale iniziale C_0, investito a un tasso periodico i in regime di capitalizzazione composta, dopo n periodi diviene: $C_n = C_0 \cdot (1 + i)^n$

Dimostrazione

Alla fine del primo periodo il capitale sarà $C_1 = C_0 + C_0 \cdot i = C_0 \cdot (1+ i)$. Alla fine del secondo periodo diventa $C_2 = C_1 + C_1 \cdot i = C_1 \cdot (1+ i) = C_0 \cdot (1+ i) \cdot (1+ i) = C_0 \cdot (1+ i)^2$. Non è difficile capire che si avrà anche $C_3 = C_0 \cdot (1 + i)^3$; $C_4 = C_0 \cdot (1 + i)^4$; e quindi in generale: $C_n = C_0 \cdot (1+ i)^n$.

I logaritmi servono ovviamente nei problemi inversi, cioè se volessimo sapere dopo quanti anni un certo capitale iniziale diverrà una certa somma.

Esempio 4

Se impieghiamo una certa somma in regime di capitalizzazione composta con un interesse annuo del 3,15%, dopo quanto tempo otterremo il doppio del capitale iniziale? Dobbiamo risolvere l'equazione esponenziale $C_n = 2 \cdot C_0 \Rightarrow 2 \cdot C_0 = C_0 \cdot (1+ 0{,}00315)^n \Rightarrow 1{,}00315^n = 2$.

Per risolvere la precedente equazione dobbiamo generalizzare il concetto di logaritmo a una base qualsiasi. Per fare ciò dobbiamo però stabilire se la base può essere un qualsiasi numero positivo.

Esempio 5

Possiamo risolvere l'equazione esponenziale $1^x = 2$? No, perché $1^x = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Il precedente esempio quindi limita le basi dei logaritmi ai numeri positivi ma diversi da 1.

1 Vuol dire Buono del Tesoro Poliennale

Definizione 2

Diciamo **logaritmo in base b positiva e diversa da 1 e di argomento positivo a**, il numero reale soluzione dell'equazione esponenziale $b^x = a$.

Notazione

Il logaritmo in base b si indica con $log_b(a)$.

Esempio 6

Abbiamo $log_3(81) = log_3(3^4) = 4; log_2\left(\frac{1}{32}\right) = log_2(2^{-5}) = -5; log_5\left(\sqrt[3]{25}\right) = log_5\left(5^{2/3}\right) = \frac{2}{3}$.

Dalla precedente definizione e dall'esempio seguono queste immediate proprietà.

Teorema 2

Si ha:

1. $log_a(b) \begin{cases} <0 & (0<a<1 \wedge b>1) \vee (0<b<1 \wedge a>1) \\ =0 & a>0 \wedge a \neq 1 \wedge b=1 \\ >0 & (0<a<1 \wedge 0<b<1) \vee (a>1 \wedge b>1) \end{cases}$
2. $a^n < b < a^{n+1} \Rightarrow n < log_a(b) < n+1, \forall n \in \mathbb{Z}$

Oltre al 10, un altro numero ha una posizione privilegiata come base dei logaritmi. La legge della capitalizzazione composta si può applicare anche per interessi variabili. Un caso molto interessante è quando l'interesse dipende dal periodo, ed è uguale al suo reciproco. Cioè $i = \frac{1}{n}$. In questo caso la legge diviene $C_n = C_0 \times \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. La particolarità viene rappresentata dal seguente risultato, che non dimostriamo.

Teorema 3

All'aumentare del numero naturale n, la quantità $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ diventa sempre più vicina a zero. E la quantità $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2,718$.

Il precedente numero a cui *tende* l'espressione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, viene indicato con il simbolo e e di solito è chiamato numero di Nepero.

Notazione

Il logaritmo in base e si indica con $ln(a)$.

L'angolo storico

Per indicare un logaritmo, nel 1624 Keplero usa la contrazione Log; Giuseppe Peano agli inizi del 1900, invece scrive log per il logaritmo naturale, Log per quello decimale. Per indicare la base dei logaritmi naturali, Eulero usa l'attuale simbolo e in un manoscritto del 1727 o 1728, che però viene pubblicato solo nel 1862.

Sempre dalla definizione di logaritmo segue un'altra importante identità.

Esempio 7

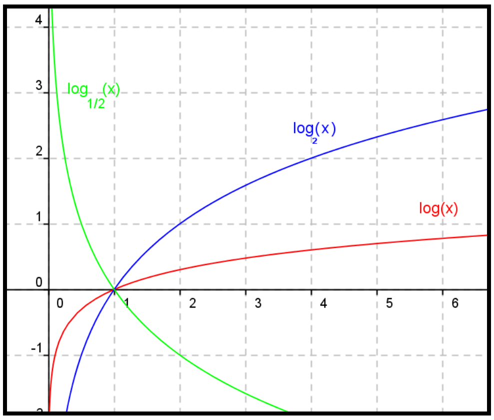
Abbiamo visto che $log_3(81) = 4$. Ciò vuol dire che $3^4 = 81$, che si può anche scrivere: $3^{log_3(81)} = 81$

Dall'esempio segue quindi la validità della seguente proprietà generale.

Teorema 4

Si ha: $x = b^{\log_b(x)}, \forall x \in \mathbb{R}^+, b > 0 \wedge b \neq 1$

Con quello che abbiamo stabilito possiamo quindi rappresentare la funzione $y = log_a(x)$.



Osserviamo che tutte le funzioni passano per il punto (1; 0), sono tutte definite solo per $x > 0$. Inoltre, se la base è maggiore di 1, sono negative per $x < 1$ e positive per $x > 1$. Il viceversa se la base è minore di 1.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Calcolare $log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{8}\right)$

Dobbiamo risolvere l'equazione esponenziale: $\left(\sqrt{2}\right)^x = \frac{1}{8}$. Dato che entrambi i membri sono potenze di due possiamo scrivere: $2^{\frac{1}{2}x} = 2^{-3} \Rightarrow \frac{1}{2}x = -3 \Rightarrow x = -6$. Quindi possiamo dire che si ha: $log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{8}\right) = -6$. Il che concorda con il fatto che un logaritmo di base maggiore di 1 ed argomento minore di 1 è un numero negativo.

Calcola i seguenti logaritmi (Gli eventuali parametri sono scelti in modo che le espressioni abbiano significato)

Livello 1

1. $log_4\left(\frac{1}{64}\right)$; $log_{\sqrt{3}}(27)$; $log_{\frac{3}{4}}(1)$; $log_2\left(\sqrt{2}\right)$; $log_{\sqrt{2}}(2)$; $log_5\left(\sqrt[7]{25}\right)$; $log_{\sqrt[4]{5}}\left(\frac{1}{5}\right)$ $\left[-3;6;0;\frac{1}{2};2;\frac{2}{7};-4\right]$

2. $log_{1/\sqrt{7}}(49)$; $log_{\frac{1}{4}}(128)$; $log_{\frac{1}{\sqrt{32}}}(32)$; $log_a(a^2)$; $log_{a^3}\left(a^2\right)$; $log_{\frac{1}{a}}\left(\sqrt{a}\right)$ $\left[-4;-\frac{7}{2};-2;2;\frac{2}{3};-\frac{1}{2}\right]$

3. $log_{\sqrt{a^3}}\left(\frac{1}{a^2}\right)$; $log_{\sqrt{a}}\left(\sqrt[3]{a}\right)$; $log_8\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$; $log_{\sqrt[3]{7}}(49)$; $log_{\frac{11}{\sqrt{11}}}(121)$; $log_{\frac{3}{5}}(0{,}36)$ $\left[-\frac{4}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{9};6;4;2\right]$

4. $log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt[5]{8}\right)$; $log_{\pi}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}\right)$; $ln\left(e^{\pi}\right)$; $ln\left(e\cdot\sqrt[4]{e^3}\right)$; $log_{27}\left(\sqrt{3}\right)$; $log_{2^{3,1}}(4)$ $\left[\frac{6}{5};-\frac{1}{3};\pi;\frac{7}{4};\frac{1}{6};\frac{20}{31}\right]$

Semplificare le seguenti espressioni

Livello 2

5. $log_2(4)\cdot log_4(2)$; $log_{\sqrt{6}}\left[18\cdot log_5(25)\right]$; $log_{\frac{4}{9}}\left(\frac{3}{2}\right)\cdot log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{4}{9}\right)$; $\left[log_8\left(\sqrt{32}\right)\right]^{log_4(8)}$ $\left[1;4;1;\frac{5\cdot\sqrt{30}}{36}\right]$

6. $\dfrac{log_{\sqrt{15}}(225)}{log_{12}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{144}}\right)}$; $log_{\frac{7}{4}}\left(\frac{16}{49}\right)-log_{\frac{16}{49}}\left(\frac{4}{7}\right)$; $\left[log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)\right]^{log_{\frac{1}{3}}(9)}$; $\dfrac{log_{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{25}\right)}{log_2\left(2^{\pi}\right)}$ $\left[-6;-\frac{5}{2};\frac{4}{25};-\frac{4}{\pi}\right]$

7. $ln\left(\sqrt{e}\right)\cdot ln\left(\frac{e^3}{\sqrt{e}}\right)$; $2^{log_2(17)}\cdot 17^{log_{17}\left(\frac{1}{3}\right)}$; $\dfrac{log_4\left(\sqrt[3]{128}\right)}{log_2(16)+log_{16}(2)}$; $ln\left(\frac{e^2}{\sqrt{e}}\right)-log_{e^2}(e)$ $\left[\frac{5}{4};\frac{17}{3};\frac{14}{51};1\right]$

8. $log_2(4)\cdot log_4(8)\, log_8(16)$; $\dfrac{log_3(9)}{log_9(3)+log_9\left(\frac{1}{3}\right)}$; $\left[e^{ln(\pi)}\cdot\pi^{log_{\pi}(e)}\right]^{log_{\sqrt{e}}(e)}$ $[4; \varnothing; e^2\cdot\pi^2]$

Livello 3

9. $log_{\frac{2}{3}}\left\{\left[log_{27}(9)\right]^{log_9(81)}\right\}$; $log_2\left\{\left[log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{log_{\sqrt{2}}(8)}\right\}$; $log_{\sqrt[3]{2}}\left\{\left[log_{\sqrt{3}}(9)\right]^{log_{\sqrt{5}}(25)}\right\}$ [2; 6; 24]

10. $log_{\frac{7}{3}}\left\{\left[log_{0,5}\left(\sqrt[7]{8}\right)\right]^{log_{0,25}\left(\sqrt[3]{64}\right)}\right\}$; $\left[log_{27}(3)\cdot log_3(27)\right]^{log_{1/4}(2)-log_2\left(\frac{1}{4}\right)}$ [Risultato non reale ; 1]

Semplifica le seguenti espressioni, tenendo conto che tutte le variabili sono scelte in modo che i logaritmi relativi abbiano significato

11. $log_a\left(a^2\right)+log_a\left(\frac{1}{a^3}\right)-2\cdot log_a\left(\sqrt[3]{a^2}\right)$; $\frac{log_a\left(a^3\right)\cdot log_{a^2}\left(a^3\right)}{log_{\sqrt[3]{a}}\left(a^4\right)}+\frac{log_{a^2}\left(a^4\right)\cdot log_{\sqrt{a}}\left(a\right)}{log_{\frac{1}{a}}\left(a^2\right)}$ $\left[-\frac{7}{3};-\frac{13}{8}\right]$

12. $\frac{log_x\left(x^3\right)\cdot log_x\left(\sqrt{x}\right)}{log_{\sqrt{x}}\left(\sqrt{\sqrt{x}}\right)}-\frac{log_y\left(\frac{1}{y}\right)\cdot log_y\left(\sqrt{y}\right)}{log_{\frac{1}{\sqrt{y}}}\left(y\right)}$; $log_a\left(a^b\right)\cdot log_a\left(a^b\cdot a\right)\cdot log_{\sqrt{a}}\left(\sqrt[3]{a^b}\right)$ $\left[\frac{11}{4};\frac{2b^2\cdot(b+1)}{3}\right]$

13. $log_{a^b}\left(a^c\right)+log_{a^c}\left(a^b\right)-log_{a^{b+c}}\left(a^{b-c}\right)$ $\left[\frac{b^3+2bc^2+c^3}{bc\cdot(b+c)}\right]$

Lavoriamo insieme

- *Trovare per quale x reale la seguente uguaglianza è vera*: $log_x\left(\sqrt[3]{\frac{1}{16}}\right)=\frac{2}{3}$.

  Tenuto conto del significato di logaritmo, essa equivale a $x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{1}{16}}, x>0, x\neq 1$, cioè $x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{2^{-4}}\Rightarrow x^{\frac{2}{3}}=2^{-\frac{4}{3}}$. Per potere uguagliare le basi dobbiamo fare lo stesso con gli esponenti: $x^{2/3}=4^{-2/3}$ $\Rightarrow x^{2/3}=(1/4)^{2/3}\Rightarrow x=1/4$.
- *trovare per quale x reale la seguente uguaglianza è vera*: $log_{\frac{3}{2}}\left(x^2+1\right)=2$.

  Si ha: $(3/2)^2=x^2+1$, cioè x^2 0 $9/4-1\Rightarrow x^2=5/4\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Determinare il valore dell'incognita affinché le seguenti uguaglianze abbiano validità

Livello 1

14. $log_3(x)=3$; $log_{\sqrt{x}}\left(4\right)=1$; $log_3\left(\sqrt[3]{x^2}\right)=4$; $log_x(2)=\frac{1}{2}$; $log_{\frac{1}{3}}\left(x+1\right)=-1$ [27 ; 16 ; ±729 ; 4 ; 2]

15. $log_{x+1}(4)=2$; $log_{2x-1}\left(\frac{3}{2}\right)=-2$; $log_{3x+1}\left(\frac{1}{3}\right)=3$; $log_{x^2}\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{2}$ $\left[1;\frac{\sqrt{6}+3}{6};\frac{\sqrt[3]{9}-3}{9};\pm\frac{5}{4}\right]$

16. $log_{1-x}\left(5\right)=\frac{3}{2}$; $log_{\frac{2}{3}}\left(x+2\right)=1$; $log_2(4x-3)=2$; $log_4\left(\sqrt{x}+1\right)=-1$ $\left[1-\sqrt[3]{25};-\frac{4}{3};\frac{7}{4};\varnothing\right]$

17. $log_3\left(2x+3\right)=-2$; $log_{\sqrt{2}}\left(x^2+1\right)=4$; $log_{\frac{1}{4}}\left(2x-1\right)=-2$; $log_{2-x}\left(3\right)=-\frac{1}{2}$ $\left[-\frac{13}{9};\pm\sqrt{3};\frac{17}{2};\frac{17}{9}\right]$

18. $log_{\sqrt{3}}\left(x^2-x\right)=2$; $log_{x+1}\left(\frac{1}{2}\right)=3$; $log_{\frac{3}{2}}\left(4x+1\right)=\frac{1}{2}$; $log_{\frac{3}{5}}\left(1-2x\right)=2$ $\left[\frac{1\pm\sqrt{13}}{2};\frac{\sqrt[3]{4}-2}{2};\frac{\sqrt{6}-2}{8};\frac{8}{25}\right]$

19. $log_{x+1}\left(\sqrt{2}\right)=\frac{2}{3}$; $log_{x+1}\left(\sqrt{2}\right)=-\frac{2}{3}$; $log_3(x^2+x)=-2$; $log_{\frac{x}{3}}\left(4\right)=\frac{1}{2}$ $\left[-1+\sqrt[4]{8};\frac{-2+\sqrt[4]{2}}{2};\frac{-3\pm\sqrt{13}}{6};48\right]$

***Negli esercizi seguenti si tenga conto che base ed argomento devono assumere valori positivi, e la base deve essere diversa da* 1**

Livello 2

20. $log_x(x)=2$; $log_x(x^2)=1$; $log_{x+1}(x)=-1$; $log_x(x+1)=1/2$ $\left[\varnothing;\varnothing;\frac{\sqrt{5}-1}{2};\varnothing\right]$

21. $log_x(x + 1) = -1$; $log_{x+1}(x) = -1$; $log_{x+2}(x - 2) = 2$; $log_x(1 - x) = 2$ $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2};\frac{\sqrt{5}-1}{2};\varnothing;\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$

22. $log_{x^2}(1-x)=1$; $log_{x+1}(x^2) = 2$; $log_{x^2}(x+1)=\frac{1}{2}$; $log_{x^2+1}(x^2-1)=2$ $\left[\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2};-\frac{1}{2};\varnothing;\varnothing\right]$

23. $log_{\frac{x+1}{2}}\left(\frac{x+1}{3}\right)=\frac{1}{2}$; $log_{\frac{x}{2}}\left(\frac{2}{x}\right)=-2$; $log_{x-2}(x + 2) = 2$ $\left[\frac{7}{2};\varnothing;\frac{\sqrt{17}+5}{2}\right]$

Lavoriamo insieme

Le tavole logaritmiche ovviamente non contenevano i logaritmi di tutti i numeri, ma di alcuni, allora per calcolare un logaritmo non presente si usava il cosiddetto metodo delle parti proporzionali.
Così per esempio se si voleva calcolare *log*(13,8) e si conosceva *log*(13) e *log*(14), si calcolava *log*(14) – *log*(13). La differenza di divideva in 10 parti uguali e si calcolava l'ottava parte (perché 13,8), che si aggiungeva a *log*(13). In tal modo si otteneva un valore approssimato di *log*(13,8).
Noi useremo la calcolatrice. Abbiamo, con 5 cifre decimali, *log*(13) = 1,11394 e *log*(14) = 1,14612. La differenza fra i due valori è 0,03218, moltiplichiamo per 0,8 ottenendo: 0,025744, che aggiungiamo a 1,11394. Diciamo perciò che *log*(13,8) = 1,13968. Con la calcolatrice troviamo un valore migliore: 1,13987, che differisce dal nostro solo dalla quarta cifra decimale.

Usando le parti propozionali, calcolare i seguenti logaritimi con 5 cifre decimali¸usando i valori dei logaritmi interi calcolati con la calcolatrice. Verificare i risultati

24. *log*(15,4) ; *log*(12,3) ; *log*(31,5) ; *log*(48,1) [1,18730 ; 1,08960 ; 1,49825 ; 1,68213]
25. *log*(8,42) ; *log*(5,24) ; *log*(3,421) ; *log*(721,1234) [0,92457 ; 0,71797 ; 0,52972 ; 2,85800]

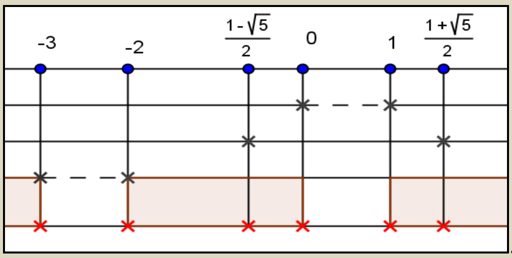
Livello 3

26. Determinare una relazione fra a e b in modo che si abbia $log_b(a) > 1$. $[a > b]$
27. Determinare una relazione fra a e b in modo che si abbia $log_b(a) < 1$. $[a < b]$

Lavoriamo insieme

Consideriamo l'espressione variabile $log_{x^2-x}\left(x^2+5x+6\right)$, *stabilire per quali x reali essa ha significato.*

Basta imporre le condizioni di realtà della base e dell'argomento: $\begin{cases} x^2-x>0 \\ x^2-x\neq 1 \\ x^2+5x+6>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<0 \vee x>1 \\ x\neq \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \\ x<-3 \vee x>-2 \end{cases}$, con il relativo grafico risolutivo.



Pertanto l'espressione esiste per $x<-3 \vee -2<x<\frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee \frac{1-\sqrt{5}}{2}<x<0 \vee 1<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2} \vee x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Determinare gli insiemi di esistenza dei seguenti logaritmi.

Livello 1

28. $log_2(1 - x)$; $log_{3-x}(3 + x)$; $log_{3+x}(3 - x)$; $log_{x^2+2}(3+x)$
$[x < 1 ; -3 < x < 3 \wedge x \neq 2 ; -3 < x < 3 \wedge x \neq -2 ; x > -3]$

29. $log_{1/2}(2+x)$; $log_{1+2x}(x^2+1)$; $log_{3+4x}(4x-1)$; $log_{5-3x}(3x-5)$ $\left[x<\frac{4}{3}\wedge x\neq 1; x>-\frac{1}{2}\wedge x\neq 0; x>\frac{1}{4};\varnothing\right]$

30. $log_{2x+3}(4+3x)$; $log_{1/2+3/4x}(4x+1)$; $log_{x+2}(4)$ $\left[x>-\frac{4}{3}\wedge x\neq -1; x>-\frac{1}{4}\wedge x\neq\frac{2}{3}; x>-2\wedge x\neq -1\right]$

31. $log_x(x^2+x)$; $log_{2x}(x-x^2)$; $log_{3/4-x}(3/2-2/3x)$ [$x>0\wedge x\neq 1$; $0<x<1\wedge x\neq 1/2$; $4/9<x<3/4$]

Livello 2

32. $log_{x^2-1}\left(1-x^2\right)$; $log_{4x^2-9}\left(16-25x^2\right)$; $log_{x^2-3x}\left(2x-5x^2\right)$ [$\varnothing$; $\varnothing$; $\varnothing$]

33. $log_{x^2-5x}\left(2x^2+3x\right)$; $log_{x^2-3}\left(2-9x^2\right)$; $log_{\frac{2x+1}{x-x^2}}\left(\frac{x^2-2x}{4-3x}\right)$ $\left[\left(x<-\frac{3}{2}\vee x>5\right)\wedge\neq\frac{5+\sqrt{29}}{2};\varnothing; x<-\frac{1}{2}\right]$

34. $log_{2x^2+3x}\left(3x^2+2x\right)$; $log_{x^2+x+1}\left(x^2+3x+2\right)$ $\left[\left(x<-\frac{3}{2}\vee x>0\right)\wedge x\neq\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}; x<-2\vee x>-1\wedge x\neq 0\right]$

35. $log_{4x^2-5}\left(x^2+x+1\right)$; $log_{x^2-2x+1}\left(x^2-4x+4\right)$ $\left[\left(x<-\frac{\sqrt{5}}{2}\vee x>\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\wedge x\neq\pm\frac{\sqrt{6}}{2}; x\neq 0,1,2\right]$

36. $log_{-x^2+1}\left(3x^2+x-1\right)$; $log_{4x+1}\left(5x^2-x-3\right)$ $\left[\left(-1<x<\frac{-1-\sqrt{13}}{6}\right)\vee\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{6}<x<1\right); x>\frac{1+\sqrt{61}}{10}\right]$

37. $log_2\frac{x-x^2}{x^2+x-2}$; $log_{\frac{x-1}{2-3x}}(4)$; $log_{\frac{x-2}{x+2}}\left(\frac{1}{3-x}\right)$ $\left[-2<x<0;\frac{2}{3}<x<1\wedge x\neq\frac{3}{4}; x<-2\vee 2<x<3\right]$

38. $log_{\frac{x+1}{2x-3}}\left(\frac{4x-1}{2x+3}\right)$; $log_{x^2-x}\left(\frac{3x-1}{2x+5}\right)$ $\left[\left(x<-\frac{3}{2}\vee x>\frac{3}{2}\right)\wedge x\neq 4;\left(x<-\frac{5}{2}\vee x>1\right)\wedge x\neq\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$

39. $log_{\frac{x^2-3x}{x+1}}\frac{x^4-1}{x^2+3x}$; $log_{x^2-4}\left(x^2-9\right)$ $\left[(-1<x<0\vee x>3)\wedge x\neq 2\pm\sqrt{5}; x<-3\vee x>3\right]$

40. $log_{\frac{x^2-x}{2x-1}}\left(\frac{4x+1}{5-x^2}\right)$; $log_x\frac{x^3-1}{1-x^2+x}$ $\left[\left(0<x<\frac{1}{2}\vee 1<x<\sqrt{5}\right)\wedge x\neq\frac{3-\sqrt{5}}{2}; 1<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$

Proprietà dei logaritmi

Abbiamo già detto che i logaritmi storicamente sono nati per semplificare calcoli fra numeri molto grandi, in particolare la moltiplicazione e la divisione. Ciò dipende dal fatto che per le potenze valgono le ben note proprietà che di seguito ricordiamo: $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$; $a^b : a^c = a^{b-c}$; $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$.
Dato che il logaritmo non è altri che la soluzione di un'equazione esponenziale, pensiamo che vi possano essere delle proprietà che semplifichino il calcolo di particolari logaritmi.

Esempio 8

Calcoliamo $log_2(32) = log_2(2^5) = 5$. Osserviamo però che si ha anche: $log_2(32) = log_2(2^2 \cdot 2^3) = log_2(2^9 : 2^4)$ $= log_2\left[\left(2^7\right)^{\frac{5}{7}}\right]$ e infinite altre identità. Osserviamo altresì che si ha:

$$log_2(2^2) + log_2(2^3) = 2 + 3 = 5;\ log_2(2^9) - log_2(2^4) = 9 - 4 = 5;\ 5/7 \cdot log_2(2^7) = 5/7 \cdot 7 = 5.$$

Il precedente esempio ci suggerisce di enunciare il seguente risultato.

Teorema 5

Si ha la validità delle seguenti uguaglianze:

$$log_a(b \cdot c) = log_a(b) + log_a(c), \forall a,b,c \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$$
$$log_a(b / c) = log_a(b) - log_a(c), \forall a,b,c \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$$
$$log_a\left(b^c\right) = c \cdot log_a(b), \forall a,b \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$$

Dimostrazione

Proviamo solo la prima, le altre si dimostrano in modo analogo e sono perciò lasciate per esercizio. Per definizione si ha: $log_a(b) = m \Rightarrow a^m = b$; $log_a(c) = p \Rightarrow a^p = c$, quindi: $a^m \cdot a^p = b \cdot c \Rightarrow a^{m+p} = b \cdot c$. Ma allora, sempre per la definizione di logaritmo, possiamo scrivere: $log_a(b \cdot c) = m + p = log_a(b) + log_a(c)$, che è quello che volevamo provare.

Esempio 9

Vogliamo calcolare $log_2\left(\frac{\sqrt[3]{4} \cdot 64}{\sqrt[8]{2}}\right)$. Potremmo cercare di scrivere l'argomento come potenza di 2:

$$log_2\left(\frac{\sqrt[3]{4} \cdot 64}{\sqrt[8]{2}}\right) = log_2\left(\frac{2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^6}{2^{\frac{1}{8}}}\right) = log_2\left(2^{\frac{2}{3}+6-\frac{1}{8}}\right) = \frac{2}{3} + 6 - \frac{1}{8} = \frac{157}{24}$$

Oppure possiamo applicare le proprietà già viste, ottenendo in pratica gli stessi calcoli:

$$log_2\left(\frac{\sqrt[3]{4} \cdot 64}{\sqrt[8]{2}}\right) = log_2\left(\sqrt[3]{4} \cdot 64\right) - log_2\left(\sqrt[8]{2}\right) = log_2\left(\sqrt[3]{4}\right) + log_2(64) - log_2\left(\sqrt[8]{2}\right) = \frac{2}{3} + 6 - \frac{1}{8} = \frac{157}{24}.$$

L'esempio precedente sembra suggerire che le proprietà enunciate non siano così importanti come abbiamo detto. Ciò non è vero, come vogliamo mostrare con il seguente esempio.

Esempio 10

Nel 1500 effettuare l'operazione $123456789^{2345678}$, non essendovi i moderni strumenti di calcolo, era un lavoro ostico, lungo e noioso. E ssoprattutto in campo astronomico era abbastanza comune trovarsi a effettuare calcoli simili. Vediamo come l'invenzione dei logaritmi, con le relative tavole, riuscì a semplificare l'operazione. Abbiamo: $log(123456789^{2345678}) = 2345678 \cdot log(123456789)$. Adesso lo studioso andava a cercare sulle tavole logaritmiche che $log(123456789) \approx 8{,}094151$. Era certamente alla portata di qualsiasi studioso effettuare facilmente la moltiplicazione $2345678 \cdot 8{,}094151 \approx 18986271{,}929378$. A questo punto quindi si poteva dire che il risultato cercato era circa $10^{18986271{,}929378}$.

Adesso possiamo risolvere il problema iniziale della datazione del vaso greco.

Esempio 11

Ricordiamo che dovevamo risolvere l'equazione 0,72 = $0{,}5^x$, applicando i logaritmi ad entrambi i membri otteniamo $log(0{,}72) = log(0{,}5^x)$, da cui $log(0{,}72) = x\ log(0{,}5)$ e quindi $x=\frac{log(0{,}72)}{log(0{,}5)}\approx 0{,}474$ che è il valore che avevamo ottenuto con il metodo *sperimentale* nell'unità 1 (ci eravamo fermati a 0,47).

Abbiamo già detto che nelle calcolatrici scientifiche, e prima nelle tavole dei logaritmi, vi sono solo due tasti indicati in genere con ***log*** (base 10) e ***ln*** (base il numero *e*). Ci chiediamo allora come possiamo calcolare logaritmi in basi diverse i cui argomenti non sono potenze razionali della base, o comunque non semplicemente ci si accorge che lo siano.

Esempio 12

Supponiamo di volere calcolare $log_3(52)$ usando una calcolatrice scientifica. Il problema è perciò quello di esprimere il logaritmo in una delle due basi presenti sulla tastiera. Per il Teorema 4 possiamo scrivere: $log(52) = log[3^{log3(52)}] = log_3(52) \cdot log(3)$, ottenendo così ciò che ci serviva: $log_3(52) = \frac{log(52)}{log(3)}\approx\frac{1{,}716}{0{,}477}\approx$ $\approx 3{,}5965$.

Ovviamente avremmo anche potuto scrivere: $ln(52) = ln\left(3^{log_3(52)}\right) = log_3(52) \cdot ln(3)$, cioè $log_3(52) = \frac{ln(52)}{ln(3)}\approx\frac{3{,}951}{1{,}099}\approx 3{,}5965$. Osserviamo che i risultati intermedi sono, ovviamente diversi, ma il risultato finale è sempre lo stesso.

Quanto visto nell'esempio precedente ci permette di enunciare il seguente risultato generale:

Teorema 6

Si ha la validità della seguente identità, detta *formula del cambiamento di base*:

$$log_a(b)=\frac{log_c(b)}{log_c(a)},\forall a,b,c\in\mathbb{R}^+,a,c\neq 1$$

Dimostrazione

Basta ripetere quanto visto nell'esempio 12 per dati generici, compito che lasciamo per esercizio.

Esempio 13

In che relazione sono $log_2(3)$ e $log_3(2)$? Esprimiamo uno dei due nella base dell'altro.

$$log_3(2)=\frac{log_2(2)}{log_2(3)}=\frac{1}{log_2(3)}$$

sono numeri reciproci.

L'esempio precedente si può ovviamente generalizzare: $log_a(b)=\frac{1}{log_b(a)},\forall a,b\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Calcolare $log_2\left(\frac{\sqrt{16\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}}}{\sqrt[3]{16\cdot\sqrt{128}}}\right)$.

Usiamo le proprietà dei logaritmi: $log_2\left(\sqrt{16\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}}\right)-log_2\left(\sqrt[3]{16\cdot\sqrt{128}}\right)=\frac{1}{2}\cdot log_2\left(16\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}\right)-\frac{1}{3}\cdot log_2\left(16\cdot\sqrt{128}\right)=$

$=\frac{1}{2}\cdot\left[log_2(16)+log_2\left(\sqrt{2}\right)+log_2\left(\sqrt{32}\right)\right]-\frac{1}{3}\cdot\left[log_2(16)+log_2\left(\sqrt{128}\right)\right]=\frac{1}{2}\cdot\left[4+\frac{1}{2}\cdot log_2(2)+\frac{1}{2}\cdot log_2(32)\right]$

$-\frac{1}{3}\cdot\left[4+\frac{1}{2}\cdot log_2(128)\right]=\frac{1}{2}\cdot\left(4+\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{3}\cdot\left(4+\frac{7}{2}\right)=\frac{7}{2}-\frac{5}{2}=1$

Usando le proprietà dei logaritmi, calcolare le seguenti espressioni

Livello 1

1. $log_3\left(3\cdot\sqrt[3]{27}\right)$; $log_5\left(\frac{25}{\sqrt{5}}\right)$; $log_6\left(6\cdot\sqrt{216}\right)$; $log_2\left(\frac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{2}\right)$; $log_{0,5}\left(\frac{8\cdot\sqrt{2}}{\sqrt[4]{4\cdot\sqrt[3]{2}}}\right)$ $\left[2;\frac{3}{2};\frac{5}{2};-\frac{2}{3};-\frac{35}{12}\right]$

2. $log_2\left(\frac{1024\cdot\sqrt{32}}{\sqrt[7]{4}}\right)$; $log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt[5]{64}}\right)$; $log_{0,2}\left(25\cdot\sqrt[4]{5}\right)$; $log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{125\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{3125}}\right)$ $\left[\frac{171}{14};-\frac{3}{10};-\frac{9}{4};-1\right]$

3. $log_5\left(25\cdot\sqrt{125\cdot\sqrt{5}}\right)$; $log_4\left(2\cdot\sqrt{8\cdot\sqrt[3]{2}}\right)$; $log_8\left(\sqrt{\frac{2\cdot\sqrt{512}}{\sqrt{4\cdot\sqrt{8\cdot\sqrt{16}}}}}\right)$ $\left[\frac{15}{4};\frac{4}{3};\frac{13}{24}\right]$

4. $log_9\left(\frac{3\cdot\sqrt[5]{81}}{\sqrt{3\cdot\sqrt{27}}}\right)$; $log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{27\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3\cdot\sqrt{243}}}\right)$; $log_{\frac{1}{81}}\left(\frac{27\cdot\sqrt{3\cdot\sqrt[3]{3}}}{\sqrt[5]{81\cdot\sqrt{27}}}\right)$ $\left[\frac{11}{40};-\frac{7}{4};-\frac{77}{120}\right]$

Livello 2

5. $log_2\left(4\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{8}}\right)+log_4\left(\frac{16\cdot\sqrt{8}}{\sqrt{2}}\right)-2\cdot log_3\left(27\cdot\sqrt{243}\right)$; $\dfrac{log_{\sqrt{6}}\left(\frac{\sqrt[4]{6\cdot\sqrt[3]{6\cdot\sqrt{216}}}}{\sqrt[4]{6\cdot\sqrt[3]{6}}}\right)}{log_{\sqrt[3]{4}}\left(\frac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt{8}}{\sqrt[3]{32\cdot\sqrt{2}}}\right)}$ $\left[-\frac{71}{10};\frac{1}{8}\right]$

6. $\left[log_{\frac{1}{4}}\left(2\cdot\frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{32}\cdot\sqrt[3]{64}}\right)+log_{0,25}\left(\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt[7]{16}\cdot\sqrt[3]{4}}\right)\right]^2$; $log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{2\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{32}}{\sqrt{2\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{2}}}}\right)\cdot log_{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2\cdot\sqrt{\sqrt{32}}}}{8\cdot\sqrt[3]{16\cdot\sqrt{128}}}\right)$ $\left[\frac{16384}{111025};\frac{2765}{48}\right]$

7. $\left[log_{\frac{1}{4}}\left(0,25\cdot\frac{2\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}}\right)+log_9\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}}{\sqrt[5]{81}}\right]\cdot\left[log_{\frac{1}{4}}\left(0,25\cdot\frac{2\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}}\right)-log_9\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}}{\sqrt[5]{81}}\right]$ $\left[-\frac{56}{25}\right]$

8. $log_{\frac{1}{8}}\left(\frac{\sqrt[4]{2\cdot\sqrt[4]{4\cdot\sqrt{2}}}}{\sqrt[4]{16\cdot\sqrt[5]{4}}}\right)+log_{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt[5]{27\cdot\sqrt{3}}\cdot\sqrt{243}}{\sqrt[3]{3\cdot\sqrt{27}}}\right)$; $log_{0,5}\left(\frac{\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[5]{8\cdot\sqrt[3]{16}}}}}{16\cdot\sqrt[4]{2\cdot\sqrt[3]{4}}}\right)-log_{0,2}\left(\frac{\sqrt[5]{25\cdot\sqrt[4]{5}}}{25\cdot\sqrt[3]{5\cdot\sqrt{5\cdot\sqrt{5}}}}\right)$ $\left[\frac{2383}{480};\frac{319}{180}\right]$

Lavoriamo insieme

Scrivere in modo compatto l'espressione $log_3(7)+log_3(5)-2\cdot log_3(4)$.

Usiamo le proprietà dei logaritmi: $log_3(7\cdot 5)-\ log_3(16)=log_3(35/16)$

Scrivere sotto forma di un unico logaritmo le seguenti espressioni, gli eventuali parametri presenti sono tali da rendere reali i risultati

Livello 1,

9. a) $log_5(2) + log_5(4) - log_5(8)$; b) $log_3(6) + 2 \cdot log_3(5)$; c) $log_a(5) - 3\ log_a(2) + log_a(4)$
[a) 0; b) $log_3(150)$; c) $log_a(5/2)$]

10. $2\ log(2) - 3\ log(3) + 4\ log(5) - log(6)$ [$log(1250/81)$]

11. a) $ln\left(\sqrt{2}\right) + 2\ ln(3) - 3\ ln(4) + 1/2\ ln(2)$; b) $log_{1/3}(3/4) - 3 \cdot log_{1/3}(4/3)$ [a) $ln(9/32)$; b) $log_{1/3}(81/256)$]

12. $[log(1/3) + log(25)] \cdot [log(1/3) - log(25)] - [log(2) - log(5) - log(3)]^2$ [$log(4/25) \cdot log(15/2)$]

Livello 2

13. a) $log_2(a + b) + log_2(a - b) - log_2(a^2 + b^2 - 2ab)$; $log_4(a) + 2\ log_4(b) - log_4(b^3)$ $\left[log_2\left(\frac{a+b}{a-b}\right); log_4\left(\frac{a}{b}\right)\right]$

14. $log(a) + log(b) - log(a^2) + log(b^3) - 2 \cdot log\left(\sqrt{b}\right) + 3 \cdot log\left(\sqrt[3]{a}\right)$ [$log(b^3)$]

15. $log_a(a) - b\ log_a(b) + a\ log_a(a + 1) + (b - 1)\ log_a(b)$ $\left[1 + log_a\left(\frac{(a+1)^a}{b}\right)\right]$

16. $[log(a) + log(b)]^2 - [log(a) - log(b)]^2 - 1/2 \cdot log(b^2) + 1/3 \cdot log(a^3)$ [$log(a^4) \cdot log(b) + log(ab)$]

Lavoriamo insieme

Semplificare la seguente espressione: $log_8(9) \cdot log_9(10) \cdot log_{10}(11) \cdot \ldots \cdot log_{31}(32)$.
I punti indicano che si va da 11 a 32 passando per tutti gli interi intermedi.Portiamo tutto in una stessa base, per esempio la base 8: $\cancel{log_8(9)} \cdot \frac{\cancel{log_8(10)}}{\cancel{log_8(9)}} \cdot \frac{\cancel{log_8(11)}}{\cancel{log_8(10)}} \cdot \ldots \cdot \frac{log_8(32)}{\cancel{log_8(31)}} = log_8(32)$. Abbiamo quindi ottenuto un solo termine, che può essere facilmente calcolato: $log_8(32) = log_8(2^5) \Rightarrow 8^x = 2^5 \Rightarrow 2^{3x} = 2^5 \Rightarrow x = 5/3$.

Usando il cambio di base semplificare le seguenti espressioni

Livello 1

17. a) $log_2(3) \cdot log_3(2)$; b) $\frac{log_4(5)}{log_5(4)}$; $\frac{log_2(3) \cdot log_8(3)}{log_4(3)}$; c) $log_2(3) \cdot log_3(4)$
[a) 1; b) $log_4^2(5)$; c) $2/3log_2(3)$; 2]

18. a) $\frac{log_2(3)}{log_{1/2}(1/3)}$; b) $\frac{log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}\right)}{log_2(3)}$; c) $log(2) - log_{100}(4)$; d) $log_2(10) - log_4(10) + log_8(10)$
[a) 1; b) 1 ; c) 0 ; d) $5/6log_2(10)$]

19. a) $\frac{log_2(5) + log_4(25)}{log_8(125)}$; b) $\frac{log_3(6) - log_9(36)}{log_{27}(216)}$; c) $\frac{log_{81}(8)}{log_9(2)}$; d) $\frac{log_{25}(9) - log_5(3)}{log_{25}(9) - log_5(3)}$
[a) 2; b) 0; c) 3/2: d) 0]

Livello 2

20. a) $log_2(3) \cdot log_3(4) \cdot log_4(5) \cdot log_5(6) \cdot log_6(7) \cdot log_7(8)$; b) $log_{a^n}\left(b^m\right) \cdot log_{b^n}\left(a^m\right)$ [a) 3; b) m^2/n^2]

21. a) $log_3(4) \cdot log_4(5) \cdot log_5(6) \cdot log_6(7) \cdot log_7(8) \cdot log_8(9)$; b) $log_{a^n}(b) - \frac{log_a(b)}{n}$ [a) 2; b) 0]

22. a) $log_4(5) \cdot log_5(6) \cdot log_6(7) \cdot \ldots \cdot log_{15}(16)$; $log_{a^n}\left(a^m\right)$ [2; m/n]

Livello 3

23. a) $\frac{log_2(3) \cdot log_4(9) \cdot log_6(27)}{log_4(3) \cdot log_6(9) \cdot log_8(27)}$; $\frac{log_3(2) \cdot log_4(15) \cdot log_{17}(24) \cdot log_{31}(35)}{log_4(2) \cdot log_{17}(15) \cdot log_{31}(24) \cdot log_{81}(35)}$; $\frac{log_{25}(2) \cdot log_{14}(4) \cdot log_{21}(11)}{log_{14}(2) \cdot log_{21}(4) \cdot log_5(11)}$
[a) 3; b) 4; c) 1/2]

Lavoriamo insieme

Semplificare l'espressione: $log_{\sqrt{a}}\left(b^4\right)-5\cdot log_{\sqrt{b}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)$, *tenuto conto che* $log_a(b) = 2$.

Supponiamo che le lettere abbiano valori che rendono reali i logaritmi. Portiamo tutto alla base a: $log_{\sqrt{a}}\left(b^4\right)-5\cdot log_{\sqrt{b}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)=\frac{log_a\left(b^4\right)}{log_a\left(\sqrt{a}\right)}-5\cdot\frac{log_a\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)}{log_a\left(\sqrt{b}\right)}$. Semplifichiamo: $\frac{4\cdot log_a(b)}{log_a\left(a^{\frac{1}{2}}\right)}-5\cdot\frac{log_a\left(a^{-\frac{1}{3}}\right)}{\frac{1}{2}\cdot log_a(b)}=\frac{\cancel{4}^2\cdot log_a(b)}{\cancel{2}}-10\cdot\frac{-\frac{1}{3}}{log_a(b)}=$

$=2\cdot log_a(b)+\frac{10}{3\cdot log_a(b)}$. Adesso sostituiamo il valore noto: $2\cdot 2+\frac{10}{3\cdot 2}=4+\frac{5}{3}=\frac{17}{3}$.

Livello 2

24. a) $log_{\sqrt{a}}\left(b^3\right)\cdot log_{b^2}\left(\sqrt{a}\right)$; b) $log_a\left(\sqrt{b}\right)\cdot log_{\sqrt{b}}\left(a^3\right)$; c) $log_{\sqrt{a^3}}\left(b^2\right)\cdot log_{\sqrt{b^5}}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)$ [a) 3/2; b) 3; c) –2/15]

25. a) $log_{\sqrt{a}}\left(b^3\right)\cdot log_{1/b^2}\left(\sqrt{a}\right)$; b) $log_{a^2}\left(\sqrt{b}\right)\cdot log_{b^2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}\right)$; c) $log_{\frac{1}{a^2}}\left(\sqrt[5]{b^2}\right)\cdot log_{b^4}\left(\frac{1}{a^3}\right)$ [a) 6; b) –3/16; c) 3/5]

26. a) $log_{\sqrt{a}}\left(b^4\right)\cdot log_{\sqrt{b}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)$; b) $log_{a^2}\left(\sqrt{b^3}\right)\cdot log_{b^3}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{a^4}}\right)$ [a) –16/3; b) –1/5]

27. $log_a(b)=\frac{1}{2}\Rightarrow 2\cdot log_{\sqrt{a}}\left(\frac{1}{b}\right)+3\cdot log_{\frac{1}{b^3}}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{a^4}}\right)=?$ [–2/5]

28. $log_a(b)=\frac{3}{4}\Rightarrow 3\cdot log_{\sqrt{a^3}}\left(b^2\right)-4\cdot log_{b^2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}\right)=?$ [5]

29. $log_b(a)=3\Rightarrow\left[log_{\frac{1}{a^2}}\left(\frac{1}{b^3}\right)\right]^2-\left[log_{\sqrt{b^3}}\left(\sqrt[3]{a^4}\right)\right]^2=?$ [247/36]

30. $log_{a^2}(b)=-\frac{1}{4}\Rightarrow log_a\left(\frac{1}{b^2}\right)-4\cdot log_{b^3}\left(\frac{1}{a^4}\right)=?$ [–29/3]

31. $log_a(x)=2, log_a(y)=3\Rightarrow log_a\left(x^2\cdot y^3\right)=?$ [13]

Livello 3

32. $\frac{log_a(b)\cdot log_x(c)\cdot log_y(d)}{log_x(b)\cdot log_y(c)\cdot log_{a^4}(d)}$; $\frac{log_a(b)\cdot log_x(c)\cdot log_y(d)}{log_x(b)\cdot log_y(c)\cdot log_{a^n}(d)}$ [4; n]

33. $log_a(x)=2, log_b(x)=\frac{1}{2}, log_c(x)=\frac{1}{3}, log_d(x)=3\Rightarrow log_{abcd}(x)=?$ [35/6]

34. In che relazione sono $log_a(b)$ e $log_{a^n}\left(b^n\right)$? [Sono uguali]

Lavoriamo insieme

Usando una semplice calcolatrice scientifica determinare quante cifre ha 3^{100}.

I logaritmi possono essere utili per determinare quante cifre hanno numeri molto grandi, che di solito sfuggono alle classiche calcolatrici tascabili, anche scientifiche. Noi sappiamo che se $log(N) = h \in \mathbb{N}$, N è un numero con $(h + 1)$ cifre decimali, infatti $log(10) = 1$, $log(10^2) = 2$ e così via. Allora calcoliamo $log(3^{100})$, ovviamente usando le proprietà dei logaritmi, scrivendo cioè $log(3^{100}) = 100\cdot log(3)$; ora con una calcolatrice scientifica calcoliamo che $log(3) \approx 0,477$, quindi $log(3^{100}) \approx 47,7$. Perciò il numero ha 48 cifre.

Livello 2

35. Determinare quante cifre ha 2^{1000}. [302]

36. Con l'uso dei logaritmi ordinare dal più piccolo al più grande: 3^{751}, 4^{632}, 5^{543}. [$3^{751} < 5^{543} < 4^{632}$]
37. Determinare il più piccolo valore intero di n per cui 2^n ha almeno 1000 cifre. [3319]
38. Determinare il più piccolo valore intero di n per cui n^{17} ha almeno 100 cifre. [666084]

Calcolare, con precisione al secondo decimale, i seguenti logaritmi usando la calcolatrice

Livello 1

39. $log_3(7)$; $log_4(31)$; $log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{5}\right)$; $log_{\frac{4}{5}}\left(\sqrt{2}\right)$; $log_{\sqrt{3}}(12)$; $log_{13}(1,21)$ [1,77; 2,47; 0,83; 1,20; 4,52; 0,07]

40. $log_{0,12}(4)$; $log_\pi(3)$; $log_3(\pi)$; $log_{\frac{1}{2}}\left(1+\sqrt{2}\right)$; $log_{\sqrt{2}-1}\left(\frac{1}{5}\right)$ [–0,65; 0,95; 1,04; –1,27; 1,82]

41. $log_2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$; $log_{1+\pi}(\pi)$; $log_{\pi^2}\left(1+\sqrt{5}\right)$; $log_{\frac{2}{5}}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$; $log_{1+e}(e+\pi)$ [1,65; 0,80; 0,51; –0,34; 1,34]

Livello 2

42. Sapendo che $log(2) \approx 0,301$, senza usare l'apposito tasto della calcolatrice determinare un valore approssimato di $log_5(10)$. [1,430]
43. Sapendo che $(0.2)^x = 2$ e $ln(2) \approx 0,693$, determinare un valore approssimato di x. [–0,4]

Lavoriamo insieme

Risolvere l'equazione esponenziale: $2^x + 3^{x-1} = 3^x - 2^{x+1}$.

Nell'unità sulle equazioni esponenziali abbiamo risolto solo quelle che erano riconducibili all'uguaglianza fra potenze di uguale base o che con una posizione diventavano equazioni algebriche. Non abbiamo risolto equazioni del tipo $3^x = 2$. Adesso siamo in grado di farlo, poiché abbiamo introdotto i logaritmi, pertanto la soluzione formale è semplicemente $x = log_3(2)$, quella numerica è ovviamente approssimata ed è circa 0,63. Nel nostro caso portiamo le potenze di uguale base dalla stessa parte rispetto al segno di uguale: $2^x + 2^{x+1} = 3^x - 3^{x-1} \Rightarrow 2^x + 2 \cdot 2^x = 3^x - 3^x/3 \Rightarrow 3 \cdot 2^x = 2/3 \cdot 3^x \Rightarrow 2^{x-1} = 3^{x-2}$. Adesso estraiamo i logaritmi, in una base a piacere, di entrambi i membri: $(x-1) \cdot log(2) = (x-2) \cdot log(3)$. In tal modo abbiamo a che fare con una semplice equazione di primo grado: $x \cdot [log(2) - log(3)]\ log(2) - 2 \cdot log(3) \Rightarrow x = \frac{log(2) - 2 \cdot log(3)}{log(2) - log(3)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{log\left(\frac{2}{9}\right)}{log\left(\frac{2}{3}\right)} \approx 3,71$$

Risolvi le seguenti equazioni o disequazioni esponenziali

Livello 1

44. $3^{x+1} = 4$; $5^{x+2} = 3$; $2^{3x-1} = 5^x$; $2^{x^2} = 5$ $\left[x = 1 - log_3(4); x = log_5(3) - 2; x = log_{\frac{5}{8}}\left(\frac{1}{2}\right); x = \pm\sqrt{log_2(5)}\right]$

45. $4^{2x-3} = 3^{x-1}$; $4^{3x+2} = 7^{x-1}$; $2 \cdot 5^{2x-1} = \frac{3^{x-1}}{5}$ $\left[x = log_{\frac{3}{16}}\left(\frac{3}{64}\right); x = log_{\frac{7}{64}}(112); x = log_{\frac{25}{3}}\left(\frac{1}{6}\right)\right]$

46. $\sqrt{3^{2x-5}} = 2^{x-1}$; $4^{\frac{x-1}{2}} = 3^{\frac{x+1}{3}}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} < \left(\frac{3}{5}\right)^{x-1}$ $\left[x = log_{\frac{9}{4}}\left(\frac{243}{4}\right); x = log_{\frac{3}{8}}\left(\frac{1}{24}\right); x < log_{\frac{10}{9}}\left(\frac{5}{2}\right)\right]$

47. $\frac{1}{2^{3x}} \geq 3$; $3^{x+3} > 4$; $3^{2x+3} \geq 2 \cdot 5^{4x+7}$ $\left[x \geq log_8(3); x < 3 - log_3(4); x \geq \frac{7 \cdot log(5) - log(27/2)}{2 \cdot log(25/3)}\right]$

48. $\left(\frac{5}{7}\right)^{x-4} < \frac{1}{2^{2x-3}}$; $\sqrt{3^{x+3}} \leq 2^{x+1}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2+1} < 1$ $\left[x < log_{\frac{7}{20}}\left(\frac{2401}{5000}\right); x \geq log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{4}{27}\right); \forall x \in \mathbb{R}\right]$

49. $\left(\frac{4}{3}\right)^{3x+5} < \left(\frac{6}{5}\right)^{2x}$; $\pi^{3x+1} < e^{4x-1}$ $\left[x < \frac{5\cdot log\left(\frac{3}{3}\right)}{log\left(\frac{400}{243}\right)}; x < \frac{1+ln(\pi)}{3\cdot ln(\pi)-4}\right]$

Lavoriamo insieme

Risolvere la disequazione esponenziale $4^{x+1} - 5 \cdot 2^x - 1 > 0$.

Riscriviamola: $4 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x - 1 > 0 \Rightarrow 4z^2 - 5z - 1 < 0$ ($z = 2^x$). Risolviamo l'equazione associata nella variabile z. $z = \frac{5 \pm \sqrt{25+16}}{8} = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{8}$. Quindi le soluzioni della disequazione in z sono: $z < \frac{3-\sqrt{41}}{8} \vee z > \frac{3+\sqrt{41}}{8}$, cioè $2^x < \frac{3-\sqrt{41}}{8} \vee 2^x > \frac{3+\sqrt{41}}{8}$. La prima non ha ovviamente soluzioni, poiché $2^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Invece la seconda si risolve passando ai logaritmi: $x > log_2\left(\frac{3+\sqrt{41}}{8}\right) = \frac{log\left(\frac{3+\sqrt{41}}{8}\right)}{log(2)}$.

Risolvere le seguenti equazioni o disequazioni esponenziali

Livello 2

50. $2^x + 2^{x+1} - 2^{x-1} = 0$; $3^{2x} + 3^x - 2 = 0$; $4^x - 3 \cdot 2^x - 1 = 0$ $\left[\varnothing; x = 0; x = log_2\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)\right]$

51. $9^x - 2 \cdot 3^x - 4 = 0$; $3 \cdot 5^{2x} - 7 \cdot 5^x + 1 = 0$ $\left[x = log_3\left(1+\sqrt{5}\right); x = log_5\left(\frac{7 \pm \sqrt{37}}{6}\right)\right]$

52. $4 \cdot 6^{2x+1} - 5 \cdot 6^{x+1} + 3 = 0$; $e^{2x} - e^x - 1 > 0$ $\left[x = log_6\left(\frac{5 \pm \sqrt{17}}{8}\right); x > ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]$

53. $2 \cdot e^{2x} + 3 \cdot e^x - 2 < 0$; $3 \cdot 4^x + 2^x - 3 > 0$; $3^{x+1} - 18^x - 3^x + 2 \cdot 18^{x+1}$ $\left[x > ln(2); x > log_2\left(\frac{\sqrt{37}-1}{6}\right); \varnothing\right]$

54. $2 \cdot 16^{x-1} + 3 \cdot 4^x - 1 \geq 0$; $\pi^{2x} - \pi^x - 5 \leq 0$ $\left[x > log_4\left(\frac{\sqrt{17}-3}{4}\right); x \leq log_\pi\left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)\right]$

55. $3 \cdot 4^{x-2} - 3 \cdot 2^x - 1 \geq 0$; $5^x \cdot 2^{x-1} = 25^{3x-1} \cdot 8^{2x-3}$ $\left[x \geq log_2\left(\frac{24+4\cdot\sqrt{39}}{3}\right); x = \frac{2\cdot log(80)}{5}\right]$

56. $3^{x+1} \cdot 7^{3x+1} = 9^x \cdot 49^{2x-3}$; $4^{x+1} \cdot 125^{x-1} = 16^{2x-3} \cdot 5^{x-1}$ $\left[x = \frac{7\cdot log(7)+log(3)}{log(21)}; x = log_{\frac{5}{8}}\left(\frac{5}{128}\right)\right]$

57. $8^{2x} \cdot 9^{4x+7} = 4^{3x-2} \cdot 3^{x+5}$; $4 \cdot 3^x - 2^{x+1} = 3 \cdot 2^x + 3^{x-1}$ $\left[x = -\frac{log(314928)}{7\cdot log(3)}; x = log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{15}{11}\right)\right]$

58. $5 \cdot 10^x + 2^{x+2} = 3 \cdot 10^{x+1} + 2^x$; $6^{x+1} - 8^x = 2^{3x+1} - 6^{x-1}$ $\left[x = log_5(3); x = log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{18}{37}\right)\right]$

Lavoriamo insieme

Risolvere il seguente sistema di equazioni esponenziali $\begin{cases} 3^{x+1} - 2^{y-2} = 4 \\ 3^{x-1} + 2^y = 5 \end{cases}$.

Riscriviamolo: $\begin{cases} 3 \cdot 3^x - \frac{1}{4} \cdot 2^y = 4 \\ \frac{1}{3} \cdot 3^x + 2^y = 5 \end{cases}$. Adesso poniamo $3^x = z$, $2^y = t$, ottenendo il sistema di equazioni lineari:

$\begin{cases} 3 \cdot y - \frac{1}{4} \cdot t = 4 \\ \frac{1}{3} \cdot y + t = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12 \cdot y - t = 16 \\ y + 3t = 15 \end{cases} \Rightarrow \quad \Rightarrow y = \dfrac{\begin{vmatrix} 16 & -1 \\ 15 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \dfrac{48+15}{36+1} = \dfrac{63}{37}; z = \dfrac{\begin{vmatrix} 12 & 16 \\ 1 & 15 \end{vmatrix}}{37} = \dfrac{180-16}{37} = \dfrac{164}{37}$. Quindi adesso dobbiamo risolvere le due equazioni esponenziali: $3^x = \frac{63}{37}; 2^y = \frac{164}{37} \Rightarrow x = log_3\left(\frac{63}{37}\right) = \dfrac{log\left(\frac{63}{37}\right)}{log(3)}$;

$y = log_2\left(\frac{164}{37}\right) = \dfrac{log\left(\frac{164}{37}\right)}{log(2)}$.

Risolvere i seguenti sistemi di equazioni esponenziali

***Livello* 1**

59. $\begin{cases} 2^{x-1} + 3^{y-1} = 7 \\ 2^{x+1} - 3^y = 12 \end{cases}; \begin{cases} 3^x - 2 = 3^{y+1} \\ 3^{y-2} + 4 = 3^{x-2} \end{cases}$ $\left[\left(x = log_2\left(\frac{66}{7}\right), y = log_3\left(\frac{48}{7}\right)\right); \left(x = log_3(53), y = log_3(17)\right)\right]$

60. $\begin{cases} 5^{x+1} - 5^y = 4 \\ 5^{y-1} + 5^x = 11 \end{cases}; \begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2^y = 8 \\ 5 \cdot 2^y - 3 \cdot 2^x = 4 \end{cases}$ $\left[\left(x = log_5\left(\frac{59}{10}\right), y = log_2\left(\frac{51}{2}\right)\right); (x=1, y=1)\right]$

61. $\begin{cases} 2^x + 2^{2y-1} = 16 \\ 3 \cdot 4^{y-1} - 5 \cdot 2^{x-1} = 2 \end{cases}; \begin{cases} 2^x + 2^{y+2} = 3 \\ 2^{y+3} - 2^{x+2} = -4 \end{cases}$ $\left[\left(x = log_2\left(\frac{11}{2}\right), y = log_4(21)\right); \left(x = log_2\left(\frac{5}{3}\right), y = log_2\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right]$

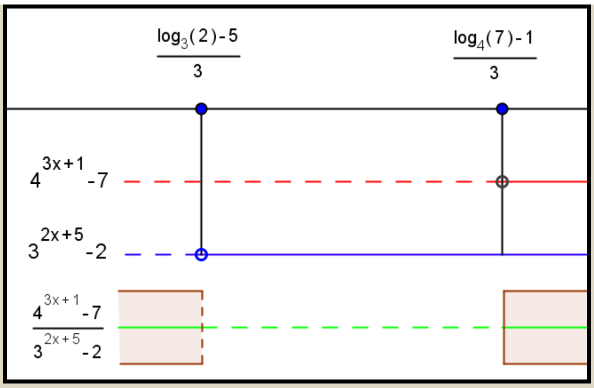
62. $\begin{cases} 4 \cdot \pi^x + \pi^{y+1} = 1 \\ \pi^x + 3 \cdot \pi^y = 5 \end{cases}; \begin{cases} 9^x - 3^{2y+1} = -18 \\ 3^{2x-3} - 9^{y-2} = \frac{2}{9} \end{cases}$ $\left[\left(x = log_\pi\left(\frac{57}{\pi-12}\right), y = log_\pi\left(\frac{19}{12-\pi}\right)\right); (x=1, y=1)\right]$

63. $\begin{cases} e^{2x+1} - e^{y-1} = 13 \\ e^y + e^{2x-1} = 3 \end{cases}; \begin{cases} 4^{x-2} - 2^{x-1} = 1 \\ 2^{x+3} + 4^x = 3 \end{cases}$ $\left[x = \frac{1}{2} + ln\left(\sqrt{\frac{13e+3}{e^3+1}}\right), y = 1 + ln\left(\frac{3e^2-13}{e^3+1}\right); \varnothing\right]$

Lavoriamo insieme

Risolvere la seguente disequazione fratta: $\dfrac{4^{3x+1}-7}{3^{2x+5}-2} \geq 0$.

Determiniamo singolarmente il segno di numeratore e denominatore. $4^{3x+1} - 7 \geq 0 \Rightarrow 3x + 1 \geq log_4(7) \Rightarrow$ $x \geq \dfrac{log_4(7)-1}{3}$ e $3^{2x+5} - 2 > 0 \Rightarrow 2x + 5 > log_3(2) \Rightarrow x > \dfrac{log_3(2)-5}{2}$. Adesso dobbiamo determinare quale dei due numeri è maggiore, dovremmo vedere abbastanza facilmente che il primo numero è positivo, dato che $log_4(7) > 1$, mentre il secondo è negativo, poiché $log_3(2) < 5$. Se non ci rendiamo conto possiamo usare la calcolatrice, ottenendo: $\dfrac{log_4(7)-1}{3} \approx 0{,}13; \dfrac{log_3(2)-5}{2} \approx -2{,}18$. Quindi rappresentiamo graficamente:



Infine la soluzione è $x<\dfrac{log_3(2)-5}{2}\vee x\geq\dfrac{log_4(7)-1}{3}$.

Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali

Livello 2

64. $\dfrac{2^{3x+1}-3}{4^{x+2}-5}\geq 0$; $\dfrac{4^{5x-1}-1}{5^{2x+1}-2}<0$ $\left[\left(x<log_4(5)-2\vee x\geq log_8(3)-\dfrac{1}{3}\right);log_{25}(2)-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{5}\right]$
65. $3^{1+2x}\cdot 4^{2x-1}\leq 12^{3x-2}$; $2^{3-4x}\cdot 5^{x+1}>10^{2x-1}$ $[x\geq log_{12}(108)\ ;\ x<log_{320}(400)]$
66. $\dfrac{2^{4x-5}-6}{2^{3x+1}-7}>0$; $\dfrac{5^{3x-2}+2}{3^{4x-1}-2}\leq 0$ $\left[\left(x<log_8\left(\dfrac{7}{2}\right)\vee x>log_{16}(192)\right);x<log_{81}(6)\right]$
67. $\dfrac{7^{3x+2}-3}{4^{2x}-3}\geq 0$; $\dfrac{12^{3-x}-3}{18^{2-3x}-2}>0$ $\left[\left(x\leq log_{343}(3)-\dfrac{2}{3}\vee x>log_{16}(3)\right);\left(x<log_{5832}(162)\vee x>log_{12}(576)\right)\right]$
68. $\dfrac{2^{\frac{x+1}{2}}-3^{\frac{4x+1}{3}}}{2^{2x-1}-3^{2x+1}}<0$; $\dfrac{3^{2x-1}-2^{3-2x}}{4^x-3^{2-x}}\geq 0$ $\left[\left(log_{\frac{9}{4}}\left(\dfrac{1}{6}\right)<x<log_{\frac{6561}{8}}\left(\dfrac{8}{9}\right)\right);\left(x<log_{12}(9)\vee x\geq log_{36}(24)\right)\right]$
69. $\dfrac{6^{2x-3}-4^{x+2}}{4^{5x-2}-6^{3+2x}}\leq 0$; $2^{2x-1}\cdot 3^{1-x}\leq 6^x$ $\left[\left(x<log_{\frac{9}{256}}\left(\dfrac{1}{3456}\right)\vee x\geq log_9(3456)\right);x\geq log_{\frac{9}{2}}(6)\right]$
70. $\dfrac{3\cdot 2^{2^x}-4^{2^x}-2}{9^x-3^x-1}\geq 0$; $\dfrac{2\cdot 5^{2x}-5^x-2}{49^x-2\cdot 7^x-1}\leq 0$ $\left[0\leq x<log_3\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right);log_5\left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}\right)\leq x<log_7\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$

Lavoriamo insieme

Data la legge di capitalizzazione composta: $C_n = C_0\cdot(1+I)^n$, *determinare n*.

Usiamo i logaritmi: $\dfrac{C_n}{C_0}=(1+I)^n\Rightarrow log\left(\dfrac{C_n}{C_0}\right)=log\left[(1+I)^n\right]\Rightarrow log\left(\dfrac{C_n}{C_0}\right)=n\cdot log(1+I)\Rightarrow n=\dfrac{log(C_n/C_0)}{log(1+I)}$.

Livello 2

71. Un capitale iniziale di € 15000,00 è investito in un'obbligazione che paga un interesse annuo del 2,87%, che viene però aggiunto al capitale. Quale sarà la somma liquidata dopo 15 anni? [€ 22931,00]
72. Con riferimento al problema precedente, se l'inflazione annua è mediamente del 1,38% annuo, quale sarà il valore reale del capitale finale? [€ 18616,50]
73. Dopo quanti anni, minimo, un capitale di € 18000, diventa € 24000 o più, in regime di capitalizzazione composta al tasso del 2,15% annuo? [14]
74. Dopo quanti anni, minimo, un capitale, in regime di capitalizzazione composta al tasso del 3,19% annuo, raddoppia? [Più di 22]
75. Con riferimento al problema della capitalizzazione composta, se il capitale investito raddoppia, senza calcolare l'inflazione, dopo 23 anni, qual è l'interesse annuo? [circa 3,06%]
76. La popolazione di una città è inizialmente formata da 214000 abitanti, sapendo che essa aumenta in media del 3,12% l'anno, determinare dopo quanti anni raddoppia di numero. Il dato sul numero degli

abitanti è necessario per risolvere il problema? [Circa 22,56; no]

77. Per eliminare i parassiti viene spruzzato un prodotto medicinale sulle arance, che assorbono il 100% del prodotto e ogni 4 giorni dimezzano il loro contenuto di tossicità. Dato che una percentuale superiore al 10% di residuo tossico fa sì che le arance non vengano dichiarate commestibili, qual è il minimo numero di giorni che devono attendersi affinché le arance possano essere mangiate? [14]

78. In una immaginaria nazione la crisi economica produce un'inflazione del 5% mensile. Se gli stipendi vengono adeguati mensilmente all'inflazione, un operaio che a Gennaio guadagna 2000 monete, quante monete guadagnerà il successivo Dicembre? [3420,68]

Livello 3

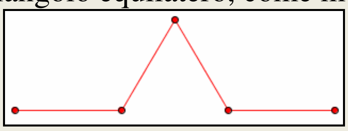
79. Una coltura batterica triplica di numero ogni 35 minuti. Se inizialmente è formata da 450 batteri, dopo quanti minuti avremo almeno un milione di batteri? Se invece raggiungessimo i 100 milioni dopo 1000 minuti, quale sarebbe il tasso di accrescimento al minuto? [circa 246, circa 1,2%]

80. Un capitale di € 15000 viene investito in regime di capitalizzazione composta al 2,75% annuo, se dopo 12 anni il valore reale del capitale, al netto dell'inflazione, è di € 16703,64, quanto vale il tasso di inflazione medio? [1,8%]

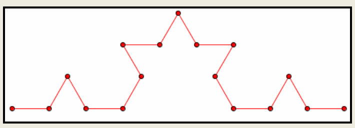
81. Un capitale di € 15000 viene investito in regime di capitalizzazione composta al 3,25% annuo, se dopo x anni il valore reale del capitale, al netto dell'inflazione al 1,7% medio annuo, è di € 19591,86, quanto vale x? [18]

Intervallo Matematico

In matematica è importantissimo il concetto di dimensione, esso viene usato talvolta in modo intuitivo o comunque "istintivo". Così si dice che il punto ha dimensione 0, la retta e le sue porzioni dimensione 1, il piano 2, lo spazio 3. Abbiamo imparato che la matematica spesso generalizza, così si parla di spazio a 4 o 5 dimensioni, anche se non si riescono a immaginare oggetti che abbiano tali dimensioni. Così nel tempo si è arrivati ad affermare che vi sono spazi (concetto molto più generale di quello geometrico-intuitivo) che hanno dimensione negativa, come l'insieme vuoto che si definisce come oggetto di dimensione – 1. A questo punto il passo di considerare dimensioni non intere, diventa abbastanza semplice almeno da un punto di vista teorico. Così alla fine del XX secolo l'ingegnere dell'IBM Benoit Mandelbrot definisce la cosiddetta dimensione frattale. I frattali sono curve *strane* che cercano di imitare la natura, il cui primo esempio storico è dovuto al matematico svedese Helge von Koch che, nel 1882, definì una curva in modo iterativo, cioè come un procedimento di costruzione infinita. In cui il primo passo è semplicemente quello di considerare un segmento, quindi dividerlo in tre parti uguali, eliminare la parte intermedia e sostituirla con due segmenti i quali con quello eliminato formano un triangolo equilatero, come mostrato in figura.



La curva continua a costruirsi con la stessa procedura di dividere in 3 parti ogni segmento, eliminare il segmento centrale e sostituirlo con due che formerebbero con l'escluso un triangolo equilatero. Mostriamo il passo successivo.



La curva vera e propria è quella che si ottiene dopo infiniti passi. Questa curva, detta *fiocco di neve*, ha molte proprietà, di cui non parliamo, ed ha una dimensione che è maggiore di 1 perché è più di un singolo segmento, ma meno di due, perché non riempie il piano. Per risolvere il problema Mandelbrot dice che la dimensione di curve iterative come questa è $log_R(N)$, in cui R è il numero di suddivisioni (in questo caso 3) e N il numero di pezzi che sostituiscono l'elemento del passo precedente, in questo caso un segmento è sostituito da $N = 4$ altri segmenti. Quindi la curva di von Koch ha dimensione $log_3(4) \approx 1,26$.

Equazioni e disequazioni logaritmiche

Abbiamo risolto equazioni esponenziali usando i logaritmi, risulta quindi naturale cercare invece di risolvere equazioni in cui le incognite sono all'interno della base o dell'argomento di uno o più logaritmi.

Definizione 3

Un'equazione in cui l'incognita è presente nella base o nell'argomento di un logaritmo si chiama **equazione logaritmica**.

La risoluzione di un'equazione logaritmica spesso si effettua usando le proprietà dei logaritmi.

Esempio 14

L'equazione $log_2(3x - 1) - log_2(5x + 1) = log_2(x + 1)$ è un'equazione logaritmica. Applichiamo le proprietà dei logaritmi: $log_2\left(\frac{3x-1}{5x+1}\right)=log_2(x+1)$. A questo punto, essendo le basi uguali, uguagliamo gli argomenti,. $\frac{3x-1}{5x+1}=x+1 \Rightarrow 3x-1=5x^2+5x+x+1 \Rightarrow 5x^2+3x+2=0 \Rightarrow \Delta=9-40<0$. L'equazione non ha soluzioni.

Non dobbiamo dimenticare che vi sono delle condizioni da imporre per l'esistenza dei logaritmi.

Esempio 15

L'equazione $log_2(x - 2) - log_2(1 - x) = log_2(3x + 2)$ non ha soluzioni, perché l'incognita deve verificare le seguenti condizioni di realtà: $\begin{cases} x-2>0 \\ 1-x>0 \\ 3x+2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<1 \\ x>-\frac{2}{3} \end{cases}$, che ovviamente non danno soluzioni.

Le disequazioni logaritmiche si risolvono nel modo consueto tenuto conto però delle condizioni sulla base.

La disequazione $log_a[f(x)] > log_a[g(x)]$ è equivalente

- al sistema $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)>g(x) \end{cases}$ se è $a > 1$;
- al sistema $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)<g(x) \end{cases}$ se è $0 < a < 1$.

Vediamo un esempio di risoluzione di una disequazione logaritmica.

Esempio 16

- La disequazione logaritmica $log_2(4x - 1) > log_2(3x + 1)$, equivale al sistema $\begin{cases} 4x-1>0 \\ 3x+1>0 \\ 4x-1>3x+1 \end{cases}$. Quindi le sue soluzioni sono: $\begin{cases} x > \frac{1}{4} \\ x > -\frac{1}{3} \Rightarrow x > 2 \\ x > 2 \end{cases}$.

- Invece la disequazione logaritmica $log_{\frac{1}{2}}(4x-1) > log_{\frac{1}{2}}(3x+1)$, equivale al sistema $\begin{cases} 4x-1>0 \\ 3x+1>0 \\ 4x-1<3x+1 \end{cases}$.

  Quindi le sue soluzioni sono: $\begin{cases} x > \frac{1}{4} \\ x > -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{4} < x < 2 \\ x < 2 \end{cases}$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

risolvere l'equazione $log(x^2 - 2x + 1) = -2$. Dobbiamo cercare di scrivere il secondo membro come un logaritmo in base 10, abbiamo così: $log(x^2 - 2x + 1) = 10^{-2}$. A questo punto possiamo passare dall'equazione logaritmica all'equazione algebrica fra gli argomenti $x^2 - 2x + 1 = 1/100 \Rightarrow x^2 - 2x + 99/100 = 0 \Rightarrow 100x^2 - 200x + 99 = 0 \Rightarrow x = \frac{200 \pm \sqrt{40000-39600}}{200} = \frac{200 \pm \sqrt{400}}{200} = \frac{200 \pm 20}{200} = \prec \begin{array}{l} \frac{220}{200} = \frac{11}{10} \\ \frac{180}{200} = \frac{9}{10} \end{array}$.

Risolvi le seguenti equazioni logaritmiche

Livello 1

1. a) $log_2(2x^2 - x) = 1$; b) $log_3(1 - x) = 2$; c) $log_{1/2}(3x - 1) = 3$; d) $log_{\sqrt{2}}(2x+1) = 2$; e) $log_4(x^2 - 1) = -1$

$$\left[\text{a) } x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}; \text{b) } x = -8; \text{c) } x = \frac{3}{8}; \text{d) } x = \frac{1}{2}; \text{e) } x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}\right]$$

2. a) $log_{3/4}(x^2 + x - 1) = -2$;b) $log(3x - 2) = 2$;c) $log(2 + 5x) = -1$;d) $ln(1 - x) = 2$;e) $log_2(x^2 - 2x + 1) = -2$

$$\left[\text{a) } x = \frac{-3 \pm \sqrt{109}}{6}; \text{b) } x = 34; \text{c) } x = -\frac{19}{50}; \text{d) } x = 1 - e^2; \text{e) } \left(x = \frac{1}{2} \vee x = \frac{3}{2}\right)\right]$$

3. a) $log_3(2x^2 + x) = -1$; b) $ln(x^2 - 2x + e) = -1$; c) $log_{\sqrt[3]{2}}(x^2 + 3x) = 9$; d) $log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(4x^2 - 2x - 1) = -4$

$$\left[\text{a) } x = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{12}; \text{b) } \varnothing; \text{c) } x = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{2}; \text{d) } x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{4}\right]$$

4. a) $log(x^2 + 100) = 2$; b) $log(100x^2 + 101) = 2$; c) $log(x^2 - x + 999) = 3$; d) $ln(x^2 - e) = 2$; $ln(x^2 + x) = 1$

$$\left[\text{a) } x = 0; \text{b) } \varnothing; \text{c) } x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; \text{d) } x = \pm\sqrt{e^2 + e}; \text{e) } x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4e}}{2}\right]$$

5. a) $log_4(x^2 + x + 2) = 1/2$; b) $log_2(x^2 - 3) = 1/2$; c) $log_2(2x^2 + 1) = -1/2$; d) $log_{\frac{1}{2}}(1 - x^2) = -\frac{1}{2}$

$$\left[\text{a) } (x = -1 \vee x = 0); \text{b) } x = \pm\sqrt{2 + \sqrt{3}}; \text{c) } \varnothing; \text{d) } \varnothing\right]$$

6. a) $log^2(x - 1) + 3\ log^2(x - 1) + 2 = 0$; b) $log^3(x^2 - 2) = 1$; c) $log^2(2 - x) = log(2 - x)$

$$\left[\text{a) } \left(x = \frac{101}{100} \vee x = \frac{11}{10}\right); \text{b) } x = \pm 2 \cdot \sqrt{3}; \text{c) } (x = -8 \vee x = 1)\right]$$

7. a) $log^2{}_2(x - 2) - 5\ log_2(x - 2) = 6$; b) $2log^2{}_2(2x + 1) + log_2(2x + 1) - 1 = 0$; c) $log_8(1 - x^2) = 1/3$

$$\left[\text{a) } \left(x = \frac{5}{2} \vee x = 66\right); \text{b) } \left(x = \frac{3}{4} \vee x = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right); \text{c) } \varnothing\right]$$

Livello 2

8. a) $log_3(x - 3) - log_3(3x + 2) = log_3(1 + x)$;b) $log_4(3 - 4x) + log_4(5 + 2x) = log_4(3x + 7)$

$$\left[\text{a) } \varnothing; \text{b) } x = \frac{\sqrt{545} - 17}{16}\right]$$

9. a) $log(x + 8) - log(1 - 5x) = log(2 + 3x)$; b) $log_\pi(13 + 3x) + log_\pi(7 - 3x) = log_\pi(5x - 2)$

$$\left[\text{a) } \varnothing; \text{b) } x = \frac{\sqrt{3877} - 23}{18}\right]$$

10. a) $ln(x^2 – 3) – ln(x + 2) = ln(3 – 2x)$; b) $log_{\frac{2}{3}}(x+2)-log_{\frac{2}{3}}(3x-2)=2$ $\left[\text{a) } x=\frac{-1-\sqrt{109}}{6};\text{b) } x=\frac{26}{3}\right]$

11. a) $log_4(1 + 3x) + log_4(11 – 5x) = log_4(x^2 – x + 1)$; b) $log_3(x + 1) – log_3(2x)= –1$ $\left[\text{a) } x=\frac{29\pm\sqrt{1481}}{32};\text{b) } x=-3\right]$

12. a) $log(2x^2 + x) – log(x – 4) = log(1 + 3x)$; b) $log(2 – 3x) + log(4x – 1)= log(3x^2 – x + 1)$ $\left[\text{a) } x=6+2\cdot\sqrt{310};\text{b) } \varnothing\right]$

13. a) $log_{\sqrt{2}}(2x^2-3x+1)-log_{\sqrt{2}}(1+x)=log_{\sqrt{2}}(4-x)$; b) $log_2(2x – 3) – log_2(3) = 1$ $\left[x=1\pm\sqrt{2};x=\frac{9}{2}\right]$

14. a) $log_3(1 + 2x) + log_3(3x – 1) = log_3(x^2 + 4)$; b) $log_2(2x + 1) + log_2(1 – x) = 2$ $\left[\text{a) } x=\frac{-1+\sqrt{101}}{10};\text{b) } \varnothing\right]$

15. a) $2log_2(x – 1) – log_2(3x + 2)= 2$; b) $log(x^2 – 1) – log(3x + 1) = 1$ $\left[\text{a) } x=7+2\cdot\sqrt{14};\text{b) } x=15+2\cdot\sqrt{59}\right]$

16. a) $log_{\frac{1}{2}}(1-3x)+log_{\frac{1}{2}}(4+x)=-3$; b) $log(x – 2) + log(1 + x) = –1$ $\left[\text{a) } x=\frac{-11\pm\sqrt{73}}{6};\text{b) } x=\frac{5+\sqrt{235}}{10}\right]$

17. a) $ln(x^2 + x) – ln(3x + 2) = –1$; b) $ln(4x + 1) + ln(3 – 2x) = 2$ $\left[\text{a) } x=\frac{3-e+\sqrt{e^2+2e+9}}{2e};\text{b) } \varnothing\right]$

18. a) $log_2(2x + 3) = log_{1/2}(3x – 2)$; b) $log_{1/4}(5 – 3x) + log_4(3 – 5x) = 0$ $\left[\text{a) } x=\frac{-5+\sqrt{193}}{12};\text{b) } x=-1\right]$

19. a) $log_2(3x + 1) = log_4(2 – x)$; b) $log_2(1 + x) – log_8(5x^2 + 8x – 5) = 0$ $\left[\text{a) } x=\frac{-7+\sqrt{85}}{18};\text{b) } (x=1\vee x=3)\right]$

20. a) $log_9(x^2 + 2x + 1) = log_3(2x – 1)$; b) $log_9(2 – 8x^2 + 3x) + log_{1/3}(2x + 1) = 0$ [a) $x = 2$; b) $(x = –1/3 \vee x = 1/4)$]

21. a) $log_2(3 + 5x) = log_{\sqrt{2}}(3x)$; b) $log_{\frac{1}{3}}(1+7x)+log_{\sqrt{3}}(4x-1)=0$ $\left[\text{a) } x=\frac{5+\sqrt{133}}{8};\text{b) } x=\frac{15}{16}\right]$

22. a) $log_2(x) – log_4(1 + x) = log_8(2x – 1)$; b) $log_{1/2}(1 – x) + log_2(1 – 2x) = log_4(1 + x)$ $\left[\text{a) } x=\frac{1+\sqrt{3}}{2};\text{b) } x=0\right]$

Livello 3

23. a) $log_{2x}(3x + 2) – log_{2x}(1 + x^2) + log_{2x}(5 – 7x) = 0$; b) $2\cdot log_{x^4-1}(3x^2-1)=1$ $\left[\text{a) } x=\frac{1+\sqrt{793}}{44};\text{b) } \varnothing\right]$

24. a) $log_{x^2-1}(1-x)-log_{x^2-1}(3x^2+x)+log_{x^2-1}(1+3x)=0$; b) $log_{\frac{1}{4}}\left[log_9(x^2-x)\right]=\frac{1}{2}$ $\left[\text{a) } \varnothing;\text{b) } x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}\right]$

25. a) $log_4[log_3(x^2 + 2)] = 1/2$; b) $log_2\left\{log_{\frac{1}{3}}\left[log_{\sqrt{2}}(1-x^2)\right]\right\}=1$; c) $log_2\left[log_{\sqrt{3}}(x^2-x)\right]=2$ $\left[\text{a) } x=\pm\sqrt{7};\text{b) } \varnothing;\text{c) } x=\frac{1\pm\sqrt{37}}{2}\right]$

26. a) $log_{\sqrt{2}}\left[log_2(2x^2+1)\right]=4$; b) $log_3\{log_2[log_4(3x + 1)]\} = 0$; $log_{81}[log_3(3 + 2x)] = 1/4$ $\left[\text{a) } x=\pm\frac{\sqrt{30}}{2};\text{b) } x=5;\text{c) } x=12\right]$

27. a) $log_{\sqrt{2}}\left[log_3(3x-1)\right]=2$; b) $log_{x^2}\left(1-3x^2+x\right)=\frac{1}{2}$ $\left[\text{a) } x=\frac{10}{3}; \text{b) } \left(x=-\frac{1}{3}\vee x=\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$

Spiegare, senza effettuare alcun calcolo, perché le seguenti equazioni logaritmiche non hanno soluzioni

28. a) $log_2(x^2-2)+log_2(-x^2)=x$ b) $log_2(x-2)-log_3(2-x)=1$ $log^2(2x-1)=-5$

29. a) $log_{x-1}(x-1)=2$ b) $log_{x^2-3x+1}\left(\frac{x-1}{2x-2}\right)=3$

Lavoriamo insieme

Risolvere il seguente sistema $\begin{cases} log(x)+log(y)=1 \\ log(x)-log(y)=2 \end{cases}$.

Basta sostituire ai logaritmi delle incognite a piacere, per ottenere un semplice sistema di equazioni lineari.

$$log(x)=a, log(y)=b \Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a-b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{3}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} log(x)=\frac{3}{2} \\ log(y)=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=10^{\frac{3}{2}} \\ b=10^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Livello 1

30. a) $\begin{cases} log_4(x)-log_4(y)=0 \\ log_4(x)+log_4(y)=1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} log_2(x)+log_2(y)=-1 \\ 2\cdot log_2(x)-3\cdot log_2(y)=2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} log_3(x+1)-log_3(y-1)=2 \\ log_3(x+1)-2\cdot log_3(y-1)=-1 \end{cases}$

$\left[\text{a) } (x=2, y=2); \text{b) } \left(x=2^{-\frac{1}{5}}, y=2^{-\frac{4}{5}}\right); \text{c) } (x=242, y=28)\right]$

31. a) $\begin{cases} log_2(x+2)+3\cdot log_3(y)=4 \\ 3\cdot log_2(x+2)-log_3(y)=5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} log_{\sqrt{2}}(2x+1)-2\cdot log_{\sqrt{3}}(4y-1)=2 \\ 3\cdot log_{\sqrt{2}}(2x+1)-4\cdot log_{\sqrt{3}}(4y-1)=0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} log_2(x^2)+3\cdot log_4(y^2)=4 \\ 2\cdot log_2(x)-4\cdot log_4(\sqrt{y})=1 \end{cases}$

$\left[\text{a) } \left(x=2^{\frac{19}{10}}-2, y=3^{\frac{7}{10}}\right); \text{b) } \left(x=\frac{\sqrt{2}-2}{4}, y=\frac{\sqrt[4]{3}+3}{12}\right); \text{c) } \left(x=\pm\sqrt[8]{2^7}, y=\pm\sqrt[4]{8}\right)\right]$

32. a) $\begin{cases} 2\cdot log(2x+1)+5\cdot log(1-2y)=1 \\ 4\cdot log(2x+1)-3\cdot log(1-2y)=-3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3\cdot log(x+y)+2\cdot log(x-y)=1 \\ log(x-y)-log(x+y)=4 \end{cases}$

$\left[\text{a) } \left(x=\frac{10^{-\frac{6}{13}}-1}{2}, y=\frac{1-10^{\frac{5}{13}}}{2}\right); \text{b) } \left(x=\frac{10001\cdot 10^{-\frac{7}{5}}}{2}, y=\frac{9999\cdot 10^{-\frac{7}{5}}}{2}\right)\right]$

Livello 2

33. a) $\begin{cases} log_{\frac{1}{3}}(3x+1)-\frac{4}{3}\cdot log_3(4y)=\frac{4}{3} \\ \frac{3}{2}\cdot log_3(4y)+\frac{2}{3}\cdot log_{\frac{1}{3}}(3x+1)=-\frac{3}{4} \end{cases}$; b) $\begin{cases} log_{\frac{1}{2}}(x+1)+4\cdot log_2(y-2)=\frac{1}{2} \\ \frac{2}{5}\cdot log_2(y-2)-\frac{5}{2}\cdot log_{1/2}(x+1)=\frac{1}{3} \end{cases}$

$\left[\text{a) } \left(x=\frac{3^{\frac{25}{43}}-3}{9}, y=\frac{3^{\frac{27}{86}}}{12}\right); \text{b) } \left(x=2^{\frac{17}{156}}-1, y=2^{\frac{95}{264}}+2\right)\right]$

34. a) $\begin{cases} log_3\left(\frac{x+1}{2}\right)+\frac{2}{3}\cdot log_2\left(\frac{y-1}{3}\right)=\frac{4}{5} \\ log_3\left(\frac{x+1}{2}\right)-\frac{1}{3}\cdot log_2\left(\frac{y-1}{3}\right)=-\frac{3}{2}\end{cases}$; b) $\begin{cases} ln(x+2y)+ln(3x-y)=4 \\ 3\cdot ln(3x-y)+2\cdot ln(x+2y)=-3\end{cases}$; c) $\begin{cases} log_x(y)=2 \\ log_y(x)=1\end{cases}$

$\left[\text{a) }\left(x=\frac{2\cdot 3^{\frac{4}{15}}-3}{3}, y=12\cdot 2^{\frac{3}{10}}+1\right);\text{b) }\left(x=\frac{2+e^{26}}{7e^{11}}, y=\frac{3e^{26}-1}{7e^{11}}\right);\text{c) }\varnothing\right]$

35. a) $\begin{cases} log_{x+1}(y)=2 \\ log_{y-1}(x+1)=1\end{cases}$; b) $\begin{cases} ln(x)+ln(y)=5 \\ ln(x)\cdot ln(y)=6\end{cases}$; c) $\begin{cases} log_3(x-3)+log_3(2y+1)=4 \\ log_3(x-3)\cdot log_3(2y+1)-1=2\end{cases}$

$\left[\text{a) }\left(x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}, y=\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right);b)\ \left(x=e^2, y=e^3\vee x=e^3, y=e^2\right);c)\ \left(x=6, y=13\vee x=30, y=1\right)\right]$

36. a) $\begin{cases} log_3(x^2)+log_3(y^3)=7 \\ log_3(x^3)-log_3(y^2)=-9\end{cases}$; b) $\begin{cases} log_2(x^3)+log_2(y^2)=14 \\ log_2(x^2)-log_2(y^3)=-8\end{cases}$; c) $\begin{cases} log_3^2(x)+log_2^2(y)=13 \\ log_3(x)\cdot log_2(y)=6\end{cases}$

$\left[\text{a) }\left(x=\frac{1}{3}, y=\frac{2}{7}\right);\text{b) }(x=4, y=16);\text{c) }\left(x=\frac{1}{27}, y=\frac{1}{4}\right)\vee\left(x=\frac{1}{9}, y=\frac{1}{8}\right)\vee(x=9, y=8)\vee(x=27, y=4)\right]$

37. $\begin{cases} log_3(x+1)+log_3(y-1)=5 \\ log_3^2(x+1)\cdot log_3^2(y-1)=36\end{cases}$ $\left[\left(x=-\frac{2}{3}, y=730\right)\vee(x=8, y=28)\vee(x=26, y=10)\vee\left(x=728, y=\frac{4}{3}\right)\right]$

Livello 3

38. a) $\begin{cases} log_x(y)=2 \\ log_y(x)=\frac{1}{2}\end{cases}$; b) $\begin{cases} log_x(y)=2 \\ log_y(x+1)=1\end{cases}$ $\left[\text{a) }\left(\forall x, y\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\}: x^2=y\right);\text{b) }\left(x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, y=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right]$

Lavoriamo insieme

Risolvere la disequazione logaritmica: $log(x + 2) \geq log(2x - 1) + log(3x + 5)$.

Imponiamo la condizione di realtà sugli argomenti dei logaritmi: $\begin{cases} x+2>0 \\ 2x-1>0 \\ 3x+5>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x>\frac{1}{2} \\ x>-\frac{5}{3}\end{cases} \Rightarrow x>\frac{1}{2}$. Adesso scriviamo in altro modo la disequazione: $log(x + 2) \geq log[(2x - 1)\cdot(3x + 5)]$. Passiamo alla disequazione fra gli argomenti: $(x + 2) \geq (2x - 1)\cdot(3x + 5) \Rightarrow 6x^2 + 6x - 7 \geq 0$. La disequazione deve essere risolta tenuto conto della condizione di realtà: $\begin{cases} 6x^2+6x-7\geq 0 \\ x>\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\leq\frac{-3-\sqrt{51}}{6}\vee x\geq\frac{-3+\sqrt{51}}{6} \\ x>\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow x\geq\frac{-3+\sqrt{51}}{6}$

Risolvere le seguenti disequazioni logaritmiche

Livello 1

39. a) $log_{4/3}(4x - 1) < log_{4/3}(x - 2)$; b) $log_{1/2}(x^2) < -2$; c) $log_3(x^2 - x) \geq log_3(x - 1)$

[a) $\varnothing$; b) $(x < -2 \vee x > 2)$; c) $x > 1$]

40. a) $log(2x - 1) < log(2 - 3x)$; b) $log_{4/5}(2 - x) \leq log_{4/5}(x + 1)$; c) $ln(1 - x) > 2$

[a) $1/2 < x < 3/5$; b) $-1 < x \leq 1/2$; c) $x < 1 - e^2$]

41. a) $log_{1/4}(3x^2 + 2x - 1) - log_{1/4}(2 - x^2) < 0$; b) $log(x) \geq 1$

$$\left[\text{a) } \left(-\sqrt{2} < x < \frac{-1-\sqrt{13}}{4} \vee \frac{-1+\sqrt{13}}{4} < x < \sqrt{2}\right); b)\ x \geq 10\right]$$

42. a) $log_{\sqrt{2}}(2x+3) - log_{\sqrt{2}}(3x) < 1$; b) $log_{3/4}(2 - x^2) > log_{3/4}(5x - 4)$ $\left[\text{a) } x > \frac{6+9\cdot\sqrt{2}}{14}; \text{b) } 1 < x < \sqrt{2}\right]$

43. a) $log_7(1 + x) - log_7(x^2 - 1) + log_7(3 - 4x) \leq 0$; b) $log_{2/3}(3x + 2) - log_{2/3}(3x^2 + 1) + log_{2/3}(1 + 3x) > 0$

$$\left[\text{a) } (x < -1 \vee x > 1); \text{b) } -\frac{1}{3} < x < \frac{\sqrt{57}-9}{12}\right]$$

44. a) $log_{2/5}(2x - x^2) + log_{2/5}(4 - 3x) \geq 0$; b) $log^2_{3/5}(x) - 3\cdot log_{3/5}(x) + 2 > 0$; $log^2_{\frac{3}{5}}(x) - 3log_{\frac{3}{5}}(x) + 2 < 0$

$$\left[\text{a) } \frac{7-\sqrt{37}}{6} \leq x \leq 1; \text{b) } \left(0 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \vee x > 27\right); \text{c) } \frac{9}{25} < x < \frac{3}{5}\right]$$

45. a) $2\cdot log^2_5(4x + 1) - log_5(4x + 1) - 1 \leq 0$; b) $8\cdot log^2_{1/2}(3 - 4x) - 31\cdot log_{1/2}(3 - 4x) - 4 \leq 0$

$$\left[\text{a) } \frac{\sqrt{5}-5}{20} \leq x \leq 1; \text{b) } \frac{3-\sqrt[8]{2}}{4} \leq x \leq \frac{47}{64}\right]$$

46. $2\cdot log^2_{\sqrt{2}}(x^2+1) + 9\cdot log_5(x^2+1) + 4 < 0$ $\left[-\sqrt{3} < x < -\sqrt{\sqrt[4]{2}-1} \vee \sqrt{\sqrt[4]{2}-1} < x < \sqrt{3}\right]$

47. $9\cdot log^2_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(2-x^2) - 26\cdot log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(2-x^2) - 3 \geq 0$

$$\left[-\sqrt{2} < x \leq -\frac{\sqrt{18-\sqrt{3}}}{3} \vee -\sqrt{2-\sqrt[18]{3}} \leq x \leq \sqrt{2-\sqrt[18]{3}} \vee \frac{\sqrt{18-\sqrt{3}}}{3} \leq x < \sqrt{2}\right]$$

48. a) $log^2_{\sqrt{3}}(2x^2+1) - 2\cdot log_{\sqrt{3}}(2x^2+1) - 8 \geq 0$; b) $log^2_{\sqrt{8}}(x+x^2) + 2\cdot log_{\sqrt{8}}(x+x^2) - 8 < 0$

$$\left[\text{a) } (x \leq -2 \vee \geq 2); \text{b) } \left(\frac{-1-\sqrt{33}}{2} < x < \frac{-4-\sqrt{17}}{8} \vee \frac{-4+\sqrt{17}}{8} < x < \frac{-1+\sqrt{33}}{2}\right)\right]$$

Livello 2

49. a) $log_{\frac{3}{2}}(x^2-3x) - log_{\frac{3}{2}}(2-x^2) \leq 1$; b) $log_4(4 - 7x + x^2) - log_4(x^2 - 2) \geq 1/2$; c) $\frac{log^2_{\sqrt{2}}(2x+1)-2}{log^2_2(1-3x)-4} \leq 0$

$$\left[\text{a) } \frac{3-\sqrt{39}}{5} \leq x < 0; \text{b) } -8 \leq x < -\sqrt{2}; \text{c) } \left(-\frac{1}{3} < x \leq 2^{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\cdot\left(1-2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) \vee \frac{1}{6} < x \leq \frac{2^{\frac{\sqrt{2}}{2}}-1}{2}\right)\right]$$

50. a) $\frac{2\cdot log_3(x+1)-1}{3\cdot log_4(3x)+2} \leq 0$; b) $\frac{ln^2(x^2)-ln(x^2)}{log^2(x)+log(x)} > 0$; c) $\frac{1+2\cdot log(3-x)}{1-2\cdot log(3-x)} - \frac{4}{1-4\cdot log^2(3-x)} - 1 \leq 0$

$$\left[\text{a) } \frac{\sqrt[3]{2}}{12} < x \leq \sqrt{3}-1; \text{b) } \left(\left(0 < x < \frac{1}{10}\right) \vee x > \sqrt{e}\right); \text{c) } \left(\frac{29}{10} \leq x < 3 \vee x < \frac{30-\sqrt{10}}{10}\right)\right]$$

51. a) $\frac{4\cdot ln(x)-1}{3\cdot ln(x)-5} - \frac{2\cdot ln(x)+7}{ln(x)+1} + 3 > 0$; b) $\frac{6\cdot log_{\frac{3}{4}}(x)-1}{5\cdot log_{\frac{3}{4}}(x)+3} - \frac{4\cdot log_{\frac{3}{4}}(x)+7}{3\cdot log_{\frac{3}{4}}(x)+5} \leq 2$

$$\left[\text{a) } \left(0 < x < \frac{1}{e} \vee x > \sqrt[3]{e^5}\right); \text{b) } \left(0 < x < \frac{2\cdot\sqrt[5]{18}}{3} \vee \frac{4}{3} \leq x \frac{8\cdot\sqrt[3]{6}}{9} \vee x \geq \frac{8\cdot\sqrt[4]{12}}{9}\right)\right]$$

Livello 3

52. a) $log_x(x - 1) + log_x(2x + 3) \le log_x(4x^2 + 1)$; b) $x^{log_2(x)} > 8$ $\left[\text{a) } x > \frac{3}{2}; \text{b) } \left(0 < x < 2^{-\sqrt{3}} \vee x > 2^{\sqrt{3}}\right)\right]$

53. a) $log_{x-1}(2x - 1) + log_{x-1}(3 - x) > log_{x-1}(3x^2 + x - 1)$; b) $x^{log_3(x)} \le \sqrt{3}$ $\left[\text{a) } 1 < x < 2; \text{b) } 3^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \le x \le 3^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right]$

54. $log_{3x+1}(4x - 1) + log_{3x+1}(5x - 2) \ge log_{3x+1}(2x^2 - 1)$; b) $x^{log_{1/4}(x)} \le \sqrt[3]{2}$ $\left[\text{a) } x > \frac{\sqrt{2}}{2}; \text{b) } x > 0\right]$

55. $log_{x^2-1}(4x+1) + log_{x^2-1}(5+2x) < log_{x^2-1}(x^2 - 3x - 2)$ $[\varnothing]$

L'angolo di Derive

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%205/5-2-1.exe si scarica un'applicazione che mostra come Derive lavora con i logaritmi e gli esponenziali. Mentre su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%205/5-2-1.exe si scarica il relativo file.

L'angolo di Microsoft Mathematics

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%205/5-2-2.exe si scarica un'applicazione che mostra come il software lavora con i logaritmi e gli esponenziali. Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%205/5-2-2.rar si scarica il relativo file.

L'angolo della MateFisica

I logaritmi hanno vasta applicazione in molte questioni fisico-chimiche.

- Intanto nella stessa definizione del cosiddetto pH, che è una scala di misura dell'acidità o della basicità di una soluzione. Esso è definito come $log\left(\frac{1}{H_3O^+}\right) = -log\left(H_3O^+\right)$. Una soluzione viene detta Acida se il pH è < 7, Neutra se il pH è = 7, Basica se pH > 7. Vi è perciò quella che si chiama una scala logaritmica, in modo tale che per esempio il bicarbonato di sodio ha un PH di 9 mentre certi saponi alcalini circa 10, sono quindi entrambi a PH acido. Quante volte il sapone è più *acido* del bicarbonato? Se $log(x) = 9$ e $log(y) = 10$, in che relazione sono x e y? Abbiamo $x = 10^9$ e $y = 10^{10}$, quindi $y = 10\ x$.
- Altre interessanti applicazioni si hanno in acustica, nella definizione del Decibel, indicato con dB, che è un'unità di misura usata per l'intensità acustica. Essa è definita come $10 \cdot log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, in cui I è l'intensità del suono e I_0 è la cosiddetta soglia di udibilità, pari a 10^{-12} W/m^2, che può quindi essere scritta anche come: $10 \cdot log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) = 10 \cdot log(I) + 10 \cdot log\left(10^{12}\right) = 12 + 10 \cdot log(I)$ Viene usata per operare con numeri relativamente *normali*, ossia non troppo *grandi* né troppo piccoli. Per esempio la potenza acustica avvertita in un concerto rock è circa 100 dB; se la misurassimo in W/m^2 invece avrebbe un valore molto più grande: $12 + 10 \cdot log(I) = 100 \Rightarrow log(I) = 8{,}8 \Rightarrow I = 10^{8,8}$ W/m^2.
- E non dobbiamo dimenticare la radioattività. In natura vi sono elementi, detti radioattivi, che hanno la proprietà di mutarsi in altri, seguendo un *percorso* (detto *serie radioattiva*) che, a seguito di una perdita di massa e di conseguenza di energia, arrivano a divenire *stabili*. Gli elementi radioattivi naturalmente si stabilizzano in isotopi del piombo. Ogni elemento ha un suo tempo di decadimento, che di solito viene

valutato in una perdita della metà della radioattività, e per tale motivo viene detto *tempo di dimezzamento* o *emivita*. Per cui vale la seguente equazione: $N(t) = N_0 \cdot 0{,}5^t$, in cui N_0 è la *quantità* di radioattività presente all'inizio e t è il *numero di periodi*. Così se vogliamo sapere dopo quanto tempo un certo elemento perde il 10% della sua radioattività dobbiamo risolvere la seguente equazione esponenziale: $N(t) = 0{,}9\ N_0 \Rightarrow N_0 \cdot 0{,}5^t = 0{,}9\ N_0 \Rightarrow 0{,}5^t = 0{,}9 \Rightarrow t = log_{0,5}(0{,}9) = ln(0{,}9)/ln(0{,}5) \approx 0{,}152$. Sembrerebbe quindi che *tutti* gli elementi radioattivi perdano il 10% nello stesso tempo. Ciò non è vero, perché 0,152 non è un tempo, bensì la percentuale del periodo di dimezzamento. Così se avessimo il cosiddetto radioiodio, usato in medicina nucleare, indicato da I_{131}, il cui tempo di dimezzamento è circa 8,02 giorni, possiamo dire che esso perde il 10% della sua radioatività in circa $0{,}152 \cdot 8{,}02$ giorni ≈ 1,22 giorni. Se avessimo invece Cesio 137 (Cs_{137}), il cui tempo di dimezzamento è 30,17 anni, la risposta sarebbe circa $0{,}152 \cdot 30{,}17$ anni ≈ 4,59 anni.

- Abbiamo anche il cosiddetto processo di carica e scarica dei condensatori. Un condensatore non è altri che un accumulatore di cariche elettriche, formato da due armature, di varia forma geometrica, su ciascuna delle quali si concentrano le cariche di un segno. Negative su un'armatura, positive sull'altra. Per fare cià è necessario che vi sia una differenza di potenziale. Per caricare completamente un condensatore si segue la seguente legge: $Q(t) = \Delta V \cdot C \cdot (1 - e^{-t/\tau})$. C indica la capacità del condensatore, ossia quante cariche riesce a contenere, e si misura in Farad (F); $\tau = R \cdot C$, è una costante che si chiama *costante di tempo*, proprio perché ha le dimensioni di un tempo.

Attività

1. La formula di Pogson: $m_x = -2{,}5 \cdot log(F_x)$ viene usata per misurare la magnitudine apparente di una stella, in cui F_x è il flusso osservato nella banda x. Venere ha magnitudine –4,4, Marte –2,8. Quante volte Venere è più luminoso di Marte? [circa 4,3]
2. Il sole ha una magnitudine apparente di –26,8 mentre la luna piena di –12,6. Quindi possiamo dire che il sole è quante volte circa più luminoso della luna piena? [≈ 447453]
3. Una differenza di h unità fra le magnitudini apparenti comporta una luminosità maggiore di quanto? [$2{,}5^h$]
4. La scala Richter misura la magnitudine di un terremoto in base alla quantità di energia liberata all'epicentro è di tipo logaritmico. Per esempio un terremoto di magnitudine 4 rispetto a uno di magnitudine 3 è 10 volte più disastroso, in generale per passare da una magnitudine alla successiva si moltiplica per 10. Quante volte è più disastroso un terremoto di magnitudo 6 rispetto a uno di magnitudo 2? [10000]
5. Un terremoto che è 1500 volte più disastroso di uno di magnitudo 3, ha magnitudo circa? [6,17]
6. La Coca Cola ha un pH di 2,5 il succo d'arancia di 3,5. Quante volte la Coca Cola è più acida del succo d'arancia? [10]
7. Il sangue ha un pH di circa 7,4 un sapone per le mani standard, di circa 9. Quante volte circa il sapone è più basico del sangue? [40]
8. Una differenza di h unità fra i pH comporta un'acidità o basicità maggiore di quanto? [10^h]
9. Quanto è in decibel la soglia di udibilità? [0 dB]
10. Calcolare in decibel l'intensità del rumore in una discoteca, che è 10^{-2} W/m^2. [100 dB]
11. Il rumore di un colpo di pistola a 1 m è di circa 140 dB, quanto vale in W/m^2? [100 W/m^2]
12. Quanto vale in dB, il suono emesso da 100 sorgenti ciascuna delle quali emette uno stesso suono di 10dB? [30 dB]
13. Quante sorgenti che emettono uno stesso suono di 10dB, equivalgono a una sorgente che emette un suono di 20 dB? [10]
14. Se una sorgente emette un suono di x dB, n sorgenti uguali emetteranno complessivamente un suono di quanti dB? [$x + 10\ log(n)$]
15. n sorgenti emettono ciascuna un suono di x dB, m sorgenti emettono ciascuna un suono di y dB. Se le due intensità complessive sono uguali, in che relazione sono m, n, x e y? $\left[x - y = 10 \cdot log\left(\frac{m}{n}\right)\right]$
16. Il tempo per il dimezzamento del livello di radioattività dell'Uranio 237 è di 6,75 giorni, dopo quanto tempo si riduce al 5%? Se un certo materiale riduce il suo livello radioattivo al 18% dopo 44 giorni, qual è il suo tempo di dimezzamento? [Circa 29; circa 17,8 giorni]
17. L'aspirina viene eliminata dai reni in ragione del 50% del farmaco presente ogni mezz'ora. Dopo quanto

tempo nel corpo è rimasto il 10% dell'aspirina inizialmente somministrata? Se avessimo ingerito del Cefotaxime, avremmo avuto bisogno di circa 4 ore e 6 minuti per smaltirne l'85%, qual è il tempo di dimezzamento di questo antibiotico? [circa 1 ora e 40 minuti; circa 1 ora e mezza]

18. Il Ca_{45} perde il 90% della sua radioattività in circa 548 giorni, mentre il Ta_{182} in circa 382 giorni. Qual è il rapporto fra i tempi di dimezzamento dei due isotopi? Ci sono dati inutili? [circa 1,44; sì il 90%]
19. Nel tempo in cui le reni smaltiscono il 90% dell'antibiotico Meropenem, smaltiscono il 40% di Aztreonam. Se quest'ultimo ha un tempo di emivita di circa 1,7 ore, qual è il tempo di emivita del Meropenem? [circa 0,38 ore]
20. Per stimare l'età di alcuni reperti archeologici si usa il metodo del Carbonio 14, un isotopo del Carbonio, il quale dimezza il suo contenuto radioattivo ogni 5730 anni. Se in un certo reperto abbiamo trovato una percentuale radioattiva del 27%, possiamo dire che il manufatto è stato costruito quanti anni fa circa? Se avessimo misurato il Torio 230 invece ne avremmo trovato una percentuale di circa il 90,5 %. Quanto vale il tempo di dimezzamento di Th_{230}? [10824; circa 75000 anni]
21. Determinare la legge di carica del condensatore relativa all'intensità di corrente $I(t)$, sapendo che si ha: $I(t) = Q(t)/t$. $[I(t) = \Delta V / R \cdot e^{-t/\tau}]$
22. Un condensatore da 52μF è collegato in serie con una resistenza di 3,0 kΩ a una differenza di potenziale di 30V e a un interruttore. Se all'istante t = 0 chiudi l'interruttore quanta carica vi è sul condensatore dopo 5,0 *ms*? [0,49 μC]
23. Un condensatore da 45μF è collegato in serie con una resistenza di 120Ω a una differenza di potenziale di X V e a un interruttore. All'istante t = 0 chiudi l'interruttore, determina X sapendo che dopo 2,5 *ms* sul condensatore ci sono 90 μC. [5,4 V]
24. Un condensatore da 12 μF è collegato in serie con una resistenza di X Ω a una differenza di potenziale di 15V e a un interruttore. All'istante t = 0 chiudi l'interruttore, determina X sapendo che dopo 2,5 *ms* sul condensatore ci sono 60 μC. [514 Ω]
25. Un condensatore da 72μF è collegato in serie con una resistenza di 850Ω a una differenza di potenziale di 36 V e a un interruttore. All'istante t = 0 chiudi l'interruttore, sapendo che dopo X *ms* sul condensatore ci sono 70 μC, determina X. [1,7 *ms*]
26. Se n sorgenti uguali emettono un suono di intensità I dB, m sorgenti uguali alle precedenti emetteranno un suono di quanti dB? $[I \ + log(m/n)]$

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

1. Quanti sono i distinti fattori primi di N, sapendo che $log_2\{log_3[log_5(log_7(N)]\} = 11$? [1]
2. Sia k un numero positivo diverso da 1. Se $log_k(x) \cdot log_3(k) = 2$, determinare x. [9]
3. Semplificare $log_2(3)\cdot log_3(4)\cdot log_4(5)\cdot \ldots \cdot log_{2^n-1}(2^n)$. $[n]$
4. Semplificare $log_3(4)\cdot log_4(5)\cdot log_5(6)\cdot \ldots \cdot log_{3^n-1}(3^n)$ $[n]$
5. Semplificare $log_n(n+1)\cdot log_{n+1}(n+2)\cdot log_{n+2}(n+3)\cdot \ldots \cdot log_{n^m-1}(n^m)$ $[m]$
6. Risolvere: $log_{3x}(36) = x$ $[x = 2]$
7. Risolvere: $log_2\{log_3[log_4(log_5(x)]\} = 0$ $\left[x = 5^{4^3}\right]$

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
A = Abacus (rivista on line)
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
AMC = American Mathematical Contest
ARML = American Regions Mathematics League
HSMC = A&M University High School Mathematics Contest
MT = Mathematics Teacher, rivista della NCTM
RICE = Rice University Mathematics Tournament

Lavoriamo insieme

Il seguente quesito è stato assegnato all'AHSME del 1950. *Se* $log(m) = b - log(n)$, *determinare m*.
Abbiamo $log(m) + log(n) = b$, da cui applicando le proprietà dei logaritmi: $log(m \cdot n) = b$. Quindi per il significato di logaritmo si ha: $m \cdot n = 10^b$, quindi $m = \frac{10^b}{n}$.

1. (AHSME 1951) Sapendo che $log(8) \approx 0{,}9031$ e $log(9) \approx 0{,}9542$, quale dei seguenti numeri NON può essere calcolato, nemmeno in modo approssimato, senza l'uso della calcolatrice o delle tavole? Calcolare dei valori approssimati per gli altri valori. $log(17)$; $log(5/4)$; $log(15)$; $log(600)$; $log(0{,}4)$. [$log(17)$; 0,0969; 1,1761; 2,7781; –0,3979]
2. (AHSME 1952) In che relazione devono essere p e q affinché si abbia la validità della seguente uguaglianza : $log(p) + log(q) = log(p + q)$? $\left[p = \frac{q}{q-1}\right]$
3. (AHSME 1954) Sapendo che $ln(2) \approx 0{,}3010$ e $ln(3) \approx 0{,}4771$ e $3^{x+3} = 135$, determinare un valore approssimato di x. [1,47]
4. (AHSME 1955) Risolvere $log(x) - 5\, log(3) = -2$. [2,43]
5. (AHSME 1958) Se $P = \frac{s}{(1+k)^n}$, ricavare n. $\left[\frac{log(s/P)}{log(1+k)}\right]$
6. (AHSME 1958) Risolvere in x: $log_k(x) \cdot log_5(k) = 3$, k è positivo e diverso da 1. [125]
7. (AHSME 1959) Risolvere in y: $log_3(x) \cdot log_x(2x) \cdot log_{2x}(y) = log_x(x^2)$. [$y = 9$]
8. (AHSME 1960) Risolvere: : $log_{2x}(216) = x$. [$x = 3$]
9. (AHSME 1961) Consideriamo i grafici delle funzioni: $y = 2 \cdot log(x)$, $y = log(2x)$, si intersecano e se sì in quanti punti? [Si incontrano in (2; $log(4)$)]
10. (AHSME 1961) Se $log(2) = a$ e $log(3) = b$, determinare $log_5(12)$. $\left[\frac{2a+b}{1-a}\right]$
11. (AHSME 1962) Se $log_8(225) = a$ e $log_2(15) = b$, determinare a in funzione di b. $\left[a = \frac{2b}{3}\right]$
12. (AHSME 1962) Risolvere $x^{log_{10}(x)} = \frac{x^3}{100}$ [$x = 10 \vee x = 100$]
13. (AHSME 1964) Risolvere in x: $log_{b^2}(x) + log_{x^2}(b) = 1$, $b \neq 1 \wedge x \neq 1$. [$x = b$]

Lavoriamo insieme

Svolgiamo un quesito assegnato agli HSMC del 2004.
Sia k un numero positivo diverso da 1. *Se* $log_k(x) \cdot log_5(k) = 5/2$, *determinare x*.
Innalziamo tutto alla base 5: $5^{log_k(x) \cdot log_5(k)} = 5^{\frac{5}{2}} \Rightarrow \left(5^{log_5(k)}\right)^{log_k(x)} = 5^{\frac{5}{2}}$. Ricordiamo che in generale si ha: $a^{log_a(b)} = b$, quindi: $k^{log_k(x)} = 5^{\frac{5}{2}} \Rightarrow x = 5^{\frac{5}{2}} = \sqrt{5^5} = 25 \cdot \sqrt{5}$.

14. (AHSME 1965) Risolvere in x: $log_a(x) \cdot log_b(x) = log_a(b)$. [$x = b \vee x = b^{-1}$]
15. (AHSME 1965) Provare che comunque si sceglie un numero positivo A, allora esiste $x > 2/3$ in modo che $log(x^2 + 3) - 2 \cdot log(x)$ sia più piccolo di A.

16. (AHSME 1966) Se $log_M(N) = log_N(M)$, $M \neq N$, $M \cdot N > 0$, $M, N \neq 1$, determinare $M \cdot N$. [1]

17. (AHSME 1971) Se $log_2[log_3(log_4(x))] = log_3[log_4(log_2(y))] = log_4[log_2(log_3(z))] = 0$, calcolare $x + y + z$. [89]

18. (AHSME 1972) Data $f(x) = log\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$, $-1 < x < 1$, calcolare $f\left(\frac{3x+x^3}{1+3x^2}\right)$ ed esprimerla mediante $f(x)$. $\left[log\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3\right] = 3 \cdot f(x)\right]$

19. (AHSME 1972) Risolvere $|x - log(y)| = x + log(y)$. $[x = 0 \vee y = 1]$

20. (AHSME 1974) Se $log_8(3) = p$, $log_3(5) = q$, determinare $log(5)$. $\left[\frac{3pq}{1+3pq}\right]$

21. (AHSME 1981) Risolvere in x: $(2x)^{log_b(2)} - (3x)^{log_b(3)} = 0$, $b > 1$, $x > 0$. [1/6]

22. (AHSME 1982) Se $a > 1$, $b > 1$, $p = \frac{log_b[log_b(a)]}{log_b(a)}$, determinare a^p. $[log_b(a)]$

23. (AHSME 1986) Indichiamo con $\lfloor x \rfloor$, il massimo intero contenuto in x, così per esempio $\lfloor 1.23 \rfloor = 1$, $\lfloor -2.14 \rfloor = -3$. Determinare il valore dell'espressione $\sum_{N=1}^{1024} \lfloor \log_2(N) \rfloor$. [8204]

24. (AHSME 1988) Se $log_9(p) + log_{12}(q) = log_{16}(p + q)$, determinare quanto vale q/p. $\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$

25. (AHSME 1990) Se $log_x(y)$, $log_y(x) = 10/3$, $x, y > 0$, $xy = 144$, calcolare $\frac{x+y}{2}$. $[13 \cdot \sqrt{3}]$

26. (AHSME 1995) Sapendo che si ha $A \cdot log_{200}(5) + B \cdot log_{200}(2) = C$, con A, B e C numeri naturali senza fattori comuni diversi da 1, determinare $A + B + C$. [6]

Lavoriamo insieme

Svolgiamo un quesito assegnato agli HSMC del 2004. *I tassi di nascita e di morte di una città sono entrambi proporzionali alla popolazione y con costanti di proporzionalità k_1 e k_2 rispettivamente. La popolazione della città raddoppia ogni 24 anni. Se non ci fossero nascite, la popolazione dimezzerebbe in 8 anni. In quanto tempo la popolazione raddoppierebbe se non ci fossero morti*?

Noi sappiamo che ogni anno per ogni y abitanti ci sono $k_1 \cdot y$ nati e $k_2 \cdot y$ morti, ciò significa che la popolazione che al tempo 0 è y, dopo un anno sarà $y + (k_1 - k_2) \cdot y = (1 + k_1 - k_2) \cdot y$; dopo 2 anni diventerà ovviamente $(1 + k_1 - k_2) \cdot y + (k_1 - k_2) \cdot (1 + k_1 - k_2) \cdot y = (1 + k_1 - k_2)^2 \cdot y$. Generalizzando, dopo 24 anni sarà $(1 + k_1 - k_2)^{24} \cdot y$ e questo dovrà essere uguale a $2y$. Cioè $(1 + k_1 - k_2)^{24} = 2 \Rightarrow 24ln(1 + k_1 - k_2) = ln(2)$ $\Rightarrow ln(1 + k_1 - k_2) = \frac{ln(2)}{24} \Rightarrow (1 + k_1 - k_2) = e^{\frac{ln(2)}{24}}$. Se non ci fossero nascite invece la popolazione dopo un anno diventerebbe $y - k_2 \cdot y = (1 - k_2) \cdot y$, dopo due anni $(1 - k_2) \cdot y - k_2 \cdot (1 - k_2) \cdot y = (1 - k_2)^2 \cdot y$, dopo 8 anni $(1 - k_2)^8 \cdot y$, che sarà uguale a $0,5y$. Questo vuol dire che si ha: $(1 - k_2)^8 = 0,5 \Rightarrow 8ln(1 - k_2) = ln(0,5) = -ln(2) \Rightarrow ln(1 - k_2) = -\frac{ln(2)}{8} \Rightarrow (1 - k_2) = e^{-\frac{ln(2)}{8}} \Rightarrow k_2 = 1 - e^{-\frac{ln(2)}{8}}$. Quindi tenuto conto del risultato precedente possiamo scrivere: $1 + k_1 - \left(1 - e^{-\frac{ln(2)}{8}}\right) = e^{\frac{ln(2)}{24}} \Rightarrow k_1 = -e^{-\frac{ln(2)}{8}} + e^{\frac{ln(2)}{24}}$. Se non ci fossero morti, la popolazione dopo un anno diventerebbe $y + k_1 \cdot y = (1 + k_1) \cdot y$, dopo due anni $(1 + k_1) \cdot y + k_1 \cdot (1 + k_1) \cdot y = (1 + k_1)^2 \cdot y$, dopo x anni $(1 + k_1)^x \cdot y$ e questo deve essere $2y$. Quindi

$$(1+k1)^x = 2 \Rightarrow ln\left[(1+k1)^x\right] = ln(2) \Rightarrow x \cdot ln(1+k1) = ln(2) \Rightarrow x = \frac{ln(2)}{ln(1+k1)} = \frac{ln(2)}{ln\left(1+e^{ln(2)/24} - e^{-ln(2)/8}\right)} \approx 4$$

27. (AHSME 1996) Se $3 = k \cdot 2^r$ e $15 = k \cdot 4^r$, quanto vale r? [$log_2(5)$]
28. (AHSME 1997) La retta $x = k$ incontra il grafico di $y = log_5(x)$ e quello di $y = log_5(x + 4)$. La distanza fra i punti di intersezione è 0,5. Se $k = a + \sqrt{b}; a, b \in \mathbb{Z}$, quanto è $a + b$? [6]
29. (AHSME 1997) Per ogni numero naturale n, sia $f(n) = \begin{cases} log_8(n) & \text{se } log_8(n) \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$. Quanto vale $\sum_{n=1}^{1997} f(n)$? [55/3]
30. (AMC 2000) Quanti interi positivi b sono tali che $log_b(729)$ sia un intero positivo? [4]
31. (HSMC 2006) Calcolare $log_a\left(\sqrt{x} \cdot y^2\right)$, se $log_a\left(x^2 = 1\right), log_a\left(\sqrt{y}\right) = 2$. [33/4]
32. (HSMC 2007) Se $log_a(x) = \frac{1}{2}, log_b(x) = \frac{1}{3}, log_c(x) = -\frac{1}{4}, log_d(x) = -\frac{1}{5}$, calcolare $log_{abcd}(x)$. [–1/4]
33. (RICE 2007) Determinare è il minimo numero reale x per cui $log_3(27) \cdot log_x(7) = log_{27}(x) \cdot log_7(3)$. [1/343]
34. (ARML 2008) L'equazione $\dfrac{log_{12}\left\{log_8\left[log_4(x)\right]\right\}}{log_5\left(log_4\left\{log_y\left[log_2(x)\right]\right\}\right)} = 0$ ha una soluzione per x, se $1 < y < b$, $y \neq a$. Calcolare la coppia ordinata (a, b) con b il massimo possibile. [(2, 16)]

Questions in English

Working together

This is a question assigned at HSMC in 2006.

What is the value of $log\left(\frac{2}{1}\right) + log\left(\frac{3}{2}\right) + log\left(\frac{4}{3}\right) + \ldots + log\left(\frac{99}{98}\right) + log\left(\frac{100}{99}\right)$?

Writing the logs as the difference of the logs of the numerators and denominators, we see the sum is

$$log(2) - log(1) + log(3) - log(2) + log(4) - log(3) + \ldots + log(99) - log(98) + log(100) - log(99) =$$
$$= - log(1) + log(100) = 2.$$

35. (MT1996) Positive integers A, B, and C, with no common factor greater than 1, exist such that is valid: A $log_{200}(5)$ + B $log_{200}(2)$ = C. What is A + B + C? [6]
36. (A1999) There are two cell–cultures with an initial zero number of cells. You add 80 cells to the first culture at every 10th second and then you put half of the cells from the first culture to the second culture. In the second culture half of the cells die every 20 seconds starting in the 19th second of this experiment. What is happening in the 50th second? [188; 132]
37. (HSMC1999) Suppose $x, b > 0$ and $log_{b^2}(x) + log_{x^2}(b) = 1$. Find x. [b]
38. (HSMC1999) Given that $log_a(32) - log_a(4) = -3$, find a. [1/2]
39. (HSMC2005) What is the value of $log_2\{log_2[log_2(16)]\}$? [1]
40. (HSMC2006) Find all possible real values of x satisfying the equation: $log(x^2) = 0{,}25\, log(4x + 3)^4$. $\left[2 \pm \sqrt{7}, -1, -3\right]$

Working together

This is a question assigned at HSMC in 2002.

There exists a positive number k such that $log_2(x) + log_4(x) + log_8(x) = log_k(x)$, *for all positive real numbers x. If* $k = \sqrt[b]{a}$, *where a and b are positive integers, what is the smallest possible value of a + b?*

For all positive x, we have $log_2(x) + log_4(x) + log_8(x) = log_2(x) + \dfrac{log_2(x)}{log_2(4)} + \dfrac{log_2(x)}{log_8(2)} =$

$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot log_2(x)=\frac{11}{6}\cdot log_2(x)$. So must be: $log_k(x)=\frac{11}{6}\cdot log_2(x)=\frac{11}{6}\cdot\frac{log_k(x)}{log_k(2)}\Rightarrow log_k(2)=\frac{11}{6}\Rightarrow$ $\Rightarrow k^{\frac{11}{6}}=2\Rightarrow k=2^{\frac{6}{11}}$. But $k=a^{\frac{1}{b}}$, thus: $a^{\frac{1}{b}}=2^{\frac{6}{11}}\Rightarrow a^{\frac{1}{b}}=\left(2^6\right)^{\frac{1}{11}}\Rightarrow a=64$ and $b=1$, so $a+b=75$. (Any other equivalent choice of a and b would have a equal to a power of 64 and b a multiple of 11.)

41. (HSMC2006) Given that $log_a(27)=b$, express $log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt[6]{a}\right)$ in terms of b. [$1/b$]

42. (HSMC2006) Simplify the expression $\left(\sqrt{2}\right)^{log_2(9)}$ [3]

43. (HSMC2006) What is the value of $\frac{log_2(3)\cdot log_4(5)\cdot log_6(7)}{log_4(3)\cdot log_6(5)\cdot log_8(7)}$? [3]

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia militare) Per $a, b, c, d > 0$ e a diverso da 1, se *"log"* indica *"logaritmo in base a"*, allora $log\left[\frac{\left(a\cdot b^2\right)^3\cdot c}{d}\right]$ è uguale a:
A) $log(b) + log(c) - log(d)$ B) $3 + 6\,log(b) + log(c) - log(d)$
C) $log(a) + 2\,log(b) + 3\,log(c) - log(d)$ D) $log(b) - log(c) + log(d)$
2. (Accademia militare) Individuare l'ordine, per valore crescente, dei seguenti logaritmi:
$$a=log\left(\frac{9}{2}\right), b=log\left(\frac{15}{4}\right), c=log\left(\frac{36}{7}\right), d=log(8).$$
A) $b < a < c < d$ B) $c < a < b < d$ C) $a < c < b < d$ D) nessuna delle risposte date
3. (Accademia militare) Stabilire la base b dei logaritmi per cui si abbia $log_b\left(\frac{1}{8}\right)=3$.
A) 2 B) 1/8 C) 1 D) 1/2
4. (Medicina 2000) L'espressione $log(x^2)$ equivale a
A) $2\,log(x)$ B) $log(2)$ C) $2\,log(|x|)$ D) $log\left(\sqrt{x}\right)$ E) $log\,(2|x|)$
5. (Medicina 2000) Quale di questi numeri: 10; e; 0,1; 100 possono essere presi come BASE di logaritmi?
A) Solo e B) Solo i numeri minori di 100 C) Solo i numeri maggiori di 1
D) Solo 10 ed e E) Tutti quelli indicati (e altri)
6. (Ingegneria – Politecnico di Torino 1999). L'equazione $log(4x) + log(9x) = 2$ è verificata per
A) $x = \pm10/6$ B) $x = 10/6$ C) $x = 100/36$ D) $x = 20/13$ E) $x = 100/13$
7. (Ingegneria – Politecnico di Torino 2000). Quale dei seguenti numeri ha logaritmo in base 10 strettamente compreso tra 5 e 7? A) $10^7 - 10^4$ B) -10^6 C) -10^{-6} D) $10^2 + 10^4$ E) 12345
8. (Ingegneria – Varie università 2002). Posto $a = 0{,}21$; $b=\frac{1}{5}; c=\frac{1}{log_2(5)}$ si ha
A) $c < b < a$ B) $a < c < b$ C) $a < b < c$ D) $c < a < b$ E) $b < a < c$
9. (Ingegneria – Varie università 2002). L'espressione $7^{2+log_7(x)}$ è uguale a
A) $49x$ B) $7^2 + x$ C) $49 + log_7(x)$ D) $49\,log_7(x)$ E) $7x$
10. (Ingegneria 2005) Sia $a > 1$, l'espressione $\log_a\sqrt{\frac{a^2\sqrt{a}}{a^{5/2}}}$ è uguale a A) –1 B) a C) e D) 0 E) 1
11. (Ingegneria, 2009) Dato un qualunque numero reale positivo x, allora $log(x^3) - log(x^2)$ è uguale a
A) $log(x^5)$ B) $\frac{log\left(x^3\right)}{log\left(x^2\right)}$ C) $log(x)$ D) 0 E) $log(x^3 - x^2)$

12. (Ingegneria, 2009) L'espressione $log\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)\cdot log\left(1000\right)$ vale

A) $log\left[\frac{1000\cdot\left(x^2+1\right)}{3}\right]$ B) $log\left(x^2+1\right)$ C) $log\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)+log\left(1000\right)$

D) $\frac{1}{3}\cdot log\left[1000\cdot\left(x^2+1\right)\right]$ E) $log\left(1000\cdot\sqrt[3]{x^2+1}\right)$

13. (Ingegneria – Università di Padova 2010). Il numero $log_{25}(125)$ è uguale a
A) 2/3 B) 3/2 C) 5 D) Nessuna delle precedenti possibilità è corretta

14. (Ingegneria – Università di Padova 2010). Sia x un numero reale diverso da zero. L'espressione $log(5x^2)$ si può anche scrivere:
A) $2\ log\ (5x)$ B) $2\cdot log\left(\sqrt{5}x\right)$ C) $2\cdot log\left(\sqrt{5}|x|\right)$ D) $log(10x)$

15. (Ingegneria – Università di Padova 2010). Siano x e y numeri reali. Da $log_{\frac{1}{2}}\left(x\right)<log_{\frac{1}{2}}\left(y\right)$ si deduce:
A) $x > y > 0$ B) $0 < x < y$ C) $|x| \leq |y|$ D) Nessuna delle precedenti possibilità è corretta

16. (Ingegneria – Università di Padova 2010). Le soluzioni reali della disequazione $e^{2x} + 2\ e^x - 8 \leq 0$ sono: A) $x \leq log(2)$ B) $-\ log(4) \leq x \leq log(2)$ C) $0 \leq x \leq log(2)$ D) Nessuna delle precedenti possibilità è corretta

17. (Ingegneria – Università di Padova 2010). L'equazione $log(x - 2) + log(2x - 3) = 2 \cdot log(x)$ ha soluzioni: A) $x = 1, x = 6$ B) $x = 1$ C) l'equazione non ha soluzioni D) $x = 6$

18. (Ingegneria – Università di Padova 2010). Quale delle seguenti affermazioni è vera?
A) $log_2(3) < log_3(2)$ B) $log_2(3) < 3/2$ C) $log_3(2) < 2/3$ D) Nessuna delle precedenti

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_4_5.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
B	A	D	C	E	B	A	E	A
10	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
D	C	B	B	C	A	A	D	C

6. Geometria dello spazio ambiente

6.1 Rette e piani nello spazio

Prerequisiti

- Possedere nozioni intuitive di forma.
- Possedere nozioni elementari sugli insiemi.
- Avere il concetto di ordine.

Obiettivi

- Saper riconoscere forme geometriche spaziali.
- Saper riconoscere nello spazio ambiente oggetti geometrici, servendosi delle nozioni teoriche per descriverli.
- Saper descrivere oggetti geometrici spaziali.
- Imparare a costruire oggetti geometrici spaziali dei quali viene offerta una loro descrizione.
- Conoscere gli enti geometrici fondamentali della geometria euclidea dello spazio.
- Saper riconoscere le figure spaziali.
- Affinare l'intuizione geometrica controllando le proprie percezioni.

Contenuti

- Postulati della geometria euclidea nello spazio.
- Posizioni reciproche di piani nello spazio.
- Rette sghembe.
- Angoli diedri.
- Perpendicolarità nello spazio

Parole Chiave

Angolo diedro – Complanari – Rette sghembe – Semispazio

Richiamiamo le conoscenze

Postulato A

Ogni retta è formata solo da punti e fra due punti qualsiasi di essa ci sono sempre altri punti. Diciamo che la retta è un insieme continuo e infinito di punti.

Postulato B

Qualsiasi punto scegliamo sul piano per esso passano infinite rette.

Postulato C

Comunque scegliamo due punti distinti nel piano, vi è un'unica retta che li contiene entrambi.

Teorema A

Due rette distinte hanno zero punti o un solo punto in comune.

Definizione A

Due rette che hanno un solo punto in comune si dicono fra loro **incidenti**.

Definizione B

Due rette che hanno più di un punto in comune si dicono fra loro **coincidenti**.

Definizione C

Due rette si dicono **parallele** se non hanno punti in comune, o se sono coincidenti.

Chiamare parallele due rette coincidenti serve a far valere la proprietà transitiva del parallelismo comunque scegliamo tre rette, anche se due di esse sono la stessa retta.

Definizione D

Ciascuno degli insiemi disgiunti determinati da una retta nel piano si chiama **semipiano**.

Definizione E

Diciamo **angolo** di lati le semirette r e s di origine comune C, ciascuno dei due insiemi di punti del piano determinati da r e s, che hanno in comune solo le semirette.

Definizione F

Si dicono fra loro **perpendicolari** o anche **ortogonali** due rette che incontrandosi formano quattro angoli uguali Ciascuno degli angoli da esse formato si chiama angolo **retto**.

Postulato D

Per un punto P fuori da una retta r si può condurre un’unica retta parallela a r.

Questo è il cosiddetto quinto postulato della geometria euclidea, che caratterizza appunto tale tipo di geometria.

Teorema B

Per un punto P possiamo condurre un’unica retta perpendicolare a un’altra retta r.

Postulati ed enti primitivi della geometria euclidea dello spazio

L'ambiente geometrico in cui viviamo non è piano ma spaziale. Nella realtà gli oggetti piani non esistono, vi sono solo oggetti che possono essere assimilati a piani, come per esempio un foglio di carta, solo perché una delle tre dimensioni, quella che chiamiamo spessore, è molto più piccola delle rimanenti. Per lo stesso motivo possiamo trattare un lungo filo di seta come un oggetto a una dimensione, perché una sola delle tre dimensioni è molto più grande delle altre due. Risulta quindi opportuno conoscere meglio la geometria cosiddetta tridimensionale. Cominciamo a porre qualche postulato.

Postulato 1

Per 3 punti non allineati passa uno e un solo piano. I punti si dicono **complanari**.

Postulato 2

Esistono almeno 4 punti non complanari.

Postulato 3

Un piano divide lo spazio in due parti, ciascuna delle quali si chiama **semispazio**. Ogni segmento che ha per estremi due punti di due semispazi diversi incontra il piano in un punto.

Dal Postulato 1 discende immediatamente il seguente risultato.

Teorema 1

Una retta e un punto fuori di essa determinano un unico piano.
Dimostrazione
La retta è determinata da due suoi punti qualsiasi, prendiamo per esempio A e B. sia C il punto esterno alla retta, ma allora A, B e C individuano un solo piano.

Da cui seguono i seguenti altri risultati.

Corollario 1

Se una retta r e un piano α hanno in comune più di un punto allora tutti i punti della retta sono anche punti del piano e si dice che la retta **giace** sul piano.
Dimostrazione
Se r e α hanno in comune 2 punti, chiamiamoli A e B, ma c'è un punto C del piano che non appartiene a r, avremmo un altro piano β che contiene r e C. Quindi β contiene A, B e C, ma allora deve coincidere con α.

Corollario 2

Due rette incidenti individuano un solo piano.
Dimostrazione Lasciata per esercizio.

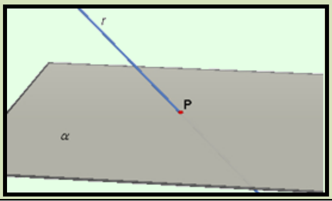
Corollario 3

Per ogni retta passano infiniti piani.
Dimostrazione Lasciata per esercizio.

Abbiamo già visto che una retta che ha più di un punto in comune con un piano giace sul piano. Poniamo una definizione.

Definizione 1

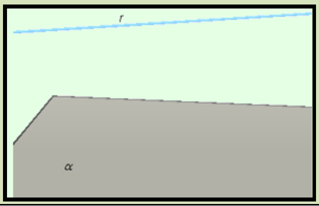
Una retta e un piano aventi un punto in comune si dicono fra loro **incidenti**.

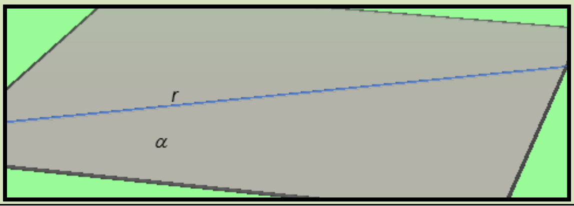


Vi è ancora una possibilità.

Definizione 2

Una retta e un piano si dicono fra loro **paralleli** se sono privi di punti in comune, o se la retta giace sul piano.





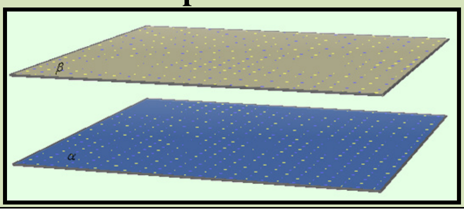
Anche in questo caso, come per la definizione A, la scelta di considerare parallela una retta che giace sul piano serve a garantire sempre la validità della proprietà transitiva del parallelismo, anche quando scegliamo due rette uguali.

Posizioni reciproche di piani nello spazio

I piani nello spazio sono i corrispondenti delle rette nel piano, quindi essi possono avere in comune nessun punto.

Definizione 3

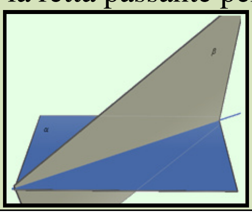
Due piani privi di punti comuni si dicono fra loro **paralleli**.



Possono avere qualcosa in comune e questo qualcosa deve essere un oggetto di dimensione appena inferiore, come accade per le rette nel piano.

Definizione 4

Due piani aventi 2 punti in comune, e quindi la retta passante per tali punti, si dicono fra di loro **incidenti**.



E infine possono avere in comune tutti i punti.

Definizione 5

Due piani aventi in comune almeno tre punti non allineati, si dicono fra di loro **coincidenti**.

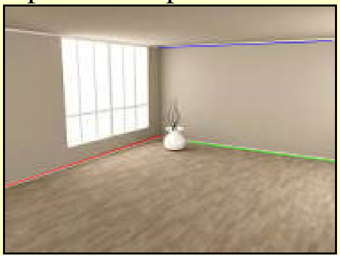
Quindi, esattamente come per le rette nel piano, i piani nello spazio reciprocamente sono tre diverse relazioni.

Posizioni reciproche di rette nello spazio

Due rette nello spazio oltre ad essere incidenti, parallele e coincidenti possono avere un'altra reciproca posizione.

Esempio 1

Consideriamo come idea dello spazio la seguente immagine di una stanza in cui ogni *parete*, pensata come infinita, rappresenta il modello di un piano e ogni spigolo, pensato come infinito, è il modello di una retta. Ora le "rette" blu e verde non hanno punti in comune (neanche se le continuiamo all'infinito) ma appartengono allo stesso piano (parete). Invece le rette blu e rossa non solo non appartengono a nessuna parete, ma non possiamo costruire nessuna parete che possa contenere entrambe le rette.



Nell'esempio precedente le rette blu e rossa sono fra loro più che parallele, quindi meritano un'apposita definizione.

Definizione 6

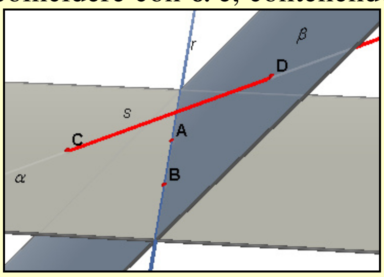
Due rette non complanari si dicono rette **sghembe**.

Che cosa significa?

Sghembo deriva dal latino *sclimbus* che significa obliquo, e infatti le rette sghembe ci appaiono oblique l'una rispetto all'altra

Esempio 2

L'esistenza di rette sghembe si deduce anche dal corollario 3: infatti dato che per una retta r passano infiniti piani, consideriamone due di questi e chiamiamoli α e β. Ora prendiamo due punti sulla retta r, diciamoli A e B, e due punti distinti uno su α che chiamiamo C, e l'altro su β, che diciamo D, ma non appartenenti a r. Consideriamo la retta r e quella determinata da C e D, che chiamiamo s. Se r ed s non fossero sghembe dovrebbe esistere un piano che le contiene e che quindi contiene i quattro punti A, B, C e D. Questo piano però, contenendo A, B e C, dovrebbe coincidere con α e, contenendo A, B e D, con β, ma, poiché i due piani sono distinti, ciò non è possibile.



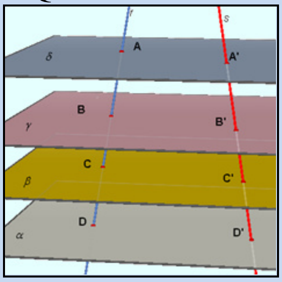
Per i piani paralleli vale un analogo del teorema di Talete.

Teorema 2 (di Talete nello spazio)

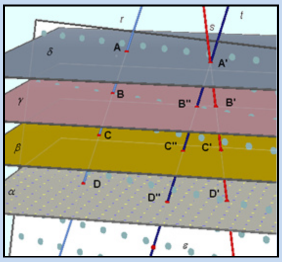
Due rette che incontrano un fascio di piani paralleli determinano su di essi due classi di segmenti proporzionali.

Dimostrazione

Con riferimento alla figura seguente vogliamo mostrare che, per esempio, si ha: $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$ Se r ed s sono complanari siamo nel caso del teorema nel piano, in cui le rette parallele sono quelle passanti per AA', BB', CC', DD', e le trasversali sono sempre r ed s. Quindi il teorema è vero.



Se r ed s non sono complanari ma sghembe, consideriamo il piano ε che contiene r e A' e su di esso ε scegliamo una retta t passante per A', come mostrato nella successiva figura.



Allora r e t stanno sullo stesso piano e perciò possiamo applicare il teorema di Talete: $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{A'B''}}{\overline{C''D''}}$. Ma anche s e t sono complanari, quindi applichiamo il teorema di Talete nel loro piano: $\frac{\overline{A'B''}}{\overline{C''D''}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$

Dalla proprietà transitiva dell'uguaglianza segue la tesi.

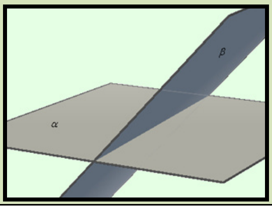
Adesso dobbiamo definire gli analoghi degli angoli nel piano.

Gli angoli diedri

Visto che un angolo piano è una parte di piano determinata da due semirette aventi la stessa origine, possiamo dare la seguente definizione.

Definizione 7

Diciamo **angolo diedro** la parte di spazio determinata da due semipiani con la retta origine comune.



Definizione 8

Diciamo angolo diedro nullo quello determinato da due semipiani coincidenti.

Definizione 9

Diciamo angolo diedro giro l'intero spazio.

Definizione 10

Diciamo angolo diedro piatto quello determinato da due semipiani facenti parte dello stesso piano.

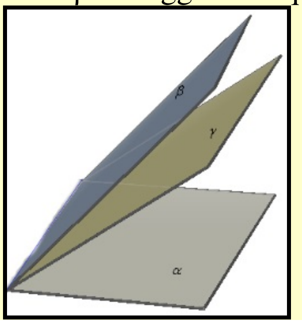
Che cosa significa?

Diedro - Vocabolo composto da *di*, nel senso di due, e dal suffisso *edro* che caratterizza i corpi solidi. Quindi l'angolo diedro è qualcosa che viene originata da due corpi solidi (i semipiani)

Possiamo confrontare due angoli diedri esattamente come facciamo con due angoli piani, basta fare coincidere l'origine comune e uno dei due semipiani. Se coincidono anche gli altri semipiani allora gli angoli sono uguali, se no uno dei due è minore dell'altro.

Esempio 3

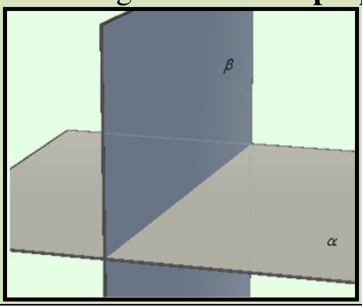
In figura l'angolo determinato dai semipiani α e β è maggiore di quello determinato da α e γ.



Possiamo fornire adesso un'altra definizione.

Definizione 11

Due piani incidenti che formano 4 angoli diedri uguali si dicono **perpendicolari**.

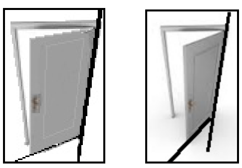


Definizione 12

Un angolo diedro formato da due piani fra loro perpendicolari si chiama angolo **diedro retto**.

Perpendicolarità nello spazio

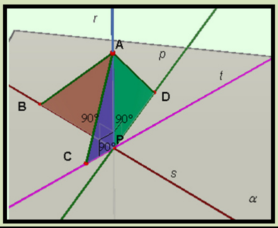
Vediamo adesso di definire il concetto di perpendicolarità fra rette e piani. Per fare ciò consideriamo la seguente immagine in cui abbiamo una porta aperta, anche se non sembra, è ovvio che lo spigolo e la base inferiore della porta (che abbiamo evidenziato in nero) sono fra loro perpendicolari, diversamente la porta non *aprirebbe bene*.



Ma anche se diamo una diversa apertura alla porta, spigolo e base rimangono perpendicolari, d'altro canto lo spigolo è sempre perpendicolare al pavimento. Questo esempio ci conduce a fornire la seguente definizione.

Definizione 13

Una retta incidente a un piano, si dice **perpendicolare al piano** se è perpendicolare a tutte le rette del piano passanti per il punto di incidenza.



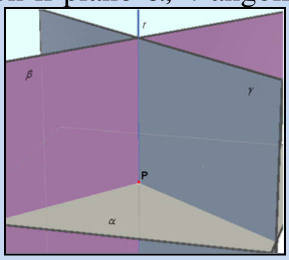
La precedente definizione ci fa vedere che nello spazio, non è vero che per ogni retta vi è una sola retta perpendicolare a essa passante per un punto dato. In particolare abbiamo la validità del seguente fatto.

Teorema 3

Se r è una retta perpendicolare a un piano α, questo piano è perpendicolare ad ogni piano che contiene r.

Dimostrazione

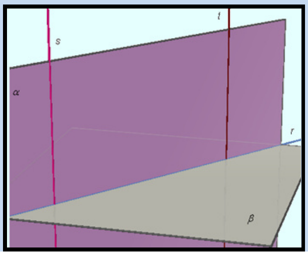
Sia $r \perp \alpha$, ciò vuol dire che r è perpendicolare a ogni retta di α passante per il punto di incidenza P. Ma allora ogni piano β che contiene r e una qualsiasi retta di α passante per P forma con il piano α, 4 angoli diedri retti, quindi i piani sono fra loro perpendicolari.



Molto interessante è anche quest'altro risultato.

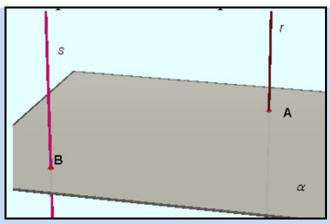
Teorema 4

Se due piani α e β sono perpendicolari e si incontrano lungo la retta r, ogni retta di α perpendicolare a r è perpendicolare a β.



Così come quest'altro, che nega la validità della proprietà transitiva per la perpendicolarità fra rette, come del resto accade nel piano.

Teorema 5



Due rette perpendicolari allo stesso piano sono fra loro parallele.

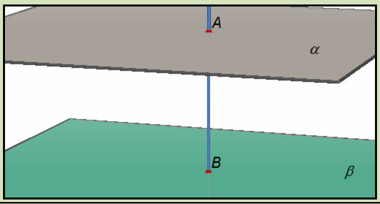
Dimostrazione

Le rette r e s, che incontrano il piano rispettivamente nei punti A e B sono ovviamente complanari, dato che il piano per r e B è lo stesso di quello per s ed A. D'altro canto non possono avere punti in comune, perché se così non fosse, dal loro punto di incontro potremmo tracciare due distinte perpendicolari ad α. Infine r e s sono complanari e non hanno punti in comune, quindi sono parallele.

Possiamo definire la distanza fra due piani paralleli.

Definizione 14

Dati due piani fra loro paralleli, diciamo loro **distanza** la misura di un qualsiasi segmento condotto perpendicolarmente da uno dei piani all'altro.



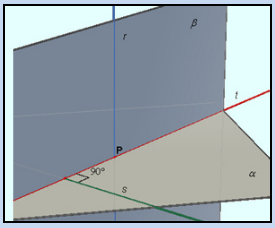
Nelle verifiche tratteremo dei corrispondenti spaziali dell'asse di un segmento e della bisettrice di un angolo. Concludiamo con un importante risultato.

Teorema 6 (delle tre perpendicolari)

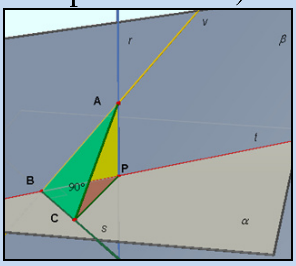
Sia $r \perp \alpha$ nel punto P e s una qualsiasi retta di α non passante per P, allora se t è la retta di α perpendicolare a s per P, s è perpendicolare al piano β determinato da r e t.

Dimostrazione

Consideriamo la figura seguente.



Dobbiamo dimostrare che, una qualsiasi retta v, passante per il punto B intersezione di s e β, è perpendicolare a s. Che è lo stesso che provare che il triangolo ABC (con A e C scelti a caso sulle rette r ed s rispettivamente) è rettangolo di ipotenusa AC.



Noi sappiamo che i triangoli ABP, PBC e ACP sono rettangoli di ipotenuse rispettive AB, PC e AC, per le ipotesi $r \perp t$, $s \perp t$ e $r \perp \alpha$. Quindi: $\overline{AP}^2+\overline{PB}^2=\overline{AB}^2; \overline{PB}^2+\overline{BC}^2=\overline{PC}^2; \overline{AP}^2+\overline{PC}^2=\overline{AC}^2$, da cui si ha: $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\left(\overline{AP}^2+\cancel{\overline{PB}^2}\right)+\ +\left(\overline{PC}^2-\cancel{\overline{PB}^2}\right)=\overline{AP}^2+\overline{PC}^2=\overline{AC}^2$, che è proprio quello che volevamo provare.

L'Antologia

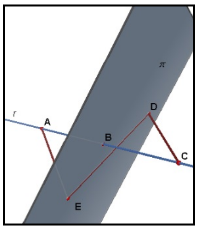
Euclide, *Elementi libro* XI

I Solido è ciò che ha lunghezza, larghezza e profondità.
II Limite di un solido è la superficie.
III Una retta è perpendicolare a un piano, quando forma angoli retti con tutte le rette che la incontrino e siano su quel piano.
IV Un piano è perpendicolare a un altro piano, quando le rete condotte, un uno dei piani, perpendicolarmente alla intersezione comune dei piani, sono perpendicolari all'altro piano.
VIII Sono paralleli i piani che non si incontrino.
XI Angolo solido è l'inclinazione di più di due linee rette, che si tocchino fra loro, ma non siano sulla stessa superficie.

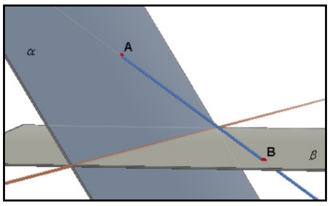
Verifiche

Di seguito sono presentate alcune figure e una loro descrizione a parole. All'interno di ciascuna descrizione scegliere fra le varie alternative i vocaboli che rendono corretta la descrizione.

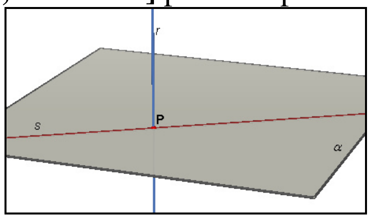
Livello **1**



1. Dato un piano π si fissi su di esso un **[punto, estremo]** *B* e per esso si conduca una **[semiretta, retta]** *r* che sia **[incidente, parallela]** a π. Si fissino poi i punti *A* e *C* su *r* in modo che **[uno solo dei due, tutti e due]** non appartengano a π. Da *A* si tracci **[un segmento, una retta]** che incontri π in *E* e lo stesso si faccia con *C*, ottenendo il punto *D* **[esterno, appartenente]** a π. Infine si costruisca **[la retta, il segmento]** *DE*.

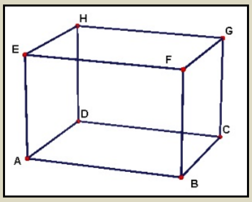


2. Siano i due **[segmenti, piani]** α e β fra loro **[incidenti, paralleli]**. Fissiamo i punti [***A*** **∈ α e** ***B*** **∈ β,** ***B*** **∈ α e** ***A*** **∈ β**]. Tracciamo la **[retta, semiretta]** passante per *A* e *B*.



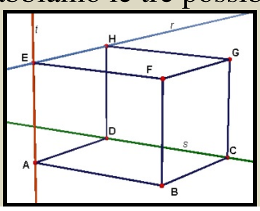
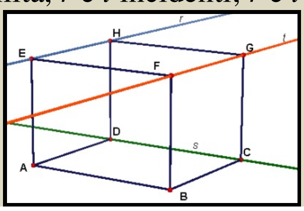
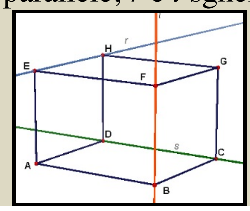
3. Sul piano α fissiamo **[un vertice, un punto]** *P*. Tracciamo **[il piano, la retta]** *r* perpendicolare al **[piano, punto** ***P*****]**. Poi tracciamo una retta *s* passante per *P* e **[appartenente, non appartenente]** ad α.

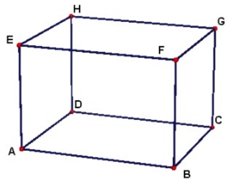
Lavoriamo insieme

Consideriamo il modello di spazio in figura, 

in cui ogni segmento rappresenta una retta e ogni quadrilatero un piano. Grazie ad essa vogliamo far vedere che per la relazione essere sghembe non vale la proprietà transitiva.

Cioè vogliamo far vedere che se *r* è sghemba con *s* e *s* è sghemba con *t*, non è detto che *r* e *t* siano sghembe. Nelle figure seguenti abbiamo le tre possibilità, *r* e *t* incidenti; *r* e *t* parallele; *r* e *t* sghembe.

Con riferimento al modello di spazio in figura  ***in cui ciascun segmento rappresenta una retta e ciascun quadrilatero un piano, rispondere alle seguenti richieste.***

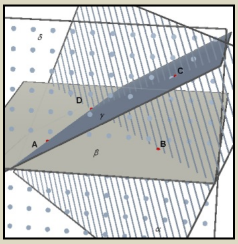
***Livello* 1**

4. Individuare tutte le rette sghembe con *AD*. [*HG*, *EF*, *GC*, *FB*]
5. Individuare tutte le rette parallele ad *AD*. [*EH*, FG, *BC*]
6. Individuare tutti i distinti piani contenenti la retta per *EF* e uno almeno degli altri vertici (anche i piani non segnati). Quanti ve ne sono? [3]
7. Individuare tutti i distinti piani paralleli a quello contenente i punti *A*, *C* e *D*, e contenenti uno almeno degli altri vertici (anche i piani non segnati). Quanti ve ne sono? [1]
8. Individuare una retta sghemba sia con *EF* che con *HD*. [*BC*]
9. Individuare una retta sghemba con *EF* e parallela ad *HD*. [*GC*]
10. Individuare una retta sghemba con *BC* e incidente ad *EF*. [*AE*]
11. Individuare una retta sghemba sia con *EA* che con *GC*. [Non ce ne sono]
12. Individuare una retta sghemba con *AD* e parallela a *FG*. [Non ce ne sono]
13. Individuare una retta sghemba con *FG* e incidente ad *AD*. [*AE*, *HD*, *AB*, *CD*]

Lavoriamo insieme

Dati 4 *punti nello spazio, quanti piani distinti contenenti ciascuno almeno tre dei punti dati, possono tracciarsi al massimo*?

Per comodità indichiamo con *A*, *B*, *C*, D i quattro punti. Noi sappiamo che 3 punti appartengono a uno stesso piano α, per esempio *A*, *B* e *C*. Se anche *D* appartiene ad α, vi è un solo piano che contiene i quattro punti. Se invece *D* non appartiene ad α, vi sarà un piano β su cui stanno *A*, *B* e *D*; un piano γ su cui giacciono *A*, *C* e *D* e un piano δ che contiene *B*, *C* e *D*. quindi in totale si hanno quattro piani distinti, come mostrato in figura.



***Livello* 2**

14. Dati 5 punti non allineati nello spazio, quanti piani distinti contenenti ciascuno almeno tre dei punti dati, possono tracciarsi al massimo? [10]
15. Dati 6 punti non allineati nello spazio, quanti piani distinti contenenti ciascuno almeno tre dei punti dati, possono tracciarsi al massimo? [20]
16. Dati 4 punti non allineati nello spazio, quanti piani distinti contenenti ciascuno almeno tre dei punti dati e tutti fra di loro paralleli, possono tracciarsi al massimo? [0]
17. Dati 6 punti non allineati nello spazio, quanti piani distinti contenenti ciascuno almeno tre dei punti dati e tutti fra di loro paralleli, possono tracciarsi al massimo? [2]
18. Due piani incidenti dividono lo spazio in 4 parti a due a due prive di punti comuni. Tre piani incidenti in un punto, in quante parti lo dividono? [8]
19. Tre piani con una retta in comune, in quante parti dividono lo spazio? [6]
20. Tre piani a due a due con una retta in comune, ma senza punti in comune tutti e tre, in quante parti dividono lo spazio? [8]
21. Due piani fra loro paralleli e un terzo che li incontra entrambi in una retta, in quante parti dividono lo spazio? [6]

***Livello* 3**

22. Quattro piani con una retta in comune, in quante parti dividono lo spazio? [8]
23. Quattro piani a due a due con una retta in comune, ma senza punti in comune tutti e quattro, in quante

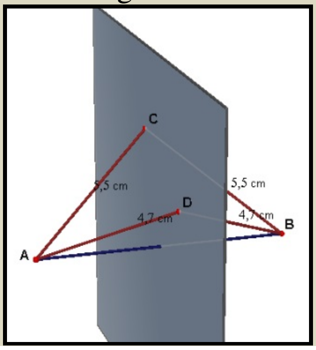
parti dividono lo spazio? [15]

24. Quattro piani di cui tre hanno a due a due con una retta in comune, ma senza punti in comune e il quarto parallelo a uno dei tre, in quante parti dividono lo spazio? [12]
25. Due piani fra loro paralleli e altri due fra loro paralleli, che incontrano gli altri due in una retta, in quante parti dividono lo spazio? [9]
26. Se nel quesito precedente la seconda coppia di piani incontra uno degli altri due piani in una stessa retta, la risposta varia? Giustificare. [No]

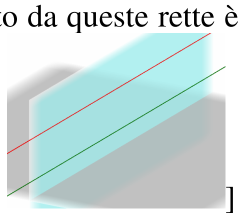
Lavoriamo insieme

Nel piano il luogo geometrico dei punti equidistanti da due punti è l'asse del segmento che ha per estremi i due punti, cioè la retta perpendicolare al detto segmento nel suo punto medio. E nello spazio?

Non è difficile capire che in questo caso il luogo è il cosiddetto piano assiale, ossia il piano perpendicolare al segmento nel suo punto medio, come mostrato in figura.



Livello 2

27. Nello spazio vale la proprietà transitiva del parallelismo fra rette? Giustificare la risposta. [Sì]
28. Nello spazio vale la proprietà transitiva del parallelismo fra piani? Giustificare la risposta. [Sì]
29. Se ad un piano α conduciamo due rette parallele *r* ed *s*, allora il piano β determinato da queste rette è sempre parallelo ad α? Giustificare la risposta. [No ]
30. Provare che due piani perpendicolari a una stessa retta sono fra loro paralleli.
31. Se i piani α e β sono fra di loro perpendicolari e i piani β e γ sono fra loro perpendicolari, anche i piani α e γ sono fra di loro perpendicolari? Giustificare la risposta. [No]
32. Se il piano α e la retta *r* sono perpendicolari e il piano α e il piano β sono fra loro paralleli, come sono fra di loro il piano β e la retta *r*? Giustificare la risposta. [Perpendicolari]
33. Se il piano α e la retta *r* sono perpendicolari e il piano α e il piano β sono fra loro perpendicolari, come sono fra di loro il piano β e la retta *r*? Giustificare la risposta. [Paralleli]
34. Provare che due piani distinti non possono avere in comune un numero finito di punti maggiore di 1.
35. Provare che esistono quattro punti non complanari.
36. Provare che esistono rette e piani che hanno un solo punto in comune.
37. Provare che esistono punti non appartenenti a un piano assegnato.
38. Se il piano α è parallelo al piano β e il piano β è parallelo al piano γ, anche i piani α e γ sono paralleli.
39. Dimostrare che se un piano α incontra due piani β e γ fra loro paralleli in due rette *r* ed *s* queste sono fra loro parallele.
40. Dimostrare che se *r* ed *s* sono due rette parallele, allora se *r* è parallela ad un piano α anche *s* lo è.
41. Dimostrare che se una retta *r* è parallela a due piani α e β che hanno in comune una retta intersezione *s*, allora *r* ed *s* sono parallele.
42. Dimostrare che se per un punto esterno ad un piano α conduciamo due rette *r* ed *s*, parallele ad α, il piano β determinato da *r* ed *s* è anch'esso parallelo ad α.
43. Dimostrare che se la retta *r* e la retta *s* sono fra di loro parallele ed un piano α che contiene *r* incontra

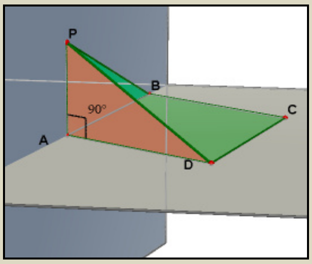
un piano β, che contiene *s*, in una terza retta *t*, allora *t* è parallela ad *r* ed *s*.

44. Dimostrare che se due rette *r* ed *s* sono parallele ad una terza retta *t* allora *r* ed *s* sono parallele fra loro.
45. Dimostrare che se una retta *r* incontra due piani incidenti α e β fuori dalla loro retta intersezione *s*, allora *r* ed *s* sono sghembe.
46. Se due piani α e β sono paralleli, è vero che ogni retta di α è parallela ad ogni retta di β? Giustificare la risposta. [No]

Lavoriamo insieme

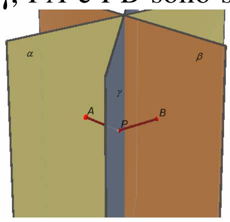
Questo problema è stato assegnato agli AHSME del 1996.

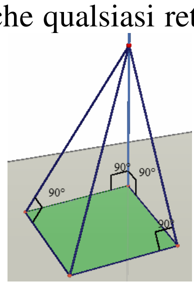
Il triangolo PAB e il quadrato ABCD appartengono a piani perpendicolari. Si ha $\overline{PA} = 3, \overline{PB} = 4$, *e* $\overline{AB} = 5$, *quanto misura PD*?

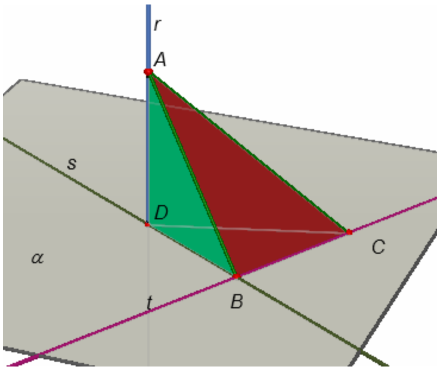
Consideriamo la figura seguente 

poiché *AD* è perpendicolare al piano di *PAB*, $P\hat{A}D = 90°$. Quindi *PAD* è un triangolo rettangolo, con $\overline{PA} = 3$ e $\overline{AD} = \overline{AB} = 5$. Perciò applicando il teorema di Pitagora a *APD*: $\overline{PD} = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$.

Livello 3

47. Sia data una retta *r* e un punto *P* fuori di essa, descrivere una procedura per determinare la retta passante per *P* e parallela a *r*.
48. Sia data una retta *r* e un punto *P* fuori di essa, descrivere una procedura per determinare la retta passante per *P* e perpendicolare a *r*.
49. Dati due piani incidenti, dimostrare che per un punto passa un unico piano perpendicolare a entrambi.
50. Dati due piani incidenti e un punto *P* non appartenente a nessuno dei due piani, quante rette parallele ai due piani possono condursi per *P*? Giustificare la risposta. [Una]
51. In due piani distinti siano posti due poligoni simili, dimostrare che le rette che congiungono vertici corrispondenti nella similitudine o sono parallele o passano tutte per uno stesso punto.
52. Provare che nello spazio il piano bisettore, che divide un angolo diedro in due parti uguali, è il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due piani distinti. In figura γ è il bisettore dell'angolo determinato da α e β, P è un punto a caso su γ, *PA* e *PB* sono segmenti di perpendicolare ai due piani. Si deve provare che i segmenti sono uguali. 

53. Dimostrare che date due rette sghembe e un punto non appartenente a nessuna di esse, per tale punto passa una sola retta complanare con entrambe le rette date.
54. Dimostrare che date tre rette a due a due fra loro sghembe esiste una sola retta complanare con due di esse e parallela alla terza.
55. Dato in un piano α un quadrato, tracciamo una perpendicolare *r* ad α per uno dei vertici del quadrato, provare che qualsiasi retta condotta da un punto qualunque di *r* non è perpendicolare agli altri lati del quadrato. 

56. In figura 

la retta r è perpendicolare al piano α, la retta s è perpendicolare alla retta t. Determinare le misure dei segmenti AB, AC e CD, sapendo che i segmenti AD, BD e BC misurano rispettivamente 3 cm, 4 cm e 3 cm. [5 cm; $\sqrt{34}$ cm; 5 cm]

L'angolo di Cabri3D

Cabri3D è, attualmente, il più diffuso software per studiare la geometria dello spazio. Cliccando su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%206/6-1-1.exe puoi vedere un'applicazione che descrive come usarlo. Mentre su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%206/6-1-1.cg3 c'è il relativo file Cabri3D.

L'angolo di Geogebra

A partire dalla versione 5, Geogebra tratta anche la geometria tridimensionale. Clicca su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%206/6-1-2.exe.
Il relativo file si scarica su
http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%206/6-1-2.ggb.

La sfida

1. In quante regioni viene diviso lo spazio da n piani a due a due incidenti? $\left[\dfrac{n^3+5n+6}{6}\right]$

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi

1. (Liceo scientifico PNI suppletiva 1993/94) È assegnato il triangolo rettangolo ABC, retto in B, tale che $\overline{AB}=4$ e $\overline{BC}=3$ e sia D il punto di BC per cui $\overline{BD}=1$. Si indichi con α il piano per B, perpendicolare alla retta CB, e con β il piano per D, parallelo ad α. Sia $\overline{P}$ un punto del piano β, P la proiezione di $\overline{P}$ da C sul piano α e P' il punto di intersezione di α con la parallela per $\overline{P}$ alla retta AC. Si dimostri che, se $\overline{S}$ è l'area di un triangolo descritto da $\overline{P}$ su β e S e S' sono le aree dei triangoli descritti rispettivamente da P e da P' su α, si ha $S' = 4/9S$.
2. (Istituto magistrale 1997/98) Da un punto P esterno ad un piano α si conduca la perpendicolare PA al piano e la perpendicolare PH ad una qualsiasi retta r del piano non passante per A, essendo H ed A punti del piano α. a) Dimostrare che la retta AH è perpendicolare alla retta r. b) Considerati sulla retta r due punti distinti B e C tali che $\overline{BH}=\overline{CH}=\overline{AH}$, dimostrare che il triangolo ABC è rettangolo. c) Sapendo che $\overline{PA}=a$, dove a è una lunghezza nota, e che il piano dei punti P, B, C forma un angolo di 30° col piano α, determinare la distanza del punto A dal piano dei punti P, B, C e la distanza del punto

B dal piano dei punti *P*, *A*, *C*. $\left[d\left(A,\Pi_{PBC}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}a; d\left(B,\Pi_{PAC}\right)=\sqrt{6}a\right]$

3. (Liceo scientifico 2002/03) Dopo aver fornito la definizione di "rette sghembe", si consideri la seguente proposizione: "Comunque si prendano nello spazio tre rette *x*, *y*, z, due a due distinte, se *x* ed *y* sono sghembe e, così pure, se sono sghembe *y* e z allora anche *x* e z sono sghembe". Dire se è vera o falsa e fornire un'esauriente spiegazione della risposta. [Falsa]
4. (Liceo scientifico 2010/2011) Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia Navale) Si dimostri che una qualunque retta *r* di un piano α ed una retta *s* non contenuta in α e che incontra α in un punto *P* non appartenente ad *r* sono sghembe.
2. (Accademia Navale) Si riconosca che tre rette aventi a due a due un punto in comune, o giacciono in un piano o passano per uno stesso punto.
3. (Accademia Navale) Dati una retta e un punto *P* non appartenente a essa, giustificare l'esistenza e l'unicità della retta per *P*, perpendicolare e incidente *r*.
4. (Accademia Navale) Giustificare che i piani passanti per un punto e perpendicolari a un piano dato costituiscono un fascio proprio e descrivere la retta sostegno.
5. (Accademia Navale) Date due rette sghembe *r* e *s* e un punto *P*, individuare una retta passante per *P* e complanare con *r* e *s*.
6. (Accademia Navale) Date una retta *r* e un punto *P* (non necessariamente appartenente a *r*) giustificare che esistono infinite rette per *P* che formano un angolo acuto con *r*. Quante sono complanari con *r*?
7. (Accademia Navale) Siano α e β due piani incidenti e sia *r* la loro retta intersezione. Si dimostri che fra le rette di α, quelle formanti angolo massimo con β sono le perpendicolari a *r*.
8. (Accademia Navale) Verificare che fra tutti i segmenti aventi un estremo assegnato e l'altro appartenente a un dato piano, ne esiste uno di lunghezza minima.
9. (Accademia Navale) Verificare che fra tutti i segmenti aventi gli estremi appartenenti a due piani paralleli, ne esistono di lunghezza minima.
10. (Accademia Navale) Individuare, mediante intersezioni con piani opportuni, il segmento di minima distanza tra due rette sghembe.
11. (Accademia Navale) Individuare tutte le rette equidistanti da due piani paralleli assegnati.
12. (Accademia Navale) È vero o falso che la distanza di un punto da un piano coincide con quella di tale punto da una qualsiasi retta contenuta nel piano? Giustificare la risposta.
13. (Accademia Navale) Individuare tutti i piani equidistanti da tre punti non allineati.

Per svolgere un Test finale di 10 quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_4_6.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

6	12	13
Tutte	Falso	I piani perpendicolari alla retta intersezione dei piani assiali dei segmenti che hanno per estremi due dei tre punti

6. Geometria dello spazio ambiente

6.2 Geometria dei poliedri

Prerequisiti

- Nozioni di geometria del piano
- Rette e piani nello spazio
- Parallelismo e perpendicolarità fra rette e fra piani
- Angoli diedri

Obiettivi

- Generalizzare il concetto di poligono nel piano
- Comprendere il concetto di poliedro regolare e semiregolare
- Acquisire il concetto di caratteristica di Eulero
- Affinare l'intuizione spaziale
- Abituarsi a pensare *tridimensionalmente*

Contenuti

- I poliedri
- I prismi
- Le piramidi e i tronchi di piramide
- La formula di Eulero
- I poliedri regolari
- I poliedri semiregolari

Parole Chiave

Duale – Faccia – Poliedro – Spigolo – Vertice

Richiamiamo le conoscenze

Definizione A

L'insieme formato dai punti del piano delimitati da segmenti a due a due consecutivi si dice **poligono,** i segmenti che lo compongono si chiamano **lati**, gli estremi dei lati si dicono **vertici**.

Definizione B

Una figura si dice **convessa** se ogniqualvolta scegliamo due suoi punti, l'intero segmento che li congiunge è formato solo da punti appartenenti alla figura stessa, diversamente la figura si dice **concava**.

Esempio A

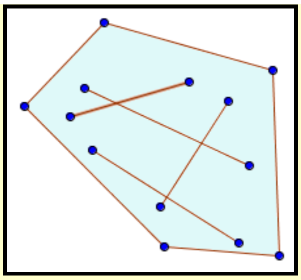


Figura convessa

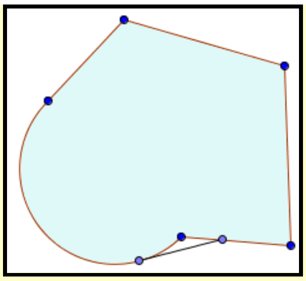


Figura concava

I poliedri

Il problema

Qual è il corrispondente spaziale del poligono nel piano?

Vogliamo trovare l'analogo spaziale del poligono. Ci rendiamo conto che esso deve essere *delimitato* non da segmenti ma da poligoni i quali abbiano a due a due dei lati in comune, intendendo con questo termine che i due segmenti debbono coincidere, così come i rispettivi estremi. Il minimo numero di poligoni per racchiudere una parte di spazio è evidentemente quattro, purché a tre a tre abbiano anche un vertice in comune.

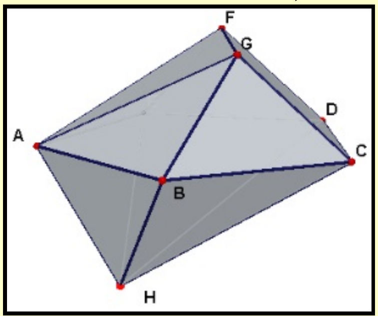
Definizione 1

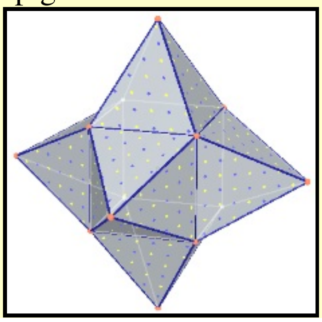
- Diciamo **poliedro** la parte di spazio delimitata da quattro o più poligoni aventi i lati a due a due **comuni**, in modo che non vi siano lati di alcun poligono che non siano comuni a un altro.
- I poligoni che lo generano si dicono **facce** del poliedro, i loro lati si dicono **spigoli** del poliedro, i loro vertici si dicono **vertici** del poliedro.

A seconda del numero delle sue facce, un poliedro sarà chiamato con un vocabolo formato da un prefisso riferito a tale numero e dal suffisso edro (tetraedro, pentaedro, esaedro, ...).

Esempio 1

Un esempio di poliedro convesso con 8 vertici, 9 facce e 15 spigoli e successivamente di poliedro concavo.



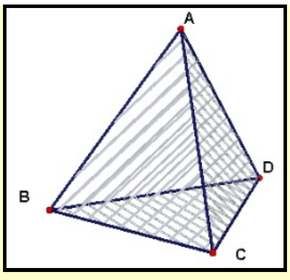


Osserviamo alcuni fatti, validi per ogni poliedro convesso.

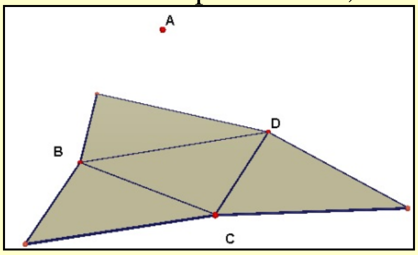
1. Ogni vertice è incontro di non meno di tre facce e di non meno di tre spigoli.
2. In ogni vertice si possono incontrare poligoni tali che la somma degli angoli interni che hanno quel tale vertice in comune sia inferiore a 360°.

L'ultimo fatto dipende dalla possibilità che abbiamo di costruire un poliedro convesso a partire dal suo cosiddetto sviluppo piano, ossia dalla figura piana che si ottiene "scollando" alcuni degli spigoli comuni del poliedro convesso in modo da "appiattire" il solido. Il poliedro minimo, quello cioè corrispondente al triangolo nel piano ha 4 facce, tutte triangolari e si chiama tetraedro.

Esempio 2



- Un tetraedro ha 4 facce, 4 vertici e 6 spigoli.
- In figura vi è lo sviluppo piano di un tetraedro. I vertici senza nome sono quelli che, nella *ricostruzione* del tetraedro, andranno ad unirsi nel vertice A, rimasto "sospeso in aria". Come si vede vi è la

possibilità di sollevare i detti punti dal piano, perché i tre angoli che essi determinano nei rispettivi triangoli sono acuti e quindi la loro somma non supererà 270°, a maggior ragione non raggiungerà i 

360°.

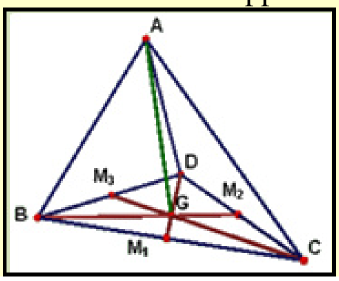
Il tetraedro è il corrispondente spaziale del triangolo, e in effetti verifica alcune proprietà simili a quelle del triangolo. Per esempio ha alcuni punti notevoli, di cui ne definiamo per il momento due, rimandando all'unità sulle sfere altri due.

Definizione 2

Diciamo **mediana** di un tetraedro riferita a un vertice e alla sua faccia opposta (cioè faccia non complanare con il vertice), il segmento che ha per estremi il vertice e il baricentro di tale faccia.

Esempio 3

In figura *AG* è la mediana relativa al vertice *A* e alla faccia opposta *BCD*.

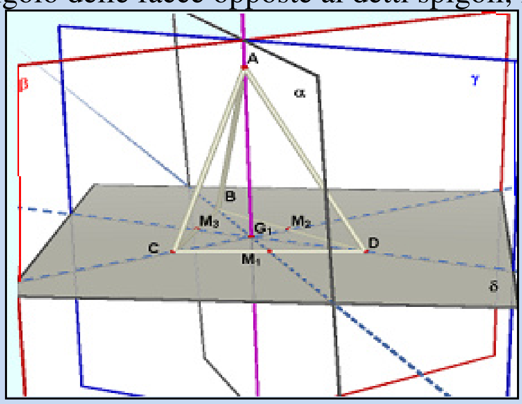


Valgono i seguenti risultati.

Teorema 1

Le mediane di un tetraedro si incontrano in un punto, che si chiama baricentro del tetraedro.

Dimostrazione

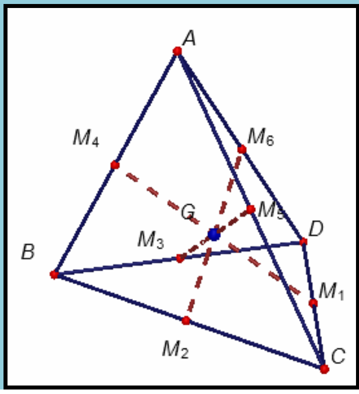
Consideriamo i tre piani in figura che contengono ciascuno uno degli spigoli *AB*, *AC* e *AD* e il punto medio di uno spigolo delle facce opposte ai detti spigoli, in modo che tutti questi punti medi appartengano alla stessa faccia. 

Così α è determinato da *AB* e M_1, β è determinato da *AC* e M_2 e γ è determinato da *AD* e M_3. Questi piani incontrano il piano determinato dal triangolo *BDC* ovviamente nelle mediane dello stesso triangolo, quindi, per quel che sappiamo sui triangoli determinano il baricentro G_1 di *BCD*. Quindi i tre piani hanno in comune la retta baricentrica AG_1. Ragionando allo stesso modo per le altre terne di piani, determineremo le altre rette baricentriche e quindi ovviamente queste rette essendo comuni a più piani devono incontrarsi in uno stesso punto, che è perciò il baricentro del tetraedro.

La precedente dimostrazione ha anche provato il seguente risultato

Corollario 1

I segmenti che congiungono i punti medi delle coppie di spigoli opposti di un tetraedro, si incontrano nel baricentro, che è punto medio dei detti segmenti.

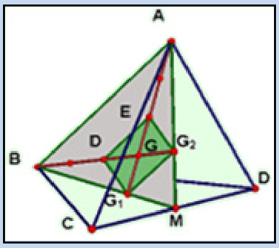


Esiste anche una proprietà del baricentro dei tetraedri simile a quella dei triangoli.

Teorema 2

Il baricentro di un tetraedro divide ciascuna mediana in modo che la parte che contiene il vertice è tripla dell'altra.

Dimostrazione

Consideriamo la figura seguente 

in cui G è il baricentro del tetraedro, AG_1 e BG_2 due sue mediane. Per le proprietà di G_1 e G_2 nel triangolo ABM, possiamo dire che essi dividono i rispettivi segmenti nel rapporto 1/2, quindi G_1G_2 è parallelo ad AB e misura 1/3 di esso. Adesso scegliamo i punti D ed E sulle mediane in modo che siano a un terzo delle stesse. Allora anche DE è parallelo ad AB e misura 1/3 di esso, cioè DEG_2G_1 è un parallelogramma. Pertanto G dimezza le diagonali. Ma allora G divide le mediane nel rapporto 1/3. Come volevasi dimostrare.

Invece in generale i tetraedri non hanno un ortocentro.

Definizione 3

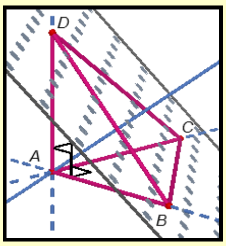
Dato un tetraedro le sue **altezze** sono le rette condotte da ogni vertice perpendicolarmente al piano che contiene la faccia opposta.

Definizione 4

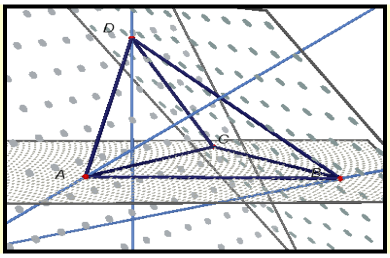
Un tetraedro le cui altezze si incontrano in un punto, si dice **ortocentrico**.

Esempio 4

- Un tetraedro che ha tre delle sue facce che sono triangoli rettangoli, e che si chiama per questo motivo *trirettangolo*, è ortocentrico di ortocentro il vertice trirettangolo A.



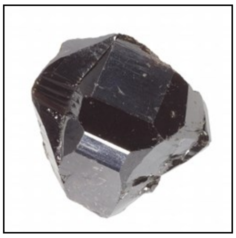
- Invece in generale un tetraedro qualsiasi non è ortocentrico, come mostrato nella successiva figura.



Cosa deve succedere affinché un tetraedro sia ortocentrico? Una semplice proprietà è la seguente.

Teorema 3

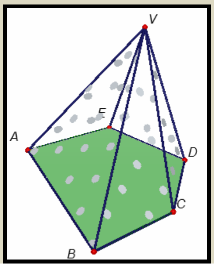
Un tetraedro è ortocentrico se e solo se il piede di un'altezza è ortocentro della faccia opposta.
Dimostrazione Omessa

I poliedri sono presenti in molti cristalli di minerali. Per esempio mostriamo di seguito la Cassiterite, cioè biossido di stagno (SnO_2)  e la Lantanite formata da Lantanio (La) e Neodinio (Nd), utilizzato per gli schermi a colori dei telefoni cellulari. 

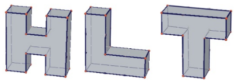
Verifiche

Lavoriamo insieme

Una faccia di un poliedro è pentagonale. Quante facce, minimo, può avere il poliedro?
Dobbiamo costruire almeno un triangolo su ciascuno dei lati del poligono e tutti i triangoli devono avere il terzo vertice in comune, quindi al minimo il poliedro ha sei facce, come mostrato in figura.



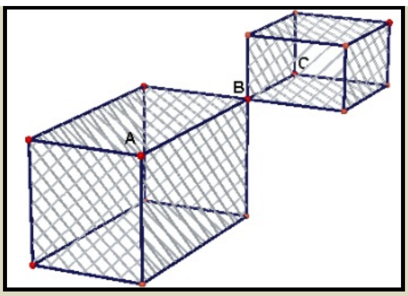
***Livello* 1**

1. Se sulla faccia di un tetraedro costruiamo un altro tetraedro con una faccia coincidente, il poliedro ottenuto è concavo o convesso? Giustificare la risposta. [Concavo]
2. Dati i seguenti poliedri, contare quante facce ha ciascuno di essi.  [14; 8; 10]
3. Con riferimento al precedente esercizio, contare quanti spigoli ha ciascun poliedro. [36; 18; 24]
4. Esistono poliedri concavi con quattro facce? Giustificare la risposta. [No]
5. Una faccia di un poliedro è esagonale. Quante facce, minimo, può avere il poliedro? [7]
6. Esistono poliedri che hanno tutte le facce triangolari meno una? Se la risposta è positiva, dette n le facce triangolari ($n \geq 4$), quanti lati ha il poligono non triangolo? [Sì; n]
7. Esistono poliedri che hanno tutte le facce quadrilatere meno una? Se la risposta è positiva, dette n le facce quadrilatere ($n \geq 4$), quanti lati ha il poligono non quadrilatera? [No]
8. Esistono poliedri che hanno tutte le facce quadrilatere meno due? Se la risposta è positiva, dette n le facce quadrilatere ($n \geq 3$), quanti lati hanno i poligoni non quadrilateri? [Sì; entrambi n]

***Livello* 2**

9. Un poliedro ha 5 facce, quante di esse possono essere triangolari? Quante quadrate? Quante pentagonali? [4; 3; 0]
10. Un poliedro ha una faccia pentagonale e una quadrata, quante facce minimo ha? E quanti lati hanno le rimanenti? [6; 3 triangoli e 1 quadrilatero]
11. Un poliedro ha una faccia esagonale e una pentagonale, quante facce minimo ha? E quanti lati hanno le rimanenti? [8; 5 triangoli e 1 quadrilatero]

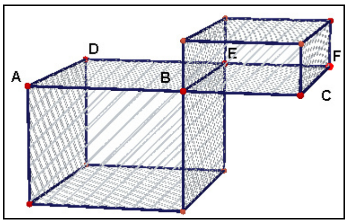
Lavoriamo insieme



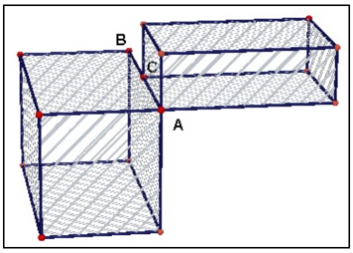
Nel poliedro in figura AC è un unico spigolo o deve contarsi per due?
Che cos'è uno spigolo? Il lato di una faccia, quindi AC non è lato di alcuna faccia, mentre AB e BC sono lati di due diverse facce, quindi AC deve contarsi per due spigoli: AB e BC.

***Livello* 2**

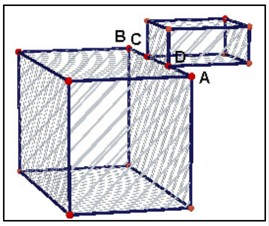
Nei seguenti quesiti le risposte vanno giustificate

12. Nel poliedro in figura *AC* è un unico spigolo o deve contarsi per due? 

[2]

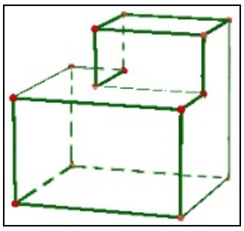
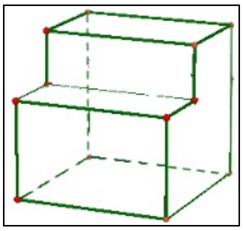
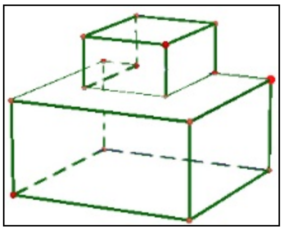
13. Nel poliedro in figura quali fra *AB*, *AC* e *BC* sono spigoli? 

[*AB* e *AC*]

14. Nel poliedro in figura quali fra *AB*, *AC*, *AD*, *BC*, *BD*, *CD* sono spigoli? 

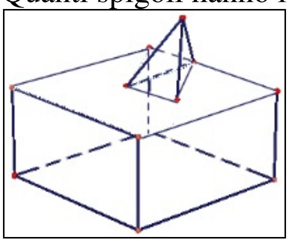
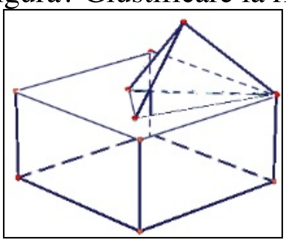
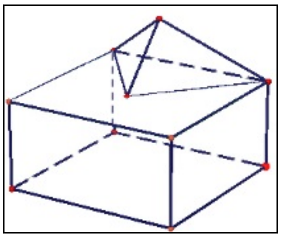
[*AB* e *CD*]

15. Quante facce hanno i poliedri in figura? Giustificare la risposta.

[9; 8; 10]

16. Quanti spigoli hanno i poliedri in figura? Giustificare la risposta.

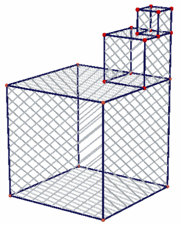
[19; 18; 17]

17. Possiamo costruire un tetraedro che ha tutte le facce che sono triangoli rettangoli? Isosceli? Equilateri? Ottusangoli? [Sì; Sì; Sì; Sì]

Livello 3

18. Un tetraedro ha tre facce che sono triangoli isosceli e una equilatera. Provare che il tetraedro è ortocentrico. Possiamo dire che le 4 altezze sono uguali? [No]

19. Con riferimento al precedente problema, se i lati obliqui dei triangoli isosceli misurano 17 *cm* e l'altezza del tetraedro riferita alla faccia equilatera è 15 *cm*, determinare la misura del lato del triangolo equilatero. $\left[8\cdot\sqrt{3}\,cm\right]$

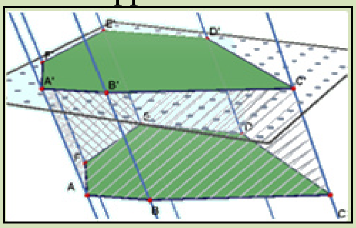
20. In figura abbiamo costruito un poliedro incollando 3 esaedri a facce quadrate in modo che a due abbiano un vertice in comune e due spigoli sovrapposti.  Quante facce, vertici e spigoli ha questo solido? [12; 20; 30]

21. Generalizziamo il problema precedente usando *n* cubetti, quante sono le facce, i vertici e gli spigoli? $[3n + 3; 6n + 2; 9n + 3]$

I prismi

Consideriamo dei particolari poliedri. Tracciamo un poligono convesso su un piano, e conduciamo da uno dei suoi vertici una retta a piacere che incontra un piano parallelo al dato. Quindi tracciamo le parallele a tale retta per gli altri vertici, determinando così sull'altro piano un poligono uguale al dato.

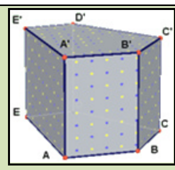
Definizione 5

- La parte di spazio delimitata da due poligoni uguali, posti su due piani fra loro paralleli e dai parallelogrammi aventi una coppia di lati opposti formata dalle coppie di lati che si corrispondono 

nell'isometria, si chiama **prisma**.
- I poligoni uguali e paralleli si chiamano **basi**, i parallelogrammi si chiamano **facce laterali**.

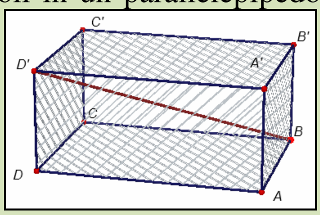
Quindi in generale un prisma ha un numero di facce pari a due in più del numero di lati dei poligoni di base. Vi sono ovviamente prismi particolari.

Definizione 6



- Un prisma le cui facce laterali sono rettangoli si chiama **prisma** retto.
- Gli spigoli delle facce rettangolari sono tutti fra loro uguali e ciascuno di essi si chiama **altezza** del prisma retto.
- Un prisma retto le cui basi sono poligoni regolari si dice **prisma regolare.**

Definizione 7

- Un prisma retto le cui basi sono rettangoli si chiama **parallelepipedo rettangolo**.
- I dodici spigoli di un parallelepipedo rettangolo si possono raggruppare in tre insiemi di segmenti a quattro a quattro uguali. Quindi in generale ci sono tre diverse misure di spigoli in un parallelepipedo 

rettangolo che si chiamano **dimensioni del parallelepipedo**.
- I segmenti che uniscono i vertici di facce opposte non appartenenti a una stessa faccia si chiamano **diagonali** del parallelepipedo.

Esempio 5

Facendo riferimento alla figura precedente, una diagonale del parallelepipedo è $D'B$, non lo sono $D'A$, $D'C$ e $D'D$, perché tutti questi segmenti appartengono a una faccia del parallelepipedo. Le altre diagonali sono perciò $C'A$, $B'D$ e $A'C$. Ovviamente tutte e quattro le diagonali sono segmenti fra loro uguali.

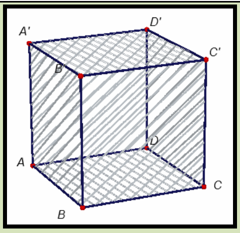
Teorema 4

Le diagonali di un parallelepipedo rettangolo si ottengono estraendo la radice quadrata della somma dei quadrati delle dimensioni. In formula $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Dimostrazione

Per esercizio. Basta applicare il teorema di Pitagora a due opportuni triangoli rettangoli.

Definizione 8



Un parallelepipedo rettangolo, le cui facce sono tutti quadrati si chiama **cubo**.

In un cubo tutte le dimensioni sono uguali, parleremo quindi semplicemente di *spigolo del cubo*.
I poliedri sono presenti in natura, come mostriamo in figura con dei perfetti cubi di pirite, in mostra al *National Museum of Scotland*, di Edimburgo.

La pirite è un minerale composto da disolfuro di ferro (FeS_2) che a causa del suo color oro era nota in passato come l'oro degli stolti.

Possiamo calcolare molto facilmente la superficie dei prismi retti, infatti le facce laterali sono tutte rettangoli, quindi abbiamo il seguente risultato.

Teorema 5

La superficie laterale di un prisma retto è misurata dal prodotto del perimetro di base per l'altezza. In formula $S = 2p \cdot h$.

Dimostrazione per esercizio.

Si hanno i seguenti immediati corollari.

Corollario 2

La superficie di un parallelepipedo rettangolo è data dal doppio della somma dei prodotti delle dimensioni a due a due. In formula indicate con a, b, c, le misura delle dimensioni si ha: $S = 2 \cdot (ab + ac + bc)$.

Corollario 3

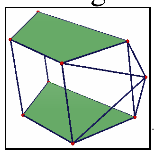
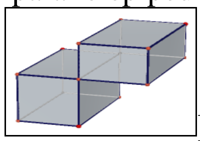
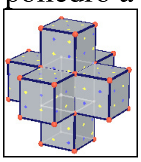
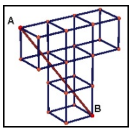
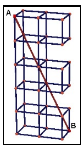
La superficie di un cubo è pari a sei volte quella di una sua faccia. In formula, indicata con ℓ la misura dello spigolo si ha: $S = 6 \cdot \ell^2$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Un prisma ha 2002 *vertici. Quanti spigoli ha*?
Un prisma è formato da due poligoni con lo stesso numero di vertici collegati fra loro da segmenti, quindi in generale un prisma le cui basi sono poligoni con n vertici hanno un totale di $2n$ vertici e di $3n$ spigoli. Pertanto per $n = 1001$, avremo 3003 spigoli.

Livello 1

1. È sufficiente dire che un prisma è un poliedro con due facce appartenenti a piani paralleli e uguali? Giustificare la risposta. [No; ]
2. Con riferimento al precedente quesito cosa dobbiamo aggiungere alla definizione perché sia corretta? [Che il poliedro sia convesso]
3. Possiamo dire che un parallelepipedo rettangolo è un poliedro le cui facce sono tutte rettangoli? Se la risposta è negativa fornire un esempio di poliedro con facce rettangolari che non è un parallelepipedo rettangolo. [No, ]
4. Con riferimento al precedente problema, possiamo dire che un parallelepipedo rettangolo è un poliedro convesso le cui facce sono tutte rettangoli? [Sì]
5. Da un panetto di burro a forma di parallelepipedo rettangolo tagliamo gli angoli in modo da ottenere delle sezioni triangolari, quante facce ha il solido così ottenuto? [14]
6. Con riferimento al precedente esercizio, quanti spigoli ha il solido ottenuto? [36]
7. Incolliamo 6 cubetti uguali, in modo da ottenere un poliedro a forma di croce, come mostrato in figura.  Quanti vertici ha? Quanti spigoli? Quante facce? [32; 60; 30]
8. In un parallelepipedo rettangolo uno spigolo misura 5 *cm* e la diagonale della faccia che ha per dimensioni gli altri due spigoli misura 12 *cm*, determinare la misura della diagonale. [13 *cm*]
9. In un parallelepipedo rettangolo la somma delle tre dimensioni è 21 cm e le dimensioni sono una doppia dell'altra, determinare tali dimensioni. [3 *cm*, 6 *cm*, 12 *cm*]
10. In un parallelepipedo rettangolo due dimensioni sono uguali e doppie della terza, la diagonale misura 6 *cm*. Determinare la misura delle dimensioni. [2 *cm*, 4 *cm*, 4 *cm*]
11. Incolliamo 5 cubetti di lato 1 *cm*, in modo da ottenere un poliedro a forma di T, come mostrato in figura.  Quanto misura la distanza *AB*? $\left[\sqrt{14}\,cm\right]$
12. Incolliamo 8 cubetti di lato 1 *cm*, in modo da ottenere un poliedro a forma di E, come mostrato in figura.  Quanto misura la distanza *AB*? $\left[\sqrt{30}\,cm\right]$
13. Calcolare la superficie di un solido formato da un cubo di lato lungo 8 *cm*, con un altro cubo incollato sulla sua base superiore le cui facce hanno la diagonale che misura 6 *cm*. [456 cm^2]
14. Calcolare la superficie di un solido formato da un cubo di lato che misura 4 *cm*, con un buco a forma di cubo di lato 2 *cm*. [112 cm^2]

15. In un parallelepipedo rettangolo, sommando a due a due le aree delle facce non parallele, si ottengono i numeri 27, 32, 35. Determinare la misura delle tre dimensioni. [3, 4, 5]

16. Un prisma equilatero retto a basi triangolari ha superficie $\left(18\cdot\sqrt{3}+108\right)cm^2$, determinare la misura del perimetro di base. [18 *cm*]

17. Un prisma regolare a basi triangolari ciascuna di area $4\cdot\sqrt{3}\,cm^2$, ha superficie $\left(8\cdot\sqrt{3}+93\right)cm^2$, determinare la misura della sua altezza. [7,75 *cm*]

18. Un prisma regolare a basi triangolari di perimetro 18 *cm*, ha l'altezza lunga 4 *cm*, determinare la misura della sua superficie. $\left[\left(18\cdot\sqrt{3}+72\right)cm^2\right]$

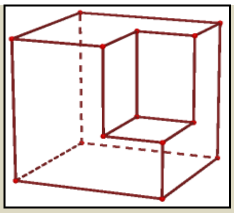
19. Un prisma retto ha per basi due triangoli rettangoli di cateti lunghi 3 *cm* e 4 *cm*, se l'altezza del prisma misura 6 *cm*., determinare la misura della superficie. [84 cm^2]

20. Un prisma retto ha per basi due rombi di lato lungo 3 *cm* e con un angolo interno di 60°. Se l'altezza del prisma è lunga 5 *cm*, determinare la sua superficie. $\left[\left(9\cdot\sqrt{3}+60\right)cm^2\right]$

21. Un prisma retto ha per basi due rombi di diagonali una doppia dell'altra ed altezza uguale alla diagonale maggiore, se la superficie del prisma è $\left(64\cdot\sqrt{5}+32\right)cm^2$, determinare la misura della diagonale minore. [4 *cm*]

22. Un prisma regolare a basi esagonali di lato lungo 4 *cm* ha altezza lunga 6 *cm*. Determinare la misura della sua superficie. $\left[48\cdot\left(3+\sqrt{3}\right)cm^2\right]$

Lavoriamo insieme

Determinare la misura della superficie del solido in figura,  *ottenuto eliminando un prisma rettangolare da un cubo di lato* 8 *m*.

Osserviamo che la scelta delle dimensioni del prisma da tagliare sono ininfluenti perché il solido ottenuto ha sempre la stessa superficie. Infatti essa non è altro che la superficie del cubo. Poiché ogni pezzo di superficie eliminata dal cubo viene compensata da una faccia del parallelepipedo rimasta. Pertanto la superficie è $6 \cdot 8^2\ m^2 = 6 \cdot 64\ m^2 = 384\ m^2$.

Livello 2

23. Un prisma regolare a basi esagonali, ha lo spigolo laterale lungo quanto una delle diagonali della base ed ha superficie 27 cm^2, determinare la misura dello spigolo. $\left[3\cdot\sqrt{\frac{4-\sqrt{3}}{13}}\,cm\right]$

24. In un parallelepipedo rettangolo le dimensioni sono nel rapporto 1:2:3, la diagonale misura $2\cdot\sqrt{7}\ cm$. Determinare la misura delle dimensioni. $\left[\sqrt{2}\ cm, 2\cdot\sqrt{2}\,cm, 3\cdot\sqrt{2}\,cm\right]$

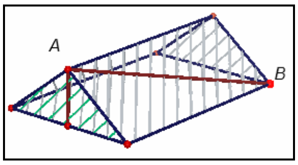
25. Un prisma equilatero regolare a basi triangolari, ha la superficie di $\left(12+2\cdot\sqrt{3}\right)cm^2$, quanto misura lo spigolo? [2 *cm*]

26. Dimostrare che in un parallelepipedo rettangolo le diagonali si incontrano nel loro punto medio.

27. In un parallelepipedo rettangolo le dimensioni sono una doppia dell'altra, se tutte le misure sono intere, la somma delle tre dimensioni è multipla di quale numero? [7]

28. Di un prisma retto a base un triangolo rettangolo di ipotenusa 29 *cm*, conosciamo la misura della superficie totale, 1680 cm^2 e sappiamo che l'altezza ha misura tripla del cateto minore della base. determinare il perimetro di base. [70 *cm*]

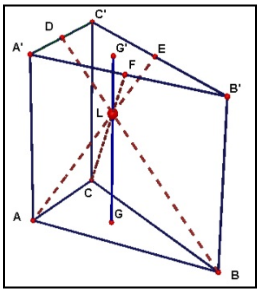
29. In un prisma regolare a basi triangolari, $\left(50\sqrt{3}+600\right)cm^2$ è la misura della superficie totale, $10\cdot\sqrt{5}\,cm$ quella della diagonale delle facce, inoltre l'altezza è *n* volte lo spigolo di base. Determinare *n*. [2]
30. Determinare una formula per il calcolo della superficie di un prisma regolare a basi triangolari, in funzione del lato ℓ della base e dell'altezza *h*. $\left[\ell\cdot\left(3\cdot h+\ell\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$
31. Determinare una formula per il calcolo della superficie di un prisma retto a base triangolo rettangolo, in funzione dei cateti *a*, *b*, della base e dell'altezza *h*. $\left[\left(a+b+\sqrt{a^2+b^2}\right)\cdot h+a\cdot b\right]$
32. Determinare una formula per il calcolo della superficie di un prisma retto a base esagono regolare, in funzione del lato ℓ della base e dell'altezza *h*. $\left[\ell\cdot\left(6h+3\ell\cdot\sqrt{3}\right)\right]$
33. In figura è mostrata una tenda canadese a forma di prisma retto. Se la porta d'ingresso ha la massima ampiezza di 4 *m*, la lunghezza della tenda è 6 *m* e l'altezza di 1,5 *m*. Quanto sarà lungo un cavo teso



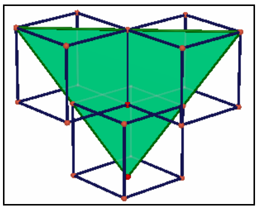
che congiunge i punti *A* e *B*? [6,5 *m*]

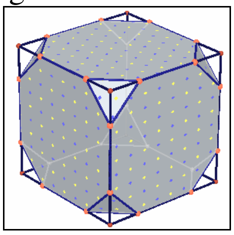
Livello 3

34. Con riferimento al precedente problema determinare una formula per trovare *AB* in funzione dell'ampiezza *a*, la lunghezza *l* e l'altezza *h*. $\left[\frac{\sqrt{4h^2+a^2+4l^2}}{2}\right]$
35. Dimostrare che in un prisma retto a base triangolare, i segmenti che uniscono un vertice di una base con il punto medio del lato opposto nell'altra base, si incontrano in uno stesso punto, che è allineato con il segmento che unisce i baricentri delle basi. In che modo il punto d'incontro divide il segmento



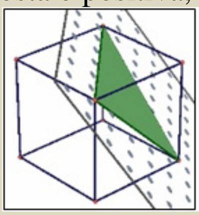
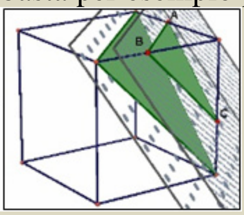
che ha per estremi i baricentri? [Nel rapporto 2:1]
36. Dimostrare che un prisma quadrangolare le cui facce opposte sono uguali è un parallelepipedo rettangolo.
37. Dimostrare che se in un prisma a base quadrangolare le diagonali si incontrano nel loro punto medio, allora il prisma è un parallelepipedo rettangolo.
38. Dimostrare che se in un prisma a base quadrangolare le diagonali sono uguali, allora il prisma è un parallelepipedo rettangolo.
39. Consideriamo due cubi identici di lato ℓ, su uno di questi sovrapponiamo un cubo di lato $\ell'<\ell$, sull'altro produciamo un buco a forma di cubo di lato $\ell'<\ell$. In che relazione sono le superfici dei due solidi? [Sono uguali]
40. Esprimere la misura della diagonale di un parallelepipedo rettangolo mediante la superficie *S* e la somma *s* delle 3 dimensioni. $\left[d=\sqrt{s^2-S}\right]$
41. La superficie di un parallelepipedo rettangolo è 1012 cm^2, la somma di tutti gli spigoli è 156 *cm*. Determinare la misura della diagonale. $\left[14\cdot\sqrt{119}\,cm\right]$
42. In figura abbiamo sovrapposto due cubetti uguali a un terzo cubetto, in modo che abbiano in comune un vertice che è centro di una faccia del terzo cubetto. Determinare la misura del perimetro e dell'area

del triangolo mostrato in funzione del lato L dei cubi.  $\left[2\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)L;2\sqrt{2}L^2\right]$

43. Dimostrare che un parallelepipedo con le diagonali uguali è rettangolo.
44. Dimostrare che in un parallelepipedo rettangolo, la somma dei quadrati delle misure degli spigoli è uguale alla somma dei quadrati delle diagonali.
45. Un problema di Dudeney. Una stanza a forma di parallelepipedo rettangolo ha dimensioni, in centimetri, 12 × 30 × 12. Un ragno è sulla linea centrale di una parete terminale a 1 *cm* dal soffitto. Una mosca è sulla linea centrale del muro terminale opposto, a 1 *cm* dal pavimento. Qual è la minima distanza che il ragno deve percorrere per raggiungere la mosca? *Suggerimento*: Espandere sul piano la superficie della stanza. [40 *cm*]
46. Su ogni spigolo di un cubo scegliamo i due punti che lo dividono nel rapporto 1/4. Consideriamo il poliedro che ha per vertici tali punti. Quante facce, spigoli e vertici ha? Se lo spigolo del cubo misura 5 *cm*, quanto misura la superficie del nuovo poliedro?  $\left[14;36;24;4\cdot\left(\sqrt{3}+51\right)cm^2\right]$

Lavoriamo insieme

Possiamo sezionare un cubo in modo da ottenere un triangolo equilatero?

La risposta è positiva, basta per esempio prendere il piano passante per 3 vertici del cubo, come mostrato in figura.   In effetti ogni altro piano parallelo a questo, che incontra solo tre spigoli del cubo ha per sezione un triangolo equilatero.

Livello 2

47. Considerando il piano che passa per 3 vertici di un cubo, che tipo di sezioni si possono ottenere? [Quadrato se i vertici sono di una stessa faccia; Rettangolo non quadrato altrimenti]
48. Considerando il piano che passa per i punti medi di due spigoli paralleli e di un terzo spigolo non parallelo ai precedenti due, che tipo di sezioni si possono ottenere? [Rettangolo non quadrato]
49. Sezioniamo un cubo con un piano, ottenendo una sezione formata da un poligono regolare di n lati. Per quali valori di n si ha soluzione? Giustificare la risposta. [n = 3, 4, 5, 6]
50. Come dobbiamo sezionare un cubo per ottenere sezioni a forma di quadrato? [Con un piano parallelo a una delle facce]

Livello 3

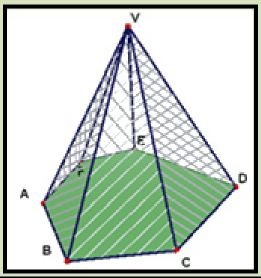
51. Come dobbiamo sezionare un cubo per ottenere sezioni a forma di trapezio isoscele? [Con un piano passante per due vertici opposti di una stessa faccia e secante altri due spigoli]
52. E a forma di trapezio rettangolo? [Non è possibile]
53. E a forma di esagono regolare? [Con un piano passante per i punti medi di 3 spigoli a due a due incidenti]

Le piramidi e i tronchi di piramide

Il tetraedro è non solo il poliedro più semplice, cioè con meno facce, ma anche il più semplice di una famiglia di poliedri particolari. Infatti se consideriamo un vertice qualsiasi del tetraedro e invece di unirlo con i vertici di un triangolo, non complanare con esso, lo uniamo con un poligono convesso di n lati ovviamente otterremo ancora un poliedro convesso.

Definizione 9

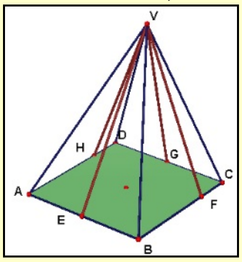
Il poliedro delimitato da un poligono convesso P e dai triangoli che hanno un lato in comune con P e un vertice V comune a tutti loro, ma esterno al piano del poligono, si chiama **piramide**. Il punto V si chiama **vertice della piramide**.



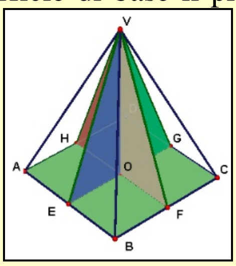
Per calcolare la superficie di una piramide qualsiasi non si riesce a ottenere sempre una semplice formula. Dobbiamo infatti sommare l'area del poligono di base con le aree dei triangoli laterali che in generale sono tutti privi di relazioni fra di loro. Tranne che riuscissimo a fare in modo che le altezze delle facce, relative agli spigoli di base risultino uguali. Vediamo se e quando ciò risulta possibile.

Esempio 6

Considerando una piramide a base quadrata, possiamo dire che in generale i triangoli di base hanno tutti la stessa altezza relativa agli spigoli di base? Ovviamente no, come mostrato nella figura seguente.



Ciò invece accadrebbe se il vertice appartenesse alla perpendicolare condotta al piano del quadrato per il suo centro, come mostrato di seguito. In questo caso infatti addirittura le quattro facce sono fra loro uguali, ma quel che più conta è che le altezze VE, VF, VG e VH sono fra loro uguali. E quindi la superficie della piramide si ottiene aggiungendo alla superficie di base il prodotto del valore comune di tale altezza per il



perimetro della base e dividendo per due.

La prima questione che dobbiamo risolvere è se quello che abbiamo visto accade solo quando i poligoni di base sono regolari, come il quadrato, o può succedere più in generale anche per poligoni non regolari. In effetti è sufficiente che l'altezza della piramide abbia il piede in un particolare punto della base, a partire dal quale possiamo tracciare perpendicolari ai lati che siano fra loro uguali. E questo succede solo se questo punto è il centro di una circonferenza inscritta nel poligono. Possiamo porre la seguente definizione.

Definizione 10

Una piramide la cui base è un poligono circoscrivibile a una circonferenza e la cui altezza ha per piede il centro della detta circonferenza si dice **piramide retta**.
Se la base di una piramide retta è un poligono regolare essa si dice **regolare**.

Per quanto detto vale il seguente risultato.

Teorema 6

Le altezze delle facce di una piramide retta relative agli spigoli di base della piramide, sono segmenti fra loro uguali.

Poniamo quindi la seguente definizione.

Definizione 11

Ciascuna delle altezze delle facce di una piramide retta relative agli spigoli di base, si chiama **apotema della piramide**.

A questo punto possiamo enunciare il risultato sul calcolo della superficie delle piramidi rette.

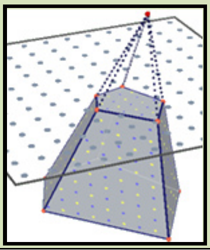
Teorema 7

La superficie di una piramide retta si ottiene aggiungendo alla superficie di base il semiprodotto del perimetro della base per l'apotema, in formula: $S = S_b + p \cdot a$.

A partire dalle piramidi si ottiene un altro interessante poliedro.

Definizione 12

Il solido ottenuto sezionando una piramide con un piano parallelo alla base ed eliminando la parte che contiene il vertice si chiama **tronco di piramide**.



Ovviamente sezionando una piramide retta il tronco sarà detto anch'esso retto e anche per esso abbiamo il concetto di apotema.

Definizione 13

Ciascuna delle altezze uguali delle facce trapezoidali di un tronco di piramide retto, si chiama **apotema del tronco**.

Anche in questo caso abbiamo un semplice risultato sul calcolo della superficie.

Teorema 8

La superficie di un tronco di piramide retta si ottiene aggiungendo alle superfici di base il semiprodotto della somma dei due perimetri della base per l'apotema, in formula: $S = S_b + S'_b + (p + p') \cdot a$.

Dimostrazione

Per esercizio, basta tenere conto del tipo di poligoni delle facce laterali.

Concludiamo il paragrafo osservando che una piramide costruita su un poligono di n vertici ha n + 1 vertici

(quelli della base e quello esterno che a questi si unisce), $n + 1$ facce (la base e gli n triangoli ottenuti unendo il vertice esterno con i vertici della base) e $2n$ spigoli (gli n della base e gli n che uniscono i detti vertici con il vertice esterno). Osserviamo che $(n + 1) + (n + 1) - 2n = 2$.
Allo stesso modo osserviamo che un generico prisma costruito su due poligoni di n vertici ciascuno, ha $2n$ vertici (quelli delle basi), $n + 2$ facce (le due basi e gli n parallelogrammi ottenuti unendo i vertici corrispondenti dei poligoni di base uguali) e $3n$ spigoli (n per ogni base e n che uniscono i vertici corrispondenti). Anche stavolta avremo: $2n + (n + 2) - 3n = 2$.
Questo fatto ci suggerisce di enunciare il seguente risultato che però non dimostriamo.

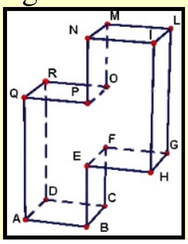
Teorema 9

In ogni poliedro convesso, i numeri: V dei suoi vertici, F delle sue facce e S dei suoi spigoli verificano la seguente uguaglianza: $V + F - S = 2$.
Dimostrazione Omessa

La precedente relazione è nota come **formula di Eulero**. Essa può essere valida anche per poliedri non convessi.

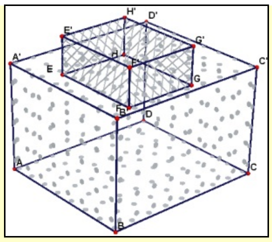
Esempio 7

Consideriamo il seguente poliedro non convesso che ha 16 vertici, 10 facce e 24 spigoli. Si ha: $16 + 10 - 24 = 2$; quindi anche se il poliedro non è convesso ugualmente verifica la formula di Eulero.



Ci sono però poliedri non convessi per cui non vale la Formula di Eulero.

Esempio 8



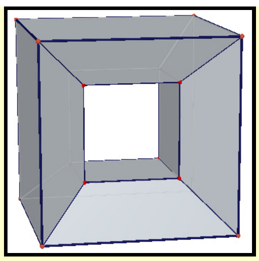
Per il seguente poliedro non convesso si ha: $V + F - S = 16 + 11 - 24 = 3$

Definizione 14

- Per ogni poliedro la quantità $V + F - S$ si dirà sua **caratteristica di Eulero**.
- I poliedri la cui caratteristica di Eulero è 2 si chiamano **euleriani**.

La caratteristica di Eulero è sempre un numero intero, che può essere anche nullo o negativo.

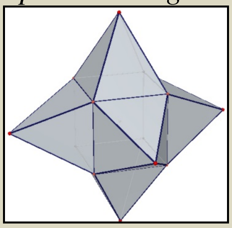
Esempio 9



Per il seguente poliedro si ha: $V + F - S = 16 + 16 - 32 = 0$.

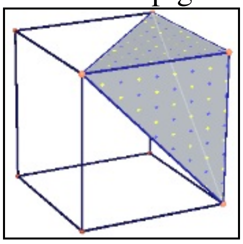
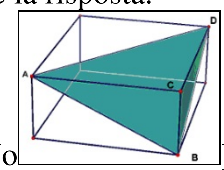
Verifiche

Lavoriamo insieme

Sulle facce di un cubo costruiamo delle piramidi regolari la cui altezza misura quanto lo spigolo del cubo, ottenendo il seguente poliedro stellato.  *Calcolare la misura della sua superficie.*

Essendo l'altezza lunga ℓ, l'apotema, usando il teorema di Pitagora, sarà lunga $\sqrt{\ell^2+\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}=\ell\cdot\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\ell\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}$. Quindi la superficie laterale di una piramide è $\cancel{2}\cdot\ell\cdot\ell\cdot\frac{\sqrt{5}}{\cancel{2}}=\sqrt{5}\cdot\ell^2$. Infine la superficie del poliedro stellato è $6\cdot\sqrt{5}\cdot\ell^2$.

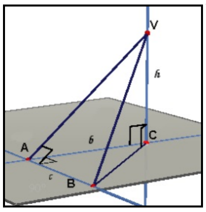
***Livello* 1**

1. Determinare la misura della superficie di una piramide regolare a base un triangolo equilatero, le cui facce sono tutti triangoli equilateri uguali, in funzione dello spigolo ℓ. $\left[\sqrt{3}\cdot\ell^2\right]$
2. In figura abbiamo un cubo e una piramide che viene chiamata tetraedro trirettangolo perché tre delle sue facce sono triangoli rettangoli. Che tipo di triangolo è la quarta faccia? Possiamo dire che la piramide è retta? Giustificare la risposta. Se lo spigolo del cubo è lungo 2 *m*, quanto misura la superficie del tetraedro?  $\left[\text{Equilatero; Sì; } 2\cdot\left(3+\sqrt{3}\right)m^2\right]$
3. Con riferimento al quesito precedente. Dividiamo a metà gli spigoli del cubo e tronchiamo il tetraedro trirettangolo. Quanto misura la superficie del tronco di piramide così ottenuto? $\left[\left(\frac{9+5\cdot\sqrt{3}}{2}\right)m^2\right]$
4. Ripetiamo in un parallelepipedo rettangolo la costruzione effettuata nel cubo per ottenere un tetraedro trirettangolo. Possiamo dire che in generale si ottiene una piramide retta? Giustificare la risposta. [No ]

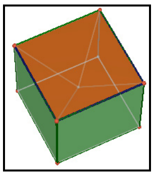
5. Quanti fra i sei spigoli di un tetraedro trirettangolo dobbiamo conoscere, al minimo, per potere determinare la misura della superficie? [3]
6. Con riferimento al precedente quesito, determinare la misura della superficie del tetraedro ottenuto a partire da un parallelepipedo di dimensioni 5, 12 e 35. Sugg: per determinare l'area della faccia non triangolo rettangolo usare la formula di Erone: $\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$. $\left[\frac{655+25\cdot\sqrt{337}}{2}\right]$
7. Il tronco di piramide ottenuto sezionando una piramide con un piano passante per il punto medio dell'altezza, ha superficie laterale metà di quello della piramide? Giustificare la risposta. [No]
8. Con riferimento al precedente quesito, in che rapporto sono invece le superfici laterali della piramide iniziale e del tronco da essa ottenuto? [4 : 3]
9. Nella dimostrazione del Teorema delle 3 perpendicolari abbiamo costruito una particolare piramide le

cui facce sono tutti triangoli rettangoli. Essa si chiama tetraedro quadrirettangolo. Quanti fra i sei spigoli dobbiamo conoscere, al minimo, per potere determinare la misura della superficie? [3]

10. Determinare la misura della superficie del tetraedro quadrirettangolo in figura, in cui $b = 21$, $c = 20$, $h = 28$. [1260]



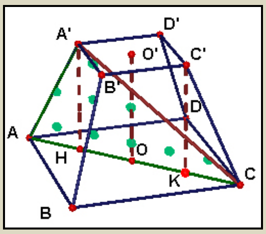
11. La scelta del punto V sulla retta per C perpendicolare al piano che contiene ABC incide sul fatto che il tetraedro sia quadrirettangolo? Giustificare la risposta. [No]
12. Con riferimento al problema 10, dopo avere dimostrato che anche se la retta perpendicolare è tracciata per B il tetraedro è quadrirettangolo, inalterati i dati determinare la superficie. $\left[42\cdot\sqrt{74}+896\right]$
13. Tronchiamo un tetraedro quadrirettangolo con $b = 6$, $c = 8$, $h = 10$ (vedi figura precedente) con un piano parallelo al piano determinato da A, B e C, in modo da dividere a metà h. Quanto misura la superficie del tronco così ottenuto? $\left[6\cdot\sqrt{34}+90\right]$
14. Su una faccia di un cubo di lato 1 m scaviamo una cavità a forma di piramide, la cui base coincide con la faccia del cubo e il cui vertice è il centro dello stesso cubo. Quanto misura la superficie laterale di tale piramide? $\left[\sqrt{2}\,m^2\right]$



15. Un tronco di piramide retta ha per base maggiore un triangolo rettangolo i cui cateti misurano 21 cm e 72 cm. Il perimetro della base minore misura 56 cm e l'altezza 18 cm. Determinare la misura dell'altezza della piramide dalla quale è stato ottenuto il tronco. [27 cm]
16. Trovare la misura della superficie laterale di un tronco di piramide regolare a basi quadrangolari di lati 80 cm e 10 cm e il cui spigolo misura 37 cm. [2160 cm^2]

Lavoriamo insieme

Determinare la misura delle diagonali di un tronco di piramide regolare a basi quadrangolari, sapendo che gli spigoli delle basi misurano 4 cm e 8 cm, mentre l'altezza misura $2\cdot\sqrt{7}\,cm$.

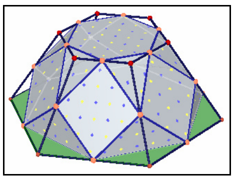


Consideriamo la figura. Ovviamente tutte le diagonali hanno la stessa misura. E altrettanto ovviamente l'altezza $A'H$ del triangolo $AA'C$ relativa al lato AC è lunga quanto l'altezza OO' del tronco. Stessa misura ha anche $C'K$, condotto perpendicolarmente ad AC da C'. Quindi: $\overline{HC}=\overline{AC}-\overline{AH}=\overline{AC}-\frac{\overline{AC}-\overline{A'C'}}{2}=\frac{\overline{AC}+\overline{A'C'}}{2}= =\frac{8\cdot\sqrt{2}-4\cdot\sqrt{2}}{2}cm=2\cdot\sqrt{2}\,cm$, e $\overline{A'C}=\sqrt{\overline{A'H}^2+\overline{HC}^2}= =\sqrt{\left(2\cdot\sqrt{7}\right)^2+\left(2\cdot\sqrt{2}\right)^2}\,cm=\sqrt{28+8}\,cm=6\,cm$.

Livello 2

17. Determinare l'altezza di una piramide regolare a base quadrata di lato $\sqrt{2}\,cm$ e di facce triangoli equilateri. [1 cm]
18. Determinare lo spigolo di base di una piramide regolare a base quadrata di lato e di facce triangoli e-

quilateri, la cui altezza è $\sqrt{8}\,cm$. [4 *cm*]

19. In un tronco di piramide retto a basi quadrate, lo spigolo laterale forma con la diagonale della base maggiore un angolo di 60° e misura $2\cdot\sqrt{2}\ cm$. Sapendo che la differenza delle aree delle due basi è 12 cm^2, determinare la misura della superficie del tronco. $\left[\left(20+12\cdot\sqrt{7}\right)cm^2\right]$
20. Il rapporto delle aree dei pentagoni di base di un tronco di piramide regolare è 16. Sapendo che la differenza dei lati delle due basi è 12 *cm* e che lo spigolo laterale forma con il lato della base maggiore un angolo di 60°, determinare la misura della superficie laterale. $\left[300\cdot\sqrt{3}\,cm^2\right]$
21. I lati delle basi di un tronco di piramide quadrangolare regolare hanno per somma 46 *cm* e lo spigolo laterale forma con il lato della base maggiore un angolo di 45°. Se la superficie di una faccia laterale misura 184 cm^2, determinare la misura dello spigolo laterale. $\left[32\cdot\sqrt{2}\,cm\right]$
22. La superficie totale di una piramide regolare quadrangolare misura 800 cm^2. Trovare la misura della superficie laterale sapendo che l'altezza misura 15 *cm*. [544 cm^2]
23. In una piramide quadrangolare regolare la superficie di base è 5/26 di quella laterale; sapendo che l'altezza è 24 *cm* trovare la misura dell'apotema. [26 *cm*]
24. Una piramide regolare a base quadrangolare ha l'altezza che misura quanto il semiperimetro di base. Quanto vale il rapporto fra l'apotema e lo spigolo di base? $\left[\frac{\sqrt{17}}{2}\right]$
25. Un rombo di diagonale minore lunga 20 *cm* è base di una piramide retta di altezza 15 *cm*. Sapendo che il raggio del cerchio inscritto nel rombo è lungo 8 *cm*, trovare la misura della superficie della piramide. $\left[\frac{2500}{3}cm^2\right]$
26. Il raggio del cerchio inscritto nel triangolo di base di una piramide retta regolare è lungo 28 *cm*; trovare la misura della superficie laterale della piramide sapendo che l'altezza è di 45 *cm*. $\left[4452\cdot\sqrt{3}\,cm^2\right]$
27. In una piramide regolare a base quadrata l'altezza è 56/65 dell'apotema; trovare la misura della superficie laterale sapendo che quella totale misura 3234 cm^2. [2145 cm^2]
28. Determinare l'area della superficie di un solido composto da un cubo di lato ℓ, sulla cui base maggiore è sovrapposto una piramide regolare a base triangolare che ha uno spigolo coincidente con uno del cubo. $\left[\left(6+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\ell^2\right]$
29. Consideriamo un cubo di lato 1 e il suo centro *O*. Determinare la misura della superficie laterale della piramide che ha per vertice *O* e per base una delle facce del cubo. $\left[\sqrt{2}\right]$
30. Calcolare l'altezza di una piramide a base quadrata di area 16 cm^2 e con uno spigolo di 5 *cm*. $\left[\sqrt{17}\,cm\right]$
31.  Sugli spigoli di un tronco di piramide regolare a basi esagonali scegliamo i punti medi, quindi uniamo tali punti ottenendo il poliedro convesso in figura. Quante facce, vertici e spigoli ha il poliedro? [20; 18; 36]
32. Sugli spigoli di un tronco di piramide regolare a basi quadrate scegliamo i 2 punti che li dividono nel rapporto 1/3, quindi uniamo tali punti ottenendo un poliedro convesso. Quante facce, vertici e spigoli ha? [14; 24; 36]

Livello 3

33. Uno spigolo di una piramide è perpendicolare alla base quadrata in un suo vertice, se il lato di base misura 3 e l'altezza 4, calcolare la misura della superficie totale. [26]
34. Dimostrare che in un tronco di piramide le basi sono poligoni simili, le cui aree stanno fra loro come i quadrati delle loro distanze dal vertice della piramide troncata.

35. Determinare una formula per il calcolo della superficie di un tetraedro trirettangolo ottenuto a partire da un cubo di spigolo ℓ. $\left[\frac{3+\sqrt{3}}{2}\cdot\ell^2\right]$

36. Determinare una relazione fra l'altezza *h* di un tetraedro trirettangolo a base un triangolo equilatero e lo spigolo della base ℓ. $\left[\ell=\sqrt{6}\cdot h\right]$

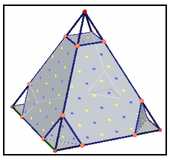
37. Determinare una formula per il calcolo della superficie di un tronco di tetraedro trirettangolo ottenuto tagliando a metà gli spigoli ℓ del cubo generatore del tetraedro. $\left[\left(\frac{9+5\cdot\sqrt{3}}{8}\right)\cdot\ell^2\right]$

38. Determinare la misura della superficie di un tetraedro quadrirettangolo in funzione degli spigoli *b*, *c* e *h* nella figura dell'esercizio 10. $\left[\frac{b\cdot c+b\cdot h+\sqrt{b^2+c^2}\cdot h+c\cdot\sqrt{b^2+h^2}}{2}\right]$

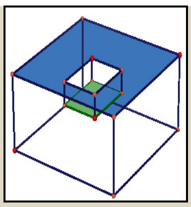
39. Determinare l'altezza di una piramide retta di base un quadrato di lato ℓ e di facce triangoli equilateri. $\left[\frac{\ell}{\sqrt{2}}\right]$

40. Determinare lo spigolo di base di una piramide retta di base un quadrato di lato e di facce triangoli equilateri, la cui altezza è *h*. $\left[\sqrt{2}\cdot h\right]$

41. Di un tronco di piramide a base quadrata conosciamo la misura dell'apotema, 41 *cm*, la differenza degli spigoli di base, 6 *cm*, e il rapporto di questi ultimi: $\frac{3}{4}$. Determinare la misura degli spigoli di base e dell'altezza. [18 *cm*; 24 *cm*; 40 *cm*]

42.  Sugli spigoli di una piramide retta a base quadrata scegliamo i punti che li dividono nel rapporto 1/4, quindi uniamo tali punti ottenendo il poliedro convesso in figura. Sapendo che il lato di base della piramide di partenza è uguale all'altezza e misura 8 *cm* vogliamo sapere: a) quante facce, vertici e spigoli ha il poliedro? b) quanto misura la sua area? $\left[10;16;24;\left(60+52\sqrt{5}+8\sqrt{2}\right)cm^2\right]$

Lavoriamo insieme

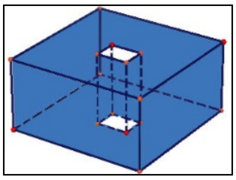
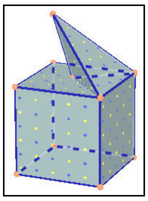
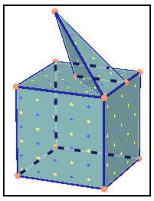
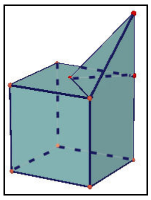
Calcolare la caratteristica di Eulero per il solido in figura,  *in cui abbiamo "scavato" una faccia di un parallelepipedo pieno, ottenendo un altro piccolo parallelepipedo.*
I vertici sono la somma dei vertici dei due parallelepipedi, cioè 16, le facce invece sono la somma delle facce dei due solidi diminuita di 1, perché il parallelepipedo piccolo è privo della faccia superiore, cioè 11. Gli spigoli sono somma degli spigoli dei due poliedri, cioè 24. Quindi la caratteristica è 16 + 11 – 24 = 3.

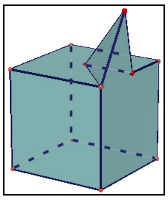
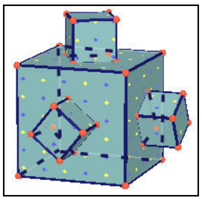
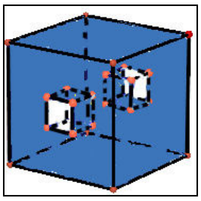
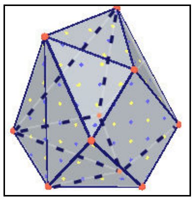
Calcolare la caratteristica di Eulero di ciascuno dei seguenti poliedri

Livello **1**

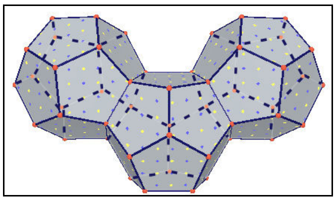
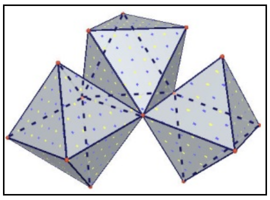
43. A forma di E ; A forma di F ; A forma di L ; A forma di H [2; 2 ; 2 ; 2]

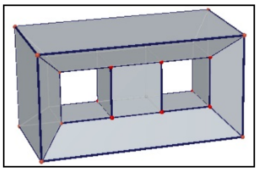
Nelle figure seguenti le parti bianche indicano che il poliedro è bucato

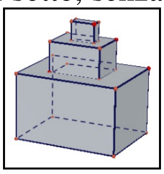
44.  ;  ;  ;  [2; 2; 3; 3]

45.  ;  ;  ;  [2; 5; 4; 2]

Livello 2

46.  ;  [2; 4]

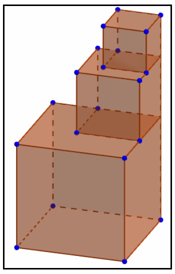
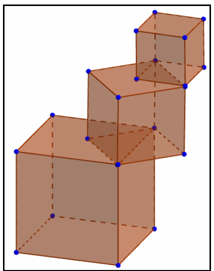
47. Poliedro "doppia cornice" in figura  [–2]

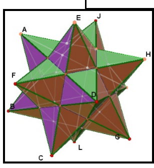
48. Poliedro ottenuto sovrapponendo 20 parallelepipedi rettangoli tutti di diverse dimensioni, in modo che la base di quello posto di sopra sia interna alla base di quello di sotto, senza che vi siano né vertici né spigoli in comune. In figura vi è il caso con 3 parallelepipedi.  [21]

Livello 3

49. Con riferimento al precedente quesito, sovrapponendo n parallelepipedi rettangoli. [$n + 1$]

50. Con riferimento alle figure seguenti in cui i cubetti sono in numero di n. [2; $2n$]

51. Poliedro stellato di Keplero mostrato in figura,  si tenga conto che i poligoni di uguale colore, come quello verde non sono considerati come 5 facce, ma come un'unica faccia, poiché giacciono sullo stesso piano. [–6]

I poliedri regolari

Il problema

Quando diremo regolare un poliedro?

Nella geometria del piano i poligoni regolari hanno un posto importante, vogliamo quindi definire i loro corrispondenti fra i poliedri. Dato che i poligoni regolari hanno lati e angoli uguali, dobbiamo fare in modo che i poliedri regolari abbiano uguali sia le facce sia gli angoli diedri.

Definizione 15

Un poliedro si dice **regolare** se
- le sue facce sono poligoni regolari tutti dello stesso tipo;
- in ogni suo vertice si incontrano lo stesso numero di facce.

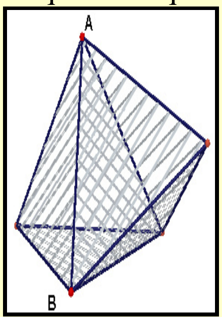
L'angolo storico

I poliedri regolari sono anche detti platonici, perché di essi si occupa il famoso filosofo greco Platone nel suo dialogo *Il Timeo*.

Non è necessario specificare che le facce siano poligoni fra loro uguali, dato che sono regolari.

Esempio 10

Il poliedro in figura non è regolare, nonostante tutte le sue facce siano triangoli equilateri uguali, perché nel vertice A si incontrano tre facce, mentre nel vertice B se ne incontrano 4. Quindi l'angolo diedro determinato dalle facce che si incontrano in A non è uguale a quello di quelle che si incontrano in B.



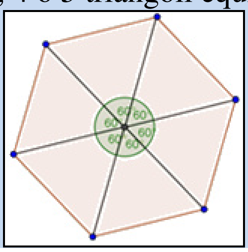
Sappiamo anche che i poligoni regolari sono infiniti, quindi pensiamo che accada lo stesso anche per i poliedri. Questa idea è sbagliata, come afferma il seguente risultato.

Teorema 10

Esistono solo 5 poliedri regolari.

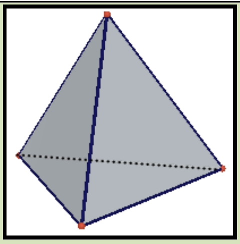
Dimostrazione

Tutto dipende dal fatto che in ogni vertice non si possono incontrare un numero qualsiasi di poligoni regolari, infatti per esempio 6 triangoli equilateri con un vertice in comune giacciono sullo stesso piano. Addirittura più di 6 triangoli equilateri si sovrappongono. Lo stesso accade per più di 3 quadrati; per più di 3 pentagoni regolari e per più di 2 poligoni regolari che hanno più di 5 lati. Quindi esistono sono poliedri regolari in cui in ogni vertice si incontrano 3, 4 o 5 triangoli equilateri, 3 quadrati o 3 pentagoni regolari.

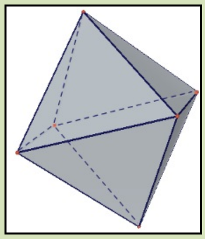


Il poliedro regolare con 3 facce triangolari che si incontrano in un vertice lo conosciamo già, perché è un tetraedro, che chiamiamo regolare. Così come conosciamo il poliedro a facce quadrate, che il cubo che possiamo chiamare anche esaedro regolare. Vediamo di conoscere anche gli altri tre poliedri regolari.

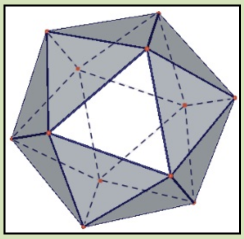
Definizione 16



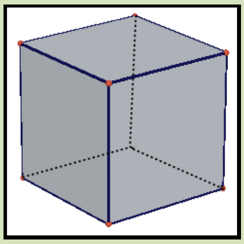
- Il poliedro regolare con 4 facce triangolari si chiama **tetraedro regolare**.



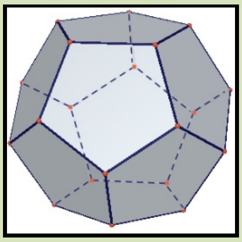
- Il poliedro regolare con 8 facce triangolari si chiama **ottaedro regolare**.



- Il poliedro regolare con 20 facce triangolari si chiama **icosaedro regolare**.



- Il poliedro regolare con 6 facce quadrate si chiama **cubo** o **esaedro regolare**



- Il poliedro regolare con 12 facce pentagonali si chiama **dodecaedro regolare**.

Nella tabella seguente riportiamo il numero di vertici, spigoli e facce dei poliedri regolari.

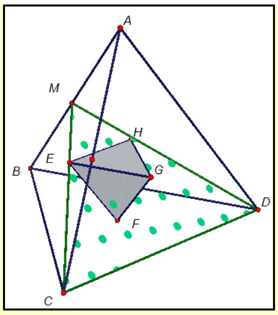
Poliedro regolare	N. Vertici	N. Facce	N. Spigoli
Tetraedro	4	4	6
Esaedro	8	6	12
Ottaedro	6	8	12
Dodecaedro	20	12	30
Icosaedro	12	20	30

Osserviamo che esaedro ed ottaedro, rispettivamente dodecaedro ed icosaedro, hanno il numero di vertici e di facce che si scambiano tra loro. Essendo tutti poliedri euleriani, ciò comporta che hanno lo stesso numero di spigoli.

Definizione 17

Il poliedro che ha per vertici i centri delle facce di un altro poliedro si dice **poliedro duale** di quello dato.

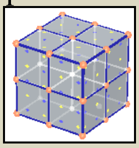
Esempio 11



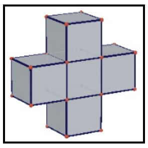
Quindi il tetraedro è duale di se stesso, cioè, come mostrato in figura, il poliedro che ha per vertici i centri delle facce di un tetraedro regolare è esso stesso un tetraedro regolare. La dimostrazione è semplice e tiene conto del fatto che per esempio il triangolo *CDM*, con *M* punto medio di *AB*, ha i punti *E* ed *H* che, per le proprietà dei baricentri, (dato che *E* è baricentro di *ABC* ed *H* di *ABD*), dividono i lati *CM* e *DM* nel rapporto 1: 2. Pertanto *EH* è parallelo a *CD* e misura 1/3 di esso. Con analoghe costruzioni si prova che anche gli altri spigoli *FE*, *GH* ed *HF* misurano quanto 1/3 dello spigolo del tetraedro *ABCD*. Quindi *EFGH* è equilatero. Ma i tetraedri equilateri, come i triangoli, sono regolari.

Verifiche

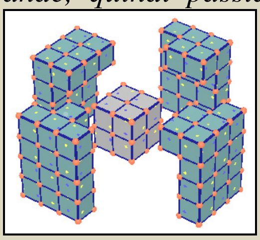
Lavoriamo insieme

Un cubo può essere formato incollando cubetti più piccoli, che devono essere in numero pari al cubo di un numero intero.
Quindi possiamo costruire un cubo a partire da 1, 8, 27, 64, …, n^3 cubetti più piccoli ma tutti uguali fra loro, come mostrato in figura per $n = 2$. 

Livello 1

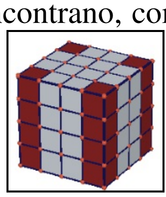
1. Quanti tagli sono necessari per dividere un cubo di lato 3 *cm* in 27 cubi di lato 1 *cm*? [6]
2. Con 100 cubetti possiamo costruire un cubo più grande? Giustificare la risposta. [No]
3. Con 125 cubetti possiamo costruire un cubo più grande? Giustificare la risposta. [Sì]
4. Un cubo è costruito usando 27 cubi più piccoli e tutti uguali fra loro. Sappiamo che tre delle facce del cubo grande sono verniciate di rosso e le altre tre di blu. Come minimo e come massimo quanti dei cubi piccoli presentano almeno due facce verniciate di colori diversi? [12; 16]
5. Consideriamo un cubo di superficie 120 cm^2 e lo dividiamo in 4 cubi uguali, quanto misura la superficie di ciascuno di questi cubi più piccoli? E se lo dividiamo in 10 cubi uguali? [30 cm^2; 12 cm^2]
6. Possiamo dire che se dividiamo un cubo di superficie n in k cubi uguali la superficie dei cubi più piccoli è n/k? Giustificare la risposta. [Sì]
7. In che rapporto sono le superfici di due cubi di spigolo uno doppio dell'altro? [4:1]
8. Su una faccia di un cubo di superficie 180 cm^2 incolliamo un cubo di spigolo metà di quello dato. Quanto misura la superficie di questo nuovo solido? [210 cm^2]
9. Una diagonale di un cubo misura 1, quanto misura la superficie del cubo? [2]
10. Calcolare il rapporto fra l'altezza e lo spigolo di un tetraedro regolare. $\left[\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right]$
11. Calcolare il rapporto fra l'altezza e lo spigolo di un ottaedro regolare. $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$
12. Calcolare la misura della superficie di un ottaedro regolare di spigolo 1. $\left[2\cdot\sqrt{3}\right]$
13. Calcolare la misura della superficie di un icosaedro regolare di spigolo 1. $\left[5\cdot\sqrt{3}\right]$
14. Con 5 cubetti uguali formiamo un solido a forma di croce come in figura, la cui superficie è di 22 m^2.  Quanto misura lo spigolo del cubetto iniziale? [1 *m*]

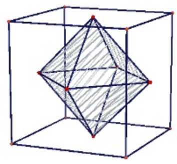
Lavoriamo insieme

Con 64 cubetti bianchi costruiamo un cubo più grande, quindi passiamo una mano di vernice sulla superficie del cubo grande come mostrato in figura.  *Quanti cubetti sono rimasti con tutte le facce bianche*?
I cubetti possono essere suddivisi in quelli *esterni*, che hanno almeno una faccia appartenente al cubo grande e sono ovviamente 16 per la faccia superiore e 16 per quella inferiore, ce ne sono poi altri 24 nelle rimanenti

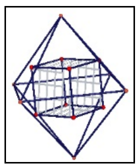
facce. Per un totale di 56. Quelli interni, rimasti bianchi, sono perciò 8, cioè tanti quanti sono necessari a formare un cubo di lato 2.

Livello 2

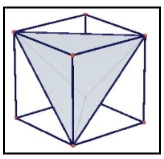
15. Con riferimento al problema del box Lavoriamo insieme, quanti dei cubetti iniziali hanno una sola faccia colorata? E quanti due? [24; 24]
16. Incolliamo fra loro 1000 cubi di lato 1, ottenendo un cubo di lato 10. Quanti dei cubi incollati sono *invisibili*? [512]
17. Su ciascuna faccia di un cubo di lato 3, viene prodotto un foro a forma cubica di lato 1, in posizione concentrica a ciascuna faccia. Determinare la superficie del poliedro così ottenuto. [78]
18. Con dei cubetti uguali vogliamo costruire un cubo più grande, che per ogni spigolo ha 6 dei cubetti. Poiché non ne abbiamo a sufficienza mettiamo solo i cubetti che si vedono. Di quanti ne abbiamo bisogno? [152]
19. Incolliamo fra loro 125 cubi a formare un cubo più grande, quindi coloriamo la superficie del cubo. Quanti dei 125 cubetti iniziali ha una sola faccia colorata? Quanti due facce? Quanti tre facce? Quanti quattro facce? [54; 36; 8; 0]
20. Aumentiamo ciascuno spigolo di un cubo del 50%, qual è l'aumento percentuale della superficie del cubo? [125%]
21. Sessantaquattro cubi di lato 1 *cm*, sono uniti a formare un cubo di lato 4 *cm*. Viene passata una mano di vernice a formare due strisce che si incontrano, come mostrato in figura. Quanti cubi non vengono  colorati per niente? [24]



22. Dimostrare che l'ottaedro duale del cubo è regolare.
23. Detti ℓ_6 la misura dello spigolo dell'esaedro e ℓ_8 quella dello spigolo dell'ottaedro suo duale, determinare $\frac{\ell_6}{\ell_8}$. $\left[\sqrt{2}\right]$



24. Dimostrare che l'esaedro duale dell'ottaedro è regolare.
25. Detti ℓ_8 la misura dello spigolo dell'ottaedro regolare e ℓ_6 quella dello spigolo dell'esaedro suo duale, determinare $\frac{\ell_6}{\ell_8}$. $\left[\frac{\sqrt{2}}{3}\right]$
26. Dimostrare che congiungendo quattro degli otto vertici di un cubo come mostrato in figura, si ottiene un tetraedro regolare. Quanto misura la superficie del tetraedro se il lato del cubo misura 1? $\left[2\cdot\sqrt{3}\right]$



27. Calcolare la superficie di un solido formato da un cubo di lato che misura *L*, con un altro cubo incollato sulla sua base superiore di spigolo *L*/2. [$7L^2$]
28. Calcolare la misura della superficie di un icosaedro regolare sapendo che il suo lato misura quanto la metà di quello di un cubo di superficie 600 cm^2. $\left[125\cdot\sqrt{3}\,cm^2\right]$
29. Calcolare la superficie di un solido formato da un cubo di lato che misura 5 *cm*, con una cavità a forma di cubo, con una faccia concentrica alla sua base superiore, in modo che la superficie rimasta della

faccia bucata misuri 10 cm^2. [210 cm^2]

30. Calcolare la superficie di un ottaedro regolare sapendo che il segmento che ha per estremi i vertici delle due piramidi che formano l'ottaedro misura 4 cm. $\left[16\cdot\sqrt{3}\ cm^2\right]$

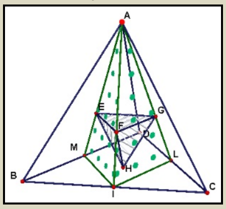
31. Determinare la misura della superficie di un ottaedro regolare il cui lato di base ha la stessa misura dell'altezza di un tronco di piramide retta a basi quadrate, la cui superficie laterale misura 120 cm^2 ed in cui il lato della base maggiore supera l'apotema (uguale al lato della base minore) di 2 cm. $\left[48\cdot\sqrt{3}\,cm^2\right]$

32. Determinare l'area della superficie di un solido composto da un cubo il cui lato misura 6 cm, sulla cui base maggiore è sovrapposto un tetraedro regolare con uno spigolo in comune con quello del cubo. $\left[\left(18\cdot\sqrt{3}+216\right)cm^2\right]$

33. Determinare la superficie di un tetraedro regolare, sapendo che il suo lato misura quanto la diagonale di un parallelepipedo rettangolo, di cui conosciamo la misura della superficie totale, 208 cm^2, e di uno spigolo, 4 cm, mentre le altre due dimensioni differiscono fra loro di 2 cm. $\left[116\cdot\sqrt{3}\,cm^2\right]$

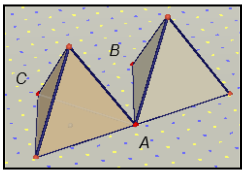
Lavoriamo insieme

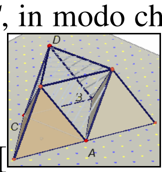
Abbiamo visto che unendo i centri delle facce di un tetraedro regolare si ottiene un altro tetraedro regolare, adesso vogliamo determinare in che relazione sono gli spigoli dei due tetraedri.

Ci riferiamo alla seguente figura. 

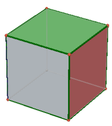
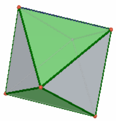
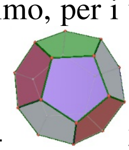
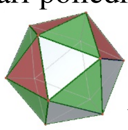
Detta ℓ la misura dello spigolo del tetraedro maggiore, abbiamo: $\overline{IL}=\frac{1}{2}\ell$. D'altro canto abbiamo anche $\overline{FG}=\frac{2}{3}\overline{IL}=\frac{1}{3}\ell$. Quindi il tetraedro più piccolo ha spigolo 1/3 di quello più grande.

Livello 3

34. Dimostrare che considerando due tetraedri regolari uguali che hanno un vertice in comune, come mostrato in figura, 

possiamo *inserire* un ottaedro regolare di faccia ABC, in modo che abbia altre tre facce complanari con quelle dei tetraedri. []

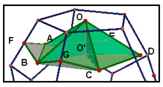
35. Vogliamo colorare le facce di un tetraedro regolare in modo che non vi siano due facce con uno spigolo in comune che abbiano lo stesso colore, quanti colori dobbiamo usare al minimo? [4]

36. Vogliamo colorare le facce di un poliedro regolare in modo che non vi siano due facce con uno spigolo in comune che abbiano lo stesso colore, quanti colori dobbiamo usare al minimo, per i vari poliedri regolari, escluso il tetraedro? [3  ; 2  4  3 ]

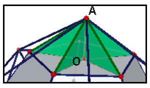
37. Incolliamo fra loro n^3 cubi a formare un cubo più grande, quindi coloriamo la superficie del cubo. Quanti dei cubetti iniziali hanno 0, 1, 2, 3, più di 3 facce colorate? [$(n-2)^3$; $6\cdot(n-2)^2$; $12\,(n-2)$;8;0]

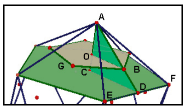
38. Su una faccia di un cubo di superficie n^2 cm^2 incolliamo un cubo di spigolo metà di quello dato, quan-

to misura la superficie di questo nuovo solido? $\left[\frac{7}{6}n^2\right]$

39. Dimostrare che l'icosaedro duale del dodecaedro regolare è anch'esso regolare. Suggerimento: usare la figura seguente: 

40. Detti ℓ_{12} la misura dello spigolo del dodecaedro regolare e ℓ_{20} quella dello spigolo dell'icosaedro suo duale, determinare $\frac{\ell_{20}}{\ell_{12}}$. Suggerimento: può servire sapere che, detto ℓ_5 il lato di un pentagono regolare e r il raggio della circonferenza a esso circoscritta, si ha: $r = \frac{\sqrt{50+10\cdot\sqrt{5}}}{10}\cdot\ell_5$. $\left[\frac{3\cdot\sqrt{5}+5}{10}\right]$

41. Dimostrare che il dodecaedro duale dell'icosaedro regolare è anch'esso regolare. Suggerimento: usare la figura seguente: 

42. Detti ℓ_{20} la misura dello spigolo dell'icosaedro regolare e ℓ_{12} quella dello spigolo del dodecaedro suo duale, determinare $\frac{\ell_{20}}{\ell_{12}}$. Suggerimento: usare la figura  $\left[\frac{3}{2}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)\right]$

I poliedri semiregolari

Vogliamo considerare adesso dei poliedri quasi regolari, di cui forniamo la definizione.

Definizione 18

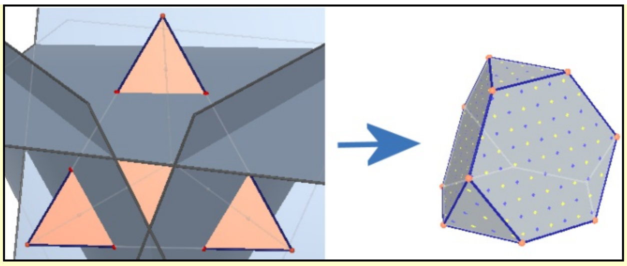
Un poliedro convesso non prisma si chiama **semiregolare** o **archimedeo** se
- le sue facce sono tutte poligoni regolari di almeno due tipi diversi;
- in ogni suo vertice si incontrano lo stesso numero e gli stessi tipi di facce.

L'angolo storico

I poliedri semiregolari sono anche detti archimedei, perché di essi si è occupato probabilmente per primo il famoso matematico e scienziato greco Archimede, in una sua opera andata perduta.

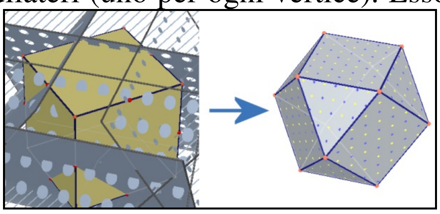
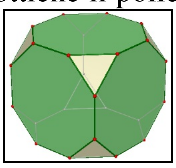
Poiché vogliamo trattare un numero finito di poliedri semiregolari, abbiamo escluso i prismi perché allora ogni prisma non cubo le cui facce laterali sono quadrati, sarebbe un poliedro archimedeo.

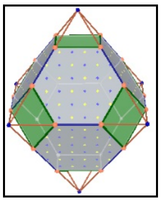
Esempio 12



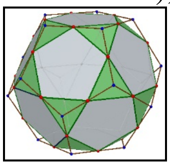
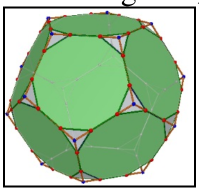
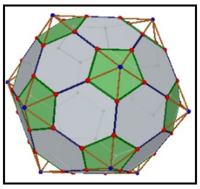
Consideriamo un tetraedro regolare e dividiamo ciascuno dei suoi spigoli in 3 parti uguali. Quindi, come mostrato in figura, sezioniamo con dei piani passanti per i dati punti. Come si vede abbiamo ottenuto un poliedro le cui facce sono 4 esagoni e 4 triangoli. Intanto vediamo che in ogni vertice si incontrano 2 esagoni e 1 triangolo, quindi gli angoloidi sono uguali. Adesso notiamo anche che entrambi i poligoni sono regolari, quindi il poliedro ottenuto è effettivamente semiregolare. Esso si chiama **tetraedro troncato**.

Questo metodo di troncatura degli spigoli dei poliedri regolari permette di ottenere altri poliedri semiregolari. Vediamoli.

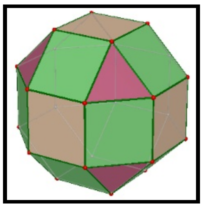
- Dividendo ciascuno spigolo di un cubo in due parti uguali, si ottiene un poliedro archimedeo con 14 facce, 6 quadrati (uno per ogni faccia del cubo troncato) e 8 triangoli equilateri (uno per ogni vertice). Esso  si chiama **cubottaedro**.
- Dividendo in 3 parti uguali, invece non si ottiene un poliedro semiregolare, come si vedrà nelle verifiche. Dividendo invece ogni lo spigolo in tre parti in modo da formare un ottagono regolare, si ottiene il polie-  dro archimedeo detto **cubo troncato** con 6 facce ottagonali e 8 triangolari.
- Dividendo in 3 parti uguali ogni spigolo di un ottaedro regolare si ottiene l'**ottaedro troncato** che ha 6



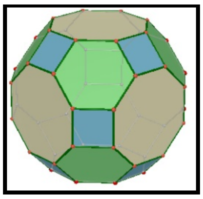
facce quadrate (una per ogni vertice dell'ottaedro) e 8 esagonali (una per ogni faccia).

- Dividendo gli spigoli di un dodecaedro regolare in due parti uguali, otteniamo un poliedro con 20 facce triangolari (una per ogni vertice del dodecaedro) e 12 pentagonali (una per ogni faccia del dodecaedro),  detto **icosidodecaedro**.
- Dividendo gli spigoli di un dodecaedro regolare in tre parti in modo che i decagoni sezione siano regolari,  si ottiene il **dodecaedro troncato**, formato da 20 facce triangolari e 12 decagonali.
- Dividendo in 3 parti uguali ciascuno spigolo di un icosaedro regolare otteniamo l'**icosaedro troncato**  formato da 12 facce pentagonali e 20 esagonali; è il pallone da calcio.

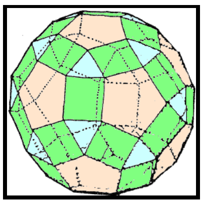
Abbiamo così costruito solo sette dei tredici poliedri archimedei. Ve ne sono altri sei che riportiamo di seguito



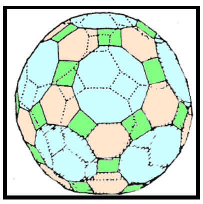
- Il **rombicubottaedro** ha 8 facce triangolari e 18 quadrate.



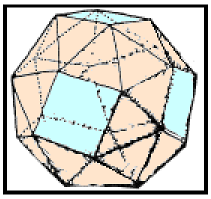
- Il **cubottaedro troncato** ha 6 facce ottagoni regolari, 8 esagoni regolari e 12 quadrati.



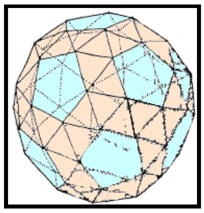
- Il **rombicosidodecaedro** ha 20 facce triangolari, 30 quadrate e 12 pentagonali.



- L'**icosidodecaedro troncato** ha 30 facce quadrate 20 esagonali e 12 decagonali.



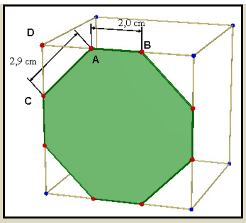
- Il **cubo camuso** ha 32 facce triangolari e 6 quadrate.



- Il **dodecaedro camuso** ha 80 facce triangolari e 12 pentagonali.

Verifiche

Lavoriamo insieme



Abbiamo visto che dividendo gli spigoli di un cubo in 3 *parti uguali non si ottiene un poliedro semiregolare perché non si ottengono sezioni regolari. Infatti né l'ottagono né i triangoli che vediamo in figura sono equilateri, poiché AC è ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele i cui cateti sono uguali ad AB. Come deve essere effettuata la troncatura*?

Perché essa funzioni dobbiamo dividere lo spigolo in modo che AB ed AC abbiano la stessa misura. Cioè, detta ℓ la misura dello spigolo del cubo, ed x la misura di AD deve essere $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 \Rightarrow 2x^2 = (\ell - 2x)^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2} \cdot \ell$. Ovviamente a noi interessa solo la soluzione minore di ℓ, cioè $x = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \cdot \ell$.

Livello 2

1. Dimostrare che dividendo ciascuno spigolo di un tetraedro regolare in due parti uguali si ottiene un tetraedro regolare.
2. Dimostrare che dividendo ciascuno spigolo di un ottaedro regolare in due parti uguali si ottiene il cubottaedro.
3. Dimostrare che dividendo gli spigoli di un dodecaedro regolare in tre parti uguali, non si ottiene un poliedro semiregolare.
4. Dimostrare che dividendo gli spigoli di un icosaedro regolare in due parti uguali, si ottiene l'icosidodecaedro.
5. Determinare una formula per il calcolo della superficie del tetraedro troncato in funzione della misura dello spigolo ℓ. $\left[7 \cdot \sqrt{3} \cdot \ell^2\right]$
6. Un tetraedro troncato ha superficie di $14 \cdot \sqrt{3}\, cm^2$, quanto misura il suo spigolo? $\left[\sqrt{2}\, cm\right]$
7. Determinare una formula per il calcolo della superficie dell'ottaedro troncato in funzione della misura dello spigolo ℓ. $\left[\left(12 \cdot \sqrt{3} + 6\right) \cdot \ell^2\right]$
8. Un ottaedro troncato ha superficie di $\left(1 + 2 \cdot \sqrt{3}\right) cm^2$, quanto misura lo spigolo? $\left[\frac{\sqrt{6}}{6} cm\right]$
9. Determinare una formula per il calcolo della superficie del cubottaedro in funzione della misura dello spigolo ℓ. $\left[\left(2 \cdot \sqrt{3} + 6\right) \cdot \ell^2\right]$
10. Un cubottaedro ha superficie di $\left(3 + \sqrt{3}\right) cm^2$, quanto misura il suo spigolo? $\left[\frac{\sqrt{2}}{2} cm\right]$
11. Determinare una formula per il calcolo della superficie del rombicubottaedro in funzione della misura dello spigolo ℓ. $\left[\left(2 \cdot \sqrt{3} + 18\right) \cdot \ell^2\right]$
12. Un rombicubottaedro ha superficie di $\left(27 + 3 \cdot \sqrt{3}\right) cm^2$, quanto misura lo spigolo? $\left[\frac{\sqrt{6}}{2} cm\right]$
13. Determinare una formula per il calcolo della superficie del cubo camuso in funzione della misura dello spigolo ℓ. $\left[\left(8 \cdot \sqrt{3} + 6\right) \cdot \ell^2\right]$

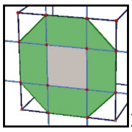
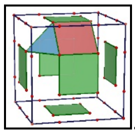
14. Un cubo camuso ha superficie di $\left(15+20\cdot\sqrt{3}\right)cm^2$, quanto misura il suo spigolo? $\left[\frac{\sqrt{10}}{2}cm\right]$

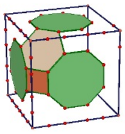
15. Determinare il rapporto fra la superficie del tetraedro troncato e quella del tetraedro da cui è stato ottenuto. $\left[\frac{8}{9}\right]$

16. Determinare il rapporto fra la superficie del cubottaedro e quella del cubo da cui è stato ottenuto. $\left[\frac{3+\sqrt{3}}{12}\right]$

17. Determinare il rapporto fra la superficie dell'ottaedro troncato e quella dell'ottaedro da cui è stato ottenuto. $\left[\frac{6+\sqrt{3}}{9}\right]$

Livello 3

18. Il rombicubottaedro si ottiene con la costruzione seguente: sulle facce di un cubo si costruisce un ottagono regolare (vedi figura) ; quindi si uniscono i vertici fra loro (vedi figura) . Dimostrare che i triangoli ottenuti sono equilateri e che gli altri quadrilateri sono quadrati.

19. Per il cubottaedro troncato si usa la costruzione mostrata in figura:  l'ottagono il quadrilatero e l'esagono costruiti devono essere regolari. Determinare quanto deve misurare il lato di tutti e tre i poligoni regolari, in funzione dello spigolo ℓ del cubo. $\left[\frac{2\cdot\sqrt{2}-1}{7}\cdot\ell\right]$

20. Sugli spigoli di un cubottaedro scegliamo i punti medi e costruiamo il poliedro che ha tali punti per vertici. Quanti vertici e spigoli ha? Quante facce e di che tipo sono?
[24; 48; 6 quadrati, 8 triangoli equilateri, 12 rettangoli]

L'angolo di Cabri3D

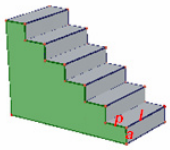
Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%206/6-2-1.exe vedi come Cabri3D tratta i poliedri regolari e no. Il relativo file lo scarichi su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%206/6-2-1.exe

L'angolo di Geogebra

Geogebra permette di lavorare anche su alcuni poliedri. Per vedere come basta cliccare su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%206/6-2-2.exe.
Il relativo file si scarica su
http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%206/6-2-2.ggb.

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

1. Un tetraedro con tutte le facce uguali si chiama *equifacciale*. Dimostrare che in un tetraedro equifacciale gli spigoli sono a due a due uguali, così come gli angoli diedri opposti.
2. Congiungendo opportunamente 4 dei vertici di un parallelepipedo rettangolo, costruire un tetraedro equifacciale.
3. Dimostrare che in un tetraedro equifacciale gli angoli piani che si incontrano in un vertice misurano quanto un angolo piatto.
4. Dimostrare che in un tetraedro equifacciale tutte le mediane sono uguali.
5. Dimostrare che in un tetraedro trirettangolo (cioè con tre facce che sono triangoli rettangoli), il doppio della somma dei quadrati degli spigoli concorrenti nell'angolo retto equivalgono ala somma dei quadrati dei rimanenti spigoli.
6. Dimostrare che in un tetraedro trirettangolo il quadrato dell'area della faccia che non è un triangolo rettangolo è somma dei quadrati delle rimanenti facce.
7. Dimostrare che in un tetraedro quadrirettangolo (che ha tutte le facce che sono triangoli rettangoli), la somma dei quadrati degli spigoli che concorrono nei due vertici che sono retti per due delle facce cui appartengono è costante.
8. Dimostrare che in un tetraedro quadrirettangolo la somma dei quadrati di due facce con uno spigolo in comune che non sia cateto per entrambe, è costante.
9. Dimostrare che le mediane di un tetraedro si incontrano in un punto, che si chiama baricentro del tetraedro, il quale divide ciascuna mediana in modo che la parte che contiene il vertice è tripla dell'altra.
10. Dimostrare che il quadrato della misura di una mediana di un tetraedro è pari alla differenza fra un terzo della somma dei quadrati degli spigoli che hanno in comune il vertice da cui è condotta la mediana e un nono della somma dei quadrati dei rimanenti spigoli.
11. Dimostrare che in un tetraedro trirettangolo le altezze condotte da ciascun vertice alla faccia opposta si incontrano nel vertice trirettangolo.
12. Dimostrare che dato un parallelepipedo rettangolo e un punto P qualsiasi, la somma dei quadrati delle distanze di P dai vertici del parallelepipedo è uguale alla somma dei quadrati delle tre dimensioni del parallelepipedo aumentata di 8 volte il quadrato della distanza di P dal centro del parallelepipedo.
13. La dimensione dell'elemento parallela al verso di una scala si chiama pedata, la distanza verticale tra due elementi successivi si chiama alzata. Una scala è formata da n gradini, con alzata a, pedata p e larghezza l. Esprimere la superficie visibile della scala.  $\left[n\cdot l(a+p)+\frac{n\cdot(n+1)}{2}\cdot a\cdot p\right]$
14. Dato un tetraedro trirettangolo $ABCD$, in cui solo la faccia ABD non è un triangolo rettangolo, determinare la misura della sua mediana AG, in termini delle misure a, b e c degli spigoli AC, BC e CD. $\left[\frac{\sqrt{9a^2+b^2+c^2}}{3}\right]$
15. Su ogni spigolo di un cubo scegliamo i due punti che lo dividono nel rapporto $1/n$. Consideriamo il poliedro che ha per vertici tali punti. Se lo spigolo del cubo misura 1, quanto misura la superficie del nuovo poliedro? $\left[6+2\cdot\frac{2\sqrt{3}-1}{n^2}\right]$
16. Sugli spigoli di una piramide retta a base quadrata scegliamo i punti che li dividono nel rapporto $1/n$, quindi uniamo tali punti ottenendo un poliedro convesso. Sapendo che il lato di base della piramide di partenza è uguale all'altezza e misura 1, quanto misura la sua area? $\left[\frac{2\sqrt{2}-1-3\sqrt{5}}{n^2}+1+\sqrt{5}\right]$

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi

1. (Liceo scientifico 1993/94) Una piramide ha per base il triangolo *ABC*, isoscele e rettangolo in *A*, e ha per altezza il segmento *AV*. Inoltre la faccia *VBC* forma un angolo di 45° col piano della base e lo spigolo *VB* è lungo $2h \cdot \sqrt{3}$, dove *h* è una lunghezza nota. Calcolare la distanza del vertice *A* dal piano della faccia *VBC* e trovare per quale valore di *h* tale distanza vale $4 \cdot \sqrt{2}$. [$h = 4$]
2. (Istituto magistrale 1996/97) È assegnato il tetraedro regolare di vertici *A*, *B*, *C*, *D* e di spigolo lungo *s*. a) Dopo aver dato sufficiente spiegazione della costruzione geometrica del piano α, condotto per il punto *D* perpendicolarmente alla retta dello spigolo *AB*, calcolare l'area della sezione *S*' di α con il tetraedro e la distanza del punto *A* dal piano α. b) Chiamati *X*, *Y*, *Z*, *T* i punti medi rispettivamente degli spigoli *AC*, *BC*, *BD*, *AD*, dimostrare che la figura *XYZT* è un parallelogrammo. c) (facoltativo) Dimostrare che il parallelogrammo *XYZT* è un quadrato. $\left[a)\ \dfrac{s^2 \cdot \sqrt{2}}{4}; \dfrac{s}{2}\right]$
3. (Liceo scientifico PNI 1998/99) In un piano α è assegnato il triangolo *ABC*, retto in *B*, i cui cateti *AB* e *BC* misurano rispettivamente 4 e 3. Si conduca per il punto *A* la perpendicolare al piano α e sia *V* un punto di questa per cui $\overline{VA} = \overline{AB}$. Il candidato a) dimostri, geometricamente o algebricamente, che, come tutte le altre facce del tetraedro *VABC*, anche la faccia *VBC* è un triangolo rettangolo, il cui angolo retto è $V\hat{B}C$; b) calcoli la superficie totale del tetraedro. $\left[6 \cdot \left(4 + \sqrt{2}\right)\right]$
4. (Liceo scientifico 2000/2001) Si consideri il cubo di spigoli *AA′*, *BB′*, *CC′*, *DD′*, in cui due facce opposte sono i quadrati *ABCD* e *A′B′C′D′*. Sia E il punto medio dello spigolo *AB*. I piani *ACC′A′* e *D′DE* dividono il cubo in quattro parti. Dimostrare che la parte più estesa è il quintuplo di quella meno estesa.
5. (Liceo scientifico 2002/2003) Un piano interseca tutti gli spigoli laterali di una piramide quadrangolare regolare: descrivere le caratteristiche dei possibili quadrilateri sezione a seconda della posizione del piano rispetto alla piramide. [Quadrilatero convesso che può diventare un quadrato, un trapezio isoscele o un *aquilone* ossia un quadrilatero con i lati a due a due paralleli ma non uguali]

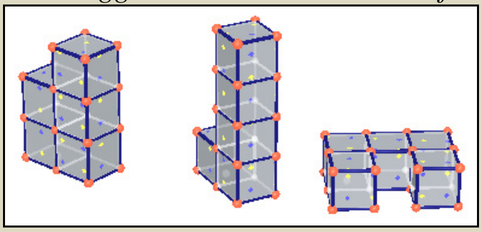
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.

AHSME = Annual High School Mathematics Examination
HSMC = A&M University High School Mathematics Contest
MT = Mathematics Teacher, rivista della NCTM
RICE = Rice University Mathematics Tournament
AMC = American Mathematical Contest
K = Kangourou
NC = State Matematical Finals of North Carolina

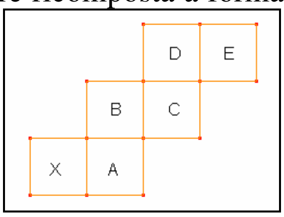
Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere il seguente quesito assegnato ai giochi organizzati dalla Rice University nel 2008.
Qual è la più piccola area possibile di un oggetto costruito unendo le facce di 5 *cubi di spigolo lungo uno*?

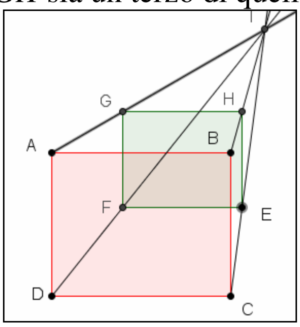


Possiamo unire i cubi in diversi modi, vediamo qualche esempio nelle figure seguenti. Ovviamente le superfici non sono uguali, ma si ottengono togliendo dalla somma di quelle di tutte le facce dei 5 cubi staccati, cioè di 30 facce, quelle facce che sono in comune. Così nel primo caso avremo una superficie pari a 30 – 14 = 16 facce, nel secondo caso 30 – 8 = 22 facce e nel terzo 30 – 10 = 20 facce. Non è difficile capire che quest'ultimo caso è quello che ci interessa, dato che non è possibile avere meno facce in comune.

1. (AHSME 1985) Un cubo di legno è formato da n^3 cubetti bianchi incollati insieme. Coloriamo di rosso la superficie esterna del cubo maggiore e poi separiamo di nuovo i cubetti. Se i cubetti che hanno rossa una sola faccia è uguale al numero di cubetti rimasti tutti bianchi, quanti sono i cubetti? [8]
2. (AHSME 1988) I sei spigoli del tetraedro *ABCD* misurano 7, 13, 18, 27, 36 e 41. Determinare la misura di *CD* sapendo che $\overline{AB} = 41$. [13]
3. (AHSME 1993) Quale dei seguenti insiemi non può costituire l'insieme delle misure delle diagonali delle facce di un parallelepipedo rettangolo? [B)]
   A) {4, 5, 6} B) {4, 5, 7} C) {4, 6, 7} D) {5, 6, 7} E) {5, 7, 8}
4. (AHSME 1995) Un cubo è formato da 27 cubetti più piccoli e uguali fra loro. Un piano è condotto perpendicolarmente a una delle diagonali interne del cubo bisecandola. Quanti sono i cubetti incontrati dal piano? [19]
5. (AHSME 1995) La figura mostrata può essere ricomposta a forma di cubo. Nel cubo risultante, quale

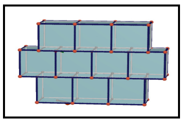


   delle lettere è opposta alla faccia con la X? [C]
6. (MT1995) In figura, *ABCD* è un rettangolo su un piano parallelo al rettangolo *EFGH*. Se *AI* = 100, trovare *AE* in modo che l'area di *EFGH* sia un terzo di quella di *ABCD*. [≈ 42,3]



7. (AHSME 1996) La somma delle lunghezze dei 12 spigoli di un parallelepipedo rettangolo è 140, e la distanza da un vertice al vertice più lontano è 21. Calcolare la superficie totale del parallelepipedo. [784]
8. (AHSME 1998) Un cubo di lato 9 è formato da 27 cubi di lato 3. Il cubo grande viene 'forato' nel mo-

do seguente. Prima sono eliminati i 6 cubi di lato 3 che formano il centro di ogni faccia, così come il cubo, sempre di lato 3, centro del cubo. Poi ognuno dei 20 cubi di lato 3 rimasti è "forato" allo stesso modo, ovviamente con cubi di lato 1. Quanto vale l'area del solido ottenuto? [1056]

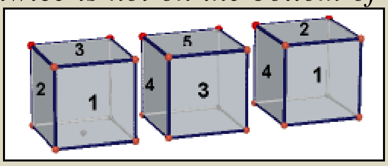
9. (AMC 2001) Un insetto vive sulla superficie di un tetraedro regolare di spigolo lungo 1. Esso vuole viaggiare sulla superficie del tetraedro dal punto medio di uno spigolo al punto medio dello spigolo opposto. Qual è la lunghezza del cammino più corto? (Nota: due spigoli sono opposti se non hanno estremi in comune) [1]
10. (HSMC 2006) Dieci cubi di spigolo unitari sono incollati come mostrato in figura. Quanto vale l'area del solido così ottenuto?  [34]
11. (HSMC 2007) Il coperchio di una scatola ha area 120, le facce laterali hanno aree rispettive 96 e 80. determinare l'altezza della scatola. [8]
12. (NC 2007) Quante facce ha un poliedro convesso con 18 vertici e 32 spigoli? [16]
13. (K2012) Nello spazio dotato di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale *Oxyz*, tre vertici di un cubo sono i punti P ≡ (3; 4; 1), Q ≡ (5; 2; 9) e R ≡ (1; 6; 5). Qual è il centro del cubo? [(4; 3; 5)]

Questions in English

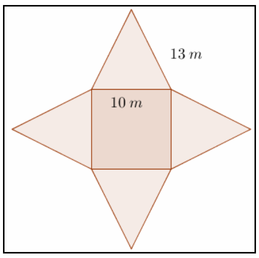
Working together

This is a question assigned at HSMC in 2006.

The figure below shows three views of the same numbered cube. One number actually occurs twice on the cube. Also, the number that appears twice is not on the bottom of any of the views. What number appears twice?



Assume face 3 is unique. It borders faces 1, 2, 4 and 5. Picture three rotates to picture one putting 4 on the bottom and 3 on top. So 4 is unique. Our assumption that 3 is unique puts faces 4 and 5 on the back and right side of picture one. But 4 is unique and is the bottom side of figure one. This contradiction implies 3 is not unique.

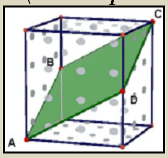
14. (AHSME 1980) Four of the eight vertices of a cube are the vertices of a regular tetrahedron. Find the ratio of the surface area of the cube to the surface area of the tetrahedron. $\left[\sqrt{3}\right]$
15. (AHSME 1984) The total area of all the faces of a rectangular solid is 22 cm^2, and the total length of all its edges is 24 *cm*. Then the length in cm of any one of its interior diagonals is? $\left[\sqrt{14}\right]$
16. (MT1994) Find the total area of the unfolded square pyramid. 

[340 m^2]
17. (AHSME1996) How many line segments have both their endpoints located at the vertices of a given cube? [28]
18. (MT1996) A large cube is formed by stacking 27 unit cubes. A plane is perpendicular to one of the internal diagonal of the large cube and bisects that diagonal. How many unit cubes does the plane intersect? [19]
19. (HSMC 2000) A 4×4×4 cube made of white styrofoam[1] is painted maroon and then cut into 64 unit cubes. How many of these small cubes will have paint on exactly two faces? [24]

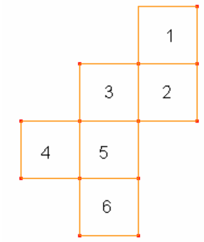
[1] Polistirolo

20. (NC 2002) The height of a square pyramid formed by four equilateral triangles is 10. What is the surface area of one of these triangles? $\left[50 \cdot \sqrt{3}\right]$

Working together

This is a question assigned at HSMC, in 2008.
In the cube with side length 1 *shown below, points A and C are opposite vertices and points B and D are midpoints of the (other pair of) opposite edges. Points A, B, C, and D are coplanar. Find the area of quadrilateral ABCD.* 

It is very easy to prove that the sides of $ABCD$ are all equal, so it is a rhombus and its area is $\frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD}$. AC is the diagonal of the cube, hence: $\overline{AC} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$, while BD is the diagonal of a face of the cube, thus: $\overline{BD} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Then the area is $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

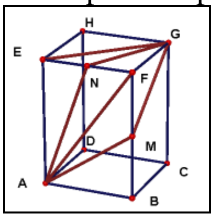
21. (HSMC2004) When this net of six squares is cut out and folded to form a cube, what is the product of the numbers on the four faces adjacent to the one labelled with a 1?  [144]

22. (NC 2004) Consider a regular pyramid of unknown height and a 12 ×12 meter square base. If the height is increased by 2 meters, the lateral surface area is increased by 24 square meters. How high is the original pyramid? (The lateral surface does not include the pyramid's base.) [2,5m]
23. (NC 2007) A rectangular solid with a black surface area and dimensions $10 \times 12 \times 4$ is cut into unit cubes. Assuming the solid's interior is not black, what fraction of these cubes has only one black side? [29/60]
24. (Rice 2010) Suppose we have a polyhedron consisting of triangles and quadrilaterals, and each vertex is shared by exactly 4 triangles and one quadrilateral. How many vertices are there? [24]

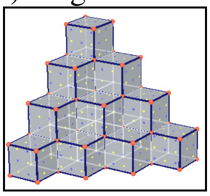
Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia Navale) Determinare perimetro e area della figura individuata dalle intersezioni di un cubo di spigolo L con un piano perpendicolare a una diagonale del cubo nel suo punto medio.
2. (Accademia Navale) Determinare la distanza tra due facce opposte (ovvero situate su piani paralleli) di un ottaedro regolare di spigolo L.
3. (Scuola Superiore di Catania) Una piramide e un prisma hanno, ciascuno, 12 spigoli. Il numero delle facce della piramide è maggiore, minore o uguale al numero delle facce del prisma? Il numero dei vertici della piramide è maggiore, minore o uguale al numero dei vertici del prisma? Rispondere alle domande precedenti se gli spigoli totali sono 18. Rispondere alle domande precedenti se gli spigoli totali sono uno stesso numero s. Che valori può assumere s?
4. (Medicina 2000) Il parallelepipedo è una figura solida con A) 8 vertici, 12 spigoli, 4 diagonali B) 8 vertici, 8 spigoli, 2 diagonali C) 4 vertici, 8 spigoli, 2 diagonali D) 8 vertici, 14 spigoli, 4 diagonali E) 12 vertici, 8 spigoli, 4 diagonali
5. (Architettura 2002) Dire quale tra le seguenti coppie di figure piane non può essere ottenuta sezionando un cubo con un piano.

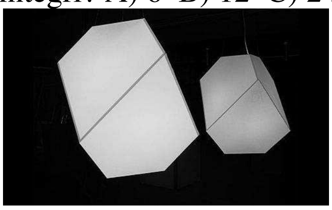
1: Triangolo rettangolo 2: Rettangolo 3: Trapezio isoscele 4: Rombo 5: Triangolo scaleno
A) 1 – 5 B) 1 – 4 C) 3 – 4 D) 1 – 3 E) 3 – 5

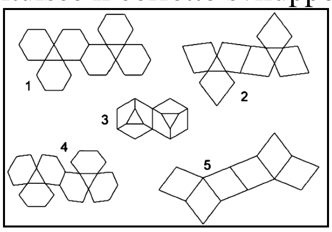
6. (Veterinaria 2005) Il solido in figura è un parallelepipedo retto di altezza $2a$ e base quadrata di lato a, N e M sono punti medi di EF e BF. 

Per andare dal vertice A al vertice G qual è il percorso più breve tra quelli indicati? A) AEG B) ANG C) AFG D) AMG E) $ABFG$

7. (Architettura 2007) Voglio costruire una piramide alta 4 livelli con pietre a forma di cubi, come indicato nella figura:  al livello più alto c'è un solo cubo, al livello immediatamente inferiore ne abbiamo 3 e così via. Quanti cubi devo utilizzare in totale? A) 16 B) 18 C) 19 D) 20 E) 22

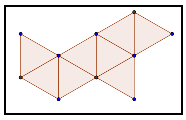
8. (Architettura 2007) Abbiamo 60 contenitori uguali di forma cubica disposti in modo da formare un parallelepipedo le cui dimensioni misurano 5×4×3. Alla fine dell'inverno scopriamo che si sono rovinati i contenitori che avevano almeno una faccia verso l'esterno o sul fondo del parallelepipedo. Quanti sono i contenitori rimasti integri? A) 6 B) 12 C) 24 D) 30 E) 0

9. (Architettura 2007)  La foto mostra la lampada Melancolía di Santa&Cole (2005), ispirata alla celebre incisione di Dürer del 1514, che propone la geometria di un poliedro. Quale delle cinque figure numerate costituisce il corretto sviluppo geometrico del paralume della lampada?



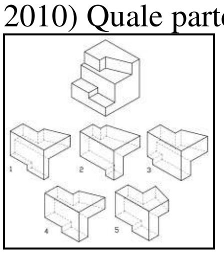
A) Figura 1 B) Figura 2 C) Figura 3 D) Figura 4 E) Figura 5

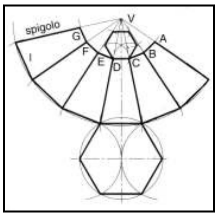
10. (Architettura 2008) Quale dei seguenti poliedri, se opportunamente sezionato da un piano, può generare tutte le seguenti figure: rettangolo, quadrato, esagono regolare e irregolare, pentagono, triangolo?
A) cubo B) cono C) prisma triangolare retto D) cilindro E) tetraedro



11. (Architettura 2009) Di quale solido è rappresentato lo sviluppo in figura?
A) esaedro B) ottaedro C) tetraedro D) nessun solido E) prisma a base triangolare

12. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza 2008) Si vuole riempire completamente un parallelepipedo a base quadrata di lato 30 cm ed altezza 50 cm con dei cubi indeformabili uguali. Qual è il minimo numero di tali cubetti? A) 15 B) 45 C) 75 D) 150

13. (Architettura 2010) Quale parte manca per completare il solido qui riportato, in maniera tale da ottenere un cubo?  A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5



14. (Architettura 2010) A quale solido appartiene lo sviluppo in figura?
A) Ad un tronco di piramide a base esagonale regolare B) Ad un prisma esagonale
C) Ad un tronco di piramide a base ottagonale D) Ad una piramide a base esagonale regolare E) Ad un tronco di cono a base esagonale regolare
15. (Scuola superiore di Catania) La superficie totale di un parallelepipedo rettangolo è 22 cm^2 e la somma delle lunghezze di tutti gli spigoli è 24 cm. Qual è la lunghezza della diagonale?
16. (Scuola superiore di Catania) Un piano ortogonale alla retta passante per due vertici opposti di un cubo di lato 2 taglia le sei facce del cubo formando un esagono. Calcolare il perimetro nel caso che il piano passi per il centro del cubo; Calcolare il perimetro nel caso che il piano non passi per il centro del cubo, ma formi sempre un esagono. In questo caso il perimetro è più grande o più piccolo che nel caso precedente?
17. (Corso di laurea in Informatica, Udine 2009) Un solido S è costituito da due cubi sovrapposti, in modo che due facce dei cubi coincidano. Se lo spigolo di ciascun cubo misura 1, qual è la massima lunghezza possibile di un segmento che unisce due punti di S? A) $2\cdot\sqrt{2}$ B) $2\cdot\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{6}$

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_4_6.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	**2**	**3**
$2p = 3\cdot\sqrt{2}\cdot L, A = 27\cdot\sqrt{3}\cdot L^2$	$\sqrt{2}\cdot L$	Le facce della piramide sono sempre più di quelle del prisma, i vertici del prisma sono sempre più di quelle della piramide. N è un multiplo di 6 maggiore o uguale a 12
4	**5**	**6**
A	B	D
7	**8**	**9**
D	A	B
10	**11**	**12**
B	A	B
13	**14**	**15**
B	D	A
16	**17**	**18**
$\sqrt{14}\,cm$	$6\cdot\sqrt{2}$; $6\cdot\sqrt{2}$	D

6. Geometria dello spazio ambiente

6.3 Geometria dei solidi di rotazione

Prerequisiti

- Rette e piani nello spazio
- Circonferenza e sue parti
- Concetto di rotazione

Obiettivi

- Comprendere il concetto di solido rotondo
- Sapere riconoscere i solidi rotondi più diffusi
- Sapere distinguere le varie parti di una sfera.
- Sapere risolvere semplici problemi di geometria dei corpi rotondi.
- Comprendere che vi sono molti oggetti nello spazio reale che possono essere assimilati a corpi rotondi.

Contenuti

- Il cilindro, il cono e il tronco di cono
- La sfera e le sue parti.
- Poliedri inscrivibili e circoscrivibili a una sfera.

Parole Chiave

Calotta sferica – Fuso sferico – Segmento sferico – Spicchio sferico – Zona sferica

Richiamiamo le conoscenze

Definizione A

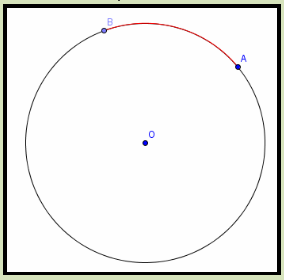
Diciamo **circonferenza** di **centro** il punto C e di **raggio** il segmento r, il luogo geometrico dei punti del piano la cui distanza da C è r.

Definizione B

Diciamo **cerchio** di **centro** il punto C e di **raggio** il segmento r, il luogo geometrico dei punti del piano la cui distanza da C non supera r.

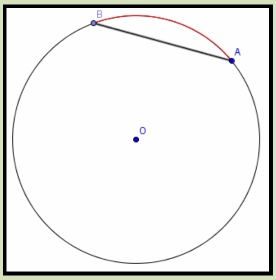
Definizione C

Diciamo **arco** di una circonferenza Γ, di estremi i suoi punti A e B, l'insieme dei punti di Γ che, nel verso di rotazione stabilito su Γ, seguono A e precedono B.



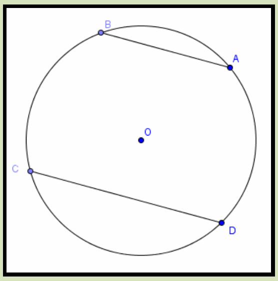
Definizione D

Diciamo **segmento circolare** di un cerchio Γ, di base una corda AB, la parte di Γ delimitata dall'arco AB e dalla corda da esso sottesa.



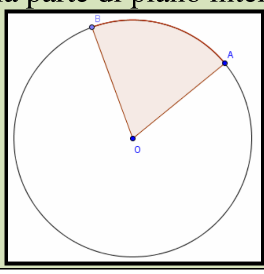
Definizione E

Diciamo **segmento circolare a due basi** di un cerchio Γ, la parte di piano delimitata da due corde di Γ fra di loro parallele.



Definizione F

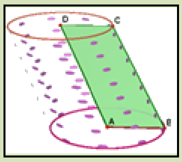
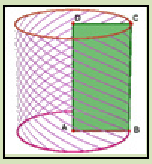
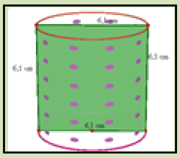
Diciamo **settore circolare** di un cerchio Γ, la parte di piano intersezione fra Γ e un suo angolo al centro.



Il cilindro, il cono e il tronco di cono

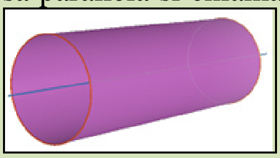
Oltre ai poliedri esistono altre figure solide che però non sono contornate da poligoni e per le quali quindi non possiamo parlare di vertici, facce o spigoli. Essi sono i corpi rotondi e si trovano facendo ruotare nello spazio un poligono attorno a una sua parte.

Definizione 1

- La figura ottenuta dalla rotazione completa di un parallelogramma attorno a uno dei suoi lati si chiama  **cilindro**.
- Se il parallelogramma è un rettangolo il cilindro si chiama **retto** e il segmento rispetto cui avviene la  rotazione si chiama **altezza** del cilindro.
-  Un cilindro retto la cui altezza è uguale al diametro della base si chiama **equilatero**

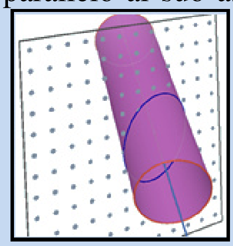
Possiamo anche considerare un cilindro infinito.

Definizione 2

- La figura ottenuta dalla rotazione completa di una retta attorno a un'altra retta a essa parallela si chiama  **cilindro indefinito**.
- La retta rispetto cui avviene la rotazione si chiama **asse del cilindro**, l'altra retta **generatrice del cilindro**.

In generale quindi un cilindro è il luogo geometrico dei punti dello spazio equidistanti da una retta. Vale il seguente risultato che non dimostriamo.

Teorema 1

Le sezioni di un cilindro con un piano non parallelo al suo asse sono ellissi. Se il piano è perpendicolare all'asse le sezioni sono circonferenze. 

Determinare la superficie di un cilindro in funzione della sua altezza e del raggio delle sue basi è molto semplice.

Teorema 2

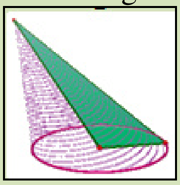
La superficie laterale di un cilindro retto si ottiene moltiplicando la misura della sua altezza per la lunghezza della sua circonferenza di base. In simboli $2\pi \cdot r \cdot h$.

Dimostrazione
Se tagliamo il cilindro e lo "apriamo", otteniamo un rettangolo le cui dimensioni sono appunto l'altezza e la circonferenza di base.

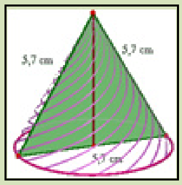
Il cilindro si può considerare, in qualche maniera, come l'analogo solido di rotazione del prisma. Se vogliamo è un prisma le cui basi sono poligoni con infiniti lati. E infatti la formula per il calcolo della sua superficie è simile, dato che il perimetro della circonferenza è appunto lungo $2\pi \cdot r$.
Vogliamo adesso trovare l'analogo solido di rotazione della piramide.

Definizione 3

- La figura ottenuta dalla rotazione completa di un triangolo attorno a uno dei suoi lati si chiama **cono**.



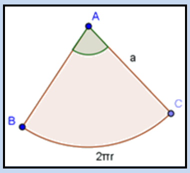
- Se il triangolo è rettangolo e la rotazione avviene attorno a uno dei cateti il cono si chiama **retto**, il segmento rispetto cui avviene la rotazione si chiama **altezza** del cono, l'altro cateto si chiama **raggio di**  **base** e l'ipotenusa si chiama **apotema**.



- Se in un cono retto l'apotema è uguale al diametro della base il cono si chiama **equilatero**.

Vediamo di determinare una formula per il calcolo della superficie di un cono retto.

Teorema 3

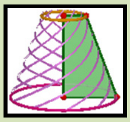
La superficie laterale di un cono retto si ottiene moltiplicando la misura del suo apotema per la lunghezza della sua semicirconferenza di base. In simboli $\pi \cdot r \cdot a$.
Dimostrazione
Se tagliamo il cono e lo "apriamo", otteniamo un settore circolare, di raggio l'apotema del cono e di arco lungo quanto la circonferenza di base. 

L'area del settore circolare sta all'area del cerchio cui appartiene (di raggio a in questo caso), come la lunghezza del suo arco sta alla lunghezza della circonferenza. Si ha perciò: $\frac{A_S}{\pi \cdot a^2} = \frac{\cancel{2 \cdot \pi} \cdot r}{\cancel{2 \cdot \pi} \cdot a} \Rightarrow \quad \Rightarrow A_S = \frac{\pi \cdot a^{\cancel{2}} \cdot r}{\cancel{a}} = \pi \cdot a \cdot r$, che è quanto dovevamo dimostrare.

Allo stesso modo che il cilindro con il prisma, il cono può considerarsi un'estensione di una piramide a base un poligono con infiniti lati. Anche la formula precedente lo testimonia, dato che è del tutto simile a quella per la determinazione della superficie di una piramide retta a base un poligono il ci perimetro misura quanto la circonferenza. Abbiamo anche il corrispondente del tronco di piramide.

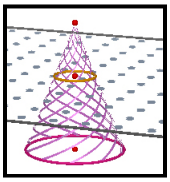
Definizione 4

La figura ottenuta dalla rotazione completa di un trapezio rettangolo attorno alla sua altezza si chiama



tronco di cono retto. Il lato obliquo del trapezio si chiama **apotema** del tronco di cono.

Il tronco di cono si può anche costruire come sezione di un cono con un piano parallelo alla sua base.



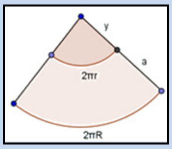
Determiniamo una formula per il calcolo della superficie di un tronco di cono retto.

Teorema 4

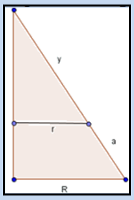
La superficie laterale di un tronco di cono retto si ottiene moltiplicando la misura del suo apotema per la lunghezza della semicirconferenza il cui raggio è somma dei raggi delle due basi. In simboli $\pi \cdot (R + r) \cdot a$.

Dimostrazione

Se tagliamo il tronco di cono e lo "apriamo", otteniamo la differenza dei due settori circolari in figura.



Abbiamo già visto che l'area di un settore circolare in termini dell'arco e del raggio della circonferenza è π volte il semiprodotto fra arco e raggio. La superficie del tronco, quella della parte chiara è $\pi \cdot (a + y) \cdot R - \pi \cdot y \cdot r = \pi \cdot (a \cdot R + y \cdot R - y \cdot r)$ (*). Adesso consideriamo il trapezio rettangolo e il triangolo rettangolo che hanno generato rispettivamente il tronco e il cono.



Dalla similitudine fra i triangoli rettangoli, si ha: $(a + y) : y = R : r$. Da cui $y \cdot R = a \cdot r + y \cdot r$. Sostituiamo nella (*): $\pi \cdot (a \cdot R + a \cdot r + y \cdot r - y \cdot r) = \pi \cdot (a \cdot R + a \cdot r) = \pi \cdot (R + r) \cdot a$. Come dovevamo dimostrare.

Anche in questo caso la formula del tronco di cono è simile a quella di un tronco di piramide le cui basi sono poligoni con infiniti lati, cerchi quindi, i cui perimetri sono perciò le circonferenze.

Verifiche

Lavoriamo insieme

In un cilindro l'altezza è il triplo del raggio, la superficie totale è 100 m^2, *calcolare la misura dell'altezza.*

La superficie è $2\cdot\pi\cdot r^2+2\cdot\pi\cdot r\cdot h=100\Rightarrow\pi\cdot r^2+\pi\cdot r\cdot h=50$, d'altro canto è $h = 3r$, quindi si ha:

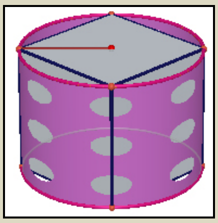
$$\pi\cdot\left(\frac{h}{3}\right)^2+\pi\cdot\frac{h}{3}\cdot h=50\Rightarrow\pi\cdot\frac{h^2}{9}+\pi\cdot\frac{h^2}{3}=50\Rightarrow\pi h^2+3\pi h^2=150\Rightarrow 4\pi h^2=150\Rightarrow h^2=\frac{75}{2\pi}\Rightarrow h=\sqrt{\frac{75}{2\pi}}$$

Livello 1

1. Determina una formula per il calcolo della superficie totale di un cilindro equilatero in funzione del solo raggio. [$6\pi\cdot r^2$]
2. Determina una formula per il calcolo della superficie totale di un cilindro equilatero in funzione della sola altezza. [$3/2\pi\cdot h^2$]
3. La somma dell'altezza e del raggio di un cilindro retto è 12 *cm*, la loro differenza 7 *cm*. Determinare la misura della superficie laterale. [47,5π *cm*]
4. La superficie totale di un cilindro equilatero è 100 π, determinare la misura di raggio ed altezza. [$r = 5$, $h = 10$]
5. Il rapporto della misura dell'altezza rispetto a quella del raggio di un cilindro retto è 5/3, se la superficie laterale è 15 π, determinare la superficie totale. [24 π]
6. Determinare il rapporto delle superfici laterali di due cilindri retti, i cui raggi sono uno doppio dell'altro e le altezze una metà dell'altra. [1]
7. La somma dell'altezza e del raggio di un cilindro retto è 15 *cm*, la superficie laterale è 24π cm^2, determinare la misura del raggio. $\left[\frac{15\pm\sqrt{177}}{2}cm\right]$
8. La differenza fra l'altezza e il raggio di un cilindro retto è 23 *cm*, la superficie totale è 37π cm^2, determinare la misura del raggio di base. $\left[\frac{\sqrt{677}-23}{4}cm\right]$

Lavoriamo insieme

È possibile inscrivere un cubo in un cilindro? Ossia fare in modo che due facce opposte del cubo siano inscritte nelle basi del cilindro?

Consideriamo la figura  osserviamo che il raggio di base del cilindro è pari alla metà della diagonale di una faccia del cubo, mentre l'altezza misura quanto lo spigolo del cubo. Pertanto possiamo effettuare quanto detto solo per cilindri per i quali si ha: $\frac{h}{r}=\frac{\ell}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\ell}=\sqrt{2}$.

Livello 2

9. Determinare il rapporto fra le superfici laterali di un cilindro retto e del cubo in esso inscritto. $\left[\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\right]$
10. Possiamo sempre circoscrivere un cubo a un cilindro retto? Se la risposta è negativa, per che tipi di cilindro ciò è possibile? [Solo per cilindri equilateri]
11. Tenendo conto del precedente esercizio, determinare il rapporto fra le superfici laterali del cubo e del

cilindro. [4/π]

12. Un prisma regolare a base triangolare è inscritto in un cilindro retto, determina il rapporto della superficie laterale del cilindro con quella del prisma. $\left[\frac{2\cdot\sqrt{3}}{9}\cdot\pi\right]$

13. Un prisma regolare a base esagonale è inscritto in un cilindro retto, determina il rapporto della superficie laterale del cilindro con quella del prisma. [π/3]

14. Una piramide regolare a base quadrata è inscritta in un cilindro retto, cioè la base è inscritta in uno dei cerchi e il vertice della piramide è il centro dell'altro cerchio di base del cilindro. Se il raggio è metà dell'altezza, determina il rapporto della superficie laterale del cilindro con quella della piramide. $\left[\frac{\sqrt{10}}{5}\cdot\pi\right]$

15. Un parallelepipedo rettangolo con una base quadrata è circoscritto a un cilindro retto, cioè le basi sono circoscritte ai cerchi e le altezze sono congruenti. Determina il rapporto della superficie laterale del cilindro con quella del parallelepipedo. [π/4]

16. Un parallelepipedo rettangolo con una base quadrata è inscritto in un cilindro retto, cioè le basi sono inscritte nei cerchi e le altezze sono congruenti. Determina il rapporto della superficie laterale del cilindro con quella del parallelepipedo. $\left[\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\pi\right]$

17. Un prisma regolare a base triangolare è circoscritto a un cilindro retto, determina il rapporto della superficie laterale del cilindro con quella del prisma. $\left[\frac{\sqrt{3}}{9}\cdot\pi\right]$

18. Un prisma regolare a base esagonale è circoscritto a un cilindro retto, determina il rapporto della superficie laterale del cilindro con quella del prisma. $\left[\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\pi\right]$

19. Un rettangolo di lati lunghi 2 *cm* e 3 *cm* ruota attorno a una retta parallela al suo lato più lungo, da esso distante 1 *cm*, quanto misura la superficie totale del solido così ottenuto? [40π cm^2]

Livello 3

20. Possiamo sempre inscrivere un ottaedro regolare in un cilindro retto? Cioè in modo che i vertici delle due piramidi che formano l'ottaedro siano i centri delle due circonferenze di base e gli altri vertici appartengano al cilindro. Se la risposta è negativa, per che tipi di cilindro ciò è possibile? [Solo per cilindri equilateri]

21. Tenendo conto del precedente esercizio, determinare il rapporto fra le superfici totali del cilindro e dell'ottaedro. $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\pi\right]$

22. Possiamo sempre circoscrivere un ottaedro regolare a un cilindro retto? Se la risposta è negativa, per che tipi di cilindro ciò è possibile? [Sempre]

23. Tenendo conto del precedente esercizio, determinare la misura del raggio del cilindro equilatero inscritto in funzione dello spigolo ℓ dell'ottaedro. $\left[\frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot\ell\right]$

24. Possiamo sempre inscrivere un tetraedro regolare in un cilindro retto? Cioè in modo che una faccia sia inscritta in una delle due basi del cilindro e il vertice rimanente coincida con il centro dell'altra base. Se la risposta è negativa, per che tipi di cilindro ciò è possibile? [Solo per cilindri in cui l'altezza è $\sqrt{2}$ volte il raggio]

25. Tenendo conto del precedente esercizio, determinare il rapporto fra le superfici totali del cilindro e del tetraedro. $\left[\frac{2\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)}{9}\cdot\pi\right]$

26. Sezioniamo un cilindro retto di raggio 1 con un piano che contiene la "diagonale" del cilindro, ottenendo un'ellisse il cui diametro maggiore supera del 50% quello minore. Quanto misurano tali diametri? [2; 3]
27. Un rettangolo di lati lunghi a e b ruota attorno a una retta parallela al lato lungo a, da esso distante c, quanto misura la superficie totale del solido così ottenuto? [$2\pi \cdot (ab + 2ac + b^2 + 2bc$]
28. Un rettangolo di lati lunghi a e b ruota prima attorno a una retta parallela al lato lungo a, e poi a una retta parallela all'altro lato, in entrambi i casi le rette distano c dai lati, quanto misura la differenza fra le superfici totali dei due solidi così ottenuti? [$2\pi \cdot (b^2 - a^2)$]

Lavoriamo insieme

Determinare la superficie laterale e quella totale di un cono equilatero in cui l'apotema misura quanto il diametro di base.

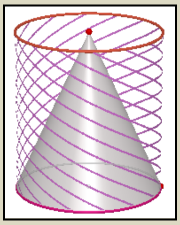
La superficie laterale si trova con la formula $\pi \cdot r \cdot a = 2 \cdot \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \frac{a^2}{2}$. Mentre la superficie totale sarà data dalle formule equivalenti: $\pi \cdot r \cdot (a + r) = 3 \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot a^2$. Possiamo esprimere il tutto anche mediante la sola altezza: $h = \sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{4r^2 - r^2} = r \cdot \sqrt{3}$, quindi avremo $S_L = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot h^2; S_T = \pi \cdot h^2$.

Livello 1

29. Determinare la superficie laterale di un cono retto in funzione del raggio e dell'altezza. $\left[\pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}\right]$
30. Calcolare la misura della superficie laterale di un cono retto di raggio 3 *cm* e altezza 4 *cm*. [$15\pi\ cm^2$]
31. Determinare la superficie laterale di un cono retto in funzione dell'apotema e dell'altezza. $\left[\pi \cdot a \cdot \sqrt{a^2 - h^2}\right]$
32. Calcolare la misura della superficie laterale di un cono retto di apotema 17*m* e altezza 15*m*. [$136\pi\ m^2$]
33. Calcolare la misura dell'apotema di un cono retto di superficie laterale $1484\pi m^2$ e altezza 45*m*. [53*m*]
34. Trovare la misura dell'area laterale di un cono equilatero sapendo che la sua altezza misura 3*m*. [$6\pi m^2$]
35. È possibile che la superficie totale di un cono retto sia il doppio della superficie di base? Giustificare la risposta. [No, perché allora l'apotema dovrebbe essere quanto il raggio]
36. Un cono retto ha il raggio di base di 5 *cm*. Trovare la misura dell'altezza sapendo che la superficie laterale misura $65\pi\ cm^2$. [12 *cm*]
37. La superficie totale di un cono retto misura $12\pi\ cm^2$. Trovare la misura dell'altezza sapendo che il raggio misura 2 *cm*. $\left[2 \cdot \sqrt{3}\ cm\right]$
38. Con riferimento al precedente quesito, cosa accade se la superficie è $5\pi\ cm^2$. [Impossibile]
39. Trovare la misura dell'area totale di un cono retto sapendo che la somma delle misure del raggio di base e dell'apotema è 5 *cm* e che la superficie laterale misura $6\pi\ cm^2$. [$10\pi\ cm^2$]
40. Trovare la misura dell'altezza di un cono retto che ha il raggio di base che misura 4 *cm* e l'area totale i 3/2 di quella di base. Se invece l'area totale è il triplo di quella di base? $\left[\text{Dati incompatibili}; 4 \cdot \sqrt{3}\ cm\right]$
41. Sezioniamo un cono retto di apotema lungo 9 *cm* e raggio di base 6 *cm*, con un piano in modo da ottenere un tronco di base minore di area $16\pi\ cm^2$. Trovare l'area laterale del tronco di cono. [$30\pi\ cm^2$]

Lavoriamo insieme

Un cono retto è inscritto in un cilindro retto, ossia i due solidi hanno una base in comune e il vertice del cono è il centro dell'altra base del cilindro. Determinare il rapporto fra le superfici laterali dei due solidi.



- Ovviamente i due solidi hanno la stessa altezza e lo stesso raggio di base, quindi abbiamo: $\frac{S_{Ci}}{S_{co}} = \frac{2 \cdot \cancel{\pi} \cdot r \cdot h}{\cancel{\pi} \cdot r \cdot a} = \frac{2 \cdot h}{a}$.
- Se il cono è equilatero: $a = 2r \Rightarrow h = \sqrt{a^2 - r^2} = = \sqrt{4r^2 - r^2} = \sqrt{3} \cdot r$. Quindi: $\frac{S_{Ci}}{S_{co}} = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot r}{2 \cdot r} = \sqrt{3}$.

Livello 2

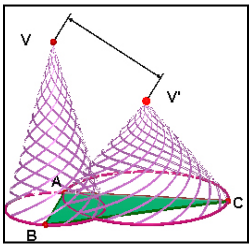
42. Calcolare la misura del raggio di un cono retto di superficie laterale 609π cm^2 e altezza 20 *cm*. [21 *cm*]
43. Una piramide retta a base quadrata è inscritta in un cono retto, cioè la base della piramide è inscritta nel cerchio di base del cono e i vertici coincidono. Determina il rapporto della superficie laterale del cono con quella della piramide. $\left[\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \pi\right]$
44. L'apotema di un tronco di cono retto misura 25 *cm* e la sua altezza 24 *cm*. Determinare i raggi delle due basi sapendo che l'area laterale è uguale alla somma delle aree delle due basi. [21 *cm*, 28 *cm*]
45. Determinare una formula per il calcolo della superficie laterale di un tronco di cono retto in cui l'apotema è lungo quanto il raggio della base maggiore, in funzione del raggio della base maggiore [$3\pi r^2$]
46. Con riferimento al problema precedente, se la superficie del tronco è 48π m^2, quanto misura il raggio della base minore? [2 *m*]
47. Un tronco di piramide regolare a base quadrata è inscritto in un tronco di cono retto, cioè le basi del tronco di piramide sono inscritte nei cerchi di base del tronco di cono. Determina il rapporto della superficie laterale del tronco di cono con quella del tronco di piramide. $\left[\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \pi\right]$
48. Un tronco di cono retto di altezza 4 *cm* è ottenuto sezionando un cono di altezza 12 *cm*. Quanto vale il rapporto fra le aree delle basi del tronco? [9/4]
49. Un cilindro equilatero è inscritto in un cono retto di altezza 4 *cm* e raggio 3 *cm*. Determinare le misure del raggio e dell'altezza del cilindro. [1,2 *cm*; 2,4 *cm*]
50. Un cilindro retto in cui l'altezza è uguale al raggio è inscritto in un cono retto di altezza 12 *cm* e raggio 5 *cm*. Determinare la misura della superficie laterale del cilindro. $\left[\frac{7200}{289} \pi\ cm^2\right]$
51. Alle basi di un cilindro retto incolliamo due coni retti di altezza uguale a quella del cilindro. Determinare la superficie del solido in funzione dell'altezza e del raggio di base. $\left[2 \cdot \pi \cdot r \cdot \left(h + \sqrt{r^2 + h^2}\right)\right]$
52. Un tetraedro è inscritto in un cono retto in modo che una sua faccia sia inscritta nella circonferenza base del cono e il quarto vertice coincida con il vertice del cono. Quanto vale il rapporto fra lo spigolo del tetraedro e l'apotema del cono? [1]
53. In relazione al precedente esercizio, possiamo inscrivere un tetraedro regolare in un qualsiasi cono? [No, solo in quelli in cui l'apotema è $\sqrt{3}$ volte il raggio]
54. Un tetraedro regolare e un cono retto hanno il vertice in comune e la faccia opposta al detto vertice è circoscritta alla circonferenza base del cono. Quanto vale il rapporto fra l'apotema del cono e lo spigo-

lo del tetraedro? $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

55. In relazione al precedente esercizio, in che relazione sono l'apotema del cono e il suo raggio? [$a = 3r$]
56. Un cubo è circoscritto a un cono retto in modo che in una sua faccia è inscritta la circonferenza base del cono e il vertice del cono è il centro della faccia opposta. Quanto vale il rapporto fra l'apotema del cono e lo spigolo del cubo? $\left[\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$
57. In relazione al precedente esercizio, possiamo circoscrivere un cubo a un qualsiasi cono retto? [No, solo a quelli in cui l'apotema è $\sqrt{5}$ volte il raggio]

Livello 3

58. Un cono retto ha la superficie totale che è k volte la sua superficie laterale, per quali valori reali di k ciò è possibile? [$1 < k < 2$]
59. Dimostrare che se un tronco di cono retto di altezza h *cm* è ottenuto sezionando un cono di altezza k *cm*, il rapporto fra le aree delle basi del tronco è $\frac{k^2}{h^2}$.
60. Studiare la risolubilità del problema di determinare la misura dell'altezza di un cono retto, nota la misura della superficie totale S e del raggio r. [$S > 2\pi r^2$]
61. Un triangolo rettangolo di cateti lunghi a e b ruota di un giro completo attorno a ciascuno dei tre lati, generando tre solidi, determinare le loro superfici laterali. $\left[\pi \cdot a \cdot \sqrt{a^2+b^2}; \pi \cdot b \cdot \sqrt{a^2+b^2}; \frac{\pi \cdot a \cdot b \cdot (a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$
62. Facciamo ruotare un triangolo rettangolo non isoscele di cateti lunghi a e b ($a > b$), di un giro completo rispetto a ciascuno dei cateti, quanto misura la distanza fra i vertici dei due coni così determinati?



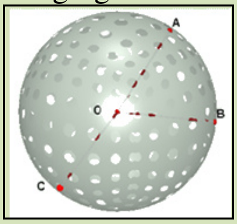
$\left[\frac{\sqrt{5a^2 - 8ab + 5b^2}}{2}\right]$

La sfera e le sue parti

A questo punto possiamo definire i corrispondenti tridimensionali della circonferenza e del cerchio.

Definizione 5

- Diciamo **superficie sferica** di centro il punto O e di raggio il segmento di misura r, il luogo geometrico dei punti dello spazio la cui distanza da O misura r.



- Diciamo **sfera** delimitata dalla superficie sferica di centro il punto O e di raggio il segmento di misura r, il luogo geometrico dei punti dello spazio la cui distanza da O non è maggiore di r.
- Diciamo **sfera interna** delimitata dalla superficie sferica di centro il punto O e di raggio il segmento di misura r, il luogo geometrico dei punti dello spazio la cui distanza da O è minore di r.

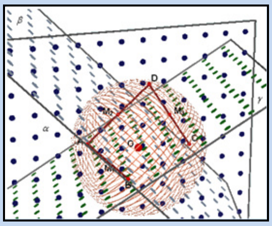
Utilizzando il procedimento di generalizzazione che abbiamo già usato per rette e piani, poligoni e poliedri, vediamo dei risultati sulla sfera analoghi ad alcuni validi per la circonferenza.

Teorema 5

Per quattro punti non complanari passa una e una sola sfera.

Dimostrazione

Come per la circonferenza, basta considerare i piani assiali di 3 fra le 6 corde ottenibili con i 4 punti. I tre piani si incontrano in un punto O che è il centro della sfera cercata, poiché appartiene a tutti e tre i piani assiali è equidistante da tutti e 4 i punti.



Come immediato corollario del risultato precedente si ha il seguente risultato.

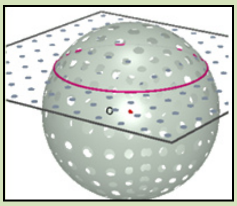
Corollario 1

I piani assiali degli spigoli di un tetraedro si incontrano in un punto, che è il centro della sfera circoscritta al tetraedro.

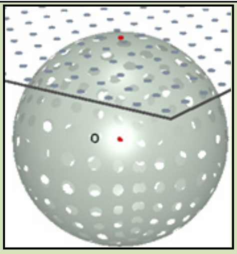
Prendiamo in considerazione le reciproche posizioni che possono avere un piano e una sfera.

Definizione 6

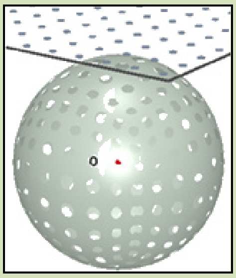
Dati un piano Π e una sfera , se hanno in comune



- infiniti punti, sono **secanti**



- un solo punto, sono **tangenti**



- nessun punto, sono **esterni**

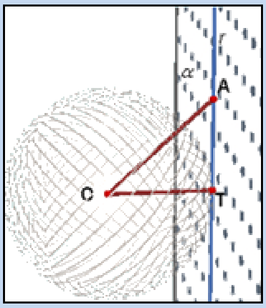
Nasce immediatamente una questione: quando un piano e una sfera hanno più di un punto in comune, quanti sono questi punti? È intuitivo capire che essi sono infiniti. Nasce allora un'altra domanda, questi punti ovviamente appartengono al piano ma rappresentano un insieme di punti di quelli che già conosciamo? Da un punto di vista intuitivo pensiamo che la sezione debba essere una curva chiusa. Nel seguente risultato precisiamo, ma non dimostriamo, rigorosamente questa questione.

Teorema 6
Un piano Π e una sfera Σ fra loro secanti hanno in comune un cerchio.

Valgono anche questi altri importanti risultati.

Teorema 7
Se un piano Π e una sfera Σ sono fra loro tangenti in un punto *T*, allora il raggio che ha *T* come uno dei suoi estremi è perpendicolare a Π.

Dimostrazione



Consideriamo la figura seguente, in cui *T* è il punto di tangenza. Sia *r* una retta passante per *O* e diversa da *OT*, consideriamo la sua intersezione *A* con il piano tangente. Per definizione di piano tangente *A* è esterno alla sfera, quindi *OA* è maggiore del raggio, mentre *OT* è il raggio. Ma allora *OT* è la distanza fra *O* e α, quindi *OT* è perpendicolare ad α.

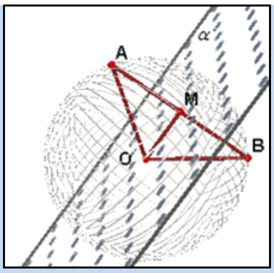
Consideriamo un altro risultato analogo di uno ben noto per le circonferenze.

Teorema 8
Condizione necessaria e sufficiente affinché un piano sia assiale per una qualsiasi corda di una sfera è che passi per il centro della sfera.

Dimostrazione

Consideriamo la figura seguente, in cui *AB* è una corda ed α il suo piano assiale. Per sua stessa definizione α contiene tutti e soli i punti equidistanti da *A* e da *B*, quindi contiene anche *O*.

Viceversa, se α contiene *O* ed è perpendicolare ad *AB*, allora, detta *M* la sua intersezione con *AB*, questo è punto medio di *AB*. Infatti *OM* è perpendicolare ad *AB*, ma allora i triangoli rettangoli *AOM* e *OMB* sono

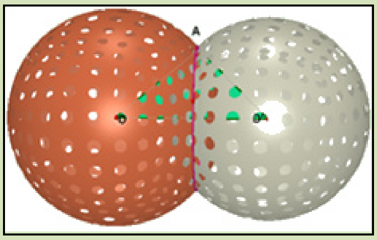


uguali, quindi *AM* e *BM* sono fra loro uguali.

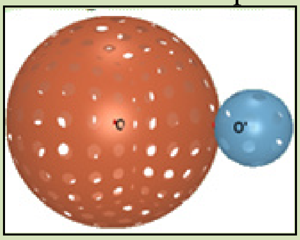
Consideriamo adesso la reciproca posizione di due sfere.

Definizione 7

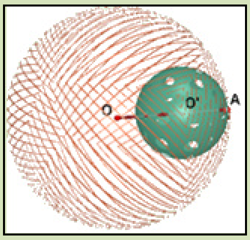
Date due sfere esse sono



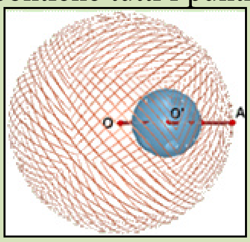
- **secanti** se hanno in comune infiniti punti.
- **tangenti esternamente** se le superfici hanno in comune un solo punto e le sfere interne non hanno punti in comune.

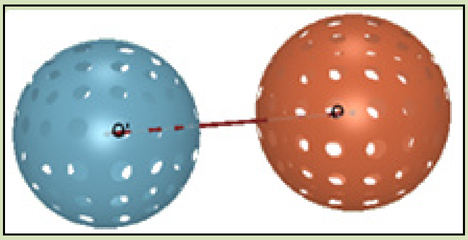


- **tangenti internamente** se le superfici hanno in comune un solo punto e una sfera interna contiene i rimanenti punti della superficie sferica dell'altra.



- **una interna all'altra** se le superfici non hanno punti in comune ma una sfera interna contiene tutti i punti della superficie sferica dell'altra.





- **esterne** se né le superfici, né le sfere interne hanno punti in comune.

Non è difficile provare i seguenti intuitivi risultati.

Teorema 9

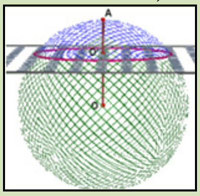
Date due rette di raggi $r \leq R$ e la cui distanza fra i centri è D, allora le sfere sono

- Secanti se e solo se $R - r < D < R + r$
- Tangenti esternamente se e solo se $D = R + r$
- Tangenti internamente se e solo se $D = R - r$
- Una interna all'altra se e solo se $D < R - r$
- Esterne se e solo se $D > R + r$

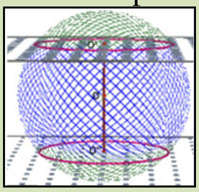
Continuiamo a estendere i concetti della circonferenza e del cerchio alla superficie sferica e alla sfera.

Definizione 8

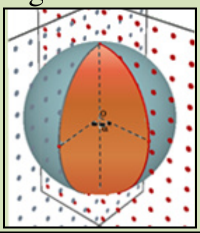
- Diciamo **segmento sferico** di base la circonferenza Γ, la parte di spazio delimitata da una sfera Σ e da Γ ottenuta come sezione di Σ e di un piano Π a essa secante. La parte di superficie sferica facente parte di un segmento sferico si chiama **calotta sferica**. Condotto il raggio perpendicolare al piano sezione, la parte di raggio interna alla calotta si chiama **altezza** della calotta.



- Diciamo **segmento sferico a due basi** la parte di sfera delimitata da due segmenti sferici le cui circonferenze basi appartengono a piani paralleli fra di loro. La parte di superficie sferica appartenente a un segmento sferico a due basi si dice **zona sferica**. Condotto il diametro perpendicolare al piano sezione, la parte di diametro interna alla zona sferica si chiama **altezza** della zona.



- La parte di sfera ottenuta come intersezione con due semipiani aventi l'origine comune coincidente con una retta diametrale della sfera si chiama **spicchio sferico**. La parte di superficie sferica appartenente a uno spicchio sferico si dice **fuso sferico**. L'angolo formato dai due piani si chiama **angolo del fuso**.



È dovuto ad Archimede il seguente importante risultato relativo alla misura della superficie sferica in funzione del raggio. Non lo dimostriamo, così come i successivi risultati.

Teorema 10

La superficie sferica è equiestesa al quadruplo della circonferenza di raggio massimo della stessa sfera. In simboli $S = 4\pi \cdot r^2$.

Valgono anche i seguenti risultati relativi alle superfici delle parti della superficie sferica.

Teorema 11

La superficie di una calotta sferica di altezza h relativa a una sfera di raggio r è data da $2\pi \cdot r \cdot h$.

Teorema 12

La superficie di una zona sferica di altezza h relativa a una sfera di raggio r è data da $2\pi \cdot r \cdot h$.

Teorema 13

La superficie di un fuso sferico di angolo $\alpha°$ relativo a una sfera di raggio r è data da $\frac{\pi \cdot r^2 \cdot \alpha}{90}$.

Concludiamo con i concetti di inscrivibilità e circoscrivibilità.

Definizione 9

Un poliedro si dice **inscrivibile** in una sfera se esiste una sfera che passa per tutti i suoi vertici. Si dice **circoscrivibile** se esiste una sfera tale che i piani delle facce del poliedro sono a essa tangenti.

Valgono i seguenti risultati.

Teorema 14

Tutti i poliedri regolari sono inscrivibili e circoscrivibili a una sfera.
Dimostrazione Il centro delle due sfere è il centro di simmetria dei poliedri.

Teorema 15

Tutti i poliedri semiregolari sono inscrivibili e circoscrivibili a una sfera.
Dimostrazione Il centro delle due sfere è il centro di simmetria dei poliedri.

Teorema 16

I piani assiali degli spigoli di un tetraedro si incontrano in un punto, che è il centro della sfera circoscritta al tetraedro.
Dimostrazione per esercizio

Teorema 17

I piani bisettori degli angoli diedri di un tetraedro si incontrano in un punto, che è il centro della sfera inscritta al tetraedro.
Dimostrazione per esercizio

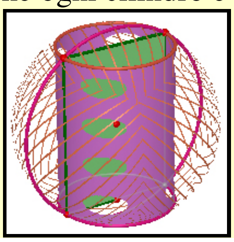
Poniamo un'altra definizione.

Definizione 10

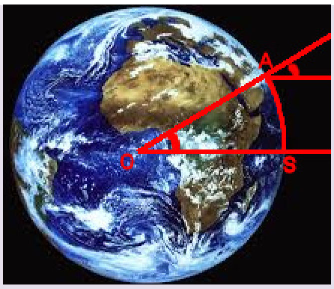
Un solido rotondo generato dalla rotazione di un poligono attorno a uno dei suoi lati si dice **inscrivibile in** (rispettivamente **circoscrivibile a**) una sfera se il poligono unione di quello generatore e del suo simmetrico rispetto all'asse è inscrivibile in (rispettivamente circoscrivibile a) una circonferenza.

Esempio 1

Un qualsiasi cilindro è inscrivibile in una sfera? Poiché il cilindro è generato da un rettangolo, che è un poligono sempre inscrivibile, possiamo dire che ogni cilindro è inscrivibile in una sfera.



L'angolo storico



Spesso si crede che nell'antichità la terra fosse ritenuta piatta e che fosse stata la scoperta dell'America, da parte di Colombo nel 1492, a fare sì che cominciasse a pensarsi che la terra è invece "rotonda", cioè sferica. Ciò non è affatto vero, intanto perché il famoso filosofo Aristotele aveva osservato che durante un eclissi di luna la terra "proiettava" un'ombra circolare. Non solo, ma era tanta la convinzione della sfericità della terra che circa 300 anni prima della nascita di Cristo un famoso scienziato, Eratostene, quello del crivello dei numeri primi, determinò un ottimo valore del diametro terrestre proprio partendo dal presupposto che la terra fosse rotonda. Egli considerò una situazione simile a quella qui raffigurata in alto, in cui l'arco OA era quello passante per le città di Alessandria (indicata con A) e Siene (indicata con S), l'attuale Assuan, dato che le città appartenevano allo stesso meridiano (ovviamente nell'immagine mostrata non è così). Eratostene doveva misurare il valore di OA, per far ciò aveva a disposizione solo la conoscenza dell'arco AS. È facile però osservare che gli angoli indicati sono uguali, e questi valori potevano determinarsi sperimentalmente, ed ecco come fece Eratostene. Il giorno del solstizio estivo, l'attuale 21 giugno dei calendari moderni, si recò a Siene osservando che il sole a mezzogiorno era perpendicolare alla superficie, proiettando i suoi raggi sul fondo di un pozzo. Invece nello stesso momento ad Alessandria che si trovava a 5000 stadi da Siene, il sole formava delle ombre, quindi non era perpendicolare, in modo che l'angolo veniva misurato in $7°12'$, cioè un cinquantesimo di $360°$. Ciò voleva dire che il tratto AS doveva essere circa un cinquantesimo della misura della circonferenza terrestre, che misurava perciò 250000 stadi. Dato che uno stadio era pari a circa 157 m, la circonferenza terrestre doveva essere circa $250000 \cdot 157\ m = 39250000\ m = 39250\ Km$, questo valore non è molto distante da quello reale che è di circa 40003 Km.

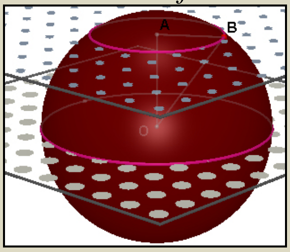
I protagonisti


Eratostene nacque a Cirene, che attualmente si trova in Libia, nel 276 a.C., ma visse per gran parte della sua vita ad Alessandria, dove fu anche bibliotecario del famoso museo. È noto poiché risulta il "destinatario" de Il metodo, opera minore di Archimede in cui questi descrive il suo metodo di scoperta di molte formule per il calcolo dei volumi di alcuni corpi rotondi. Ma ha portato parecchi contributi in diverse scienze, fra cui, come abbiamo visto la geografia ma anche l'astronomia e la matematica, con il metodo di determinazione dei numeri primi, detto appunto crivello di Eratostene. Morì nel 194 a.C., secondo la leggenda si suicidò perché avendo perduta la vista non poteva più godere delle grazie del mondo, né della lettura dei libri.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Un piano seca una sfera di raggio R = 13 *cm, secondo una circonferenza di raggio r che dista h* = 12 *cm dal*

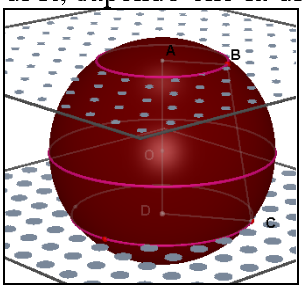


centro della sfera. Determinare la misura di r.

Consideriamo la figura in cui abbiamo costruito un triangolo rettangolo, *AOB*, i cui cateti sono il raggio della circonferenza sezione, *AB*, e la distanza *AO* fra il piano sezione e il piano a esso parallelo contenente la circonferenza di raggio massimo. L'ipotenusa è invece il raggio della sfera, *OB*. Pertanto è semplicissimo risolvere il problema posto: $\overline{AB} = \sqrt{\overline{BO}^2 - \overline{AO}^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$.

Livello 1

1. Un piano taglia una sfera di raggio *R* secondo una circonferenza di raggio *r* = 6 *cm* che dista 7 *cm* dal centro della sfera. Determinare *R*. $\left[\sqrt{85}\ cm\right]$
2. Un piano taglia una sfera di raggio *R* = 17 *cm*, secondo una circonferenza di raggio *r* = 8 *cm* che dista *h cm* dal centro della sfera. Determinare *h*. [15 *cm*]
3. Un piano taglia una sfera di raggio *R* = 12 *cm*, secondo un cerchio di area 25π cm^2 che dista *h cm* dal centro della sfera. Determinare *h*. $\left[\sqrt{119}\ cm\right]$
4. Data una sfera di raggio *R*, consideriamo due piani paralleli a essa secanti, come in figura. Se i raggi delle due circonferenze sezione misurano 1 *cm* e 2 *cm*, determinare la misura di *R*, sapendo che la distanza *AD* fra i piani misura 4 *cm*. Determinare altresì la distanza *BC*.



$\left[\frac{5\cdot\sqrt{17}}{8}cm; \sqrt{17}\ cm\right]$

5. Data una sfera di raggio lungo 5 *cm*, consideriamo due piani paralleli a essa secanti, le cui circonferenze sezione hanno raggi rispettivamente lunghi 2 *cm* e 3 *cm*. Determinare la distanza fra i piani. $\left[\left(\sqrt{21}\pm 4\right)cm\right]$
6. Data una sfera di raggio lungo 25 *cm*, consideriamo due piani paralleli a essa secanti, le cui circonferenze sezione hanno raggi rispettivamente lunghi *r cm* e 24 *cm*. Determinare *r* sapendo che la distanza fra i piani è di 16 *cm*. $\left[4\cdot\sqrt{34}\ cm \vee 4\cdot\sqrt{6}\ cm\right]$
7. Prendiamo 40 sferette uguali di raggio 1 *cm* e le mettiamo in linea retta in modo tale che ciascuna, a parte la prima e l'ultima, ne tocchi altre due. Che distanza vi è fra i centri della prima e dell'ultima sferetta? [78 *cm*]
8. Con riferimento al quesito precedente, se la distanza fra i centri è di 50 *cm*, quante sferette abbiamo utilizzato? [26]
9. Una palla di raggio 10 *cm* rotola su un marciapiede, quando si incastra in un buco a sezione circolare di raggio 8 *cm*. A che distanza dalla superficie è il punto più alto della palla? [16 *cm*]

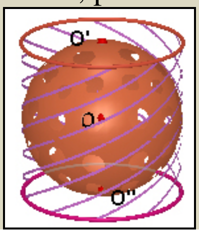
10. Con riferimento al quesito precedente, è un caso che la distanza è il doppio del raggio del buco? [Sì]

Livello 2

11. Con riferimento al quesito precedente, in che relazione sono il raggio R della sfera e quello r del buco affinché la distanza dal marciapiede sia $2r$? [$R = 5/4r$]
12. Data una sfera di raggio R, consideriamo un piano a essa secante, la cui circonferenza sezione abbia raggio r, è possibile che la distanza h fra il piano e il centro della sfera sia uguale a R? [No]
13. Con riferimento al problema precedente, è possibile che sia $h = r$? [Sì se $R = \sqrt{2} \cdot r$]
14. Data una sfera di raggio R, consideriamo due piani paralleli a essa secanti distanti D. Dette r_1 e r_2 le misure dei raggi delle due circonferenze sezione, determinare il rapporto in cui il centro della sfera divide il segmento che unisce i centri delle circonferenze. $\left[\dfrac{D^2 - r_1^2 + r_2^2}{D^2 + r_1^2 - r_2^2}\right]$

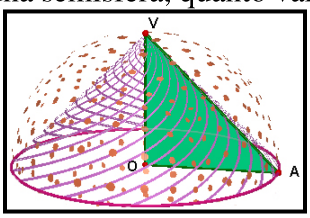
Lavoriamo insieme

Determinare il rapporto fra la superficie di una sfera e la superficie laterale del cilindro retto circoscritto.
Intanto cominciamo ad osservare che i cilindri circoscrivibili sono solo quelli equilateri, perché fra i rettangoli solo il quadrato è circoscrivibile. Osserviamo anche che il raggio della sfera è uguale al raggio delle basi del cilindro. A questo punto allora abbiamo che la superficie laterale del cilindro è $2\pi rh = 2\pi r \cdot 2r = 4\pi rh^2$. Cioè esattamente uguale a quella della sfera, pertanto il rapporto richiesto è 1.



Livello 1

15. Calcolare il rapporto fra le superfici di una sfera e del suo cilindro retto circoscritto. [2/3]
16. Un cilindro retto qualsiasi è inscrivibile in una sfera? [Sì]
17. Determinare il rapporto fra la superficie di una sfera e la superficie laterale del cilindro equilatero in essa inscritto. [2]
18. Determinare il rapporto fra la superficie di una sfera e la superficie totale del cilindro equilatero circoscritto. [4/3]
19. Un cono retto qualsiasi è inscrivibile in una sfera? [Sì]
20. In una sfera possiamo inscrivere un solo cono retto? [No]
21. Un cono retto qualsiasi è circoscrivibile a una sfera? [Sì]
22. Determinare il rapporto fra la superficie di una sfera e la superficie laterale del cono equilatero in essa inscritto. [8/3]
23. Determinare il rapporto fra la superficie di una sfera e la superficie laterale del cono equilatero a essa circoscritto. [3/2]
24. Un cono circolare retto è inscritto in una semisfera, quanto vale il rapporto fra l'apotema e il raggio?



$\left[\sqrt{2}\right]$

25. Un cono circolare retto è inscritto in una semisfera di superficie laterale $72\pi\ cm^2$. Determinare la misura dell'apotema del cono e della superficie laterale del tronco ottenuto sezionando il cono in modo da dividere la sua altezza in due segmenti uguali. $\left[6 \cdot \sqrt{2}\ cm;\ 27 \cdot \sqrt{2}\ \pi cm^2\right]$

Livello 2

26. Un tronco di cono retto qualsiasi, può inscriversi in una sfera? [Sì]
27. Qual è il centro della sfera circoscritta a un tronco di cono retto? [L'intersezione fra i piani assiali

di due diametri paralleli delle due basi e il trapezio isoscele sezione che ha i detti diametri come basi]

28. Un tronco di cono retto inscritto in una sfera può avere il raggio della base maggiore più lungo del raggio della sfera? [No]

29. Un tronco di cono retto di basi i cui raggi sono lunghi 2 *cm* e 5 *cm* è inscritto in una sfera di raggio 7 *cm*. Determinare la misura del suo apotema. $\left[\sqrt{78+12\cdot\sqrt{30}}\ cm=\left(2\cdot\sqrt{15}+3\cdot\sqrt{2}\right)cm\right]$

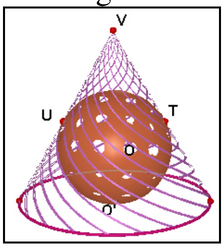
30. Un tronco di cono retto qualsiasi, può inscriversi in una semisfera? [No]

31. Un tronco di cono retto di basi i cui raggi sono lunghi 4 *cm* e 8 *cm* è inscritto in una semisfera. Determinare la misura del suo apotema. [8 *cm*]

32. Tenuto conto dell'esercizio precedente, possiamo dire che se un tronco di cono retto è inscritto in una semisfera il suo apotema è uguale al raggio della semisfera?
[No, ciò succede solo se i raggi delle basi del tronco sono uno doppio dell'altro]

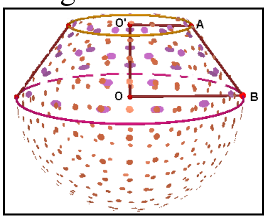
33. Determinare la relazione fra l'apotema di un tronco di cono retto inscritto in una semisfera e i raggi delle basi del tronco. $\left[\sqrt{2\cdot R\left(R-r\right)}\right]$

34. Una sfera è inscritta in un cono retto il cui raggio di base misura 5 *cm* e l'altezza 12 *cm*. Determinare il raggio della sfera e la superficie laterale del tronco che si ottiene sezionando il cono con un piano parallelo alla base che passa per i punti di tangenza della sfera con le facce laterali del cono (i punti T ed U in figura).



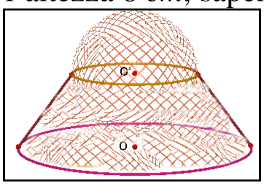
[10/3 *cm*; 525π/13 cm^2]

35. Calcolare la superficie del solido formato da un tronco di cono retto sovrapposto ad una semisfera, di raggio 17 *cm*, sapendo che il tronco è generato da un trapezio rettangolo di area 150 cm^2 e di altezza 15 *cm*.



$\left[\left(587+20\cdot\sqrt{421}\right)\pi cm^2\right]$

36. Determinare la misura della superficie di un solido formato da una semisfera sovrapposta ad un tronco di cono retto il cui apotema misura 10 *cm* e l'altezza 8 *cm*, sapendo che la superficie laterale del tronco è 4/3 della somma delle aree delle sue basi.

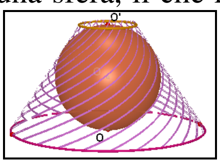


[219π cm^2]

Livello 3

37. Un tronco di cono retto qualsiasi, può circoscriversi a una sfera? [No]

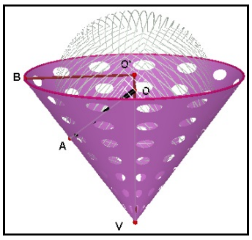
38. Se un tronco di cono retto è circoscritto ad una sfera, il che relazione è l'apotema *a* con i raggi *r* e *R* delle basi del tronco?



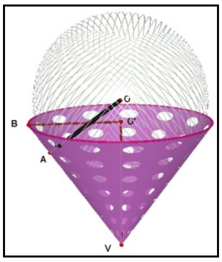
[$a = r + R$]

39. Un tronco di cono retto è circoscritto ad una sfera; sapendo che le misure dei raggi delle basi hanno per somma 25 *cm* e per differenza 7 *cm*, determinare la misura della superficie della sfera. [576 π cm^2]

40. Una sfera tocca un cono retto come mostrato in figura determinare la misura del suo raggio sapendo che il cono ha raggio di 4,5 *cm*, altezza di 6 *cm* e $\overline{VA}=4\,cm$. Determinare poi la relazione fra il raggio *R* della sfera, il raggio del cono *r*, la sua altezza *h* e la distanza $\overline{VA}=d$. [3 *cm*; $Rh = rd$]



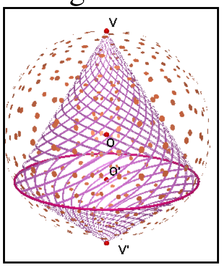
41. La relazione precedente continua a valere anche se il centro della sfera è al disopra di quello della base del cono? [Sì]



42. Un problema di Dudeney. Una mosca è all'interno di un bicchiere cilindrico alto 4 pollici e la cui circonferenza di base è 6 pollici. La mosca è a un pollice dal fondo poggiata sulla superficie del bicchiere. Una goccia di miele si trova all'esterno del bicchiere a un pollice dalla sommità del bicchiere e sulla faccia opposta a quella su cui è poggiata la mosca. Quanto vale il minimo cammino necessario alla mosca per raggiungere il miele? [5 pollici]

43. Una palla sferica di raggio 1 è appoggiata a due pareti adiacenti di una stessa stanza. Quanto vale il massimo raggio di un'altra palla sferica che possa immettersi fra la palla e il muro? $\left[\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right]$

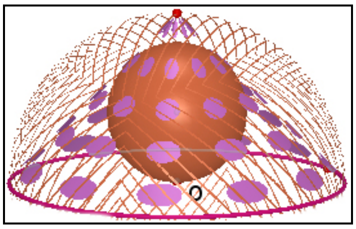
44. Sezioniamo una sfera di raggio 3 *cm*, con un piano che divide il diametro in parti proporzionali a 4/9. quindi costruiamo due coni come in figura. Determinare la misura del raggio di base dei coni e le misure degli apotemi.



$\left[r = \frac{36}{13}cm; a' = \frac{20\cdot\sqrt{10}}{13}cm; a'' = \frac{2\cdot\sqrt{493}}{13}cm\right]$

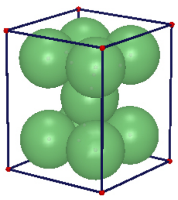
45. Con riferimento al precedente esercizio, determinare una relazione fra il raggio delle basi dei coni, il raggio della sfera e il rapporto p in cui è diviso il diametro. $\left[r_c = \frac{2\cdot\sqrt{p}\cdot r_S}{1+p}\right]$

46. In figura un cono retto è inscritto in una semisfera ed è circoscritto a un'altra sfera. Se la sfera minore ha raggio 1, quanto misura il raggio di quella maggiore?



$\left[1+\sqrt{2}\right]$

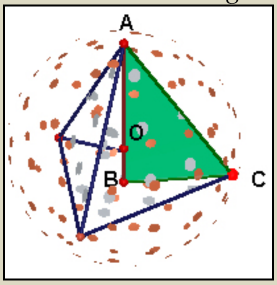
47. In una scatola cubica inseriamo 9 sfere uguali come in figura,



8 di esse sono a due a due tangenti fra loro e con 3 facce della scatola, la nona è tangente alle altre 8. Determinare i raggi delle sfere in funzione dello spigolo ℓ del cubo. $\left[\left(\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)\cdot\ell\right]$

Lavoriamo insieme

Calcolare la misura dello spigolo di un tetraedro regolare inscritto in una sfera di raggio r.

Consideriamo la figura seguente. 

Il centro O della sfera è il baricentro del tetraedro, ossia il punto di incontro delle sue mediane, pertanto il raggio della sfera, *AO*, è 3/4 dell'altezza *AB*. Possiamo ricavare tale misura dal triangolo rettangolo *ABC*. Si ha $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \ell^2 - \left(\frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{\ell}{\cancel{2}} \cdot \sqrt{3}\right)^2 =$ $\ell^2 - \frac{1}{3} \cdot \ell^2 = \frac{2}{3} \cdot \ell^2$. Allora avremo: $r = \overline{AO} = \frac{3}{4} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \ell = \ = \sqrt{\frac{\cancel{9}^3}{\cancel{16}_8} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}} \cdot \ell = \sqrt{\frac{3}{8}} \cdot \ell \Rightarrow \ell = \sqrt{\frac{8}{3}} \cdot r$.

Livello 2

48. Esprimere lo spigolo di un cubo mediante il raggio *r* della sua sfera circoscritta. $\left[\frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot r\right]$
49. Esprimere lo spigolo di un ottaedro regolare mediante il raggio *r* della sua sfera circoscritta. $\left[\sqrt{2} \cdot r\right]$
50. Esprimere lo spigolo di un tetraedro regolare mediante il raggio *r* della sua sfera inscritta. $\left[2 \cdot \sqrt{6} \cdot r\right]$
51. Esprimere lo spigolo di un cubo mediante il raggio *r* della sua sfera inscritta. [2*r*]
52. Esprimere lo spigolo di un ottaedro regolare mediante il raggio *r* della sua sfera inscritta. $\left[\sqrt{6} \cdot r\right]$
53. Calcolare il rapporto fra il raggio della sfera circoscritta e quello della sfera inscritta in uno stesso tetraedro regolare. [3]
54. Calcolare il rapporto fra il raggio della sfera circoscritta e quello della sfera inscritta a uno stesso cubo. $\left[\sqrt{3}\right]$
55. Calcolare il rapporto fra il raggio della sfera circoscritta e quello della sfera inscritta a uno stesso ottaedro regolare. $\left[\sqrt{3}\right]$

Livello 3

56. Dopo avere dimostrato che esiste una sfera, detta intersfera, che è tangente a tutti gli spigoli di un cubo, determinare il rapporto spigolo/raggio. $\left[\sqrt{2}\right]$
57. Dopo avere dimostrato che esiste l'intersfera per un tetraedro regolare, determinare il rapporto spigolo/raggio. $\left[2 \cdot \sqrt{2}\right]$
58. Dopo avere dimostrato che esiste l'intersfera per un ottaedro regolare, determinare il rapporto spigolo/raggio. [2]
59. Dimostrare che un tetraedro troncato non è circoscrivibile a una sfera.
60. Dopo avere dimostrato che un cubottaedro è inscrivibile in una sfera, determinare il rapporto spigolo/raggio. $\left[\sqrt{2}\right]$
61. Dopo avere dimostrato che esiste l'intersfera per un cubottaedro, determinare il rapporto spigolo/raggio. $\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\right]$
62. Dopo avere dimostrato che esiste l'intersfera per un ottaedro troncato, determinare il rapporto raggio/spigolo. [3/2]

L'angolo di Cabri3D

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%206/6-3-1.exe si vede un'applicazione che mostra come il software opera sui solidi rotondi.
Per scaricare il relativo file invece si clicca su
http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%206/6-3-1.exe .

L'angolo di Geogebra

Geogebra tratta anche alcuni solidi rotondi. Per vedere come basta cliccare su
http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%206/6-3-2.exe
Il relativo file si scarica su
http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%206/6-3-2.ggb

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi

1. Dimostrare che in un tetraedro equifacciale, cioè con tutte le facce triangoli uguali,
   - baricentro, circocentro e incentro coincidono;
   - il quadrato del raggio della sfera circoscritta è pari a 1/8 della somma dei quadrati delle misure di tre spigoli aventi un vertice in comune;
   - la sfera inscritta tocca le facce nei loro circoncentri.
2. Dopo avere dimostrato che esiste l'intersfera per un dodecaedro regolare, determinare il rapporto spigolo/raggio. $\left[3-\sqrt{5}\right]$
3. Dopo avere dimostrato che esiste l'intersfera per un icosaedro regolare, determinare il rapporto spigolo/raggio. $\left[\sqrt{5}-1\right]$
4. Dopo avere dimostrato che esiste l'intersfera per un tetraedro troncato, determinare il rapporto spigolo/raggio. $\left[\frac{\sqrt{8}}{3}\right]$
5. Dopo avere dimostrato che un tetraedro troncato è inscrivibile in una sfera, determinare il rapporto raggio/spigolo. $\left[\frac{\sqrt{22}}{4}\right]$
6. Dopo avere dimostrato che un ottaedro troncato è inscrivibile in una sfera, determinare il rapporto raggio/spigolo. $\left[\frac{\sqrt{10}}{2}\right]$
7. Dopo avere dimostrato che esiste l'intersfera per un rombicubottaedro, determinare il rapporto spigolo/raggio. $\left[\sqrt{2-\sqrt{2}}\right]$
8. Dopo avere dimostrato che un rombicubottaedro è inscrivibile in una sfera, determinare il rapporto raggio/spigolo. $\left[\frac{\sqrt{5+2\cdot\sqrt{2}}}{2}\right]$

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi

1. (Liceo scientifico PNI 1996/97) Si consideri in un piano α un rettangolo *ABCD* i cui lati *BC* e *AB* misurano rispettivamente a e $2a$. Sia *AEF* con $E \in AB$ e $F \in CD$, un triangolo isoscele la cui base *AE* ha misura $2r$. Il candidato: a) dimostri che una retta parallela ad *AB*, a distanza x da essa, interseca i triangoli *AEF* e *AEC* secondo segmenti uguali; b) detta C_1 la circonferenza di diametro *AE* e appartenente al piano γ passante per *AB* e perpendicolare ad α, e detti T_1 e T_2 i coni di base C_1 e vertici rispettivamente nei punti *F* e *C*, dimostri che le sezioni C'_1 e C'_2 di detti coni con il piano γ', passante per la retta *s*e parallelo al piano γ, sono circonferenze; c) determini, per via sintetica o analitica, il valore di x per il quale C'_1 e C'_2 sono tangenti esternamente. $\left[x = \frac{2ar}{r+2a}\right]$
2. (Liceo scientifico 2003/2004) Provate che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

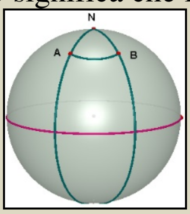
Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.

AHSME = Annual High School Mathematics Examination
HSMC = A&M University High School Mathematics Contest
NC = State Matematical Finals of North Carolina
TAMU = Texas A&M University
AMC = American Mathematical Contest
MT = Mathematics Teacher, rivista della NCTM
Rice = Rice University Mathematics Tournament

Lavoriamo insieme

Un classico problema di matematica ricreativa è il seguente. *Un cacciatore parte dalla sua capanna, percorre 10 Km verso Sud e 10 verso Est. A questo punto incontra un orso e lo uccide, lo scuoia e torna a casa percorrendo 10 Km verso Nord. Si chiede di che colore è la pelle dell'orso.*

La cosa più sorprendente nel quesito è la richiesta, apparentemente priva di senso e soprattutto non "legata" ai dati. Infatti pensiamo che non sia possibile, su una superficie piana, percorrere 10 *Km* verso Sud, Nord, Est e ritrovarsi al punto di partenza. È però possibile su una superficie sferica, soprattutto se si parte da certi punti. Infatti se partiamo dai poli possiamo percorrere un triangolo "sferico" i cui lati sono due pezzi di meridiani e un pezzo di parallelo, come mostrato in figura, che appunto torna indietro. Solo partendo dal polo Nord si può percorrere il tragitto Sud – Est (o Ovest) – Nord, mentre partendo dal polo Sud, dovremmo percorrere Nord – Est (o Ovest) – Sud. Ciò significa che il cacciatore partiva dal polo Nord, quindi la pelle



dell'orso è bianca.

1. (AHSME 1980) Quattro sfere di raggio 1 sono poggiate sul pavimento in modo che tre di esse stiano sul pavimento reciprocamente tangenti e la quarta sia poggiate sulle altre. Circoscriviamo un tetraedro alle sfere, quanto misura il suo spigolo? $\left[2 \cdot \left(1+\sqrt{6}\right)\right]$
2. (AHSME 1983) Una grande sfera è adagiata su un terreno soleggiato, e la sua ombra raggiunge la massima distanza dal punto di contatto con il suolo pari a $10m$. Nello stesso momento un'asta da 1 m posta verticalmente al terreno proietta un'ombra lunga 2 m. determinare la misura del raggio della sfera. Si supponga che i raggi del sole siano segmenti fra loro paralleli e l'asta sia assimilabile ad un segmento. $\left[10 \cdot \left(\sqrt{5}-2\right)m\right]$
3. (AHSME 1987) Un pallone galleggiava su un lago quando questo ghiacciò. Senza rompere il ghiaccio

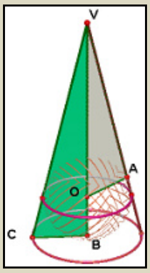
il pallone fu tolto dalla superficie ghiacciata sulla quale in tal modo rimase una buca larga 24 *cm* e profonda 8 *cm*. Determinare la misura del raggio del pallone, che si suppone esattamente sferico. [13 *cm*]

4. (AHSME 1995) Il raggio della terra all'equatore è circa 4000 miglia. Supponiamo che un jet giri attorno alla terra alla velocità di 500 miglia orarie relativamente alla terra. Se il percorso avviene a un'altezza trascurabile sull'equatore, allora fra le seguenti, la migliore stima del numero di ore di volo è A) 8 B) 25 C) 50 D) 75 E) 100 [C]
5. (TAMU1999) La cima di un cono il cui raggio base è 10 pollici e l'altezza 8 pollici è rimosso con un taglio orizzontale a 3 pollici dal vertice. Determinare il raggio del cerchio che così si forma. [3,75″]
6. (HSMC1999) Un cubo di volume 216 è inscritto in una sfera. Determinare la superficie della sfera. [108π]
7. (AMC 2001) Dato un settore circolare di 252° e di raggio 10, quale dei seguenti coni possiamo costruire unendo i suoi estremi? Indichiamo con h l'altezza h, con r il raggio r e con a l'apotema.
   A) $r = 6, a = 10$ B) $r = 6, h = 10$ C) $r = 7, a = 10$ D) $r = 7, h = 10$ E) $r = 8, a = 1$ [C]
8. (AMC 2001) Un cilindro circolare retto con il diametro uguale all'altezza è inscritto in un cono retto. Il cono ha diametro 10 e altezza 12, e gli assi dei due solidi coincidono. Determinare la misura del raggio del cilindro. [30/11]
9. (Rice 2006) Sia il triangolo ABC, con $A \equiv (0; 0)$, $B \equiv (20; 0)$ e C sul semiasse positivo y. Il cono M si forma ruotando ABC attorno all'asse x, e il cono N ruotando ABC attorno all'asse y. Se il volume del cono M meno il volume del cono N fa 140π, determinare la misura di BC. [29]

Questions in English

Working together

This is a question assigned at HSMC, in 1999. *A conical hat is* 40 *cm tall and has a perimeter along the brim*[1] *of* 60π *cm. What is the radius of the largest sphere that can be put on a table and covered entirely by the hat, so that the hat rests on the table surface and conceals the sphere*?

Consider the following figure, then numbers are measures in *cm*. 

Triangles VOA and VBC are similar, hence: $\overline{VO} : \overline{OA} = \overline{VC} : \overline{BC} \Rightarrow (40 - R) : R = 50 : 30 \Rightarrow 50R = 1200 - 30R \Rightarrow 5R = 120\ cm - 3R \Rightarrow 8R = 120\ cm \Rightarrow R = 15\ cm$.

10. (HSMC1999) A can is in the shape of a right circular cylinder. The circumference of the base of the can is 12 inches, and the height of the can is 5 inches. A spiral stripe is painted on the can in such a way that it winds around the can exactly once as it reaches from the bottom of the can to the top. It reaches the top of the can directly above the spot where it left the bottom. What is the length, in inches, of the stripe? [13]
11. (NC2002) A string is wrapped around a cylinder in such a way that it starts at the bottom wraps around the cylinder three times and ends up on top. If the cylinder has a diameter 10 *cm* and a height of 30 *cm* what is the shortest possible length of the piece of string? $\left[30 \cdot \sqrt{\pi^2 + 1}\ cm\right]$
12. (HSMC2008) Two points A and B lie on a sphere of radius 12. The length of the line segment from A to B is $12 \cdot \sqrt{3}$. What is the length of the shortest path from A to B if every point of the path is on the sphere? [8π]
13. (MT1995) What is the relation between the length of a tennis ball can and the circumference of the top

[1] orlo

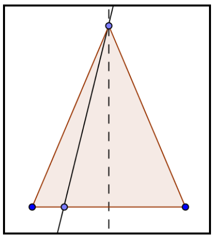
of the can, if it can holds three balls snugly[2]? [π/3]

14. An open 20 *cm* high can has a diameter of 20/π *cm*. An ant on the top edge wants to walk around the side of the can to the point directly opposite on the bottom of the can. Find the length of the shortest path that the ant can take. $\left[10\sqrt{5}\ cm\right]$

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia Navale) Descrivere la sfera come luogo di punti, il cono e il cilindro come luogo di rette.
2. (Accademia Navale) Descrivere il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due punti assegnati.
3. (Accademia Navale) Descrivere il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due piani assegnati.
4. (Accademia Navale) Descrivere il luogo dei punti dello spazio equidistanti dai punti di una circonferenza assegnata.
5. (Accademia Navale) Individuare il centro della sfera passante per una circonferenza γ e per un punto P non appartenente al piano di γ.
6. (Accademia Navale) Individuare il centro della sfera tangente a un piano α in un suo punto A e passante per un ulteriore punto B non appartenente ad α.
7. (Accademia Navale) Descrivere il luogo dei centri delle sfere di raggio assegnato e tangenti a due piani non paralleli.
8. (Accademia Navale) Dimostrare che le circonferenze circoscritte alle quattro facce di un tetraedro appartengono alla superficie di una stessa sfera.
9. (Scuola superiore di Catania) Una piramide a base quadrata ha per facce laterali quattro triangoli equilateri. Se ogni spigolo della piramide ha lunghezza unitaria, qual è la lunghezza del raggio della sfera circoscritta alla piramide?
10. (Medicina 1997) Sono date due sfere di raggi rispettivamente $R1$, $R2$ e superfici $S1$, $S2$. Se $R1/R2 = 4$ allora S1/S2: A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 64
11. (Veterinaria 1998) Se una sfera e un cubo hanno uguale volume, la superficie della sfera è:
A) minore di quella del cubo B) maggiore di quella del cubo C) uguale a quella del cubo
D) doppia di quella del cubo E) i dati forniti non sono sufficienti per rispondere
12. (Odontoiatria 2005) Se si raddoppia il raggio di una sfera, la sua superficie si moltiplica per:
A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 2π
13. (Scienze della formazione primaria, Università di Cagliari 2008-09) Se due coni hanno area di base differente, allora di sicuro hanno:
A) superficie differente B) volume differente C) altezza differente
D) apotema differente E) nessuna delle precedenti
14. (Architettura 2009) Nei riguardi della rotazione nello spazio di un segmento AB, tenuto fisso il suo punto medio M ed escludendo le rotazioni con asse diretto come AB o ortogonale ad esso, quale delle seguenti figure si ottengono?
A) cilindro B) ellissoide C) paraboloide D) cono a una falda E) cono a due falde
15. (Architettura 2009) Consideriamo l'intersezione di un cilindro circolare con un piano secante. Allora l'intersezione: A) è un punto B) sono due rette incidenti C) è sempre una circonferenza
D) può essere un'ellisse E) può essere una parabola
16. (Ingegneria 2009) A parità di tutte le altre condizioni (materiale, rugosità, stato di pulizia, etc.) serve meno quantità di pittura per tinteggiare: A) un cono circolare retto di altezza 1 *m* e raggio 1 *m*
B) una sfera di raggio 1 *m* C) un cubo di lato 1 *m* D) un tetraedro regolare di spigolo 1 *m*
E) un cilindro circolare retto di altezza 1 *m* e raggio 1 *m*
17. (Architettura 2010) Quale affermazione riguardante la sfera non è vera?
A) Sezionando la sfera con piani si ottengono cerchi ed ellissi B) La sfera è una figura simmetrica
C) Sulla superficie della sfera sono identificabili meridiani e paralleli
D) La superficie sferica non è sviluppabile sul piano
E) La superficie sferica è una superficie di rotazione
18. (Architettura 2010) Dato un cono circolare retto sezionato con un piano "α" inclinato come in figura,

[2] perfettamente



quale sezione piana si ottiene?
A) Circonferenza B) Ellisse C) Iperbole D) Triangolo E) Parabola

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_4_6.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

9	**10**	**11**	**12**	**13**
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	D	A	C	E
14	**15**	**16**	**17**	**18**
E	D	D	A	D

6. Geometria dello spazio ambiente

6.4 Il volume

Prerequisiti

- Punti, rette e piani nello spazio
- I poliedri
- I corpi rotondi

Obiettivi

- Comprendere il concetto di volume racchiuso da un corpo
- Sapere risolvere semplici problemi relativi al calcolo del volume di poliedri e di corpi rotondi

Contenuti

- Concetto di volume e volume dei poliedri
- Volume dei corpi rotondi

Parole Chiave

Volume

Concetto di volume e volume dei poliedri

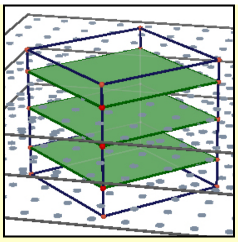
Se consideriamo due scatole, una dentro l'altra, dal punto di vista "pratico" diciamo che la scatola più grande ha un maggiore *volume*, cioè contiene più materiale dello stesso tipo che non quella più piccola. Per esempio più aria o più acqua. Quindi dal punto di vista intuitivo diciamo che un poliedro o un solido rotondo racchiude un volume. Come abbiamo fatto con le aree, anche con i volumi vogliamo assegnare dei numeri a tali grandezze.

Esempio 1

Come possiamo calcolare il volume racchiuso dalla bottiglia in figura? Un modo "pratico" consiste nell'immergere la bottiglia in un contenitore pieno d'acqua fino all'orlo, del quale conosciamo quanta acqua contiene. L'immersione ovviamente fa uscire fuori l'acqua in esubero, cioè quella il cui "posto" viene ad essere occupato dalla bottiglia. Quindi si estrae la bottiglia e si rimisura quanta acqua è rimasta. La differenza fra i due numeri è il volume della bottiglia.

Il precedente procedimento è soggetto a diverse contestazioni, la prima e più importante delle quali è: *come calcoliamo il volume iniziale della scatola piena d'acqua*? Dobbiamo quindi considerare un diverso approccio. Poiché sappiamo come calcolare le aree, potremmo cercare di ricondurre il problema del volume a quello delle aree. Se tagliamo la bottiglia con un taglio parallelo alla sua base otterremo una sezione di forma variabile, della quale però supponiamo di sapere calcolare l'area. Se di tagli del genere ne facciamo non uno, ma centinaia, otterremo centinaia di sezioni, la somma delle cui aree si può considerare come un valore approssimato per difetto del volume della bottiglia. Ovviamente se aumentiamo il numero di tagli, la somma delle aree sarà un valore migliore del precedente. Se riuscissimo a effettuare infiniti tagli avremmo ridotto la bottiglia alla somma di infinite aree. Ovviamente il problema non è risolto, perché non sappiamo come sommare infiniti numeri. In alcuni casi però possiamo ugualmente calcolare tale valore.

Esempio 2



Torniamo all'esempio della bottiglia e al suo contenitore. Se il contenitore è un cubo, come possiamo calcolare il suo volume? Tagliamo il cubo con infiniti tagli paralleli a una faccia, come mostrato in figura (ovviamente con solo alcuni tagli mostrati). In questo caso tutte le sezioni sono uguali e hanno area pari a una faccia del cubo, cioè ℓ^2. Ora è vero che non sappiamo quanto fa la somma di infiniti quadrati uguali, ma è anche vero che questi quadrati messi uno accanto all'altro sono tanti quanto è lungo il terzo spigolo, quindi possiamo dire che il volume è il prodotto dell'area per lo spigolo, cioè è $\ell^2 \cdot \ell = \ell^3$.

Ovviamente il precedente procedimento non è matematicamente rigoroso, ma è "convincente" e ci permette quindi di enunciare il seguente risultato.

Teorema 1

Il volume di un cubo di spigolo lungo ℓ unità è ℓ^3 unità cubiche.

Possiamo quindi considerare il volume di un cubo di lato 1 come l'unità di misura dei volumi di qualunque solido, esattamente come abbiamo fatto con i quadrati di lato 1 che abbiamo considerato unità di misura delle aree. Pertanto per misurare il volume di un solido dobbiamo stabilire quanti cubetti unitari riempiono, senza "vuoti", il solido. Ovviamente non sempre il volume è misurato da un numero intero, quindi prendiamo per buono il concetto di sottomultiplo di un cubetto unitario. Così se suddividiamo in 10 parti uguali ogni spigolo di un cubo unitario, otterremo $10^3 = 1000$ cubetti il cui volume sarà 1/1000 di quello iniziale, che perciò può essere usato per misurare spazi più piccoli di una unità cubica. E così via.
Vediamo adesso di determinare delle formule per il calcolo del volume di altri poliedri. Premettiamo alcuni postulati.

Postulato 1
Solidi uguali hanno uguali volumi

Postulato 2
Il solido ottenuto dall'unione di n altri solidi in modo che essi possano avere al massimo in comune punti sulle loro superfici esterne, ha volume dato dalla somma dei volumi di tutti gli n solidi.

Postulato 3
Se due solidi possono dividersi in n solidi $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$, $\left\{S_1', S_2', \ldots, S_n'\right\}$, in modo che si abbia S_k e S_k' di uguale volume per ogni k: $1 \le k \le n$, essi hanno uguali volumi.

Postulato 4
Se da un solido eliminiamo uno o più sue parti, il solido così ottenuto ha volume dato dalla differenza fra il volume del solido iniziale e il volume dei solidi eliminati.

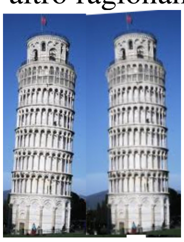
Il primo caso è ovviamente quello dei parallelepipedi rettangoli, di cui il cubo è un caso particolare.

Teorema 2
Il volume di un parallelepipedo di dimensioni a, b e c unità ha volume $a \cdot b \cdot c$ unità cubiche.
Dimostrazione (pseudo)
Si tenga conto che una sezione del parallelepipedo con un piano parallelo alla faccia di lati a e b è un rettangolo di area $a \cdot b$. Di rettangoli del genere ce ne sono un totale di c, quindi il volume è appunto $a \cdot b \cdot c$.

Analogamente possiamo provare il risultato sui prismi retti.

Teorema 3
Il volume di un prisma retto di base di area A, e altezza h unità ha volume $A \cdot h$ unità cubiche.
Dimostrazione (pseudo)
Per esercizio.

E se il prisma non fosse retto? Facciamo un altro ragionamento. Se la torre di Pisa non fosse inclinata, il suo volume varierebbe?



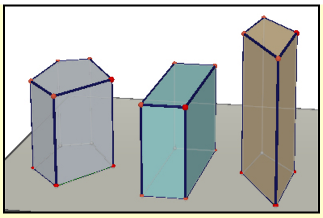
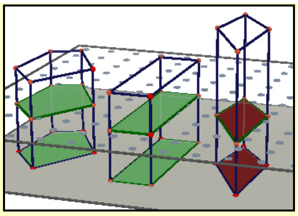
Ovviamente la risposta è negativa. Quindi se "incliniamo" un prisma senza deformarlo, il suo volume non dovrebbe cambiare. Quindi possiamo enunciare un risultato più generale.

Teorema 3
Il volume di un prisma di base di area A, e altezza h unità ha volume $A \cdot h$ unità cubiche.

E se invece avessimo due figure completamente diverse, come potrebbero essere due bottiglie di forma diversa, che sappiamo essere entrambe di un litro? In questo caso sarà il metodo "pratico" a dire che le due bottiglie in figura (esclusi i tappi) contengono lo stesso volume. 

Vi è però un caso in cui possiamo affermare con ragionevole certezza che due oggetti di forma diversa hanno lo stesso volume.

Esempio 3

Un prisma retto di base un poligono di area 16 e altezza 3 ha volume 16 × 3 = 48 unità cubiche. Un parallelepipedo rettangolo di spigoli lunghi 2, 3 e 8 unità ha anch'esso un volume di 48 unità cubiche, così come un prisma retto di base un poligono di area 12 e altezza 4. Come si vede, nella prima figura abbiamo posto tutti e tre i solidi sullo stesso piano, in modo che i primi due prismi abbiano la stessa altezza. Ciò non è possibile per il terzo solido. Ora consideriamo un piano parallelo alle basi di appoggio che sezioni tutti e tre i solidi, come nella seconda figura. Osserviamo una affinità fra i primi due solidi che non c'è con il terzo. Ossia le sezioni hanno determinato in entrambi i solidi due aree uguali (entrambe di 16 unità quadrate). Non solo, ma ciò accadrà per qualsiasi sezione ottenuta con piani paralleli alla base di appoggio.

Quanto visto nel precedente esempio ci permette quindi di enunciare una condizione sufficiente, ma non necessaria, atta ad assicurarci che due solidi abbiano lo stesso volume.

Principio di Cavalieri
Dati due solidi appoggiati su un certo piano α, se qualsiasi sezione effettuata con un piano parallelo ad α, determina su entrambi i solidi o due figure di uguale area o il vuoto, allora i due solidi hanno lo stesso volume.

I protagonisti

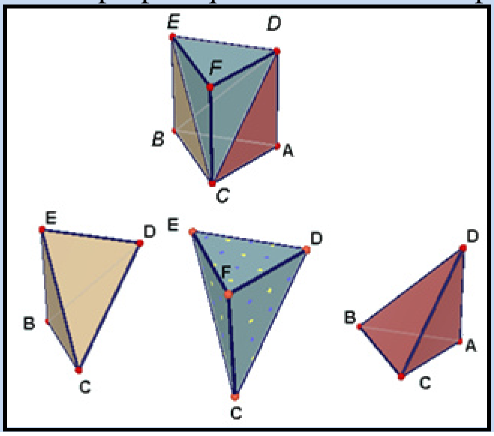
 **Bonaventura Cavalieri** nacque a Milano nel 1598 e morì a Bologna nel 1647. Come molti dei matematici italiani di quel periodo era un religioso, apparteneva all'ordine dei Gesuiti. La sua fama è legata al procedimento che abbiamo descritto per sommi capi e che fu esposto nella sua opera *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* del 1635. Si occupò comunque di altri argomenti, sempre nell'ambito geometrico e nel 1647 pubblicò l'opera *Exercitationes geometricae sex*, che divenne un'opera fondamentale per i matematici del XVII secolo.

Useremo questo metodo nel paragrafo successivo per determinare i volumi di alcuni solidi rotondi. Intanto riprendiamo il discorso sui volumi dei poliedri. Se cerchiamo di applicare il metodo di Cavalieri al calcolo del volume di una piramide abbiamo una difficoltà, le sezioni sono tutte poligoni simili fra loro e non uguali come invece accadeva per i prismi, e non sappiamo come sommare le aree di infiniti poligoni simili. Dobbiamo quindi trovare un diverso approccio.

Teorema 4

Ogni prisma che abbia base triangolare si può dividere in tre piramidi uguali fra loro ed aventi basi triangolari.
Dimostrazione

Suddividiamo il prisma come mostrato in figura, in cui abbiamo anche disegnato le tre piramidi “staccate” dal prisma, per capire come siano state costruite. Non è difficile vedere che le tre piramidi sono uguali e hanno la stessa altezza del prisma. Il che è proprio quello che volevamo provare.

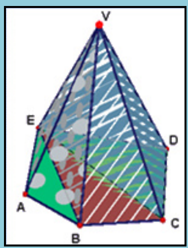


Segue quindi il risultato che cercavamo per determinare una formula per il calcolo del volume di una piramide.

Corollario 1

Ogni piramide è la terza parte di un prisma che abbia la stessa base e la stessa altezza.

Dimostrazione

Ogni piramide può suddividersi in un certo numero di piramidi triangolari, come mostrato in figura, nel caso particolare di una base pentagonale. 

Basta infatti dividere il poligono di base in $n - 2$ triangoli, ciascuno di area A_i e quindi considerare le piramidi che hanno queste basi e il vertice della piramide iniziale. Tali piramidi hanno tutte la stessa altezza e la somma dei loro volumi fornisce il volume della piramide iniziale. Quindi il volume della piramide è $\frac{A_1 + A_2 + ... + A_{n-2}}{3} \cdot h = \frac{A \cdot h}{3}$.

Grazie al principio di Cavalieri abbiamo parlato di piramide non retta, dato che, come del resto succede per esempio per i triangoli, che hanno uguale area purché abbiano lato e altezza relativa uguali, ugualmente prismi e piramidi che hanno uguali area e altezza relativa hanno uguali volumi.
Ci rimane da considerare il tronco di piramide.

Teorema 5

Il volume di un tronco di piramide è dato da un terzo del prodotto dell’altezza per la somma delle aree e della radice quadrata del prodotto delle dette aree. In formula $\frac{A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 \cdot A_2}}{3} \cdot h$.

Dimostrazione

Il volume è ovviamente la differenza fra il volume della piramide che abbiamo troncato e il volume della parte troncata. Cioè è $\frac{A_1 \cdot h_1 - A_2 \cdot h_2}{3}$. Dobbiamo sostituire le altezze delle due piramidi con l’altezza del tronco. Sappiamo che: $\begin{cases} h = h_1 - h_2 \\ \frac{A_1}{A_2} = \frac{h_1^2}{h_2^2} \end{cases}$. Risolvendo il sistema con un metodo a piacere, troviamo due soluzioni, una sola delle quali accettabile: $\begin{cases} h_1 = \dfrac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{A_1}-\sqrt{A_2}} \cdot h \\ h_2 = \dfrac{\sqrt{A_2}}{\sqrt{A_1}-\sqrt{A_2}} \cdot h \end{cases}$. Adesso sostituiamo:

$$\frac{1}{3} \cdot \left(A_1 \cdot \frac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{A_1}-\sqrt{A_2}} - A_2 \cdot \frac{\sqrt{A_2}}{\sqrt{A_1}-\sqrt{A_2}} \right) \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{A_1 \cdot \sqrt{A_1} - A_2 \cdot \sqrt{A_2}}{\sqrt{A_1}-\sqrt{A_2}} \cdot h$$

Semplifichiamo:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\left(A_1 \cdot \sqrt{A_1} - A_2 \cdot \sqrt{A_2}\right) \cdot \left(\sqrt{A_1}+\sqrt{A_2}\right)}{\left(\sqrt{A_1}-\sqrt{A_2}\right) \cdot \left(\sqrt{A_1}+\sqrt{A_2}\right)} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{A_1^2 + A_1 \cdot \sqrt{A_1 \cdot A_2} - A_2 \cdot \sqrt{A_1 \cdot A_2} - A_2^2}{A_1 - A_2} \cdot h =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\cancel{\left(A_1 - A_2\right)} \cdot \left(A_1 + A_2\right) + \cancel{\left(A_1 - A_2\right)} \cdot \sqrt{A_1 \cdot A_2}}{\cancel{A_1 - A_2}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \left(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 \cdot A_2}\right) \cdot h$$

E abbiamo ottenuto la tesi.

Verifiche

Lavoriamo insieme

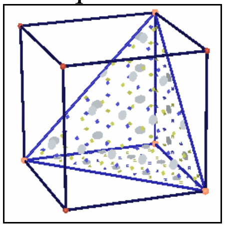
Un panetto di burro ha dimensioni $120 \times 65 \times 34$ *mm*^{3}, *per la spedizione i panetti sono confezionati in cartoni di* $250 \times 75 \times 330$ *mm*^{3}, *determinare quanti panetti al massimo possiamo mettere in ogni cartone.*

Il volume del singolo panetto è 265200 *mm*^{3}. Il volume del cartone è invece 6187500 *mm*^{3}. Il rapporto dei volumi è circa 23. Non è detto però che riusciamo effettivamente a metterli, perché ovviamente non possiamo né tagliare, né deformare i panetti. Supponiamo di mettere i panetti appoggiandoli tutti sulla stessa base, se questa è la base maggiore ciascuno occupa una superficie di 120×65 *mm*^{2} = 7800 *mm*^{2}. Se li appoggiamo sulla base maggiore del cartone, che ha superficie 250×330 *mm*^{2} = 82500 *mm*^{2}, possiamo mettere 82500/7800 ≈ 10 panetti. E ciò può effettivamente farsi, poiché 250 : 120 è maggiore di 2 e 330 : 65 > 5, quindi posso fare due file da 5 panetti. Poiché ognuno ha un'altezza di 34 *mm*, possiamo disporre un totale di 75/34 ≈ 2 strati, quindi massimo 20 panetti, lasciando uno spazio di $(6187500 - 20 \times 265200)$ *mm*^{3} = 883500 *mm*^{3}. Le altre due possibilità di poggiare i panetti sulle altre due basi sono lasciate per esercizio.

Livello 1

1. Con riferimento all'esercizio svolto, calcolare quanti panetti possiamo mettere nella scatola se poggiamo i panetti sulla loro faccia minore e ogni strato lo poggiamo sempre sulla base maggiore della scatola. Quanto spazio vuoto rimane? [0, l'altezza del panetto è maggiore di quella della scatola]
2. Con riferimento all'esercizio svolto, calcolare quanti panetti possiamo mettere nella scatola se poggiamo i panetti sulla loro faccia minore e ogni strato lo poggiamo sulla base minore della scatola. Quanto spazio vuoto rimane? [16; 1944300 *mm*^{3}]
3. In un ambiente di lavoro le normative vigenti dispongono che ogni lavoratore debba avere un minimo di 12 *m*^{3} di aria a disposizione, elevabili a 15 *m*^{3} se le condizioni di ventilazione non sono ottimali. Quanti studenti possono essere messi, unitamente all'insegnante, in un'aula di dimensioni $6{,}50 \times 7{,}20 \times 3{,}10$ *m*^{3}, nelle due configurazioni predette? [da 8 a 11]
4. Il problema precedente, a parità di volume disponibile, ha sempre la stessa soluzione? Giustificare la risposta. [No, dipende anche dalla superficie a disposizione, nonché dalla forma della stanza]
5. Tenuto conto di quanto stabilito nell'esercizio precedente, quanto deve essere larga al minimo un'aula magna alta 8,45 *m* e larga 23,40 *m*, per potere contenere 250 persone, nell'ipotesi normativa minima? [≈ 15,18 *m*]
6. Numericamente il volume di un cubo uguaglia la superficie esterna. Determinare la misura dello spigolo. [6]
7. Per effettuare un calco di statuine alte 6 *cm* sono necessari 0,81 *dl* di gesso. Quanti litri di gesso sono necessari per creare 750 statuine simili alla precedente ma alte 2 *cm*? [2,25]
8. Sezioniamo una piramide con un piano parallelo alla base in modo da ottenere un tronco di piramide di altezza metà di quella della piramide. Se il volume della piramide è 1 *m*^{3}, quanto misura quello del tronco? [7/8 *m*^{3}]
9. La piramide di Cheope ha una base quadrata di lato circa 230,34 *m* e un'altezza di circa 138 *m*. Nell'antichità la sua altezza era invece di circa 146,6 *m*. Di quanto è diminuito in percentuale il volume racchiuso dall'attuale piramide rispetto all'antichità? [≈ 5,9%]
10. La Camera del Re, all'interno della piramide di Cheope, ha dimensioni di $10{,}47$ *m* $\times$ $5{,}234$ *m* e un soffitto piatto alto 5,974 *m*. Determinare la percentuale del suo volume rispetto alla piramide. [≈ 0,013%]
11. Un parallelepipedo rettangolo ha dimensioni $5 \times 5 \times 8$. Quadruplichiamo il suo volume raddoppiando lo spigolo della base quadrata. Di quanto aumenta in percentuale la sua superficie? [≈ 248%]
12. Con riferimento al precedente quesito, se invece ci limitiamo a quadruplicare lo spigolo più lungo, di quanto aumenta in percentuale la superficie? [≈ 329%]

13. Quanto misura il rapporto fra il volume di un cubo e quello del tetraedro trirettangolo ottenuto a partire

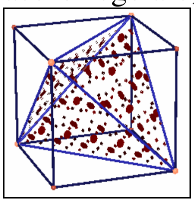


da esso, come mostrato in figura? [6]

14. Se due solidi sono tali che, posti su uno stesso piano, le sezioni ottenute con piani paralleli a quello base hanno aree diverse, possiamo dire che i solidi hanno diverso volume? Giustificare la risposta. [No]

Livello 2

15. Con riferimento al precedente quesito, se avessimo fatto lo stesso con un parallelepipedo rettangolo non cubo, il risultato sarebbe cambiato? Giustificare la risposta. [No]
16. Calcolare il volume di un parallelepipedo rettangolo le cui facce hanno aree che misurano rispettivamente 12, 8 e 6. [24]
17. Un parallelepipedo rettangolo a base quadrata ha il terzo spigolo metà degli altri due. Se la superficie totale è 1296 m^2, calcolare il volume. [2916 m^3]
18. Sezioniamo una piramide retta con un piano parallelo alla base in modo da ottenere un tronco di piramide di volume metà di quello della piramide. Se l'altezza della piramide è 1 m, quanto misura quella del tronco? *Suggerimento* Se l'altezza della piramide eliminata è x volte quella della piramide iniziale la sua area rispetto a quella della piramide è x^2 volte. $\left[\left(1-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)m\right]$
19. Il volume di un parallelepipedo rettangolo è 8 cm^3, la superficie è 32 cm^2. Se le tre dimensioni sono tali che, scritte in ordine crescente, il rapporto fra la seconda e la prima è uguale a quello fra la terza e la seconda, quanto misura la loro somma? [8]
20. Aumentiamo ciascuno spigolo di un cubo del 50%, qual è l'aumento percentuale del volume del cubo? [12,5%]
21. Congiungendo quattro degli otto vertici di un cubo si ottiene un tetraedro regolare, quanto misura il



volume del cubo se il lato del tetraedro misura $2\cdot\sqrt{2}$? [64]

22. A partire da un foglio rettangolare 10 × 14 costruiamo una scatola aperta, tagliando da ogni angolo del foglio un quadrato di lato 1. Determinare il volume della scatola. [96]
23. Determinare il rapporto fra i volumi del cubo e dell'ottaedro regolare suo duale, i cui vertici sono i punti medi delle facce del cubo. [6]
24. Determinare il rapporto fra i volumi di un tetraedro regolare e del tetraedro in esso inscritto i cui vertici sono i centri delle facce. [27]
25. Determinare il rapporto fra i volumi di un ottaedro regolare e del cubo suo duale. [9/2]
26. Un parallelepipedo rettangolo ha facce di aree x, y e z unità quadrate. Calcolare la misura del volume. $\left[\sqrt{x\cdot y\cdot z}\right]$
27. Qual è il massimo numero di scatole di dimensioni 2 × 2 × 3 che possono essere messe dentro una scatola di dimensioni 3 × 4 × 5? [4]
28. Uniamo i punti medi degli spigoli di un tetraedro regolare ottenendo un altro tetraedro. In che rapporto è il volume di questo con quello iniziale? Giustificare la risposta. [La metà]

Livello 3

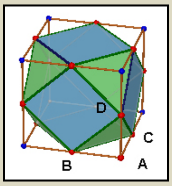
29. Determinare il volume di un tetraedro trirettangolo che ha tre facce che sono triangoli rettangoli isosceli di lato uguale lungo ℓ. $\left[\frac{\ell^3}{6}\right]$
30. La piramide di Micerino attualmente ha una base quadrata di lato 103,4 m e un'altezza di 62 m. Se pensiamo di sezionare la piramide di Cheope (es. 9 per i dati) con un piano parallelo alla base in modo

che togliendo tutta la parte al di sopra, quella rimanente abbia lo stesso volume racchiuso dalla piramide di Micerino, a che altezza dal suolo dovremmo porre il piano sezione? [≈ 76 *m*]

Lavoriamo insieme

Abbiamo visto che il cuboottaedro si ottiene eliminando da ogni angolo di un cubo un tetraedro regolare in modo da far divenire ogni faccia quadrata a forma di esagono regolare. Se il cubo ha volume 6 *unità cubiche, quanto misura il volume del cuboottaedro*?

In pratica abbiamo tagliato dal cubo 8 tetraedri uguali. Consideriamone uno di questi, per esempio *ABCD* in figura. In esso *AD* è altezza relativa alla base *ABC* che è un triangolo rettangolo di ipotenusa *BC*, quindi il volume del tetraedro *ABCD* è $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ell^2\cdot\ell=\frac{1}{6}\cdot\ell^3$, dove abbiamo indicato con ℓ la misura comune agli spigoli *AB*, *AC* e *AD*. Ma ℓ è metà dello spigolo del cubo, che è $\sqrt[3]{6}$. Quindi abbiamo eliminato un volume



di $8\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{\sqrt[3]{6}}{2}\right)^3=8\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{8}=1$. Infine il volume del cubottaedro è 5 unità cubiche.

Livello 2

Determinare una formula per il calcolo del volume dei seguenti poliedri in funzione del loro spigolo ℓ

31. Cubottaedro ; Tetraedro regolare ; Tetraedro troncato ; Cubo troncato $\left[\frac{5}{6}\ell^3;\frac{\sqrt{2}}{12}\ell^3;\frac{23\cdot\sqrt{2}}{12}\ell^3;\left(7+\frac{14\cdot\sqrt{2}}{3}\right)\ell^3\right]$

32. Ottaedro regolare ; Ottaedro troncato ; Rombicubottaedro $\left[\frac{\sqrt{2}}{3}\ell^3;\frac{5\cdot\sqrt{2}}{3}\ell^3;\left(4+\frac{10\cdot\sqrt{2}}{3}\right)\ell^3\right]$

33. Ricordando che il cubo troncato si ottiene dividendo ogni spigolo di un cubo secondo i numeri $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{2}-1;1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, determinare una formula per il calcolo del volume di un cubo troncato in funzione dello spigolo del cubo. $\left[7\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{3}\ell^3\right]$

34. Determinare una formula per il calcolo volume del tetraedro troncato in funzione della misura dello spigolo dell'ottaedro ℓ. $\left[\frac{8\cdot\sqrt{2}}{27}\ell^3\right]$

35. Determinare una formula per il calcolo volume del tetraedro troncato in funzione della misura dello spigolo del tetraedro ℓ. $\left[\frac{23\cdot\sqrt{2}}{324}\ell^3\right]$

36. Una piramide ha per base un triangolo equilatero di lato che misura ℓ, se gli altri spigoli della piramide hanno misura *s*, determinarne il volume. $\left[\frac{\ell^2\cdot\sqrt{3s^2-\ell^2}}{12}\right]$

37. Tenuto conto del problema precedente stabilire la condizione che devono verificare le misure degli spigoli *s* se ℓ = 1. $\left[s>\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

Volume dei corpi rotondi

Quanto detto nel paragrafo precedente si può adesso applicare anche al calcolo dei volumi dei corpi rotondi.

Teorema 6

Il volume di un cilindro si ottiene moltiplicando l'area della base per l'altezza. In simboli $\pi \cdot r^2 \cdot h$.
Dimostrazione (pseudo)
Come già visto per i prismi, di cui il cilindro è l'analogo nei corpi rotondi, le sezioni con piani paralleli alla base sono tutte cerchi uguali. Essi sono infiniti, ma tali da costituire con i loro "spessori" l'altezza. Pertanto il volume è, come per il prisma, area di base per altezza.

Possiamo quindi enunciare anche i seguenti ovvi risultati.

Teorema 7

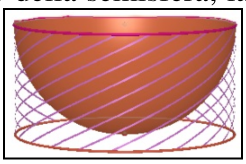
Il volume di un cono si ottiene moltiplicando l'area della base per un terzo dell'altezza. In simboli $1/3\pi r^2 h$.
Dimostrazione
Basta porre sullo stesso piano un cono e una piramide di uguale altezza e con la base equivalente a quella del cerchio, quindi applichiamo il principio di Cavalieri.

Esempio 4

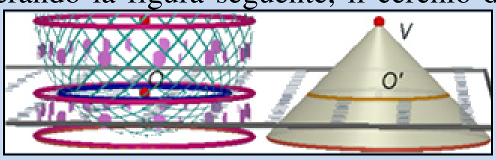
Il confronto fra i risultati dei teoremi 7 e 8 dicono che, come già visto per prisma e piramide, possiamo suddividere un cilindro in 3 coni uguali.

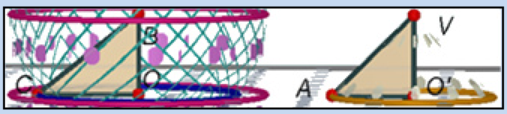
Teorema 8

Il volume di un tronco di cono è $1/3\pi \cdot (R^2 + r^2 + rR) \cdot h$, in cui r e R sono i raggi delle basi e h è l'altezza.
Dimostrazione Per esercizio

Per determinare il volume della sfera consideriamo prima quello di una particolare figura. Nei "*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*", Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio r e il cilindro a essa circoscritto che perciò ha altezza pari al raggio della semisfera; la scodella è il solido ottenuto togliendo la semisfera dal cilindro, come mostrato in figura.  Vogliamo provare il seguente risultato.

Teorema 9

Il volume di una scodella di Galileo è lo stesso di un cono che ha la base equivalente a quella del cilindro e l'altezza uguale al raggio della semisfera.
Dimostrazione
Per il principio di Cavalieri se poniamo scodella e cono con le basi sullo stesso piano, in modo che abbiano anche altezze parallele e ovviamente uguali, allora le sezioni con qualsiasi piano parallelo alle basi devono avere la stessa area. Considerando la figura seguente, il cerchio di centro O' deve essere equivalente alla corona circolare di centro O. 

Diciamo r la misura del raggio della sfera. Consideriamo la successiva figura, 

i cateti OB e VO' dei due triangoli rettangoli sono ovviamente uguali, diciamo z la loro misura. Quindi avremo $\overline{OC} = \sqrt{r^2 - z^2}$. Dato che r è anche il raggio di base del cilindro, la corona circolare ha area pari a $\pi r^2 - \pi\left(r^2 - z^2\right) = \pi z^2$, Questa è proprio la tesi, dato che il cono ha altezza uguale al proprio raggio, quindi anche il triangolo $VO'A$ è isoscele, cioè $\overline{O'A} = \overline{VO'} = z$.

Segue allora il risultato che cercavamo sulla sfera.

Corollario 2

Il volume di una sfera è $4/3\pi r^3$.

Dimostrazione

Infatti il volume della scodella è dato dalla differenza fra il volume del cilindro e quello della semisfera. Il volume del cilindro è $\pi r^2 h = \pi r^3$, dato che abbiamo già osservato che l'altezza del cilindro è pari al raggio della semisfera, che a sua volta è uguale a quello del cilindro. Pertanto abbiamo: $\pi r^3 - \frac{V_S}{2} = \frac{1}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{V_S}{2} = \frac{2}{3}\pi r^3 \Rightarrow V_S = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Abbastanza facilmente possiamo dimostrare i seguenti risultati sui volumi delle parti della sfera.

Teorema 10

Il volume di un segmento sferico a una base di altezza h, e raggio r è $1/3\pi \cdot (3r - h) \cdot h^2$.

Teorema 11

Il volume di un segmento sferico a due basi di altezza h e raggi r_1 e r_2 è $1/6\pi \cdot (3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2) \cdot h$.

Teorema 12

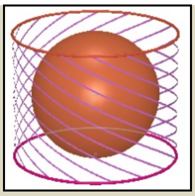
Il volume di uno spicchio sferico di ampiezza $\alpha°$ è $\pi r^3 \cdot \frac{\alpha°}{270°}$.

Esempio 5

Una semisfera è uno spicchio sferico di ampiezza 180°, quindi secondo la formula del Teorema 12 il suo volume è $\pi \cdot r^3 \cdot \frac{180°}{270°} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3$, cioè quello che otterremmo dimezzando il volume della sfera.

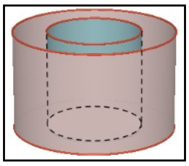
Verifiche

Lavoriamo insieme

Inscriviamo una sfera in un cilindro,  *determinare il rapporto fra i volumi dei due solidi.*

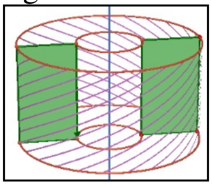
La figura ci suggerisce che l'altezza del cilindro è quanto il diametro della sfera, che è anche diametro della base del cilindro. Cioè il cilindro è equilatero. Quindi il volume del cilindro: $V_C = \pi \cdot r^2 \cdot 2r = 2\pi \cdot r^3$ e quello della sfera: $V_S = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$, perciò $\frac{V_C}{V_S} = \frac{\cancel{2}\pi \cdot r^3}{\frac{\cancel{4}^2}{3} \cdot \pi \cdot r^3} = \frac{3}{2}$.

Livello 1

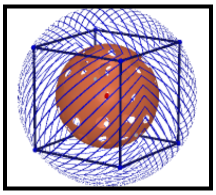
1. Determinare il rapporto fra il volume di una sfera e del cilindro in essa inscritto. $\left[\sqrt{3}\right]$
2. Determinare il rapporto fra il volume di una sfera e del cono in essa inscritto. [Non si può determinare, perché in una sfera si possono inscrivere infiniti coni]
3. Determinare il rapporto fra il volume di una sfera e del cono equilatero in essa inscritto. [32/9]
4. Determinare il rapporto fra il volume di un cono equilatero e della sfera in esso inscritta. [5/4]
5. Un contenitore cilindrico contenente olio combustibile è pieno per 2/5, sapendo che aggiungendo 6 litri sarà pieno per 5/8, determinare la capacità del contenitore in litri. [80/3]
6. Un cono è inscritto in una semisfera, in modo che i due solidi abbiamo la base in comune e il vertice del cono sia un punto della semisfera, qual è il rapporto dei due volumi? [2]
7. Un cilindro ha altezza 3 e raggio di base 8. A partire da esso costruiamo altri due cilindri, uno di altezza $(3 + x)$ e raggio 8, l'altro di altezza 3 e raggio $(8 + x)$. Se i due cilindri hanno lo stesso volume, quanto vale x? [16/3]
8. Un cilindro ha altezza 2 e raggio di base r. A partire da esso costruiamo altri due cilindri, uno di altezza 8 e raggio r, l'altro di altezza 2 e raggio $(6 + r)$. I due cilindri hanno lo stesso volume, quant'è r?[6]
9. Un cono circolare retto ha la base che ha il raggio uguale a quello di una data sfera, il cui volume è doppio di quello del cono. Determinare il rapporto fra l'altezza e il raggio di base del cono. [2]
10. Facciamo ruotare un triangolo rettangolo di cateti lunghi 3 e 4, di un giro completo rispetto a ciascuno dei cateti, quanto misura il rapporto dei volumi dei due coni così determinati? [3/4]
11. Un pozzo ha la forma di cilindro di diametro 2 *m*.  Per evitare infiltrazioni si costruisce tutto attorno al pozzo un rivestimento di muratura per un certo spessore. Se sappiamo che il volume della parte in muratura è uguale al volume del pezzo, quanto misura lo spessore? $\left[\left(\sqrt{2}-1\right)m\right]$
12. Una lattina standard è un cilindro di diametro 5,24 *cm*. Se può contenere 250 *ml*, quanto è alta, in centimetri? [≈ 11,6]
13. Con riferimento al precedente esercizio, senza mutare il diametro di base, quanto sarà alta la lattina se conterrà 330 *ml*? [≈ 15,3]
14. Una lattina *slim* invece ha un diametro di 5 *cm*, se ha la stessa altezza del precedente esercizio, quanto liquido potrà contenere? [≈ 300 *ml*]
15. In una scatola di scarpe di 140 *mm* × 280 *mm* × 93 *mm*, inseriamo sfere di polistirolo di diametro 3 *cm*. Quante sfere mettiamo al massimo e quanta aria rimane nella scatola? [108; ≈ 2119 cm^3]

Livello 2

16. Facciamo ruotare un rettangolo di lati lunghi 3 e 4, di un giro completo attorno a una retta appartenente allo stesso piano del rettangolo, parallela al lato più lungo e distante da esso 2. Quanto misura il volume della regione anulare così determinata? [84π]

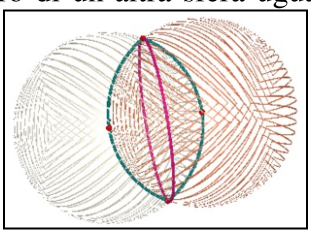


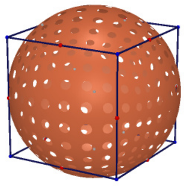
17. Con riferimento al precedente esercizio, cambia qualcosa se la rotazione avviene attorno a una retta parallela al lato più corto, sempre distante 2 da esso? [Sì, il volume diventa 96π]
18. Dimostrare che se in un cilindro equilatero inscriviamo un cono e una sfera, il volume della sfera è dato dalla differenza fra il volume del cilindro e quello del cono.
19. In una stessa sfera inscriviamo e circoscriviamo un cilindro equilatero, quanto misura il rapporto dei loro volumi? $\left[2\cdot\sqrt{2}\right]$
20. In una stessa sfera inscriviamo e circoscriviamo un cono equilatero, quanto misura il rapporto dei loro volumi? [8]
21. Un cilindro è inscritto in una sfera. Il rapporto fra il raggio della sfera e l'altezza del cilindro è 3/2, determinare il rapporto fra i loro volumi. [18/5]
22. Una bolla di sapone si posa su un tavolo senza spezzarsi, ma formando una semisfera di uguale volume della bolla. Determinare il rapporto fra i raggi dei due solidi. $\left[\sqrt[3]{2}\right]$
23. Per raddoppiare il volume di una lattina di aranciata aumentiamo il diametro del 20%, di quanto dobbiamo aumentarne l'altezza, in percentuale? [≈ 39%]
24. In una lattina di forma cilindrica vi sono 2 palle da tennis che hanno lo stesso diametro della lattina e, insieme, la stessa altezza della lattina. Quanto spazio all'interno resta libero? [1/3]
25. Determinare il rapporto fra i volumi delle sfere inscritte e circoscritte allo stesso cubo $\left[3\cdot\sqrt{3}\right]$



Livello 3

26. Con riferimento al problema 24, cosa accade se le palline sono n? [Lo spazio libero è in ogni caso 1/3]
27. Una lattina cilindrica è formata usando un pezzo di metallo quadrato e due dischi circolari di diametro 5,24 *cm*. Quanto liquido può contenere, in *ml*? [≈ 355]
28. In un quadrato di lato 1 *m*, fatto di un certo materiale, tracciamo un arco di centro uno dei vertici *A* e passante per altri due vertici consecutivi ad *A*. Tagliamo il settore circolare così determinato e con esso costruiamo un cono. Qual è il volume di tale solido? $\left[\frac{\sqrt{15}}{192}\pi m^3\right]$
29. Consideriamo la sfera passante per il centro di un'altra sfera uguale. Quanto misura in funzione del raggio, il volume comune? $\left[\frac{3\sqrt{3}-1}{12}\pi r^3\right]$



30. Il centro delle sfere inscritta e circoscritta a un cubo è anche centro della sfera che tocca tutti gli spigoli del cubo (mostrata in figura).  Determinare il rapporto dei volumi delle due sfere inscritta e circoscritta con questa terza sfera. $\left[\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}};\frac{3}{4}\cdot\sqrt{6}\right]$

31. In due cubi cavi uguali immettiamo delle sfere tutte uguali fra loro in modo che non sia possibile inserirne altre. Nel primo ne immettiamo 27, nel secondo 64 più piccole delle precedenti. Se le sfere sono costituite dello stesso materiale, quale dei due cubi così riempiti ha al suo interno maggiore spazio vuoto? [I due cubi hanno uguali spazi vuoti]

32. Una semicirconferenza di diametro 12 *cm* è piegata in modo da formare un cono, il cui vertice è il centro della semicirconferenza e gli estremi del diametro coincidano. Quanto misura il volume? $\left[9\cdot\sqrt{3}\cdot\pi\, cm^3\right]$

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

1. Dimostrare che in un tetraedro trirettangolo (che ha tre facce che sono triangoli rettangoli), i cui spigoli della faccia che non è un triangolo rettangolo, misurano a, b e c, il volume è $\sqrt{\left(S^2-a^2\right)\cdot\left(S^2-b^2\right)\cdot\left(S^2-c^2\right)}/6$, in cui S^2 è la somma dei quadrati degli altri tre spigoli.
2. Dimostrare che il raggio della sfera inscritta in un tetraedro è il rapporto fra il triplo del volume e la superficie.
3. Dimostrare che unendo il baricentro di un tetraedro ai vertici dello stesso si ottengono 4 tetraedri di uguale volume.
4. Dimostrare che il raggio R della sfera circoscritta a un tetraedro equifacciale di spigoli ℓ_i, $i = 1, \ldots, 3$ e la cui faccia generica ha area S misura $\frac{\sqrt{9\cdot V^2+\ell_1^2\cdot\ell_2^2\cdot\ell_3^2}}{4S}$.
5. Dimostrare che il raggio della sfera inscritta in un tetraedro è uguale al rapporto fra il triplo del volume e la superficie del tetraedro.

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi

1. (Liceo scientifico suppletiva 1977/78) In un sistema di assi coordinati si considerino: la parabola di equazione $y=2x-x^2$ che incontra l'asse delle ascisse nei punti O e C; la retta di equazione $y = k$ (con $0 < k < 1$) che incontra la parabola nei punti A e B. Si esprima, mediante il parametro k, il volume del solido generato dal trapezio $OABC$ in una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse. $\left[V(k)=\frac{2}{3}\pi k^2\cdot\left(1+2\cdot\sqrt{1-k}\right)\right]$
2. (Liceo scientifico suppletiva 1983/84) Si considerino le parabole di equazioni $y^2 = 1/2x^2$, $y^2 = -x + a^2$. Nella regione finita di piano compresa fra le due curve e l'asse delle ascisse si inscriva il rettangolo

con i lati paralleli agli assi coordinati, si determini il volume del cilindro ottenuto in una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse del predetto rettangolo, in funzione della retta $y = h$.

$[V(h) = \pi\,(-3h^4 + a^2h^2)]$

3. (Istituto magistrale 1990/91) Il quadrangolo *ABCD* ha le diagonali *AC* e *DB* tra loro perpendicolari e tali che, detto *E* il loro punto d'incontro, risulta: $\overline{DE} = \overline{EB} = 2 \cdot \overline{CE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{EA} = 2$. Si dimostri che i triangoli *DEC*, *DEA* e *DAC* sono fra loro simili. Si calcoli il rapporto dei volumi dei solidi che si ottengono facendo ruotare di un giro completo il quadrangolo intorno a due suoi lati diseguali. [4/3]
4. (Istituto magistrale 1996/97) È assegnato il tetraedro regolare di vertici *A*, *B*, *C*, *D* e di spigolo lungo *s*. a) Calcolare il suo volume. b) Indicato con *E* il punto dello spigolo *AC* che a partire da *A* lo divide internamente in parti direttamente proporzionali ai numeri 2 e 3, condurre per *E* il piano β parallelo ad α e, indicata con *S*" la sezione di β con il tetraedro, calcolare il volume della piramide avente come vertice *A* e come base *S*". $\left[\text{a) } \frac{\sqrt{2}}{12}s^3;\text{b) } \frac{\sqrt{2}}{375}s^3\right]$
5. (Liceo scientifico PNI 1996/97) Si consideri in un piano α un rettangolo *ABCD* i cui lati *BC* e *AB* misurano rispettivamente *a* e 2*a*. Sia *AEF* con $E \in AB$ e $F \in CD$, un triangolo isoscele la cui base *AE* ha misura 2*r*. Il candidato: a) detta C_1 la circonferenza di diametro *AE* e appartenente al piano γ passante per *AB* e perpendicolare ad α, e detti T_1 e T_2 i coni di base C_1 e vertici rispettivamente nei punti *F* e *C*, dimostri che le sezioni C'_1 e C'_2 di detti coni con il piano γ′, passante per la retta *s*e parallelo al piano γ, sono circonferenze; b) determini i volumi dei coni T_1 e T_2. $\left[V_1 = V_2 = \frac{1}{3}\pi a r^2\right]$
6. (Istituto magistrale 1998) In una sala ben arredata fa bella mostra di sé un vaso il cui interno ha la forma di un cono circolare retto di apotema 30 *cm* e altezza 24 *cm*. Nel vaso è adagiata una sfera che tocca le pareti del cono ad una distanza di 10 cm dal vertice, si calcoli il raggio della sfera; si dica, data anche l'impenetrabilità della sfera, se nel vaso possono essere versati sei litri di acqua e, nel caso affermativo, l'altezza, approssimata ai decimi di millimetro, da questa raggiunta. [7,5 *cm;* sì; 22,9 *cm*]
7. (Istituto magistrale PNI 1998/99) Un gioiello è stato realizzato prevalentemente in oro (peso specifico = 19,32 g/m^3) e la sua forma geometrica è un tetraedro regolare di altezza $\sqrt{3}\,cm$. L'oro impiegato nella realizzazione del gioiello occupa il 75% del volume del tetraedro. Quale è stato il costo dell'oro se la sua quotazione al momento della realizzazione era di 8,35 euro per grammo? [€ 102,09]
8. (Liceo scientifico PNI 1998/99) In un piano α è assegnato il triangolo *ABC*, retto in *B*, i cui cateti *AB* e *BC* misurano rispettivamente 4 e 3. Si conduca per il punto *A* la perpendicolare al piano α e sia *V* un punto di questa per cui $\overline{VA} = \overline{AB}$. Il candidato a) dimostri, geometricamente o algebricamente, che, come tutte le altre facce del tetraedro *VABC*, anche la faccia *VBC* è un triangolo rettangolo, il cui angolo retto è $V\hat{B}C$; b) calcoli il volume e la superficie totale del tetraedro; $\left[8;6\cdot\left(4+\sqrt{2}\right)\right]$
c) detto *M* il punto medio di *VA* e *P* un punto dello stesso segmento a distanza *x* da *V*, esprima in funzione di *x* il volume *V* del tetraedro *MPQR*, essendo *Q* ed *R* le rispettive intersezioni degli spigoli *VB* e *VC* con il piano β parallelo ad α e passante per *P*. $\left[V\left(x\right) = \frac{x^2 \cdot |x-2|}{8}\right]$
9. (Istituto magistrale 2000/2001) La misura, in *decimetri*, del raggio di una sfera è data dalla soluzione dell'equazione: $(x - 1)^3 + x^2 = x \cdot (x - 1)^2 + 4$. Nella sfera sono inscritti due coni *circolari retti* aventi la base comune e le superfici laterali nel rapporto 3/4 Il candidato calcoli: a) il rapporto tra i volumi dei due coni; b) la misura del raggio della base comune dei coni; c) il peso, approssimato ai *grammi*, del solido costituito dai due coni, supposto che sia realizzato con legno di noce di peso specifico 0,82.
$\left[\text{a) } \frac{9}{16};\text{ b) } 2,4dm;\text{ c) } 24,7\right]$
10. (Liceo scientifico 2000/2001) Si consideri il cubo di spigoli *AA*′, *BB*′, *CC*′, *DD*′, in cui due facce opposte sono i quadrati *ABCD* e *A*′*B*′*C*′*D*′. Sia *E* il punto medio dello spigolo *AB*. I piani *ACC*′*A*′ e *D*′*DE*

dividono il cubo in quattro parti. Dimostrare che la parte più estesa è il quintuplo di quella meno estesa.

11. (Liceo scientifico 2001/2002) Due tetraedri regolari hanno rispettivamente aree totali A' e A'' e volumi V' e V''. Si sa che $A'/A'' = 2$. Calcolare il valore del rapporto V'/V''. $\left[2\cdot\sqrt{2}\right]$
12. (Liceo scientifico 2001/2002) Il rapporto fra la base maggiore e la base minore di un trapezio isoscele è 4. Stabilire, fornendone ampia spiegazione, se si può determinare il valore del rapporto tra i volumi dei solidi ottenuti facendo ruotare il trapezio di un giro completo dapprima intorno alla base maggiore e poi intorno alla base minore o se i dati a disposizione sono insufficienti. [2/3]
13. (Liceo scientifico 2002/2003) Si consideri un tetraedro regolare T di vertici A, B, C, D. a) Indicati rispettivamente con V ed S il volume e l'area totale di T e con r il raggio della sfera inscritta in T, trovare una relazione che leghi V, S ed r. b) Considerato il tetraedro regolare T' avente per vertici i centri delle facce di T, calcolare il rapporto fra le lunghezze degli spigoli di T e T' e il rapporto fra i volumi di T e T'. c) Condotto il piano α, contenente la retta AB e perpendicolare alla retta CD nel punto E, e posto che uno spigolo di T sia lungo s, calcolare la distanza di E dalla retta AB. d) Considerata nel piano α la parabola p avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B ed E, riferire questo piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali e trovare l'equazione di p.
$$\left[\text{a) } V=\frac{r\cdot S}{3};\text{ b) } 27;\text{ c) } \frac{s}{\sqrt{2}}; p: y=-\frac{2\cdot\sqrt{2}}{s}\cdot x^2+\frac{s}{\sqrt{2}}\right]$$
14. (Liceo scientifico 2004/2005) I centri delle facce di un cubo sono i vertici di un ottaedro. È un ottaedro regolare? Quale è il rapporto tra i volumi dei due solidi? [Sì; 6]
15. (Liceo scientifico 2005/2006) La capacità di un serbatoio è pari a quella del cubo inscritto in una sfera di un metro di diametro. Quanti sono, approssimativamente, i litri di liquido che può contenere il serbatoio? [≈ 192,4]
16. (Liceo scientifico 2007/2008) Si consideri la seguente proposizione: "*Se due solidi hanno uguale volume, allora, tagliati da un fascio di piani paralleli, intercettano su di essi sezioni di uguale area*". Si dica se essa è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta. [No]
17. (Liceo scientifico 2007/2008) Il triangolo rettangolo ABC ha l'ipotenusa $AB = a$ e l'angolo $C\widehat{A}B=\pi/3$ ed è la base di un solido W. Si calcoli il volume di W sapendo che le sue sezioni, ottenute tagliandolo con piani perpendicolari ad AB, sono tutti quadrati. [$a^3/16$]
18. (Liceo scientifico 2012/2013) Di un tronco di piramide retta a base quadrata si conoscono l'altezza h e i lati a e b delle due basi. Si esprima il volume V del tronco in funzione di a, b e h, illustrando il ragionamento seguito. $\left[\frac{a^2+ab+b^2}{3}\cdot h\right]$

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

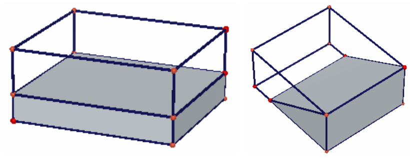
Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.

AHSME = Annual High School Mathematics Examination
HSMC = A&M University High School Mathematics Contest
MT = Mathematics Teacher, rivista della NCTM
RICE = Rice University Mathematics Tournament
ARML = American Regions Math League
K = Kangarou
NC = State Matematical Finals of North Carolina
SC = South Carolina Mathematical Contest

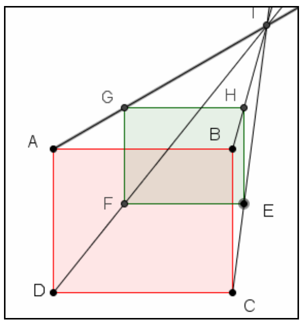
Lavoriamo insieme

Il seguente quesito è stato assegnato ai giochi matematici organizzati dall'Università della Nord Carolina nel 2007. *Un cubo è inscritto in una sfera, cioè tutti i suoi vertici sono punti della sfera. Determinare il rapporto fra il volume della sfera e il volume del cubo*. È facile capire che il diametro della sfera non è altri che la diagonale del cubo. Poiché tale diagonale, in termini dello spigolo è $\ell \cdot \sqrt{3}$, abbiamo $2r = \ell \cdot \sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \ell$. Quindi il rapporto cercato è $\frac{\frac{4}{3} \cdot \pi r^3}{\ell^3} = \frac{\frac{4}{3} \cdot \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \cdot \ell^3}{\ell^3} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \cdot \pi \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

1. (AHSME 1951) Il raggio di una scatola cilindrica è 8 pollici e la sua altezza 3 pollici. Di quanti pollici dobbiamo aumentare il raggio e l'altezza affinché non cambi il volume? [16/3]
2. (AHSME 1985) Il volume di un certo solido rettangolare è 8 cm^3, la sua superficie totale è 32 cm^2, e le tre dimensioni sono in progressione geometrica (cioè sono del tipo a, ab, ab^2, con $b > 0$ e diverso da 1). Quanto misura la somme delle lunghezze di tutti gli spigoli in cm? [32]
3. (MT1994) Una sfera di diametro 6 cm è messo dentro un cono cavo in modo che sia a esso tangente esternamente e la distanza fra il punto di tangenza e il vertice del cono sia 4 cm. Quanto liquido riesce a entrare nello spazio fra la sfera e il cono? [1,5 π cm^3]
4. (AHSME 1994) Incolliamo fra loro tre cubi di volumi 1, 8 e 27. In tal modo possono ottenersi diversi solidi. Quanto vale la minima superficie ottenibile? [72]
5. (MT1995) Tutto il ghiaccio in un contenitore si è sciolto. Il contenitore ha facce rettangolari alte 16 pollici. Se ruotiamo il contenitore (vedi le figure) l'acqua copre esattamente una faccia ma solo 3/4 del fondo. Se rimettiamo il contenitore in orizzontale a che livello si troverà l'acqua? [6 pollici]

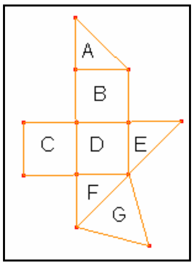


6. (MT1995) In figura vi è la vista prospettica di un solido rettangolare. AB = 15 e AD = 10. Trovare AE



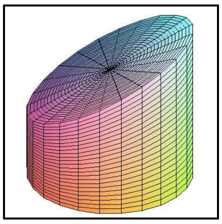
in modo che i numeri che misura la superficie e il volume siano uguali. [3]

7. (AHSME 1996) Dato un parallelepipedo rettangolo di lati lunghi 4, 4 e 3. A, B, e C sono adiacenti al vertice D. quanto vale la distanza perpendicolare di D dal piano determinato da A, B, e C? $\left[\frac{12}{\sqrt{34}}\right]$
8. (AHSME 1997) In figura, i poligoni A, E, ed F sono triangoli rettangoli isosceli; B, C, e D sono quadrati di lato 1; G è un triangolo equilatero. La figura può essere usata per formare un poliedro le cui



facce sono i poligoni. Determinare la misura del volume di tale poliedro. [5/6]

9. (AHSME 1998) Un cono retto di volume V, un cilindro retto di volume M, e una sfera di volume K hanno tutti lo stesso raggio, inoltre le altezze del cono e del cilindro sono uguali fra loro e al diametro della sfera. Quale delle seguenti scritte è vera? [A]
A) V –M + K = 0 B) V + M = K C) 2V = M + K D) $V^2 – M^2 + K^2 = 0$ E) 2V + 2M = 3K
10. (NC 2004) Una conduttura lunga 20 metri e di diametro 1 cm, serve a portare l'acqua calda, con un flusso di 2,8 litri al minuto. In quanto tempo, all'incirca l'acqua calda prodotta dalla caldaia riempie tutta la conduttura? [≈ 33,7 secondi]
11. (NC 2005) Una tanica cilindrica di altezza 22″ e diametro 18″ è posta sul terreno appoggiata sulla sua altezza ed è riempita d'acqua fino a una profondità di 13,5″. Sapendo che un gallone è circa 231″ cubici, trovare approssimativamente quanti galloni d'acqua vi sono nella tanica. [19,5]
12. (ARLM 2008) Un cubo ha area laterale A e volume 8A, determinare la lunghezza del suo spigolo. [48]
13. (HSMC 2006) Un'industria vende burro d'arachidi in contenitori cilindrici. Studi di mercato suggeriscono di usare contenitori più larghi per aumentare le vendite. Se il diametro dei contenitori è aumentato del 25% senza alterare il volume, di quale percentuale dobbiamo diminuire l'altezza? [36%]
14. (K2007) Un cono e un cilindro circolari, entrambi di altezza *h* e con le basi di raggio *r*, sono posti in modo che il volume della parte del cono contenuta nel cilindro è metà del volume del cono. Che frazione del volume del cilindro fornisce il volume della parte del cilindro contenuta nel cono? [1/6]
15. (NC2007) Un parallelepipedo rettangolo è costruito incollando dei cubetti di spigolo 1, ottenendo una superficie di 52 unità quadrate e uno spigolo di 2 unità. Quale fra i seguenti valori può misurare il volume del parallelepipedo? A) 18 B) 22 C) 24 D) 26 E) 32 [C]
16. (SC 2008) Un cilindro è sezionato da un piano formando il solido mostrato in figura. La base inferiore del solido è un cerchio di raggio 3. Quella superiore è un'ellisse. Il punto più in alto dell'ellisse è 6 unità più in alto della base. Il punto più basso dell'ellisse è 2 unità sopra la base. Quanto misura il volume del solido, in unità cubiche? [36π]

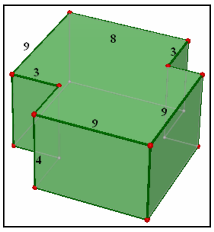


Questions in English

Working together

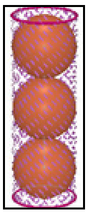
This problem was assigned at HSMC in 2006. *Given a cube, determine the ratio of the volume the cube to the volume of the octahedron whose vertices are the centers of each face of the cube.*
Let s be the length of an edge of the cube. Then the octahedron is composed of two pyramids with height $s/2$ and square base with side length of $\frac{s}{\sqrt{2}}$. Hence the volume of the octahedron is $2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{s}{2}=\frac{s^3}{6}$, and so the requested ratio is 6.

17. (AHSME 1950) The number of circular pipes with an inside diameter of 1 inch which will carry the same amount of water as a pipe with an inside diameter of 6 inches is? [36]
18. (MT1993) A regular drinking cup has a circular lower base 8 *cm* in diameter, a lip 12 *cm* in diameter, and a height of 10 *cm*. what is its volume? [$760\pi/3\ cm^3$]
19. (MT1994) Find the volume of this figure. All angles that appear to be right angles are right angles.



[492]

20. (MT1995) A baseless cylinder may be formed from an 8,5” × 11” sheet in two ways. They have the same lateral surface area. Are their volumes also equal? [No, 4,25π in^3 and 5,5π in^3]
21. (MT1997) Right triangle *ABC* has legs with lengths 19 and 95 units. The triangle is to be rotated in space about one of its three sides. What is the maximum possible volume of the resulting solid? $\left[\frac{171475}{3}\pi\right]$
22. (HSMC 1999) An open rectangular box is to be constructed with single ply cardboard on the sides and double ply on the bottom. Single ply cardboard costs 10 cents per square foot and double ply runs 15 cents per square foot. What is the cost of a box with square base and height twice its length if the volume is to be 54 ft^3. [$8,55]
23. (HSMC 1999) A cube of volume 216 cubic inches is inscribed in a sphere. What is the surface area of the sphere? [108π *in*^{2}]
24. (NC 2001) If the volume of a tetrahedron is doubled without changing its shape, by what factor is the surface area increased? $\left[\sqrt[3]{4}\right]$
25. (NC 2002) If the height of a cylindrical can is increased by 28%, by approximately what percentage should the diameter be increased in order to double the volume of the can? [25%]
26. (HSMC 2001) A box with an open top is to be constructed from a rectangular piece of cardboard with dimensions 12 by 20 by cutting out equal squares of side *x* at each corner and then folding up the sides. Express the volume as a function of *x*. [$4x \cdot (6 - x) \cdot (10 - x)$]
27. (HSMC 2003) A box with an open top is to be constructed from a square piece of cardboard with side 12 inches by cutting out equal squares of side *x* at each corner and then folding up the sides. Express the volume of the box as a function of *x*. [$(12 - 2x)^2 \cdot x$]
28. (HSMC 2003) Two cylindrical cans have the same volume. The height of one can is triple the height of the other. If the radius of the narrower can is 12 units, how many units are in the length of the radius of the wider can? Express your answer in simplest radical form. $\left[12\cdot\sqrt{3}\right]$
29. (NC 2004) A conical paper cup with height 16 cm and a 12 cm diameter for its top is filled to the top with water. If a fifth of the liquid is drunk by what percentage did the water level drop? (Round off[1] error to the nearest 0.1%.) [≈ 7.2%]
30. (HSMC 2004) Three tennis balls are stacked in a cylinder that touches the stack on all sides, on the top and on the bottom. Find the ratio of the volume of the balls to the volume inside the can. [2/3]



31. (HSMC 2008) A cylindrical tank with radius 4 feet and length 9 feet is lying on its side. The tank is filled with water to a depth of 2 feet. What is the volume of the water in cubic feet? $\left[48-36\cdot\sqrt{3}\right]$
32. (Rice 2010) A sphere of radius 1 is internally tangent to all four faces of a regular tetrahedron. Find the tetrahedron's volume. $\left[8\cdot\sqrt{3}\right]$

[1] Arrotonda

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia militare) Un prisma retto regolare a base esagonale è equivalente a un prisma retto regolare a base pentagonale avente la stessa altezza. Si può concludere che lo spigolo di base del primo prisma, rispetto a quello del secondo:
A) non si può stabilire, perché i dati sono insufficienti B) è maggiore C) è uguale D) è minore
2. (Accademia militare) Un recipiente ha la forma di un parallelepipedo rettangolo e le sue misure interne sono rispettivamente di metri 0,3; 0,4; 1,2. Quanti litri d'acqua può contenere il recipiente?
A) 144 B) 1,44 C) 14,4 D) 0,144
3. (Accademia Navale) Calcolare il rapporto tra i volumi di un cubo inscritto e di uno circoscritto a una stessa sfera.
4. (Scuola Superiore di Catania) Un contenitore a forma cilindrica ha una base circolare di raggio 2. all'interno vi è acqua fino a un'altezza h. All'interno del contenitore viene poggiato un cono d'acciaio con base circolare di raggio 1 e altezza L. Calcolare sotto quali condizioni su L e h il cono risulta completamente immerso dal liquido.
5. (Scuola Superiore di Catania) Calcolare il volume della porzione di sfera di raggio r delimitata da due piani paralleli, uno dei quali passante per il centro e distanti $r/2$ tra loro.
6. (Medicina 1997) Un cono e un cilindro circolari retti hanno uguale altezza e il raggio di base del cono uguale al diametro del cilindro. Detto V il volume del cono e W il volume del cilindro, V/W è:
A) 4/3 B) 1 C) 3/4 D) 2 E) dipendente dal raggio
7. (Odontoiatria 1997) Dato un cilindro retto a base circolare di raggio R e altezza $h = 2R$, qual e' il rapporto fra il suo volume e quello della sfera massima contenibile?
A) 3/2 B) 4/3 C) 6/π D) π/2 E) 3π
8. (Odontoiatria 1997) Dato un cubo di volume Vc ed una sfera di volume Vs (diametro sfera = lato del cubo), calcolare il rapporto $\frac{V_C - V_S}{V_C}$ A) 1 – π/6 B) 1 – π/2 C) π/6 D) π/3 E) π/2
9. (Odontoiatria 1998) Un cono circolare retto ha una base di raggio R e un'altezza di uguale valore R. Una sfera ha come raggio ancora il valore R. Quale è il rapporto tra il volume del cono e quello della sfera? A) 100 B) 1/250 C) 20 D) 0,25 E) 0,0005
10. (Odontoiatria 1998) Se il volume di un cubo è pari a $10^{-9}\ m^3$quanto vale in metri il lato del cubo?
A) $10^{-27}\ m$ B) $10^{-18}\ m$ C) $10^{-9}\ m$ D) $10^{-6}\ m$ E) $10^{-3}\ m$
11. (Veterinaria 1999) Due coni $C1$ e $C2$ circolari retti hanno uguale base di raggio R. L'altezza $H1$ del cono C1 è uguale alla metà dell'altezza $H2$ del cono $C2$. In che rapporto stanno i volumi $V1$ e $V2$ dei due coni? A) 1/2 B) 1/3 C) 1/4 D) 1/9 E) 1/π
12. (Ingegneria 1999) Un cono circolare retto ha raggio di base r e altezza h. Se si raddoppia il raggio di base e si dimezza l'altezza, il volume del cono
A) aumenta di $\pi r2$ B) diviene il doppio C) diviene la metà D) non cambia E) diviene il quadruplo
13. (Ingegneria 2000) Una sfera di raggio 2 *cm* e un cilindro circolare retto di raggio di base 2 *cm* hanno lo stesso volume. Allora l'altezza del cilindro, in *cm,* è A) 4/3 B) 8/3 C) 2/3 D) 4 E) 6
14. (Ingegneria 2000) Un triangolo rettangolo, avente cateti lunghi 1 *cm* e 2 *cm*, viene fatto ruotare di un giro completo una vola intorno al cateto minore, generando un cono C_1, e una volta intorno al cateto maggiore, generando un altro cono C_2. Quale delle seguenti affermazioni è esatta?
A) il volume di C_1 è il quadruplo del volume di C_2 B) il volume di C_1 è il doppio del volume di C_2
C) il volume di C_1 è uguale al volume di C_2 D) il volume di C_1 è la metà del volume di C_2
E) il volume di C_1 è un quarto del volume di C_2
15. (Veterinaria 2000) Un cilindro retto ha base di raggio r e altezza lunga $2r$. una sfera ha raggio r, possiamo affermare che: A) il volume della sfera è maggiore del volume del cilindro B) il volume della sfera è minore del volume del cilindro C) il rapporto tra il volume della sfera è quello del cilindro è 4π/3 D) il volume della sfera è metà del volume del cilindro E) il prodotto tra i due volumi è 4π/3
16. (Ingegneria 2002) Un cocomero di forma sferica viene tagliato in 16 fette tutte uguali tra loro. Se il diametro del cocomero è di 40 *cm*, il volume di ciascuna fetta,in cm^3, è
A) 40π/16 B) $40^3\pi/16$ C) $\pi^3/16$ D) 2000π/3 E) π/16
17. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza 2009) Sia dato un cubo avente volume uguale a 8. Allora la diagonale di una faccia del cubo ha lunghezza uguale a A) $\sqrt{2}$ B) $2\cdot\sqrt{2}$ C) $4\cdot\sqrt{2}$ D) $8\cdot\sqrt{2}$

18. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza) Nel piano cartesiano è dato un triangolo di vertici (1; 0), (0; 3), (3; 0). Qual è il volume del solido che si ottiene facendo ruotare il triangolo intorno all'asse y?
A) 8π B) 12π C) 16π D) 24π

19. (Ingegneria 2009) Date due sfere concentriche di raggio 1 e $r < 1$, che valore deve assumere r affinché il volume della parte esterna alla sfera minore sia la metà del volume della sfera maggiore?
A) 1/3 B) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ C) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ D) 1/2 E) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

20. (Facoltà scientifiche CISIA 2010) Dato un cono di altezza h, volume V e vertice P, si consideri un secondo cono con vertice P, che si ottiene sezionando il primo cono con un piano parallelo alla base a distanza $h/3$ dal punto P. Il secondo cono ha volume A) $V/9$ B) $V/12$ C) $V/24$ D) $V/27$ E) $V/18$

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_4_6.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	**2**	**3**	**4**
D	A	$\frac{\sqrt{3}}{9}$	$L \leq \frac{12}{11}h$
5	**6**	**7**	**8**
$2/9\pi r^3$	A	A	A
9	**10**	**11**	**12**
D	E	A	B
13	**14**	**15**	**16**
B	D	B	D
17	**18**	**19**	**20**
B	A	C	D

6. Geometria dello spazio ambiente

6.5 Geometria analitica in 3D

Prerequisiti

- Concetto di funzione.
- Concetto di luogo geometrico.
- Concetto di equazione e sua risoluzione.
- Geometria analitica dei punti.
- Geometria analitica delle coniche.
- Matrici e determinanti.

Obiettivi

- Rappresentare punti, rette e piani nello spazio.
- Comprendere che alcuni enti piani possono generalizzarsi facilmente nello spazio.
- Risolvere semplici questioni relative a rette e piani nello spazio cartesiano.
- Riconoscere le quadriche canoniche.

Contenuti

- Geometria analitica degli spazi a più di 2 dimensioni
- Piani e rette nello spazio cartesiano

Parole Chiave

Cilindro – Cono – Ellissoide – Paraboloide – Sfera – Quadriche

Geometria analitica degli spazi a più di 2 dimensioni

Il problema

Vogliamo rappresentare su un foglio di carta o su un monitor, una scatola a forma di cubo o di parallelepipedo. Come possiamo fare?

In questa Unità abbiamo parlato finora di riferimenti unidimensionali (sulla retta) e soprattutto bidimensionali (sul piano). Il mondo in cui viviamo ha però almeno 3 dimensioni: oltre le dimensioni comunemente chiamate *lunghezza* e *larghezza* vi è infatti la cosiddetta *profondità*. Sembrerebbe quindi più naturale e anche più semplice parlare di spazi a tre dimensioni. Da un punto di vista geometrico però, ciò non è né semplice, né naturale. Infatti uno dei problemi più grossi con i quali ci scontriamo è quello della cosiddetta *visualizzazione*: quasi tutti i supporti più comuni che utilizziamo per rappresentare oggetti spaziali sono bidimensionali (la lavagna, il foglio di quaderno, il monitor, ...), o comunque hanno una *profondità* irrisoria. L'enorme difficoltà nella rappresentazione di paesaggi o di persone, proprio per la mancanza di *profondità* è testimoniata anche dalle arti pittoriche. Persino i quadri di sommi artisti come Giotto o Cimabue possono apparirci sotto certi punti di vista quasi *ridicoli* nelle loro rappresentazioni *sproporzionate*. Solo l'applicazione delle matematiche all'arte pittorica, a partire da Leon Battista Alberti, Piero delle Francesca e altri, ha portato alla scoperta della *prospettiva*, cioè a una rappresentazione pittorica che, pur rimanendo bidimensionale, *simulava* meglio gli spazi tridimensionali che voleva descrivere. Analoghi problemi si presentano anche per la geometria analitica, almeno quando cerchiamo di visualizzare gli oggetti (punti, segmenti, rette poliedri, ...); vengono invece del tutto superati quando ci limitiamo ad associare ai punti dei numeri che ne rappresentano la *posizione* e operiamo poi su di essi con le regole dell'algebra. In questo modo, anzi, arriviamo quasi all'assurdo di operare con tecniche matematiche su oggetti che non solo non riusciamo a visualizzare ma nemmeno a *immaginare*.
Cominciamo a impostare il problema per gli spazi a 3 dimensioni.

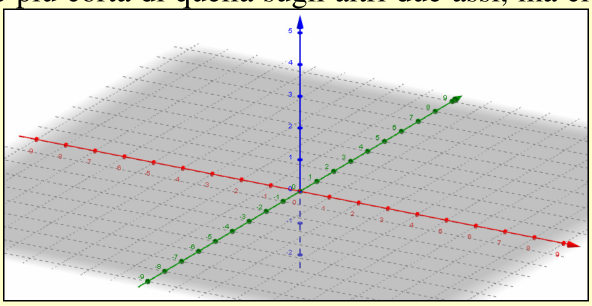
Definizione1

L''insieme $\{O, x, y, z, u\}$, formato da tre rette x, y e z a due a due ortogonali fra loro e incidenti nel punto O e dalla misura u di un segmento, si chiama **sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico nello spazio**.

Si capisce il perché di una retta in più, essa rappresenta né più e né meno che il riferimento necessario per la terza dimensione.

Esempio 1

In figura vediamo un esempio di spazio cartesiano ortogonale. Notiamo subito che le difficoltà a cui abbiamo accennato si sono mostrate reali, e il disegno (effettuato il software Geogebra) risente del fatto che è solo una simulazione dell'ambiente spaziale. Le misure mostrate sugli assi sembrano diverse ed in effetti, come misure nel piano lo sono. La tacca sull'asse verde (x) è più corta di quella sugli altri due assi, ma ciò serve appunto a dare la sensazione della terza dimensione.



Non vi sono invece difficoltà nel definire che cosa intendiamo per punto dello spazio cartesiano.

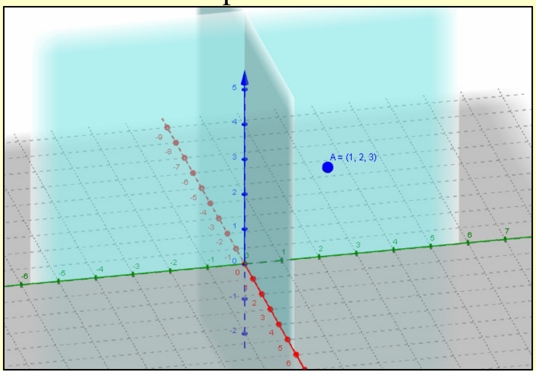
Definizione 2

Diciamo **punto dello spazio cartesiano ortogonale** una terna ordinata di numeri reali, $(x;\ y;\ z)$ che rappresentano le coordinate delle proiezioni del dato punto sui tre assi coordinati.

In pratica la coordinata x rappresenta la distanza (con segno positivo o negativo a seconda che si trovi da una parte o dall'altra tenuto conto dell'orientamento stabilito sui rispettivi assi) dal piano determinato dagli assi y e z, che brevemente indichiamo con yz. Analogamente per la coordinata y e il piano xz e la coordinata z e il piano xy.

Esempio 2

Per quanto affermato nella definizione precedente i punti $(x; 0; 0)$ sono tutti e soli quelli che appartengono all'asse x, i punti $(0; y; 0)$ quelli dell'asse y e i punti $(0; 0; z)$ quelli dell'asse z. L'origine naturalmente ha coordinate $(0; 0; 0)$. Nella figura abbiamo rappresentato il punto $A \equiv (1; 2; 3)$ e i piani coordinati, per evidenziare le relazioni fra le coordinate e le distanze dai piani.

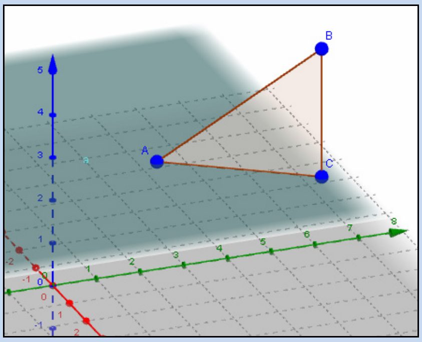


Dato che si rivela particolarmente efficace la trattazione algebrica, sfruttiamola. Così enunciamo il seguente risultato, generalizzazione dell'analogo teorema nel piano.

Teorema 1

Nello spazio cartesiano ortogonale il segmento di estremi $A \equiv (x_A; y_A; z_A)$, $B \equiv (x_B; y_B; z_B)$, è lungo, nell'unità di misura prescelta, $\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$.

Dimostrazione



Consideriamo la figura, abbiamo scelto il punto $C \equiv (x_C; y_C; z_C)$ in modo che il triangolo ABC è rettangolo, dato che ovviamente BC è perpendicolare al piano passante per A e parallelo al piano xy. Ovviamente abbiamo $\overline{BC} = |z_A - z_B|$ e $\overline{AC} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$, poiché stanno sullo stesso piano, quindi vale la formula per la distanza di punti nel piano. Allora: $\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$, che è quanto volevamo provare.

Esempio 3

Vogliamo misurare il segmento di estremi $A \equiv (1; -2; 4)$ e $B \equiv (0; -1; 2)$. Applicando la formula stabilita dal Teorema 1; abbiamo: $\overline{AB} = \sqrt{(1-0)^2 + (-2-(-1))^2 + (4-2)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$.

Allo stesso modo possiamo enunciare i seguenti teoremi, generalizzazioni dei corrispondenti teoremi validi nel piano cartesiano.

Teorema 2

Il punto che nello spazio cartesiano ortogonale divide il segmento di estremi $A \equiv (x_A; y_A; z_A)$, $B \equiv (x_B; y_B; z_B)$ in modo che si abbia $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{m}{n}$, è $\left(\frac{(n-m)\cdot x_A + m\cdot x_B}{n}; \frac{(n-m)\cdot y_A + m\cdot y_B}{n}; \frac{(n-m)\cdot z_A + m\cdot z_B}{n}\right)$.

Corollario 1

Il punto medio del segmento di estremi $A \equiv (x_A; y_A; z_A)$ e $B \equiv (x_B; y_B; z_B)$ è: $M \equiv \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

Corollario 2

Il baricentro di un triangolo di vertici $A \equiv (x_A; y_A; z_A)$, $B \equiv (x_B; y_B; z_B)$, $C \equiv (x_C; y_C; z_C)$, è

$$G \equiv \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$

Vale anche quest’altro risultato.

Corollario 3

Il baricentro di un tetraedro di vertici $A \equiv (x_A; y_A; z_A)$, $B \equiv (x_B; y_B; z_B)$, $C \equiv (x_C; y_C; z_C)$, $D \equiv (x_D; y_D; z_D)$ è

$$G \equiv \left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right).$$

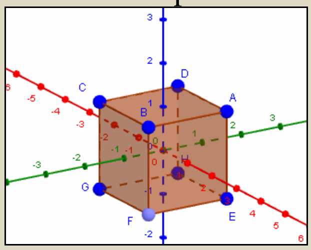
Concludiamo osservando che la potenza dell'algebra travalica qualsiasi problema di natura geometrica, infatti possiamo benissimo parlare di un punto in uno spazio a 2000 dimensioni, la cui natura ci è del tutto ignota, semplicemente come una 2000–upla ordinata di numeri reali.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Rappresentare, in uno spazio cartesiano ortogonale, i vertici di un cubo di lato 2.

Un modo per risolvere la questione consiste nello sfruttare le proprietà di simmetria del solido. In particolare



considieriamo l'origine degli assi come centro di simmetria del cubo.

Così gli otto vertici del cubo avranno coordinate il cui valore assoluto è 1. Saranno perciò: $A \equiv (1; 1; 1)$, $B \equiv (1; -1; 1)$, $C \equiv (-1; -1; 1)$, $D \equiv (-1; 1; 1)$, $E \equiv (1; 1; -1)$, $F \equiv (1; -1; -1)$, $G \equiv (-1; -1; -1)$, $H \equiv (-1; 1; -1)$. Calcoliamo adesso la misura di una diagonale, per esempio AG, usando la formula per la distanza: $\overline{AG} = \sqrt{(1+1)^2 + (1+1)^2 + (1+1)^2} = 2 \cdot \sqrt{3}$. Abbiamo verificato che la diagonale di un cubo si ottiene moltiplicando la misura del lato per $\sqrt{3}$.

Livello 1

1. Determinare una formula che calcoli la distanza di un punto $P \equiv (x_P; y_P; z_P)$ dall'origine degli assi. $\left[\sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}\right]$
2. Individuare la caratteristica di tutti i punti appartenenti agli assi coordinati. [$(x; 0; 0)$;$(0; y; 0)$;$(0; 0; z)$]
3. Individuare la caratteristica di tutti i punti appartenenti ai piani formati dalle rette x e y ; x e z; y e z. [$(x; y; 0)$; $(x; 0; z)$; $(0; y; z)$]
4. Determinare una formula che calcoli la distanza di due punti entrambi appartenenti al piano xy ; xz ; yz. $\left[\sqrt{(x_p - x_Q)^2 + (y_p - y_Q)^2}; \sqrt{(x_p - x_Q)^2 + (z_p - z_Q)^2}; \sqrt{(y_p - y_Q)^2 + (z_p - z_Q)^2}\right]$
5. Calcolare la misura dei seguenti segmenti, di cui forniamo le coordinate degli estremi.
   $(1; 2; -4)$, $(3; -1; 0)$; $(3; 1; 0)$, $(-1; -2; -3)$; $\left(\frac{1}{2};2;-\frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{2};0;-\frac{1}{3}\right)$
   $\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{4};-\frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{4};\frac{3}{2};-\frac{2}{3}\right)$; $\left(\sqrt{2};-1;\sqrt{3}\right), \left(-2\cdot\sqrt{2};\sqrt{3};1\right)$ $\left[\sqrt{29};\sqrt{34};\sqrt{5};\frac{\sqrt{74}}{4};\sqrt{26}\right]$
6. Determinare le coordinate dei punti medi dei segmenti i cui estremi sono dati nell'esercizio precedente. $\left[\left(2;\frac{1}{2};-2\right),\left(1;-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right),\left(0;1;-\frac{1}{3}\right),\left(-\frac{5}{8};\frac{7}{8};-\frac{2}{3}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{3}-1}{2};\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)\right]$
7. Determinare le coordinate dei rimanenti vertici di un prisma retto di altezza 2 e una base di vertici i punti $(-2; 2; 0)$, $(1; 3; 0)$ $(3; 0; 0)$ e $(3; -2; 0)$. [$(-2; 2; 2)$, $(1; 3; 2)$ $(3; 0; 2)$ e $(3; -2; 2)$]
8. Determinare le coordinate del quarto vertice dei tetraedri trirettangoli di volume 8 unità cubiche e di vertici i punti $(0; 0; 0)$, $(3; 0; 0)$ e $(0; 4; 0)$. [$(0; 0; \pm 4)$]
9. Determinare le coordinate del baricentro del tetraedro di vertici i punti $(3; 2; 0)$, $(-1; 2; 2)$, $(2; -1; 1)$, $(0; 2; -1)$. [$(1; 5/4; 1/2)$]

Livello 2

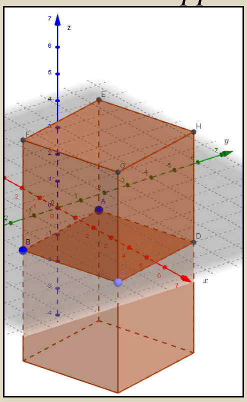
10. Determinare le coordinate dei baricentri delle facce del tetraedro dell'esercizio precedente e verificare che il baricentro del tetraedro divide ciascuna mediana nel rapporto 3: 1. [$(4/3; 1; 1)$, $(2/3; 2; 1/3)$, $(5/3; 1; 0)$, $(1/3; 1; 2/3)$]
11. Determinare le coordinate dei punti che dividono il segmento di estremi $(1; 2; 3)$ e $(-4; 7; -2)$ in cinque parti uguali. [$(0; 3; 2)$, $(-1; 4; 1)$, $(-2; 5; 0)$, $(-3; 6; -1)$]
12. Determinare le coordinate dei punti che dividono il segmento di estremi $(0; 1; -2)$ e $(-1; 3; 4)$ in sei

parti uguali. [(–1/6; 4/3; –1), (–1/3; 5/3; 0), (–1/2; 2; 1), (–2/3; 7/3; 2), (–5/6; 8/3; 3)]

13. Il punto (0; 0; 3) divide il segmento di estremi (3; –6; 3) (–1; 2; 3) nel rapporto $1/n$. Quanto vale n? Qual è l'altro punto del segmento che fa lo stesso? [4; (2; –4; 3)]
14. Determinare le coordinate del vertice della piramide regolare di base il quadrato di vertici (0; 0; 0), (0; 1; 0), (–1; 1, 0), (–1; 0; 0) e di altezza lunga 3 unità. [(–1/2; 1/2; ±3)]
15. Determinare superficie laterale e volume della piramide precedente. $\left[\sqrt{37};1\right]$
16. Determinare le coordinate del quarto vertice dei tetraedri quadrirettangoli i cui rimanenti vertici sono i punti (0; 0; 0), (3; 0; 0) e (0; 4; 0). [(3; 0; z) o (0; 4; z), $z \neq 0$]
17. Determinare le coordinate dei vertici di un cubo di lato 1; che ha un vertice nell'origine e tre spigoli appartenenti agli assi coordinati.
[8 soluzioni possibili, p.e.: (0; 0; 0), (1; 0; 0), (1; 1; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1), (1; 0; 1), (1; 1; 1), (0; 1; 1)]
18. Determinare le coordinate dei vertici del cubottaedro ottenuto a partire dal cubo in cui una faccia ha per vertici i punti (2; 2; 0), (4; 2; 0), (2; 4; 0) e (4; 4; 0). [(4; 3; ,2), (3; 2; 2), (2; 3; 2), (3; 4;2), (4; 4; 1), (2; 4; 1), (2; 2; 1), (4; 2; 1), (3; 4; 0), (4; 3; 0), (2; 3; 0), (3; 2; 0)]
19. Si dimostra che l'area del triangolo di vertici i punti (x_A; y_A; z_A), (x_B; y_B; z_B), (x_C; y_C; z_C) si calcola con la formula $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} y_A & z_A & 1 \\ y_B & z_B & 1 \\ y_C & z_C & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_A & z_A & 1 \\ x_B & z_B & 1 \\ x_C & z_C & 1 \end{vmatrix}^2}$. Verificare che se i punti appartengono tutti al piano xy, la detta formula coincide con quella già nota.

Lavoriamo insieme

Di un cubo sappiamo che ha una faccia sul piano z = 0, in cui due vertici opposti sono (1; 1; 0) *e* (6; – 2; 0),



determinare le coordinate degli altri vertici.

Determiniamo la misura dello spigolo del cubo tenendo conto che la distanza fra i punti dati è diagonale della faccia è quindi misura $\sqrt{2}$ volte lo spigolo. Abbiamo: $\sqrt{(1-6)^2+(1+2^2)}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$, quindi lo spigolo misura $\sqrt{\frac{34}{2}}=\sqrt{17}$. Gli altri due vertici sul piano z = 0 hanno coordinate (x; y; 0). Per trovarli imponiamo che la loro distanza dai vertici dati sia lo spigolo: $\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=17\\(x-6)^2+(y+2)^2=17\end{cases}$, le cui soluzioni sono: (2; –3; 0) e (5; 2: 0). Gli altri 4 vertici hanno le stesse prime due coordinate ma "quota" pari a $\pm\sqrt{17}$, quindi sono $\left(1;1;\pm\sqrt{17}\right)$, $\left(2;-3;\pm\sqrt{17}\right)$, $\left(6;-2;\pm\sqrt{17}\right)$, $\left(5;2;\pm\sqrt{17}\right)$

Livello 3

20. Determinare le coordinate dei vertici del cubo che ha una faccia appartenente al piano x = 0 in cui due vertici opposti sono i punti (0; 1; 2) e (0; –3; 4).
$\left[(0;-2;1),(0;0;5),\left(\pm\sqrt{10};-2;1\right)\left(\pm\sqrt{10};1;2\right),\left(\pm\sqrt{10};0;5\right),\left(\pm\sqrt{10};-3;4\right)\right]$
21. Determinare le coordinate dei vertici del cubo che ha una faccia appartenente al piano y = 0 in cui due

vertici opposti sono i punti (–2; 0; 1) e (5; 0; 4).

$$\left[(3;0;-1),(0;0;6),\left(-2;\pm\sqrt{29};1\right)\left(3;\pm\sqrt{29};-1\right),\left(5;\pm\sqrt{29};4\right),\left(0;\pm\sqrt{29};6\right)\right]$$

22. Determinare l'altro estremo del segmento in cui un estremo è (2; –1; 4) e il punto medio è (0; 1; 3). [(–2; 3; 2)]
23. Determinare per quali valori del parametro reale m il punto medio del segmento di estremi (1; –2; 3) e (m^2; 1 – m; 2 + m) appartiene di volta in volta ai piani: xy ; xz ; yz [–5 ; –1 ; ∅]
24. Dopo aver verificato che il triangolo di vertici (0; 0; 0), (0; 1; 0) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right)$ è equilatero, determinare le coordinate dei vertici dei tetraedri regolari che hanno tale triangolo come una delle loro facce. $\left[\left(-\frac{\sqrt{3}}{6};\frac{1}{2};\pm\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\right]$
25. Si dimostra che il volume del tetraedro di vertici (x_A; y_A; z_A), (x_B; y_B; z_B), (x_C; y_C; z_C), (x_D; y_D; z_D) si calcola con la formula $\frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{pmatrix}\begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A & 1\\ x_B & y_B & z_B & 1\\ x_C & y_C & z_C & 1\\ x_D & y_D & z_D & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}\right\|$ (il determinante in valore assoluto). Calcolare il volume del tetraedro i cui vertici sono l'origine e i punti (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1). [1/6]
26. Determinare le coordinate degli altri due vertici di un ottaedro regolare i cui vertici che determinano un quadrato hanno coordinate (0; 0; 0), (1; 0; 0), (1; 1; 0), (0; 1; 0). $\left[\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$
27. Determinare le coordinate degli altri vertici di un ottaedro regolare in cui i vertici che determinano un quadrato appartengono al piano y = 0, e due di questi, fra loro opposti, hanno coordinate (– 2; 0; 4) e (8; 0; 0). $\left[(1;0;-3),(5;0;7),\left(3;\pm\sqrt{29};2\right)\right]$
28. Dimostrare il Corollario 1.
29. Dimostrare il Corollario 2.
30. Determinare una formula per calcolare la distanza di due punti in uno spazio a n dimensioni.

$$\left[\sqrt{\left(x_1^{'}-x_1^{''}\right)^2+\left(x_2^{'}-x_2^{''}\right)^2+\ldots+\left(x_n^{'}-x_n^{''}\right)^2}\right]$$

Piani e rette nello spazio cartesiano

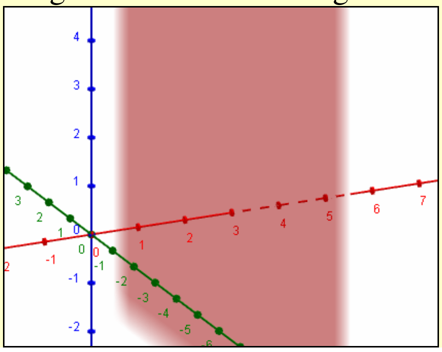
Il problema

Un'equazione di primo grado in due incognite nel piano cartesiano ortogonale rappresenta una retta. Che cosa rappresenterà nello spazio cartesiano un'equazione di primo grado in tre incognite?

Per risolvere il problema precedente possiamo continuare a ragionare con il linguaggio e gli strumenti dei luoghi, solo che questa volta siamo nello spazio e quindi i nostri punti sono determinati da 3 coordinate.

Esempio 4

L'equazione $x = 3$, anche nello spazio continua a rappresentare i punti che hanno l'ascissa costante uguale a 3, solo che tali punti, $P \equiv (3; y; z)$, non stanno su una retta, come accadeva nel caso del piano cartesiano, bensì su un piano, come mostrato nella figura ottenuta con Geogebra.



L'esempio mostra con chiarezza la validità del seguente teorema.

Teorema 3

L'equazione $ax + by + cz + d = 0$, nello spazio cartesiano rappresenta un piano se uno almeno dei coefficienti a, b, c è non nullo.

In particolare possiamo dire che si ha la validità del seguente schema, in cui i parametri sono numeri reali non nulli

- $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$ sono i piani coordinati;
- $ax + d = 0$, $by + d = 0$ e $cz + d = 0$, sono piani paralleli ai piani coordinati;
- $ax + by + cz = 0$ sono piani passanti per l'origine;
- $by + cz + d = 0$ sono piani paralleli all'asse x;
- $ax + cz + d = 0$ sono piani paralleli all'asse y;
- $ax + by + d = 0$ sono piani paralleli all'asse z;

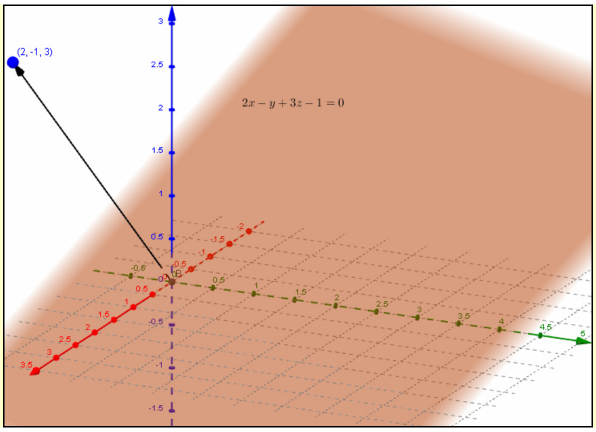
I numeri direttori dei piani coordinati sono rispettivamente (1; 0; 0), (0; 1; 0) e (0; 0; 1). Tali numeri rappresentano anche i cosiddetti *versori*, ossia i vettori di lunghezza unitaria che partono dall'origine e giacciono sugli assi cartesiani. Quindi possiamo dire che i numeri direttori dei piani coordinati sono gli stessi di vettori a essi perpendicolari. Questo risultato è generale.

Teorema 4

Il piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ è perpendicolare al vettore determinato dall'origine e dal punto di coordinate $(a; b; c)$.

Esempio 5

In figura, rappresentato con Geogebra abbiamo il piano di equazione $2x - y + 3z - 1 = 0$ e il vettore di componenti $(2; -1; 3)$, come si nota essi sono perpendicolari. Ovviamente anche i vettori $(4; -2; 6)$, $(-6; 3; -9)$ e più in generale $(2h; -h; 3h)$, con h numero reale diverso da zero sono vettori perpendicolari al piano.



Sappiamo che un piano è individuato da 3 punti non allineati, deve perciò essere possibile scrivere l'equazione di un piano conoscendo le coordinate di tre dei suoi punti, purché non tutti appartenenti alla stessa retta.

Teorema 5

Il piano passante per i punti $A \equiv (x_A; y_A; z_A)$, $B \equiv (x_B; y_B; z_B)$, $C \equiv (x_C; y_C; z_C)$ ha equazione

$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix} = 0$$

Esempio 6

Il piano passante per $A \equiv (1; 2; 3)$, $B \equiv (-1; 0; 2)$ e $C \equiv (0; 1; -1)$, ha equazione

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1-1 & 0-2 & 2-3 \\ 0-1 & 1-2 & -1-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-1)\cdot\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} - (y-2)\cdot\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} + (z-3)\cdot\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (x-1)\cdot(8-1) - (y-2)\cdot(8-1) + (z-3)\cdot 0 = 0 \Rightarrow 7(x-1) - 7(y-2) = 0 \Rightarrow x - y + 1 = 0.$
Verifichiamo: $1 - 2 + 1 = -1 - 0 + 1 = 0 - 1 + 1 = 0$.

Teorema 6

Condizione necessaria e sufficiente affinché i piani $ax + by + cz + d = 0$ e $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, siano paralleli è che si abbia: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq 0$.

I coefficienti delle incognite nell'equazione di un piano si comportano quindi come gli analoghi nella retta, in quel caso essi determinavano la direzione della retta, parlavamo di coefficiente angolare. Lo stesso accade anche con il piano, e tali numeri li chiamiamo *numeri direttori*.

Esempio 7

- I piani di equazioni $x - y + z - 1 = 0$ e $2x - 2y + 2z - 1 = 0$ sono fra loro paralleli.
- I piani di equazioni $x - y + z - 1 = 0$ e $2x - 2y + 2z - 2 = 0$ sono fra loro coincidenti.
- I piani di equazioni $x - y + z - 1 = 0$ e $2x + 2y + 2z - 1 = 0$ sono fra loro incidenti.

Teorema 7

L'equazione del piano passante per $P \equiv (x_P; y_P; z_P)$ e parallelo al piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ è $a \cdot (x - x_P) + b \cdot (y - y_P) + c \cdot (z - z_P) = 0$.

Esempio 8

L'equazione del piano passante per il punto $P \equiv (1; -2; 0)$ e parallelo al piano di equazione $3x + 2z - 1 = 0$ è $3 \cdot (x - 1) + 0 \cdot (y + 2) + 2 \cdot (z - 0) = 0 \Rightarrow 3x - 3 + 2z = 0$.

Vi è anche un analogo risultato per il concetto di perpendicolarità fra piani, del tutto simile a quella fra rette.

Teorema 8

Condizione necessaria e sufficiente affinché i piani $ax + by + cz + d = 0$ e $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, siano perpendicolari è che si abbia: $aa' + bb' + cc' = 0$.

Esempio 9

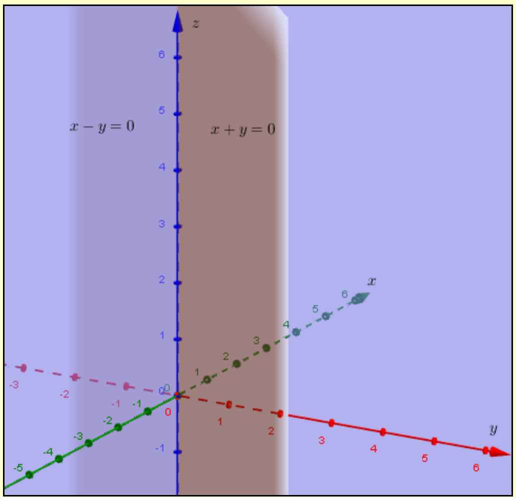
I piani di equazioni $x - y + z - 1 = 0$ e $x - y - 2z = 0$ sono fra loro perpendicolari, dato che, si ha:

$$1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) = 1 + 1 - 2 = 0.$$

Come si rappresenta una retta nello spazio cartesiano? Una retta può ottenersi dall'intersezione di due piani non paralleli.

Esempio 10

I piani coordinati di equazioni $x = 0$ e $y = 0$, si incontrano nell'asse z. L'asse z è quindi rappresentato dalle equazioni: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. Ma una retta appartiene a infiniti piani, così lo stesso asse z può essere intersezione di infinite altre coppie di piani, per esempio $\begin{cases} x = y \\ x = -y \end{cases}$ come si vede in figura.



Possiamo allora enunciare il seguente teorema.

Teorema 9

Il sistema $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$, rappresenta un'equazione di una retta nello spazio cartesiano se le due equazioni rappresentano piani fra loro incidenti.

Abbiamo scritto un'equazione e non l'equazione proprio perché una retta si può ottenere come intersezione di infinite coppie di piani. In effetti non sappiamo ancora qual è la condizione affinché due piani possano essere considerati incidenti o paralleli. Ci limitiamo per ora a elencare una serie di risultati che sono semplice generalizzazione dei corrispondenti risultati per le rette nel piano cartesiano.

Teorema 10

La retta passante per i punti $A \equiv (x_A; y_A; z_A)$, $B \equiv (x_B; y_B; z_B)$ ha equazione $\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{z - z_A}{z_B - z_A}$

Dimostrazione Come nel caso del piano, applicando i concetti di similitudine nello spazio.

Esempio 11

L'equazione della retta passante per i punti $A \equiv (1; –2; 1)$ e $B \equiv (3; 0; –1)$ è:

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y+2}{0+2} = \frac{z-1}{-1-1} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-2} \Rightarrow x-1 = y+2 = 1-z \Rightarrow \begin{cases} x-y-3=0 \\ x+z-2=0 \end{cases}$$

Noi abbiamo scelto un modo di scrivere le due equazioni, ma ve ne sono altri, per esempio i seguenti:

$$\begin{cases} x-y-3=0 \\ y+z+1=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x+z-2=0 \\ y+z+1=0 \end{cases}$$

Come si vede i piani che intersecati a due a due determinano la retta sono sempre gli stessi tre. Ciò significa che i tre piani si incontrano appunto nella data retta.

Possiamo scrivere l'equazione di una retta anche in forma parametrica.

Esempio 12

L'equazione della retta $\begin{cases} x-y-3=0 \\ y+z+1=0 \end{cases}$, si può anche esprimere nel modo seguente $\begin{cases} x=y+3 \\ z=-y-1 \end{cases}$, quindi se poniamo $y = t$, scriveremo anche $\begin{cases} x=t+3 \\ y=t \\ z=-t-1 \end{cases}$.

Poniamo la seguente definizione.

Definizione 3

L'equazione $\begin{cases} x=a\cdot t+h \\ y=b\cdot t+k \\ z=c\cdot t+p \end{cases}$, con t numero reale, si chiama **equazione della retta in forma parametrica**. I coefficienti a, b e c si chiamano **numeri direttori della retta**, poiché determinano la direzione della retta.

Valgono i seguenti risultati per le equazioni in forma parametrica.

Teorema 11

La retta passante per i punti $A \equiv (x_A; y_A; z_A)$, $B \equiv (x_B; y_B; z_B)$ ha equazione in forma parametrica

$$\begin{cases} x=(x_A-x_B)\cdot t+x_A \\ y=(y_A-y_B)\cdot t+y_A \\ z=(z_A-z_B)\cdot t+z_A \end{cases}$$

Teorema 12

Le rette di equazione in forma parametrica $\begin{cases} x=a\cdot t+h \\ y=b\cdot t+k \\ z=c\cdot t+p \end{cases}$ e $\begin{cases} x=a'\cdot t+h' \\ y=b'\cdot t+k' \\ z=c'\cdot t+p' \end{cases}$ sono

- parallele se e solo se $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}\neq 0$;
- perpendicolari se e solo se $aa' + bb' + cc' = 0$.

La retta passante per $P \equiv (x_P; y_P; z_P)$ e parallela alla retta $\begin{cases} x=a\cdot t+h \\ y=b\cdot t+k \\ z=c\cdot t+p \end{cases}$, ha equazione $\begin{cases} x=a\cdot t+x_P \\ y=b\cdot t+y_P \\ z=c\cdot t+z_P \end{cases}$.

Sappiamo che nello spazio non è unica la perpendicolare a una retta per un punto, ecco perché non abbiamo fornito una regola per calcolarla.

Esempio 13

- L'equazione della retta parallela a $r:\begin{cases} x=t+3 \\ y=t \\ z=-t-1 \end{cases}$, e passante per (1; –2; 3) è $s:\begin{cases} x=t+1 \\ y=t-2 \\ z=-t+3 \end{cases}$, ma può essere anche $s:\begin{cases} x=2t-1 \\ y=2t-4 \\ z=-2t+5 \end{cases}$, infatti ha numeri direttori in proporzione e passa per il punto (se $t = 1$).
- $r:\begin{cases} x=t+3 \\ y=t \\ z=-t-1 \end{cases}$ e $s:\begin{cases} x=2t-1 \\ y=-t+2 \\ z=t-3 \end{cases}$ sono fra loro perpendicolari, dato che $1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = 0$. Ma anche la retta $t:\begin{cases} x=t-1 \\ y=-2t+2 \\ z=-t-3 \end{cases}$ è perpendicolare a r e, come s, passa anch'essa per (–1; 2; –3).

Dire che una retta è perpendicolare a un piano equivale a dire che hanno gli stessi numeri direttori, pertanto vale il seguente risultato.

Teorema 13

- L'equazione della retta passante per $P \equiv (x_P; y_P; z_P)$ e perpendicolare al piano $ax + by + cz + d = 0$ è $\begin{cases} x=a\cdot t+x_P \\ y=b\cdot t+y_P \\ z=c\cdot t+z_P \end{cases}$.
- L'equazione del piano passante per $P \equiv (x_P; y_P; z_P)$ e perpendicolare alla retta $\begin{cases} x=a\cdot t+h \\ y=b\cdot t+k \\ z=c\cdot t+p \end{cases}$ è $a \cdot (x - x_P) + b \cdot (y - y_P) + c \cdot (z - z_P) = 0$.

Esempio 14

- La retta passante per (1; 0; – 2) e perpendicolare al piano $x - 2y + 4z - 3 = 0$ è $\begin{cases} x=t+1 \\ y=-2t \\ z=4t-2 \end{cases}$.
- Il piano passante per (1; 0; – 2) e perpendicolare alla retta $\begin{cases} x=t+1 \\ y=-2t \\ z=4t-2 \end{cases}$ è $x - 1 - 2 \cdot y + 4 \cdot (z + 2) = 0$, cioè

$x - 2y + 4z + 7 = 0$. Questo piano è parallelo al precedente ma non coincidente, perché passa per il punto dato, mentre quello non ci passava.

Stesso discorso per la distanza di un punto da un piano, che si trova con tecniche analoghe a quelle viste per la retta. Cioè tracciamo la retta perpendicolare al piano per il punto, quindi determiniamo il punto intersezione e la distanza fra tale punto e quello dato.

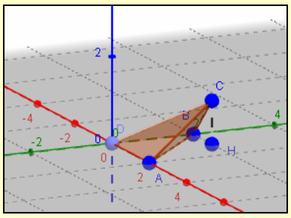
Teorema 14

La distanza del punto $P \equiv (x_P; y_P; z_P)$ dal piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$, è

$$\frac{|a \cdot x_P + b \cdot y_P + c \cdot z_P + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Esempio 15

Consideriamo il tetraedro di vertici $O \equiv (0; 0; 0)$, $A \equiv (2; 0; 0)$, $B \equiv (0; 2; 0)$, $C \equiv (1; 1; 2)$. Vogliamo calcolare il suo volume. Poiché un tetraedro altri non è che una piramide, sappiamo che la formula da applicare è *area di base per altezza diviso* 3. Dato che i punti OAB appartengono al piano xy conviene scegliere come base questo triangolo, del quale calcoliamo facilmente l'area dato che è un triangolo rettangolo di cateti OA e OB, quindi ha area $1/2 \cdot 2 \cdot 2 = 2$. L'altezza sarà il segmento CH in figura, condotto perpendicolarmente da C al piano xy, quindi è la terza coordinata di C, cioè 2. Il volume richiesto sarà quindi: $1/3 \cdot 2 \cdot 2 = 4/3$.



Verifiche

Lavoriamo insieme

Dati i piani di equazione α: $3x - 5y - z + 1 = 0$ e β: $5x + 2y - 3z - 4 = 0$, vogliamo stabilirne le reciproche posizioni. Per il Teorema 5, basta considerare i rapporti delle coordinate omonime: [3/5; –5/2; 1/3], dato che sono diversi tra loro i piani sono incidenti e determinano perciò la retta di equazione: $r: \begin{cases} 3x - 5y - z + 1 = 0 \\ 5x + 2y - 3z - 4 = 0 \end{cases}$. Adesso consideriamo il punto $P \equiv (1; 2; -1)$, che non appartiene a nessuno dei due piani, come facilmente si verifica, vogliamo determinare la sua distanza dai detti piani. Si ha:

$$d(P,\alpha) = \frac{|3-10+1+1|}{\sqrt{9+25+1}} = \frac{9}{\sqrt{35}}; d(P,\beta) = \frac{|5+4+3-4|}{\sqrt{25+4+9}} = \frac{8}{\sqrt{38}}$$

Scrivere l'equazione del piano passante per i punti indicati

Livello 1

1. a) (1; 0; 1), (1; 2; 3), (1; 3; 2) ; b) (1; 1; 1), (2; 2; 2), (3; 3; 3) ; c) (1; 1; 0), (0; 1; 1), (1; 0; 1)
[a) $x = 1$; b) Punti allineati ; c) $x + y + z = 2$]
2. a) (0; 0; 0), (2; 1; 1), (–1; 2; 3) ; b) (1; 0; 0), (2; 0; 3), (0; 1; 2); c) (3; –1; 1), (–1; 2; –1), (1; –2; 1)
[a) $x - 7y + 5z = 0$; b) $3x + 5y - z = 3$; c) $x - 2y - 5z = 0$]
3. (1; –1; 1), (–1; 1; 1), (–1; 1; –1) ; b) (1; 2; 3), (2; 3; 1), (3; 2; 1); c) (2; 1; 0), (0; 2; –1), (–1; –2; 1)
[a) $x + y = 0$; b) $x + y + z = 6$; c) $4x - y - 9z = 7$]
4. (–1; 0; –1), (–2; 0; 0), (0; –3; 1) [$x + y + z + 2 = 0$]

Determinare le reciproche posizioni dei piani di seguito indicati

5. α: $2x - 3y - z + 1 = 0$ e β: $4x + 6y - 2z = 0$ [Incidenti]
6. α: $x - y - z + 1 = 0$ e β: $x + y - z - 1 = 0$ [Incidenti]
7. α: $2x - z + 1 = 0$ e β: $4x + y - 2z - 1 = 0$ [Incidenti]
8. α: $x - y + 1 = 0$ e β: $2x - 2y - 4 = 0$ [Paralleli]
9. α: $x - 2y + 1 = 0$ e β: $2x - 4z - 3 = 0$ [Incidenti]
10. α: $2x - 3y - z = 0$ e β: $6x - 9y - 3z = 0$ [Coincidenti]

Scrivere l'equazione del piano passante per il punto P e parallelo al piano α indicato

11. $P \equiv (1; 3; -1)$, α : $x - y + z = 0$ **;** $P \equiv (1; 1; -1)$, α : $x + z = 0$; $P \equiv (0; 2; 3)$, α : $x - y - 2 = 0$
[$x - y + z + 3 = 0$; $x + z = 0$; $x - y + 2 = 0$]
12. $P \equiv (-1; 0; 2)$, α : $2y - 3z = 0$; $P \equiv (-2; 4; -1)$, α : $3x - y - 4z = 0$ [$2y - 3z + 6 = 0$; $3x - y - 4z + 6 = 0$]

Livello 2

13. Scrivere l'equazione del piano che biseca l'angolo formato dai piani $x = 0$ e $y = 0$. [$x = y$ o $x = -y$]
14. Scrivere l'equazione del piano che biseca l'angolo formato dai piani $x = 0$ e $z = 0$. [$x = z$ o $x = -z$]
15. Scrivere l'equazione del piano che biseca l'angolo formato dai piani $y = 0$ e $z = 0$. [$y = z$ o $y = -z$]

Determinare per quali valori del parametro reale m le seguenti coppie di piani sono perpendicolari

16. $x - y + z = 0$ e $(2 - m) \cdot x + (3m - 1) \cdot y - 2 = 0$ [$m = 3/4$]
17. $2x - 3y + 1 = 0$ e $(1 + m) \cdot x + (2m + 3) \cdot y - z = 0$ [$m = -7/4$]
18. $x + 3y + 4z = 0$ e $(3 - m) \cdot x + (2 - m) \cdot y + (4m - 1) \cdot z = 0$ [$m = -5/12$]
19. $x - z + 3 = 0$ e $(2 - m) \cdot x + (3m - 1) \cdot z = 0$ [$m = 3/4$]
20. $mx - 2y + z = 0$ e $(3 - m) \cdot x + (2 - m) \cdot y + (4m - 1) \cdot z = 0$ $\left[m = \frac{9 \pm \sqrt{61}}{2}\right]$
21. $(1 - 2m) \cdot x + (3 - 2m) \cdot y + (m - 1) \cdot z = 0$ e $(1 - m) \cdot x + (3 + m) \cdot y + (4 - 3m) \cdot z = 0$ $\left[m = \frac{1 \pm \sqrt{73}}{6}\right]$
22. $(3 - m) \cdot x + (5 - 2m) \cdot y + 1 = 0$ e $(4 + 5m) \cdot y + (2m + 7) \cdot z - 2m + 5 = 0$ [$m = -4/5 \vee m = 5/2$]

Determinare le equazioni delle rette passanti per i punti accanto indicati (le risposte non sono assolute, possono anche esprimersi in forme diverse ma equivalenti)

Livello 1

23. a) (1; 2; 3), (2; 3; 4) ; b) (1; 2; 3), (1; 3; 2) ; c) (1; 2; 3) (0; 2; 4) ; d) (1; 2; 3), (–1; –2; –3)

$$\left[\text{a)}\begin{cases}x-y+1=0\\x-z+2=0\end{cases};\text{b)}\begin{cases}x-1=0\\y-5z=0\end{cases};\text{c)}\begin{cases}y-2=0\\x-z+2=0\end{cases};\text{d)}\begin{cases}2x-y=0\\3y-2z=0\end{cases}\right]$$

24. a) (1; 2; 3), (0; 0; 0) ; b) (0; 0; 1) (0; 1; 0) ; c) (1; 0; 2) (2; 0; 1); d) (1; 2; 3), (2; 4; 6)

$$\left[\text{a)}\begin{cases}2x-y=0\\3y-2z=0\end{cases};\text{b)}\begin{cases}x=0\\y+z-1=0\end{cases};\text{c)}\begin{cases}y=0\\x+z-1=0\end{cases};\text{d)}\begin{cases}2x-y=0\\3y-2z=0\end{cases}\right]$$

25. a) (–1; 0; 1), (1; 0; –1) ; b) (1; 0; 0), (0; 1; 1) ; c) (1; 0; 1), (0; 1; 1); d) (1; 1; 1), (2; 2; 2)

$$\left[\text{a)}\begin{cases}y=0\\y+z=0\end{cases};\text{b)}\begin{cases}x+y-1=0\\y-z=0\end{cases};\text{c)}\begin{cases}x+y-1=0\\z-1=0\end{cases};\text{d)}\begin{cases}x-y=0\\y-z=0\end{cases}\right]$$

26. a) (2; 1; –1) (–1; 2; –2) ; b) (–2; 1; –2), (1; –2; 2)

$$\left[\text{a)}\begin{cases}x+3y-5=0\\y+z=0\end{cases};\text{b)}\begin{cases}x+y+1=0\\4y+3z+2=0\end{cases}\right]$$

Scrivere le equazioni seguenti in forma parametrica

Livello 2

27. $\text{a)}\begin{cases}y=x\\y+z=0\end{cases};\text{b)}\begin{cases}x+2y-z=0\\x+y-z=0\end{cases};\text{c)}\begin{cases}y-1=0\\z-1=0\end{cases};\text{d)}\begin{cases}x-2y-z+1=0\\3x-y-z-2=0\end{cases}$

$$\left[\text{a)}\begin{cases}x=t\\y=t\\z=-t\end{cases};\text{b)}\begin{cases}x=t\\y=0\\z=t\end{cases};\text{c)}\begin{cases}x=t\\y=1\\z=1\end{cases};\text{d)}\begin{cases}x=\frac{1}{5}t+1\\y=-\frac{2}{5}t+1\\z=t\end{cases}\right]$$

Scrivere le equazioni seguenti in forma non parametrica

28. $\text{a)}\begin{cases}x=2t+1\\y=t-2\\z=-t+3\end{cases};\text{b)}\begin{cases}x=3t\\y=1\\z=2\end{cases};\text{c)}\begin{cases}x=2t-1\\y=2t-2\\z=t\end{cases};\text{d)}\begin{cases}x=\frac{2}{3}t\\y=-\frac{2}{3}t-2\\z=t-2\end{cases}$

$$\left[\text{a)}\begin{cases}x-y-5=0\\y+z-1=0\end{cases};\text{b)}\begin{cases}y-1=0\\z-2=0\end{cases};\text{c)}\begin{cases}x-2z+1=0\\y-2z+2=0\end{cases};\text{d)}\begin{cases}3x-2y-4=0\\3y+2z+10=0\end{cases}\right]$$

Scrivere l'equazione della retta passante per il punto P indicato e perpendicolare al piano indicato.

29. (1; 2; 0), $2x - y = 0$; (0; 2; 1), $x - z = 0$; (–1; 1; 1), $x - y + z = 0$

$$\left[\begin{cases}x=2t+1\\y=-t+2\\z=0\end{cases};\begin{cases}x=t\\y=2\\z=-t+1\end{cases};\begin{cases}x=t-1\\y=-t+1\\z=t+1\end{cases}\right]$$

30. (–1; 2; –2), $x - 2y + z = 0$; (–2; –1; 1), $-2x + 3z = 0$; (0; 0; 3), $x + 2y - z = 0$

$$\left[\begin{cases}x=t-1\\y=-2t+2\\z=t-2\end{cases};\begin{cases}x=-2t-2\\y=-1\\z=3t+1\end{cases};\begin{cases}x=t\\y=2t\\z=-t+3\end{cases}\right]$$

31. (–2; –2; 1), $4x - 2y + z = 0$; (3; –1; 4), $3x - 2y + 2z = 0$; (1; 1; 1), $x + y - z = 0$

$$\left[\begin{cases}x=4t-2\\y=2t-2\\z=t+1\end{cases};\begin{cases}x=3t+3\\y=-2t+1\\z=2t+4\end{cases};\begin{cases}x=t+1\\y=t+1\\z=-t+1\end{cases}\right]$$

Scrivere l'equazione del piano passante per il punto P indicato e perpendicolare alla retta indicata

32. (1; 2; 3), $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$; (3; 2; 1), $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 1 \end{cases}$; (1; –1; –1), $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3 \\ z = -3t - 1 \end{cases}$ [$x + y + z = 6$; $x - y = 1$, $2x - 3z = 5$]

33. (0; 3; 0), $\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = -t + 2 \end{cases}$; (1; 0; 0), $\begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = 3t + 3 \\ z = t \end{cases}$; (0; 0; –2), $\begin{cases} x = t - 2 \\ y = -t + 2 \\ z = 0 \end{cases}$

[$y - z = 3$; $2x - 3y - z = 2$; $x - y = 0$]

34. (1; –1; 1), $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -3t \\ z = t - 2 \end{cases}$; (1; 3; –2), $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t + 2 \end{cases}$; (4; –3; –2), $\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = 3t + 2 \\ z = -t + 4 \end{cases}$

[$2x - 3y + z = 6$; $z = -2$; $2x + 3y - z = 1$]

Determinare le distanze dei punti indicati dai piani accanto segnati

Livello 2

35. $P \equiv (2; 3; -1)$, $\alpha : x - 2y + z - 3 = 0$; $P \equiv (-2; 1; 0)$, $\alpha : 3x - y - 4 = 0$; $P \equiv (1; 1; -1)$, $\alpha : x + z = 0$

$\left[\frac{4}{3} \cdot \sqrt{6}; \frac{11}{\sqrt{10}}; P \in \alpha\right]$

36. $P \equiv (0; 2; 1)$, $\alpha : x - y + z - 2 = 0$; $P \equiv (-1; 0; 2)$, $\alpha : 2y - 3 = 0$ $\left[\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right]$

Determinare per quali valori del parametro reale k, le distanze dei punti indicati dai piani accanto segnati hanno il valore d riportato

37. $P \equiv (k, 0; 1)$, $\alpha : x - 2y + z - 3 = 0$, $d = 2$; $P \equiv (-1; 2; 0)$, $\alpha : x - ky + z = 0$, $d = 1$

$\left[k = 2 \pm 2 \cdot \sqrt{6}; k = \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}\right]$

38. $P \equiv (k + 1; 3; -2)$, $\alpha : 2x - y + z = 0$, $d = 3$; $P \equiv (k - 1; k + 1; 1)$, $\alpha : x - y + z = 0$, $d = 1$ $\left[k = \frac{3 \pm 3 \cdot \sqrt{6}}{2}; \varnothing\right]$

39. $P \equiv (2 - k, -2; 1 - k)$, $\alpha : x - z + 3 = 0$, $d = 2 \cdot \sqrt{2}$; $P \equiv (k - 1; k + 2; 2)$, $\alpha : x - ky + kz = 0$, $d = 1$

$\left[\forall k \in \mathbb{R}; (k = 0 \vee k = 2)\right]$

Lavoriamo insieme

Dato il piano di equazione α: $2x - y - z = 0$ e la retta $r : \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ 2x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$, vogliamo stabilirne le reciproche posizioni. Basta risolvere il sistema formato dalle tre equazioni. $\begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ 2x + 3y - 2 = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$. Risolviamo con il metodo di Cramer. Calcoliamo il determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 2 - 6 \neq 0$. Il sistema ha una sola soluzione, quindi la retta incontra il piano nel punto le cui coordinate sono le soluzioni del sistema (compito lasciato per esercizio), cioè in (1; 0; 2).

Determinare le reciproche posizioni del piano e della retta di seguito indicati

Livello 2

40. $r : \begin{cases} x - y - z + 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}, \alpha : 2x + y - z - 1 = 0$ [Paralleli]

41. a) $r:\begin{cases} x-y-z+1=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}, \alpha: 2x+y-z-1=0$; b) $r:\begin{cases} x-2y-z=0 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}, \alpha: 3x-y-1=0$

[a) Incidenti in $P \equiv (1; 1/2; 3/2)$; b) Paralleli]

42. $r:\begin{cases} x-2y-3z=0 \\ 3x-y+z-1=0 \end{cases}, \alpha: 4x-3y-2z-1=0$; $r:\begin{cases} y-z+1=0 \\ x+z=0 \end{cases}, \alpha: x+3y-2=0$

[a) r giace su α; b) Incidenti in $P \equiv (-5/2; 3/2; 5/2)$]

Livello 3

43. Studiare, al variare del parametro reale k, le reciproche posizioni della retta $r:\begin{cases} x-y-z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ e del fascio di piani $kx - y + (k + 1) \cdot z - 1 = 0$. [Se $k \neq \pm 1/2$, incidenti; altrimenti paralleli]

44. Enunciare una condizione necessaria per il parallelismo di due piani, che riguardi il segno dei coefficienti delle incognite. [I segni devono essere tutti uguali o tutti opposti]

45. Determinare gli altri due vertici del quadrato appartenente al piano $x = y$ che ha come vertici opposti i punti (1; 1; 1) e $\left(1+\sqrt{2};1+\sqrt{2};3\right)$. $\left[(1;1;3).\left(1+\sqrt{2};1+\sqrt{2};1\right)\right]$

46. Determinare i vertici delle piramidi regolari che hanno il precedente quadrato come base e volume 4/3 unità cubiche. $\left[\left(1+\sqrt{2};1;2\right) \vee \left(1;1+\sqrt{2};2\right)\right]$

47. Determinare le coordinate dei vertici dei prismi retti in cui una base ha per vertici, nell'ordine, i punti (3; –2; 6), (2; –2; 7); (3; –7; 1), (4; –7; 0) e altezza lunga $\sqrt{3}$ unità.

[(1; –1; 6), (2; –1; 5), (2; –6; 0) e (3; –6; –1) oppure (5; –3; 6), (4; –3; 7), (5; –8; 1), (6; –8; 0)]

48. Determinare le coordinate dei vertici del cubo che ha una faccia appartenente al piano $x = y$ in cui due vertici opposti sono i punti (1; 1; 1) e $\left(2+\sqrt{2};2+\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right)$.

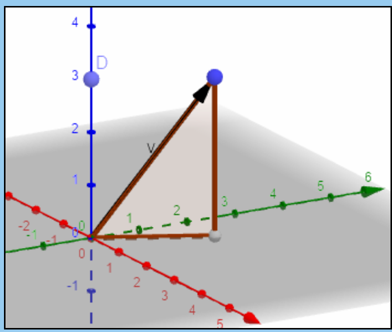
$$\left[\begin{array}{l}(2;2;-1),\left(1+\sqrt{2};1+\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right),\left(1\pm\sqrt{3};1\mp\sqrt{3};1\right)\left(2\pm\sqrt{3};2\mp\sqrt{3};-1\right), \\ \left(1+\sqrt{2}\pm\sqrt{3};1+\sqrt{2}\mp\sqrt{3};1+\sqrt{2}\right),\left(2+\sqrt{2}\pm\sqrt{3};2+\sqrt{2}\mp\sqrt{3};\sqrt{2}-1\right)\end{array}\right]$$

L'angolo di Geogebra

L'ultima versione di Geogebra, dalla 5.0, viene trattata anche la geometria analitica 3D. Per vedere come basta cliccare su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%206/6-5-1.exe. Il relativo file si scarica su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%206/6-5-1.rar.

L'angolo della MateFisica

Abbiamo già parlato dei vettori bidimensionali in fisica, ma in effetti lo spazio che ci circonda è *almeno* tridimensionale, pertanto un vettore è una terna ordinata di numeri reali: $\vec{v} \equiv (v_x; v_y; v_z)$, il suo modulo, utilizzando il Teorema di Pitagora,



è $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$. Per comporre vettori tridimensionali possiamo usare le stesse tecniche viste nel caso bidimensionale. Così se abbiamo: $\vec{v} \equiv (1; 2; 3), \vec{u} \equiv (-2; 1; 0), \vec{w} \equiv (2; -1; -1)$, avremo: $\vec{v} + \vec{u} + \vec{w} \equiv (1-2+2; 2+1-1; 3+0-1) \equiv (1; 2; 2)$.

Le leggi di trasformazioni di Galileo, nello spazio diventano: $\begin{cases} x' = x + v \cdot t \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$, sempre nell'ipotesi in cui vi sia una traslazione solo lungo l'asse delle ascisse che si muove con velocità di modulo $\boldsymbol{v}$.

Attività

1. Dati i vettori: $\vec{v_1} \equiv (x-2; 3+y; z-3), \vec{v_2} \equiv (1; 2-y; 2z-1), \vec{v_3} \equiv (2x+1; y-1; 2)$, determinare, se esistono, i valori assegnati a x, y e z, in modo che $\vec{v_1} + \vec{v_2} + \vec{v_3} \equiv (1; 2; 3)$. [$x = 1/3$; $y = -2$; $z = 5/3$]
2. Dati i vettori: $\vec{v_1} \equiv (1; 0; 2), \vec{v_2} \equiv (-3; 2; -1), \vec{v_3} \equiv (0; 2; 1)$, calcolare $|\vec{v_1} + 2\vec{v_2} - 3\vec{v_3}|$. [≈ 6,2]
3. Dati i vettori: $\vec{v_1} \equiv (x-1; 1; 0), \vec{v_2} \equiv (0; x+2; 1), \vec{v_3} \equiv (1; -1; x)$, determinare, se esiste, il valore reale di x, per il quale si ha: $|\vec{v_1} + \vec{v_2} - \vec{v_3}| = 1$. [$\varnothing$]
4. In relazione al precedente quesito, determinare per quali valori reali di a, l'equazione $|\vec{v_1} + \vec{v_2} - \vec{v_3}| = a$, ha soluzioni reali. [$a \geq 62/3$]
5. Quali sono le coordinate del punto (1; 2; 3) in un sistema di riferimento che si muove con velocità (2; 0; 0), dopo 3 secondi? [(7; 2; 3)]

La sfida

1. Quante diverse rette nello spazio tridimensionale passano per quattro punti distinti le cui coordinate sono numeri interi ciascuno non superiore a 4? [76]

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi.
I temi completi dei Licei Scientifici per gli ultimi anni sono scaricabili, con soluzione, dal sito
http://matdidattica.altervista.org/esamidistato.htm

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente problema assegnato agli esami di Liceo scientifico 2015/16.

Date le rette: $\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=t \end{cases}$; $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$ *e il punto* $P \equiv (1;\ 0;\ -2)$ *determinare l'equazione del piano passante per P e parallelo alle due rette*.

Se il piano è parallelo alle rette è parallelo al piano che esse determinano, se sono complanari. Risolviamo il sistema delle due rette, scrivendo la prima in forma normale:

$$\begin{cases} x=z \\ y=2z \\ x+y+z-3=0 \\ 2x-y=0 \end{cases} \Rightarrow z+2z+z-3=0 \Rightarrow z=\frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{4} \\ y=\frac{3}{2} \\ z=\frac{3}{4} \end{cases}.$$

Quindi le rette sono incidenti nel punto determinato. Prendiamo adesso due punti appartenenti ciascuno a una delle due rette, per esempio (0; 0; 0) (appartenente alla prima, per $t = 0$) e (0; 0; 3) (appartenente alla seconda, per $x = y = 0$). Scriviamo l'equazione del piano determinato dai tre punti:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 3 \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3 \cdot \begin{vmatrix} x & y \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x-y=0$$

Il piano cercato, essendo a questo parallelo ha equazione $2x - y + h = 0$, imponendo il passaggio per P, abbiamo $2 + h = 0 \Rightarrow h = -2$, quindi $2x - y - 2 = 0$.

1. (Liceo scientifico 2014/2015) Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nell'origine al piano di equazioni $x + y - z = 0$. $\left[\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=-t \end{cases} \vee \begin{cases} x=y \\ x=-z \end{cases} \right]$
2. (Liceo scientifico 2015/2016) Una sfera, il cui centro è il punto $K \equiv (-2;\ -1;\ 2)$, è tangente al piano Π avente equazione $2x - 2y + z - 9 = 0$. Qual è il punto di tangenza? Qual è il raggio della sfera? [(0; –3; 3); $r = 3$]
3. (Liceo scientifico 2016/2017) Dati i punti $A \equiv (-2;\ 3;\ 1)$, $B \equiv (3;\ 0;\ -1)$, $C \equiv (2;\ 2;\ -3)$, determinare l'equazione della retta r passante per A e per B e l'equazione del piano π perpendicolare ad r e passante per C. $\left[\begin{cases} x=5t-2 \\ y=-3t-3; 5x-3y-2z-10=0 \\ z=-2t+1 \end{cases} \right]$
4. (Liceo scientifico 2016/2017) Determinare le coordinate dei centri delle sfere di raggio $\sqrt{6}$ tangenti al piano π di equazione: $x + 2y - z + 1 = 0$ nel suo punto P di coordinate (1; 0; 2). [(2; 2; 1) ; (0; –2; 3)]

5. (Liceo scientifico 2017/2018) Determinare l'equazione della superficie sferica S, con centro sulla retta r: $\begin{cases} x = t \\ y = t, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$ tangente al piano π: $3x - y - 2z + 14 = 0$, nel punto $T \equiv (-4; 0; 1)$.

[$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z - 11 = 0$]

6. (Liceo scientifico 2017/2018) Sono dati, nello spazio tridimensionale, i punti $A \equiv (3; 1; 0)$, $B \equiv (3; -1; 2)$, $C \equiv (1; 1; 2)$. Dopo aver verificato che ABC è un triangolo equilatero e che è contenuto nel piano α di equazione $x + y + z - 4 = 0$, stabilire quali sono i punti P tali che $ABCP$ sia un tetraedro regolare.

$\left[P_1 \equiv \left(\frac{11}{3}; \frac{5}{3}; \frac{8}{3} \right), P_2 \equiv (1; -1; 0) \right]$

7. (Liceo scientifico 2018/2019) Dati i punti $A \equiv (2; 0; -1)$ e $B \equiv (-2; 2; 1)$, provare che il luogo geometrico dei punti P dello spazio, tali che $\overline{PA} = \sqrt{2}\,\overline{PB}$, è costituito da una superficie sferica S e scrivere la sua equazione cartesiana. Verificare che il punto $T \equiv (-10; 8; 7)$ appartiene a S e determinare l'equazione del piano tangente in T a S. [$x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 8y - 6z + 13 = 0$; $x - y - z + 25 = 0$]

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali.

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.

AHSME = Annual High School Mathematics Examination
AMC = American Mathematical Contest
NC = North Carolina Stae Mathematics Contest
AL = Alabama State Wide Mathematics Contest
MT = Mathematics Teacher, rivista della NCTM
RICE = Rice University Mathematics Tournament

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato all'Alabama State Wide Mathematics Contest del 1999.
A ≡ (1; 4; –3), B ≡ (7; 2; –1), C ≡ (8; 3; –3) e D ≡ (2; 5; –5) *sono i vertici di un quadrilatero in uno spazio 3D. Che tipo di quadrilatero è*?
Intanto troviamo le misure dei lati.

$$\overline{AB}=\sqrt{(1-7)^2+(4-2)^2+(-3+1)^2}=\sqrt{36+4+4}=\sqrt{44}=2\cdot\sqrt{11}$$

$$\overline{BC}=\sqrt{(8-7)^2+(3-2)^2+(-3+1)^2}=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$$

$$\overline{CD}=\sqrt{(2-8)^2+(5-3)^2+(-5+3)^2}=\sqrt{36+4+4}=\sqrt{44}=2\cdot\sqrt{11}$$

$$\overline{DA}=\sqrt{(1-2)^2+(4-5)^2+(-3+5)^2}=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{5}$$

Abbiamo quindi un parallelogramma non rombo. Calcoliamo le misure delle diagonali.

$$\overline{AC}=\sqrt{(1-8)^2+(4-3)^2+(-3+3)^2}=\sqrt{49+1+0}=\sqrt{50}=5\cdot\sqrt{2}$$

$$\overline{BD}=\sqrt{(2-7)^2+(5-2)^2+(-5+1)^2}=\sqrt{25+9+16}=\sqrt{50}=5\cdot\sqrt{2}$$

poiché sono uguali, *ABCD* è un rettangolo.

1. (AMC2000) Il punto $P \equiv (1; 2; 3)$ è riflesso rispetto al piano *xy*, quindi il simmetrico *Q* è ruotato di 180° attorno all'asse *x*, ottenendo *R*, e infine *R* è traslato di 5 unità nella direzione e verso del semiasse positivo delle *y* per produrre *S*. quali sono le coordinate di *S*? [(1; 3; 3)]
2. (Rice2008) Quanto vale l'area del triangolo di vertici (*x*; 0; 0), (0; *y*; 0), and (0; 0; *z*)? $\left[\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2}\right]$

Questions in English

3. (AHSME1996) Consider two solid spherical balls, one centered at (0; 0; 21/2) with radius 6, and the other centered at (0, 0, 1) with radius 9/2. How many points (*x*, *y*, *z*) with only integer coordinates (lattice points) are there in the intersection of the balls? A) 7 B) 9 C) 11 D) 13 E) 15 [D)]
4. (MT1996) The planes defined by the equations $6x + y + 2z + 1 = 0$ and $x + 2y = 0$ intersect at the point $(k; k^2; k^3 + 1)$. Find *k*. [– 1/2]
5. (NC2002) In a three-dimensional rectangular coordinate system, find the total surface area of the solid defined by $|x|+|y|+|z|\le 1$. Hint: the solid is a particular polyhedron. $\left[4\cdot\sqrt{3}\right]$

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_4_6.htm

7. La misurazione degli angoli

7.1 Risoluzione dei triangoli

Prerequisiti

- Concetto di angolo
- Concetto di misura
- Unità di misura sessagesimale degli angoli
- Similitudine di triangoli
- Sistema di riferimento cartesiano ortogonale
- Concetto di funzione e funzione inversa

Obiettivi

- Comprendere il concetto di risoluzione di un triangolo
- Comprendere il concetto di funzione trigonometrica
- Sapere calcolare con l'uso di una calcolatrice scientifica le funzioni trigonometriche e le rispettive funzioni inverse
- Risolvere semplici problemi trigonometrici

Contenuti

- Definizione delle funzioni trigonometriche elementari per angoli acuti
- Risoluzione dei triangoli rettangoli
- Risoluzione dei triangoli qualsiasi e teorema dei seni
- Risoluzione dei triangoli qualsiasi e teorema del coseno
- Applicazioni

Parole Chiave

Cosecante – Coseno – Cotangente – Risoluzione di un triangolo – Secante – Seno – Tangente

Richiamiamo le conoscenze

Misurazione degli angoli

Il modo più diffuso per misurare gli angoli è dovuto ai Babilonesi che lo stabilirono parecchi secoli prima della nascita di Cristo. Essi proposero di suddividere l'angolo giro in 360 parti uguali, ciascuna delle quali fu detta grado; a sua volta il grado venne suddiviso in 60 parti uguali, chiamati primi e questi a loro volta in 60 parti uguali detti secondi. Per quel che riguarda i sottomultipli è la stessa suddivisione usata per la misurazione del tempo, in ore, minuti e secondi.

Notazione A

Per indicare i gradi sessagesimali si usa il simbolo °, per indicare i primi si usa il simbolo ′, per indicare i secondi il simbolo ″.

Notazione B

Per indicare la misura di un angolo, per esempio di $A\hat{B}C$, scriveremo $\angle A\hat{B}C$.

In questo sistema, detto sessagesimale proprio per il suo collegamento con il numero 60, l'angolo giro misura 360°, l'angolo piatto 180°, l'angolo retto 90°.

Esempio A

- Quanto fa 25°32′47″ + 45°48′52″? Ci rendiamo conto che non è possibile sommare fra loro gradi e primi o primi e secondi o gradi e secondi e dobbiamo quindi sommare fra loro soltanto le grandezze dello stesso genere (omogenee). $\begin{array}{l} 15°\ 32'\ 47'' + \\ \underline{45°\ 48'\ 52'' =} \\ 70°\ 80'\ 99'' \end{array}$. Notiamo che il risultato potrebbe essere scritto meglio. Dire 99″ è lo stesso che dire 1′39″ (infatti 1′ = 60″); potremmo così scrivere la precedente somma come 70°81′39″. Allo stesso modo, dato che 81′ = 1°21′ possiamo scrivere il risultato finale come 71°21′39″.
- Quanto fa 123°22′16″ – 87°42′31″? Anche stavolta comprendiamo che devono sottrarsi solo grandezze fra di loro omogenee. Vi è però un altro problema: come sottrarre 31″ da 16″? Possiamo pensare di usare una tecnica simile a quella del "prestito della decina" che si usa nella sottrazione fra i numeri interi, solo che qui il fattore di moltiplicazione è 60. Così scriveremo il primo angolo nel seguente modo: 123°21′76″ e dato che avremo lo stesso problema con la sottrazione fra i primi lo scriveremo meglio come 122°81′76″, quindi: $\begin{array}{r} 122°\ 81'\ 76'' - \\ \underline{87°\ 42'\ 31'' =} \\ 35°\ 39'\ 45'' \end{array}$.

Similitudine dei triangoli

Nel linguaggio quotidiano il vocabolo *simile* vuol dire che *assomiglia*, così sono simili due fratelli, due penne dello stesso modello, due panini e così via. Nelle matematiche invece simile vuol dire qualcosa di più, ossia una copia ingrandita o rimpicciolita. Più precisamente abbiamo

Definizione A

Diciamo che due poligoni sono **simili** fra loro secondo il fattore $k \neq 0$, se verificano le seguenti proprietà:
- hanno lo stesso numero di lati;
- esiste una corrispondenza biunivoca fra i loro angoli interni, in modo che due angoli corrispondenti siano fra loro uguali;
- esiste una corrispondenza biunivoca fra i lati che formano le coppie di angoli corrispondenti uguali, in modo che il rapporto delle misure dei lati corrispondenti sia sempre uguale a k.

Definizione B

Dati due poligoni simili ciascuna coppia di angoli e ciascuna coppia di lati che si corrispondono in una similitudine, si dicono rispettivamente angoli e lati **omologhi** o **corrispondenti** fra loro.

Definizione C

Dati due poligoni simili, il numero k che misura il valore del comune rapporto fra le misure di segmenti corrispondenti, si chiama **rapporto di similitudine**.

Notazione C

Per indicare che due figure geometriche P e P' sono simili, scriveremo $P \sim P'$.

Nel caso particolare dei triangoli valgono tre criteri che ci assicurano la similitudine di due triangoli.

Teorema A (I criterio di similitudine dei triangoli)

Se due angoli di un triangolo sono uguali ad altrettanti angoli di un altro triangolo, allora i due triangoli sono simili.

Teorema B (II criterio di similitudine dei triangoli)

Se due dei tre rapporti fra i lati di due triangoli sono uguali e gli angoli compresi da tali lati sono fra loro uguali allora i due triangoli sono simili.

Teorema C (III criterio di similitudine dei triangoli)

Se in due triangoli può stabilirsi una corrispondenza biunivoca fra i rispettivi lati, in modo che tutti i rapporti delle misure di lati corrispondenti siano uguali, allora i due triangoli sono simili.

Definizione delle funzioni trigonometriche elementari per angoli acuti

Poiché stai studiando geometria e trigonometria, ti sottopongo un problema. Una nave lascia Boston con un carico di lana, ha una stazza di 200 tonnellate ed è diretta a Le Havre. L'albero maestro è rotto, il mozzo è sul ponte e ci sono 12 passeggeri a bordo, il vento soffia in direzione Est–Nord–Est, l'orologio segna le tre e un quarto del pomeriggio. È il mese di Maggio. Quanti anni ha il capitano?

Gustave Flaubert (1821–1880)

Il problema

In generale, nelle ipotesi valide per i criteri di isometria, a parte qualche caso particolare, non siamo in grado di determinare le misure di tutti i lati e di tutti gli angoli di un triangolo. Vogliamo perciò vedere se riusciamo a risolvere questa questione in altro modo, avvalendoci per esempio delle nozioni sulla similitudine.

Cominciamo con qualche definizione.

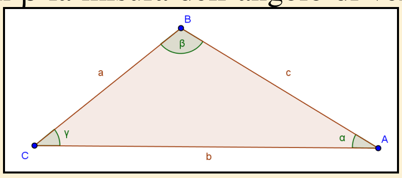
Definizione 1

Dato un triangolo diciamo sua **risoluzione** la determinazione delle misure di tutti i suoi lati e di tutti i suoi angoli.

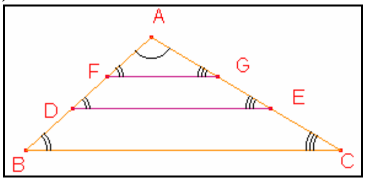
La disciplina matematica che si occupa della risoluzione dei triangoli viene chiamata **trigonometria**, che letteralmente significa ″misura dei triangoli″. Cominciamo a risolvere triangoli rettangoli.
Prima stabiliamo alcune convenzioni di scrittura, che ci aiuteranno a semplificare il linguaggio.

Notazione 1

In un triangolo *ABC*, indichiamo con *a* la misura di *BC*, con *b* la misura di *AC* e con *c* la misura di *AB*; con α la misura dell'angolo di vertice *A*, con β la misura dell'angolo di vertice *B* e con γ la misura dell'angolo di vertice *C*.



Ricordiamo che due triangoli simili hanno gli angoli a due a due uguali e i lati corrispondenti nella stessa proporzione. Quindi, considerando in generale un triangolo *ABC*, deve esservi una relazione stretta fra le proporzioni dei lati e gli angoli. Consideriamo la seguente figura.



In essa vi sono tre triangoli: *ABC, ADE* e *AFG*, che sono evidentemente simili poiché i lati *BC*, *DE* e *FG* sono fra loro paralleli e pertanto gli angoli indicati con lo stesso segno sono uguali perché corrispondenti rispetto a queste parallele tagliate rispettivamente dalla trasversali *AB* e *AC*. Si ha allora la validità delle seguenti uguaglianze: $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{FG}};\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{ED}}=\frac{\overline{AG}}{\overline{FG}};\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{AG}}{\overline{AF}};\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{DC}}{\overline{EC}}=\frac{\overline{FC}}{\overline{GC}}$. Valgono naturalmente anche le uguaglianze ottenute da queste scambiando fra loro numeratore e denominatore. Ciascuna di queste proporzioni determina perciò un numero positivo, che deve essere legato agli angoli del triangolo. In particolare ciò vale per i triangoli rettangoli. Quindi ciascuna di queste proporzioni è una *funzione* degli angoli acuti. Conveniamo di definire delle funzioni matematiche associate appunto ai lati di un triangolo rettangolo con i suoi angoli.

Definizione 2

Dato un triangolo rettangolo *ABC* di ipotenusa *BC*, chiamiamo **seno** di un suo angolo acuto il rapporto fra la misura del cateto opposto all'angolo e la misura dell'ipotenusa.

Notazione 2

Il seno di un angolo *x* si indica con *sin*(*x*). Con riferimento al triangolo *ABC* si ha: $sin(\beta) = \frac{b}{a}, sin(\gamma) = \frac{c}{a}$.

Sottolineiamo che il seno è una funzione, non una costante, dato che il suo valore dipende dall'ampiezza dell'angolo *x* a cui è riferito.

Esempio 1

È un gravissimo errore la seguente semplificazione: $\frac{sin(\cancel{x})}{\cancel{x}} = sin$. Infatti la scritta *sin*, priva di un argomento, ossia della misura di un angolo, non ha alcun significato, inoltre la *x* al denominatore è per così dire "libera", mentre quella al numeratore è vincolata, è parte integrante del seno, la scritta *sin*(*x*) è un tutt'uno, **non il risultato del prodotto del monomio *sin* per il monomio *x*.**

Definizione 3

Dato un triangolo rettangolo *ABC* di ipotenusa *BC*, chiamiamo **coseno** di un suo angolo acuto il rapporto fra la misura del cateto adiacente all'angolo e la misura dell'ipotenusa.

Notazione 3

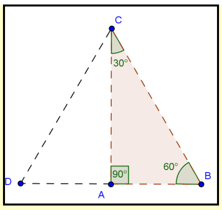
Il coseno di un angolo *x* si indica con *cos*(*x*). Con riferimento al triangolo *ABC*: $cos(\beta) = \frac{c}{a}, cos(\gamma) = \frac{b}{a}$.

Anche il coseno è una funzione. Notiamo immediatamente che $sin(\beta) = cos(\gamma)$ e $sin(\gamma) = cos(\beta)$. In effetti il motivo per cui usiamo la parola coseno sta proprio nel fatto che se β e γ sono due angoli complementari (e gli angoli acuti di un triangolo rettangolo lo sono certamente), allora il seno di ciascuno dei due angoli è sempre uguale al coseno dell'altro. Inoltre sia il seno che il coseno di un angolo acuto sono numeri positivi e minori di 1, essendo rapporto fra cateto e ipotenusa di uno stesso triangolo rettangolo.

L'angolo storico

Seno. I primi a considerare il seno di un angolo, furono gli astronomi indiani; in particolare Aryabhatta nel V secolo d.C., costruì una tavola del seno. In seguito si interessarono di tale questione i matematici arabi. La parola è derivata dal latino *sinus* e fu usata per primo da Roberto di Chester in una traduzione di un'opera araba, effettuata nel 1145. In effetti la scelta del nome fu dovuta a un errore di traduzione, dato che gli arabi indicavano questo vocabolo con *jiba*, poiché però in arabo le vocali si leggono ma non si scrivono, Roberto scambiò la parola con *jaib*, che vuol dire baia o insenatura. Ecco che perciò usò il vocabolo latino *sinus*, che significa appunto baia. La stessa parola fu usata in seguito anche da Regiomontano (1436 – 1476). Il simbolo *sin* fu invece usato per primo da Thomas Fincke nel suo libro *Geometria rotundi* del 1583. Fincke lo usò seguito da un punto, invece Edmund Gunter nel 1624 lo scrisse privo del punto. Altri a usare lo stesso simbolo furono William Oughtred e Hérigone.
Coseno. È una abbreviazione della parola *complementi sinus*, il termine fu coniato in latino, *cosinus*, da Edmund Gunter in un'opera del 1620. Il simbolo *cos* si trova invece in un'opera del 1674 di Sir Jonas Moore, in una del 1696 di Samuel Jeake e successivamente, nel XIX secolo, in Eulero.

Esempio 2

Consideriamo un triangolo rettangolo i cui angoli acuti misurano 30° e 60°. È facile vedere che tale triangolo può considerarsi come metà di un triangolo equilatero: infatti se tracciamo un'altezza di un triangolo equilatero, questa divide il triangolo dato in due triangoli rettangoli uguali, i cui angoli acuti misurano appunto 30° e 60°. 

Questo ci consente di affermare che il cateto adiacente all'angolo di 60°, nella figura precedente denotato con *AB*, misura quanto metà dell'ipotenusa, mentre l'altro cateto, denotato con *AC*, misura $\sqrt{\overline{BC}^2 - \left(\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{4}}\cdot\overline{BC} = \sqrt{\frac{3}{4}}\cdot\overline{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\overline{BC}$. Quindi per le definizioni precedenti si ha:

$$sin(60°) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\overline{BC}}{\overline{BC}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = cos(30°);\quad sin(30°) = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}}{\overline{BC}} = \frac{1}{2} = cos(60°).$$

Possiamo interpretare trigonometricamente il teorema di Pitagora.

Teorema 1

Si ha: $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$, $0° < x < 90°$.

Dimostrazione. Il teorema di Pitagora applicato a un triangolo rettangolo *ABC* di ipotenusa *BC* è espresso dall'identità: $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$. Dividiamo per $\overline{BC}^2$: $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2} + \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{BC}^2} \Rightarrow \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}\right)^2 = 1$. Adesso basta sostituire a ciascuno dei due rapporti le loro espressioni mediante le funzioni trigonometriche, per ottenere la tesi.

Esempio 3

Utilizzando il risultato del Teorema 1, vogliamo risolvere il seguente problema. Sappiamo che per un certo angolo acuto *x*, si ha: $sin(x) = 0{,}34$; vogliamo sapere quanto vale $cos(x)$. Scriviamo: $0{,}34^2 + cos^2(x) = 1 \Rightarrow cos^2(x) = 0{,}8844 \Rightarrow cos(x) = \pm\sqrt{0{,}8844} \approx \pm 0{,}94$. Per quanto detto la soluzione negativa non può essere accettata, essendo il coseno di un angolo acuto un numero positivo. Inoltre il valore ottenuto è approssimato, dato che il radicando non è un quadrato perfetto. E questo non è per niente una particolarità, anzi tutt'altro.

Passiamo alle altre definizioni.

Definizione 4

Dato un triangolo rettangolo *ABC* di ipotenusa *BC*, chiamiamo **tangente** di un suo angolo acuto il rapporto fra la misura del cateto opposto all'angolo e la misura dell'altro cateto.

Notazione 4

La tangente di un angolo *x* si indica con $tan(x)$. Con riferimento al triangolo *ABC*: $tan(\beta) = \frac{b}{c}, tan(\gamma) = \frac{c}{b}$.

Visto quel che abbiamo detto a proposito delle relazioni fra seno e coseno, risulta naturale considerare una funzione complementare della funzione tangente.

Definizione 5

Dato un triangolo rettangolo *ABC* di ipotenusa *BC*, chiamiamo **cotangente** di un suo angolo acuto il rapporto fra la misura del cateto adiacente all'angolo e la misura dell'altro cateto.

Notazione 5

La cotangente di un angolo x si indica con $cot(x)$. Con riferimento al triangolo ABC: $cot(\beta)=\frac{c}{b}, cot(\gamma)=\frac{b}{c}$.

Dalle precedenti definizioni si deduce facilmente il seguente risultato.

Teorema 2

Si ha: $tan(x)=\frac{1}{cot(x)}$, $0° < x < 90°$.

Per completare il discorso, consideriamo le funzioni inverse di seno e coseno, anche se sono funzioni trigonometriche poco usate.

Definizione 6

Dato un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa BC, chiamiamo **cosecante** di un suo angolo acuto il rapporto fra la misura dell'ipotenusa e la misura del cateto opposto all'angolo.

Notazione 6

La cosecante di un angolo x si indica con $csc(x)$. Con riferimento al triangolo ABC: $csc(\beta)=\frac{a}{b}, csc(\gamma)=\frac{a}{c}$.

Definizione 7

Dato un triangolo rettangolo ABC di ipotenusa BC, chiamiamo **secante** di un suo angolo acuto il rapporto fra la misura dell'ipotenusa e la misura del cateto adiacente all'angolo.

Notazione 7

La secante di un angolo x si indica con $sec(x)$. Con riferimento al triangolo ABC: $sec(\beta)=\frac{a}{c}, sec(\gamma)=\frac{a}{b}$.

Proprio per come abbiamo definito le precedenti funzioni, si ha la validità del seguente risultato.

Teorema 3

Si ha: $csc(x)=\frac{1}{sec(x)}$, $0° < x < 90°$.

Ovviamente secante e cosecante di un angolo acuto sono sempre numeri positivi maggiori di 1.

L'angolo storico

Tangente. La parola fu coniata da Thomas Finck in un'opera del 1583, *Geometria rotundi libri* XIII, e fu subito contestata da François Viete, perché il nome poteva provocare confusione con quello di retta tangente. Ciononostante tale vocabolo è rimasto fino ai nostri giorni. In effetti la funzione viene considerata per la prima volta dall'arabo Alhabas, vissuto nell'ottavo secolo d.C:, che la usa per calcolare la lunghezza dell'ombra di un bastone e proprio per questo fatto, prima di Finck la tangente era nota come *umbra recta*. Lo stesso Fincke propose anche il simbolo *tan* seguito da un punto, invece Edmund Gunter nel 1624 lo scrisse privo del punto. Altri a usare lo stesso simbolo furono William Oughtred e Hérigone.
Cotangente. È un abbreviazione di *complementi tangens*. Il termine fu coniato in latino, *cotangens*, da Edmund Gunter nella stessa opera del 1620 nella quale aveva introdotto il termine di coseno. Il simbolo *cot* si trova invece nello stesso lavoro del 1674 di Sir Jonas Moore, nel quale questi introdusse il simbolo per il coseno. Il suo primo uso è dovuto sempre all'arabo Alhabas, nello stesso problema del calcolo dell'ombra prodotta da un bastone. Prima di Gunter essa era nota come *umbra versa*.
Secante. Il nome proviene da un altro problema proposto e risolto da Alhabas: determinare la linea fittizia

che congiunge l'estremità di un bastone con l'estremità della sua ombra. Questo nome è stato usato quindi poiché la detta linea taglia, *seca*, l'aria. Anche questo termine è dovuto a Thomas Finck, nella stessa opera del 1583.

Cosecante. Deriva dal vocabolo *complementi secans*. Non è certo chi introdusse il termine, qualcuno pensa sia stato Rheticus nel 1596, altri pensano sia merito di Edmund Gunter qualche anno più tardi. Il primo simbolo usato fu *csc*, in un testo del 1881.

Prima di proseguire osserviamo che non vi è accordo universale per i simboli delle funzioni trigonometriche. Così spesso in Italia piuttosto che *sin* si scrive *sen*; nel caso della tangente i simboli usati sono anche più vari: *tan*, *tang*, *tg*. Analogo discorso per la cotangente: *cotan*, *cotg*, *cot* e per secante e cosecante. In tutte le calcolatrici però vengono usati i simboli *sin*, *cos* e *tan* (come mostrato nel caso della calcolatrice del sistema operativo Windows 

), perciò preferiamo usare questi simboli, che hanno anche la caratteristica di essere sigle tutte formate da tre lettere.
Vale anche un altro importante risultato.

Teorema 4

Si ha: $tan(x) = \dfrac{sin(x)}{cos(x)}$, $0° < x < 90°$.

Dimostrazione. Con riferimento al triangolo *ABC* si ha: $tan(\beta) = \dfrac{b}{c} = \dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{a}{c} = \dfrac{sin(\beta)}{cos(\beta)}$.

Lasciamo per esercizio la dimostrazione del seguente risultato.

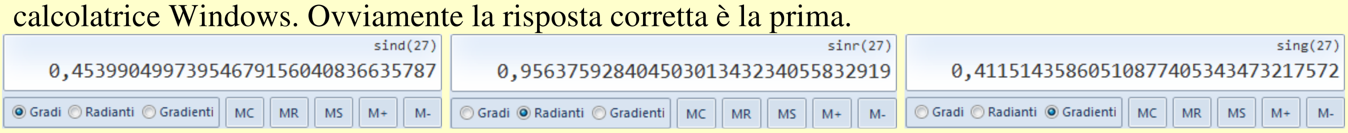
Teorema 5

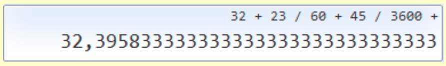
Si ha: $cot(x) = \dfrac{cos(x)}{sin(x)}$, $0° < x < 90°$.

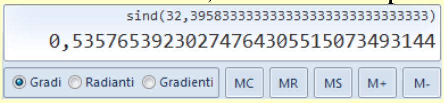
Dopo avere definito le funzioni trigonometriche dobbiamo anche stabilire come esse possano calcolarsi. Nei tempi antichi diversi studiosi hanno costruito delle tavole trigonometriche, in cui si trovavano i valori di seno, coseno e tangente di angoli acuti con precisioni prefissate. I metodi di costruzione sono stati diversi, che sono stati migliorati con il passare del tempo. Finché non si è arrivati alla costruzione delle calcolatrici scientifiche, che hanno lo stesso scopo delle tavole, ma sono certamente di uso più facile e più rapido.
L'uso delle calcolatrici è diverso a seconda dei vari modelli e marche. Per il calcolo del seno e del coseno di un dato angolo il metodo usato dalle calcolatrici più recenti è quello di digitare nello stesso ordine di scrittura. Per esempio se volessimo calcolare *sin*(57°), digiteremmo intanto il tasto con la scritta **sin** quindi il valore **57**. Si deve però fare attenzione che l'unità di misura sia quella corretta, dato che le calcolatrici di solito possono calcolare in 3 diverse unità di misura: gradi, radianti e gradienti. Anche in questo caso come variare l'unità di misura, così come vedere l'unità di misura che si sta usando, dipende dalla calcolatrice. In genere i gradi sessagesimali sono scritti sul display della calcolatrice con una piccola **D** o con la scritta **DEG**.
Inoltre sulle calcolatrici, come sulle tavole, sono presenti solo i tasti relativi alle funzioni *sin, cos* e *tan*. Non sono presenti i tasti per secante, cosecante e cotangente, ciò perché questi si possono ottenere mediante coseno, seno e tangente rispettivamente.

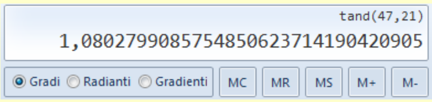
Esempio 4

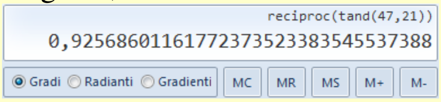
- Per calcolare il valore del seno di 27°, dobbiamo intanto controllare se sul display appare la scritta **DEG**, ossia se il calcolo dei gradi viene effettuato nel sistema sessagesimale e poi si procede come stabilito dalla calcolatrice in uso. In figura vediamo cosa accade nelle tre diverse unità di misura, usando la calcolatrice Windows. Ovviamente la risposta corretta è la prima.



- Si voglia calcolare il coseno di 32°23′45″. Ci si deve informare, leggendo sul manuale della calcolatrice utilizzata, come si fa a introdurre il precedente valore. In ogni caso un metodo universale è quello di portare tutti i valori in gradi, ossia di inserire il numero come 32 + 23/60+45/3600, dato che 60 primi e 3600 secondi formano un grado. 



- Si voglia calcolare la $cot(47°12′36″)$. Prima si calcola la tangente, 

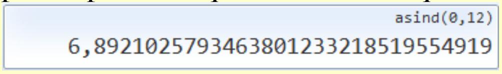
. A questo punto si digita il tasto corrispondente al simbolo $\frac{1}{x}$ 

.

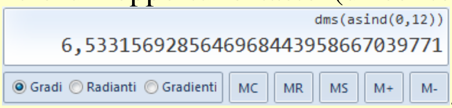
Un altro importante problema da risolvere è quello cosiddetto inverso, cioè determinare il valore dell'angolo di cui conosciamo una sua funzione trigonometrica.

Esempio 5

Vogliamo sapere quale angolo x ha seno uguale a 0,12. Nelle calcolatrici scientifiche osserviamo che in piccolo sopra i tasti *sin*, *cos* e *tan*, scritti in un dato colore, vi sono sin^{-1}, cos^{-1}, tan^{-1}. 

Il colore in cui sono scritti è lo stesso di un tasto particolare, il cui nome è 2nd oppure INV o anche Shift o un altro nome. Ciò significa che se vogliamo usare tali tasti dobbiamo prima premere questo tasto. In questo caso quindi premeremo il detto tasto, poi **sin** e infine 0.12, ottenendo 

(ovviamente se siamo in **DEG**). Il risultato è espresso solo in gradi, se volessimo scriverlo in gradi, primi e secondi, anche in questo caso c'è un opportuno tasto (di solito indicato con DMS o con 

), che ci permette di dire che l'angolo è 

, cioè circa 6°53′32″.

L'angolo storico

Le funzioni trigonometriche inverse. Il primo a utilizzare dei simboli per tali funzioni fu Daniel Bernoulli, che nel 1729 scrisse A S. per indicare l'arcoseno, cioè l'inversa della funzione seno che abbiamo insicato con sin^{-1}. In seguito, Eulero nel 1736 usò **A t** per l'arcotangente e, nel 1737, **A sin** per l'arcoseno. Condorcet nel 1769 scriveva **arc(sin. = *x*)**. Mentre Scherffer nel 1772 usava **arc. tang**. La notazione che abbiamo usato noi e che si trova spesso sulle calcolatrici, quella cioè con l'esponente – 1, come $\boldsymbol{sin^{-1}}$, fu introdotta da William Herschel nel 1813.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Consideriamo il classico triangolo rettangolo i cui lati sono lunghi 3, 4 *e* 5 *unità. Quanto valgono le funzioni trigonometriche degli angoli acuti di questo triangolo*?
Applichiamo le definizioni, avremo, indicando l'ipotenusa con a, con b e c i cateti di 3 e 4 rispettivamente:

$sin(\beta) = cos(\gamma) = b/a = 3/5 = 0,6$; $cos(\beta) = sin(\gamma) = c/a = 4/5 = 0,8$; $tan(\beta) = cot(\gamma) = b/c = 3/4 = 0,75$;

$cot(\beta) = tan(\gamma) = c/b = 4/3 \approx 1,3$; $sec(\beta) = csc(\gamma) = a/c = 5/4 = 1,25$; $csc(\beta) = sec(\gamma) = a/b = 5/3 \approx 1,7$.

Determinare le funzioni trigonometriche degli angoli acuti dei triangoli rettangoli di cui forniamo le misure dei cateti (i risultati nell'ordine sono: seno, coseno, tangente, cotangente, secante e cosecante tutti dell'angolo* β*)

***Livello* 1**

1. $(b = 5, c = 12)$; $(b = 2, c = 3)$; $(b = 2{,}3, c = 4{,}7)$

$$\left[\left(\frac{5}{13};\frac{12}{13};\frac{5}{12};2,4;\frac{13}{12};2,6\right);\left(\frac{2}{\sqrt{13}};\frac{3}{\sqrt{13}};\frac{2}{3};\frac{3}{2};\frac{\sqrt{13}}{3};\frac{\sqrt{13}}{2}\right);\left(\approx 0,44;\approx 0,90;\approx 0,49;\approx 2,0;\approx 1,1;\approx 2,3\right)\right]$$

2. $\left(b=\sqrt{2},c=\sqrt{3}\right)$; $(b = 1/2, c = 3/4)$; $(b = 1, c = 2)$

$$\left[\left(\sqrt{\frac{2}{5}};\sqrt{\frac{3}{5}};\sqrt{\frac{2}{3}};\sqrt{\frac{3}{2}};\sqrt{\frac{5}{3}};\sqrt{\frac{5}{2}}\right);\left(\frac{2}{\sqrt{13}};\frac{3}{\sqrt{13}};\frac{2}{3};\frac{3}{2};\frac{\sqrt{13}}{3};\frac{\sqrt{13}}{2}\right);\left(\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{2};2;\frac{\sqrt{5}}{2};\sqrt{5}\right)\right]$$

Lavoriamo insieme

Quanto misurano gli angoli interni del triangolo rettangolo i cui lati sono lunghi 3, 4 *e* 5 *unità*?
Basta usare una qualsiasi delle sei funzioni trigonometriche e usare una calcolatrice scientifica.

$$\beta = sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = cot^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = sec^{-1}\left(\frac{5}{4}\right) = csc^{-1}\left(\frac{5}{3}\right) \approx 36°52'12"$$

$$\gamma = sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = cot^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = sec^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) = csc^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 53°7'48"$$

Determinare valori approssimati al secondo decimale degli angoli acuti dei triangoli rettangoli di cui forniamo le misure dei cateti

***Livello* 1**

3. $(b = 5, c = 8)$; $(b = 4, c = 7)$; $(b = 1{,}32, c = 2{,}54)$

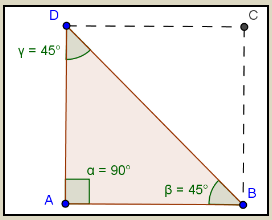
[β ≈ 32°19″, γ ≈ 57°59′41″ ; β ≈ 29°44′42″, γ ≈ 60°15′18″ ; β ≈ 27°27′37″, γ ≈ 62°32′23″]

4. $(b = 1, c = 2)$; $\left(b=\sqrt{5},c=\sqrt{3}\right)$; $(b = 3/5, c = 6/7)$

[β ≈ 26°33′54″ , γ ≈ 63°26′6″ ; β ≈ 52°14′20″, γ ≈ 37°45′40″ ; β ≈ 34°59′31″; γ ≈ 55°29″]

Lavoriamo insieme

Determinare i valori delle funzioni trigonometriche di 45°.



Un triangolo rettangolo i cui angoli sono di 45° è anche isoscele, quindi è metà di un quadrato, ma allora facilmente si ha: $sin(45°)=cos(45°)=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\cancel{AC}}{\cancel{AC}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Utilizzando poi le relazioni fra le diverse funzioni abbiamo anche: $tan(45°)=cot(45°)=\frac{sin(45°)}{cos(45°)}=\frac{cos(45°)}{sin(45°)}=1$; $sec(45°)=$ $csc(45°)=$ $=\frac{1}{cos(45°)}=\frac{1}{sin(45°)}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}$.

Esprimere numericamente le seguenti espressioni

Livello 1

5. $tan(30°)$; $cot(30°)$; $sec(30°)$; $csc(30°)$; $tan(60°)$; $cot(60°)$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{3};\sqrt{3};\frac{2\sqrt{3}}{3};2;\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

6. $\frac{sin(30°)+1}{2-cos(45°)}+tan(45°)-cot(60°)$; $\frac{1+cot(30°)}{sec(45°)}+\frac{1-tan(30°)}{csc(60°)}$ $\left[\frac{78-14\cdot\sqrt{3}+9\cdot\sqrt{2}}{42};\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{2}-1}{2}\right]$

7. $cos(60°)\cdot\frac{1-sin(45°)}{1+cos(45°)}-csc(30°)\cdot\frac{1+tan(30°)}{1-cot(30°)}$ $\left[\frac{21-6\cdot\sqrt{2}+8\cdot\sqrt{3}}{6}\right]$

8. $\frac{tan(45°)}{1+sec(30°)}+cot(60°)-csc(45°)\cdot sin(30°)-\frac{1}{2+cos(60°)}$ $\left[\frac{-102+70\cdot\sqrt{3}-15\cdot\sqrt{2}}{30}\right]$

9. $\frac{sec(30°)+1}{3+csc(45°)}+tan(30°)-2\cdot cos(60°)\cdot sin(45°)+\frac{4}{1-cot(60°)}$ $\left[\frac{270+110\cdot\sqrt{3}-27\cdot\sqrt{2}-4\cdot\sqrt{6}}{42}\right]$

10. $\frac{cos(30°)-1}{1+csc(45°)}+cot(45°)-tan(30°)\cdot sin(60°)+\frac{4}{1-sec(30°)}$ $\left[\frac{-21-17\cdot\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right]$

11. $[1-sin(60°)\cdot cos(30°)]^2$; $\frac{tan(30°)+cot(60°)}{[sin(30°)+cos(60°)]^2}$; $\frac{tan^4(60°)-cot^4(30°)}{sec^2(60°)+csc^2(30°)}$ $\left[\frac{1}{16};\frac{2\sqrt{3}}{3};0\right]$

12. $\frac{3\cdot cos(45°)}{1+sin(30°)}+cot(60°)-csc(45°)\cdot sec(30°)+\frac{1}{2-tan(45°)}$ $\left[\frac{\sqrt{3}\cdot(1-2\cdot\sqrt{2})}{3}+1+\sqrt{2}\right]$

13. $\frac{csc(30°)-2}{sin(45°)}+3-tan(30°)+cos(30°)\cdot cot(45°)+\frac{2}{3-sec(60°)}$ $\left[\frac{30+\sqrt{3}}{6}\right]$

14. $\frac{cos(30°)-1}{1+cot(45°)}+csc(30°)-tan(30°)\cdot sin(60°)+\frac{4}{1-cot(30°)}$ $\left[-\frac{7\cdot\sqrt{3}+4}{4}\right]$

15. $\frac{sin^3(60°)-cos^3(60°)}{sin(30°)+cos(30°)}$; $\frac{tan^2(30°)}{1+sec^2(45°)}-csc(45°)\cdot sin(30°)-\frac{1}{2+cos(60°)}$ $\left[\frac{5-2\cdot\sqrt{3}}{4};-\frac{45\cdot\sqrt{2}+26}{90}\right]$

16. $[sin(30°)+1]^2-[2-cos(45°)]\cdot[2+tan(45°)]$ $\left[\frac{6\cdot\sqrt{2}-15}{4}\right]$

Semplificare le seguenti espressioni, in cui gli argomenti delle funzioni sono tutti angoli acuti, tali che esse abbiano significato

Livello 2

17. $sin(90°-\alpha)+cos(\alpha)+tan(\alpha)\cdot cot(90°-\alpha)$ $\left[\frac{2\cdot cos^3(\alpha)+sin^2(\alpha)}{cos^2(\alpha)}\right]$

18. $sin(\beta) \cdot sec(\beta) + cos(\alpha) \cdot csc(90° - \alpha)$; $\dfrac{sin^2(\alpha) - cos^2(\alpha)}{sin(90° - \alpha) - cos(90° - \alpha)}$ [$1 + tan(\beta)$; $-sin(\alpha) - cos(\alpha)$]

19. $\dfrac{sin^3(\alpha) + tan^3(\beta)}{sin^2(\alpha) - cos(90° - \alpha) \cdot cot(90° - \beta) + tan^2(\beta)}$; $[sin(\alpha) + cos(\alpha)]^2$

[$sin(\alpha) + tan(\beta)$; $1 + 2 \cdot sin(\alpha) \cdot cos(\alpha)$]

20. $\dfrac{sec^6(\gamma) - cot^3(\delta)}{sec^4(\gamma) + sec^2(\gamma) \cdot cot(\delta) + tan^2(90° - \delta)}$; $sin^2(\alpha) - cos^2(90° - \alpha)$ [$sec^2(\gamma) - cot(\delta)$; 0]

21. $\dfrac{[sin(x) - cos(y)]^4}{sin^3(x) - 3 \cdot sin^2(x) \cdot cos(y) + 3 \cdot sin(x) \cdot cos^2(y) - cos^3(y)}$ [$sin(x) - cos(y)$]

22. $\dfrac{tan^6(x) - cot^6(x)}{[tan^2(x) - cot^2(x)] \cdot [tan^4(x) + 1 + cot^4(x)]}$ [1]

Livello 3

23. Tenuto conto che un triangolo rettangolo i cui angoli acuti misurano 18° e 72°, può considerarsi metà di un triangolo in cui il cateto adiacente all'angolo di 72° è lato del decagono regolare inscritto nella circonferenza il cui raggio è l'ipotenusa e che tale lato è sezione aurea del raggio, cioè è lunga $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot r$, determinare le funzioni trigonometriche di 18° e 72°.

$$\left[\begin{array}{l} sin(18°) = cos(72°) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}; cos(18°) = sin(72°) = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}; \\ tan(18°) = cot(72°) = \sqrt{\dfrac{5-2\cdot\sqrt{5}}{5}}; tan(72°) = cot(18°) = \sqrt{5+2\cdot\sqrt{5}} \\ sec(18°) = csc(72°) = \sqrt{\dfrac{10-2\cdot\sqrt{5}}{5}}; csc(18°) = sec(72°) = 1+\sqrt{5} \end{array}\right]$$

24. Si calcoli, senza l'aiuto della calcolatrice, il valore di $sin^2(20°) + sin^2(70°)$. [1]
25. Tenuto conto del precedente esercizio se $sin^2(x) + sin^2(y) = 1$, con x e y angoli acuti, in che relazione sono x e y? [Sono complementari]
26. Si calcoli, senza l'aiuto della calcolatrice, il valore di $cos^2(35°) + cos^2(55°)$. [1]
27. Tenuto conto del precedente esercizio se $cos^2(x) + cos^2(y) = 1$, con x e y angoli acuti, in che relazione sono x e y? [Sono complementari]
28. Esprimere $sin(32°)/sin(58°)$ mediante la funzione tangente. [$tan(32°)$]
29. Tenuto conto del precedente esercizio se $sin(x)/sin(y) = tan(x)$, con x e y angoli acuti, in che relazione sono x e y? [Sono complementari]
30. Esprimere $cos(48°)/cos(42°)$ mediante la funzione cotangente. [$cot(48°)$]
31. Tenuto conto del precedente esercizio se $cos(x)/cos(y) = cot(x)$, con x e y angoli acuti, in che relazione sono x e y? [Sono complementari]
32. Sapendo che $[cos(10°) + cos(80°)]^2 = 1 + sin(20°)$, determinare una relazione fra i coseni dei tre angoli. [$cos(10°) \cdot cos(80°) = 1/2 \cdot cos(20°)$]
33. Tenuto conto del precedente esercizio semplificare $[sin(10°) + sin(80°)]^2$. [$1 + sin(20°)$]
34. Determinare una relazione fra secante e cosecante dello stesso angolo acuto.

$$\left[sec(x) = \frac{csc(x)}{\sqrt{csc^2(x)-1}}; csc(x) = \frac{sec(x)}{\sqrt{sec^2(x)-1}}\right]$$

Tenendo conto del Teorema di Pitagora espresso in forma trigonometrica, determinare una relazione fra

35. ($cos^2(x)$ e $tan^2(x)$) ; ($sin^2(x)$ e $cot^2(x)$) $\left[\dfrac{1}{cos^2(x)} = 1 + tan^2(x); \dfrac{1}{sin^2(x)} = 1 + cot^2(x)\right]$

Lavoriamo insieme

Di un angolo acuto conosciamo il seno, pari a 0,71, *vogliamo determinare un valore approssimato delle altre* 5 *funzioni trigonometriche dello stesso angolo.*

Possiamo usare il Teorema 1, per determinare il coseno: $cos(x) = \sqrt{1 - sin^2(x)} = \sqrt{1 - 0,71^2} \approx 0,704$. Per secante e cosecante basta applicare invece il Teorema 3: $sec(x) = 1/cos(x) = 1/0,71 \approx 1,408$; $csc(x) = 1/sin(x) \approx 1/0,704 \approx 1,420$. Infine per tangente e cotangente il Teorema 4: $tan(x) = sin(x)/cos(x) \approx 0,704/0,71 \approx 0,992$; $cot(x) = cos(x)/sin(x) \approx 0,71/0,704 \approx 1,001$.
Potevamo anche usare la calcolatrice, determinando il valore dell'angolo: $x = cos^{-1}(0,71) \approx 44°45'54''$. Quindi, sempre con la calcolatrice calcoleremo seno e tangente e poi determineremo le altre tre funzioni come inverse di queste: $sin(44°45'54'') \approx 0,704$; $tan(44°45'54'') \approx 0,992$. Ovviamente i risultati possono differire, anche se di poco. Concludiamo osservando che, essendo l'angolo molto vicino a 45°, i valori delle funzioni complementari sono fra loro molto vicini.

Determinare i valori delle altre 5 funzioni trigonometriche, mediante la data funzione. Determinare poi, usando la calcolatrice, un valore approssimato dell'angolo acuto dato

Livello 1

36. $sin(x) = \frac{7}{20}$ $\left[cos(x) = \frac{3\cdot\sqrt{39}}{20}; tan(x) = \frac{7\cdot\sqrt{39}}{117}; cot(x) = \frac{3\cdot\sqrt{39}}{7}; sec(x) = \frac{20\cdot\sqrt{39}}{117}; csc(x) = \frac{20}{7}\right]$

37. $cos(y) = \frac{27}{50}$ $\left[sin(y) = \frac{\sqrt{1771}}{50}; tan(y) = \frac{\sqrt{1771}}{27}; cot(y) = \frac{27}{\sqrt{1771}}; sec(y) = \frac{50}{27}; csc(y) = \frac{50}{\sqrt{1771}}\right]$

38. $csc(z) = \frac{31}{20}$ $\left[sin(z) = \frac{20}{31}; cos(z) = \frac{\sqrt{561}}{31}; tan(z) = \frac{20\cdot\sqrt{561}}{561}; cot(z) = \frac{\sqrt{561}}{20}; sec(z) = \frac{31\cdot\sqrt{561}}{561}\right]$

39. $sin(x) = \frac{3}{4}$ $\left[cos(x) = \frac{7}{4}; tan(x) = \frac{3\cdot\sqrt{7}}{7}; cot(x) = \frac{\sqrt{7}}{3}; sec(x) = \frac{4\cdot\sqrt{7}}{7}; csc(x) = \frac{4}{3}\right]$

40. $cos(y) = \frac{21}{25}$ $\left[sin(y) = \frac{2\cdot\sqrt{46}}{25}; tan(y) = \frac{2\cdot\sqrt{46}}{21}; cot(y) = \frac{21}{2\sqrt{46}}; sec(y) = \frac{25}{21}; csc(y) = \frac{25}{2\sqrt{46}}\right]$

41. $sec(z) = \frac{107}{50}$ $\left[sin(z) = \frac{\sqrt{8949}}{107}; cos(z) = \frac{50}{107}; tan(z) = \frac{\sqrt{8949}}{50}; cot(z) = \frac{50}{\sqrt{8949}}; csc(z) = \frac{107}{\sqrt{8949}}\right]$

42. $sin(x) = \frac{99}{100}$ $\left[cos(x) = \frac{\sqrt{199}}{100}; tan(x) = \frac{99\cdot\sqrt{199}}{199}; cot(x) = \frac{\sqrt{199}}{99}; sec(x) = \frac{100}{\sqrt{199}}; csc(x) = \frac{100}{99}\right]$

43. $cos(y) = \frac{1}{100}$ $\left[sin(y) = \frac{3\cdot\sqrt{1111}}{100}; tan(y) = 3\cdot\sqrt{1111}; cot(y) = \frac{\sqrt{1111}}{3333}; sec(y) = 100; csc(y) = \frac{100}{3\cdot\sqrt{1111}}\right]$

44. $csc(z) = \frac{7}{4}$ $\left[sin(z) = \frac{4}{7}; cos(z) = \frac{\sqrt{33}}{7}; tan(z) = \frac{4\cdot\sqrt{33}}{33}; cot(z) = \frac{\sqrt{33}}{4}; sec(z) = \frac{7\cdot\sqrt{33}}{33}\right]$

45. $sin(x) = 1,5$; $cos(y) = 0,33$ [$\varnothing$; $sin(y) \approx 0,94$; $tan(y) \approx 2,86$; $cot(y) \approx 0,35$; $sec(y) \approx 3,03$; $csc(y) \approx 1,06$]
46. $sec(z) = 3,18$: $csc(z) = 0,31$ [$sin(z) \approx 0,95$; $cos(z) \approx 0,31$; $tan(z) \approx 3,02$; $cot(z) \approx 0,33$; $csc(z) \approx 1,05$;$\varnothing$]
47. $sin(x) = 0,12$; $cos(y) = 1,23$ [$cos(x) \approx 0,99$; $tan(x) \approx 0,12$; $cot(x) \approx 8,27$; $sec(x) \approx 1$; $csc(x) \approx 8,33$; $\varnothing$]

Livello 2

Tenendo conto degli esercizi precedenti, e supposto x un angolo acuto, determinare

48. $cos(x)$, se $tan(x) = 3,14$ [$\approx 0,96$] $tan(x)$, se $cos(x) = 0,31$ [$\approx 3,07$]
49. $cot(x)$, se $sin(x) = 0,19$ [$\approx 5,17$] $sin(x)$, se $cot(x) = 1,23$ [$\approx 0,63$]

Lavoriamo insieme

Verificare se la seguente risulta un'identità per un triangolo rettangolo in cui con a indichiamo la misura dell'ipotenusa: $a\cdot sin(\beta)\cdot tan(\beta)+c\cdot cos(\gamma)=\dfrac{b}{sin(\gamma)\cdot cos(\gamma)}$.

Dire che una certa espressione è un'identità significa che essa è valida per tutti i valori che possano assegnarsi alle incognite, purché per tali valori si ottengano espressioni che non siano prive di significato. Per effettuare la verifica in questo caso, basta semplicemente sostituire alle funzioni trigonometriche le rispettive definizioni. Abbiamo così $\cancel{a}\cdot\dfrac{b}{\cancel{a}}\cdot\dfrac{b}{c}+c\cdot\dfrac{\cancel{c}}{\cancel{b}}\cdot\dfrac{\cancel{b}}{\cancel{c}}=\dfrac{b}{sin(\gamma)\cdot cos(\gamma)}$. Da cui: $\dfrac{b^2}{c}+c=\dfrac{b}{sin(\gamma)\cdot cos(\gamma)}\Rightarrow$ $\Rightarrow\dfrac{b^2+c^2}{c}=\dfrac{\cancel{b}}{\frac{c}{a}\cdot\frac{\cancel{b}}{a}}\Rightarrow\dfrac{a^2}{c}=\dfrac{a^2}{c}$. Prima di notare che abbiamo effettivamente verificato che l'identità è corretta, diciamo che nel penultimo passaggio abbiamo applicato il teorema di Pitagora, ossia: $b^2 + c^2 = a^2$.

Verificare se le seguenti uguaglianze risultano identità per un triangolo rettangolo in cui a è la misura dell'ipotenusa

Livello 1

50. $tan(\beta)\cdot tan(\gamma) = 1$; $sin^2(\beta) + sin^2(\gamma) = 1$; $sec(\beta)\cdot csc(\gamma) = 1$; $tan(\gamma)=\sqrt{csc(\beta)-1}$; $\dfrac{b^2}{c^2}=\dfrac{cot(\gamma)}{cot(\beta)}$

[Si ; Si ; No ; No ; Si]

Livello 2

51. $sec(\beta)\cdot tan(\gamma)+csc(\beta)\cdot cos(\gamma)=\dfrac{b}{sin(\gamma)\cdot cos(\gamma)}$ [No]

52. $a\cdot cos(\gamma)\cdot cot(\gamma)+a\cdot tan(\gamma)\cdot sin(\beta)=\dfrac{b}{sin(\gamma)\cdot cos(\gamma)}$ [Si]

53. $a\cdot sin(\beta)\cdot tan(\beta) + a\cdot cot(\beta)\cdot cos(\gamma) = a/c$ [No]

54. $a\cdot cos(\gamma)\cdot csc(\beta) - b\cdot tan(\beta)\cdot sec(\gamma) = a\cdot(1 - b/c)$ [Sì]

55. $c\cdot csc(\beta)\cdot cos(\gamma)+b\cdot tan(\beta)\cdot sin(\gamma)=\dfrac{b^2+ac}{a}$ [Sì]

56. $a\cdot sec(\beta)\cdot tan(\gamma) + b\cdot cos(\gamma)\cdot csc(\beta) = a\cdot csc(\gamma)\cdot tan(\beta) + b\cdot sin(\beta)\cdot sec(\gamma)$ [No]

57. $a\cdot sin(\beta)\cdot tan(\beta) - a\cdot cot(\beta)\cdot cos(\gamma) = c\cdot[tan(\beta) + 1]\cdot[cot(\gamma) - sin^2(\beta) - cos^2(\beta)]$ [Si]

58. $\dfrac{bc\cdot tan(\beta)-ac\cdot sin(\gamma)}{ab\cdot sin(\beta)+bc\cdot tan(\gamma)}=\left[sin(\beta)-sin(\gamma)\right]\cdot\left[cos(\beta)+cos(\gamma)\right]$ [Si]

59. $\dfrac{tan(\beta)\cdot cot(\beta)-\frac{b^2}{a^2}}{cot(\gamma)\cdot tan(\gamma)-\frac{b}{a}\cdot cos(\gamma)}=\dfrac{cos^2(\beta)}{sin^2(\gamma)}$; $\dfrac{cos(\beta)\cdot csc(\gamma)-sin^2(\beta)}{sec(\beta)\cdot sin(\gamma)-cos^2(\gamma)}=1$; $\dfrac{1+sin^2(\beta)}{1-\frac{b}{a}\cdot cos(\gamma)}=\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$

[Si ; Si ; Sì]

60. $\dfrac{tan(\beta)\cdot cot(\gamma)-b}{sin(\beta)\cdot cos(\gamma)+b}=csc^2(\gamma)\dfrac{b-c^2}{a^2+b}$; $\dfrac{tan(\beta)\cdot cot(\beta)-sin^2(\beta)}{cot(\beta)\cdot tan(\beta)-cos^2(\gamma)}=\dfrac{cos^2(\beta)}{sin^2(\gamma)}$ [Sì ; Sì]

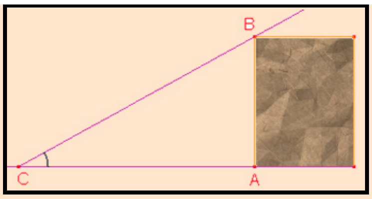
61. $\dfrac{sin(\beta)\cdot sec(\gamma)-sin^2(\beta)}{cos(\beta)\cdot csc(\gamma)+cos^2(\gamma)}=\dfrac{c^2}{2b^2+c^2}$; $\dfrac{sin(\beta)\cdot cos(\gamma)-sin^2(\gamma)}{cos(\beta)\cdot sin(\gamma)-cos^2(\gamma)}=1-tan(\beta)\cdot cot(\beta)$ [Sì ; No]

62. Per quali tipi di triangoli la seconda delle precedenti è un'identità? [Triangoli isosceli]

Risoluzione dei triangoli rettangoli

Il problema

Vogliamo stabilire l'altezza di un palazzo, che in figura indichiamo con *AB*.



Per risolvere il problema precedente misuriamo la distanza dall'ingresso, *A*, a un punto prefissato *C*, allineato con la base del palazzo, quindi, mediante un opportuno strumento misuriamo l'angolo indicato $A\hat{C}B$. Infatti dato che *ABC* è un triangolo rettangolo, possiamo risolverlo, in particolare per trovare la misura del suo cateto *AB*, usando i concetti introdotti nel paragrafo precedente. Dobbiamo considerare le relazioni che ci sono fra *AB* e i dati noti, cioè *AC* e $A\hat{C}B$. Abbiamo perciò: $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = tan\left(A\hat{C}B\right) \Rightarrow \overline{AB} = \overline{AC} \cdot tan\left(A\hat{C}B\right)$.

Pertanto, grazie alle definizioni delle funzioni trigonometriche, possiamo risolvere i triangoli rettangoli di cui sono note le misure di due suoi lati, o di un suo lato e di un suo angolo acuto.

Esempio 6

- Si voglia risolvere il triangolo rettangolo i cui cateti misurano 3 e 4 unità. Grazie al Teorema di Pitagora determiniamo la misura, uguale a 5 unità, dell'ipotenusa. Per quel che riguarda le misure degli angoli, abbiamo: $sin(\beta) = 3/5 = 0{,}6 \Rightarrow \beta \approx 36°52'12''$, il valore dell'angolo è ottenuto mediante la calcolatrice. Data la complementarità degli angoli acuti di un triangolo rettangolo, abbiamo: $\gamma \approx 53°07'48''$.
- Si voglia risolvere il triangolo rettangolo in cui un cateto misura 7 unità e l'ipotenusa 9 unità. Sempre con il Teorema di Pitagora troviamo la misura dell'altro cateto: $\sqrt{9^2 - 7^2} = \sqrt{81-49} = \sqrt{32} = 4 \cdot \sqrt{2}$. Passiamo agli angoli: $tan(\beta) = \frac{7}{4 \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow \beta \approx 51°3'27'', \gamma = 90° - \beta \approx 38°56'33''$.
- Si voglia risolvere il triangolo rettangolo in cui un cateto misura 6 unità e l'angolo acuto opposto 31°. Chiaramente l'altro angolo acuto è 59°. Il rapporto tra il cateto dato e l'ipotenusa è sin(31°), quindi l'ipotenusa è $6/sin(31°) \approx 11{,}65$. Troviamo l'altro cateto sempre usando le relazioni trigonometriche: $6/x = tan(31°) \Rightarrow x = 6/tan(31°) \approx 9{,}99$. Abbiamo preferito effettuare il calcolo in questo modo perché usando il teorema di Pitagora avremmo usato un valore approssimato, quindi avremmo approssimato due volte, invece che una volta sola come con la formula precedente.

L'angolo storico

La trigonometria ha origini molto remote. Già nella matematica babilonese si trovano dei risultati che legano fra loro i rapporti di lati di triangoli fra loro simili. L'interesse verso questi concetti aumentò per risolvere questioni legate ai calcoli astronomici, quali la misurazione del diametro terrestre o le distanze della Terra dal Sole e dalla Luna. Da un punto di vista storico i primi risultati che possono essere considerati trigonometria per così dire cosciente, si trovano in Aristarco, vissuto nel II secolo a.C. e in Eratostene (quello del famoso crivello), che fu il primo a fornire un valore, abbastanza buono per i suoi tempi, della misura della circonferenza terrestre. Generalmente è Ipparco di Nicea (circa 180 – 125 a.C.) a essere considerato il padre della trigonometria, poiché a lui è dovuta la prima tavola trigonometrica, la quale non trattava direttamente le nostre attuali funzioni trigonometriche, ma valori di corde che sottendevano dati angoli al centro di una circonferenza. In seguito Menelao costruì ancora una tavola che calcolava il valore di tali corde. Dobbiamo ricordare anche Claudio Tolomeo, autore di una *Sintassi matematica,* che era una sintesi delle conoscenze astronomiche della sua epoca (il II secolo d.C.) e poi dell'*Almagesto* (che significa il più grande). Proprio quest'opera ebbe notevole importanza per l'evoluzione della trigonometria. Dobbiamo attendere però fino al VII secolo, con l'indiano Brahmagupta, per avere una tavola dei seni come la intendiamo adesso. In seguito furono gli Arabi a diffondere e sviluppare la trigonometria. Abbiamo già visto che la parola seno deriva appunto, anche se per un errore, da una parola araba, che era a sua volta derivata da una parola indiana. Nelle precedenti note storiche abbiamo anche visto le difficoltà che si sono avute nei secoli affinché si affermassero i termini e i simboli per le funzioni trigonometriche, e abbiamo anzi sottolineato il fatto che a tutt'oggi non vi è accordo comune per quel che riguarda i simboli. Lo stesso termine trigonometria apparve solamente nel 1595 in un libro del matematico Pitiscus, intitolato proprio *Trigonometria*.

Vediamo un esempio di risoluzione di un problema trigonometrico.

Esempio 7

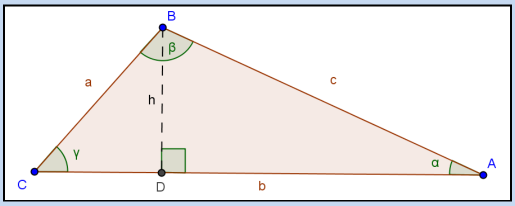
Risolvere un triangolo rettangolo del quale conosciamo la somma dei suoi cateti, che vale 17, e la misura dell'angolo acuto maggiore, che vale circa 67°22′48″. Possiamo impostare il seguente sistema: $\begin{cases} b+c=17 \\ \frac{b}{c}=tan(67°22'48") \end{cases}$, in cui abbiamo indicato con b la misura del cateto maggiore. Il sistema diviene allora: $\begin{cases} b+c=17 \\ b \approx 2,4 \cdot c \end{cases}$, le cui soluzioni sono b = 12 e c = 5. Usando il teorema di Pitagora troviamo a = 13, mentre l'altro angolo acuto è circa 22°37′22″.

Possiamo determinare anche una formula per il calcolo dell'area di un triangolo qualsiasi, note che siano le misure di due lati e dell'angolo compreso fra i detti lati. Vale infatti il seguente risultato.

Teorema 6

La misura dell'area di un triangolo qualsiasi si ottiene mediante il semiprodotto delle misure di due lati per il seno dell'angolo da essi compreso. In formula $1/2ab \cdot sin(\gamma) = 1/2ac \cdot sin(\beta) = 1/2bc \cdot sin(\alpha)$.

Dimostrazione



Tracciamo l'altezza relativa a uno dei lati Calcoliamo l'area del triangolo: $S_{ABC} = 1/2 \cdot b \cdot h$. Abbiamo anche: $h = c \cdot sin(\alpha)$. Sostituiamo il risultato nel passo precedente: $S_{ABC} = 1/2 \cdot b \cdot c \cdot sin(\alpha)$. Dato che la scelta del lato e della relativa altezza è del tutto arbitraria, questa è la tesi.

Esempio 8

- Vogliamo trovare l'area di un triangolo in cui due lati sono lunghi 4 e 7 e l'angolo da essi compreso è 67°. Applicando la formula stabilita dal teorema precedente avremo: $S = 1/2 \cdot 4 \cdot 7\ sin(67°) \approx 12,89$.
- Di un triangolo sappiamo che due lati sono lunghi 3,21 e 6,14, mentre l'area è 8,24. Vogliamo sapere quanto misura l'angolo compreso dai lati noti. Basta applicare la formula inversa di quella data: $8,24 = 1/2 \cdot 3,21 \cdot 6,14 \cdot sin(x) \Rightarrow sin(x) = \frac{2 \cdot 8,24}{3,21 \cdot 6,14} \approx 0,836 \Rightarrow x \approx 56°44'9"$.

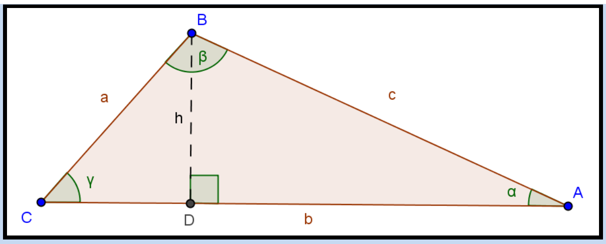
Possiamo trovare anche una relazione utile per il calcolo di un lato di un triangolo qualsiasi.

Teorema 7 (delle proiezioni)

La misura di un lato di un triangolo qualsiasi è data dalla somma dei prodotti dei rimanenti lati per il coseno degli angoli che essi hanno in comune con il dato lato.

In formula: $a = b \cdot cos(\gamma) + c \cdot cos(\beta)$; $b = a \cdot cos(\gamma) + c \cdot cos(\alpha)$; $c = a \cdot cos(\beta) + b \cdot cos(\alpha)$.

Dimostrazione



Tracciamo l'altezza relativa a uno dei lati abbiamo: $b = \overline{CD} + \overline{DA} = a \cdot cos(\gamma) + c \cdot cos(\alpha)$.

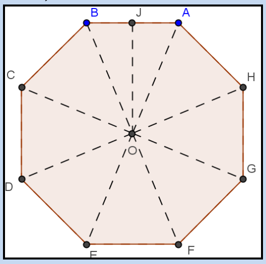
Possiamo anche fare di più, calcolando l'area di un poligono regolare.

Teorema 8

- L'area di un poligono regolare di n lati lunghi ℓ, è $n \cdot \frac{\ell^2}{4} \cdot cot\left(\frac{180°}{n}\right)$.
- L'area di un poligono regolare di n lati il raggio della cui circonferenza circoscritta è lungo R, è $\frac{n}{2} \cdot R^2 \cdot sin\left(\frac{360°}{n}\right)$.

Dimostrazione

Consideriamo il caso particolare di un ottagono, ma la dimostrazione generale si svolge allo stesso modo.



Come si vede abbiamo diviso l'ottagono in 8 triangoli isosceli uguali. Troviamo l'area S di uno di questi triangoli, per esempio AOB: $S = \overline{JB} \cdot \overline{OJ} = \overline{JB} \cdot \overline{JB} \cdot cot\left(\frac{360°}{16}\right) = \overline{JB}^2 \cdot cot(22°30') = \frac{\ell^2}{4} \cdot cot(22°30')$, perciò l'area dell'ottagono è $8 \cdot \frac{\ell^2}{4} \cdot cot(22°30') = 2\ell^2 \cdot cot(22°30')$. Se generalizziamo il procedimento a un poligono di n lati, l'angolo di riferimento misurerà $\frac{360°}{2n} = \frac{180°}{n}$, l'area di un triangolo sarà $\frac{\ell^2}{4} \cdot cot\left(\frac{180°}{n}\right)$ e perciò l'area del poligono sarà n volte questa, cioè $n \cdot \frac{\ell^2}{4} \cdot cot\left(\frac{180°}{n}\right)$. Allo stesso modo si dimostra la seconda relazione.

Verifiche

Lavoriamo insieme

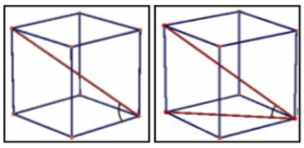
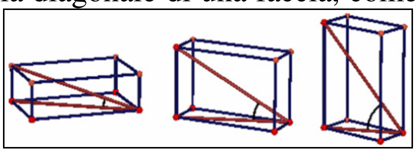
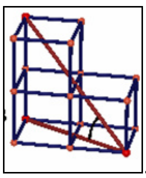
Risolvere un triangolo rettangolo, note le misure della sua ipotenusa, 13, *e di un angolo acuto*, 31°.
L'altro angolo acuto misura ovviamente 90° – 31° = 59°. Indicando con a l'ipotenusa e con β l'angolo dato, abbiamo: $b = a \cdot sin(\beta) = 13 \cdot sin(31°) \approx 6{,}7$; $c = 13 \cdot cos(31°) \approx 11{,}1$. Possiamo verificare la validità del Teorema di Pitagora: $\sqrt{6{,}7^2 + 11{,}1^2} \approx 13$. Ovviamente, essendo i dati approssimati non otteniamo esattamente la misura dell'ipotenusa.

Livello 1

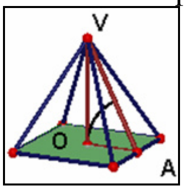
Risolvere i triangoli rettangoli di ipotenusa a, noti i seguenti enti

1. $(a = 7, \beta = 51°)$; $(a = 9, \gamma = 78°)$; $(a = 1{,}23, \beta = 13°21'45'')$
[$(\gamma = 39°; b \approx 5{,}44; c \approx 4{,}41)$; $(\beta = 12°; b \approx 1{,}87; c \approx 8{,}80)$; $(\gamma = 76°38'15''; b \approx 0{,}28; c \approx 1{,}20)$]
2. $(b = 2{,}7, \beta = 48°24'3'')$; $(b = 3{,}15, \gamma = 10°28'41'')$; $(a = 4, b = 2)$
[$(\gamma = 41°35'57''; c \approx 2{,}40; a \approx 2{,}02)$; $(\gamma = 79°31'19''; c \approx 0{,}58; a \approx 3{,}20)$; $(\beta = 30°; \gamma = 60°; c \approx 346)$]
3. $(a = 1{,}37, c = 0{,}48)$; $(b = 2{,}47, c = 1{,}89)$;
[$(\beta \approx 69°29'25''; \gamma \approx 20°30'35''; b \approx 128)$; $(\beta \approx 52°34'39''; \gamma \approx 37°25'21''; a \approx 311)$]
4. $(b = 5{,}12, c = 2{,}17)$; $(c = 3{,}12; \gamma = 24°13'58'')$
[$(\beta \approx 67°01'53''; \gamma \approx 22°58'07''; b \approx 5{,}56)$; $(\beta = 65°46'2''; b \approx 6{,}93; a \approx 7{,}60)$]

5. Sia ABC un triangolo inscritto in una semicirconferenza di diametro AB lungo una unità. Se $\angle A\hat{B}C = 37°$, quanto misurano i rimanenti lati? (Suggerimento. Si ricordi che un triangolo inscritto in una semicirconferenza è …) [≈ 0,60; ≈ 0,80]
6. Sia ABC un triangolo inscritto in una semicirconferenza di diametro AB. Se $\angle A\hat{B}C = 54°$, e AC è lungo 2, quanto misurano i rimanenti lati? [≈ 2,47; ≈ 1,45]
7. Sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti lunghi 3 e 4, si costruisca un altro triangolo rettangolo con un cateto lungo 3 e l'altro cateto coincidente con l'ipotenusa del primo. Determinare la misura dei suoi angoli acuti. [≈ 59°02′10″; ≈ 30°57′50″]
8. Sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele ABC, si costruisca un altro triangolo rettangolo con un cateto lungo quanto uno dei cateti di ABC e l'altro coincidente con l'ipotenusa del primo. Determinare la misura dei suoi angoli acuti. [≈ 54°44′08″; ≈ 35°15′52″]

9. Calcolare la misura degli angoli dei cubi in figura.  [≈ 54°44'08" ; ≈ 35°15′52″]
10. Trovare la misura dell'angolo che una diagonale di un parallelepipedo rettangolo di dimensioni 1, 2 e 3 forma con la diagonale di una faccia, come mostrato in figura. Considerare i vari casi mostrati in figura.  [≈ 15°30′05″; ≈ 32°18′42″; ≈ 53°18′03″]
11. In figura vi sono 3 cubi uguali . Determinare la misura dell'angolo segnato. [≈ 41°48′37″]
12. Risolvere il precedente esercizio considerando 3 cubetti sovrapposti su 2. [≈ 53°18′03″]
13. Risolvere il precedente esercizio considerando 3 cubetti sovrapposti su 3. [≈ 43°29′29″]

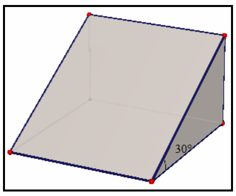
14. Quanti cubetti massimo dobbiamo sovrapporre in verticale, con 2 in orizzontale, affinché l'angolo formato risulti minore di 30°? [1]
15. In un parallelepipedo rettangolo di dimensioni 3, 4 e 5, determinare la misura dell'angolo che la diagonale della faccia di lati 3 e 4, forma con la diagonale del parallelepipedo. [45°]
16. In un parallelepipedo rettangolo di dimensioni 1, 2 e $\sqrt{15}$, determinare la misura dell'angolo che la diagonale della faccia di lati 1 e 2, forma con la diagonale del parallelepipedo. [60°]
17. In un parallelepipedo rettangolo di dimensioni 3, 3 e $\sqrt{6}$, determinare la misura dell'angolo che la diagonale della faccia di lati 3 e 3, forma con la diagonale del parallelepipedo. [30°]
18. In figura vi è una piramide regolare a base quadrata. In essa l'altezza cade perpendicolarmente nel centro del quadrato. Determinare la misura dell'angolo segnato sapendo che lo spigolo di base e l'altezza sono uguali e *A* è punto medio del lato cui appartiene. Risolvere il problema se l'altezza è doppia dello spigolo di base.



[≈ 63°26′06″ ; ≈ 75°57′50″]
19. Con riferimento al precedente problema, se l'angolo è di 45°, in che relazioni sono l'altezza e lo spigolo di base? [Spigolo di base doppio dell'altezza]
20. Risolvere il problema precedente con gli angoli di 30° o di 60°. $\left[h = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot b; h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b\right]$

Livello 2

21. Riferendoci ai quesiti precedenti. Sia in orizzontale che in verticale mettiamo lo stesso numero di cubetti. Quanti ne dobbiamo mettere affinché l'angolo formato risulti minore di 45°? [L'angolo è sempre minore di 45°]
22. In un parallelepipedo rettangolo di dimensioni *x*, 5 e 13, l'angolo che la diagonale della faccia di lati *x* e 5 forma con la diagonale del parallelepipedo è di 45°. Trovare *x*. [12]
23. In un parallelepipedo rettangolo di dimensioni *x*, 3 e 4, l'angolo che la diagonale della faccia di lati *x* e 3 forma con la diagonale del parallelepipedo è di 30°. Trovare *x*. $\left[\sqrt{39}\right]$
24. In un parallelepipedo rettangolo di dimensioni *x*, 8 e 10, l'angolo che la diagonale della faccia di lati *x* e 8 forma con la diagonale del parallelepipedo è di 60°. Trovare *x*. $\left[\sqrt{336}\right]$
25. Determinare la misura dell'angolo che l'apotema di un tetraedro regolare forma con il raggio della circonferenza inscritta nella base del tetraedro. [≈ 70°31′44″]
26. Un tetraedro trirettangolo *ABCD*, ha la faccia *ABC* che è un triangolo isoscele. Sapendo che *AD* e *CD* misurano 3 *cm* mentre *BD* misura 4 *cm*, determinare la misura degli angoli uguali della faccia *ABC*. [≈ 31°56′53″]
27. L'ingresso di un box per auto è sollevato rispetto al suolo stradale di 25 *cm*, così per permettere l'ingresso e l'uscita dell'automobile si costruiscono dei blocchi in legno come in figura, in cui l'angolo indicato è di 30°, quanto è profondo il blocco? Se il blocco è largo 40 *cm*, quanti cm^3 di legno sono necessari per costruire due blocchi?



[≈ 43,3 *cm* ; ≈ 43300 cm^3]

Livello 3

28. Determinare una formula per il calcolo della superficie di un prisma retto con basi due rombi, in funzione del lato ℓ della base, di uno degli angoli interni della stessa base, α, e dell'altezza *h* del prisma. [$2\ell^2 sin(\alpha) + 8\ \ell h$]

Determinare quanto richiesto di un triangolo rettangolo con i dati seguenti (S è l'area, 2p il perimetro)

Livello 2

29. (a= 8; β = 38°; S = ? $2p$ = ?) ; (c = 3; γ = 19°; S = ? $2p$ = ?) ; (c = 9; β = 55°; S = ? $2p$ = ?)
[($2p$ ≈ 19,23; S ≈ 15,52) ; ($2p$ ≈ 20,93; S ≈ 13,07 ; ($2p$ ≈ 37,54; S ≈ 57,84)]

30. ($a = 7$; $b = 4$; S = ? $2p$ = ?) ; ($2p = 10$; $\beta = 27°$; b = ? c = ?) ; ($2p = 10$; $\beta = 43°$; a = ?)
[($2p \approx 19{,}06$; $S \approx 16{,}12$) ; ($b \approx 1{,}94$; $c \approx 3{,}80$) ; $\approx 4{,}14$]

31. ($S = 15$; $\beta = 51°$; a = ?) ; ($S = 21$; $\beta = 48°$; b = ? c = ?) ; ($2p = 12$; $\beta = 50°$; S = ?)
[$\approx 7{,}83$; ($c \approx 6{,}83$; $b \approx 6{,}15$) ; $\approx 6{,}11$]

32. ($S = 8$; $\beta = 43°$; $2p$ = ?) ; ($S = 57{,}31$; $\beta = 56°$; a = ? b = ? c = ?)
[($\approx 13{,}67$; $a \approx 13{,}04$) ; ($b \approx 8{,}79$; $c \approx 5{,}72$)]

33. Di un triangolo rettangolo conosciamo le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa, 3 e 5. Determinare le misure degli angoli acuti. [≈ 37°45′40″; ≈ 52°14′20″]

34. Determinare la misura del perimetro di un triangolo isoscele di lato obliquo che misura 4,61 e con uno degli angoli alla base di 41°. [≈ 16,18]

35. Determinare la misura del lato obliquo di un triangolo isoscele di perimetro 15,32 e con uno degli angoli alla base di 58°. [≈ 5,01]

36. Determinare la misura dell'area di un triangolo isoscele di lato obliquo lungo 7,21 e con uno degli angoli alla base di 63°. [≈ 21,03]

37. Determinare le misure delle diagonali di un rombo di lato 7,36 e uno degli angoli di 48°30′26″.
[≈ 6,05; ≈ 13,42]

38. Determinare la misura del lato di un rombo in cui una diagonale è lunga 4,56 e uno degli angoli è di 25°10′47″. [≈ 10,46 oppure ≈ 2,34]

39. Determinare la misura dell'area di un trapezio rettangolo in cui la base minore e il lato obliquo sono rispettivamente lunghi 4,12 e 3,77 e con l'angolo acuto di 37°. [≈ 12,76]

40. L'area di un trapezio rettangolo è 12,54, il lato obliquo è lungo 2,07 e l'angolo acuto misura 17°. Calcolare la misura del perimetro. [≈ 44,12]

41. Determinare la misura dell'area di un trapezio isoscele in cui la base minore e il lato obliquo sono rispettivamente lunghi 2,87 e 4,13 e l'angolo acuto di 54°. [≈ 17,70]

42. L'area di un trapezio isoscele è 41,56, la base minore misura 3,12 e l'angolo acuto misura 41°. Determinare la misura del lato obliquo. [≈ 5,53]

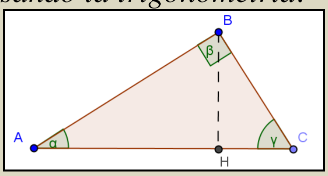
Livello 3

43. Calcolare uno degli angoli acuti formati dalle diagonali di un trapezio isoscele di basi lunghe 3 e 5 ed altezza lunga 2. [≈ 53°07′48″]

44. Risolvere il problema precedente con dati generici, $a + 2k$, a (le misure delle basi) e h. $\left[2 \cdot tan^{-1}\left(\frac{h}{a+k}\right)\right]$

Lavoriamo insieme

Provare il I teorema di Euclide usando la trigonometria.

Consideriamo la figura seguente 

lavorando sul triangolo rettangolo AHB abbiamo: $\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = cos(\alpha)$, lavorando sul triangolo rettangolo ABC abbiamo anche $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = cos(\alpha)$. Quindi possiamo scrivere: $\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Rightarrow \overline{AB}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{AC}$, che è proprio il risultato che volevamo provare.

Livello 3

Determinare quanto richiesto in funzione dei dati forniti, riferiti a un triangolo rettangolo (S è l'area, 2p, il perimetro)

45. a, β; $2p$ = ? S = ? [$2p = a \cdot (1 + sin(\beta) + cos(\beta))$; $S = 1/2 \cdot a^2 \cdot sin(\beta) \cdot cos(\beta)$]

46. b, β; $2p$ = ? S = ? $\left[2p = b \cdot \left(\frac{1 + sin(\beta) + cos(\beta)}{sin(\beta)}\right); S = \frac{1}{2} \cdot b^2 \cdot cot(\beta)\right]$

47. b, γ; $2p$ = ? S = ? [$2p = 1/2 \cdot b^2 \cdot cot(\beta)$; $S = 1/2 \cdot b^2 \cdot tan(\gamma)$]

48. $2p$, β; S = ? $\left[S=\frac{p^2 \cdot sin(\beta)\cdot cos(\beta)}{1+sin(\beta)+cos(\beta)+sin(\beta)\cdot cos(\beta)}\right]$

49. S, β; a = ? b = ? c = ? $\left[a=\sqrt{2S\cdot(cot(\beta)+tan(\beta))}, b=\sqrt{2\cdot S\cdot tan(\beta)}, c=\sqrt{2\cdot S\cdot cot(\beta)}\right]$

Determinare quanto richiesto in funzione dei dati forniti (S è l'area, 2p, il perimetro)

50. Triangolo isoscele di lato obliquo ℓ e angolo al vertice α; $2p$ = ? S = ?
[$2p = 2\ell(1 + cos(\alpha))$; $S = \ell^2 sin(\alpha) \cdot cos(\alpha)$]

Trapezio isoscele di lati obliqui ℓ, base minore b_m, base maggiore b_M, angoli adiacenti alla base maggiore, α

51. ℓ, b_m, α; S = ? $\left[\frac{b_m\cdot \ell\cdot sin(\alpha)\cdot[1+2\cdot\ell\cdot cos(\alpha)]}{2}\right]$

52. S, h, α; b_m = ? b_M = ? $\left[b_m=\frac{2S-h\cdot cot(a)}{2\cdot h}; b_M=\frac{2S+h\cdot cot(\alpha)}{2\cdot h}\right]$

53. b_m, ℓ, α; S = ? [$(b_m + \ell cos(\alpha)) \cdot \ell \cdot sin(\alpha)$]

Trapezio rettangolo di lato obliquo ℓ, base minore b_m, base maggiore b_M, angolo acuto α

54. b_m, ℓ, α; S = ? $\left[\frac{2\cdot b_m+\ell\cdot cos(\alpha)}{2}\cdot\ell\cdot sin(\alpha)\right]$

55. ℓ, S, α; h = ?, b_m = ? b_M = ? $\left[h=\ell\cdot sin(\alpha); b_m=\frac{2S-\ell^2\cdot sin(\alpha)\cdot cos(\alpha)}{2\cdot\ell\cdot sin(\alpha)}; b_M=\frac{2S+\ell^2\cdot sin(\alpha)\cdot cos(\alpha)}{2\cdot\ell\cdot sin(\alpha)}\right]$

56. b_m, b_M, α; h = ? ℓ = ? S = ? $\left[h=(b_M-b_m)\cdot tan(\alpha); \ell=\frac{b_M-b_m}{cos(\alpha)}; S=\frac{(b_M^2-b_m^2)}{2}\cdot tan(\alpha)\right]$

57. Trovare la misura dell'angolo che una diagonale di un parallelepipedo rettangolo di dimensioni a, b e c forma con la diagonale di una faccia. Considerare i vari casi.
$\left[tan^{-1}\left(\frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}}\right); tan^{-1}\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+c^2}}\right); tan^{-1}\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right]$

58. Con riferimento al problema precedente, in che relazione devono essere i lati affinché uno degli angoli sia di 45°? E in questo caso quanto misurano gli altri angoli?
$\left[a=\sqrt{b^2+c^2}; tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}}\right); tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}\right)\right]$

59. Determinare le misure delle diagonali di un rombo mediante il lato ℓ e uno degli angoli, α.
$\left[2\ell sin\left(\frac{\alpha}{2}\right); 2\ell cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]$

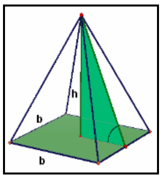
60. In un parallelepipedo rettangolo di dimensioni x, y e z, l'angolo che la diagonale della faccia di lati x e y forma con la diagonale del parallelepipedo è di 30°. Trovare in che relazione sono x, y e z.
[$x^2 + y^2 = 3z^2$]

61. Una piramide a base quadrata ha gli spigoli laterali uguali. Se lo spigolo di base misura 1 cm e l'angolo al vertice di ciascuna faccia laterale è 80°, determinare la misura del volume. $\left[\frac{\sqrt{cos(80°)}}{6\cdot sin(40°)}\approx 0{,}11 cm^3\right]$

62. Usando la trigonometria, provare il II teorema di Euclide, ossia trovare la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa note le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa, a_b, a_c. [$h^2 = a_b \cdot a_c$]

63. In un parallelepipedo rettangolo di dimensioni x, y e z, l'angolo che la diagonale della faccia di lati x e y forma con la diagonale del parallelepipedo è di 60°. Trovare in che relazione sono x, y e z.
[$3x^2 + 3y^2 = z^2$]

64. In un parallelepipedo rettangolo di dimensioni x, 3 e 4, l'angolo che la diagonale della faccia di lati x e 3 forma con la diagonale del parallelepipedo è di $\alpha°$. Studiare per quali valori di α, il problema ha soluzione. [$0° < \alpha < 53°7'48''$]



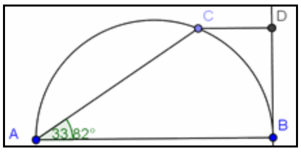
65. Determinare l'angolo in figura, noti h e b. $\left[tan^{-1}\left(\frac{2h}{b}\right)\right]$

66. Due pali alti 10 m e 15 m distano 20 m. Uniamo con dei cavi le cime dei pali alle basi dei pali opposti, vogliamo sapere a che altezza dal suolo si incontrano i cavi. Uno dei dati è inutile, quale? [6 m; la distanza fra i pali]

67. Con riferimento al problema precedente, quanto misura l'angolo minore che formano i cavi incontrandosi? In questo caso il precedente dato inutile, è ancora tale? [$\approx 63°26'6''$; no]

68. Risolvere i quesiti svolti nei due esercizi precedenti per altezze generiche, a e b, e distanza generica, c. $\left[\frac{a\cdot b}{a+b}; tan^{-1}\left(\frac{b}{c}\right)+tan^{-1}\left(\frac{a}{c}\right)\right]$

69. In figura DB è tangente al diametro AB e CD è perpendicolare a DB, $\overline{AB} = 3{,}86\,cm, \angle C\hat{A}B = 33{,}82°$.



Determinare la misura di CD. [$\approx 1{,}20$ cm]

70. Risolvere il problema precedente con dati generici, $\overline{AB} = 2r, \angle C\hat{A}B = \alpha$. [$2r\cdot sin^2(\alpha)$]

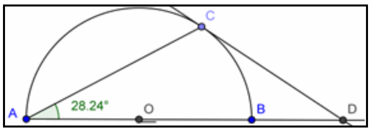
71. Con riferimento al problema 69, determinare la misura di DB. [$\approx 1{,}79$]

72. Risolvere il problema precedente con dati generici, $\overline{AB} = 2r, \angle C\hat{A}B = \alpha$. [$2r\cdot sin(\alpha)\cdot cos(\alpha)$]

73. Sia un cerchio di centro O. Si scelga al suo interno un punto A, quindi sulla circonferenza un punto B. Si determini il valore dell'angolo $O\hat{A}B$ affinché risulti massimo l'angolo $O\hat{B}A$. [90°]

74. Calcolare uno degli angoli acuti formati dalle diagonali di un trapezio isoscele in cui l'altezza misura quanto la base minore e quanto metà della base maggiore. [$\approx 67°22'48''$]

75. In figura CD è tangente alla semicirconferenza, $\overline{AB} = 5{,}14\,cm$ $\angle C\hat{A}B = 28{,}24°$, determinare la misura



di AD. [$\approx 7{,}22$ cm]

76. Risolvere il problema precedente con dati generici: $\overline{AB} = 2r, \angle C\hat{A}B = \alpha$. [$r\cdot(1 + sec(2\alpha))$]

Lavoriamo insieme

Risolvere il triangolo rettangolo di cui conosciamo la differenza fra l'ipotenusa e un cateto, 10, *e l'angolo acuto adiacente al cateto*, 51°.

Ovviamente l'altro angolo acuto misura 39°. Per le misure dei lati, indichiamo con b la misura del cateto dato e con a quella dell'ipotenusa, possiamo risolvere il seguente sistema: $\begin{cases} a-b=10 \\ \frac{b}{a}=cos(51°) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-a\cdot cos(51°)=10 \\ b=a\cdot cos(51°) \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a\cdot[1-cos(51°)]=10 \\ b=a\cdot cos(51°) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{10}{[1-cos(51°)]}\approx 26{,}98 \\ b=a\cdot cos(51°) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\approx 26{,}98 \\ b\approx 26{,}98\cdot cos(51°)\approx 16{,}98 \end{cases}.$$

Determiniamo un valore approssimato dell'altro cateto: $c\approx\sqrt{26{,}98^2-16{,}98^2}\approx 20{,}97$.

Livello 2

Determinare quanto richiesto in un triangolo rettangolo, con i dati forniti (S è l'area, 2p, il perimetro)

77. ($b + c = 10$; $\beta = 40°$; $2p = ?$ $S = ?$) ; ($b + c = 19$; $2p = 15$; $S = ?$) ; ($b - c = 6$; $\gamma = 24°$; $2p = ?$ $S = ?$)
[($2p \approx 17$; 10; $S \approx 12{,}40$) ; $\varnothing$; ($2p \approx 27{,}47$; $S \approx 26{,}04$)]

78. ($sec(\beta) = 2$; $S = 3$; $2p = ?$) ; ($a + b = 12$; $\beta = 62°$; $2p = ?$ $S = ?$) ; ($b + c = 11$; $S = 18$; $\beta = ?$ $\gamma = ?$)
[$\approx 8{,}81$; ($2p \approx 14{,}99$; $S \approx 8{,}42$) ; $\varnothing$]

79. ($tan(\beta) = 2$; $S = 12$; $2p = ?$) ; ($cos(\beta) = 0{;}4$; $S = 19$; $2p = ?$) ; ($b + c = 23$; $S = 19$; $\beta = ?$ $\gamma = ?$)
[$2p \approx 18{,}14$; $\approx 23{,}58$; ($\beta \approx 85°10'15''$; $\gamma \approx 4°49'45''$)]

80. ($cot(\beta) = 4$; $S = 21$; $2p = ?$) ; ($b - c = 4$; $S = 28$; $\beta = ?$ $\gamma = ?$) ; ($tan(\beta) = 3$; $b + c = 8$; $2p = ?$)
$\left[\approx 29{,}56; \left(\beta \approx 59°28'39''; \gamma \approx 30°31'21''\right); 8 + 2\cdot\sqrt{10}\right]$

81. ($a - b = 8$; $\beta = 22°$; $2p = ?$ $S = ?$);($csc(\beta) = 7$; $b + c = 8$; $S = ?$) ; ($sin(\beta) = 0{,}7$; $a + b = 16$; $2p = ?$ $S = ?$)
[($2p \approx 29{,}44$; $S \approx 28{,}42$) ; $\approx 3{,}53$; ($2p \approx 22{,}72$; $S \approx 22{,}14$)]

82. ($a - b = 5$; $\gamma = 59°$; $2p = ?$ $S = ?$) ; ($sin(\beta) = 0{,}3$; $a + b = 6$; $2p = ?$ $S = ?$)
[($2p \approx 23{,}46$; $S \approx 24{,}46$) ; ($2p \approx 3{,}37$; $S \approx 9{,}93$)]

83. ($sec(\beta) = 3{,}2$; $b - c = 1{,}4$; $2p = ?$ $S = ?$) ; ($cos(\beta) = 0{,}3$; $a - b = 3$; $2p = ?$ $S = ?$)
[($2p \approx 0{,}72$; $S \approx 4{,}97$) ; ($2p \approx 607{,}00$; $S \approx 146{,}80$)]

Livello 3

84. Le diagonali di un trapezio rettangolo sono fra loro perpendicolari e misurano rispettivamente 4 *cm* e 5 *cm*. Quanto misura l'area del trapezio? [10]

85. Con riferimento al problema precedente, se la somma delle basi è $\sqrt{41}$ *cm*, quanto misurano le basi? L'altezza? Gli angoli interni? $\left[b_1 = \dfrac{16}{\sqrt{41}}cm, b_2 = \dfrac{25}{\sqrt{41}}cm, h = \dfrac{20}{\sqrt{41}}cm, \approx 65°41'20'', \approx 114°13'40''\right]$

86. L'esercizio precedente ha soluzione per qualsiasi valore scegliamo per la somma delle basi?
[No, solo se è $\sqrt{41}$ *cm*]

87. Le diagonali, d_1 e d_2, di un trapezio rettangolo sono fra loro perpendicolari. Quanto misura l'area del trapezio? [$1/2 \cdot d_1 \cdot d_2$]

88. Determinare in che relazione sono le basi, b_1 e b_2,e le diagonali, d_1 e d_2, di un trapezio rettangolo in cui le diagonali sono fra loro perpendicolari. [$b_2^2 - b_1^2 = |d_1^2 - d_2^2|$]

89. In un trapezio isoscele le diagonali sono perpendicolari ai lati obliqui. Determinare la misura dell'area in funzione della base maggiore, b, e dell'angolo, α, che la detta diagonale forma con la base maggiore. [$b^2 \cdot sin(\alpha) \cdot cos^3(\alpha)$]

90. Determinare la misura del perimetro del trapezio isoscele precedente. [$2b \cdot (sin(\alpha) + cos^2(\alpha)$]

91. Determinare una formula per il calcolo della superficie del cubo troncato in funzione della misura dello spigolo ℓ. Suggerimento. Si usi la trigonometria per calcolare l'area delle facce ottagonali.
$\left[\left(12 + 12\cdot\sqrt{2} + 2\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\ell^2\right]$

92. Determinare una formula per il calcolo della superficie dell'icosidodecaedro in funzione della misura dello spigolo ℓ. Suggerimento. Si usi la trigonometria per calcolare l'area delle facce pentagonali.
$\left[\left(5\cdot\sqrt{3} + 3\cdot\sqrt{25 + 10\cdot\sqrt{5}}\right)\cdot\ell^2\right]$

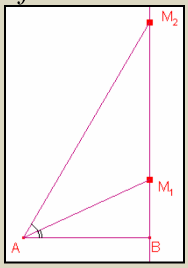
93. Con riferimento al problema precedente, se $\alpha = 60°47'24''$ e $\beta = 47°56'24''$ e la distanza da P è 5,60 *m*, quanto distano A e B? [$\approx 8{,}18$ *m*]

94. Si vuole determinare la distanza di un punto P che si trova in una posizione inaccessibile. Per fare ciò si fissano due punti A e B, che distano fra loro 7,76 metri e poi si misurano gli angoli che la retta per AB forma con le congiungenti il punto P. I valori sono $54°46'48''$ e $34°9'$. Determinare la distanza fra P e AB. [$\approx 3{,}49$ *m*]

95. Determinare una formula per il problema precedente, indicando con d la distanza AB e con α e β i due angoli. $\left[d\cdot\dfrac{tan(\alpha)\cdot tan(\beta)}{tan(\alpha) + tan(\beta)}\right]$

Lavoriamo insieme

Una mongolfiera sale cambiando l'angolo di visuale da una postazione sul terreno da 25° *alle* 10:00 *fino a* 60° *alle* 10:02. *La postazione dista* 300 *metri dalla verticale della mongolfiera. Se la mongolfiera si innalza con velocità costante, quanto vale questa velocità in metri al secondo*?



Schematizziamo il problema (tratto da www.analyzemath.com) nel modo seguente. Abbiamo $\overline{AB} = 300\,m, M_1\hat{A}B = 25°, M_2\hat{A}B = 60°$. Indichiamo $\overline{M_1B} = x, \overline{M_1M_2} = y$. Usando la trigonometria possiamo scrivere: $tan(25°) = \frac{x}{300}; tan(60°) = \frac{x+y}{300}$. Risolviamo: $x = 300 \cdot tan(25°) \approx 139,89$, $y \approx 300 \cdot tan(60°) - 139,89 \approx 379,72$. Allora se per salire circa 379,72m servono 2 minuti, vuol dire che la velocità è circa $\frac{379,72}{120} m/s \approx 3,16\,m/s$.

Livello 2

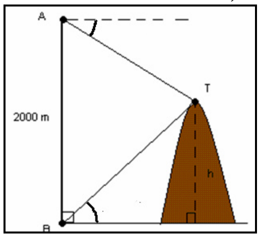
96. Una strada di montagna ha una pendenza del 13%, cioè il rapporto tra la distanza verticale fra il punto più alto e il punto più basso della strada e la distanza orizzontale degli stessi punti, è 0,13. Se i detti punti distano verticalmente 1245 *m*, quanto distano orizzontalmente? Quanto misura l'angolo che forma l'orizzontale con la linea immaginaria che unisce i punti di partenza e arrivo della strada? [≈ 9576,92 *m*; ≈ 7°24′25″]
97. Per calcolare l'altezza di una collina (supposta come una parete a strapiombo), si utilizza uno strumento che è in grado di determinare l'angolo formato dalla linea retta che congiunge idealmente lo strumento con la cima della collina. Sapendo che lo strumento è alto 1,50 *m* e si trova a 121,34 *m* dalle pendici della collina e che il detto angolo misura 31°22′47″, determinare un valore approssimato dell'altezza della collina [≈ 200,45 *m*]
98. Con riferimento al precedente esercizio, se la collina fosse stata alta 311,52 *m*, quanto sarebbe stato l'angolo di visuale? [≈ 21°22′30″]
99. Con riferimento al precedente esercizio, se non sappiamo a che distanza dalla collina è lo strumento, ma sappiamo che l'angolo di visuale è circa 31°41′12″ con lo strumento a 1,5 *m*, mentre a 2 *m* dal suolo l'angolo aumenta di 2′40″, vogliamo sapere quanto è alta la collina e quanto dista lo strumento da essa. [≈ 289,97 *m*; ≈ 178,07 *m*]

Per i seguenti quesiti vale il testo: Un aereo vola a una quota h, con velocità uniforme v, l'angolo che l'ipotetica linea che congiunge la punta dell'aereo con un punto fissato sul suolo davanti l'aereo è α e t minuti dopo, tale angolo è divenuto β

Livello 3

100. h = ?, v = 900 *Km*/*h*, α = 13°17′27″, β = 47°21′14″, t = 1 *min* [≈ 4529 *m*]
101. h = 4927 *m*, v = ?, α = 14°18′33″, β = 46°31′27″, t = 1 *min* [≈ 879 *km*/*h*]
102. h = 5214 *m*, v = 865 *Km*/*h*, α = 15°18′32″, β = ?, t = 1 *min* [≈ 48°23′22″]
103. h = 3842 *m*, v = 825 *Km*/*h*, α = ?, β = 40°22′30″, t = 3 *min* [≈ 4°47′54″]
104. h = 4000 *m*, v = 800 *Km*/*h*, α = 4°53′7″, β = 44°11′23″ , t = ? [≈ 3,2 *min*]
105. Determinare la relazione generale per il problema precedente. $\left[v = h \cdot \frac{cot(\alpha) - cot(\beta)}{t} \right]$

106. In figura è schematizzata una collina, la cui cima T è vista dal punto A, che si trova a un'altezza di 2000 m, se l'angolo segnato in alto è di 15° e quello in basso di 10°, determinare l'altezza h della collina. (tratto da www.analyzemath.com) [≈ 793,8 m]



Per determinare l'altezza di una torre inaccessibile, si misurano gli angoli α e β che la congiungente la cima della torre forma con due punti del terreno, dalla stessa parte rispetto la torre, che distano fra loro x metri.

107. $x = 2{,}53\ m$, $\alpha = 32°40'12''$, $\beta = 29°49'48''$, $h = ?$ [≈ 13,71 m]
108. $x = ?$, $\alpha = 39°45'$, $\beta = 27°18'36''$, $h = 11{,}86\ m$ [≈ 8,71 m]
109. $x = 9{,}88\ m$, $\alpha = 50°15'$, $\beta = 32°6'36''$, $h = ?$ [≈ 12,97 m]
110. $x = 4{,}73\ m$, $\alpha = ?$, $\beta = 42°7'32''$, $h = 15{,}84\ m$ [≈ 61°6′52″]
111. Per il problema precedente trovare una relazione fra l'altezza h della torre e angoli che misurano rispettivamente α, β e punti che distano fra loro x metri. $\left[h = \dfrac{x \cdot sin(\alpha) \cdot sin(\beta)}{sin(\alpha) \cdot cos(\beta) - cos(\alpha) \cdot sin(\beta)}\right]$

Lavoriamo insieme

Di un triangolo qualsiasi conosciamo la misura dell'area, 12, *di un lato,* 3 *e di uno degli angoli adiacenti a tale lato,* 34°, *determinare la misura dell'altro lato adiacente al dato angolo.*

Indicando con x la misura incognita, per il Teorema 6 si ha: $12 = \dfrac{3x \cdot sin(34°)}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\cancel{12}^{4} \cdot 2}{\cancel{3}^{1} \cdot sin(34°)} = \dfrac{8}{sin(34°)} \approx 14{,}3 \cdot$

Determinare gli elementi incogniti dei seguenti triangoli qualsiasi di cui sono dati alcuni enti (con S si indica la misura dell'area, con 2p quella del perimetro)

Livello 1

112. ($a = 5{,}7$; $b = 8{,}12$; $sin(\gamma) = 0{,}63$; $S = ?$) ; ($a = 3$; $b = 4$; $\gamma = 70°$; $S = ?$) [≈ 14,57 ; ≈ 5,64]
113. ($S = 7{,}25$; $b = 3{,}14$; $\gamma = 40°31'12''$; $a = ?$);($a = 1{,}75$; $\beta = 47°$; $\gamma = 75°$; $S = 4{,}78$; $2p = ?$) [≈7,11;≈14,88]

Livello 2

114. $a + b = 11$; $\gamma = 50°$; $S = 6{,}31$; $a = ?$ $b = ?$ [≈ 1,79; ≈ 9,21]
115. $a - b = 5{,}87$; $\gamma = 25°12'10''$; $S = 7{,}14$; $a = ?$ $b = ?$ [≈ 9,43; ≈ 3,56]
116. $c = 8{,}13$; $2p = 14{,}78$; $\gamma = 13°21'14''$; $S = 5{,}47$; $a = ?$ $b = ?$ [Impossibile]

117. Determinare l'area di un rombo di lato 3,12 e con uno degli angoli di 32°11′47″. [≈ 5,19]
118. L'area di un rombo è 7,12, il lato è lungo 3,73, determinare le misure degli angoli interni. [≈ 30°46′51″, ≈ 149°13′9″]
119. Determinare il perimetro di un rombo di area 5,48 e uno degli angoli di 51°24′11″. [≈ 10,59]
120. Determinare l'area di un ottagono regolare di lato lungo 2,72. [≈ 142,89]
121. Determinare l'area di un poligono regolare di 7 lati, ciascuno di 5,18. [≈ 390,03]
122. L'area di un poligono regolare di 13 lati è 41,3. quanto misura il perimetro? [≈ 11,50]
123. Determinare l'area di un esagono regolare in cui il raggio della circonferenza circoscritta è lungo 4,13. [≈ 44,31]
124. Determinare il raggio della circonferenza circoscritta a un ottagono regolare di area 15,48. [≈ 2,34]
125. Di un triangolo conosciamo l'area, 23, e le misure di due lati, 12 e 7. Determinare la misura dell'angolo compreso tra i lati dati. [≈ 55°13′41″]

Livello 3

126. Con riferimento al problema precedente, rimanendo fissate le misure dell'area e del lato maggiore, quali valori può assumere il lato minore ℓ affinché il problema abbia soluzione? $\left[\frac{23}{6} \le \ell \le 12\right]$

127. Con riferimento al problema 148, lasciando inalterato il valore dell'area, quali valori può assumere la misura del lato affinché il problema abbia soluzioni? $\left[\ell \ge \sqrt{7,13}\right]$

128. Determinare il perimetro di un rombo mediante l'area, *S*, e uno degli angoli interni, α. $\left[4 \cdot \sqrt{\frac{S}{sin(\alpha)}}\right]$

129. Se un rombo ha area *S*, quali valori può assumere la misura del suo lato? $\left[\ell \ge \sqrt{S}\right]$

130. Determinare l'area di un rombo in funzione della misura del lato ℓ e di uno degli angoli acuti interni, α. $\left[\ell^2 \cdot sin(\alpha)\right]$

131. Usando il risultato dell'esercizio precedente e calcolando l'area del rombo come somma delle aree dei 4 triangoli in cui esso è diviso dalle diagonali, trovare una relazione fra il seno di un angolo acuto e seno e coseno dell'angolo metà. Questa è la formula di duplicazione. $\left[sin(x) = 2 \cdot sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]$

132. Provare la validità della formula precedente per $\alpha = 60°$.

133. Utilizzando la formula precedente, e tenuto conto che $cos(\alpha) = sin(90° - \alpha)$, determinare una formula di duplicazione per il coseno. $\left[cos(\alpha) = 2 \cdot sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)\right]$

134. Utilizzando la formula di duplicazione del seno (Es. 154), e tenuto conto che $cos^2(\alpha) = 1 - sin^2(\alpha)$, determinare una formula di duplicazione per il coseno. $\left[cos(x) = cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]$

135. Provare la validità della formula precedente per $\alpha = 60°$.

136. Utilizzando la formula di duplicazione del seno determinare il rapporto fra le misure dei lati di un poligono regolare di *n* lati e di uno di 2*n* lati inscritti nella stessa circonferenza. $\left[2 \cdot cos\left(\frac{90°}{n}\right)\right]$

137. Determinare la misura del raggio della circonferenza circoscritta in un poligono regolare di *n* lati, ciascuno di misura ℓ. $\left[\frac{1}{2}\ell \cdot csc\left(\frac{180°}{n}\right)\right]$

138. Determinare la misura del raggio della circonferenza inscritta in un poligono regolare di *n* lati, ciascuno di misura ℓ. $\left[\frac{1}{2}\ell \cdot cot\left(\frac{180°}{n}\right)\right]$

139. Determinare la misura del lato di un poligono regolare di *n* lati in funzione del raggio della circonferenza circoscritta. $\left[2R \cdot sin\left(\frac{180°}{n}\right)\right]$

140. Determinare la misura del lato di un poligono regolare di 2*n* lati in funzione del raggio della circonferenza circoscritta. $\left[2R \cdot sin\left(\frac{90°}{n}\right)\right]$

141. L'area di un rombo è 7,12, il lato è lungo 1,73, determinare le misure degli angoli interni. [∅]

142. Determinare il rapporto fra le misure dei lati di un triangolo equilatero e di un esagono regolare inscritti nella stessa circonferenza. $\left[\sqrt{3}\right]$

143. Determinare il rapporto fra le misure dei lati di un quadrato e di un ottagono regolare inscritti nella stessa circonferenza. [≈ 1,85]

144. Utilizzando la formula di duplicazione del seno determinare il rapporto fra le aree di un poligono regolare di *n* lati e di uno di 2*n* lati inscritti nella stessa circonferenza. $\left[cos\left(\frac{180°}{n}\right)\right]$

145. Determinare il rapporto fra le misure delle aree di un esagono regolare e di un triangolo equilatero inscritti nella stessa circonferenza. [1/2]

146. Determinare il rapporto fra le misure delle aree di un ottagono regolare e di un quadrato inscritti nella stessa circonferenza. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

147. Determinare il lato, il perimetro e l'area di un triangolo equilatero in funzione del raggio *R* della circonferenza a esso circoscritta. $\left[\ell = r\cdot\sqrt{3}, 2p = 3r\cdot\sqrt{3}, S = \frac{3r^2\cdot\sqrt{3}}{4}\right]$

148. Determinare il lato, il perimetro e l'area di un quadrato in funzione del raggio *R* della circonferenza a esso circoscritta. $\left[\ell = r\cdot\sqrt{2}, 2p = 4r\cdot\sqrt{2}, S = 2r^2\right]$

149. Determinare il rapporto fra le misure del raggio della circonferenza inscritta e quello della circonferenza circoscritta a un triangolo rettangolo con un angolo acuto di 30°. $\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right]$

150. Determinare il rapporto fra le misure del raggio della circonferenza inscritta e quello della circonferenza circoscritta a un triangolo rettangolo con un angolo acuto di 45°. $\left[\sqrt{2}-1\right]$

151. Determinare il rapporto fra le misure del raggio della circonferenza inscritta e quello della circonferenza circoscritta a un triangolo isoscele in cui l'angolo al vertice è di 60°. $\left[\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right]$

152. Ricavare il seno di un angolo interno di un triangolo di cui conosciamo la misura dell'area, *S*, e la media geometrica $g = \sqrt{a\cdot b}$ dei lati concorrenti nell'angolo da determinare. $\left[\frac{2S}{g^2}\right]$

L'angolo delle correzioni

Correggere gli errori nelle seguenti espressioni

1. $sin(2x)/2 = sin(x)$;
2. $sin(x) + sin(x) = sin(2x)$. Per vedere che è falso sostituiamo a *x*, 30°
3. $sin(x) \cdot sin(x) = sin(x^2)$;
4. $sin(x) + cos(x) = (sin + cos)\ (x)$
5. $cos(x^3)/cos^3(x) = 1$;
6. $x \cdot tan(x) = tan(x^2)$;
7. $sec(x) + 3x = sec(4x)$
8. $tan(x) \cdot cot(x) = cot^2\ (x)$;
9. $tan(x)/cot(x) = -1$;
10. $\left[sin\left(x^3\right)\right]^4 = \left[sin(x)\right]^{12}$

Risoluzione dei triangoli qualsiasi e teorema dei seni

Il problema

Come facciamo a calcolare l'area di un triangolo di cui conosciamo le misure di due suoi lati, 12 e 13, e l'angolo da essi compreso, 100°? Non possiamo usare certamente la formula stabilita dal Teorema 6, poiché non sappiamo che significato dare alla scrittura *sin*(100°).

In questo paragrafo ci occuperemo di estendere le funzioni trigonometriche anche ad angoli retti ed ottusi, per potere risolvere triangoli qualsiasi. Per fare ciò ovviamente vogliamo generalizzare le definizioni precedenti in modo che esse continuino a valere anche per gli angoli acuti, comprendendo in ciò anche i risultati ottenuti. Ciò vuol dire che, poiché l'area di un triangolo è ovviamente misurata sempre da un numero positivo, il seno di un angolo retto od ottuso deve essere ancora un numero positivo. Tenuto conto di ciò vediamo quanto vale il seno di un angolo retto. L'area di un triangolo rettangolo si può trovare anche calcolando il semiprodotto delle misure di due cateti, possiamo perciò scrivere la seguente identità, in cui con b e c indichiamo le misure dei cateti: $\frac{b \cdot c}{2} = \frac{b \cdot c}{2} \cdot sin(90°)$. A sinistra abbiamo il calcolo mediante la tradizionale formula *semiprodotto dei cateti* e a destra l'applicazione del Teorema 6. Dato che abbiamo a che fare con un'uguaglianza, non ci rimane che porre la seguente definizione.

Definizione 8

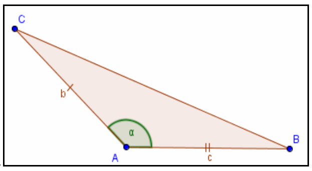
Si ha *sin*(90°) = *cos*(0°) = 1.

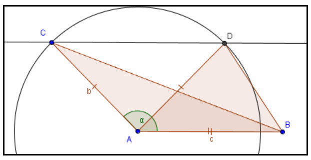
Può sembrare inutile definire il coseno di un angolo nullo, dato che gli angoli di un qualsiasi triangolo o poligono non sono mai nulli, ma intanto essa viene fuori dalla relazione che abbiamo visto esserci fra seno e coseno di angoli fra loro complementari; inoltre possiamo considerare il caso estremo in cui il triangolo *degenera* divenendo un segmento e quindi facendo in modo che uno dei suoi tre angoli misuri appunto 0°.
Ora, tenuto conto della definizione precedente e del teorema di Pitagora in forma trigonometrica (Teorema 1), dobbiamo porre anche la seguente definizione.

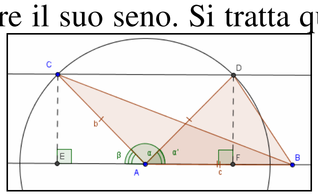
Definizione 9

Si ha *cos*(90°) = *sin*(0°) = 0.

Come immediata conseguenza della precedente definizione vi è il fatto che non hanno alcun significato le scritte *tan*(90°), *sec*(90°), *cot*(0°) e *csc*(0°), dato che si ottengono dividendo per *cos*(90°) = 0, le prime due, o per *sin*(0°) = 0, le altre due. Per estendere la funzione seno ad angoli ottusi consideriamo appunto un triangolo del genere e calcoliamone l'area con la formula del Teorema 6, applicandola proprio all'angolo ottuso.

Tale area misura perciò 1/2 · bc · *sin*(α). 

Ora costruiamo un triangolo acutangolo con la stessa area, e con due lati uguali ai lati b e c. 

I due triangoli hanno AB in comune, AC e AD uguali perché raggi di una stessa circonferenza. Infine, hanno anche la stessa area perché CD è parallelo ad AB e perciò le altezze relative alla base comune sono uguali. Quindi l'area precedente può anche calcolarsi in quest'altro modo: 1/2 bc *sin*(α'). Ciò vuol dire che *sin*(α) = *sin*(α'), il che è un importantissimo risultato, dato che α' è un angolo acuto e perciò sappiamo come calcolare il suo seno. Si tratta quindi di capire in che relazione sono i due angoli. Consideriamo la seguente figura. 

I due trian-

goli *CEA* e *DFA* sono fra loro uguali perché sono entrambi retti e inoltre hanno le ipotenuse uguali, così come i cateti *CE* e *DF*. Ma allora si ha $\alpha' = \beta$, d'altro canto $\beta = 180° - \alpha$, quindi α e α' sono fra loro supplementari.
Quindi possiamo porre quest'altra definizione.

Definizione 10

Si ha $sin(x) = sin(180° - x)$, per ogni x: $90° \leq x \leq 180°$.

Possiamo allora dire che $sin(180°) = 0$ e pertanto che non hanno significato le scritte $cot(180°)$ e $csc(180°)$.
Vale anche il seguente risultato.

Teorema 9

Si ha: $csc(x) = csc(180° - x)$, per ogni x: $90° \leq x < 180°$.

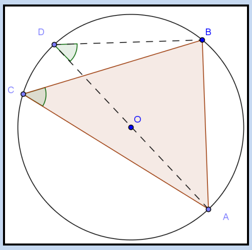
Adesso abbiamo tutto il necessario per cercare di risolvere triangoli anche non rettangoli; prima però dobbiamo stabilire quanti enti geometrici dobbiamo conoscere per potere risolvere un triangolo. La risposta ce la forniscono i 3 criteri di isometria dei triangoli, che qui ricordiamo.

(1° criterio di isometria dei triangoli o LAL) Due triangoli che hanno ordinatamente uguali due lati e l'angolo da essi compreso, sono fra loro uguali.
(2° criterio di isometria dei triangoli o ALA) Due triangoli che hanno ordinatamente uguali due angoli e il lato a essi adiacente, sono fra loro uguali.
(3° criterio di isometria dei triangoli o LLL) Due triangoli che hanno ordinatamente uguali i tre lati, sono fra loro uguali.

Quindi possiamo risolvere solo triangoli di cui conosciamo 2 lati e l'angolo compreso, due angoli e un lato oppure i tre lati. In particolare il criterio ALA in effetti vale anche se gli angoli noti non sono adiacenti al lato, perché conoscendo due angoli di un triangolo conosciamo anche il terzo, perché è supplementare della somma degli altri due. Inoltre il criterio LLL è ovviamente soggetto alla validità della disuguaglianza triangolare, ossia ciascuno dei lati deve essere minore della somma degli altri.
Per trovare delle proprietà che usino la trigonometria per risolvere i triangoli nelle ipotesi dei tre criteri di isometria, dobbiamo cercare di riferirci alle proprietà sui triangoli rettangoli che già conosciamo. Ci proponiamo di dimostrare il seguente risultato.

Teorema 10 (della corda)

In un triangolo un lato è uguale al prodotto del diametro della circonferenza circoscritta al triangolo per il seno dell'angolo opposto al detto lato: $a = 2R \cdot sin(\alpha)$; $b = 2R \cdot sin(\beta)$; $c = 2R \cdot sin(\gamma)$.
Dimostrazione
Consideriamo la circonferenza circoscritta al triangolo, che sappiamo sempre esistere, dato che gli assi dei lati si incontrano nel circocentro della circonferenza. Tracciamo il diametro *AD* e costruiamo il triangolo *ABD*.



Si ha $\angle A\hat{C}B = \angle A\hat{D}B$, perché sono angoli alla circonferenza che insistono sulla stessa corda *AB*. Quindi $\overline{AB} = \overline{AD} \cdot sin\left(A\hat{D}B\right)$, perché il triangolo *ABD* è iscritto in una semicirconferenza, pertanto è retto di ipotenusa *AD*. Ma allora $\overline{AB} = \overline{AD} \cdot sin\left(A\hat{C}B\right)$, che è la tesi.

Una immediata conseguenza di questo teorema è il seguente risultato.

Corollario 1

Il raggio R del cerchio circoscritto a un triangolo è

- la metà del rapporto fra la misura di un lato e quella del seno dell'angolo a esso opposto:
$$R = \frac{a}{2 \cdot sin(\alpha)} = \frac{b}{2 \cdot sin(\beta)} = \frac{c}{2 \cdot sin(\gamma)}$$
- la quarta parte del rapporto fra il prodotto delle misure dei tre lati e quella dell'area: $R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4A}$.

Dimostrazione

La prima parte del corollario è immediata, perché si ottiene come formula inversa di quella stabilita nel Teorema 10, quindi proveremo solo la seconda parte. Consideriamo un generico triangolo e calcoliamone l'area: $A = 1/2 \cdot a \cdot b \cdot sin(\gamma)$. Ricaviamo $sin(\gamma)$ dal Teorema 10, ottenendo $sin(\gamma) = \frac{c}{2 \cdot R}$, sostituiamo nella precedente espressione: $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \frac{c}{2 \cdot R} = \frac{1}{4} \cdot \frac{a \cdot b \cdot c}{R}$. Infine ricaviamo la misura di $R = \frac{1}{4} \cdot \frac{a \cdot b \cdot c}{A}$.

Possiamo trovare anche una relazione che lega le misure dei lati di un triangolo al raggio della circonferenza inscritta.

Corollario 2

Il raggio r del cerchio inscritto in un triangolo è il rapporto fra il prodotto delle misure di due lati per il seno dell'angolo fra essi compreso e il perimetro: $r = \frac{a \cdot b \cdot sin(\gamma)}{a+b+c} = \frac{a \cdot c \cdot sin(\beta)}{a+b+c} = \frac{b \cdot c \cdot sin(\alpha)}{a+b+c}$.

Dimostrazione

Dobbiamo tenere conto della relazione nota dalla geometria elementare che $r = \frac{A}{p}$, in cui p indica il semiperimetro. In questa espressione sostituiamo la relazione per l'area: $r = \frac{\frac{1}{\cancel{2}} \cdot a \cdot b \cdot sin(\gamma)}{\frac{a+b+c}{\cancel{2}}} = \frac{a \cdot b \cdot sin(\gamma)}{a+b+c}$.

Un'altra immediata e importantissima conseguenza del Teorema della corda è la seguente.

Corollario 3 (Teorema dei seni)

In un triangolo il rapporto fra la misura di un lato e quella del seno dell'angolo a esso opposto è costante, essendo uguale al diametro della circonferenza circoscritta al triangolo. Cioè $\frac{a}{sin(\alpha)} = \frac{b}{sin(\beta)} = \frac{c}{sin(\gamma)}$.

La precedente espressione rappresenta 3 diverse uguaglianze, che in matematica si chiamano proporzioni: $\frac{a}{sin(\alpha)} = \frac{b}{sin(\beta)}; \frac{a}{sin(\alpha)} = \frac{c}{sin(\gamma)}; \frac{b}{sin(\beta)} = \frac{c}{sin(\gamma)}$. Ciò significa che mediante due di queste proporzioni possiamo risolvere dei triangoli, in particolare dalla prima proporzione, possiamo trovare un lato conoscendone un altro e i seni degli angoli opposti ai due lati: $a = \frac{b \cdot sin(\alpha)}{sin(\beta)}$; oppure un angolo conoscendo il lato opposto, un altro lato e il suo angolo opposto: $\alpha = sin^{-1}\left(\frac{a \cdot sin(\beta)}{b}\right)$. Per quanto riguarda la prima uguaglianza non ci sono problemi, anche perché concorda perfettamente con il criterio ALA.

Esempio 9

Vogliamo risolvere un triangolo di cui conosciamo le misure di un lato, 12, e di due angoli, 43° e 51°, il primo dei quali opposto al lato noto. Mediante il teorema dei seni possiamo perciò scrivere:

$$\frac{x}{sin(51°)} = \frac{12}{sin(43°)} \Rightarrow x = \frac{12 \cdot sin(51°)}{sin(43°)} \approx 13,67$$

Osserviamo che, ovviamente, x è più lungo del lato noto perché opposto a un angolo maggiore di quello opposto al detto lato. A questo punto possiamo determinare la misura del terzo lato, dato che facilmente troviamo quella del terzo angolo, 180° – (43° + 51°) = 86°; $\frac{x}{sin(86°)} = \frac{12}{sin(43°)} \Rightarrow x = \frac{12 \cdot sin(86°)}{sin(43°)} \approx 17,55$.

Avremmo potuto calcolare questo lato anche usando quest'altra proporzione: $\frac{x}{sin(86°)} = \frac{13,67}{sin(51°)}$. Solo che il dato 13,67 è approssimato, pertanto l'approssimazione su x sarebbe stata maggiore che nel caso precedente in cui abbiamo usato valori esatti. Questo fatto è molto importante, infatti il valore 17,55 è stato calcolato effettuando le operazioni su una calcolatrice scientifica in una sola volta, ossia utilizzando tutte le cifre della calcolatrice. Vediamo cosa avremmo ottenuto invece approssimando ciascun risultato parziale a due cifre decimali, per difetto se la cifra è minore di 5 per eccesso altrimenti. $\frac{x}{sin(86°)} = \frac{12}{sin(43°)} \Rightarrow x = \frac{12 \cdot sin(86°)}{sin(43°)} \approx \frac{12 \cdot 1}{0,68} \approx 17,65$. Come si vede il risultato differisce dal precedente, più preciso, già a partire dalla prima cifra decimale. Pertanto è consigliabile fare in modo di approssimare solo alla fine dei calcoli, usando, quando possibile, tutte le cifre che propone la calcolatrice.

Consideriamo adesso la seconda espressione ottenuta dal teorema dei seni: $\alpha = sin^{-1}\left(\frac{a \cdot sin(\beta)}{b}\right)$. Nonostante non ci sia un criterio ALL, abbiamo trovato ugualmente una formula per risolvere il triangolo in queste ipotesi. Dobbiamo però chiederci se questa è una formula sempre valida come la precedente. E la risposta è ovviamente no, diversamente doveva esistere un criterio ALL. Infatti nessuno dice che sia sempre $\frac{a \cdot sin(\beta)}{b} \le 1$. In questo caso ovviamente non ci sarebbe l'angolo, quindi il triangolo.

Esempio 10

- Vogliamo risolvere un triangolo di cui conosciamo le misure di due lati, 15 e 18 e dell'angolo opposto al lato minore, 95°. Applichiamo la formula precedente: $sin^{-1}\left(\frac{18 \cdot sin(95°)}{15}\right) \approx sin^{-1}(1,19)$. Ovviamente l'angolo non c'è, essendo l'argomento maggiore di 1. In effetti potevamo subito osservare, senza alcun bisogno della trigonometria, che il triangolo non poteva esistere. Infatti sapendo che *a lato maggiore è opposto angolo maggiore* essendo 18 > 15, l'angolo cercato doveva essere maggiore di 95° ed evidentemente un triangolo con due angoli ottusi non esiste.
- Il triangolo può non esistere anche senza bisogno di avere ipotesi ovviamente assurde come le precedenti. Sia infatti un triangolo con a = 15, b = 18, α = 57°. Abbiamo: $sin^{-1}\left(\frac{18 \cdot sin(57°)}{15}\right) \approx sin^{-1}(1,01)$.

In effetti possono esserci dei casi però in cui di triangoli ne esistono più di uno.

Esempio 11

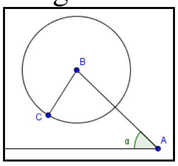
Vogliamo risolvere un triangolo di cui conosciamo le misure di due lati, 10 e 12 e dell'angolo opposto al lato minore, 42°. Applichiamo la formula precedente: $sin^{-1}\left(\frac{12 \cdot sin(42°)}{10}\right) \approx sin^{-1}(0,80) \approx 53°24'48"$.

Quindi in questo caso il triangolo esiste. Il terzo angolo misura circa 84°35'12″. Il terzo lato invece è circa

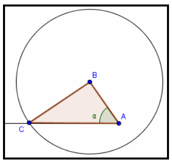
$\frac{10 \cdot sin(84°35'12")}{sin(42°)} \approx 14,88$. In effetti però abbiamo visto che angoli supplementari hanno lo stesso seno, pertanto si ha anche: $sin^{-1}(0,80) \approx 180° - 53°24'48'' = 126°35'12''$. E poiché $126°35'12'' + 42° = 168°35'12''$, esiste anche quest'altro triangolo, il cui terzo angolo misura $11°24'48''$ e perciò il terzo lato misura $\frac{10 \cdot sin(11°24'48")}{sin(42°)} \approx 2,96$.

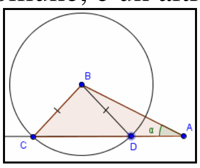
Cerchiamo di capire cosa sta succedendo. Vediamo come possiamo costruire geometricamente un triangolo di cui conosciamo le misure di due lati e dell'angolo opposto a uno di essi. Cominciamo a costruire l'angolo dato di vertice *A* e il segmento dato *AB*. Ora però non sappiamo come costruire l'altro lato, *BC*, dato che non sappiamo la sua inclinazione, pertanto costruiamo la circonferenza di centro *B* e raggio *BC*. Quale dei punti di questa circonferenza è quello giusto? Ovviamente dipende se possiamo tracciare da *C* un segmento *BC* che formi con *AB* l'angolo dato. E quindi ecco cosa può succedere.

- La circonferenza non incontra l'altro lato dell'angolo di vertice *A*, quindi il triangolo non esiste.



- La circonferenza incontra la semiretta di vertice *A* in un solo punto, quindi il triangolo esiste ed è unico.



- La circonferenza incontra la semiretta in due punti, pertanto vi sono due distinti triangoli *ABC* e *ABD* che hanno il lato *AB* e l'angolo di vertice *A* in comune, e un altro lato di uguale misura, $\overline{BC} = \overline{BD}$, ma il terzo lato e gli altri due angoli di diversa misura. 

Trattando trigonometricamente il ragionamento precedente otteniamo il seguente risultato.

Teorema 11

Dato un triangolo di cui sono note le misure di due lati, *a* e *b*, e dell'angolo opposto a uno di essi, β, possiamo dire che

- Se $\frac{a \cdot sin(\beta)}{b} > 1$ il triangolo non esiste;
- Se $\frac{a \cdot sin(\beta)}{b} \leq 1$ e $\alpha = sin^{-1}\left(\frac{a \cdot sin(\beta)}{b}\right) \leq \beta$ esiste un solo triangolo;
- Se $\frac{a \cdot sin(\beta)}{b} \leq 1$ e $\alpha = sin^{-1}\left(\frac{a \cdot sin(\beta)}{b}\right) > \beta$ esistono due distinti triangoli.

Tenuto conto del precedente risultato possiamo enunciare un particolare criterio ALL.

Teorema 12 (Criterio ALL)

Esiste un solo triangolo note le misure di due lati, $a < b$, e dell'angolo β opposto al maggiore di essi.

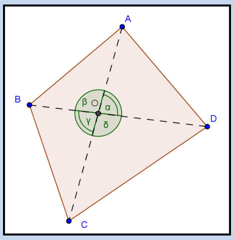
Avendo dato significato al seno di angoli ottusi possiamo considerare delle trigonometriche proprietà dei quadrilateri.

Teorema 13

L'area di un quadrilatero convesso si ottiene dal semiprodotto delle sue diagonali per il seno di uno degli angoli che esse formano. In formula $S = 1/2 \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot sin(\theta)$.

Dimostrazione

Consideriamo un qualsiasi quadrilatero convesso e tracciamone le diagonali e gli angoli da esse formati.



Calcoliamo l'area del quadrilatero come somma delle aree dei 4 triangoli formati dalle diagonali.

$$\frac{\overline{AO}\cdot\overline{BO}\cdot sin\left(A\hat{O}B\right)}{2}+\frac{\overline{BO}\cdot\overline{CO}\cdot sin\left(B\hat{O}C\right)}{2}+\frac{\overline{CO}\cdot\overline{DO}\cdot sin\left(C\hat{O}D\right)}{2}+\frac{\overline{DO}\cdot\overline{AO}\cdot sin\left(D\hat{O}A\right)}{2}$$

Semplifichiamo l'espressione precedente

$$\frac{\overline{AO}\cdot\overline{BO}\cdot sin\left(A\hat{O}B\right)}{2}+\frac{\overline{BO}\cdot\overline{CO}\cdot sin\left(A\hat{O}B\right)}{2}+\frac{\overline{CO}\cdot\overline{DO}\cdot sin\left(A\hat{O}B\right)}{2}+\frac{\overline{DO}\cdot\overline{AO}\cdot sin\left(A\hat{O}B\right)}{2}$$

Poiché gli angoli sono a due a due uguali (quelli opposti al vertice) e a due a due supplementari, hanno lo stesso seno, allora semplifichiamo ulteriormente:

$$\frac{\overline{AO}\cdot\left(\overline{BO}+\overline{DO}\right)\cdot sin\left(A\hat{O}B\right)}{2}+\frac{\overline{CO}\cdot\left(\overline{DO}+\overline{BO}\right)\cdot sin\left(A\hat{O}B\right)}{2}=\frac{\overline{AO}\cdot\overline{BD}\cdot sin\left(A\hat{O}B\right)}{2}+\frac{\overline{CO}\cdot\overline{BD}\cdot sin\left(A\hat{O}B\right)}{2}=$$

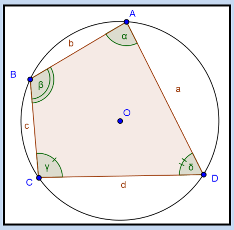
$$=\frac{\overline{BD}\cdot\left(\overline{AO}+\overline{CO}\right)\cdot sin\left(A\hat{O}B\right)}{2}=\frac{\overline{BD}\cdot\overline{AC}\cdot sin\left(A\hat{O}B\right)}{2}$$

. Abbiamo messo a fattor comune e sostituito le somme con i relativi risultati.

Per particolari quadrilateri vi è un risultato legato alle misure dei lati.

Teorema 14

In un quadrilatero ciclico (cioè inscrivibile in una circonferenza), l'area è la semisomma del prodotto di coppie di lati consecutivi per il seno di uno degli angoli interni compreso fra le coppie. Con riferimento alla seguente figura: $1/2 \cdot (ab + cd) \cdot sin(\alpha) = 1/2 \cdot (ad + bc) \cdot sin(\beta)$



Dimostrazione

Tracciamo la diagonale BD, dividendo il quadrilatero in due triangoli, la somma delle cui aree è equivalente all'area di $ABCD$. Si ha allora: $1/2 \cdot ab \cdot sin(\alpha) + 1/2 \cdot cd \cdot sin(\gamma)$. Ma nei quadrilateri ciclici gli angoli opposti sono supplementari, pertanto si ha: $1/2 \cdot ab \cdot sin(\alpha) + 1/2 \cdot cd \cdot sin(180° – \alpha) = 1/2 \cdot (ab + cd) \cdot sin(\alpha)$. Che è quanto volevamo dimostrare.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Calcolare la misura del raggio circoscritto al triangolo di lati lunghi 5, 6 e 7,.

Sfruttando la seconda tesi del Corollario 1, avremo: $R = \frac{1}{4} \cdot \frac{a \cdot b \cdot c}{A}$. Purtroppo però non conosciamo la misura dell'area. Esiste però un teorema, dovuto ad Erone, che permette di determinare l'area di un triangolo conoscendo le misure dei lati: $A = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$, in cui, p indica la misura del semiperimetro. Nel nostro caso sarà: $p = \frac{5+6+7}{2} = 9$. Quindi: $A = \sqrt{9 \cdot (9-5) \cdot (9-6) \cdot (9-7)} = \sqrt{216} \approx 14,7$. Infine avremo: $R \approx \frac{1}{4} \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{14,7} \approx 3,6$.

Determinare gli elementi incogniti dei seguenti triangoli qualsiasi di cui sono dati alcuni enti (con S si indica la misura dell'area, con p quella del semiperimetro, con R quella del raggio circoscritto)

Livello 1

1. (a = 1,23; b = 3,41; c = 4,12; R = ?) ; (a = 3; b = 5; c = 7; R = ?) ; (a = 1,45; α = ?; R = 3,56) $\left[\approx 2,32; \frac{7}{\sqrt{3}}; \approx 11°45'2''\right]$
2. (a = 1; b = 2; c = 3; R = ?) ; (a = ?; b = 3,67; c = 4,89; R = 1,31; S = 5,12) ; (a = 2; α = 51°; R = ?) [∅ ; ≈ 1,49 ; ≈ 1,29]
3. (b = 3,54; β = 47°31′47″, R = ?) ; (a = ?; α = 38°; R = 3,12) [≈ 2,40 ; ≈ 3,84]
4. (a = ?; b = 4,51; c = 3,74; R = 4,16; S = 7,64) ; (a = 3,67; α = ?, R = 1,56) [≈ 7,54 ; ∅]

Livello 2

5. (a + b = 5; c = 3; S = 2,6; R = ?) ; (a – b = 2; c = 4; S = 3,75; R = ?) [≈ 1,64 ; ≈ 2,05]
6. a = 4; b + c = 11,48; R = 7,21; S = 11,03; b = ?; c = ? [∅]
7. a = 4; b + c = 11,48; R = 1,21; S = 11,03; b = ?; c = ? [≈ 1,31; ≈ 10,17]
8. a = 6; b – c = 4,37; R = 2,94; S = 6,18; b = ?; c = ? [≈ 6,29; ≈ 1,92]

Lavoriamo insieme

Risolvere un triangolo di lati lunghi 5 *e* 6 *e di angolo opposto al maggiore di essi di* 74°.

Applichiamo il Teorema dei seni: $\frac{5}{sin(x)} = \frac{6}{sin(74°)} \Rightarrow sin(x) = \frac{5 \cdot sin(74°)}{6} \approx 0,8 \Rightarrow \begin{cases} x \approx 53°13'50'' \\ x \approx 180° - 53°13'50'' = 126°46'10'' \end{cases}$

Abbiamo ottenuto due soluzioni, la minore è certamente accettabile e dà luogo a un triangolo il cui terzo angolo misura: 180° – 74° – 53°13′50″ = 52°46′10″ e il cui terzo lato misura:

$$\frac{x}{sin(52°46'10'')} \approx \frac{6}{sin(74°)} \Rightarrow x \approx \frac{6 \cdot sin(52°46'10'')}{sin(4°)} \approx 4,97$$

Il triangolo è ovviamente *quasi* isoscele. L'altra soluzione non è accettabile perché 74° + 126°46′10″ > 180°.

Risolvere i triangoli di cui sono forniti alcuni dei loro enti

Livello 1

9. a = 41; b = 37; α = 77° [β ≈ 61°33′33″; γ ≈ 41°26′27″; c ≈ 27,85]
10. Con riferimento al precedente esercizio, che succede se l'angolo noto è β? [∅]
11. α = 31°; β = 69°; c = 12 [γ = 80°; a ≈ 6,28; b ≈ 11,38]
12. Con riferimento al precedente esercizio, che succede se il lato noto è a? E se è b? [(γ = 80°; b ≈ 21,75; c ≈ 22,95); (γ = 80°; a ≈ 6,62; c ≈ 12,66)]
13. a = 15; b = 32; β = 101° [α ≈ 27°23′46″; γ ≈ 51°36′14″; c ≈ 25,55]
14. Con riferimento al precedente esercizio, che succede se l'angolo noto è α? [∅]
15. α = 70°; β = 52°; c = 10 [γ = 58°; a ≈ 11,08; b ≈ 9,29]

16. Con riferimento al precedente esercizio, che succede se il lato noto è a? E se è b? [($\gamma = 58°$; $b \approx 8{,}39$; $c \approx 9{,}02$); ($\gamma = 58°$; $a \approx 11{,}92$; $c \approx 10{,}76$)]
17. $a = 21$; $b = 3{,}47$; $\beta = 32°41'13''$ [$\varnothing$]
18. Con riferimento al precedente esercizio, che succede se l'angolo noto è α? [$\beta \approx 5°7'11''$; $\gamma \approx 142°11'36''$; $c \approx 23{,}84$]
19. $\alpha = 13°41'15''$; $\beta = 115°41'$; $c = 7$ [$\gamma = 50°37'45''$; $a \approx 2{,}14$; $b \approx 8{,}16$]
20. Con riferimento al precedente esercizio, che succede se il lato noto è a? E se è b? [($\gamma = 50°37'45''$; $b \approx 26{,}66$; $c \approx 22{,}87$); ($\gamma = 50°37'45''$; $a \approx 1{,}84$; $c \approx 6{,}00$)]
21. $a = 1{,}5$; $b = 2$; $\alpha = 32°$ [($\beta \approx 44°57'36''$; $\gamma \approx 103°02'24''$; $c \approx 2{,}76$); ($\beta \approx 135°02'24''$; $\gamma \approx 12°57'36''$; $c \approx 0{,}63$)]
22. Con riferimento al precedente esercizio, che succede se l'angolo noto è β? [($\alpha \approx 28°43'13''$; $\gamma \approx 118°35'34''$; $c \approx 3{,}54$)]

Livello 2

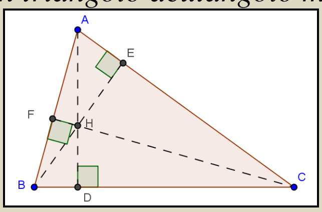
23. ($a + b = 14$; $\alpha = 35°$; $\beta = 41°$) ; ($a - b = 4$; $\alpha = 51°$; $\beta = 73°$) ; ($a - b = 4$; $\alpha = 73°$; $\beta = 51°$) [($\gamma = 104°$; $a \approx 6{,}53$; $b \approx 7{,}47$; $c \approx 11{,}05$) ; $\varnothing$; ($\gamma = 56°$; $a \approx 21{,}35$; $b \approx 17{,}35$; $c \approx 18{,}51$)]
24. ($a + b = 6{,}19$; $\alpha = 23°51'31''$; $\gamma = 24°19'01''$) ; ($c = 3{,}12$; $p = 6{,}2$; $\alpha = 41°13'7''$; $\beta = 71°4'51''$) [($\beta = 131°49'28''$; $a \approx 2{,}14$; $b \approx 4{,}05$; $c \approx 2{,}21$) ; ($\gamma = 67°42'2''$; $a \approx 3{,}81$; $b \approx 5{,}47$)]
25. ($\alpha : \beta : \gamma = 1 : 2 : 3$; $c = 4$) ; ($\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 4$; $a = 2$) [($\alpha = 30°$; $\beta = 60°$; $\gamma = 90°$; $a = 4/\sqrt{3}; b = 8/\sqrt{3}$); ($\alpha = 40°$; $\beta = 60°$; $\gamma = 80°$; $b \approx 2{,}69$; $c \approx 3{,}06$)]

Livello 3

26. ($\alpha = 25°$;$\beta = 55°$;$S = 18{,}31$);($a \cdot b = 5{,}21$;$\alpha = 5°4'31''$;$\beta = 71°13'8''$);($a = 2b$;$\alpha = 38°14'1''$;$\beta = 53°3'48''$) [($\gamma = 100°$; $a \approx 4{,}38$; $b \approx 8{,}49$; $c \approx 10{,}21$) ; ($\gamma = 103°42'21''$; $a \approx 0{,}70$; $b \approx 7{,}47$; $c \approx 7{,}66$) ; $\varnothing$]
27. Nell'ultimo problema precedente non può essere $a = 2b$, quanto fa invece $\frac{b}{a}$? [$\approx 1{,}29$]
28. ($2p = 12{,}56$; $\alpha = 44°$; $\beta = 66°$) ; ($a = b$, $2p = 6{,}19$; $\alpha = 37°48'14''$) [($\gamma = 70°$; $a \approx 3{,}42$; $b \approx 4{,}50$; $c \approx 4{,}63$) ; ($\beta = \alpha$, $\gamma \approx 104°23'32''$; $a = b \approx 1{,}73$; $c \approx 2{,}73$)]
29. Dato il triangolo con $a = 35$; $\beta = 60°$ qual è il minimo valore che può assumere b affinché il triangolo esista? $\left[\frac{35 \cdot \sqrt{3}}{2}\right]$
30. Con riferimento al problema precedente, per quali valori di b il problema ha una sola soluzione? [$b \geq 35$]

Lavoriamo insieme

Trovare la misura delle altezze di un triangolo acutangolo mediante i suoi angoli.

Consideriamo la figura seguente 

e ricaviamo AH dal triangolo rettangolo AEH: $\overline{AH} = \frac{\overline{AE}}{sin\left(A\hat{H}E\right)}$. In questa espressione sostituiamo ad AE la sua espressione ottenuta dal triangolo rettangolo ABE: $\overline{AH} = \frac{\overline{AB} \cdot cos(\alpha)}{sin\left(A\hat{H}E\right)}$ (1). Poiché: $A\hat{H}E = D\hat{H}B = 180° - D\hat{H}E$. e poiché il quadrilatero $DCEH$ ha due angoli retti, ha i rimanenti angoli supplementari, cioè $\angle A\hat{C}B = \gamma = 180° - D\hat{H}E = A\hat{H}E$. Possiamo allora sostituire nella (1): $\overline{AH} = \frac{c \cdot cos(\alpha)}{sin(\gamma)}$. Da cui $\frac{c \cdot cos(\alpha)}{sin(\gamma)} = \frac{2R \cdot \cancel{sin(\gamma)} \cdot cos(\alpha)}{\cancel{sin(\gamma)}} = 2R \cdot cos(\alpha)$, per il teorema della corda, dato che si ha $c = 2R \cdot sin(\gamma)$. Analogamente: $\overline{BH} = 2R \cdot cos(\beta); \overline{CH} = 2R \cdot cos(\gamma)$.

Passiamo adesso a *DH*, lavorando sul triangolo rettangolo *BDH*:

$$\overline{DH} = \overline{BH} \cdot cos\left(D\hat{H}B\right) = \overline{BH} \cdot cos\left(A\hat{H}E\right) = \overline{BH} \cdot cos(\gamma) = 2R \cdot cos(\beta) \cdot cos(\gamma).$$

Infine avremo: $\overline{AD} = 2R \cdot cos(\alpha) + 2R \cdot cos(\beta) \cdot cos(\gamma) = 2R \cdot \left[cos(\alpha) + cos(\beta) \cdot cos(\gamma)\right]$.

Analogamente: $\overline{BE} = 2R \cdot \left[cos(\beta) + cos(\alpha) \cdot cos(\gamma)\right]; \overline{CF} = 2R \cdot \left[cos(\gamma) + cos(\beta) \cdot cos(\alpha)\right]$

Per stabilire se un triangolo è acutangolo, basta considerare il maggiore dei suoi lati e verificare che il suo quadrato è minore della somma dei quadrati degli altri due lati, se è maggiore è ottusangolo, se è uguale è rettangolo. Tenuto conto di ciò verificare quali dei seguenti triangoli, di cui diamo le misure dei lati, sono acutangoli

Livello 2

31. (a = 3; b = 5; c = 7) ; (a = 3,12; b = 4,13; c = 5,14) ; (a = 1; b = 2; c = 3) [Ottusangolo; Acutangolo; Triangolo inesistente]
32. (a = 5,12; b = 4,15; c = 5,18) ; (a = 8,23; b = 7,56; c = 9,48) [Acutangolo ; Acutangolo]

Dopo avere verificato che i seguenti triangoli sono acutangoli, determinare le misure richieste

33. $a = 7$; $b = 4$; $\alpha = 70°$; h_a = ?, h_b = ?, h_c = ? [≈ 3,91; ≈ 3,76; ≈ 6,83]
34. $a = 4,12$; $b = 5,13$; $\alpha = 40°13'25''$; h_a = ?, h_b = ?, h_c = ? [≈ 3,31; ≈ 3,84; ≈ 5,12]
35. $a = 4,75$; $\alpha = 48°$; $\beta = 57°$; h_a = ?, h_b = ?, h_c = ? [≈ 5,18; ≈ 4,59; ≈ 3,98]
36. $c = 5,87$; $\alpha = 41°11'56''$; $\beta = 49°25'6''$; h_a = ?, h_b = ?, h_c = ? [≈ 2,94; ≈ 3,87; ≈ 4,46]
37. $h_a = 6,12$; $\alpha = 44°$; $\beta = 61°$; a = ? [≈ 5,03]
38. Provare che $sin(180° - \alpha) = sin(\alpha)$, con α angolo acuto, calcolando l'area di un rombo mediante le misure di un lato e di uno degli angoli interni, in due modi, prima con l'angolo acuto e poi con quello ottuso.

Livello 3

39. In che relazione sono il seno dell'angolo al vertice, α, di un triangolo isoscele, e il seno di uno degli angoli alla base, β? [$sin(\alpha) = sin(2\beta)$]
40. Tenuto conto del precedente esercizio e della formula: $sin(2\alpha) = 2sin(\alpha)cos(\alpha)$, determinare il seno dell'angolo al vertice di un triangolo isoscele sapendo che il seno degli altri angoli è 3/4. $\left[\frac{3\sqrt{7}}{8}\right]$
41. Trovare una relazione fra un'altezza di un triangolo e il lato a essa riferito. $\left[h_a = \frac{a \cdot sin(\beta) \cdot sin(\gamma)}{sin(\alpha)}\right]$
42. Di un triangolo conosciamo le misure di a, c e α. Vogliamo sapere le reciproche relazioni fra a e c affinché esistano 0, 1 o 2 triangoli con le date misure.
[0 soluzioni se $a > \frac{c}{sin(\gamma)}$; 1 soluzione se $a \le c$; 2 soluzioni se $a > c$]
43. Determinare perimetro e area del triangolo di cui sono note la differenza di due lati, 5, e le misure degli angoli a essi opposti, 19°38′ e 59°32'. [≈ 20,73; ≈ 12,85]
44. Nel triangolo isoscele *ABC*, *BT* è la bisettrice dell'angolo *B* che incontra il lato *AC* nel punto *T*. Se $\angle B\hat{T}A = 95°13'12''$ e *BT* misura 4. Determinare la misura del perimetro. [≈ 13,43]
45. Nel triangolo *ACD* si ha $\angle C\hat{A}D = 21,85°, \overline{CD} = 2,34\,cm$ e l'angolo esterno rispetto al vertice *C* è di 52,18°. Determinare il perimetro di *ACD* [≈ 10,48]
46. In un cerchio di raggio 1,96 *cm*, si traccia una corda *AB* lunga 2,68 *cm*. Quindi sia il punto *C* appartenente al maggiore dei due archi *AB*, in modo che $C\hat{A}B$ = 77°19′12″. Determinare il perimetro del triangolo *ABC*. [≈ 9,88 *cm*]
47. Di un triangolo *ABC* si sa che i lati *AB* e *AC* e l'area stanno fra loro come i numeri 1, 2, 3, sapendo che il lato *BC* misura 12, determinare area e perimetro. [($2p$ ≈ 24,85; S ≈ 12,85) ∨ ($2p$ ≈ 45,63; S ≈ 33,63)]
48. Il triangolo isoscele *ABC* ha i lati obliqui che misurano $\sqrt{3}$ e la base che misura più di 3. Quanto misura al minimo l'angolo al vertice? [Più di 120°]

49. Un triangolo acutangolo, di perimetro 12 *cm* è inscritto in una circonferenza di raggio 6 *cm*, determinare la somma dei seni degli angoli del triangolo. [1]
50. Determinare la misura del segmento bisettrice di uno degli angoli alla base, 2α, di un triangolo isoscele, in funzione della base, b, e di α. [$b \cdot sin(2\alpha)/ sin(3\alpha)$]
51. Risolvere il precedente quesito, per un generico perimetro $2p$ e un generico raggio r. [p/r]
52. Tenuto conto del precedente risultato possiamo affermare che un triangolo di perimetro 12 *cm* non può essere inscritto in una circonferenza di raggio 2 *cm*. Perché? [Non può essere $p/r = 3$]
53. Determinare il rapporto fra i raggi delle circonferenze inscritta e circoscritta a uno stesso triangolo rettangolo in funzione dei lati. $\left[\frac{r}{R}=\frac{2\cdot b\cdot c}{a\cdot(a+b+c)}\right]$
54. Determinare il rapporto fra i raggi delle circonferenze inscritta e circoscritta al triangolo rettangolo di lati 3, 4, 5. [2/5]
55. Determinare il rapporto fra i raggi delle circonferenze inscritta e circoscritta a uno stesso triangolo rettangolo isoscele in funzione dei lati. $\left[\frac{r}{R}=\frac{2\cdot b^2}{a\cdot(a+2b)}=\frac{a}{a+2b}\right]$

Lavoriamo insieme

Determinare l'area di un quadrilatero le cui diagonali misurano 3 e 4 *e formano un angolo di* 30°.
Utilizzando il risultato del Teorema 13, abbiamo $1/2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot sin(30°) = 6 \cdot 1/2 = 3$.

Indichiamo con d_1 e d_2, le misure delle diagonali di un quadrilatero convesso, con α uno degli angoli formato da essi e con S l'area del quadrilatero. Determinare quanto richiesto

Livello **1**

56. ($d_1 = 3$; $d_2 = 5$; $\alpha = 60°$; $S = ?$) ; ($d_1 = 13{,}54$; $d_2 = 8{,}41$; $\alpha = ?$; $S = 15{,}34$) $\left[\frac{15}{4}\cdot\sqrt{3};\approx 15°37'49''\right]$
57. ($d_1 = 1{,}45$; $d_2 = 2{,}18$; $\alpha = 41°52'16''$; $S = ?$);($d_1 = 5{,}18$; $d_2 = ?$; $\alpha = 71°13'28''$; $S = 7{,}12$) [≈ 1,05; ≈2,90]
58. ($d_1 = ?$; $d_2 = 7{,}32$; $\alpha = 43°27'57''$; $S = 12{,}31$) ; ($d_1 = 4{,}12$; $d_2 = 5{,}13$; $\alpha = 52°$; $S = ?$) [≈ 4,89 ; ≈ 833]
59. $d_1 = 5{,}18$; $d_2 = 5{,}12$; $\alpha = ?$; $S = 8{,}27$ [≈ 38°34′58″]

Livello **2**

60. ($d_1 = ?$;$d_2 = 2d_1$; $\alpha = 30°$; $S = 4{,}35$) ; ($d_1 = ?$; $d_2 = 4{,}38 - d_1$; $\alpha = 51°13'$; $S = 8{,}13$) [(≈ 2,95; ≈ 5,90); ∅]
61. ($d_1 = ?$; $d_2 = d_1 + 2{,}13$; $\alpha = 49°12'33''$; $S = 7{,}38$);($d_1 = ?$; $d_2 = d_1^2$; $\alpha = 13°17'43''$; $S = 18{,}91$) [(≈3,48; ≈5,61) ; (≈ 5,48; ≈ 30,02)]
62. $d_1 = ?$; $d_2 = 3{,}14 + = 2 \cdot d_1$; $\alpha = 53°18'27''$; $S = 11{,}03$ [≈ 3,01; ≈ 9,15]
63. Applicare il teorema 13 a un generico quadrato di lato ℓ, verificandone la validità.
64. Calcolare l'area di un quadrilatero con diagonali d_1, d_2 perpendicolari. [$1/2 \cdot d_1 \cdot d_2$]

Livello **3**

65. Dato che il teorema 13 può applicarsi anche a un generico rettangolo di lati a e b, determinare la misura degli angoli che formano le diagonali in funzione dei lati. $\left[sin^{-1}\left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)\right]$
66. Tenuto conto del precedente esercizio verificare che se il rettangolo diviene un quadrato gli angoli delle diagonali sono retti.
67. Calcolare uno degli angoli acuti formati dalle diagonali di un rettangolo di lati lunghi 3 e 4. [≈ 73°44′23″]
68. Calcolare uno degli angoli acuti formati dalle diagonali di un trapezio rettangolo di basi lunghe 3 e 4 ed altezza lunga 2. [≈ 60°15′18″]
69. Un rettangolo ha un lato lungo 3,12 e uno degli angoli che formano le diagonali di 52°31′12″, quanto misura l'atro lato? [2 soluzioni: ≈ 1,54; ≈ 6,32]

70. Usando il teorema 13 determinare la misura degli angoli che formano le diagonali di un generico trapezio rettangolo di basi a e b ($b > a$) ed altezza h, in funzione dei lati. $\left[sin^{-1}\left(\frac{(a+b)\cdot h}{\sqrt{(b^2+h^2)\cdot(a^2+h^2)}}\right)\right]$

71. Calcolare la misura di uno degli angoli acuti formati dalle diagonali di un trapezio rettangolo in cui l'altezza misura quanto la base minore e quanto metà della base maggiore. [≈ 71°33′54″]

72. Usando il teorema 13 determinare la misura degli angoli che formano le diagonali di un trapezio isoscele di basi a e b ($b > a$) ed altezza h, in funzione dei lati. $\left[sin^{-1}\left(\frac{4\cdot(a+b)\cdot h}{(a+b)^2+4h^2}\right)\right]$

73. Di un parallelogramma sono noti una sua diagonale, 19,38, l'angolo opposto alla detta diagonale, 134°45′, e l'angolo formato dalla diagonale con uno dei lati, 15°2′24″. Determinare le misure dei lati del parallelogramma. [≈ 7,08; ≈ 13,03]

74. Un trapezio è inscritto in una semicirconferenza, con la base maggiore coincidente con il diametro. Dopo avere provato che il trapezio è isoscele, determinarne la misura dell'area mediante il raggio r della circonferenza e l'angolo al centro α che insiste sul lato AC. $\left[\frac{1}{2}r^2\cdot(2sin(\alpha)+sin(2\alpha))\right]$

75. Determinare la misura del perimetro del trapezio precedente. $\left[2r\cdot\left(1+2sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)+cos(\alpha)\right)\right]$

Con riferimento al precedente problema determinare quanto richiesto

76. (r = 1 m; α = 60°; S = ?; $2p$ = ?) ; (r = 1 m; α = 30°; S = ?; $2p$ = ?) ; (r = 1 m; α = 45°; S = ?; $2p$ = ?)
$\left[\left(5\ m^2;\frac{3\cdot\sqrt{3}}{4}m\right);\left(\approx 4,77\,m^2;\frac{2+\sqrt{3}}{4}m\right);\left(\approx 4,94\,m^2;\frac{1+\sqrt{2}}{2}m\right)\right]$

77. (α = 70°; S = 5 m^2; r = ?) ; (α = 70°; $2p$ = 5 m; r = ?) [≈ 1,99 m ; ≈ 1,00 m]

78. Determinare la misura dell'area di un trapezio isoscele inscritto in una semicirconferenza, mediante le misure del raggio r e dell'angolo alla base maggiore α. $\left[\frac{1}{2}r^2\cdot(2sin(2\alpha)-sin(4\alpha))\right]$

79. Determinare il perimetro del trapezio del problema precedente. [$4r\cdot(sin^2(\alpha)+cos(\alpha))$]

Con riferimento al precedente problema determinare quanto richiesto

80. (r = 2 m; α = 45°; S = ?; $2p$ = ?) ; (α = 51°; S = 2 m^2; r = ?) $[\varnothing;\approx 1,30m]$

81. (r = 3 m; α = 60°; S = ?; $2p$ = ?) ; (α = 73°; $2p$ = 4,37 m; r = ?) $\left[\frac{27\cdot\sqrt{3}}{4};15\approx 0,91m\right]$

82. Per quali valori di α il problema ha soluzione? [45° < α < 90°]

Lavoriamo insieme

Determinare la misura dell'area di un quadrilatero ciclico di lati lunghi nell'ordine, 4,31; 4,64; 5,99 e 3,29 *e con l'angolo interno compreso tra i primi due lati di* 94°42′.
Utilizziamo il risultato del Teorema 15, scriviamo: 1/2 · (4,31 · 4,64 + 5,99 · 3,29) · sin(94°42′) ≈ 19,79. Cosa sarebbe cambiato se l'angolo fosse stato compreso tra due degli altri lati consecutivi? 1/2 · (5,99 · 4,64 + 4,31 · 3,29) · sin(94°42′) ≈ 20,91. Gli altri due casi forniscono uguali risultati perché invertiamo solamente l'ordine degli addendi.

I dati seguenti si riferiscono a un quadrilatero ciclico, determinare quanto richiesto

Livello 1

83. a = 2,44; b = 5,09; c = 6,61; d = 2,16; α = 107°54′; S = ? [≈ 12,70]

84. a = 2,76; b = 2,76; c = 6,22; d = 5,75; δ = 94°54′; S = ? [≈ 16,46]

85. $a = 4,78$; $b = 2,48$; $c = 3,38$; $d = 4,11$; $\beta = 113°18'$; $S = ?$ [≈ 12,87]
86. $a = 3,15$; $b = 2,68$; $c = 4,68$; $d = 4,30$; $\gamma = 65°53'28''$; $S = ?$ [≈ 13,04]
87. $a = 5,71$; $b = ?$; $c = 6,43$; $d = 1,38$; $\alpha = 71°54'14''$; $S = 14,32$ [≈ 3,72]
88. $a = 4,37$; $b = 5,06$; $c = ?$; $d = 6,26$; $\beta = 58°32'29''$; $S = 17,28$ [≈ 2,60]
89. $a = 3,09$; $b = 5,31$; $c = 5,99$; $d = ?$; $\gamma = 61°30'$; $S = 18,96$ [≈ 4,46]
90. $a = 3,57$; $b = 2,41$; $c = 6,61$; $d = 3,77$; $\alpha = ?$; $S = 13,57$ [≈ 54°3′19″]
91. $a = 2,11$; $b = 6,15$; $c = 4,60$; $d = 4,98$; $\beta = ?$; $S = 17,91$ [≈ 67°24′20″]

Livello 2

92. $a = b = ?$; $c = 3,15$; $d = 3,26$; $\alpha = 73°24'11''$; $S = 13,77$ [≈ 4,30]
93. $a = b = c = ?$; $d = 5,28$; $\alpha = 66°42'$; $S = 11,14$ [≈ 2,95]
94. $a = b = ?$; $c = d = ?$; $c - a = 1,5$; $\alpha = 113°18'37''$; $S = 13,20$ [≈ 2,97; ≈ 4,47]
95. $a = ?$; $b = a + 1,2$; $c = 3,11$; $d = 4,01$; $\alpha = 74°12'53''$; $S = 15,12$ [≈ 3,79]
96. $a = 3,15$; $b = c - 1,14$; $c = ?$: $d = c + 2,13$; $\alpha = 58°17'44''$; $S = 18,13$ [≈ 4,65]
97. $a = 2b$; $c + d = a + 5,91$; $d - a = 1,58$; $\alpha = 132°30'$; $S = 7,48$ [≈ 2,43; ≈ 1,21; ≈ 4,33; ≈ 4,01]
98. Applicare il teorema 14 a un generico quadrato di lato ℓ, verificandone la validità.
99. Applicare il teorema 14 a un generico rettangolo di lati *a* e *b*, verificandone la validità.
100. Un *aquilone* è un quadrilatero le cui diagonali sono fra loro perpendicolari e i lati consecutivi sono a due a due uguali. Se l'aquilone è ciclico, determinare la misura dell'area di questo quadrilatero in funzione dei lati *a* e *b*. $\left[\frac{a^2+b^2}{2}\cdot sin(\alpha)\right]$
101. Determinare le misure degli angoli acuti di un aquilone ciclico di lati lunghi 2,28 e 5,83 e di area 13,28. [≈ 42°40′11″]
102. Due angoli consecutivi di un quadrilatero ciclico misurano 30° e 45°. Se il raggio della circonferenza circoscritta è lungo 1, determinare la misura delle diagonali del quadrilatero. $\left[\sqrt{2};1\right]$

Livello 3

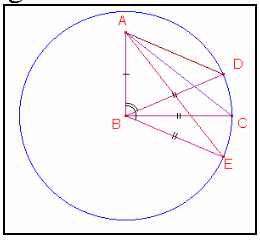
103. Applicare il teorema 14 a un generico trapezio isoscele di basi *a* e *b* ed altezza *h*, verificandone la validità.
104. Possiamo dire che l'aquilone è sempre ciclico? In caso di risposta negativa determinare la misura della sua area in funzione dei lati. [No; $1/2 \cdot (a^2 \cdot sin(\alpha) + b^2 \cdot sin(\beta))$]
105. Cosa deve succedere affinché un aquilone sia ciclico? [Deve avere due angoli opposti retti]
106. Un aquilone ciclico ha il lato maggiore doppio del minore, quanto misura l'angolo acuto? [≈ 53°7′48″]
107. Con riferimento al problema precedente, quanto misura l'area dell'aquilone, in termini della misura *a* del lato minore e di uno degli angoli non retti, α? $\left[\frac{5}{2}a^2\cdot sin(\alpha)\right]$
108. Una piramide a base quadrata ha gli spigoli laterali uguali. Determinarne il volume sapendo che lo spigolo di base misura 1 e l'angolo al vertice di ciascuna faccia laterale è 80°. $\left[\frac{\sqrt{cos(80°)}}{6\cdot sin(40°)}\approx 0.11\right]$

Risoluzione dei triangoli qualsiasi e teorema del coseno

Il problema

Come possiamo risolvere un triangolo nelle ipotesi dei criteri LAL e LLL?

Con il teorema dei seni abbiamo visto che possiamo risolvere solo i triangoli che verificano il criterio ALA, dobbiamo perciò cercare qualche altra proprietà che ci permetta di risolvere i triangoli nelle ipotesi dei rimanenti due criteri. Consideriamo una poco nota generalizzazione del Teorema di Pitagora, dovuta ad Euclide. Noi sappiamo che in un triangolo rettangolo il quadrato dell'ipotenusa è somma dei quadrati degli altri cateti, ma cosa accade se il triangolo non è rettangolo? Vediamo con una costruzione geometrica.



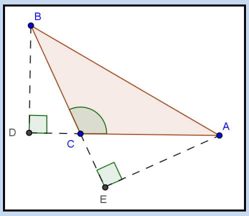
Abbiamo costruito tre triangoli con due lati di uguale misura (*AB* e *BC* = *BD* = *BE*), in modo che l'angolo da essi compreso sia rispettivamente acuto $\left(A\hat{B}D\right)$, retto $\left(A\hat{B}C\right)$ e ottuso $\left(A\hat{B}E\right)$. Ovviamente abbiamo anche la validità delle seguenti disuguaglianze: $\overline{AE} > \overline{AC} > \overline{AD}$. Poiché $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$, possiamo dire perciò che $\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 < \overline{AD}^2, \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 > \overline{AE}^2$. Quindi la somma dei quadrati di due lati di un triangolo acutangolo è maggiore del quadrato del terzo lato, mentre nel triangolo ottusangolo (rispetto all'angolo ottuso) è minore. Euclide dimostrò anche quanto valgono l'eccedenza e la deficienza.

Teorema 15

Dato il triangolo ottusangolo *ABC* di lato maggiore *AB*, dette *D* ed *E* rispettivamente le proiezioni del punto *A* sulla retta per *BC* e del punto *B* sulla retta per *AC*, si ha la validità della seguente uguaglianza:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2\cdot\overline{AC}\cdot\overline{DC} = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CE}$$

Dimostrazione

Consideriamo il triangolo rettangolo *ABD* in figura  e ricaviamo la misura di $\overline{AB}^2$:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \left(\overline{AC} + \overline{DC}\right)^2 = \overline{AC}^2 + 2\cdot\overline{AC}\cdot\overline{DC} + \overline{DC}^2 + \overline{BD}^2$$

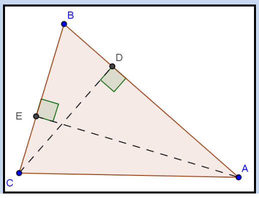
Consideriamo il triangolo rettangolo BDC e ricaviamo: $\overline{DC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2$. Sostituiamo: $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + 2\cdot\overline{AC}\cdot\overline{DC} + \overline{BC}^2 - \cancel{\overline{BD}^2} + \cancel{\overline{BD}^2} = \overline{AC}^2 + 2\cdot\overline{AC}\cdot\overline{DC} + \overline{BC}^2$

Abbiamo ottenuto la tesi.

Vale anche il seguente risultato.

Teorema 16

Dato un triangolo acutangolo *ABC*, dette *D* ed *E* rispettivamente le proiezioni del punto *C* su *AB* e del punto *A* su *BC*, si ha la validità dell'uguaglianza: $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BD} = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\cdot\overline{BC}\cdot\overline{BE}$



La dimostrazione è lasciata per esercizio ed è simile a quella del Teorema 15.
I due teoremi precedenti possono racchiudersi in un unico risultato espresso in forma trigonometrica, che abbiamo già enunciato come Teorema delle proiezioni (vedi Teorema 7) : $c = a \cdot cos(\beta) + b \cdot cos(\alpha)$. Possiamo ulteriormente raffinare questo risultato.

Teorema 17 (di Carnot o del coseno)

In un triangolo il quadrato di un lato è la somma dei quadrati degli altri due lati, diminuita del doppio prodotto degli stessi lati per il coseno dell'angolo che essi formano:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cdot cos(\alpha);\ b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cdot cos(\beta);\ c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cdot cos(\gamma)$$

Dimostrazione

Esprimiamo i tre lati mediante il teorema delle proiezioni:

$$a = b \cdot cos(\gamma) + c \cdot cos(\beta);\ b = a \cdot cos(\gamma) + c \cdot cos(\alpha);\ c = a \cdot cos(\beta) + b \cdot cos(\alpha).$$

Osserviamo che ci sono molti termini simili, che perciò opportunamente manipolati possono semplificarsi. Per fare ciò moltiplichiamo ciascuna delle tre espressioni per la misura del lato che essa esprime:

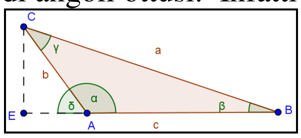
$$a^2 = ab \cdot cos(\gamma) + ac \cdot cos(\beta);\ b^2 = ab \cdot cos(\gamma) + bc \cdot cos(\alpha);\ c^2 = ac \cdot cos(\beta) + bc \cdot cos(\alpha)$$

Se adesso sommiamo due delle tre uguaglianze e vi sottraiamo quella rimanente otteniamo quanto cercato: $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cdot cos(\gamma)$; $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cdot cos(\alpha)$; $a^2 + c^2 - b^2 = 2ac \cdot cos(\beta)$ da cui facilmente si ha la tesi.

I protagonisti


Lazare Nicolas Marguérite Carnot nacque il 13 Maggio 1753 a Nolay in Francia. Laureato alla Scuola di Ingegneria di Mézières, si occupò soprattutto delle discipline relative alla propria laurea. Insieme con un altro grande geometra dell'epoca, Gaspard Monge, fondò *l'École centrale des travaux publiques* che in seguito divenne l'*École polytechnique*. Fu il padre di Sadi Carnot, che ottenne importantissimi risultati teorici in Termodinamica. Delle sue opere geometriche si ricorda *De la corrélation des figures de géométrie*, del 1801, in cui, fra le altre cose, è esposto anche il teorema del coseno. Del 1803 è *La Géométrie de position*, uno dei primi veri testi di geometria analitica come la intendiamo oggi. Morì il 2 Agosto 1823 a Magdeburgo.

Il precedente risultato ci permette di conoscere alcuni valori ancora ignoti del coseno di angoli ottusi. Infatti applicandolo al lato maggiore di un triangolo ottusangolo, come mostrato in figura,



si ha: $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cdot cos(\alpha)$, d'altro canto per il teorema 15 si ha anche $a^2 = b^2 + c^2 + 2c \cdot \overline{EA} = b^2 + c^2 + 2cb \cdot cos(\delta) = b^2 + c^2 + 2bc \cdot cos(180° - \alpha)$. Deve perciò aversi $cos(180° - \alpha) = -\,cos(\alpha)$. Quindi poniamo la seguente definizione.

Definizione 11

Si ha $cos(x) = -\,cos(180° - x)$, per ogni x: $90° \le x \le 180°$.

La precedente definizione ci dice quindi che il coseno di angoli ottusi è un numero negativo, e soprattutto ci permette di enunciare i due teoremi di Euclide in un'unica maniera utilizzando la trigonometria. La Definizione 11 ha anche altre immediate conseguenze, esposte nel seguente risultato:

Teorema 18

Si ha: $tan(x) = -\,tan(180° - x)$; $cot(x) = -\,cot(180° - x)$; $sec(x) = -\,sec(180° - x)$, $\forall x$: $90° \le x \le 180°$

Ossia anche tangente, cotangente e secante di angoli ottusi sono numeri negativi.
Vediamo come con il teorema di Carnot possiamo risolvere i triangoli nelle ipotesi dei criteri LAL e LLL.

Esempio 12

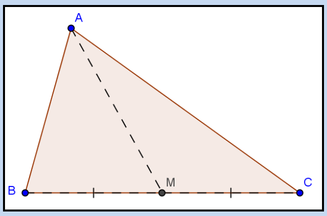
- Vogliamo risolvere un triangolo in cui due lati sono lunghi 10 e 15 unità e l'angolo da essi compreso è di 68°. Applicando il teorema di Carnot determiniamo il terzo lato: $\sqrt{10^2+15^2-2\cdot 10\cdot 15\cdot cos(68°)}\approx 14,58$. Per determinare adesso le misure degli angoli non possiamo usare indifferentemente il teorema dei seni oppure lo stesso teorema di Carnot, perché usando il teorema dei seni ricadiamo nel caso "dubbio" e così non possiamo essere sicuri che la soluzione ottenuta sia quella corretta. Usando il teorema di Carnot avremo: $cos^{-1}\left(\frac{15^2+14,58^2-10^2}{2\cdot 15\cdot 14,58}\right)\approx 39°29'10";cos^{-1}\left(\frac{10^2+14,58^2-15^2}{2\cdot 10\cdot 14,58}\right)\approx 72°31'21"$. La somma degli angoli è 180°31″, che è accettabile, tenuto conto delle approssimazioni. Usando il teorema dei seni invece avremo: $\frac{10}{sin(x)}\approx\frac{14,58}{sin(68°)}\approx\frac{15}{sin(y)}\Rightarrow x\approx sin^{-1}\left(\frac{10\cdot sin(68°)}{14,58}\right)\approx 39°29'3", y\approx sin^{-1}\left(\frac{15\cdot sin(68°)}{14,58}\right)\approx 72°30'57"$
  Il problema non è che i risultati non coincidono perfettamente con i precedenti, ma se determiniamo prima y, dovremmo avere anche un'altra soluzione: 180° – 72°30′57″ = 7°29′3″, che ovviamente non può essere accettabile. È perciò preferibile determinare i rimanenti dati usando sempre il teorema di Carnot. Ciò può accadere spesso usando il teorema dei seni, poiché il seno di un angolo coincide con il suo supplementare, mentre i coseni di tali angoli sono invece opposti.
- Vogliamo risolvere un triangolo i cui lati sono lunghi 7, 5 e 4 unità.
  Applichiamo il teorema di Carnot per trovare gli angoli. $\alpha=cos^{-1}\left(\frac{7^2+5^2-4^2}{2\cdot 7\cdot 5}\right)=cos^{-1}\left(\frac{29}{35}\right)\approx 34°2'52"$,
  $\beta=cos^{-1}\left(\frac{7^2-5^2+4^2}{2\cdot 7\cdot 4}\right)=cos^{-1}\left(\frac{5}{7}\right)\approx 44°24'55"$, $\gamma=cos^{-1}\left(\frac{-7^2+5^2+4^2}{2\cdot 4\cdot 5}\right)=cos^{-1}\left(-\frac{1}{5}\right)\approx 101°32'13"$
  Ovviamente: 34°2′52″ + 44°24′55″ + 101°32′13″ = 180°, anche se talvolta il risultato può essere lievemente diverso, nell'ordine di qualche secondo.
- Vogliamo risolvere un triangolo i cui sono lunghi 7, 5 e 13 unità. Non è difficile capire che un tale triangolo non esiste perché 13 > 7 + 5. Se non ci accorgiamo di tale fatto e applichiamo ugualmente il teorema di Carnot cosa troviamo? $\alpha=cos^{-1}\left(\frac{7^2+5^2-13^2}{2\cdot 7\cdot 5}\right)=cos^{-1}\left(-\frac{19}{14}\right)=?$ Analoghi risultati impossibili li troviamo per i rimanenti angoli. Cioè, ovviamente, non otteniamo alcun risultato.

Con l'ausilio del teorema di Carnot possiamo trovare la misura delle mediane di un triangolo mediante i lati.

Teorema 19

In un triangolo di lati a, b, c, le mediane sono: $m_a^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4};m_b^2=\frac{2a^2+2c^2-b^2}{4};m_c^2=\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}$.

Dimostrazione

Consideriamo un qualsiasi triangolo e tracciamo una sua mediana. 

Ragionando sul triangolo ABM, si ha: $m_a^2=c^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-2\cdot c\cdot\frac{a}{2}\cdot cos(\beta)$ (1). Ragionando sul triangolo ABC, invece: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos(\beta) \Rightarrow 2ac \cdot cos(\beta) = a^2 + c^2 - b^2$. Sostituendo nella (1) si ha:
$m_a^2=c^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2+c^2-b^2}{2}=\frac{4c^2+a^2-2a^2-2c^2+2b^2}{4}=\frac{2c^2-a^2+2b^2}{4}$, che è la tesi cercata.

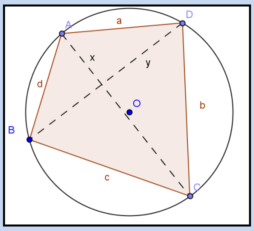
Si ha anche un interessante risultato sui quadrilateri ciclici.

Teorema 20

In un quadrilatero ciclico *ABCD* di lati *a*, *b*, *c* e *d*, e diagonali *x* e *y* si ha:

$$x^2 = \frac{(a\cdot c+b\cdot d)\cdot(a\cdot d+b\cdot c)}{a\cdot b+c\cdot d}; \; y^2 = \frac{(a\cdot c+b\cdot d)\cdot(a\cdot b+c\cdot d)}{a\cdot d+b\cdot c}$$

Dimostrazione

Ci riferiamo alla figura. 

Dal teorema di Carnot applicato ad *ACD* abbiamo: $x^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cdot cos(\delta)$ (1), mentre applicandolo al triangolo *ABC* avremo: $x^2 = c^2 + d^2 - 2\,cd \cdot cos(\beta) = c^2 + d^2 - 2\,cd \cdot cos(\delta)$ (2). L'ultimo passaggio è motivato dal fatto che gli angoli sono fra loro supplementari. Moltiplichiamo la (1) per *cd* e la (2) per *ab*, quindi sommiamo termine a termine: $(ab + cd) \cdot x^2 = cd \cdot (a^2 + b^2) + ab \cdot (c^2 + d^2) = a^2cd + b^2cd + abc^2 + abd^2 = ac \cdot (ad + bc) + bd \cdot (ad + bc) = (ad + bc) \cdot (ac + bd)$. Ricavando x^2 otteniamo quanto richiesto. In modo analogo si prova la seconda relazione.

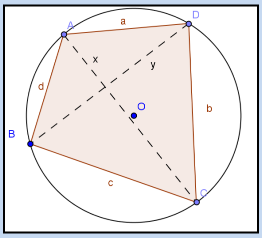
Più in generale possiamo anche provare un risultato che è una generalizzazione del teorema di Erone per i triangoli.

Teorema 21 (di Brahmagupta)

In un quadrilatero ciclico *ABCD* di lati *a*, *b*, *c* e *d*, indicato con *p* il semiperimetro, l'area è data da:

$$\sqrt{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d)}$$

Dimostrazione

Ci riferiamo alla figura. 

Per il Teorema di Carnot applicato ad *ACD* e *ABC*, si ha: $x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos(\delta) = c^2 + d^2 + 2\,cd \cdot cos(\delta)$, quindi $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = = 2 \cdot (ab + cd) \cdot cos(\delta)$ (1). Per il teorema 14 l'area è $S = 1/2 \cdot (ab + cd) \cdot sin(\delta)$. Innalzando al quadrato abbiamo: $S^2 = 1/4 \cdot (ab + cd)^2 \cdot sin^2(\delta)$, da cui otteniamo; $4S^2 = (ab + cd)^2 \cdot [\,1 - cos^2(\delta)]$ (2) Adesso innalziamo al quadrato anche la (1): $(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4 \cdot (ab + cd)^2 \cdot cos^2(\delta)$ (3) Ora moltiplichiamo per 4 la (2) e sommiamo termine a termine con la (3):
$16S^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4\cdot(ab + cd)^2 \cdot cos^2(\delta) + 4 \cdot (ab + cd)^2\cdot[1 - cos^2(\delta)] \Rightarrow 16S^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = = 4\cdot(ab + cd)^2 \Rightarrow 16S^2 = 4 \cdot (ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 \Rightarrow 16S^2 = (2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2) \cdot (2ab + +2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2)^2 \Rightarrow 16S^2 = [(a + b)^2 - (c - d)^2] \cdot [(c + d)^2 - (a - b)^2] \Rightarrow 16S^2 = (a + b + c - d) \cdot (a + b - c + d) \cdot (a - b + c + d) \cdot (-a + b + c + d) \Rightarrow S^2 = \frac{a+b+c-d}{2}\cdot\frac{a+b-c+d}{2}\cdot\frac{a-b+c+d}{2}\cdot\frac{-a+b+c+d}{2}$.

Non è difficile verificare che $\frac{a+b+c-d}{2} = \frac{a+b+c+d-2d}{2} = \frac{a+b+c+d}{2} - d = p-d$, e analogamente le altre. Quindi sostituendo nell'ultima espressione otteniamo la tesi.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Calcolare le funzioni goniometriche di 120°.
Grazie alla definizione 11 e al successivo teorema 18, si ha: $cos(120°) = -cos(60°) = -1/2$; $tan(120°) = -tan(60°) = -\sqrt{3}$ e anche: $cot(120°) = -cot(60°) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $sec(120°) = -sec(60°) = -2$.

Semplificare le seguenti espressioni
Livello 1

1. $sin(120°) - cos(150°) + sec(135°) + tan(150°) - cot(120°)$ $\left[\sqrt{3}-\sqrt{2}\right]$
2. $sin(120°) \cdot cos(135°) + cot(150°) \cdot tan(135°)$ $\left[\frac{4\cdot\sqrt{3}-\sqrt{6}}{4}\right]$
3. $[sin(120°) - cos(150°)] \cdot [sin(120°) + cos(30°)]$ [3]
4. $[tan(135°) - sec(150°)] \cdot [tan^2(45°) + tan(135°) \cdot sec(30°) + sec^2(150°)]$ $\left[\frac{20\cdot\sqrt{3}-33}{9}\right]$
5. $sin(120°) - sin(60°) + cos(150°) - cos(30°)$ $\left[-\sqrt{3}\right]$
6. $cos(120°)\cdot\frac{1-sin(135°)}{1+cos(135°)}\cdot tan(135°)-csc(150°)$ [–3/2]
7. $\frac{tan(45°)+cot(135°)}{sec(135°)}-\frac{sin(150°)}{1-cos(60°)}$ [–1]
8. $\frac{sec(135°)}{csc(45°)}-tan(30°)\cdot cot(150°)+cos(60°)\cdot sec(120°)$ [–1]
9. $cot(45°) \cdot tan(150°) \cdot csc(120°) \cdot cos(30°)\ \ sec(150°)$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$
10. $[1 - sin(120°) + cos(150°)]^3$ $\left[10-6\cdot\sqrt{3}\right]$

Lavoriamo insieme

Risolvere un triangolo di cui sono note le misure dei lati, 10, 12 e 14.
Applichiamo il teorema di Carnot.

$$cos^{-1}\left(\frac{10^2+12^2-14^2}{2\cdot10\cdot12}\right)\approx 78°27'47";cos^{-1}\left(\frac{10^2-12^2+14^2}{2\cdot10\cdot14}\right)\approx 57°7'18";cos^{-1}\left(\frac{-10^2+12^2+14^2}{2\cdot12\cdot14}\right)\approx 44°24'55"$$

Risolvere i seguenti triangoli di cui sono forniti alcuni dei loro enti (S è l'area)
Livello 1

11. $a = 14$; $b = 10$; $\gamma = 30°$ $\left[c=2\cdot\sqrt{74-35\cdot\sqrt{3}};\alpha\approx 106°52'55";\beta\approx 43°7'5"\right]$
12. $a = 5$; $b = 12$; $c = 13$ [$\alpha \approx 22°37'12''$; $\beta \approx 67°22'48''$; $\gamma = 90°$]
13. $a = 7$; $b = 4$; $\gamma = 45°$ $\left[c=\sqrt{65-28\cdot\sqrt{2}};\alpha\approx 34°8'18";\beta\approx 100°51'42"\right]$
14. $a = 6$; $b = 6$; $c = 5$ [$\alpha = \beta \approx 65°22'32''$; $\gamma \approx 49°14'55''$]
15. $a = 3\cdot\sqrt{2}$; $b = 3$; $\gamma = 105°$ [$c \approx 5{,}80$; $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$]
16. $a = 12$; $b = 13$; $\gamma = 54°$ [$\alpha \approx 58°30'40''$; $\beta \approx 67°29'20''$; $c \approx 11{,}38$]

17. $\alpha = 43°$; $b = 1{,}13$; $c = 2{,}45$ [$\beta \approx 25°23'32''$; $\gamma \approx 111°36'28''$; $c \approx 1{,}80$]

18. $a = 4{,}13$; $c = 3{,}25$; $\beta = 94°$ [$\alpha \approx 49°20'42''$; $\gamma \approx 36°39'18''$; $c \approx 5{,}43$]

19. $a = 7{,}31$; $b = 4{,}71$; $c = 10{,}32$ [$\alpha \approx 39°16'46''$; $\beta \approx 24°04'29''$; $\gamma \approx 116°38'46''$]

20. ($a = 2{,}41$; $b = 5{,}67$; $c = 3{,}12$) ; $\left(a = 1; c = \frac{\sqrt{3}+1}{2}; \beta = 60°\right)$ $\left[\varnothing; \left(b = \frac{\sqrt{6}}{2}; \alpha = 45°; \gamma = 75°\right)\right]$

21. $a = 4{,}16$; $S = 5{,}91$; $\beta = 47°25'07''$ [$b \approx 3{,}24$; $c \approx 3{,}86$; $\alpha \approx 71°10'42''$; $\gamma \approx 61°24'11''$]

Livello 2

22. $b + c = 7$; $\alpha = 30°$; $a = 4{,}12$ [$b \vee c \approx 1{,}59$; $c \vee b \approx 5{,}42$; $\beta \vee \gamma \approx 11°5'15''$; $\gamma \vee \beta \approx 138°54'44''$]

23. $a - b = 3{,}12$; $\gamma = 41°25'$; $c = 3{,}42$ [$a \approx 4{,}08$; $b \approx 0{,}96$; $\alpha \approx 127°52'7''$; $\beta \approx 10°42'53''$]

24. $a = b$; $\gamma = 17°32'40''$; $c = 5{,}82$ [$a = b \approx 19{,}08$; $\alpha = \beta \approx 81°13'40''$]

25. $a + b = 5{,}18$; $2p = 7{,}19$; $\gamma = 103°7'23''$ [$\varnothing$]

26. $c = 2b$; $2p = 16{,}32$; $\gamma = 74°18'31''$ [$a \approx 6{,}57$; $b \approx 3{,}25$; $c \approx 6{,}50$; $\alpha \approx 76°55'$; $\beta \approx 28°46'28''$]

27. $a + b = 8{,}37$; $S = 9{,}12$; $\gamma = 53°18'19''$ [$\varnothing$]

28. $2p = 16{,}85$; $S = 11{,}87$; $\gamma = 59°$ [$a \approx 4{,}06$; $b \approx 6{,}82$; $c \approx 5{,}87$; $\alpha \approx 36°23'05''$; $\beta \approx 84°36'55''$]

29. $a + b = 5{,}12$; $b - c = 2{,}24$; $\alpha = 48°34'55''$ [$a \approx 2{,}42$; $b \approx 2{,}70$; $c \approx 0{,}46$; $\beta \approx 123°13'44''$; $\gamma \approx 8°11'21''$]

Livello 3

30. Fornire una giustificazione geometrica del perché l'esercizio 25 non ha soluzioni. $\left[c < \frac{a+b}{2}\right]$

Lavoriamo insieme

Risolvere un triangolo di cui sono note le misure di due lati, 12 e 15, *e di un angolo*, 48°. *Considerare i vari casi in cui l'angolo è opposto a uno dei lati noti o compreso tra essi.*

- Se l'angolo è quello compreso dobbiamo usare il teorema di Carnot, ottenendo la misura del terzo lato:

$$\sqrt{12^2 + 15^2 - 2 \cdot 12 \cdot 15 \cdot cos(48°)} \approx 11{,}32$$

troviamo i rimanenti angoli usando ancora il teorema di Carnot:

$$x \approx cos^{-1}\left(\frac{15^2 + 11{,}32^2 - 12^2}{2 \cdot 15 \cdot 11{,}32}\right) \approx 51°59'11''; y \approx cos^{-1}\left(\frac{12^2 + 11{,}32^2 - 15^2}{2 \cdot 12 \cdot 11{,}32}\right) \approx 80°27''$$

- Invece se pensiamo che l'angolo di 48° non sia compreso fra i lati noti, ma opposto a uno dei due, usiamo il teorema dei seni: $\frac{12}{sin(48°)} = \frac{15}{sin(x)} \Rightarrow x \approx sin^{-1}\left(\frac{15 \cdot sin(48°)}{12}\right) \approx 68°16'8'' \Rightarrow y \approx 63°43'52'' \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{12}{sin(48°)} \approx \frac{x}{sin(63°43'52'')} \Rightarrow x \approx \frac{12 \cdot sin(63°43'52'')}{sin(48°)} \approx 14{,}48$. Poiché x è maggiore di 48°, abbiamo due soluzioni: $\frac{12}{sin(48°)} = \frac{15}{sin(x_2)} \Rightarrow x_2 \approx 180° - 116°16'18'' \Rightarrow y_2 \approx 15°43'52'' \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{12}{sin(48°)} \approx \frac{x_2}{sin(15°43'52'')} \Rightarrow x \approx \frac{12 \cdot sin(15°43'52'')}{sin(48°)} \approx 4{,}38$.

- Infine, l'ultimo caso: $\frac{12}{sin(x)} = \frac{15}{sin(48°)} \Rightarrow x \approx sin^{-1}\left(\frac{12 \cdot sin(48°)}{15}\right) \approx 36°28'41'' \Rightarrow y \approx 95°31'19'' \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{15}{sin(48°)} \approx \frac{x}{sin(95°31'19'')} \Rightarrow x \approx \frac{15 \cdot sin(95°31'19'')}{sin(48°)} \approx 20{,}09$. Stavolta la soluzione è unica perché il primo angolo trovato è minore di quello dato, 48°.

Risolvere un triangolo di cui sono note le misure di due lati e di un angolo. Considerare i vari casi in cui l'angolo è opposto a uno dei lati noti o compreso tra essi

Livello 3

31. $a = 5$; $b = 5$; $x = 45°$ [$\left(c = 5\cdot\sqrt{2}\right.$; $\alpha = \beta = 45°$; $\gamma = 90°$); $\left(c = 5\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}\right.$; $\alpha = \beta = 67°30'$; $\gamma = 45°$)]

32. $a = 4$; $b = 2$; $x = 30°$ [($c \approx 5,61$; $\alpha = 30°$; $\beta \approx 14°28'39''$; $\gamma \approx 135°31'21''$); $\left(c = 2\cdot\sqrt{3}\right.$; $\alpha = 90°$; $\beta = 30°$; $\gamma = 60°$); $\left(c = 2\cdot\sqrt{5-2\cdot\sqrt{3}}\right.$; $\alpha \approx 126°12'22''$; $\beta \approx 23°47'38''$; $\gamma = 30°$)]

33. $a = 3$; $b = 3$; $x = 60°$ [$c = 3$; $\alpha = \beta = \gamma = 60°$]

34. $a = 2,17$; $b = 3,17$; $x = 120°$ [$\varnothing$; ($c \approx 1,47$; $\alpha \approx 36°21'29''$; $\beta = 120°$; $\gamma \approx 23°38'31''$); ($c \approx 4,65$; $\alpha \approx 23°49'45''$; $\beta \approx 36°10'15''$; $\gamma = 120°$)]

35. $a = 1,23$; $b = 2,34$; $x = 150°$ [$\varnothing$; ($c \approx 1,19$; $\alpha \approx 15°14'15''$; $\beta = 150°$; $\gamma \approx 14°45'45''$); ($c \approx 3,46$; $\alpha \approx 10°14'15''$; $\beta \approx 19°45'45''$; $\gamma = 150°$)]

36. $a = 5,43$; $b = 5,43$; $x = 45°$ [($c \approx 4,16$; $\alpha = \beta \approx 67°30'$; $\gamma = 45°$); ($c \approx 7,68$; $\alpha = \beta = 45°$; $\gamma = 90°$)]

37. $a = 3,15$; $b = 4,17$; $x = 44°$ [($c \approx 4,24$; $\alpha = 44°$; $\beta \approx 66°52'1''$; $\gamma \approx 69°7'59''$) $\vee$ ($c \approx 1,76$; $\alpha = 44°$; $\beta \approx 113°7'59''$; $\gamma \approx 22°52'1''$); ($c \approx 5,82$; $\gamma \approx 104°20'57''$; $\beta = 44°$; $\alpha \approx 31°39'3''$); ($c \approx 2,90$; $\alpha \approx 48°58'16''$; $\beta \approx 87°1'44''$; $\gamma = 44°$)]

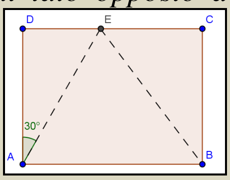
38. $a = 5,12$; $b = 5,12$; $x = 33°15'7''$ [($c \approx 8,56$; $\alpha = \beta = 33°15'7''$; $\gamma \approx 113°29'46''$); ($c \approx 2,93$; $\alpha = \beta \approx 73°22'27''$; $\gamma = 33°15'7''$)]

39. $a = 2,18$; $b = 4,36$; $x = 100°10'$ [$\varnothing$; ($c \approx 3,41$; $\alpha \approx 29°28'55''$; $\beta = 100°10'$; $\gamma \approx 50°21'5''$); ($c \approx 5,21$; $\alpha \approx 24°20'3''$; $\beta \approx 55°29'57''$; $\gamma = 100°10'$)]

40. $a = 8,11$; $b = 12,14$; $x = 25°3'4''$ [($c \approx 17,27$; $\alpha = 25°3'4''$; $\beta \approx 39°20'1''$; $\gamma \approx 115°36'55''$) $\vee$ ($c \approx 4,73$; $\alpha = 25°3'4''$; $\beta \approx 140°39'59''$; $\gamma \approx 14°16'57''$); ($c \approx 18,99$; $\alpha \approx 16°25'53''$; $\beta = 25°3'4''$; $\gamma \approx 138°31'3''$); ($c \approx 5,90$; $\alpha \approx 35°37'14''$; $\beta \approx 119°19'42''$; $\gamma = 25°3'4''$)]

Lavoriamo insieme

Dato un rettangolo di lati lunghi 3 *e* 4, *si consideri il triangolo che ha un lato coincidente con uno dei lati del rettangolo e il vertice opposto sul lato opposto dello stesso rettangolo. Determinare la misura del perimetro del triangolo AEB in figura,*



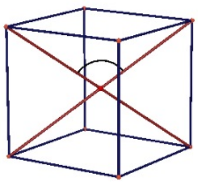
sapendo che l'angolo segnato misura 30°.

Facilmente possiamo ricavare la misura di AE: $\overline{AE} = \frac{\overline{AD}}{\cos(30°)} = \frac{3}{\sqrt{3}/2} = 2\cdot\sqrt{3}$. Per EB usiamo il teorema di Carnot: $\overline{EB} = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{AB}^2 - 2\cdot\overline{AE}\cdot\overline{AB}\cdot\cos(60°)} = \sqrt{12+16-2\cdot\cancel{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 4\cdot\frac{1}{\cancel{2}}} = \sqrt{28-8\cdot\sqrt{3}} = 2\cdot\sqrt{7-2\cdot\sqrt{3}}$.

Pertanto il perimetro richiesto è $4+2\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{7-2\cdot\sqrt{3}} \approx 11,22$.

Livello 2

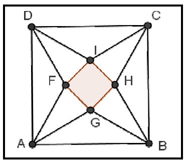
41. Calcolare la misura dell'angolo formato dalle diagonali del cubo in figura.[$\approx 70°31'44'' \vee \approx 109°28'16''$]



42. Consideriamo i triangoli di lati 8, 12, 18 e 12, 18, 27. Dopo avere determinato le misure degli angoli, spiegare come è possibile che i due triangoli nonostante abbiano due lati e tre angoli di uguale misura, sono diversi. [Perché ad angolo uguale non è opposto lato uguale]

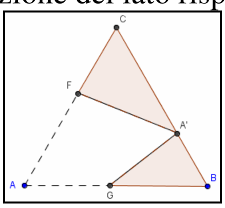
43. Con riferimento al problema risolto nel box lavoriamo insieme, determinare il perimetro di ABE se l'angolo è di 40°. [$\approx 11,26$]

44. Con riferimento al problema precedente, se AD è lungo 5, l'angolo è di 27° e il perimetro di ADE è 15,37, quanto misura AB? [2 soluzioni: $\approx 1,78$; $\approx 4,98$]

45. Di un triangolo ABC si sa che l'area misura 19 cm^2, che l'angolo di vertice A misura 51° ed il lato BC misura 13 cm, determinare la misura dei rimanenti lati. [≈ 3,3 cm; ≈ 14,82 cm]
46. Determinare il perimetro del triangolo di cui sono note la somma di due lati, 11, l'area, 8, e la misura dell'angolo compreso dai due lati, 41°53′. [≈ 17,11]
47. Di un triangolo ABC si sa che l'area è 15 cm^2, che l'angolo di vertice B misura 70° ed il lato AC misura 12 cm, determinare le misure degli angoli interni. [≈ 97°17'44"; 70°; ≈ 12°42'13"]
48. Determinare il perimetro del triangolo di cui sono note la differenza di due lati, 8, l'area, 21, e la misura dell'angolo compreso dai due lati, 48°27′. [≈ 27,07]
49. Di un triangolo si sa che l'area misura 17,45 cm^2, e due lati misurano 13,12 cm e 8,47cm. Determinare le misure degli angoli interni. [≈ 18°18′14″; ≈ 27°38′41″; ≈ 134°3′5″]
50. Provare, usando il teorema di Carnot, che il segmento che unisce i punti medi di due lati di un triangolo, b e c, misura quanto metà del terzo lato. $\left[\frac{1}{2}\cdot\sqrt{b^2+c^2-2bc\cdot cos(\alpha)}\right]$
51. In un triangolo PQR i lati PQ e PR, la mediana PM misurano, in cm, rispettivamente 4,31; 5,17 e 2,75. Determinare la misura di QR. [≈ 7,77]
52. Su una semicirconferenza di centro O e diametro AB lungo 4,76, considerare il punto M in modo che sia $M\hat{A}B = 56°29'$. Tracciato il raggio OP parallelo ad AM, determinare la misura di MP. [≈ 2,23]
53. Su ciascuno dei lati di un triangolo equilatero ABC si sceglie un punto in modo che si abbia $\overline{CD} = 0,7\,cm; \overline{EB} = 0,62\,cm; \overline{FB} = 0,86\,cm$. 

Determinare la misura del perimetro di ABC sapendo che quello del triangolo DEF è 2,76 cm. [≈ 5,60 cm]
54. In figura $ABCD$ è un quadrato di lato 1, i segmenti, a coppie, trisecano gli angoli retti. Dopo avere dimostrato che $FGHI$ è un quadrato, determinarne il perimetro. Quindi determinare la misura del lato del quadrato maggiore se il lato del quadrato minore è 1. $\left[\frac{6\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{6}}{3};\frac{\sqrt{6}+3\cdot\sqrt{2}}{2}\right]$
55. La diagonale di un rettangolo è lunga 2 cm, uno degli angoli formati dalle diagonali è di 45°. Determinare la misura dei lati del rettangolo. $\left[\sqrt{2\pm\sqrt{2}}\ cm\right]$

Livello 3

56. Risolvere il problema precedente per dati generici: $AB = 2r$ e $M\hat{A}B = \alpha$. $\left[r\cdot\sqrt{2\cdot[1-cos(\alpha)]}\right]$
57. In un triangolo ABC tre numeri che differiscono fra loro di una unità forniscono le misure dei lati, un angolo misura 54°13′27″, determinare il perimetro in tutti i casi possibili. [≈ 12,98; ≈ 50,18]
58. Di un triangolo ABC si sa che i lati stanno fra loro come i numeri 13, 15 e 16. Se l'area è 102 cm^2, determinare il perimetro. [≈ 46,53 cm]
59. Un triangolo ABC è tale che la sua area è uguale a $\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$. Sapendo che l'angolo C è acuto, calcolare la sua misura. [≈ 75°57′50″]
60. Determinare l'area di un triangolo in cui un lato misura 10 e due angoli 43° e 71°. Considerare le diverse possibilità, a seconda della posizione del lato rispetto agli angoli dati. [≈ 32,95; ≈35,29; ≈ 63,33]
61. Il triangolo equilatero ABC in figura, 

è stato piegato in modo che il suo vertice A appartenga al lato BC. Se $\overline{BA'} = 1, \overline{A'C} = 2$, quanto è lungo FG? $\left[\frac{7\cdot\sqrt{21}}{20}\right]$
62. Di un triangolo ABC si sa che i lati AB e AC e l'area sono misurati da tre numeri che differiscono fra loro, sapendo che il lato BC misura 25, determinare area e perimetro. [≈ 14,05; ≈ 50,10]

63. Nel triangolo *ABC* si ha $\overline{BC} = 9,74; \angle C\hat{B}A = 43,54°; \angle A\hat{C}B = 29,68°$, determinare la misura della mediana *AD* [≈ 3,68]

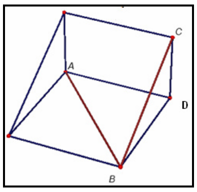
64. Determinare una relazione fra il lato *c*, la mediana a esso relativa, *m*, e gli altri lati *a* e *b*. $\left[\sqrt{2 \cdot \left(a^2 + b^2 - 2m^2\right)}\right]$

65. Esternamente ai lati del triangolo rettangolo *ABC*, di ipotenusa *BC* e di cateti lunghi 3 e 4, si costruiscano i triangoli equilateri *ACD*, *ABF* e *BEC*. Dopo aver mostrato che i segmenti *AE*, *BD* e *CF* sono uguali, calcolarne la misura. $\left[\sqrt{25 + 12 \cdot \sqrt{3}}\right]$

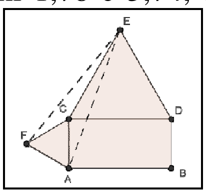
66. Risolvere il problema precedente con cateti lunghi *a* e *b*. $\left[3 \cdot \sqrt{a^2 + ab \cdot \sqrt{3} + b^2}\right]$

67. Tre cerchi di raggi lunghi 1,15; 1,45 e 1,74 sono tangenti a due a due. Determinare le misure degli angoli formati dalle congiungenti i centri. [≈ 70°49′30″; ≈ 58°50′11″; ≈ 50°20′19″]

68. Di un triangolo *ABC* si sa che i lati *AB* e *AC* sono uno quadruplo dell'altro e l'area è il quadrato del lato minore. Sapendo che il lato *BC* misura $\left(17 - 4 \cdot \sqrt{3}\right) cm$, determinare la misura dell'area. [1 cm^2]

69. Nel poliedro in figura, 

la base è un rettangolo di lati *BD* e *AD,* lunghi rispettivamente 5,7 *cm* e 5,4 *cm*; *CD* è lungo 3,3 *cm* ed è perpendicolare alla base, determinare la misura di $A\hat{B}C$.
[≈ 51°4′42″]

70. Su due lati consecutivi di un rettangolo, lunghi 1,78 e 3,74, ed esternamente ad essi, costruiamo un triangolo equilatero, come mostrato in figura, 

determinare area e perimetro del triangolo *AEF*. [≈ 12,49; ≈ 4,70]

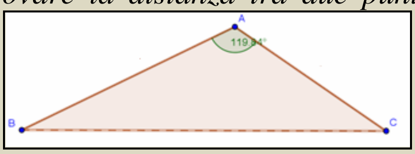
71. Il centro della circonferenza inscritta in un triangolo rettangolo dista dagli estremi dell'ipotenusa, 1 e 2. Determinare la misura dell'ipotenusa. *Suggerimento*: tenere conto che l'incentro è punto d'incontro delle bisettrici. $\left[\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}\right]$

72. Risolvere il problema precedente con *a* e *b* distanze dall'incentro agli estremi dell'ipotenusa. $\left[\sqrt{a^2 + b^2 + ab\sqrt{2}}\right]$

73. Il centro della circonferenza inscritta in un triangolo dista dagli estremi di un lato, 1 e 2. Determinare la misura del lato sapendo che l'angolo a esso opposto è di 120°. $\left[\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}\right]$

74. Risolvere il problema precedente con *a* e *b* distanze dall'incentro agli estremi del lato e α la misura dell'angolo opposto. $\left[\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$

Lavoriamo insieme

Risolvere il problema di trovare la distanza tra due punti inaccessibili, per esempio due punti su due opposte sponde di un fiume. 

Supponiamo che vi sia un punto da cui sono accessibili entrambi i punti, nella figura lo indichiamo con *A*.

Abbiamo misurato le distanze AB = 5, 57 ed AC = 4,32, nonché l'angolo A = 119,84°. Adesso applichiamo il teorema di Carnot per ricavare quanto richiesto: $\overline{BC} = \sqrt{5,57^2 + 4,32^2 - 2 \cdot 5,57 \cdot 4,32 \cdot cos(119,84°)} \approx 8,58$.

Livello 2

75. La torre di controllo di un aeroporto determina le distanze di due aerei in atterraggio, 7 *Km* e 11 *Km*. Se l'angolo che le congiungenti la torre con gli aerei è di 23°15′12″, quanto distano gli aerei fra di loro? [≈ 5,34 *Km*]
76. Una nave lascia il porto alle 4:00 viaggiando a una velocità costante di 25 *Km*/*h*, dopo 75 minuti varia la rotta di un angolo di 35°17′15″. Quanto dista dal porto alle 7:00? [≈ 25,67 *Km*]
77. Un villeggiante cammina in linea retta per 1320 *m*, quindi svolta di un certo angolo α e cammina sempre in linea retta per altri 1750 *m*. Sapendo che in questo modo dista 2470 *m* dal punto di partenza vogliamo sapere il valore approssimato di α. [≈ 106°17′28″]
78. Due amici partono dallo stesso punto, viaggiando in linea retta. Il primo con un angolo di 53° verso Nord viaggia alla velocità di 60 *Km*/*h*, il secondo con un angolo di 38° verso Sud alla velocità di 72 *Km*/*h*. Quanto disteranno due ore dopo la loro partenza? [≈ 189,05 *Km*]
79. Il quadrilatero *ABCD* è inscritto in una circonferenza, sapendo che tre lati consecutivi misurano rispettivamente 3, 4 e 5 *cm* e l'angolo compreso fra i primi due lati è di 132°, determinare il perimetro del quadrilatero. [≈ 20,6 *cm*]
80. Il quadrilatero *ABCD* è inscritto in una circonferenza, sapendo che tre lati consecutivi misurano rispettivamente 5, 3 e 7 *cm* e l'angolo compreso fra gli ultimi due lati è di 101,13°, determinare l'area del quadrilatero. [≈ 28,6 cm^2]

Livello 3

81. Nel quadrilatero *BCDE* le diagonali *BD* e *CE* si incontrano in *F*, se le misure di *FB*, *FE*, *DF*, *CF* e *BE* in *cm* sono rispettivamente 3,27; 2,2; 3,33; 4,93 e 2,15**;** determinare la misura di *DE*. Uno dei dati non è necessario, quale? [≈ 5,2 *cm*; *CF*]
82. Un uomo cammina per 547 metri in linea retta, quindi varia la direzione ruotando di 73°41′12″ in verso orario e cammina per altri 321 metri, infine percorre altri 812 metri rimettendosi in una direzione parallela a quella iniziale. Quanto distano in linea d'aria i punti iniziale e finale del cammino? [dipende dal verso dell'ultimo tratto: ≈ 470 *m* ∨ ≈ 1306 *m*]
83. Risolvere il problema precedente per dati generici, *a*, *b* e *c* rispettivamente e l'angolo α. $\left[\sqrt{(c-a)^2 + b^2 + 2b \cdot (c-a) \cdot cos(\alpha)}\right]$
84. Determinare quanto deve misurare il lato del decagono regolare in funzione dello spigolo ℓ di un dodecaedro regolare, in modo che dividendo lo spigolo in 3 parti uguali si ottenga un poliedro semiregolare. Si ha: $cos(108°) = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$. $\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \ell\right]$

Lavoriamo insieme

Verificare se $\frac{a}{b \cdot c} + \frac{cos(\alpha)}{a} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2 \cdot a \cdot b \cdot c}$ (1) *è un'identità in un generico triangolo.*

Lavoriamo sul primo membro: $\frac{a}{b \cdot c} + \frac{cos(\alpha)}{a} = \frac{a^2 + b \cdot c \cdot cos(\alpha)}{a \cdot b \cdot c} = \frac{2a^2 + 2 \cdot b \cdot c \cdot cos(\alpha)}{2 \cdot a \cdot b \cdot c}$

Adesso sostituiamo al numeratore del secondo addendo della (1) l'espressione ottenuta con il Teorema di Carnot: $\frac{2a^2 + b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot a \cdot b \cdot c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2 \cdot a \cdot b \cdot c}$. Quindi in effetti abbiamo un'identità.

Verificare se le seguenti sono identità in un triangolo qualsiasi

Livello 1

85. $sin(\gamma) = sin(\alpha + \beta)$; $cos(\gamma) = cos(\alpha + \beta)$; $a^2 = (b - c)^2 + 2bc \cdot [1 - cos(\alpha)]$ [Sì ; No ; Sì]

86. $ac = \dfrac{b^2 \cdot sin(\alpha) \cdot sin(\gamma)}{sin^2(\beta)}$; $sin^2(\beta) - sin^2(\alpha) + sin^2(\gamma) = 2 \cdot sin(\beta) \cdot sin(\gamma) \cdot cos(\alpha)$ [Sì ; Sì]

87. Con riferimento all'esercizio svolto nel box Lavoriamo insieme, come diventa l'identità se il triangolo è rettangolo di ipotenusa b? $\left[\dfrac{a}{b \cdot c} + \dfrac{cos(\alpha)}{a} = \dfrac{b}{a \cdot c}\right]$

88. $sin(\alpha) = sin(\beta) \cdot cos(\gamma) + sin(\gamma) \cdot cos(\beta)$ (Usare il teorema delle proiezioni) [Sì]

89. $cos(\alpha) = sin(\beta) \cdot sin(\gamma) - cos(\beta) \cdot cos(\gamma)$ [Sì]

Livello 2

90. $[1 - cos(\alpha)] \cdot [1 + cos(\alpha) + 2sin(\beta) \cdot sin(\gamma)] = [sin(\beta) - sin(\gamma)]^2$ [Sì]

91. $b + c = a \cdot \dfrac{cos(\beta) + cos(\gamma)}{1 - cos(\alpha)}$; $b \cdot [sin(\alpha) - sin(\beta) \cdot cos(\gamma)] = c \cdot sin(\beta) \cdot cos(\beta)$ [Sì ; Sì]

92. $a + b + c = (a + c) \cdot cos(\beta) + (b + c) \cdot cos(\alpha) + (a + b) \cdot cos(\gamma)$ [Sì]

93. $a + b - c = (c - b) \cdot cos(\alpha) + (c - a) \cdot cos(\beta) + (a - b) \cdot cos(\gamma)$ [No]

94. $a \cdot [sin(\beta) - sin(\gamma)] + b \cdot [sin(\gamma) - sin(\alpha)] + c \cdot [sin(\alpha) - sin(\beta)] = 0$ [Sì]

Lavoriamo insieme

Determinare la misura delle mediane del triangolo di lati lunghi 5, 6 e 7.

Usiamo il Teorema 19: $\sqrt{\dfrac{2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 7^2 - 5^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{145}}{2}$; $\sqrt{\dfrac{2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 7^2 - 6^2}{4}} = 2 \cdot \sqrt{7}$; $\sqrt{\dfrac{2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 6^2 - 7^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{73}}{2}$.

Possiamo usare lo stesso risultato per provare che la mediana relativa all'ipotenusa di un triangolo rettangolo misura quanto metà dell'ipotenusa. Infatti abbiamo, usando il teorema di Pitagora:

$$m_a = \sqrt{\frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}} = \sqrt{\frac{2a^2 - a^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}$$

Livello 2

95. Determinare le misure delle mediane di un triangolo equilatero di lato ℓ, usando il Teorema 19. $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ell\right]$

96. Determinare le misure delle mediane di un triangolo isoscele in cui la base è metà del lato obliquo lungo ℓ. $\left[\dfrac{\sqrt{15}}{4}\ell; \dfrac{\sqrt{6}}{4}\ell; \dfrac{\sqrt{6}}{4}\ell\right]$

97. Determinare le misure delle mediane di un triangolo i cui lati differiscono di una unità, in funzione del lato medio lato ℓ. $\left[\dfrac{\sqrt{3\ell^2 - 6\ell + 1}}{2}; \dfrac{\sqrt{3\ell^2 + 6\ell + 1}}{2}; \dfrac{\sqrt{3\ell^2 + 4}}{2}\right]$

98. Determinare le misure delle mediane di un triangolo i cui lati stanno fra loro nel rapporto 1:2:4. [Impossibile un triangolo del genere non esiste]

99. Determinare le misure delle mediane di un triangolo i cui lati stanno fra loro nel rapporto 2: 3: 4 in funzione del rapporto di proporzionalità ℓ. $\left[\dfrac{\sqrt{10}}{2}\ell; \dfrac{\sqrt{46}}{2}\ell; \dfrac{\sqrt{31}}{2}\ell\right]$

100. Determinare la misura del diametro della circonferenza circoscritta a un triangolo di lati a, b, c. $\left[\dfrac{4abc}{\sqrt{4bc - (b^2 + c^2 - a^2)}}\right]$

Lavoriamo insieme

Di un triangolo conosciamo la misura di due mediane, 5,25 *e* 6,61 *e del lato che non si riferisce a nessuna delle mediane note*, 7,54. *Trovare le misure dei lati incogniti.*

Impostiamo il seguente sistema: $\begin{cases} \dfrac{2\cdot 7,54^2+2\cdot b^2-c^2}{4}=5,25^2 \\ \dfrac{2\cdot 7,54^2+2\cdot c^2-b^2}{4}=6,61^2 \end{cases}$. Per semplificare i calcoli poniamo $b^2 = x$, $c^2 = y$, ottenendo il sistema lineare seguente: $\begin{cases} 113,703+2x-y=4\cdot 27,5625 \\ 113,703+2y-x=4\cdot 46,6921 \end{cases}$, che andiamo a risolvere: $\begin{cases} y=2x+3,453 \\ 3x=54,158 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\approx 39,56 \\ x\approx 18,05 \end{cases} \Rightarrow \ \Rightarrow \begin{cases} c\approx\sqrt{39,56}\approx 6,05 \\ b\approx\sqrt{18,05}\approx 4,25 \end{cases}$.

Determinare i valori incogniti, tenuto conto che m_a, m_b, m_c, sono le mediane relative ai lati a, b, c

Livello 3

101. (a = 4,82; b = 6,62; m_c = 4,13; c = ?) ; (a = 3,56; c = 6,48; m_b = 2,70; b = ?) [≈ 8,12 ; ≈ 8,95]
102. (a = 3,72; b = 3,77; m_b = 3,67; c = ?) ; (b = 5,55; c = 5,04; m_b = 2,98; a = ?) [≈ 4,50 ; ≈ 2,79]
103. a = 4,63; m_c = 5,77; m_b = 2,41; b = ?, c = ? [b ≈ 7,32; c ≈ 4,12]
104. c = 6,04; m_a = 3,99; m_b = 5,64; a = ?, b = ? [a ≈ 5,75; b ≈ 3,45]
105. a = 6,07; m_a = 3,37; m_b = 5,33; b = ?, c = ? [b ≈ 3,76; c ≈ 5,20]
106. b = 5,11; m_a = 2,93; m_b = 3,58; a = ?, c = ? [a ≈ 5,64; c ≈ 2,63]
107. m_a = 3,38; m_b = 5,58; m_c = 6,28; a = ?; b = ?; c = ? [a ≈ 7,59; b ≈ 5,60; c ≈ 4,51]
108. m_a = 4,17; m_b = 5,88; m_c = 7,78; a = ?; b = ?; c = ? [a ≈ 8,76; b ≈ 7,34; c ≈ 4,39]

Determinare i valori incogniti, tenuto conto che h_a, h_b, h_c, sono le altezze relative ai lati a, b, c

109. a = 10,19; m_a = 3,93; h_a = 3,72; b = ?, c = ? [b ≈ 5,33; c ≈ 7,37]
110. 2p = 24,16; b = 5,24; m_c = 4,63; a = ? c = ? [a ≈ 8,41; c ≈ 10,51]
111. 2p = 17,31; b = 6,13; m_b = 4,72; a = ? c = ? [a ≈ 4,94; c ≈ 6,24; i valori sono scambiabili]
112. 2p = 20,11; c = 4,51; m_b = 5,16; a = ? b = ? [a ≈ 7,91; b ≈ 7,69]
113. 2p = 23,16; m_c = 8,66; m_b = 5,48; a = ?, b = ?, c = ? [a ≈ 8,77;b ≈ 9,28; c ≈ 5,11]
114. b = 8,54; m_a = 4,86; h_a = 4,39; a = ?, c = ? [a ≈ 10,48; c ≈ 5,41]
115. a = 13,05; h_a = 4,63; α = 88°27′; b = ?, c = ? [b ≈ 4,95; c ≈ 12,21; i risultati sono scambiabili]
116. a = 5,20; m_a = 5,37; α = 45°21′36″; b = ?, c = ? [b ≈ 7,23; c ≈ 4,34]

Lavoriamo insieme

Verificare le formule del Teorema di Brahmagupta per un quadrato, che è un quadrilatero ciclico.

Le diagonali dovrebbero misurare, in termini del lato: $x^2=\dfrac{(\ell\cdot\ell+\ell\cdot\ell)\cdot(\ell\cdot\ell+\ell\cdot\ell)}{\ell\cdot\ell+\ell\cdot\ell}=\dfrac{4\ell^4}{2\ell^2}=2\ell^2\Rightarrow x=\sqrt{2}\ell$.

Analogo risultato si ha per l'altra diagonale.

Risolvere i seguenti problemi usando le formule stabilite dal Teorema di Brahmagupta

Livello 2

117. Mostrare che il teorema di Brahmagupta non funziona per un rombo non quadrato.
118. Trovare la misura delle diagonali di un rettangolo in funzione dei lati, a e b. $\left[\sqrt{a^2+b^2}\right]$
119. Determinare l'area di un rettangolo.
120. Determinare l'area di un trapezio isoscele
121. Trovare la misura delle diagonali del quadrilatero ciclico di lati lunghi 1,21; 5,18; 3,79; 3,97. [≈ 4,68; ≈ 5,37]
122. Determinare l'area del quadrilatero dell'esercizio precedente. [≈ 10,65]

123. Trovare la misura delle diagonali di un trapezio isoscele in funzione delle misure delle basi, a e b, e del lato obliquo c. $\left[\sqrt{a\cdot b+c^2}\right]$

124. Determinare l'area del quadrilatero dell'esercizio precedente, in funzione dei lati. $\left[\dfrac{(a+b)\cdot\sqrt{-a^2+2ab-b^2+4c^2}}{4}\right]$

Livello 3

125. Trovare la misura del perimetro del quadrilatero ciclico in cui tre lati adiacenti sono lunghi 4,01; 3,97; 3,29 e la diagonale che parte dall'estremo comune ai primi due lati è di 4,95. [≈ 13,87]

126. Con il teorema di Brahmagupta, trovare l'area del quadrilatero dell'esercizio precedente. [≈ 11,71]

127. Verificare che il teorema di Brahmagupta non si può applicare ai rombi non quadrati. [L'area dovrebbe essere pari al quadrato del lato]

128. Verificare che il teorema di Brahmagupta non si può applicare ai trapezi rettangoli. Considerare il trapezio di basi lunghe 2,20 e 3,98, e lato obliquo lungo 2,44. [Valore corretto dell'area ≈ 5,16; con la formula di Brahmagupta: ≈ 5,68]

129. Di un parallelogramma conosciamo le misure dei lati, 7,19 e 5,23 e di una delle diagonali, 11,53. Trovare le misure dell'altra diagonale e degli angoli interni. [≈ 135°46′21″; ≈ 44°13′39″; ≈ 5,02]

130. Trovare una formula generale per risolvere il problema precedente in termini dei lati a e b e della diagonale c. $\left[\cos^{-1}\left(\dfrac{b^2+a^2-c^2}{2\cdot a\cdot b}\right);\sqrt{a^2+b^2+2\cdot a\cdot b\cdot \cos(\alpha)}\right]$

131. Determinare le misure dei lati di un parallelogramma le cui diagonali misurano 8,39 e 15,83 e in cui uno degli angoli che esse formano è di 116°58′12″. [≈ 10,51; ≈ 7,08]

132. Trovare una formula generale per risolvere il problema precedente in termini delle diagonali a e b e dell'angolo α. $\left[\dfrac{\sqrt{a^2+b^2\pm 2\cdot a\cdot b\cdot \cos(\alpha)}}{2}\right]$

L'angolo delle correzioni

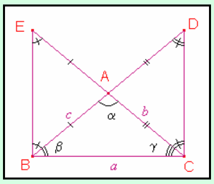
Trovare gli errori nelle seguenti "dimostrazioni"

1. Poiché $\sin(45°) = \cos(45°)$, $\tan(45°) = 1$, abbiamo

$$1+\sin(45°)-\cos(45°)=\tan(45°)\Rightarrow 1+\sin(45°)-\cos(45°)=\frac{\sin(45°)}{\cos(45°)}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cos(45°)+\sin(45°)\cdot\cos(45°)-\cos^2(45°)=\sin(45°)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cos(45°)\cdot\left[\cancel{\sin(45°)-\cos(45°)}\right]=\cancel{\sin(45°)-\cos(45°)}\Rightarrow \cos(45°)=1$$

$$\cos^2(180°)=1-\sin^2(180°)\Rightarrow\sqrt{\cos^2(180°)}=\sqrt{1-\sin^2(180°)}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cos(180°)=\sqrt{1-\sin^2(180°)}\Rightarrow -1=1$$

2. La seguente è una dimostrazione sbagliata del fatto che *Tutti i triangoli sono equiangoli*. Spiegare dove sta l'errore. Con riferimento alla figura,



estendiamo AC e AB in modo che si abbia $\overline{AD}=\overline{AC};\overline{AE}=\overline{AB}$. Abbiamo: $B\hat{A}E=180°-\gamma-\beta-E\hat{B}A\Rightarrow B\hat{A}E+E\hat{B}A=180°-\gamma-\beta\Rightarrow$ $\Rightarrow 2\cdot B\hat{A}E=\alpha\Rightarrow B\hat{A}E=\dfrac{\alpha}{2}\Rightarrow C\hat{B}E=\beta+\dfrac{\alpha}{2}$. Allo stesso modo avremo anche $C\hat{D}B=\dfrac{\alpha}{2};B\hat{C}D=\gamma+\dfrac{\alpha}{2}$.

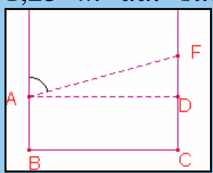
Applichiamo il teorema dei seni al triangolo *BEC*: $\dfrac{b+c}{sin\left(\beta+\dfrac{\alpha}{2}\right)}=\dfrac{a}{sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}$ e al triangolo *BCD*: $\dfrac{b+c}{sin\left(\gamma+\dfrac{\alpha}{2}\right)}=\dfrac{a}{sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}$. Quindi avremo: $\dfrac{b+c}{sin\left(\beta+\dfrac{\alpha}{2}\right)}=\dfrac{b+c}{sin\left(\gamma+\dfrac{\alpha}{2}\right)}\Rightarrow sin\left(\beta+\dfrac{\alpha}{2}\right)=sin\left(\gamma+\dfrac{\alpha}{2}\right)\Rightarrow\beta=\gamma$. Se estendiamo i lati *AB* e *CB*, ripetendo quanto visto dimostreremo anche che $\alpha = \gamma$, quindi il triangolo è equiangolo.

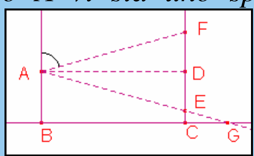
L'angolo di Microsoft Mathematics

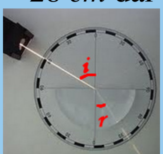
Per vedere come usare il software per lo studio dei triangoli con la trigonometria cliccare su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%207/7-1-1.exe

L'angolo della MateFisica

Innumerevoli sono le applicazioni della goniometria alla fisica.

- Ovviamente nella determinazione della direzione di un vettore piano: $\boldsymbol{v} \equiv (v_x;\ v_y)$, che forma con il semiasse positivo delle ascisse l'angolo $\alpha=tan^{-1}\left(\dfrac{v_y}{v_x}\right)$.
- Nella definizione di prodotto scalare ($\left|v_1\cdot v_2\right|=\left|v_1\right|\cdot\left|v_2\right|\cdot cos\left(\widehat{v_1v_2}\right)$) e prodotto vettoriale di due vettori: $\left|v_1\times v_2\right|=\left|v_1\right|\cdot\left|v_2\right|\cdot sin\left(\widehat{v_1v_2}\right)$. Essi vengono usati fra l'altro nella definizione di *lavoro di una forza* e di *flusso di un campo vettoriale*.
- Vi sono applicazioni anche nella riflessione negli specchi piani. Consideriamo il seguente quesito. *Da una fessura posta a* 2,18 *m dal suolo, passa un raggio di sole che va a formare con la parete opposta un angolo di* 75°12′45″ *a circa* 1,23 *m dal suolo. Vogliamo sapere quanto distano le due pareti.* Schematizziamo come in figura. 

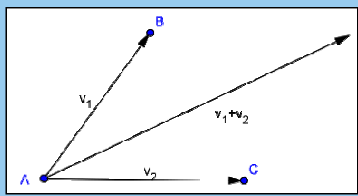
Vogliamo determinare la misura di *AD*, o di *BC* che è lo stesso. Abbiamo allora: $\overline{AD}=\overline{FD}\cdot cot\left(90°-75°12'45''\right)=(2,18-1,23)\,m\cdot tan\left(75°12'45''\right)\approx 3,60\,m$. *Adesso supponiamo che nel punto A vi sia uno specchio. Dove andrà a finire il raggio riflesso?* Consideriamo il disegno seguente. 

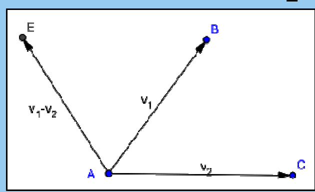
Come si vede il raggio si riflette in modo che *AE* sia simmetrico di *AF* rispetto ad *AD*, quindi, *FD* e *DE* sono uguali. Dato che *FD* è lungo 0,95 *m*, allora *FE* è lungo 1,90 *m* pertanto il raggio riflesso va a finire sulla stessa parete della fessura a (2,18 – 1,90) *m* = 28 *cm* dal suolo.
- 

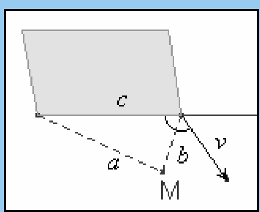
Sempre in ottica ricordiamo la cosiddetta legge di Snell–Descartes che riguarda il passaggio di un raggio di luce da un mezzo a un altro non opaco né riflettente (ovvero che permetta il passaggio del raggio). Esso quindi muta la sua velocità poiché trova un diverso ostacolo e pertanto devia la direzione, secondo la relazione: $\dfrac{sin\left(\hat{i}\right)}{sin\left(\hat{r}\right)}=\dfrac{n_2}{n_1}$, in cui $\hat{i}$ è l'angolo detto di incidenza, che il raggio di partenza forma con la perpendicolare alla linea di separazione dei due mezzi, $\hat{r}$ è l'angolo detto di rifrazione, che il raggio deviato forma con la stessa perpendicolare. n_1 e n_2 invece sono i cosiddetti indici di rifrazione nei due mezzi, ossia il rapporto fra la velocità *c* della luce nel vuoto e la velocità della luce nel mezzo. Essendo *c* il massimo valore possibile gli indici di rifrazione sono sempre non inferiori a 1. Così se per esempio volessimo trovare l'angolo $\hat{r}$, sapendo che $\hat{i}$ = 30°, n_1 = 1, n_2 = 1,4, basta applicare la legge citata: $\frac{sin(\hat{i})}{sin(\hat{r})} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow sin(\hat{r}) = \frac{n_1}{n_2} \cdot sin(\hat{i}) \Rightarrow \hat{r} = sin^{-1}\left(\frac{n_1}{n_2} \cdot sin(\hat{i})\right); sin^{-1}\left(\frac{1}{1,4} \cdot sin(30°)\right) \approx 20°55'29''$.

- Ricordiamo anche il cosiddetto angolo limite, ossia quell'angolo il cui valore è $\theta = sin^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right), n_2 < n_1$, che fa sì che quando la luce passa da un mezzo più rifrangente a uno meno rifrangente, superato questo valore non si ha più rifrazione, ma il mezzo si comporta come uno specchio anche se non lo è. Per esempio nel caso del passaggio della luce dall'acqua pura ($n_1 \approx 1,33$), all'aria ($n_2 \approx 1,0$), l'angolo limite è $\theta = sin^{-1}\left(\frac{1}{1,33}\right) \approx 48,8°$.

Attività

1. Dati due vettori $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$, che formano un angolo α, 

determinare l'intensità del vettore somma $\vec{v_1} + \vec{v_2}$. $\left[\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2 \cdot v_1 \cdot v_2 \cdot cos(\alpha)}\right]$
2. Dati due vettori $\vec{v_1}$ > $\vec{v_2}$, che formano un angolo α, 

determinare l'intensità del vettore differenza $\vec{v_1} - \vec{v_2}$. $\left[\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2 \cdot v_1 \cdot v_2 \cdot cos(\alpha)}\right]$
3. In figura 

un raggio di sole si muove lungo la direzione v alla velocità di 2 *cm* al minuto. In quanto tempo il sole raggiungerà la posizione M in cui è ferma una mosca, sapendo che a = 57 *cm*, b = 25 *cm*, c = 60 *cm* e l'angolo misura 125°? [≈ 14,43 minuti]

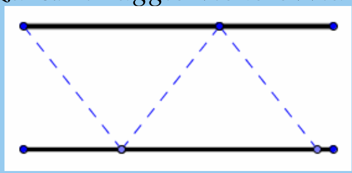
Problema modello *Un raggio passa da un mezzo di indice di rifrazione a uno di indice di rifrazione b. L'angolo di incidenza è ampio* α*, quello di rifrazione è ampio* β*. Risolvi i seguenti quesiti*

4. (*a* = 1; *b* = 1,23; α = 45°; β = ?) ; (*a* = 1,32; *b* = 1,12; α = 60°; β = ?) [≈ 5°5'29'' ; ∅]
5. (*a* =1,32; *b* = 1,12; α = 30°; β = ?) ; (*a* = 1,37; *b* = 1,05; α = ?; β = 45°) [β ≈ 6°6'23'' ; α ≈ 2°48'58'']
6. (*a* = 1,26; *b* = 1,39; α = ?; β = 30°) ; (*a* = 1; *b* = ?; α = 60°; β = 45°) ; (*a* = 1; *b* = ?; α = 45°, β = 60°) [α ≈ 3°28′34″; *b* ≈ 1,22; ∅]
7. Passando da un mezzo di indice n_1 a uno di indice $n_2 > n_1$, in che relazione sono gli angoli di incidenza e di rifrazione? [$i > r$]
8. Passando da un mezzo di indice *n*1 a uno di indice $n_2 < n_1$, in che relazione sono gli angoli di incidenza e di rifrazione? [$i < r$]
9. Se un raggio arriva perpendicolarmente a una superficie, quanto vale l'angolo di rifrazione? [Non vi è rifrazione, il raggio viene riflesso]
10. Calcolare l'angolo limite per un raggio di luce che passa dal diamante (indice 2,419) all'acqua (indice 1,33). [θ ≈ 33°21'15'']

Problema modello *Da una fessura posta a d dal suolo, passa un raggio di sole che va a formare con la parete opposta che si trova a una distanza* ℓ *da essa, un angolo di misura* α*, a circa h dal suolo*

11. $d = 2,47\ m$; $\alpha = 68°15'31''$; $h = 1,49\ m$; $\ell = ?$ [$\ell \approx 2,46\ m$]
12. $d = 4,12\ m$; $h = 1,49\ m$; $\ell = 5,12\ m$; $\alpha = ?$ [$\alpha \approx 62°48'42''$]
13. $\alpha = 63°25'28''$; $h = 1,52\ m$; $\ell = 3,85\ m$; $d = ?$ [$d \approx 3,45\ m$]
14. $\alpha = 68°17'42''$; $d = 2,19\ m$; $\ell = 4,12\ m$; $h = ?$ [$h \approx 0,55\ m$]
15. Alessio nota che da un buco della tenda della finestra della sua cameretta entra un raggio di sole che colpisce la parete opposta a 1,35 m dal suolo. Più tardi nota che il raggio colpisce la parete a 1,15 m dal suolo. Se sappiamo che le due pareti opposte distano 3,75 m e il buco è a 1,98 m dal suolo, vogliamo sapere di quanto varia l'angolo che il raggio di sole forma con la parete opposta. [$\alpha \approx 2°56'37''$]
16. Con riferimento al problema precedente, se il raggio di luce colpisce uno specchio posto a 1,48 m dal suolo, con un'inclinazione di $62°1'42''$, a quale distanza dalla parete opposta si rifletterà sul pavimento? [$\approx 2,81\ m$]

Problema modello *Due specchi uguali, larghi* ℓ*, sono posti uno di fronte all'altro a una distanza d. Da un'estremità di uno degli specchi facciamo partire un raggio laser che va a formare con lo specchio opposto un angolo di ampiezza* α*. Il raggio viene ovviamente riflesso sull'altro specchio e così via, per un*



totale di n volte

17. $\ell = 6,14\ m$; $d = 1,11\ m$; $\alpha = 23°41'5''$; $n = ?$ [2]
18. $\ell = 6,14\ m$; $d = 1,11\ m$; $n = 5$; $\alpha = ?$ [$42°6'39'' < \alpha < 47°19'34''$]
19. $\ell = 6,14\ m$; $\alpha = 23°41'5''$; $n = 5$; $d = ?$ [$0,45\ m < d < 0,54\ m$]
20. $n = 5$; $d = 1,11\ m$; $\alpha = 23°41'5''$; $\ell = ?$ [$12,65\ m < \ell < 15,18\ m$]
21. $\alpha = 23°41'5''$; $3 \le n \le 7$; $= d/\ell = ?$ $\left[0,05 < d/\ell < 0,22\right]$

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi

1. Provare che il prodotto delle misure delle due parti in cui l'ortocentro divide ciascuna altezza di un triangolo acutangolo è costante. Determinarla in funzione degli angoli interni e del raggio R della circonferenza circoscritta. [$4R^2 \cdot cos(\alpha) \cdot cos(\beta) \cdot cos(\gamma)$]
2. Calcolare le misure delle altezze di un triangolo ottusangolo ABC di angolo ottuso α.
$\left[\overline{AD} = 2R\cdot\left[cos(\beta)\cdot cos(\gamma) - cos(\alpha)\right]; \overline{BE} = 2R\cdot\left[cos(\beta) - cos(\alpha)\cdot cos(\gamma)\right]; \overline{CF} = 2R\cdot\left[cos(\gamma) - cos(\beta)\cdot cos(\alpha)\right]\right]$
3. Tenuto conto dell'esercizio precedente, provare che il prodotto delle misure delle due parti in cui l'ortocentro divide ciascuna altezza di un triangolo acutangolo è costante.
[Il prodotto costante è $-4R^2 \cdot cos(\alpha) \cdot cos(\beta) \cdot cos(\gamma)$]
4. Provare che se in un triangolo si ha: $b \cdot cos(\beta) = c \cdot cos(\gamma)$, allora il triangolo è isoscele di base a o rettangolo di ipotenusa a.
5. Provare che in un qualsiasi triangolo, l'area è data da $\dfrac{a^2 \cdot sin(\beta)\cdot sin(\gamma)}{2\cdot sin(\alpha)}$.
6. Trovare una relazione fra le misure del raggio della circonferenza inscritta e quello della circonferenza circoscritta a uno stesso triangolo. $\left[r = 2\cdot R\cdot\dfrac{sin(\alpha)\cdot sin(\beta)\cdot sin(\gamma)}{sin(\alpha)+sin(\beta)+sin(\gamma)}\right]$
7. Determinare il rapporto fra le misure del raggio della circonferenza inscritta e quello della circonferenza circoscritta a un triangolo rettangolo. $\left[\dfrac{2\cdot sin(\beta)\cdot cos(\beta)}{1+sin(\beta)+cos(\beta)} = \dfrac{2\cdot sin(\gamma)\cdot cos(\gamma)}{1+sin(\gamma)+cos(\gamma)}\right]$

8. Determinare la misura dell'area di un triangolo isoscele in funzione della misura del raggio r della circonferenza in esso inscritta e di uno degli angoli alla base, α. $\left[r^2 \cdot \dfrac{\left[1+cos(\alpha)\right]^2}{sin(\alpha)\cdot cos(\alpha)}\right]$

9. Per determinare la distanza fra due punti P e Q separati da un crepaccio, si scelgono due altri punti, A e B, dalla parte del punto accessibile Q e se ne misura la distanza, sia 3,89. Quindi si misurano gli angoli $P\hat{A}B = 73°30'; A\hat{B}P = 47°51'36"; A\hat{B}Q = 22°9'36"$. Quanto misura PQ? [≈ 5,26]

10. Risolvere il precedente problema con dati generici: $\overline{AB} = c, P\hat{A}B = \alpha; A\hat{B}P = \beta; A\hat{B}Q = \gamma$.
$\left[c \cdot \left(\dfrac{sin(\beta)}{sin(\alpha+\beta)} + \dfrac{sin(\gamma)}{sin(\alpha-\gamma)}\right)\right]$

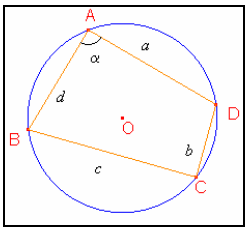
11. Usando il teorema dei seni dimostrare il cosiddetto Teorema della Bisettrice: *In un triangolo la bisettrice di un angolo interno divide il lato a essa opposto in parti proporzionali ai rimanenti lati.*

12. Determinare la misura del perimetro di un triangolo isoscele in funzione della misura del raggio r della circonferenza in esso inscritta e di uno degli angoli alla base, α. $\left[2r \cdot \dfrac{\left[1+cos(\alpha)\right]^2}{sin(\alpha)\cdot cos(\alpha)}\right]$

13. Tenuto conto degli esercizi precedenti, determinare una relazione fra area, perimetro e raggio della circonferenza inscritta. [$S = p \cdot r$]

14. Determinare le misure dell'area e del perimetro di un triangolo isoscele in cui il raggio della circonferenza in esso inscritta misura 2 e l'angolo al vertice misura 120°. $\left[S = 2p = \dfrac{4\cdot\left(12+7\cdot\sqrt{3}\right)}{3}\right]$

15. Il fatto che, nell'esercizio precedente, area e perimetro abbiano lo stesso valore numerico dipende dalla misura dell'angolo, o da altro? [Dal fatto che r = 2]

16. Provare che in un quadrilatero ciclico, 

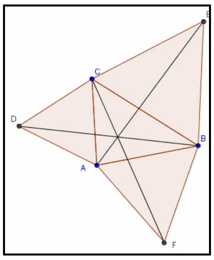
cioè inscrivibile in una circonferenza, l'area si calcola con la formula: $\dfrac{a^2-b^2-c^2+d^2}{4}\cdot tan(\alpha)$.

17. La formula precedente non ha senso per certi quadrilateri ciclici. Quali? [I rettangoli]

18. Determinare la misura del raggio della circonferenza inscritta in un triangolo isoscele di area 2,15 e angolo alla base di 37°12′45″. [≈ 0,57]

19. Determinare la misura del raggio della circonferenza inscritta in un triangolo isoscele di perimetro 5,67 e angolo alla base di 42°43′44″. [≈ 0,47]

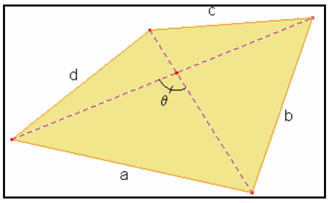
20. Dopo avere trovato l'area del quadrilatero ciclico di lati lunghi 4,95; 7,15; 6,14 e 5,63; determinare la misura degli angoli interni. [≈ 34,95; ≈ 103°8′12″; ≈ 87°26′55″; ≈ 92°33′5″; ≈ 76°51′48″]

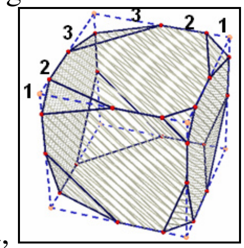
21. All'esterno dei lati di un generico triangolo, si costruiscano tre triangoli equilateri, come in figura. 
Dopo aver mostrato che i segmenti AE, BD e CF sono uguali, calcolarne la misura.
$\left[\sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot cos(\gamma+60°)}+\sqrt{a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot cos(\beta+60°)}+\sqrt{b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot cos(\alpha+60°)}\right]$

22. Semplificare la precedente soluzione, trovando una relazione fra lati e angoli dei triangoli.

$$\left[\begin{array}{l}3\cdot\sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot cos(\gamma+60°)}=3\cdot\sqrt{a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot cos(\beta+60°)}=\\=3\cdot\sqrt{b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot cos(\alpha+60°)}\end{array}\right]$$

23. Provare che in un qualsiasi quadrilatero, l'area è $\dfrac{\left|b^2+d^2-a^2-c^2\right|}{4}\cdot tan(\theta)$,(riferimento alla figura).



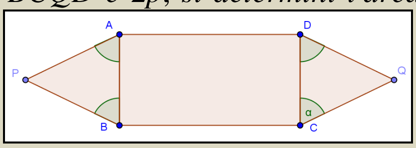
24. In effetti la formula precedente non ha senso per certi quadrilateri. Quali? [Quelli con le diagonali perpendicolari]
25. Determinare l'area del quadrilatero di lati lunghi 7; 7,20; 6,57 e 8,16 e in cui di uno degli angoli formati dalle diagonali misura 80°52′48″. [≈ 40,90]
26. Con riferimento al precedente esercizio, verificare che cambiando l'ordine in cui si susseguono i lati cambia anche il risultato. [Si ottengono ≈ 13,88 e ≈ 32,06]
27. Determinare le misure degli angoli interni del quadrilatero i cui lati sono, nell'ordine, 7,82; 7,02; 5,40; 12,50 e l'angolo formato dai primi due lati è di 121°. [≈ 82°9′13″; ≈ 104°38′18″; ≈ 52°12′29″]
28. Risolvere il problema precedente per raggi generici: r_1, r_2, r_3. $\left[cos^{-1}\left(\dfrac{(r_1+r_2)^2+(r_2+r_3)^2-(r_1+r_3)^2}{2\cdot(r_1+r_2)\cdot(r_2+r_3)}\right);...\right]$
29. Da un vertice di un certo triangolo tracciamo l'altezza, la bisettrice dell'angolo e la mediana. Se così facendo abbiamo diviso l'angolo in quattro parti uguali, determinare la misura dell'angolo. [90°]
30. Su ogni spigolo di un cubo scegliamo i punti che li dividono in 3 parti, in modo che misurino 1*cm*, 2*cm* e 3 *cm*,  quindi uniamo tali punti ottenendo il poliedro convesso in figura. Quanto misura la sua area? $\left[\dfrac{9\cdot\sqrt{11}+3\cdot\sqrt{19}+10\cdot\sqrt{3}-24}{2}\right]$

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato al Liceo scientifico dell'a.s. 1979/80. *Sui lati opposti AB e CD del rettangolo ABCD ed esternamente ad esso si costruiscano due triangoli isosceli APB e CQD aventi gli angoli alla base di ampiezza* α. *Sapendo che il perimetro dell'esagono APBCQD è 2p, si determini l'area*



dell'esagono in funzione di α *e della lunghezza del lato* $\overline{AB}=2x$.
Ovviamente i triangoli sono uguali. L'altezza relativa ad *AB* misura $x\cdot tan(\alpha)$, quindi l'area di ciascuno dei

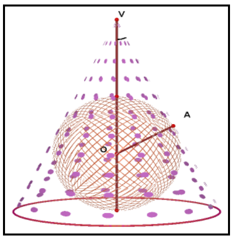
triangoli misura 1/2 · $2x \cdot x \cdot tan(\alpha) = x^2 \cdot tan(\alpha)$. I lati obliqui invece misurano $\frac{x}{cos(\alpha)}$. Pertanto il perimetro dell'esagono soddisfa l'uguaglianza, indicando con y la misura dei lati AD e BC: $\frac{4x}{cos(\alpha)}+2y=2p$, quindi i detti lati misurano: $y=p-\frac{2x}{cos(\alpha)}$. Perciò l'area del rettangolo misura: $2x\cdot\left(p-\frac{2x}{cos(\alpha)}\right)$. Infine l'area dell'esagono misura:

$$2x^2\cdot tan(\alpha)+2x\cdot\left(p-\frac{2x}{cos(\alpha)}\right)=2x\cdot\frac{x\cdot sin(\alpha)+p\cdot cos(\alpha)-2x}{cos(\alpha)}.$$

1. (Liceo scientifico suppletiva 1970/71) Dato un cono circolare retto inscritto in una sfera di raggio r, esprimere la sua superficie totale in funzione della semiapertura x del cono. Suggerimento: si determini la sezione ottenuta con un piano per il vertice e perpendicolare alla base del cono.
[$4\pi r^2 \cdot (-sin^4(2x) - sin^3(2x) + sin^2(x) + sin(x))$]

2. (Liceo scientifico 1971/72) Esprimere il volume di un cono circoscritto a una sfera di raggio r, in funzione dell'angolo di apertura del cono, $2x$. Suggerimento: si determini la sezione ottenuta con un piano per il vertice e perpendicolare alla base del cono. $\left[\frac{\pi}{3}r^3\cdot\frac{[1+sin(x)]^2}{sin(x)\cdot[1-sin(x)]^2}\right]$

3. (Liceo scientifico 1971/72) Data una circonferenza di diametro $\overline{AB}=2r$, si prendano su di essa, da parte opposta di AB due punti C e D tali che $\angle A\hat{B}C=60°, \angle B\hat{A}D=\alpha$. Determinare $\frac{\overline{AD}^2-\overline{CD}^2}{\overline{BC}^2}$.
[$4\,cos^2(\alpha) - 4\,sin^2(150° - \alpha)$]

4. (Liceo scientifico 1971/72) Determinare il volume di un cono circoscritto a una sfera di raggio r in funzione di r e dell'angolo in figura.  $\left[\pi\cdot r^3\cdot\frac{[sin(\alpha)+1]^3}{3\cdot sin(\alpha)\cdot cos^2(\alpha)}\right]$

5. (Liceo scientifico 1974/75) Si conduca internamente a un angolo retto $A\hat{O}B$ una semiretta OC che forma con OA un angolo $A\hat{O}C = x$; presi rispettivamente su OA e OB due punti M e N tali che $\overline{OM}=1, \overline{ON}=\sqrt{3}$, siano M' e N' le rispettive proiezioni di M e N su OC. Detto P il punto medio di $M'N'$ si esprima in funzione di x l'area del triangolo NOP. $\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot cos(x)\cdot\left[cos(x)+\sqrt{3}sin(x)\right]\right]$

6. (Liceo scientifico suppletiva 1974/75) Assegnato un riferimento cartesiano xOy, si consideri la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$. Detto AB l'arco di essa contenuto nel I quadrante, sia P un punto su tale arco, Q il punto di intersezione della retta tangente alla circonferenza per P con l'asse delle ascisse e S quello di intersezione della retta OP con la retta di equazione $y = 2$. Esprimere in funzione dell'angolo $Q\hat{O}P = x$, l'area del triangolo QPS. $\left[\frac{2-sin(x)}{2cos(x)}\right]$

7. (Liceo scientifico suppletiva 1974/75) In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB}=2r$, si conduca una corda AC tale che $C\hat{A}B=2x$. Detto D il punto medio dell'arco BC, esprimere in funzione di x l'area del quadrilatero $ABCD$. [$2r^2 \cdot sin(x) \cdot cos(x) \cdot (1 + cos(2x))$]

8. (Liceo scientifico suppletiva 1976/77) Dato l'angolo $a\hat{O}b = \gamma$, si fissino alla semiretta *Ob* i punti *P* e *Q* tali che $\overline{OP} = 1, \overline{OQ} = 2$; preso sulla semiretta *Oa* un punto *A*, si esprima il rapporto $y = \dfrac{\overline{AP}^2 - \overline{AQ}^2}{\overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2}$ mediante la misura di *OA* = *x*. $\left[y = \dfrac{-3 + 2x \cdot cos(\gamma)}{5 + 2x^2 - 6x \cdot cos(\gamma)}\right]$

9. (Liceo scientifico 1976/77) I tre punti *A*, *B C*, non allineati, sono vertici di un triangolo *ABC* i cui lati *BC* e *CA* sono lunghi rispettivamente *a*, *b*. Detto $A\hat{C}B = \gamma$, esprimere mediante esso la somma dei quadrati delle altezze del triangolo relative ai lati *BC* e *CA*, diminuita del quadrato del lato *AB*. $[cos(\gamma) \cdot (2ab - (a^2 + b^2) \cdot cos(\gamma))]$

10. (Liceo scientifico 1978/79) Data una circonferenza di raggio *r* e l'angolo al centro $A\hat{O}B$,si costruisca sulla corda *AB*, da parte opposta ripeto al centro *O*, il triangolo isoscele *ABC* avente per base *AB* e per altezza $\overline{CH} = 2k \cdot \overline{AB}$. Esprimere l'area del quadrilatero *OACB* in funzione del valore della misura dell'angolo $A\hat{O}B = 2x$. $[r^2 \cdot sin^2(x) \cdot (4k \cdot sin(x) + cos(x))]$

11. (Liceo scientifico 1980/81) In un sistema di assi cartesiani ortogonali si scrivano le equazioni delle due circonferenze passanti per l'origine *O* e aventi centri rispettivamente in $C' \equiv (2; 0)$ e $C'' \equiv \left(-\dfrac{1}{2};0\right)$. Condotte per il punto *O* due rette mutuamente ortogonali, delle quali la prima incontra le due circonferenze, oltre che nel punto *O*, nei punti *A* e *B* rispettivamente e la seconda nei punti *C* e *D*, esprimere l'area del quadrilatero *ACBD* mediante $\angle A\hat{O}C' = \alpha$. $\left[\dfrac{25}{4} \cdot sin(2\alpha), 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right]$

12. (Liceo scientifico suppletiva 1980/81) In una circonferenza di raggio *r* si consideri la corda *AB* che dista *r*/2 dal centro. Si prenda sul maggiore degli archi $\widehat{AB}$ il punto *C*, e si prolunghi *AC* di un segmento *CD* tale che sia $\overline{CD} = \overline{AC}$. Si esprima l'area del triangolo *CDB* mediante $\angle B\hat{A}C = x,\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

$$\left[\frac{r^2}{2} \cdot sin(x) \cdot \left[3 \cdot cos(x) + \sqrt{3} \cdot sin(x)\right]\right]$$

13. (Liceo scientifico 1983/84) Si consideri una circonferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ e si conduca per il punto *A*, perpendicolarmente al piano della stessa circonferenza, il segmento $\overline{AP} = a$. Se *MN* è una corda della circonferenza, perpendicolare ad *AB*, si esprima il volume della piramide *PAMN* mediante $\angle M\hat{A}N = 2x$. $[4r^2\ sin(x)\ cos^3(x),\ 0 < x < \pi/2]$

14. (Liceo scientifico suppletiva 1983/84) Dato il triangolo rettangolo isoscele *ABC* con $\angle\hat{A} = 90°,\ \overline{AB} = a$, si conduca per *C* una retta non secante il triangolo. Esprimere la somma delle perpendicolari *AM* e *BN* condotte su di essa mediante $\angle A\hat{C}M = x$. $[a \cdot (2sin(x) + cos(x)),\ 0 \le x \le 135°]$

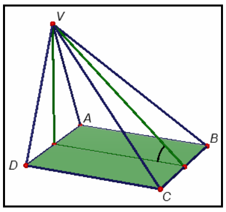
15. (Liceo scientifico 1984/85) In una circonferenza di centro *O* e raggio unitario si conduca la corda *AB* e si costruisca il triangolo equilatero *ABC* da parte opposta di *O* rispetto ad *AB*. Esprimere l'area del quadrilatero *ABCO* mediante $\angle A\hat{O}B = x$. $\left[\sqrt{3} \cdot sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{1}{2} \cdot sin(x)\right]$

16. (Liceo scientifico suppletiva 1991/92) In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ inscrivere il triangolo *ABD* retto in *D*. Tracciare la bisettrice dell'angolo $D\hat{A}B$: tale bisettrice intersechi il segmento *BD* in *E*. Indicato con *x* l'angolo $B\hat{A}E$, determinare il rapporto *y* tra la lunghezza del segmento *BE* e la lunghezza del segmento *BD*: $y = \dfrac{\overline{BE}}{\overline{BD}}$. $\left[y = \dfrac{1}{2\ \ cos^2(x)}\right]$

17. (Liceo scientifico 1991/92) Data una circonferenza γ di raggio unitario e centro *O*, tracciare una semiretta s uscente da *O* ed intersecante γ in un punto *Q*. Indicato con *P* un generico punto di s esterno alla

circonferenza γ, tracciare da esso le due tangenti alla circonferenza: siano *A* e *B* i punti di tangenza. Indicata con *x* la lunghezza del segmento *PQ*, trovare $\frac{\overline{AQ}+\overline{QB}}{\overline{AB}}$. $\left[\sqrt{\frac{2\cdot(x+1)}{x+2}}\right]$

18. (Liceo scientifico 1997/98) Un cateto di un triangolo rettangolo è lungo 2*a*, dove *a* è una lunghezza nota, e l'angolo acuto adiacente ad esso ha coseno uguale a 4/5. Condotta per il vertice dell'angolo retto una retta t che non attraversa il triangolo e indicata con *x* la misura dell'angolo che questa retta forma col cateto maggiore, esprimere in funzione di *x* il volume *V*(*x*) del solido generato dal triangolo quando compie una rotazione completa intorno alla retta *t*. $\left[V(x)=\frac{\pi\cdot a^3}{2}\cdot\left[4\cdot sin(x)+3\cdot cos(x)\right]\right]$

19. (Liceo scientifico 1999/2000) Il rettangolo *ABCD* è tale che la retta che congiunge i punti medi dei suoi lati più lunghi, *AB* e *CD*, lo divide in due rettangoli simili a quello dato. Tali lati hanno lunghezza assegnata *a*. a) Determinare la lunghezza dei lati minori del rettangolo. b) Sulla retta condotta perpendicolarmente al piano del rettangolo nel punto medio del lato *AD* prendere un punto *V* in modo che il piano dei punti *V*, *B*, *C* formi col piano del rettangolo dato un angolo di coseno $\frac{2}{\sqrt{13}}$. Calcolare il volume della piramide di vertice *V* e base *ABCD*. 

c) Condotto il piano α parallelo al piano della faccia *VAD* della piramide, ad una distanza *x* da questo, in modo però che α sechi la piramide stessa, esprimere in funzione di *x* l'area del poligono sezione. d) Calcolare infine i volumi delle due parti in cui il piano α divide la piramide nel caso in cui *x* = *a*/2.
$\left[\text{a) }\overline{AD}=\overline{BC}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a;\text{ b) }\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot a^3;\text{ c) }\frac{3\cdot\sqrt{2}}{8}\cdot\left(a^2-x^2\right);\text{ d)}\frac{11\cdot\sqrt{2}}{64}\cdot a^3;\frac{5\cdot\sqrt{2}}{64}\cdot a^3\right]$

20. (Liceo scientifico 2001/02) Si considerino le lunghezze seguenti: *a* + 2*x*, *a* − *x*, 2*a* − *x*, (1) dove *a* è una lunghezza nota non nulla ed *x* è una lunghezza incognita. a) Determinare per quali valori di *x* le lunghezze (1) si possono considerare quelle dei lati di un triangolo non degenere. b) Verificato che per *x* = *a*/4 le (1) rappresentano le lunghezze dei lati di un triangolo, descriverne la costruzione geometrica con riga e compasso e stabilire se si tratta di un triangolo rettangolo, acutangolo o ottusangolo. c) Indicato con *ABC* il triangolo di cui al precedente punto, in modo che *BC* sia il lato maggiore, si conduca per A la retta perpendicolare al piano del triangolo e si prenda su di essa un punto *D* tale che *AD* sia lungo a: calcolare un valore approssimato a meno di un grado (sessagesimale) dell'ampiezza dell'angolo formato dai due piani *DBC* e *ABC*. $\left[\text{a) }0<x<\frac{a}{2};\text{b) Ottusangolo; c) }\approx 57°\right]$

21. (Liceo scientifico 2002/03) Un triangolo ha due lati e l'angolo da essi compreso che misurano rispettivamente *a, b* e δ. Quale è il valore di δ che massimizza l'area del triangolo? [90°]

22. (Liceo scientifico 2002/03) Dal punto *A*, al quale è possibile accedere, è visibile il punto *B*, al quale però non si può accedere in alcun modo, così da impedire una misura diretta della distanza *AB*. Dal punto A si può però accedere al punto *P*, dal quale, oltre ad *A*, è visibile *B* in modo che, pur rimanendo impossibile misurare direttamente la distanza *PB*, è tuttavia possibile misurare la distanza *AP*. Disponendo degli strumenti di misura necessari e sapendo che *P* non è allineato con *A* e *B*, spiegare come si può utilizzare il teorema dei seni per calcolare la distanza *AB*. $\left[\overline{AB}=\frac{\overline{AP}\cdot sin\left(B\hat{A}P\right)}{sin\left(B\hat{A}P+A\hat{P}B\right)}\right]$

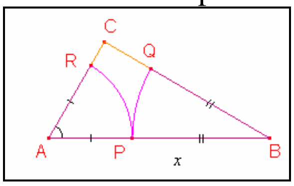
23. (Liceo scientifico 2003/04) Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare *sen*18°, *sen*36°. $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{4};\frac{10-2\cdot\sqrt{5}}{4}\right]$

24. (Liceo scientifico 2004/05) ABC è un triangolo rettangolo di ipotenusa $BC = 2a$. Determinate il volume del cono K ottenuto dalla rotazione di ABC attorno ad AC, in funzione di $A\hat{B}C = x$. Quindi trovare la misura approssimata in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare che risulta dallo sviluppo piano della superficie laterale del cono K. $\left[V = \frac{8}{3}a^3\pi \cdot sin(x) \cdot cos^2(x); \approx 293°56'20''\right]$

25. (Liceo scientifico 2004/05) Si considerino i triangoli la cui base è $AB = 1$ e il cui vertice C varia in modo che l'angolo $C\hat{A}B$ si mantenga doppio dell'angolo $A\hat{B}C$. Si provi che se $\angle A\hat{B}C = 36°$ allora è $\overline{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

26. (Liceo scientifico 2004/05) Si calcoli, senza l'aiuto della calcolatrice, $sin^2(35°) + sin^2(55°)$, ove le misure degli angoli sono in gradi sessagesimali. [1]

27. (Liceo scientifico 2006/07) Le misure dei lati di un triangolo sono 40, 60 e 80 cm. Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo, approssimandole in gradi e primi sessagesimali. [≈ 104°29′, 46°34′, 28°57′]

28. (Liceo scientifico 2007/08) Il triangolo rettangolo ABC ha l'ipotenusa $AB = a$ e l'angolo $C\widehat{A}B = 60°$. Si descriva, internamente al triangolo, con centro in B e raggio x, l'arco di circonferenza di estremi P e Q rispettivamente su AB e su BC. Sia poi R l'intersezione con il cateto CA dell'arco di circonferenza di centro A e raggio AP. 

Si specifichino le limitazioni da imporre ad x affinché la costruzione sia realizzabile. a) Si esprima in funzione di x l'area S del quadrilatero mistilineo $PQCR$ e si trovi quale sia il valore minimo e quale il valore massimo di $S(x)$. (*Si trova l'equazione di una parabola, quindi minimo e massimo sono …*) b) Tra i rettangoli con un lato su AB e i vertici sul lato opposto su ciascuno dei due cateti si determini quello di area massima.

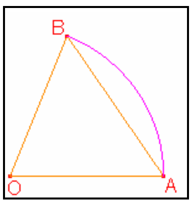
$$\left[\frac{1}{2}a \le x \le \frac{\sqrt{3}}{2}a; a) \min = \frac{\pi \cdot \left(8 \cdot \sqrt{3} - 17\right) + 6 \cdot \sqrt{3}}{48} \cdot a^2; Max = \frac{9 \cdot \sqrt{3} - 4\pi}{72} \cdot a^2;\ b) S_{Max} = \frac{3 \cdot \left(8a - \sqrt{3}\right)}{256}\right]$$

29. (Liceo scientifico 2007/08) Secondo il codice della strada il segnale di "salita ripida" (fig. a lato) 

preavverte di un tratto di strada con pendenza tale da costituire pericolo. La pendenza vi è espressa in percentuale e nell'esempio è 10%. Se si sta realizzando una strada rettilinea che, con un percorso di 1,2 *Km*, supera un dislivello di 85 *m*, qual è la sua inclinazione (in gradi sessagesimali)? Quale la percentuale da riportare sul segnale? [≈ 4°3′43″; 7%]

30. (Liceo scientifico PNI 2007/08) Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si considerino i triangoli ABC con $A \equiv (1; 0)$, $B \equiv (3; 0)$ e C variabile sulla retta $y = 2x$. Si provi che i punti (1; 2) e $\left(\frac{3}{5}; \frac{6}{5}\right)$ corrispondono alle due sole posizioni di C per cui è $\angle A\hat{C}B = 45°$.

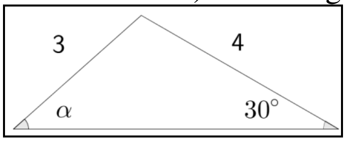
31. (Liceo scientifico PNI 2007/08) I lati di un parallelepipedo rettangolo misurano 8, 9 e 12 *cm*. Si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'ampiezza dell'angolo che la diagonale mandata da un vertice fa con ciascuno dei tre spigoli concorrenti al vertice. [≈ 61°55′39″; ≈ 58°2′3″; ≈ 45°5′57″]

32. (Liceo scientifico 2008/09) È assegnato il settore circolare AOB di raggio r e ampiezza x (r e x sono misurati, rispettivamente, in *metri* e *radianti*). 

Si provi che l'area S compresa fra l'arco e la corda AB è espressa, in funzione di x, da $S(x) = \frac{1}{2}r^2\left(x - sin(x)\right)$, con $x \in [0; 2\pi]$.

33. (Liceo scientifico 2011/2012) E' dato un tetraedro regolare di spigolo l e altezza h. Si determini l'ampiezza dell'angolo α formato da l e da h. [≈ 35°15′52″]

34. (Liceo scientifico 2012/2013) Un triangolo ha area 3 e due lati che misurano 2 e 3. Qual è la misura del terzo lato? Si giustifichi la risposta. $\left[\sqrt{13}\right]$

35. (Liceo scientifico 2013/2014) Nel triangolo disegnato a lato, qual è la misura, in gradi e primi sessagesimali, di α? 

[≈ 41°48′37″]

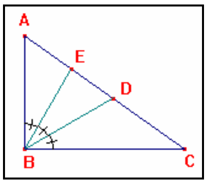
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.

A = Giochi della rivista Abacus
AMC = American Mathematical Contest
HSMC = University High School Mathematics Contest
NC = State Matematical Finals of North Carolina
V = Vermont High School Prize
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
B = Giochi della Bocconi
MT = Mathematics Teacher, rivista della NCTM
RICE = Rice University Mathematics Tournament

Lavoriamo insieme

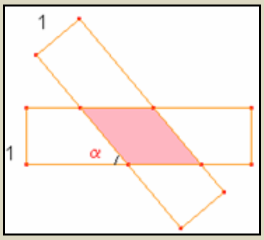
Consideriamo un problema assegnato agli HSMC nel 2007. *I lati a, b, c di un triangolo soddisfano la catena di disuguaglianze*: $0 \le a \le 1 \le b \le 2 \le c \le 3$. *Trovare la massima area per triangoli del genere.*
L'area di un triangolo si trova 1/2 · $a \cdot b$ · $sin(x)$, dove x è l'angolo compreso fra a e b. Il massimo si ha ovviamente per x = 90° e i lati hanno il loro massimo valore, cioè a = 1 e b = 2. Quindi l'area massima è 1.

1. (AHSME 1964) Dato il triangolo ABC i cui lati misurano 4, 5 e 6. Sul lato AB, che misura 5, costruiamo un altro triangolo ABD in modo che $\overline{AD} = 7{,}5$ e $\angle B\hat{A}D = \angle B\hat{C}A$. Determinare BD. [6,25]
2. (AHSME 1964) In un triangolo PQR i lati PQ e PR misurano 4 e 7, la mediana PM misura 3,5. Determinare la misura di QR. [9]
3. (AHSME 1967) Nel quadrilatero $ABCD$ le diagonali AC e BD si incontrano nel punto O. Sapendo che $\overline{BO} = 4, \overline{OD} = 6, \overline{AO} = 8, \overline{OC} = 3, \overline{AB} = 6$ determinare la misura di AD. $\left[\sqrt{166}\right]$
4. (AHSME 1980) In figura il triangolo ABC è rettangolo, 

EB e DB trisecano l'angolo retto. Se $\overline{BE} = sin(x)$ e $\overline{BD} = cos(x)$, con $0 < x < \frac{\pi}{2}$, determinare l'ipotenusa AC. $\left[\frac{3\cdot\sqrt{5}}{5}\right]$
5. (AHSME 1981) I lati di un triangolo verificano l'uguaglianza: $(a + b + c) \cdot (a + b - c) = 3ab$, determinare la misura di γ. [60°]
6. (AHSME 1982) I lati di un triangolo sono misurati da numeri interi consecutivi, l'angolo maggiore è doppio del minore, determinare la misura del coseno dell'angolo minore. [0,75]

Lavoriamo insieme

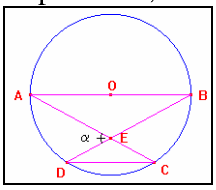
Consideriamo un problema assegnato agli HSMC nel 2004.

Due strisce rettangolari uguali, si sovrappongono come mostrato. 

Esprimere l'area da essi racchiusa in funzione dell'angolo segnato.

L'area cercata è quella di un parallelogramma ed è perciò il prodotto della misura di un lato per la relativa altezza. Scegliendo la base b la cui altezza è 1, vale la relazione: $1 = b \cdot sin(\alpha) \Rightarrow b = \frac{1}{sin(\alpha)} = csc(\alpha)$.

Questo numero misura ovviamente anche l'area, essendo l'altezza unitaria.

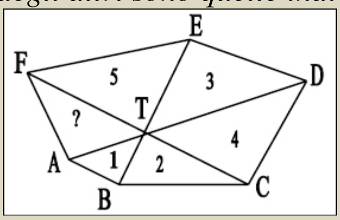
7. (AHSME 1986) In figura AB è un diametro, CD è una corda a esso parallela, determinare il rapporto 

fra le aree dei triangoli CED e AED, in funzione della misura di α. [$cos^2(\alpha)$]
8. (AHSME 1989) Nel triangolo ABC si ha: $\overline{AB} = 5, \overline{BC} = 7, \overline{AC} = 9$. Scegliamo un punto D su AC in modo tale che sia $\overline{BD} = 5$. Quanto vale il rapporto in cui viene diviso il segmento AC da D? [19/8]
9. (AHSME 1996) Un esagono inscritto in un cerchio ha tre lati consecutivi di uguale misura, 3, e gli altri tre consecutivi ognuno di misura 5. La corda del cerchio che divide l'esagono in due trapezi, uno con tre lati ognuno lungo 3 e l'altro con tre lati ognuno lungo 5, misura m/n, con m e n numeri naturali primi tra di loro. Determinare $m + n$. (Sugg. Usare il teorema di Carnot per determinare in due diversi modi il segmento che unisce due vertici dell'esagono separati da un terzo vertice). [409]
10. (AHSME 1998) Quanti triangoli di vertici in (–5; 0), (5; 0), e ($5cos(\theta)$; $5sin(\theta)$) hanno area 10 per qualche angolo θ? [4]
11. (AHSME 1998) Nel quadrilatero $ABCD$, si ha che l'angolo A è di 120°, gli angoli B e D sono retti, $\overline{AB} = 13, \overline{AD} = 46$. Trovare la misura di AC. [62]
12. (AHSME 1998) Nel triangolo ABC, l'angolo C è retto e $CB > CA$. Il punto D appartiene a BC in modo che sia $\angle C\hat{A}D = 2 \cdot \angle D\hat{A}B$. Se $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{2}{3}$, allora $\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} = \frac{m}{n}$, con m e n numeri interi relativamente primi. Determinare $m + n$. [14]

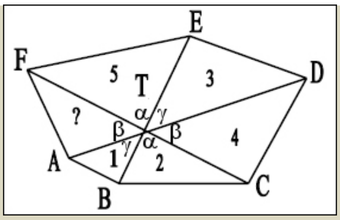
Lavoriamo insieme

Vediamo un questo assegnato ai giochi Kangourou del 2001.

Le diagonali AD, BE, CF di un esagono convesso ABCDEF passano tutte per uno stesso punto T. Quanto vale l'area del triangolo FAT, se le aree degli altri sono quelle indicate in figura?



Indichiamo con dei simboli gli angoli formati dalle diagonali con vertici in T. Calcoliamo le aree dei



triangoli sfruttando la proprietà del seno degli angoli indicati. $\overline{FT}\cdot\overline{ET}\cdot sin(\alpha)=10; \overline{DT}\cdot\overline{ET}\cdot sin(\gamma)=6;\ \overline{DT}\cdot\overline{CT}\cdot sin(\beta)=8;\ \overline{CT}\cdot\overline{BT}\cdot sin(\alpha)=4; \overline{BT}\cdot\overline{AT}\cdot sin(\gamma)=2$.

Possiamo anche scrivere: $\frac{1}{2}\overline{AT}\cdot\overline{FT}\cdot sin(\beta)=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\overline{BT}\cdot sin(\gamma)}\cdot\frac{10}{\overline{ET}\cdot sin(\alpha)}\cdot sin(\beta)=$

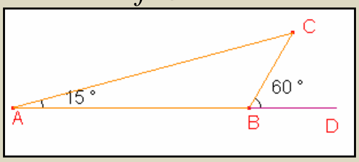
$$=\frac{1}{\frac{4}{\overline{CT}\cdot\cancel{sin(\alpha)}}\cdot\cancel{sin(\gamma)}}\cdot\frac{\cancel{10}^{5}}{\frac{\cancel{6}^{3}}{\overline{DT}\cdot\cancel{sin(\gamma)}}\cdot\cancel{sin(\alpha)}}\cdot sin(\beta)=\frac{5\cdot\overline{CT}\cdot\overline{DT}\cdot sin(\beta)}{12}=\frac{5\cdot\cancel{8}^{2}}{\cancel{12}^{3}}=\frac{10}{3}$$

13. (AHSME 1999) Nel triangolo ABC si ha $3sin(\alpha) + 4cos(\beta) = 6$, $4sin(\beta) + 3cos(\alpha) = 1$. Determinare la misura di $\hat{C}$. [30°]
14. (AMC 2000) Un cerchio centrato nell'origine e di raggio unitario, contiene il punto A. Il segmento AB è tangente al cerchio in A e $A\hat{O}B=\theta$. Se il punto C appartiene ad OA e BC biseca $A\hat{B}O$, calcolare OC in funzione di θ. $\left[\frac{1}{1+sin(\theta)}\right]$
15. (A2002) Dividiamo un quadrilatero convesso in 4 triangoli, mediante le sua diagonali. Se le aree di tre di questi triangoli sono 1, 2, e 3 unità quadrate, quanto misura l'area del quarto triangolo? [6]
16. (RICE 2008) Nel triangolo AXE, T è il punto medio di EX, e P è il punto medio di ET. Se il triangolo APE è equilatero, determinare $cos\left(X\hat{A}E\right)$. $\left[-\frac{1}{\sqrt{13}}\right]$
17. (B2010) In un triangolo rettangolo il prodotto delle lunghezze dei tre lati è il doppio del prodotto delle tre altezze. Qual è la misura (in gradi) di uno dei due angoli acuti di questo triangolo rettangolo? [45°]

Questions in English

Working together

Consider a problem assigned at HSMC in 2004. *In the diagram below, the measure of* $C\hat{A}B$ *is* 15° *and the measure of* $C\hat{B}D$ *is* 60°. *If the length of BC is* 1, *then find the length of AB.*



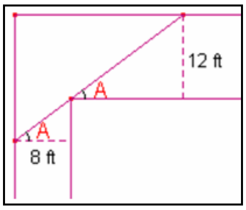
Using sinus' law: $\overline{AC}=\overline{AB}\cdot\frac{sin(120°)}{sin(45°)}=\overline{AB}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\overline{AB}$. Using cosines' law: $\overline{AC}^2=1^2+\overline{AB}^2-2\cdot\overline{AB}\cdot cos(120°)\Rightarrow\frac{3}{2}\cdot\overline{AB}^2=1+\overline{AB}^2-2\cdot\overline{AB}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}^2-\overline{AB}-1=0\Rightarrow$ $\Rightarrow\overline{AB}^2-2\cdot\overline{AB}-1=0\Rightarrow$ $\Rightarrow\overline{AB}=1+\sqrt{1+2}=1+\sqrt{3}$. The negative solution, $1-\sqrt{3}$, obviously isn't acceptable.

18. (AHSME 1980) If $b > 1$, $sin(x) > 0$, $cos(x) > 0$ and $log_b[sin(x)] = a$, then $log_b[cos(x)]$ equals

A) $2\cdot log_b\left(1-b^{\frac{a}{2}}\right)$ B) $\sqrt{1-a^2}$ C) b^{a^2} D) $\frac{1}{2}log_b\left(1-b^{2a}\right)$ E) none of these [D]

19. (AHSME 1995) Two rays with common endpoint O form a 30° angle. Point A lies on one ray, point B on the other ray, and AB = 1. The maximum possible length of OB is? [2]

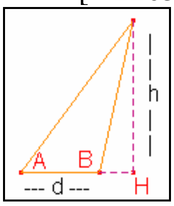
20. (HSMC2001) A log[1] of length L is being floated down a canal with a right angle turn as pictured. Express the length L of the log in terms of angle A and the widths of the canal (neglect width of log). The



log is to touch the sides of the canal as shown. [8sec(A) + 12csc(A)]

21. (V 2004) If $sin(x) + cos(x) = 1/2$, express $sin^4(x) + cos^4(x)$ as a rational number in lowest terms.[23/32]

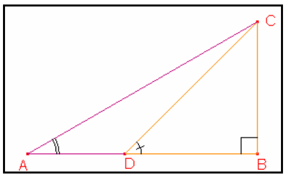
22. (NC2004) In order to look at the peak of a certain mountain 30 km in the distance one needs to angle the telescope at 3° over the horizontal. If the elevation of the observer is at 633 meters above sea level, how high is the mountain? [≈ 2205 m]



23. (HSMC2001) Express h in terms of d and trig functions of angles A and B in figure.

$$\left[h = \frac{d}{cot(A) - cot(B)} = \frac{d \cdot tan(A)}{1 - cot(B) \cdot tan(A)}\right]$$

24. (HSMC2004) In figure we have $\angle A\hat{B}C = 90°, \angle C\hat{D}B = 45°, \angle C\hat{A}B = 30°$ and AD = 2. Then BC = ?



$$\left[\frac{2}{\sqrt{3}-1}\right]$$

25. (HSMC2005) A triangle with vertices A, B, C has $\hat{B}$ = 90° and $\hat{A}$ = 30° . Let P, Q ,R be on AB, BC, CA respectively so that PQR is equilateral, BC = 4 and Q is the midpoint of BC. Find PR. $\left[\sqrt{7}\right]$

Working together

Consider a problem assigned in HSMC in 2007.

In the triangle ABC, $\overline{BC} = 13, \overline{CA} = 14, \overline{AB} = 15$. *If D is a point on CA such that BD is perpendicular to CA, what is BD*?

Let α be the angle at A. By the law of cosines we have:

$$\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 - 2 \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} \cdot cos(\alpha) \Rightarrow 13^2 = 14^2 + 15^2 - 2 \cdot 14 \cdot 15 \cdot cos(\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 169 = 196 + 225 - 420 \cdot cos(\alpha) \Rightarrow cos(\alpha) = \frac{3}{5}$$

So $cos(\alpha) = \frac{\overline{DA}}{15} \Rightarrow \overline{DA} = \frac{3}{5} \cdot 15 = 9$. Then $\overline{BD} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12$.

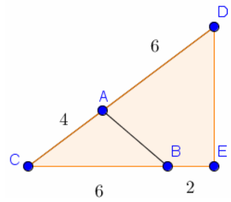
26. (V 2007) In triangle ABC, AB = 7, BC = 5 and CA = 6. Locate points P_1, P_2, P_3 and P_4 on BC so that this side is partitioned into five congruent segments, each of length 1. For k = 1, 2, 3 and 4, let $q_k = AP_k$. Find $q_1^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2$. [150]

[1] tronco

27. (HSMC2007) Evaluate $cos\left[sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)+cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right]$. Hint: There is an angle whose sinus and cosines are equal, so … [0]

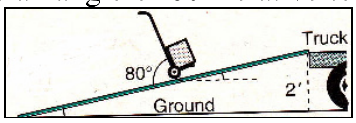
28. (HSMC2009) Given Δ[2]ABC with $cos(2\alpha - \beta) + sin(\alpha + \beta) = 2$ and $AB = 4$, what is BC? [2]

29. (V 2011) Each side of square $ABCD$ has length 3. Let M and N be points on sides BC and CD respectively such that $BM = ND = 1$ and let $\angle M\hat{A}N = \theta$. Find $sin(\theta)$. [4/5]



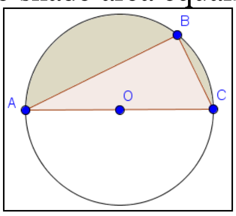
30. (MT1994) The area of ΔABC is 3. Find the area of ΔCDE. [10]

31. (MT1994) A hand cart is used to load the truck. The ramp is 10 feet long and meets the truck 2 feet above the ground. When I tilt the cart backward, the back makes an angle of 80° relative to the ramp.



What is the angle of the foot of the cart relative to the ground? [21,5°]

32. (MT1996) The radius of circle O is 3, and the shade area equals the area of $\Delta\ ABC$. To the nearest degree, what is the measure of $\angle A$?



[26° or 64°]

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Ingegneria 2000) Il valore della somma $cos(40°) + cos(140°)$ è
A) negativo ma diverso da –1 B) positivo C) 0 D) irrazionale E) –1
2. (Medicina 2001) Il valore della somma $sin(20°) + cos(20°)$ è A) negativo B) positivo C) 0 D) 1 E) –1
3. (Veterinaria 2002) Se $sin(\alpha) = 2/3$, $cos(\alpha) > 0$ allora:
A) $45° \le \alpha \le 60°$ B) $0° \le \alpha \le 30°$ C) $60° \le \alpha < 90°$ D) $45° < \alpha < 60°$ E) $30° < \alpha < 45°$
4. (Architettura 2002) Per quale dei seguenti angoli vale la relazione $sin(x) < sin(2x)$?
A) $x = 80°$ B) $x = 250°$ C) $x = 350°$ D) $x = 170°$ E) Nessuno di questi.
5. (Medicina 2003) Due angoli minori di un angolo piatto hanno lo stesso seno:
A) se differiscono di π rad B) se differiscono di 90° C) se sono supplementari
D) se sono complementari E) solo se sono lo stesso angolo
6. (Corso di laurea in Informatica, Udine 2009) Due angoli di un triangolo hanno ampiezza α e il terzo angolo ha ampiezza β. Si sa che $sin(\alpha) = 0,8$. Allora $sin(\beta)$ è uguale a: A) 0,48 B) 0,64 C) 0,72 D) 0,96

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_4_7.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	2	3	4	5	6
C	B	E	B	C	D

[2] This symbol means Triangle

7. La misurazione degli angoli

7.2 Goniometria

Prerequisiti

- Concetto di angolo
- Concetto di misura
- Unità di misura sessagesimale degli angoli
- Le funzioni goniometriche elementari
- Dominio e codominio di una funzione
- Teoremi fondamentali di goniometria
- Uso della calcolatrice scientifica

Obiettivi

- Comprendere il concetto funzione goniometrica
- Comprendere il concetto di funzione periodica
- Sapere rappresentare semplici funzioni goniometriche e sapere leggere i grafici di funzioni goniometriche
- Comprendere l'utilità di usare l'unità di misura in radianti

Contenuti

- Definizione delle funzioni trigonometriche elementari per angoli qualsiasi
- Rappresentazione grafica delle funzioni goniometriche elementari

Quelli che … vogliono sapere di più

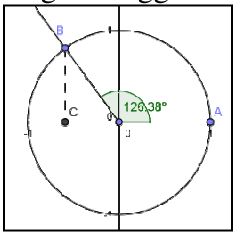
- Riferimento polare

Parole Chiave

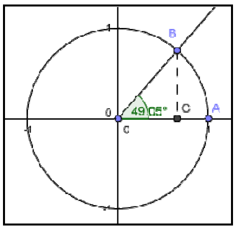
Codominio – Dominio – Periodo – Polare – Radiante

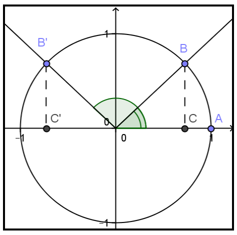
Definizione delle funzioni trigonometriche elementari per angoli qualsiasi

Abbiamo già definito le funzioni goniometriche elementari prima per angoli acuti, poi anche per angoli ottusi. Potremmo però avere a che fare anche con angoli maggiori di 180°, come mostrato in figura.



Dobbiamo quindi pensare a generalizzare le funzioni goniometriche ad angoli qualsiasi. Un'idea potrebbe essere quella di fare in modo di riferirci sempre a triangoli rettangoli i cui angoli acuti hanno qualche relazione con l'angolo non acuto di cui vogliamo calcolare seno o coseno. Per fare ciò, tenuto conto che abbiamo già visto che le funzioni goniometriche possono anche essere numeri negativi (il coseno di angoli ottusi lo è), consideriamo un riferimento cartesiano ortogonale come quello in figura, per angoli acuti il seno dell'angolo indicato è dato dal rapporto fra BC e il raggio.





E poiché quest'ultimo è scelto unitario, numericamente il seno coincide con la misura di BC, allo stesso modo il coseno coincide con la misura di OC. Adesso consideriamo un angolo ottuso. In questo caso il seno dell'angolo indicato continua a coincidere, numericamente, con la misura di BC, ciò non accade più per il coseno, poiché sappiamo che stavolta esso è un numero negativo. Osserviamo però che il coseno in questo caso è l'opposto della misura di OC. Ma allora, dato che il raggio è unitario, piuttosto che parlare di misure di segmenti potremmo parlare di ordinata di B, per il seno, e di ascissa di C per il coseno. Questa appare una buona idea e può perciò rappresentare un modo per definire seno e coseno per angoli qualsiasi.
Poniamo allora delle definizioni.

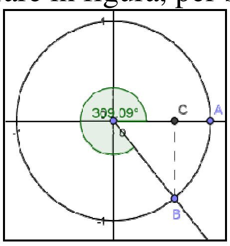
Definizione 1

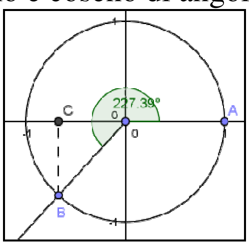
Diciamo **circonferenza goniometrica** la circonferenza di centro nell'origine e raggio unitario. In una circonferenza goniometrica conveniamo di rappresentare gli angoli con il vertice nell'origine degli assi e un lato coincidente con il semiasse positivo delle ascisse.

Definizione 2

Diciamo **seno** di un angolo rappresentato su una circonferenza goniometrica, l'ordinata del punto intersezione fra il lato variabile dell'angolo e la circonferenza goniometrica. L'ascissa del detto punto la chiameremo **coseno** dell'angolo.

Abbiamo allora le situazioni mostrare in figura, per seno e coseno di angoli maggiori di 180°.





Cioè il seno di angoli maggiori di 180° e minori di 360° è un numero negativo; il coseno è invece un numero negativo per angoli compresi tra 90° e 270° e positivo per angoli maggiori di 270° e minori di 360°. Il precedente punto di vista ci permette di generalizzare anche il concetto di angolo, nel senso che possiamo anche parlare di angoli negativi, basta misurare l'angolo in verso orario, invece che antiorario. Cioè, riferendoci all'ultima figura, l'angolo mostrato è di 309,09° ma anche di (309,09° – 360°) = –50,91°. Perciò abbiamo il seguente risultato.

Teorema 1

Dato un angolo positivo x abbiamo: $sin(x) = -\, sin(-x) = -\, sin(360° - x)$; $cos(x) = cos(-x) = cos(360° - x)$

Con ragionamenti simili possiamo enunciare anche il seguente teorema.

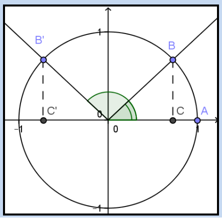
Teorema 2

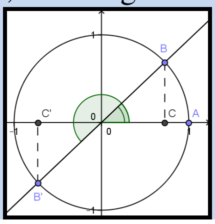
Per un qualsiasi angolo x si ha:

$$sin(x) = sin(180° - x) = -sin(180° + x);\ cos(x) = -cos(180° - x) = -cos(180° + x)$$

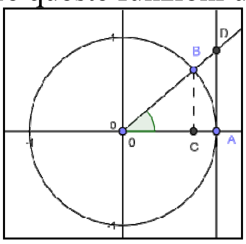
Dimostrazione

Consideriamo la prima figura. Facilmente si mostra che i triangoli BOC e $B'OC'$ sono uguali, quindi come segmenti sono uguali BC e $B'C'$, OC e OC'. Anche le ordinate sono uguali, cioè i seni di angoli supplementari sono uguali; mentre le ascisse sono opposte, perciò i coseni sono opposti. Lasciamo per esercizio le relazioni per gli angoli che differiscono di 180°, basta ragionare sulla seconda figura.





Abbiamo detto che continuano a valere le relazioni con seno e coseno delle altre 4 funzioni, vogliamo vedere come possiamo definire queste funzioni utilizzando il cerchio goniometrico.

Consideriamo la figura, 

facilmente si mostra che i triangoli BOC e AOD sono fra loro simili, possiamo perciò scrivere: $\frac{\overline{AD}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{OC}} \Rightarrow \overline{AD} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{sin(\alpha) \cdot 1}{cos(\alpha)} = tan(\alpha)$.

Così possiamo definire la tangente di un angolo anche non acuto.

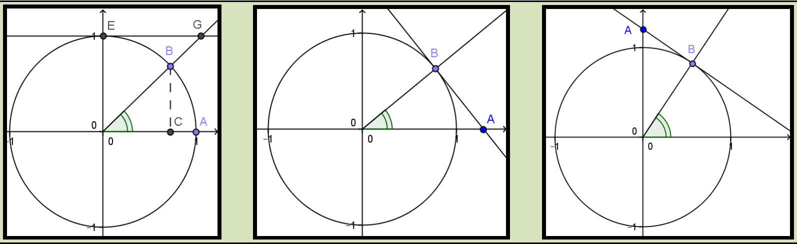
Definizione 3

Diremo **tangente** di un angolo l'ordinata del punto intersezione, se esiste, fra il lato variabile dell'angolo e la retta tangente alla circonferenza goniometrica nel suo punto di ascissa 1.

Ovviamente abbiamo detto "se esiste"; perché se l'angolo è di 90° oppure di 270° le due rette sono parallele e non hanno intersezione. Quindi, come già sapevamo, non ha senso la scritta *tan*(90°), e adesso sappiamo che non ha senso neanche *tan*(270°). In modo analogo definiamo le rimanenti funzioni goniometriche.

Definizione 4

- Diremo **cotangente** di un angolo l'ascissa del punto intersezione, se esiste, fra il lato variabile dell'angolo e la retta tangente alla circonferenza goniometrica nel suo punto di ordinata 1.
- Diremo **secante** di un angolo l'ascissa del punto intersezione, se esiste, fra l'asse delle ascisse e la retta tangente alla circonferenza goniometrica nel punto che individua l'angolo.
- Diremo **cosecante** di un angolo l'ordinata del punto intersezione, se esiste, fra l'asse delle ordinate e la retta tangente alla circonferenza goniometrica nel punto che individua l'angolo.



Perciò non diamo significato alle scritte *cot*(0°) e *cot*(180°), *sec*(90°), *sec*(270°), *csc*(0°) e *csc*(90°). Tenuto conto delle ben note relazioni fra le funzioni goniometriche, che valgono anche per angoli non acuti abbiamo la validità dei seguenti risultati.

Teorema 3

- Per un qualsiasi angolo x si ha:

$$tan(x) = -\,tan(180° - x) = tan(180° + x);\ cot(x) = -cot(180° - x) = cot(180° + x)$$
$$sec(x) = -sec(180° - x) = -sec(180° + x);\ csc(x) = csc(180° - x) = -csc(180° + x)$$

- Dato un angolo positivo x abbiamo:

$$tan(x) = -\,tan(-x) = -\,tan(360° - x);\ cot(x) = -cot(-x) = -cot(360° - x)$$
$$sec(x) = sec(-x) = sec(360° - x);\ csc(x) = -csc(-x) = -csc(360° - x)$$

Esempio 1

Sapendo che $sin(30°) = 1/2$, tenendo conto dei risultati precedenti possiamo dire che si ha anche:

$$sin(150°) = sin(180°-30°) = 1/2;\ sin(210°) = sin(180°+30°) = -1/2;\ sin(330°) = sin(360°-30°) = -1/2$$

poiché la cosecante è inversa del seno, abbiamo: $csc(30°) = 3 = csc(150°)$; $csc(210°) = csc(330°) = -\,2$.

Possiamo trovare altre relazioni per angoli particolari.

Teorema 4

Si ha la validità delle seguenti uguaglianze, per $0 \le x \le 90°$:

$$sin(x) = -cos(90° + x) = -cos(270° - x);\ cos(x) = sin(90° + x) = -sin(270° - x);$$
$$tan(x) = -\,cot(90° + x) = cot(270° - x),\ x \ne 90°;\ cot(x) = -tan(90° + x) = tan(270° - x),\ x \ne 0°$$
$$sec(x) = csc(90° + x) = -csc(270° - x),\ x \ne 0°;\ csc(x) = -sec(90° + x) = -sec(270° - x),\ x \ne 90°$$

Dimostrazione

Basta tenere conto del fatto che $180° - (90° - x) = 90° + x$ e $180° + (90° - x) = 270° - x$.

Esempio 2

Dato che $sin(30°) = 1/2$, tenendo conto dei risultati precedenti possiamo dire che si ha anche:

$$cos(120°) = cos(90°+30°) = -sin(30°) = -1/2;\ cos(240°) = cos(270°-30°) = -sin(30°) = -1/2.$$

Adesso possiamo determinare delle formule che ci permettano di esprimere ognuna delle sei funzioni goniometriche mediante una sola di esse. Facilmente troviamo quelle mediante seno, coseno, secante o cosecante.

Teorema 5

Si ha la validità delle seguenti uguaglianze, per tutti gli angoli per cui ciascuna funzione goniometrica ha significato:

$$cos(\alpha) = \pm\sqrt{1 - sin^2(\alpha)};\ sec(\alpha) = \pm\frac{1}{\sqrt{1 - sin^2(\alpha)}};\ csc(\alpha) = \frac{1}{sin(\alpha)};\ tan(\alpha) = \pm\frac{sin(\alpha)}{\sqrt{1 - sin^2(\alpha)}};\ cot(\alpha) = \pm\frac{\sqrt{1 - sin^2(\alpha)}}{sin(\alpha)};$$

$$sin(\alpha) = \pm\sqrt{1 - cos^2(\alpha)};\ sec(\alpha) = \frac{1}{cos(\alpha)};\ csc(\alpha) = \pm\frac{1}{\sqrt{1 - cos^2(\alpha)}};\ tan(\alpha) = \pm\frac{\sqrt{1 - cos^2(\alpha)}}{cos(\alpha)};\ cot(\alpha) = \pm\frac{cos(\alpha)}{\sqrt{1 - cos^2(\alpha)}};$$

$$sin(\alpha) = \pm\frac{\sqrt{sec^2(\alpha) - 1}}{sec(\alpha)};\ cos(\alpha) = \frac{1}{sec(\alpha)};\ csc(\alpha) = \pm\frac{sec(\alpha)}{\sqrt{sec^2(\alpha) - 1}};\ tan(\alpha) = \pm\sqrt{sec^2(\alpha) - 1};\ cot(\alpha) = \pm\frac{1}{\sqrt{sec^2(\alpha) - 1}};$$

$$sin(\alpha)=\pm\frac{1}{csc(\alpha)};cos(\alpha)=\frac{\sqrt{csc^2(\alpha)-1}}{csc(\alpha)};tan(\alpha)=\pm\frac{1}{\sqrt{csc^2(\alpha)-1}};cot(\alpha)=\pm\sqrt{csc^2(\alpha)-1};sec(\alpha)=\pm\frac{csc(\alpha)}{\sqrt{csc^2(\alpha)-1}}.$$

Nel precedente teorema la presenza del simbolo ±, significa che il segno si sceglierà sulla base del valore dell'angolo . Così per esempio se vogliamo determinare il *cos*(70°) mediante il *sin*(70°) sceglieremo, nella prima formula, il segno +; sceglieremo il segno – se invece volessimo calcolare *cos*(135°) mediante il *sin*(135°).

Esempio 3

Ricaviamo un'espressione che permette di scrivere il coseno solo usando la tangente. Consideriamo la seguente uguaglianza $tan^2(\alpha)=\frac{sin^2(\alpha)}{cos^2(\alpha)}=\frac{1-cos^2(\alpha)}{cos^2(\alpha)}=\frac{1}{cos^2(\alpha)}-1$. Adesso possiamo risolvere nell'incognita coseno: $\frac{1}{cos^2(\alpha)}=1+tan^2(\alpha)\Rightarrow cos^2(\alpha)=\frac{1}{1+tan^2(\alpha)}\Rightarrow cos(\alpha)=\pm\frac{1}{\sqrt{1+tan^2(\alpha)}}$.

Sulla falsariga dell'esempio precedente si dimostra il seguente risultato.

Teorema 6

Si ha la validità delle seguenti uguaglianze, per gli angoli per cui tutte le espressioni hanno senso:

$$cos(\alpha)=\pm\frac{1}{\sqrt{1+tan^2(\alpha)}};sin(\alpha)=\pm\frac{tan(\alpha)}{\sqrt{1+tan^2(\alpha)}};cot(\alpha)=\frac{1}{tan(\alpha)};sec(\alpha)=\pm\sqrt{1+tan^2(\alpha)};csc(\alpha)=\pm\frac{\sqrt{1+tan^2(\alpha)}}{tan(\alpha)}.$$

$$cos(\alpha)=\pm\frac{cot(\alpha)}{\sqrt{1+cot^2(\alpha)}};sin(\alpha)=\pm\frac{1}{\sqrt{1+cot^2(\alpha)}};tan(\alpha)=\frac{1}{cot(\alpha)};sec(\alpha)=\pm\frac{\sqrt{1+cot^2(\alpha)}}{cot(\alpha)};csc(\alpha)=\pm\sqrt{1+cot^2(\alpha)}$$

Esempio 4

Abbiamo $cos(60^\circ)=\frac{1}{2},tan(60^\circ)=\sqrt{3}$, e infatti $\frac{1}{\sqrt{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+3}}=\frac{1}{2}$.

Concludiamo il paragrafo con una discussione che può sembrare strana. Consideriamo un orologio non digitale, quando una delle lancette delle ore, minuti o secondi, ha concluso il giro noi continuiamo a misurare utilizzando il periodo di 60 secondi, 60 minuti o 24 ore, a seconda della lancetta considerata. Quindi anche se non ha senso parlare delle 28 ore, possiamo considerarle come le 4 ore successive alle prime 24. Analogamente quindi possiamo parlare delle 112 ore, considerandole come 4 × 24 + 16, cioè come le 16 di 4 giorni successivi. Possiamo perciò fare lo stesso anche con gli angoli e con le relative funzioni, in cui il periodo sarà ovviamente di 360°. Quindi abbiamo le seguenti definizioni.

Definizione 5

Si ha, per ogni $k \in \mathbb{Z}$ e ogni x per cui hanno significato tutte le espressioni:

$sin(x + k \cdot 360°) = sin(x)$ $\quad cos(x + k \cdot 360°) = cos(x)$ $\quad tan(x + k \cdot 180°) = tan(x)$;

$cot(x + k \cdot 180°) = cot(x)$ $\quad sec(x + k \cdot 360°) = sec(x)$ $\quad csc(x + k \cdot 360°) = csc(x)$

Il motivo del fatto che il periodo per tangente e cotangente sia di 180° e non di 360°, dipende proprio da come sono state definite queste funzioni.

Esempio 5

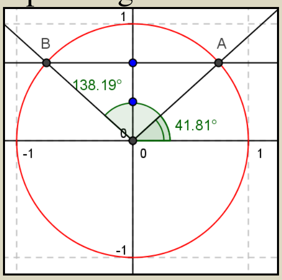
Abbiamo $cos(1590°) = cos(4 \cdot 360° + 150°) = cos(150°) = -\sqrt{3}/2$; $tan(945°) = tan(2 \cdot 360° + 225°) = tan(225°) = tan(180° + 45°) = tan(45°) = 1$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Tracciare l'angolo α *per cui si ha*: $sin(\alpha) = 2/3$.

Basta semplicemente tracciare la circonferenza goniometrica, dividere in 3 parti uguali il suo raggio appartenente all'asse *y* e tracciare le parallela all'asse *x* passante per (2/3; 0).



I punti individuati sulla circonferenza permettono di trovare gli angoli richiesti, come illustrato meglio in figura. Ovviamente valori più precisi delle misure degli angoli si ottengono con l'aiuto di un goniometro oppure di un apposito software.

Tracciare gli angoli compresi tra 0° e 360°, che verificano quanto richiesto

Livello 1

1. $sin(x) = 1/4$; $cos(x) = 1/2$; $tan(x) = 2$; $sin(x) = -1/3$; $cos(x) = -1/4$; $tan(x) = 1/2$
2. $cot(x) = 2/3$; $cos(x) = -3/2$; $tan(x) = -2$; $sin(x) = -4/5$; $cos(x) = 3/4$; $tan(x) = 3/5$

Lavoriamo insieme

Semplificare l'espressione: $sin(45°) - cos(30°) + tan(60°) - cot(90°)$.

Basta sostituire alle funzioni i loro valori numerici: $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}-0=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$.

Calcolare il valore numerico delle seguenti espressioni

Livello 1

3. $sin(30°) - cos(45°) + sin(60°) - cot(30°)$; $\frac{csc(30°)-cos(60°)}{sec(60°)+sin(30°)}$ $\left[\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2};\frac{3}{5}\right]$
4. $sin(45°) - cos(45°) - tan(45°) + cot(45°) - csc(45°) + sec(45°)$ [0]
5. $[sin(30°) - cos(30°)] \cdot [sin(30°) + cos(30°)]$; $[tan(30°) + cot(30°)]^2$ [–1/2; 16/3]
6. $[tan(30°) + cos(60°)] \cdot [sin(30°) - cot(60°)] + sec(45°)$ $\left[\sqrt{2}-\frac{1}{12}\right]$
7. $cot(90°) \cdot [sin(17°) + cos(31°)] - tan(180°) \cdot [cot(31°) + sec(79°)]$ [0]
8. $[sin(0°) - tan(45°) + cot(30°)] \cdot [cos(90°) + csc(60°) - sec(30°)]$ [0]
9. $\frac{\left(sin(270°)-tan(45°)\right)^3}{\left(cot(30°)+sec(60°)\right)^2}$; $\frac{sin(45°)-cos(30°)}{cos(0°)-tan(180°)}+\frac{cos(90°)+sin(270°)}{sec(60°)}$ $\left[32\cdot\sqrt{3}-56;\frac{\sqrt{2}-1-\sqrt{3}}{2}\right]$

Lavoriamo insieme

Semplificare l'espressione: $\frac{sin(225°)-cos(330°)}{sin(210°)}-tan(240°)+\frac{cot(210°)-sec(-30°)}{csc(330°)}$.

Possiamo scrivere: $\frac{sin(180°+45°)-cos(360°-30°)}{sin(180°+30°)}-tan(180°+60°)+\frac{cot(180°+30°)-sec(-30°)}{csc(360°-30°)}$.

Quindi, tenendo conto delle proprietà enunciate: $\frac{-sin(45°)-cos(30°)}{-sin(30°)}+tan(60°)+\frac{-cot(30°)-sec(30°)}{-csc(30°)}=$

$$=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{-\frac{1}{\cancel{2}}}+\sqrt{3}+\frac{-\sqrt{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}}{-2}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{3}+\frac{3+2}{2\cdot\sqrt{3}}=\frac{4\cdot\sqrt{3}+12+2}{2\cdot\sqrt{3}}=\frac{4\cdot\sqrt{3}+14}{2\cdot\sqrt{3}}=\frac{2\cdot\sqrt{3}+7}{\sqrt{3}}$$

Calcolare il valore numerico delle seguenti espressioni

Livello 1

10. $sin(225°) - cos(210°) + tan(330°)$; $tan\left(60^\circ\right)\cdot\frac{sin(315°)+sec(300°)}{cos(-60°)}$ $\left[\frac{\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{2}}{6};4\cdot\sqrt{3}-\sqrt{6}\right]$

11. $cos(210°) - sin(210°) + tan(225°)\cdot cot(315°)$; $\frac{sin(315°)-cos(225°)}{csc(210°)+sec(240°)}$ $\left[-\frac{1+\sqrt{3}}{2};0\right]$

12. $[csc(210°) - sec(-45°)]\cdot[csc(-30°) - sec(225°)]$; $[sin(210°) + cos(150°) - tan(-30°)]^2$ $\left[2;\frac{\sqrt{3}+2}{6}\right]$

13. $[cos(-45°) + tan(-225°)]\cdot[cos^2(315°) - cos(45°)\cdot tan(135°) + tan^2(-45°)]$; $\frac{sin^2(-60°)-cos^2(-45°)}{tan(210°)+cot(240°)}$ $\left[\frac{\sqrt{2}-4}{4};\frac{\sqrt{3}}{8}\right]$

14. $\frac{csc(-30°)+sec(-60°)}{tan(225°)}\cdot\frac{csc(-60°)+sec(-30°)}{tan(-45°)}$; $\frac{tan(-225°)+cot(-210°)}{cos(-150°)+sin(-330°)}$ $\left[0;2\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)\right]$

Semplificare le seguenti espressioni

Livello 2

15. $sin(180° + \alpha) + cos(180° - \alpha) + sin(-\alpha) + cos(360° - \alpha)$; $\frac{sin^2(\alpha+\beta)+cos^2(\alpha+\beta)}{tan(\alpha-\beta)\cdot cot(\alpha-\beta)}$ $[-2sin(\alpha); 1]$

16. $cos(270° + \alpha) - sin(180° + \alpha) + sec(-\alpha) - csc(270° - \alpha)$ $\left[2\cdot\frac{1+sin(\alpha)\cdot cos(\alpha)}{cos(\alpha)}\right]$

17. $\frac{sin(-\beta)+cos(90°+\beta)}{csc(90°+\beta)+sec(-\beta)}$; $\frac{sin^2(\delta)-cos^2(\delta)}{sin(90^\circ+\delta)+cos(90^\circ-\delta)}$; $\frac{sin(\gamma)\cdot csc(180°+\gamma)}{cos(180°-\gamma)\cdot csc(90°-\gamma)}$

$[-sin(\beta)\, cos(\beta)$; $sin(\delta) - cos(\delta)$; $0]$

18. $[tan(\alpha) - tan(90° + \alpha)]\cdot[cot(90° - \alpha) + cot(270° + \alpha)]$; $[sin(180° + \alpha) + cos(270° + \alpha)]^2$ $[1 ; 0]$

19. $[cos(-\beta) - sin(360° - \beta)]\cdot[cos^2(\beta) + cos(\beta)\cdot sin(180° + \beta) + cos^2(270° - \beta)]$

$[(sin(\beta) + cos(\beta))\cdot(1 - sin(\beta)cos(\beta))]$

Lavoriamo insieme

Semplificare: $\frac{sin(2565°)-cos(3990°)}{csc(2940°)}$.

Possiamo scrivere: $\frac{sin(7\cdot 360°+45°)-cos(11\cdot 360°+30°)}{csc(8\cdot 360+60°)}$. Quindi, tenendo conto della periodicità abbiamo: $\frac{sin(45°)-cos(30°)}{csc(60°)}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{2}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}-3}{4}$.

Calcolare il valore numerico delle seguenti espressioni (nei risultati il simbolo ∅, vuol dire espressione priva di senso)

Livello 1

20. $sin(1845°) - cos(2940°) + tan(5370°)$; $\dfrac{[sin(675°)-cos(120°)]^2}{cot(150°)}$ $\left[\dfrac{3\cdot\sqrt{2}-3-2\cdot\sqrt{3}}{6};\dfrac{2\cdot\sqrt{6}-3\cdot\sqrt{3}}{12}\right]$

21. $tan(750°)\cdot\dfrac{cot(675°)-sec(120°)}{csc(150°)}$; $5\cdot\dfrac{sin(1485°)-cos(2190°)}{sin^2(2580°)-cos^2(1200°)}\cdot sin(3120°)$ $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{6};\dfrac{15-5\cdot\sqrt{6}}{2}\right]$

22. $\dfrac{tan(1830°)-2sin(1560°)}{cos^2(1320°)-sec^2(2205°)}\cdot cot(1935°)$; $sin(750°)\cdot\dfrac{cos(675°)-sin(120°)}{cot(1500°)}$ $\left[-\dfrac{8\cdot\sqrt{3}}{21};\dfrac{\sqrt{6}-3}{4}\right]$

23. $\dfrac{cos(1200°)-4\cdot sec(1845°)}{tan^2(3735°)-cot^2(2130°)}\cdot sec(960°)$; $[sin(1680°) + cos(1395°)]^3$ $\left[-\dfrac{8\cdot\sqrt{2}+1}{2};\dfrac{11\cdot\sqrt{2}-9\cdot\sqrt{3}}{8}\right]$

24. $\dfrac{sin(2370°)+4\cdot cot(1125°)}{sin^5(1170°)-5\cdot tan^8(1935°)}\cdot sec(960°)-csc(3270°)$; $sec(7500°)\cdot\dfrac{sec(675°)-cos(120°)}{cot(150°)}$ $\left[-\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{6}}{3};\right]$

25. $3\cdot sin(750°)+\dfrac{cos(675°)-tan(120°)}{4\cdot csc(150°)}$; $\dfrac{3\cdot tan(3390°)-cot(2475°)}{sec^2(1170°)+7\cdot csc^2(600°)}\cdot cos(2310°)$ $\left[\dfrac{2\cdot\sqrt{3}+\sqrt{2}+24}{16};\varnothing\right]$

Semplificare le seguenti espressioni

Livello 2

26. $sin(900° + \alpha) - cos(1800° - \alpha)$; $\dfrac{sin^2(7200°+\delta)-cos^2(2880°-\delta)}{sin(2160°+\delta)+cos(1530°-\delta)}$ $\left[-sin(\alpha)-cos(\alpha);\dfrac{2\cdot sin^2\delta-1}{2\cdot sin\ \delta}\right]$

27. $cos(720° + \alpha) - sin(360° + \alpha) + sec(1080° - \alpha)$; $\dfrac{sin(720°-\beta)}{csc(450°+\beta)+sec(810°-\beta)}$

$\left[\dfrac{1+sin(\alpha)\cdot cos(\alpha)+cos^2(\alpha)}{cos(\alpha)};-\dfrac{sin^2(\beta)\cdot cos(\beta)}{sin(\beta)+cos(\beta)}\right]$

28. $[tan(720° + \alpha) - tan(630° + \alpha)]\cdot[cot(90° - \alpha) + cot(1890° + \alpha)]$ [0]

29. $[sin(1800° + \alpha) + cos(1890° - \alpha)]^2$; $\dfrac{sin(360°+\gamma°)\cdot csc(1800°+\gamma)}{cos(450°-\gamma)\cdot csc(\gamma)}$ $[4sin^2(\alpha); 1]$

Livello 3

30. $sin(7°) - cos(83°) + sin(353°) + sin(173°)$ [0]
31. $sin(23°) + cos(51°) + sin(203°) + cos(129°)$ [0]
32. $sin(47°) + cos(19°) + sin(289°) + cos(223°)$ [0]
33. $cos(1°) + cos(2°) + cos(3°) +\ldots+ cos(358°) + cos(359°)$ Sugg: $cos(x) = -cos(180° + x)$ [–1]
34. $cos(1°) + cos(2°) + cos(3°) +\ldots+ cos(178°) + cos(179°)$ [0]
35. $sin(1°) + sin(2°) + \ldots + sin(30°) + sin(331°) + sin(332°) + \ldots + sin(360°)$ [1/2]
36. $tan(1°) + tan(2°) + \ldots + tan(60°) + tan(121°) +\ldots+ tan(178°) + tan(179°)$ $\left[\sqrt{3}\right]$
37. $cot(1°) + cot(2°) + \ldots + cot(178°) + cot(179°)$ [0]

Lavoriamo insieme

Sapendo che $sin(\alpha) = 3/5$, $180° < \alpha < 270°$, *determinare il valore delle altre cinque funzioni goniometriche elementari dello stesso angolo.*

La prima cosa da osservare è la coerenza dei dati. Infatti nel terzo quadrante il seno di un angolo è un numero negativo, pertanto non è possibile ciò che viene richiesto. Riformuliamo il quesito: $sin(\alpha) = -3/5$, $180° < \alpha < 270°$. Possiamo trovare subito la cosecante: $csc(\alpha) = 1/sin(\alpha) = -5/3$. Per determinare il coseno possiamo usare il teorema di Pitagora, tenendo conto che anche il coseno di un angolo del terzo quadrante è un numero negativo. Pertanto abbiamo: $cos(\alpha)=-\sqrt{1-sin^2(\alpha)}=-\sqrt{1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2}=-\sqrt{1-\dfrac{9}{25}}=-\sqrt{\dfrac{16}{25}}=-\dfrac{4}{5}$.

Poi: $sec(\alpha) = 1/cos(\alpha) = -5/4$. Infine $tan(\alpha)=\frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)}=\frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=\frac{3}{4};cot(\alpha)=\frac{1}{tan(\alpha)}=\frac{4}{3}$

A partire dal valore della data funzione goniometrica, determinare i valori delle altre cinque funzioni goniometriche elementari. Quindi verifica i risultati usando la calcolatrice scientifica, ossia calcolare l'angolo ed applicare le varie funzioni

Livello 1

38. $sin(\alpha) = -3/8$, $270° < \alpha < 360°$ $\left[cos(\alpha)=\frac{\sqrt{55}}{8},sec(\alpha)=\frac{8\cdot\sqrt{55}}{55},csc(\alpha)=-\frac{8}{3},tan(\alpha)=-\frac{3\cdot\sqrt{55}}{55},cot(\alpha)=-\frac{\sqrt{55}}{3}\right]$
39. $cos(\beta) = -5/6$, $90° < \beta < 180°$ $\left[sin(\beta)=\frac{\sqrt{11}}{6},sec(\beta)=-\frac{6}{5},csc(\beta)=\frac{6\cdot\sqrt{11}}{11},tan(\beta)=-\frac{\sqrt{11}}{5},cot(\beta)=-\frac{5\cdot\sqrt{11}}{11}\right]$
40. $tan(\gamma) = 3$, $180° < \gamma < 270°$ $\left[sin(\gamma)=-\frac{3\cdot\sqrt{10}}{10},cos(\gamma)=-\frac{\sqrt{10}}{10},sec(\gamma)=-\sqrt{10},csc(\gamma)=-\frac{\sqrt{10}}{3},cot(\gamma)=\frac{1}{3}\right]$
41. $cot(\delta) = -1/4$, $270° < \delta < 360°$ $\left[sin(\delta)=-\frac{4\cdot\sqrt{17}}{17},cos(\delta)=\frac{\sqrt{17}}{17},sec(\delta)=\sqrt{17},csc(\delta)=-\frac{\sqrt{17}}{4},tan(\delta)=-4\right]$
42. $sec(\varepsilon) = 2$, $0° < \varepsilon < 90°$ $\left[sin(\varepsilon)=\frac{\sqrt{3}}{2},cos(\varepsilon)=\frac{1}{2},csc(\varepsilon)=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3},tan(\varepsilon)=\sqrt{3},cot(\varepsilon)=\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$
43. $csc(\phi) = -4$, $180° < \phi < 270°$ $\left[sin(\phi)=-\frac{1}{4},cos(\phi)=-\frac{\sqrt{15}}{4},sec(\phi)=-\frac{4\cdot\sqrt{15}}{15},tan(\phi)=\frac{\sqrt{15}}{15},cot(\phi)=\sqrt{15}\right]$
44. $sin(\varphi) = 0{,}12$, $90° < \varphi < 180°$
[$cos(\varphi) \approx -0{,}99$; $sec(\varphi) \approx -1{,}01$; $csc(\varphi) \approx 8{,}33$; $tan(\varphi) \approx -0{,}12$; $cot(\varphi) \approx -8{,}27$]
45. $cos(\eta) = 0{,}31$, $270° < \eta < 360°$
[$sin(\eta) \approx -0{,}95$; $sec(\eta) \approx 3{,}23$; $csc(\eta) \approx -1{,}05$; $tan(\eta) \approx -3{,}07$; $cot(\eta) \approx -0{,}33$]
46. $tan(\kappa) = -4{,}13$, $270° < \kappa < 360°$
[$sin(\kappa) \approx -0{,}97$; $cos(\eta) \approx 0{,}24$; $sec(\kappa) \approx 4{,}25$; $csc(\kappa) \approx 1{,}03$; $cot(\kappa) \approx -0{,}24$]
47. $cot(\lambda) = 2{,}13$, $180° < \lambda < 270°$
[$sin(\lambda) \approx -0{,}43$; $cos(\lambda) \approx -0{,}91$; $sec(\lambda) \approx -1{,}10$; $csc(\lambda) \approx -2{,}35$; $tan(\lambda) \approx -0{,}47$]
48. $sec(\mu) = -1{,}75$, $90° < \mu < 180°$
[$sin(\mu) \approx -0{,}82$; $cos(\mu) \approx -0{,}57$; $csc(\mu) \approx 1{,}22$; $tan(\mu) \approx -1{,}44$; $cot(\mu) \approx -0{,}70$]
49. $csc(\nu) = 2{,}31$, $90° < \nu < 180°$
[$sin(\nu) \approx 0{,}43$; $cos(\nu) \approx -0{,}90$; $sec(\nu) \approx 1{,}11$; $tan(\nu) \approx -0{,}48$; $cot(\nu) \approx -2{,}08$]

Livello 2

50. Dimostrare le identità del Teorema 5.
51. Dimostrare le identità del Teorema 6.

Lavoriamo insieme

Verificare se la seguente è un'identità: $[cos(\alpha) + sin(\alpha)] \cdot [tan(\alpha) + cot(\alpha)] = csc(\alpha) + sec(\alpha)$.
Intanto studiamone l'insieme di esistenza. La tangente è definita per $\alpha \neq 90° + k \cdot 180°$, mentre la cotangente per $\alpha \neq k \cdot 180°$; quindi unendo le due condizioni possiamo dire che l'insieme di esistenza dell'uguaglianza è $\alpha \neq k \cdot 90°$. Adesso trasformiamo tangente e cotangente in seno e coseno:

$$\left[cos(\alpha)+sin(\alpha)\right]\cdot\left[\frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)}+\frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)}\right]=csc(\alpha)+sec(\alpha)$$

Moltiplichiamo $sin(\alpha)+\frac{cos^2(\alpha)}{sin(\alpha)}+\frac{sin^2(\alpha)}{cos(\alpha)}+cos(\alpha)=csc(\alpha)+sec(\alpha)$. Effettuiamo il minimo comune denominatore nel membro sinistro fra i primi due addendi e poi fra gli altri due.

$$\frac{sin^2(\alpha)+cos^2(\alpha)}{sin(\alpha)}+\frac{sin^2(\alpha)+cos^2(\alpha)}{cos(\alpha)}=csc(\alpha)+sec(\alpha)\Rightarrow\frac{1}{sin(\alpha)}+\frac{1}{cos(\alpha)}=csc(\alpha)+sec(\alpha)$$

Dato che il primo e il secondo membro hanno espressioni equivalenti possiamo dire che effettivamente abbiamo a che fare con un'identità.

Verificare l'eventuale validità delle seguenti identità, stabilendone l'insieme di esistenza

Livello 1

52. $\frac{sin(\alpha)}{1+cos(\alpha)}=\frac{1-cos(\alpha)}{sin(\alpha)}$; $cot^2(\alpha)\cdot sin^2(\alpha)=1-sin^2(\alpha)$ [($\alpha\neq k\cdot180°$; Sì) ; ($\alpha\neq 90°+k\cdot180°$; Sì)]

53. $\frac{1-cos^2(\alpha)}{cos^2(\alpha)}=2\cdot\left[csc^2(\alpha)-1\right]$; $[sin(x)+cos(x)]^2=1+2sin(x)cos(x)$ [($\alpha\neq k\cdot 90°$; No) ; ($\mathbb{R}$; Sì)]

54. $tan^2(\alpha)+cot^2(\alpha)=1-2sin^2(\alpha)\cdot cos^2(\alpha)$; $[2-cos^2(\beta)]\cdot[2+tan^2(\beta)]=[1+2tan^2(\beta)]\cdot[2-sin^2(\beta)]$ [($\alpha\neq k\cdot 90°$; No) ; $\beta\neq 90°+k\cdot180°$; No]

55. $\frac{1}{csc^2(\alpha)}+\frac{1}{sec^2(\alpha)}=1$; $\frac{csc^2(\alpha)-1}{csc^2(\alpha)}\cdot\frac{1+cot^2(\alpha)}{cot^2(\alpha)}=1$ [($\alpha\neq k\cdot 90°$; Sì) ; ($\alpha\neq k\cdot 90°$; No)]

Livello 2

56. $\frac{10\cdot cos^2(x)-5}{sin(x)+cos(x)}\cdot\frac{sec(x)\cdot sin(x)}{3\cdot tan(x)}=\frac{5}{3}\cdot cos(x)-\frac{5}{3}\cdot sin(x)$ [$x\neq k\cdot 90°$; $x\neq 135°+k\cdot180°$; Sì]

57. $\frac{3-6\cdot cos^2(x)}{sin(x)-cos(x)}\cdot\frac{cot(x)\cdot sec(x)}{cos(x)}=3\cdot sin(x)+3\cdot cos(x)$ [$x\neq k\cdot 90°$; $x\neq 45°+k\cdot180°$; No]

58. $\frac{1-2\cdot cos^2(x)}{sin(x)-cos(x)}\cdot\frac{tan(x)\cdot cos(x)}{sin(x)}=sin(x)+cos(x)$ [($x\neq 45°+k\cdot180°$; $x\neq k\cdot 90°$; Sì)]

59. $tan^2(\gamma)+cot^2(\gamma)=csc^2(\gamma)\cdot sec^2(\gamma)-2$; $\frac{1}{1+cot^2(\alpha)}+\frac{1}{1+tan^2(\alpha)}=1$ [($\gamma\neq k\cdot 90°$; Sì) ; ($\alpha\neq k\cdot 90°$; Sì)]

60. $\frac{tan^2(\alpha)}{1+tan^2(\alpha)}=\frac{sec^2(\alpha)-1}{sec^2(\alpha)}$; $tan(\alpha)\cdot[1+cot^2(\alpha)]\cdot[1-sin^2(\alpha)]=1$ [($\alpha\neq k\cdot 90°$; Sì) ; ($\alpha\neq k\cdot 90°$; Sì)]

Livello 3

Determinare per quali angoli x, $0°\leq x\leq 360°$, si ha la validità delle seguenti uguaglianze

61. $cot(x)=2tan(x)$; $tan(x)=cot(x)$; $tan(x)=-cot(x)$
[($\approx 35°15'52''$, $\approx 144°44'8''$, $\approx 215°15'52''$, $\approx 324°44'8''$) ; (45°, 225°) ; (135°, 315°)]

62. $sin(x)=2cos(x)$; $sin(x)=-cos(x)$ [($\approx 63°26'6''$, $\approx 243°26'6''$); (135°, 315°)]

63. $cos(x)=2sin(x)$; $tan(x)=2cot(x)$; $sin(x)=cos(x)$
[($\approx 26°33'54''$, $\approx 206°33'54''$); ($\approx 54°44'8''$, $\approx 125°15'52''$, $\approx 206°33'54''$, $\approx 305°15'52''$) ; (45°, 225°)]

Lavoriamo insieme

Calcolare il valore esatto di $tan[cos^{-1}(1/3)]$.

Usando la calcolatrice otterremmo solo un valore approssimato, precisamente circa 2,83. Teniamo conto che $cos[cos^{-1}(x)]=x$, quindi se riuscissimo a trasformare la tangente in coseno potremmo ottenere un valore esatto. Ma per fare ciò possiamo sfruttare una delle relazione stabilite dal Teorema 5, cioè: $tan(\alpha)=\pm\frac{\sqrt{1-cos^2(\alpha)}}{cos(\alpha)}$. Intanto stabiliamo quale segno scegliere; dato che $cos^{-1}(1/3)$ è un angolo del primo quadrante, prenderemo il segno positivo, poiché la tangente è tale appunto nel I quadrante. Adesso possiamo scrivere

$$tan\left[cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]=\frac{\sqrt{1-\left(cos\left[cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]\right)^2}}{cos\left[cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right]}=\frac{\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}}{\frac{1}{3}}=\frac{3\cdot\sqrt{8}}{3}=2\sqrt{2}\approx 2,83.$$

Livello 3

Usando le identità stabilite dai Teoremi* 5 *e* 6, *trovare i valori esatti delle seguenti espressioni

64. $tan[sin^{-1}(3/4)]$; $tan[cot^{-1}(-2)]$; $tan[csc^{-1}(4)]$ $\left[\frac{3\sqrt{7}}{7};-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{15}}{15}\right]$

65. $sin[cos^{-1}(2/5)]$; $sin[tan^{-1}(-3)]$; $sin[sec^{-1}(-7/5)]$ $\left[\frac{\sqrt{21}}{5};-\frac{3\sqrt{10}}{10};\frac{2\sqrt{6}}{7}\right]$

66. $cos[sin^{-1}(-3/7)]$; $cos[tan^{-1}(5)]$; $cos[cot^{-1}(-5/9)]$ $\left[\frac{2\sqrt{10}}{7};\frac{\sqrt{26}}{26};-\frac{\sqrt{106}}{106}\right]$

67. $cot[cos^{-1}(3/11)]$; $cot[sin^{-1}(4/9)]$; $cot[tan^{-1}(-5)]$ $\left[\frac{3\sqrt{7}}{28};\frac{\sqrt{65}}{4};-\frac{1}{5}\right]$

68. $sec[cos^{-1}(2/3)]$; $sec[csc^{-1}(7/2)]$; $sec[tan^{-1}(2)]$ $\left[\frac{3}{2};\frac{7\sqrt{5}}{15};\sqrt{5}\right]$

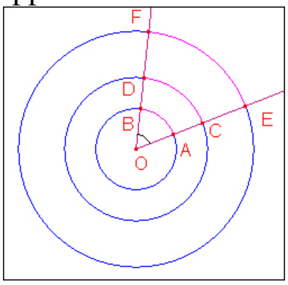
69. $csc[cos^{-1}(-5/8)]$; $csc[tan^{-1}(4/3)]$; $csc[cot^{-1}(10)]$ $\left[\frac{8\sqrt{39}}{39};\frac{5}{4};\sqrt{101}\right]$

Rappresentazione grafica delle funzioni goniometriche elementari

Problema

Come possiamo rappresentare le funzioni goniometriche in un sistema di riferimento cartesiano?

Nel paragrafo precedente abbiamo generalizzato le funzioni goniometriche ad angoli qualsiasi, quindi possiamo scrivere in generale $sin(x)$ per un angolo x che rappresenta un qualsiasi numero reale, positivo, negativo o nullo. Questo ci suggerisce quindi di rappresentare tali funzioni.



Sorge però un problema, le ascisse e le ordinate non sono grandezze omogenee. Infatti se x è un angolo misurato in gradi sessagesimali, è la misura di un'area, mentre l'ordinata, cioè il seno è il rapporto fra due misure lineari. Risulta quindi opportuno trovare una unità di misura per i gradi che risulti omogenea con le funzioni. Per fare ciò possiamo tenere conto del fatto che, come si vede in figura, se consideriamo un angolo questo può essere pensato come un angolo al centro di infinite circonferenze. Quindi dato che uno stesso angolo è legato a infinite circonferenze vuol dire che ci deve essere una relazione fra gli angoli, i raggi e gli archi delle circonferenze. Non è difficile capire che la ovvia relazione è che il rapporto tra la misura dell'arco e il raggio della relativa circonferenza è costante. Possiamo quindi porre la seguente definizione.

Definizione 6

Dato un angolo diciamo sua misura in **radianti** il rapporto tra l'arco che intercetta l'angolo considerato come angolo al centro di una data circonferenza e il raggio della stessa circonferenza.

Esempio 6

Visto quanto abbiamo detto, l'angolo giro in radianti sarà lungo quanto il rapporto dell'intera circonferenza con il suo raggio, cioè $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$. Così l'angolo piatto misurerà metà, cioè π, quello retto π/2, e così via.

In generale vale la seguente proporzione fra la misura di un angolo in gradi sessagesimali, α°, e la relativa misura in gradi radianti:

Regola 1

Si ha: ρ: 180° : π = α° : ρ.

Esempio 7

Vogliamo convertire in radianti la misura 42° 13′ 48″. Portiamo tutto in gradi: $\left(42+\frac{13}{60}+\frac{48}{3600}\right)^{\circ} = 42,23°$.

Quindi $42,23° : 180° = x : \pi \Rightarrow x = \frac{42,23° \cdot \pi}{180°} \approx 0,74$. Ovviamente una analoga proporzione fa passare da radianti a gradi sessagesimali. Così per esempio $x° : 180° = \frac{3\pi}{8} : \pi \Rightarrow x = \frac{180° \cdot \frac{3\pi}{8}}{\pi} = \frac{540°}{8} = 67,5° = 67°30'$.

La misurazione in radianti risolve il problema sollevato, poiché abbiamo a che fare con un numero puro, pertanto possiamo rappresentare graficamente le diverse funzioni goniometriche.
Prima però richiamiamo alcuni concetti relativi alle funzioni.

Definizione 7

Data una funzione $y = f(x)$, diciamo suo **dominio** o **insieme di esistenza**, la totalità dei valori di x per i quali esiste $f(x)$. Diciamo suo **codominio** la totalità dei valori y per i quali l'equazione $y = f(x)$ ammette almeno una soluzione nell'incognita x.

Definizione 8

Data una funzione $y = f(x)$, diciamo che essa è **periodica** di periodo il numero reale P diverso da zero, se si ha: $f(x + P) = f(x), \forall x \in dom(f)$.

Esempio 8

Data la funzione $y = \frac{1}{x-1}$, il suo dominio è dato da tutti i numeri reali escluso 1, poiché la scritta 1/0 non ha alcun significato. Invece il suo codominio è dato da tutti i numeri reali escluso lo zero, poiché l'equazione $y = \frac{1}{x-1}$ ha come soluzione $x - 1 = \frac{1}{y} \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{y}$, che è un numero reale per tutti gli y tranne che per $y = 0$.

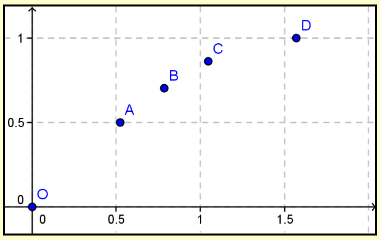
La funzione non è periodica per nessun numero reale P, perché l'equazione $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x+P-1} \Rightarrow x - 1 = x + P - 1 \Rightarrow 0 = P$, ha soluzione solo per $P = 0$.

Adesso possiamo passare alla rappresentazione grafica del seno.

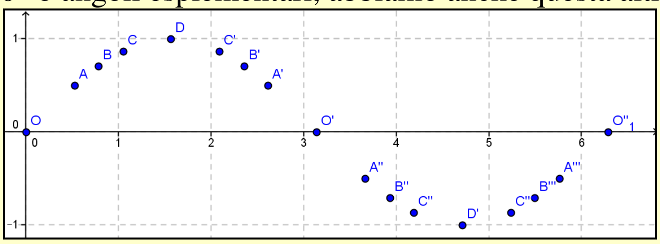
Esempio 9

Consideriamo alcuni valori noti del seno e rappresentiamoli in un sistema di riferimento.

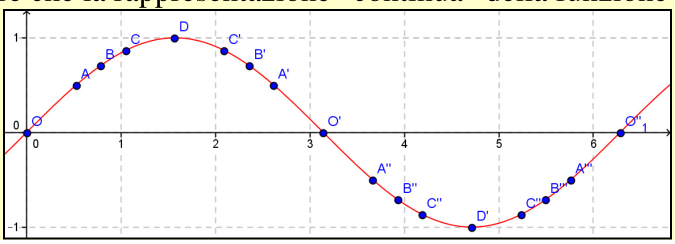
x	0	$30° = \pi/6$	$45° = \pi/4$	$60° = \pi/3$	$90° = \pi/2$
$sin(x)$	0	½	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



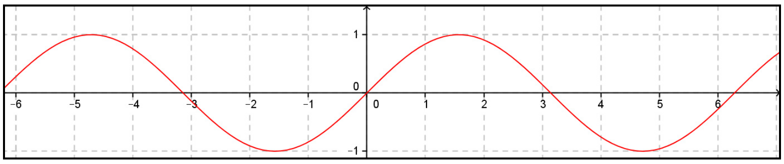
Tenuto conto che la funzione seno assume gli stessi anche per gli angoli supplementari e valori opposti per angoli che differiscono di 180° o angoli esplementari, abbiamo anche questa altra rappresentazione.



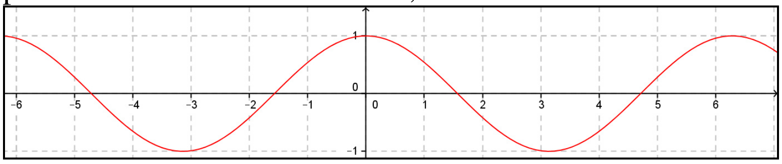
E quindi non è difficile capire che la rappresentazione "continua" della funzione seno è la seguente.



Se poi teniamo conto della periodicità e della definizione del seno per angoli qualsiasi, possiamo dire che ogni 2π, la precedente curva si ripete identica. Quindi la cosiddetta *sinusoide* ha l'andamento in figura.

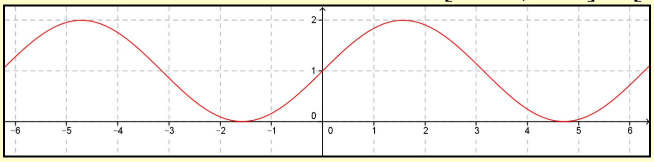


Così possiamo dire che è una funzione periodica, di periodo proprio 2π; è anche una funzione limitata, dato che assume valori compresi nell'intervallo $[-1; 1]$. Vista la stretta relazione fra seno e coseno, si accetta facilmente la seguente rappresentazione della *cosinusoide*, come traslazione di $\pi/2$ della sinusoide.

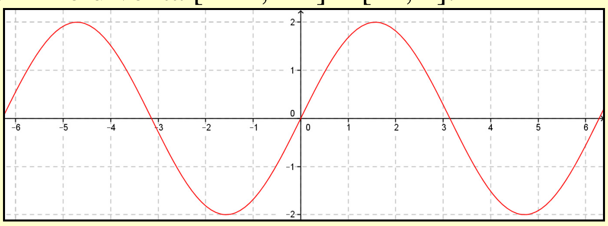


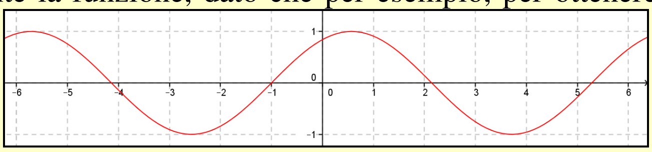
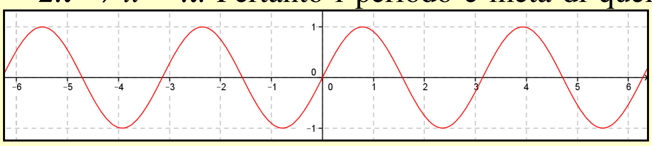
Esempio 10

- Vogliamo disegnare il grafico della funzione $y = 1 + sin(x)$, determinandone periodo e codominio. Non è difficile capire che il periodo della funzione non cambia, poiché ci stiamo limitando ad a aggiungere 1 a ogni ordinata, quindi cambia solo il codominio che adesso è $[-1+1; 1+1] = [0; 2]$.



- Adesso vogliamo disegnare il grafico di $y = 2sin(x)$, determinandone periodo e codominio. Ancora una volta il periodo non cambia, ma cambia il codominio, dato che stavolta ci limitiamo a moltiplicare per 2 ogni ordinata, quindi il codominio diventa $[-1\cdot 2; 1\cdot 2] = [-2; 2]$.



- Ora vogliamo rappresentare $y = sin(1 + x)$. Ancora una volta il periodo non cambia e neanche il codominio, ci limitiamo solo a traslare orizzontalmente la funzione, dato che per esempio, per ottenere  l'ordinata 0, deve essere $1 + x = 0$, cioè $x = -1$.
- Infine vogliamo rappresentare $y = sin(2x)$. Stavolta il periodo cambia, perché per esempio il massimo della funzione si avrà quando $2x = \pi/2 \Rightarrow x = \pi/4$, e il minimo quando $2x = 3\pi/2 \Rightarrow x = 3\pi/4$. Perciò la funzione "conclude" il suo primo "giro" quando $2x = 2\pi \Rightarrow x = \pi$. Pertanto i periodo è metà di quello della funzione $sin(x)$, mentre non varia il codominio. 

Tenuto conto del precedente esempio possiamo enunciare il seguente risultato.

Teorema 7

Le funzioni $y = a + b \cdot sin(cx + d)$, $y = a + b \cdot cos(cx + d)$

- hanno periodo $2\pi/c$;
- hanno codominio $[a - |b|; a + |b|]$;
- incontrano l'asse delle ordinate nel punto $(0; a + b \cdot sin(d))$, rispettivamente $(0; a + b \cdot cos(d))$.

Dimostrazione

Lavoreremo sul seno, lasciando le dimostrazioni sul coseno per esercizio.

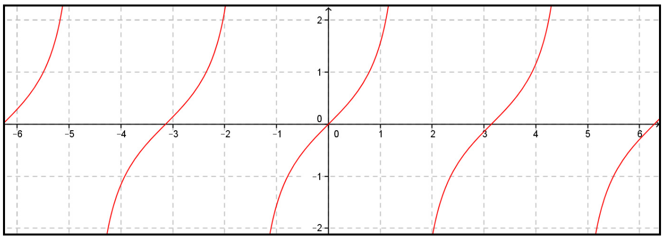
- Proviamo che la funzione è periodica del periodo detto. Abbiamo:

$$a+b\cdot sin\left(c\cdot\left(x+\frac{2\pi}{c}\right)+d\right)=a+b\cdot sin\left(cx+2\pi+d\right)$$

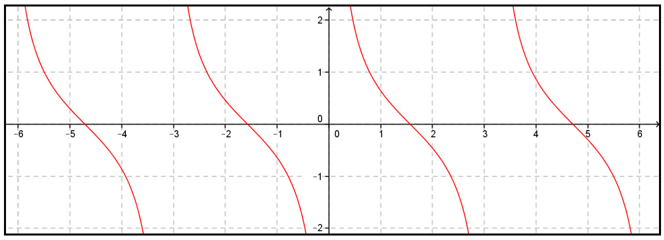
Abbiamo visto che aggiungere 2π all'argomento del seno non fa cambiare il risultato, quindi possiamo scrivere: $a + b \cdot sin(cx + 2\pi + d) = a + b \cdot sin(cx + d)$, che è quanto volevamo provare.

- Il minimo di $sin(x)$ si ha per $x = 3\pi/2$ e vale –1. Quindi il minimo di $y = a + b \cdot sin(cx + d)$ si ha quando $cx + d = 3\pi/2 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2c}-\frac{d}{c}$. In questo caso si ha: $y = a – b$. Allo stesso modo il massimo si ha quando $cx + d = \pi/2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2c}-\frac{d}{c}$. e si ha: $y = a + b$. Non è detto che sia $a + b > a – b$, infatti per esempio se $a = – 2$ e $b = +3$, $a + b = 1 > a – b = –5$; ma se $a = + 2$ e $b = –3$, $a + b = –1 < a – b = 5$. Invece è sicuramente vero che si ha sempre $a + |b| > a – |b|$.
- La dimostrazione è banale, basta sostituire 0 a x.

Passiamo a rappresentare le altre funzioni goniometriche. Per la tangentoide e la cotangentoide il periodo è π e il loro dominio non è dato da tutti i numeri reali, dato che sappiamo che non hanno senso le scritte $tan(\pi/2 + k\pi)$, $cot(k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. I grafici sono simili ai seguenti.



tan(*x*)



cot(*x*)

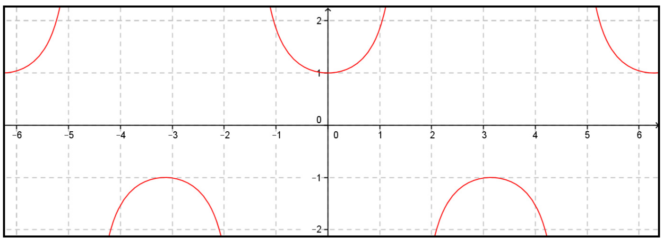
Vale il seguente risultato, la cui dimostrazione è lasciata per esercizio.

Teorema 8

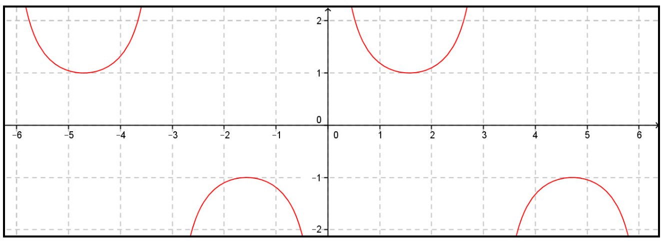
Le funzioni funzioni $y = a + b \cdot tan(cx + d)$, $y = a + b \cdot cot(cx + d)$

- hanno periodo π/c;
- hanno $\mathbb{R}$ come codominio.

Anche secante e cosecante non sono sempre definite. I loro grafici sono i seguenti.



sec(*x*)



csc(*x*)

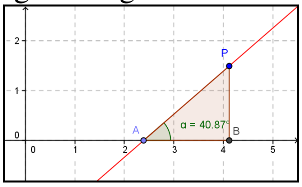
Anche in questo caso abbiamo un teorema la cui dimostrazione è lasciata per esercizio.

Teorema 9

Le funzioni $y = a + b \cdot sec(cx + d)$, $y = a + b \cdot csc(cx + d)$

- hanno periodo $2\pi/c$;
- hanno codominio $(–\infty; a – |b|] \cup [a + |b|; +\infty)$.

Concludiamo con un'interpretazione trigonometrica del coefficiente angolare di una retta. Sappiamo che il coefficiente angolare della retta in figura è dato dal rapporto fra l'ordinata del generico punto P e la sua stessa ascissa. Tale rapporto è però anche la tangente trigonometrica dell'angolo indicato.

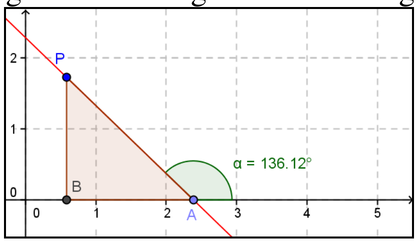


Pertanto possiamo enunciare il seguente risultato.

Teorema 10

Il coefficiente angolare di una retta in una sistema di riferimento cartesiano ortogonale è la tangente trigonometrica dell'angolo che la stessa retta forma con il semiasse positivo delle ascisse.

Il precedente risultato è un'ulteriore giustificazione del fatto che la tangente di un angolo ottuso è negativa, dato che in questo caso la pendenza della retta è appunto negativa.



Così come giustificano il fatto che la tangente non è definita a 90°, essendo in questo caso la pendenza infinita. Concludiamo il paragrafo studiando le funzioni goniometriche inverse. Come facciamo a passare da $y = sin(x)$ a $y = sin^{-1}(x)$? Le funzioni sono fra loro inverse, come lo sono per esempio le funzioni $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, nel senso che se la funzione quadrato permette di determinare appunto il quadrato di un numero, la radice quadrata permette di effettuare l'operazione inversa, ossia trovare il numero il cui quadrato è un certo numero. Cominciamo ad osservare che l'operazione inversa non è sempre possibile, per esempio $\sqrt{-4}$ non esiste nei numeri reali. Dal punto di vista della geometria analitica determinare la funzione inversa di $y = f(x)$ equivale a determinare una funzione che trovi le ascisse a partire dalle ordinate. Questo lavoro è possibile solo se per ogni ordinata c'è al massimo una sola ascissa. Poniamo allora la seguente definizione.

Definizione 9

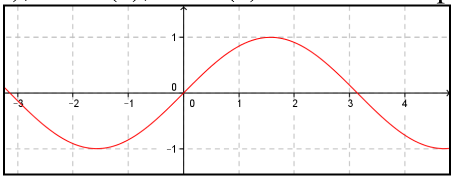
Una funzione $y = f(x)$ si dice **iniettiva** o **invertibile** se l'equazione nell'incognita x: $y = f(x)$ ammette al massimo una sola soluzione reale per ogni y del codominio di f. In simboli: $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$.

Quindi una funzione iniettiva ad ascisse diverse associa sempre ordinate diverse, quindi è invertibile, dato che a partire da una ordinata possiamo risalire univocamente all'ascissa.

Esempio 11

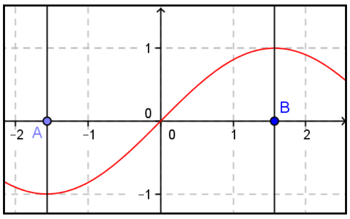
- La funzione che associa a ogni macchina la propria targa è invertibile perché non esistono due macchine che hanno la stessa targa, quindi possiamo ricavare, a partire dalla targa la macchina e quindi anche i suoi proprietari.
- Non è iniettiva invece la funzione che a ogni macchina associa la propria marca, dato che ovviamente per ogni marca ci sono migliaia di auto.
- Non è iniettiva neanche la funzione $y = x^2$, perché si ha, per esempio $3^2 = (-3)^2 = 9$, quindi non possiamo risalire dall'ordinata 9 all'ascissa da cui essa proviene. Per poterla rendere iniettiva e quindi invertibile dobbiamo restringere il suo dominio ai soli numeri positivi. In questo modo dal 9 posso risalire al 3, cioè $\sqrt{9} = 3$.

L'esempio precedente ci ha fatto vedere quindi che possiamo rendere iniettive anche funzioni che in generale non lo sono. Ciò vale in generale per tutte le funzioni periodiche, che ovviamente non possono essere invertite proprio perché ci sono infinite ascisse, tutte differenti fra loro per un multiplo del periodo, che hanno la stessa ordinata. Quindi in particolare nessuna funzione goniometrica è invertibile, ciononostante le calcolatrici, hanno i tasti $sin^{-1}(x)$, $cos^{-1}(x)$, $tan^{-1}(x)$. Ciò accade proprio restringendo il dominio delle funzioni.



Vediamo il grafico.

Osserviamo che ci sono infiniti intervalli in cui la funzione seno è iniettiva, per esempio [–π/2; π/2]

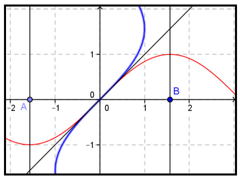


Quindi possiamo dire che la funzione $sin(x)$: [–π/2; π/2] → [– 1; 1] è invertibile e la sua funzione inversa è $sin^{-1}(x)$: [– 1; 1] → [–π/2; π/2]. In effetti il risultato precedente è generale.

Teorema 11

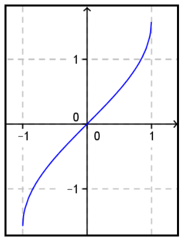
Data una funzione invertibile $f : A \rightarrow B$, la sua inversa è $f^{-1} : B \rightarrow A$. Cioè dominio e codominio di una funzione e della propria inversa si scambiano.

Come possiamo costruire graficamente la precedente funzione? Dato che dobbiamo scambiare l'ascissa con



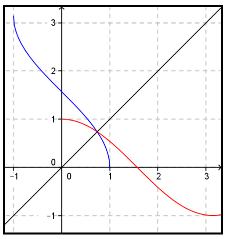
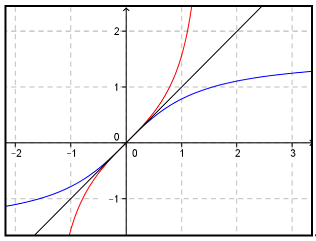
l'ordinata basta effettuare una simmetria assiale rispetto alla retta di equazione $y = x$.

Però l'inversa scambia dominio e codominio, pertanto l'inversa è la funzione che indichiamo con il simbolo



$sin^{-1}(x)$: [– 1; 1] → [–π/2; π/2], quindi graficamente abbiamo la figura seguente:

In modo analogo determiniamo le inverse delle altre funzioni goniometriche, sempre indicate in blu:

$cos^{-1}(x)$: [– 1; 1] → [0; π]  $tan^{-1}(x)$: (– ∞; +∞) → (–π/2; π/2) .

Osserviamo che il codominio di $tan^{-1}(x)$ è un intervallo aperto poiché la detta funzione non è definita agli estremi, infatti non esistono né $tan(–π/2)$, né $tan(π/2)$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

A quanti gradi radianti equivalgono 105°? Vale la seguente proporzione: 180°: π = 105°: *x*. Quindi risolvendo rispetto a *x* abbiamo: $x = \frac{\pi \cdot 105°}{180°} = \frac{7}{12}\pi$.

Convertire in radianti le seguenti misure in gradi sessagesimali

Livello 1

1. 40°; 36°; 72°; 45°30′; 90°45′; 120°20′; 220°40′30″
[2π/9; π/5; 2π/5; 91π/360; 121π/40; 361π/540; 8827π/7200]
2. 300°48″ ; 170°25′ ; 30°25′50″ ; –18°42′30″ ; 23°48′10″ ; 45°30′15″; 56°12′32″; –52°46′12″
[22501π/13500; 409π/432; ≈ 0,53; ≈0,33; ≈0,42; ≈0,79; ≈0,98; ≈ – 0,92]

Lavoriamo insieme

- A quanti gradi sessagesimali equivalgono 3π/5 radianti? Basta sostituire 180° a π: $\frac{3}{\cancel{5}} \cdot \cancel{180}^{36}° = 108°$.
- Invece 3π/7 radianti? Analogo procedimento solo che stavolta otteniamo un valore non intero, quindi dobbiamo portare in gradi, primi e secondi. 3/7 · 180° ≈ 77,14° = 77°8′24″.

Convertire in gradi sessagesimali le seguenti misure in radianti

Livello 1

3. π/8; 2π/3; 5π/4; 11π/5; 12π/7; 15π/13 [22°30′ ; 120° ; 225° ; 396° ; ≈ 308°34′17″ ; ≈ 207°41′32″]
4. 31π/4; 50π/11; 130π/3; 3,5; 1,8 [1395° ; ≈ 818°10′55″ ; 7800° ; ≈ 200°32′7″ ; ≈ 103°7′57″]
5. 2 ; 12,15 ; 31,71 ; –4,13 [≈ 114°35′30″ ; ≈ 696°8′37″ ; ≈ 1816°50′57″ ; ≈ – 236°37′54″]

Livello 2

Stabilire quali delle seguenti scritte sono vere

6. $sin(2) > sin(1)$; $sin(4) > sin(2)$; $cos(2) > cos(1)$; $cos(4) > cos(2)$ [Vero ; Falso ; Falso ; Falso]
7. $tan(2) > tan(1)$; $tan(4) > tan(2)$; $cot(2) > cot(1)$; $cot(4) > cot(2)$ [Falso ; Falso ; Falso ; Falso]
8. $sec(2) > sec(1)$; $sec(4) > sec(2)$; $csc(2) > csc(1)$; $csc(4) > csc(2)$ [Falso ; Vero ; Falso ; Falso]

Livello 3

9. $sin(2x) \ge sin(x)$, $0 \le x \le \pi/2$; $sin(2x) \ge sin(x)$, $0 \le x \le \pi/4$; $sin(2x) \le sin(x)$, $\pi/2 \le x \le \pi$ [F; V; V]
10. $sin(2x) \ge sin(x)$, $\pi \le x \le 3\pi/2$; $cos(2x) \ge cos(x)$, $0 \le x \le \pi/2$; $cos(2x) \ge cos(x)$, $\pi \le x \le 3\pi/2$ [V ; V ; F]
11. $tan(2x) \ge tan(x)$, $0 \le x < \pi/2$; $tan(2x) \ge tan(x)$, $\pi/2 < x \le \pi$ [Vero ; Vero]

Lavoriamo insieme

Vogliamo semplificare la seguente espressione: $\left(sin\ (\pi) + cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \cdot \left(tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - cot\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$. Basta sostituire a ciascuna funzione il proprio valore numerico: $\left(0 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \sqrt{3}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

Calcolare il valore numerico delle seguenti espressioni

Livello 1

12. a) $sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - cos(\pi) + tan(0) - cot\left(\frac{\pi}{2}\right)$; b) $sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + tan\left(\frac{\pi}{3}\right) - cot\left(\frac{\pi}{3}\right) - cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ $\left[\text{a) } 2; \text{b) } \frac{7 \cdot \sqrt{3} - 3}{6}\right]$
13. a) $\left[sec\left(\frac{\pi}{4}\right) - cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \cdot \left[sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + csc\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$; b) $\frac{cos^2(\pi) - tan^2(\pi)}{1 + sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}$ $\left[\text{a) } \frac{8 \cdot \sqrt{6} - 3 \cdot \sqrt{3} - 3 \cdot \sqrt{2} + 12}{12}; \text{b) } \frac{2}{3}\right]$

14. a) $\frac{sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right)+csc^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{sec^2\left(\frac{\pi}{6}\right)+csc^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}$; b) $\left[cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]\cdot\left[tan\left(\frac{14}{17}\pi\right)+sec\left(\frac{31}{38}\pi\right)\right]$ [a) 3/2; b) 0]

15. a) $sin^2\left(\frac{3}{7}\pi\right)+cos^2\left(\frac{3}{7}\pi\right)-1$; b) $\frac{sec\left(\frac{\pi}{3}\right)-csc\left(\frac{\pi}{4}\right)}{sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}+\frac{sec\left(\frac{\pi}{3}\right)+csc\left(\frac{\pi}{4}\right)}{sin\left(\frac{\pi}{4}\right)-cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ $\left[\text{a) } 0;\ \text{b) } 12\cdot\sqrt{2}\right]$

16. a) $\frac{\frac{sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+tan^2\left(\frac{\pi}{6}\right)}{1-cot^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}}{\frac{sec(\pi)-sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1+tan^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}}$; b) $\frac{sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)-cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{tan^2\left(\frac{\pi}{6}\right)+cot^2\left(\frac{\pi}{6}\right)}$ [a) – 16/3; b) 0]

Lavoriamo insieme

Semplificare la seguente espressione: $\frac{cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)-sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)}{tan\left(\frac{5}{3}\pi\right)+cot\left(\frac{11}{6}\pi\right)}$.

Possiamo scrivere: $\frac{cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)-sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)}{tan\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)+cot\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{-cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{-tan\left(\frac{\pi}{3}\right)-cot\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\sqrt{3}-\sqrt{3}}=\frac{1-\sqrt{3}}{4\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-3}{12}$

Semplificare le seguenti espressioni

Livello 1

17. a) $sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)-cos\left(\frac{7}{6}\pi\right)+tan(2\pi)-sec\left(\frac{5}{4}\pi\right)$; b) $\frac{sec\left(\frac{5}{3}\pi\right)\cdot cos\left(\frac{7}{6}\pi\right)}{csc\left(\frac{5}{7}\pi\right)\cdot sin\left(\frac{12}{7}\pi\right)}$ $\left[\text{a) } \sqrt{2};\text{b) } \sqrt{3}\right]$

18. a) $tan\left(\frac{5}{6}\pi\right)-cot\left(\frac{3}{4}\pi\right)+csc\left(\frac{11}{6}\pi\right)$; b) $\frac{sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)+cos\left(\frac{7}{4}\pi\right)}{sec\left(\frac{5}{4}\pi\right)-csc\left(\frac{\pi}{4}\right)}$ $\left[\text{a) } -\frac{3+\sqrt{3}}{3};\text{b) } -\frac{1}{2}\right]$

19. a) $\left[\frac{sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)+cos\left(\frac{5}{3}\pi\right)}{sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)-cos\left(\frac{4}{3}\pi\right)}\right]^2$; b) $\frac{\frac{sec\left(\frac{3}{4}\pi\right)+csc\left(\frac{2}{3}\pi\right)}{sin\left(\frac{5}{4}\pi\right)-cos\left(\frac{4}{3}\pi\right)}}{1+tan^2\left(\frac{11}{6}\pi\right)}$ $\left[\text{a) } 7-4\cdot\sqrt{3};\text{b) } \frac{6-2\cdot\sqrt{6}-2\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{2}}{2}\right]$

20. a) $cot\left(\frac{5}{3}\pi\right)\cdot\frac{sin^2\left(\frac{5}{8}\pi\right)+cos^2\left(\frac{5}{8}\pi\right)}{cot^2\left(\frac{7}{6}\pi\right)-tan^2\left(\frac{7}{6}\pi\right)}$; b) $\left[sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)-cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)\cdot sec\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right]^2$ $\left[\text{a) } -\frac{\sqrt{3}}{8}\text{; b) } 4\right]$

21. a) $\left[sin\left(\frac{7}{6}\pi\right)-cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right]\cdot\left[sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)+cos\left(\frac{7}{6}\pi\right)\right]$; b) $\frac{\left[sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)-sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right]^2}{cos\left(\frac{11}{6}\pi\right)+tan\left(\frac{5}{4}\pi\right)}$

$\left[\text{a) } \frac{\sqrt{3}-2}{2}\text{; b) } \frac{4\cdot\sqrt{6}-5\cdot\sqrt{3}-6\cdot\sqrt{2}+10}{2}\right]$

Livello 2

22. a) $sin(\pi + \alpha) - tan(2\pi - \alpha) \cdot cot(\alpha)$; b) $\frac{sin(\pi+\alpha)-sin(-\alpha)}{cos(\pi-\beta)+cos(2\pi-\beta)}$ [a) $1 - sin(\alpha)$; Priva di significato]

23. a) $cos(\pi + \beta) \cdot sec(\pi - \beta) + sin(2\pi - \beta) \cdot csc(-\beta)$; b) $\frac{sin\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)+cos\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)}{tan\left(\frac{3\pi}{2}+\gamma\right)-cot\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)}$ $\left[\text{a) } 2\text{; b) } -\frac{sin(\gamma)\cdot cos(\gamma)}{sin(\gamma)+cos(\gamma)}\right]$

24. a) $\frac{sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{cos(\pi-\alpha)\cdot cos(\pi+\alpha)}$; b) $[sin(180° + \alpha) + cos(270° + \alpha)]^2$ [a) 1; b) 0]

25. a) $\left[sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)-1\right]^2$; b) $\frac{sec(\pi-\alpha)+csc(\pi+\alpha)}{sec\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-csc\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$ $\left[\text{a) } 1\text{; b) } \frac{sin(\alpha)+cos(\alpha)}{sin(\alpha)-cos(\alpha)}\right]$

Lavoriamo insieme

Semplificare la seguente espressione: $sin\left(\frac{13}{2}\pi\right)\cdot cos\left(\frac{15}{4}\pi\right)-tan\left(\frac{19}{3}\pi\right)\cdot cot\left(\frac{17}{6}\pi\right)$.

Si ha: $sin\left(\frac{12+1}{2}\pi\right)\cdot cos\left(\frac{16-1}{4}\pi\right)-tan\left(\frac{18+1}{3}\pi\right)\cdot cot\left(\frac{18-1}{6}\pi\right)=sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cdot cos\left(4\pi-\frac{\pi}{4}\right)-tan\left(6\pi+\frac{\pi}{3}\right)\cdot$

$\cdot cot\left(3\pi-\frac{\pi}{6}\right)=sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)-tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot cot\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left[-cot\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]=$

$=1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}\cdot\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+3.$

Livello 2

26. a) $sin\left(3\pi+\frac{\pi}{6}\right)+cos\left(4\pi-\frac{\pi}{3}\right)-sec\left(11\pi+\frac{\pi}{4}\right)$; b) $cos\left(\frac{5}{2}\pi\right)\cdot sin\left(\frac{21}{4}\pi\right)\cdot tan\left(\frac{20}{3}\pi\right)$ $\left[\text{a) } \sqrt{2}\text{; b) } 0\right]$

27. a) $\frac{cos\left(\frac{17}{3}\pi\right)+sin\left(\frac{23}{3}\pi\right)}{sec\left(\frac{25}{6}\pi\right)-csc\left(\frac{23}{6}\pi\right)}$; b) $\frac{sin^2\left(\frac{5}{2}\pi\right)+cos^2(9\pi)}{sin\left(\frac{19}{4}\pi\right)-cos^2\left(\frac{17}{4}\pi\right)}$ $\left[\text{a) } \frac{3-2\cdot\sqrt{3}}{4}\text{; b) } 4\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$

28. a) $tan\left(\frac{55}{4}\pi\right)-\frac{cot\left(\frac{29}{4}\pi\right)+1}{sec^2\left(\frac{35}{6}\pi\right)-1}$; b) $\frac{sin(5\pi)-cos(42\pi)+tan(31\pi)}{cot\left(\frac{29}{2}\pi\right)-sec(67\pi)+csc\left(\frac{73}{2}\pi\right)}$ [a) –7; b) –1/2]

29. $\left[sin\left(\frac{23}{6}\pi\right)+cos\left(-\frac{11}{3}\pi\right)\right]\cdot\left[sin\left(-\frac{33}{6}\pi\right)-cos\left(\frac{24}{3}\pi\right)\right]$ [0]

30. $\left[sin^2\left(\frac{15}{4}\pi\right)+cos^2\left(\frac{25}{6}\pi\right)-1\right]\cdot\left[tan^2\left(\frac{14}{3}\pi\right)+cot^2\left(\frac{16}{3}\pi\right)+1\right]$ [13/2]

31. $\dfrac{cot\left(\frac{55}{3}\pi\right)+sec\left(\frac{21}{4}\pi\right)}{tan(15\pi)-1}+\dfrac{cot\left(\frac{53}{3}\pi\right)-sec\left(\frac{20}{4}\pi\right)}{tan(16\pi)+1}$ $\left[\dfrac{3+6\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{3}}{6}\right]$

32. $sin\left(\frac{11\pi}{2}-\theta\right)+cos\left(\frac{23\pi}{2}+\theta\right)-tan(17\pi-\theta)$ [$tan(\theta) - cos(\theta) + sin(\theta)$]

33. $tan(15\pi+\delta)\cdot cot\left(\frac{37}{2}\pi+\delta\right)-sec(15\pi+\delta)\cdot cos\left(\frac{21}{2}\pi-\delta\right)$ [$tan(\delta) - tan^2(\delta)$]

34. $\dfrac{sin\left(\frac{15}{2}\pi+\beta\right)-cos\left(\frac{37}{2}\pi-\beta\right)}{sin\left(\frac{41}{2}\pi-\beta\right)+cos\left(\frac{73}{2}\pi+\beta\right)}$; b) $\left[\dfrac{sin\left(\frac{11}{3}\pi\right)+cos\left(\frac{11}{2}\pi\right)}{tan\left(\frac{11}{4}\pi\right)-1}\right]^2$ $\left[\text{a) }\dfrac{sin(\beta)+cos(\beta)}{sin(\beta)-cos(\beta)};\text{b) }\dfrac{3}{16}\right]$

35. $sin\left(\frac{19}{2}\pi+\alpha\right)\cdot csc\left(\alpha-\frac{13}{2}\pi\right)-cos\left(\frac{27}{2}\pi-\alpha\right)\cdot sec(\alpha-47\pi)$ [$1 - tan(\alpha)$]

36. a) $\dfrac{sin^2(13\pi+\alpha)+cos^2(15\pi+\alpha)}{tan^2(16\pi-\alpha)\cdot cot\left(\frac{15}{2}\pi+\alpha\right)}$; b) $\dfrac{tan(51\pi-\gamma)+cot\left(\frac{67}{2}\pi+\gamma\right)}{tan(19\pi+\gamma)-cot\left(\frac{75}{2}\pi-\gamma\right)}$ [a) $-cot^3(\alpha)$;b) Priva di significato]

37. a) $\left[cot\left(\frac{43}{2}\pi+\beta\right)\cdot tan(87\pi-\beta)+1\right]^2$; b) $1+\dfrac{sin\left(\frac{45}{2}\pi\right)}{cos\left(\frac{38}{3}\pi\right)}-\dfrac{tan\left(\frac{67}{6}\pi\right)}{cot\left(\frac{101}{4}\pi\right)}$ $\left[\text{a) }\left(tan^2(\beta)+1\right)^2;\text{b) }-\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right]$

Lavoriamo insieme

Ci sono numeri reali x per i quali sin(x) ha lo stesso valore, indipendentemente dal fatto che x sia considerato un angolo in gradi sessagesimali o in radianti?

Poiché vale la proporzione: $\frac{x°}{180°}=\frac{x^r}{\pi}$, abbiamo che $x°=\frac{x^r\cdot 180°}{\pi}$, quindi $sin(x°)=sin\left(\frac{180\cdot x}{\pi}\right)$. Ciò implica o che gli angoli rappresentino lo stesso angolo, eventualmente con una certa periodicità (per esempio $sin(35°) = sin(35° + 360°) = sin(35° + 2 \cdot 360°) = \ldots = sin(35° + k \cdot 360°)$). Quindi: $sin(x)=sin\left(\frac{180\cdot x}{\pi}\right)\Rightarrow x=\frac{180\cdot x}{\pi}+k360°$, cioè: $x=\frac{360\pi k}{\pi-180}$. Ma anche i seni di angoli fra loro supplementari sono uguali (per esempio $sin(35°) = sin(180° - 35°) = sin(145°) = = sin(145° + k \cdot 360°)$). Pertanto $x=180°-\frac{180\cdot x}{\pi}+k360°\Rightarrow x=\frac{180\pi\cdot(2k+1)}{\pi+180}$. Così $sin\left(\frac{360\pi}{\pi-180}\right)\approx-0,11137\vee sin\left(\frac{180\pi}{\pi+180}\right)\approx 0,0538$, indipendentemente dal fatto che l'argomento sia misurato in gradi sessagesimali o gradi radianti.

Livello 3

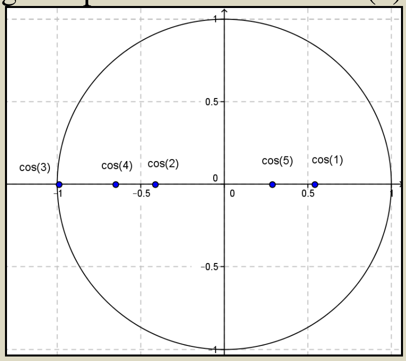
38. Ci sono numeri reali x per i quali $cos(x)$ ha lo stesso valore, indipendentemente dal fatto che x sia considerato un angolo in gradi sessagesimali o in radianti? $\left[x=\dfrac{360\pi k}{\pi-180}\vee x=\dfrac{360\pi k}{\pi+180}\right]$

39. Ci sono numeri reali x per i quali $tan(x)$ ha lo stesso valore, indipendentemente dal fatto che x sia considerato un angolo in gradi sessagesimali o in radianti? $\left[x=\dfrac{180\cdot\pi\cdot k}{\pi-180}\right]$

Lavoriamo insieme

Mettere in ordine crescente i seguenti numeri: $cos(1)$, $cos(2)$, $cos(3)$, $cos(4)$, $cos(5)$.

L'unità di misura è in radianti. Intanto osserviamo che 1 radiante è un angolo del primo quadrante ($\pi/2 > 1$), 2 e 3 stanno invece nel secondo quadrante $\pi/2 < 2 < 3 < \pi$, 4 nel III quadrante $\pi < 4 < 3\pi/2$ e 5 nel IV quadrante $3\pi/2 < 5 < 2\pi$. Poiché sappiamo che la funzione $\cos(x)$ è decrescente in $[\pi/2 ; \pi/]$ si ha: $cos(2) > cos(3)$. Inoltre $cos(2)$, $cos(3)$ e $cos(4)$ sono numeri negativi, quindi confrontiamo fra $cos(1)$ e $cos(5)$, chi è il maggiore. Ciò dipende dal confronto fra $(\pi/2 – 1)$ e $(5 – 3\pi/2)$. Non è difficile capire che il primo numero è maggiore, pertanto $cos(1) > cos(5)$. Allo stesso modo, poiché 3 è più vicino a π di quanto 2 sia più vicino a $\pi/2$, e dato che parliamo di numeri negativi possiamo scrivere $cos(1) > cos(5) > cos(2) > cos(4) > cos(3)$. A lato vi è la figura esplicativa.

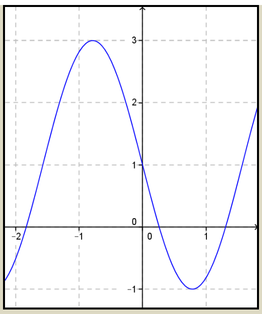


Livello 3

Mettere in ordine decrescente i seguenti numeri, tenendo conto che l'unità di misura è in radianti

40. $sin(1)$, $sin(2)$, $sin(3)$, $sin(4)$, $sin(5)$ $[sin(2) > sin(1) > sin(3) > sin(4) > sin(5)]$
41. $sec(1)$, $sec(2)$, $sec(3)$, $sec(4)$, $sec(5)$ $[sec(5) > sec(1) > sec(3) > sec(4) > sec(2)]$
42. $csc(1)$, $csc(2)$, $csc(3)$, $csc(4)$, $csc(5)$ $[csc(3) > csc(1) > csc(2) > csc(5) > csc(4)]$
43. $tan(1)$, $tan(2)$, $tan(3)$, $tan(4)$, $tan(5)$ $[tan(1) > tan(4) > tan(3) > tan(2) > tan(5)]$
44. $cot(1)$, $cot(2)$, $cot(3)$, $cot(4)$, $cot(5)$ $[cot(4) > cot(1) > cot(5) > cot(2) > cot(3)]$
45. $sin(2)$, $sin(6)$, $sin(8)$, $sin(10)$, $sin(12)$ $[sin(8) > sin(2) > sin(6) > sin(12) > sin(10)]$
46. $cos(3)$, $cos(7)$, $cos(9)$, $cos(10)$, $cos(11)$ $[cos(7) > cos(11) > cos(10) > cos(9) > cos(3)]$
47. $sec(–4)$, $sec(–2)$, $sec(3)$, $sec(6)$, $sec(8)$ $[sec(6) > sec(3) > sec(–4) > sec(–2) > sec(8)]$
48. $csc(–4)$, $csc(–2)$, $csc(3)$, $csc(8)$, $csc(9)$ $[csc(3) > csc(9) > csc(–4) > csc(8) > csc(–2)]$
49. $tan(–1)$, $tan(5)$, $tan(7)$, $tan(10)$, $tan(11)$ $[tan(7) > tan(10) > tan(–1) > tan(5) > tan(11)]$
50. $cot(–4)$, $cot(–2)$, $cot(4)$, $cot(8)$, $cot(13)$ $[cot(13) > cot(4) > cot(–2) > cot(8) > cot(–4)]$

Lavoriamo insieme

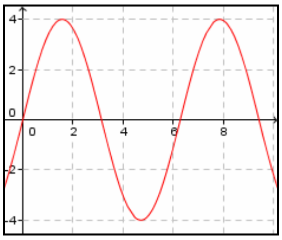


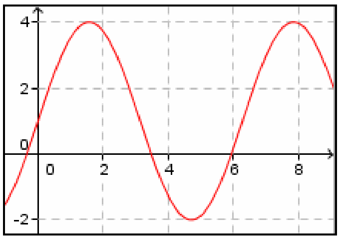
Quanto vale il codominio della funzione in figura?

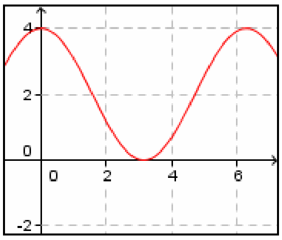
Abbastanza facilmente si vede che la funzione è compresa tra –1 e 3; quindi il codominio è [–1; 3].

Determinare il codominio delle funzioni in figura

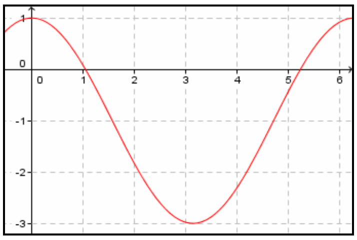
Livello 1

51. a) 

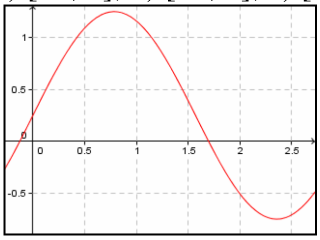
b) 

c) 

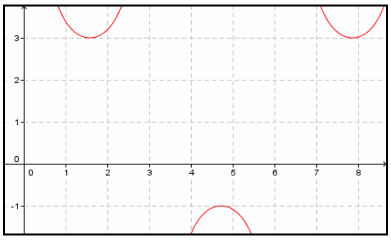
[a) [–4; 4]; b) [–2; 4]; c) [0; 4]]

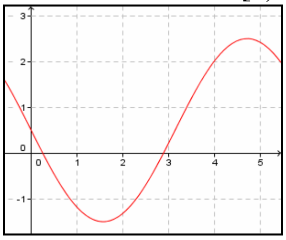
52. a) 

b) 

c) 

[a) [–3; 1]; b) (–∞; 0] ∪ [2; +∞); c) [–3/5; 5/4]]

53. a) 

b) 

[a) (–∞;–1] ∪ [5; +∞); b) [–3/2; 5/2]]

Lavoriamo insieme

Quanto vale il codominio della funzione $y = 1 + 3 \cdot sin(4x - 1)$?
Il massimo della funzione si ha quando è massimo il seno e perciò vale 1 + 3 = 4; il minimo quando è minimo il seno ed è perciò 1 – 3 = –2.

Determinare il codominio delle seguenti funzioni
Livello 2

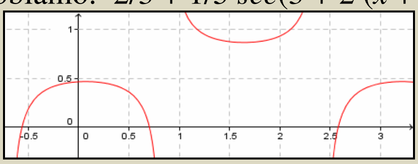
54. a) $y = 1 - sin(x)$; b)$y = 3 - 2cos(2x)$; $y = 3/2 - sin(2x)$; c) $y = 1/4 - 1/2 \cdot cos(x)$
[a) [0; 2]; b) [1; 5]; c) [1/2 ; 5/2] ; d) [–1/4; 3/4]]

55. a) $y = 2/3 + sin(x)$; b) $y = 1 + 2sec(x)$; c) $y = 3 - 2\ sec(x)$)
[a) [1/3; 5/3]; b) (–∞; –1] ∪ [3; +∞); c) (–∞; 1] ∪ [5; +∞)]

56. a) $y = 2 + \sqrt{2} sin(x+1)$; b) $y = \sqrt{3} + 2 \cdot sin(x)$; c) $y = 2/3 - 3/4csc(x)$
$$\left[\text{a) } \left[2-\sqrt{2}; 2+\sqrt{2}\right];\ \text{b) } \left[\sqrt{3}-2; \sqrt{3}+2\right];\ \text{c) } \left(-\infty; -\frac{9}{12}\right] \cup \left[\frac{17}{12}; +\infty\right)\right]$$

Lavoriamo insieme

Quanto vale il periodo della funzione $y = 2/3 + 1/5 \cdot sec(3 + 2x)$?
Conta solo il coefficiente dell'incognita x, il periodo è $2\pi/2 = \pi$. Infatti abbiamo: $2/3 + 1/5 \cdot sec(3 + 2 \cdot (x + \pi))$ $= 2/3 + 1/5 \cdot sec(3 + 2x + 2\pi) = 2/3 + 1/5 \cdot sec(3 + 2x)$. Ecco il grafico:



Determinare il periodo delle seguenti funzioni
Livello 2

57. a) $y = sin(x + 2)$; b) $y = 3 - cos(3x)$; c) $y = 3sin(2x)$; d) $y = 1 + 2cos(x)$; e) $y = tan(4x)$
[a) 2π; b) 2π/3; c) π; d) 2π; e) π/4]

58. a) $y = 1 + 2 \cdot sec(3/4x)$; b) $y = sec(-4/3x)$; c) $y = 5 + 2 \cdot cot(1 - x/3)$; d) $y = sin(1/2 + 2x)$
[a) 8/3π; b) 3/2π; c) 6π; d) π]

59. a) $y = 1/2 - 3/5 \cdot cos(3/4x - 1/2)$; b) $y = -1/2 \cdot tan(3/4x - 1/2)$ c) $y = -2 \cdot sec\left(3 - \sqrt{2} + \frac{1}{5}x\right)$

[a) 8/3π; b) 2π; c) 10π]

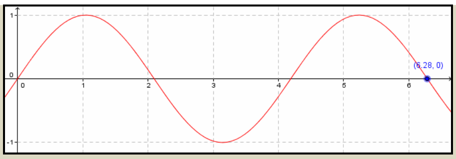
60. a) $y = \sqrt{5} + cot\left(x + \sqrt{3}\right)$; b) $y = 2 - sec\left(1 + \sqrt{2} \cdot x\right)$ $\left[\text{a) } \sqrt{2}\pi;\ \text{b) } \frac{1}{\sqrt{3}}\pi\right]$

Livello 3

61. a) $y = sin\left(\frac{k+1}{k-1} \cdot x\right)$; b) $y = tan\left(\frac{k^2+1}{k^2-1} \cdot x\right)$; c) $y = cos(\pi x)$; d) $y = tan(\pi x)$; e) $y = sec\left(\sqrt{\pi} \cdot x\right)$

$$\left[\text{a) } \frac{2 \cdot (k-1) \cdot \pi}{k+1};\ \text{b) } \frac{2 \cdot \left(k^2-1\right)}{k^2+1} \cdot \pi;\ \text{c) } 2;\ \text{d) } 1;\ \text{e) } \sqrt{2}\pi\right]$$

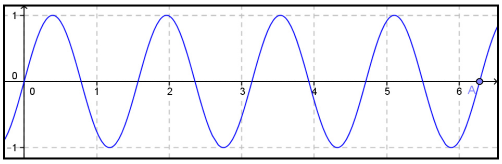
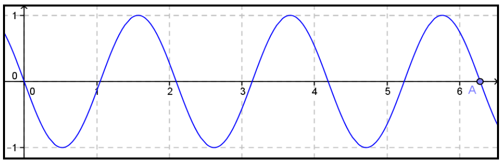
Lavoriamo insieme

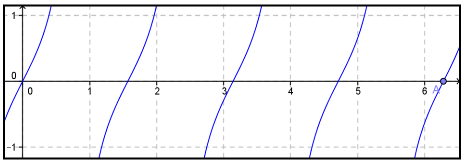
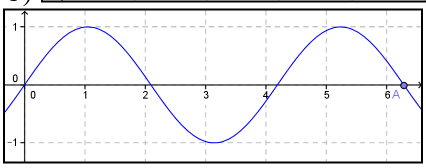


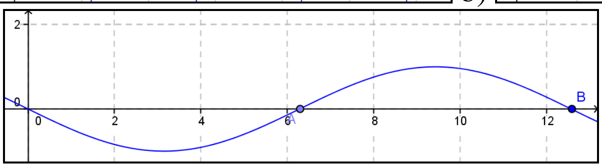
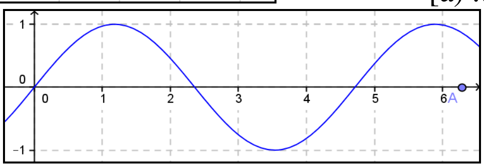
Quanto vale il periodo della funzione in figura?
Quante volte si ripete la funzione in [0; 2π]? Una volta e mezzo, cioè 3/2, quindi il periodo è 2/3 · 2π = 4/3π.

Tenuto conto del grafico determinare il periodo della funzione, che è sempre un multiplo intero di π, o di π/n, n ∈ ℕ. I punti mostrati hanno ascisse multiple di 2π

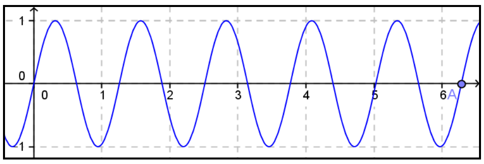
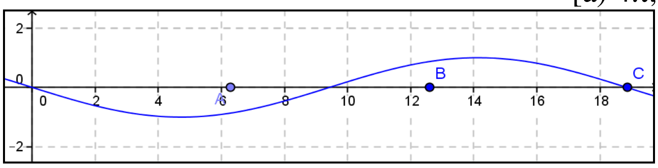
Livello 3

62. a)  b)  [a) π/2; b) 2π/3]

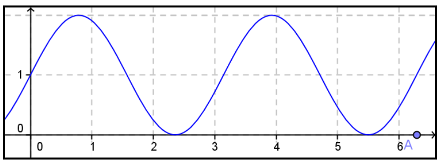
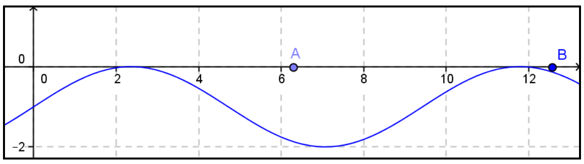
63. a)  b)  [a) π/2; b) 4π/3]

64. a)  b) 

[a) 4π; b) 3π/2]

65. a)  b) 

[a) 2π/5; b) 6π]

66. a)  b)  [a) π ; b) 3π]

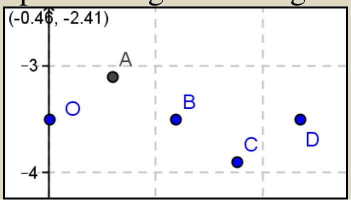
Lavoriamo insieme

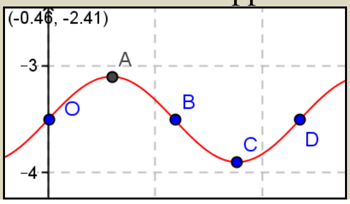
Rappresentare la funzione $y = -7/2 + 2/5 \cdot sin(8/3x)$.
Le sinusoidi sono determinate una volta che conosciamo i punti in cui si raggiunge il minimo e il massimo e quindi i punti che si trovano a metà fra di loro. Ossia i punti che corrispondono a quelli mostrati in figura per la funzione $y = sin(x)$. Cioè i punti di coordinate (0; 0), (π/2; 1), (π; 0), (3π/2; –1), (2π; 0). Dobbiamo quindi

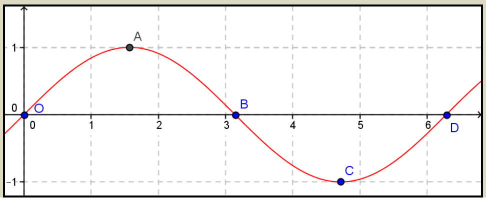
determinare i corrispondenti di questi punti per la nostra funzione.

$\frac{8}{3}x$	x	$y=-\frac{7}{2}+\frac{2}{5}sin\left(\frac{8}{3}x\right)$
0	0	$-\frac{7}{2}=-3{,}5$
$\frac{\pi}{2}\approx 0{,}59$	$\frac{3\pi}{16}$	$-\frac{31}{10}=-3{,}1$
$\pi \approx 1{,}18$	$\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{7}{2}=-3{,}5$
$\frac{3\pi}{2}\approx 1{,}77$	$\frac{9\pi}{16}$	$-\frac{39}{10}=-3{,}9$
$2\pi \approx 2{,}36$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{7}{2}=-3{,}5$

Cioè i punti raffigurati di seguito, da cui facilmente rappresentiamo la funzione







Disegnare qualitativamente i grafici delle seguenti funzioni

Livello 2

67. $y = 1 + 2cos(2x)$; $y = -1 + sin(x/2)$; $y = -1 + 3cos(x)$; $y = 2sin(3x)$; $y = 2 - sin(x/3)$; $y = 1 - sin(4x)$
68. $y = 2 + cos(x/3)$; $y = -2 - 2sin(2x)$; $y = 1/2cos(x/2)$; $y = 1 + 1/2sin(3x)$; $y = 3 + cos(2x)$; $y = 1 + sin(-x)$

Livello 3

69. $y = -3/2 + 4/5cos(6/7x)$; $y = 3 - 2sin(x + 1)$; $y = 4 - 2cos(x/3 + 1)$; $y = 6/7 - 2/3cos(5/4x)$
70. $y = -3 + 2sin(3/2x - 1)$; $y = -4/3 + 6/11cos(4/9x + 1/2)$; $y = -2/3sin(3/4x)$
71. $y = -11/2 + 3/7cos(4/5x - 1/4)$; $y=\sqrt{2}+cos\left(\sqrt{2}x\right)$; $y=-1+\frac{1}{2}\cdot sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$

Lavoriamo insieme

Determinare una funzione del tipo $y = a + b\ sin(c \cdot x)$ di periodo 3π, *e codominio* $[-1; 3]$.

Se il periodo è 3π vuol dire che deve essere $2\pi/c = 3\pi \Rightarrow c = 2/3$.

Se il codominio è $[-1; 3]$ vuol dire che deve aversi $\begin{cases} a-b=-1 \\ a+b=3 \end{cases} \vee \begin{cases} a-b=3 \\ a+b=-1 \end{cases}$, cioè $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \vee \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$.

Quindi ci sono almeno due funzioni del tipo richiesto, cioè $y = 1 + 2sin(2/3x)$ oppure $y = 1 - 2sin(2/3x)$. In effetti anche $y = 1 + 2sin(-2/3x)$ oppure $y = 1 - 2sin(-2/3x)$ verificano quanto richiesto, ed infinite altre.

Determinare una funzione del tipo y = a + b · sin(c · x), con c > 0, con periodo P e codominio C dati

Livello 2

72. a) $P = 2\pi$, $C = [-1; 1]$; b) $P = 3\pi$, $C = [-2; 2]$; c) $P = \pi$, $C = [-1; 3]$; d) $P = 2\pi$, $C = [0; 4]$
[a) $y = \pm sin(\pm x)$; b) $y = \pm sin(\pm 2/3x)$; c) $y = 1 \pm 2sin(\pm 2x)$; d) $y = 2 \pm 2sin(\pm x)$]
73. a) $P = \pi/2$, $C = [1; 5]$; b) $P = 2\pi/3$, $C = [-3; 2]$; c) $P = 4\pi/3$, $C = [-2; 5]$
[a) $y = 3 \pm 2sin(\pm 4x)$; b) $y = -1/2 \pm 5/2sin(\pm 3x)$; c) $y = 3/2 \pm 7/2sin(\pm 3/2x)$]
74. a) $P = 2\pi/5$, $C = [-1/2; 3/2]$; b) $P = 7\pi/6$, $C = [-4; 1]$; c) $P = 2\pi/3$, $C = [-2/3; 1]$
[a) $y = 1/2 \pm sin(\pm 5x)$; b) $y = -3/2 \pm 5/2sin(\pm 12/7x)$; c) $y = 1/6 \pm 5/6sin(\pm 24/11x)$]

Livello 3

75. a) $P=\sqrt{2}\pi, C=\left[-\frac{2}{3};\frac{5}{4}\right]$; b) $P = \pi + 1$, $C = [-3/2; 5/6]$; c) $P=2, C=\left[0;\sqrt{2}\right]$
$\left[\text{a) } y=\frac{7}{24}\pm\frac{23}{24}sin\left(\pm\sqrt{2}x\right);\ \text{b) } y=-\frac{1}{3}\pm\frac{7}{6}sin\left(\pm\frac{2\pi}{\pi+1}\cdot x\right);\ \text{c) } y=\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}sin\left(\pm\pi\cdot x\right)\right]$

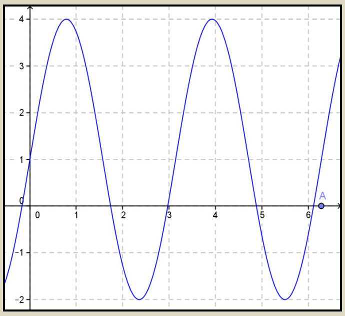
76. a) $P = 4$, $C = [\pi; 2\pi]$; b) $P = \left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\pi, C = \left[1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right]$; c) $P = p$, $C = [x_1; x_2]$

$$\left[\text{a))}y=\frac{3\pi}{2}\pm\frac{\pi}{2}sin\pm\left(\frac{\pi}{2}x\right);\text{b)}y=1\pm\sqrt{2}sin\left(\pm2\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\pi\cdot x\right);\ \text{c) } y=\frac{x_1+x_2}{2}\pm\frac{x_2-x_1}{2}sin\left(\pm\frac{2\pi}{p}\cdot x\right)\right]$$

77. Per quali d, $y = a + b \cdot sin(c \cdot x + d)$ e $y = a + b \cdot sin(c \cdot x)$ hanno lo stesso grafico? [$2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$]

78. Per quali d, $y = a + b \cdot tan(c \cdot x + d)$ e $y = a + b \cdot tan(c \cdot x)$ hanno lo stesso grafico? [$k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$]

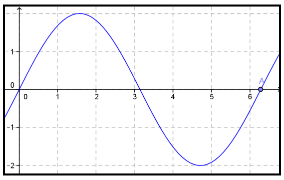
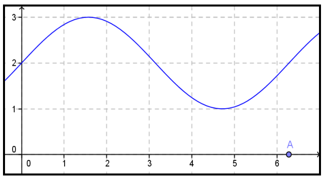
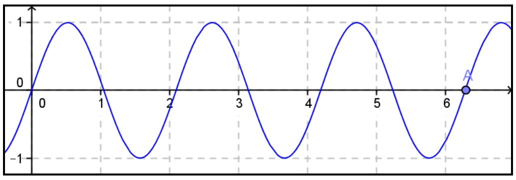
Lavoriamo insieme

Sapendo che il grafico  *si riferisce a una funzione $y = a + b\ sin(k \cdot x)$, determinare i parametri incogniti.*

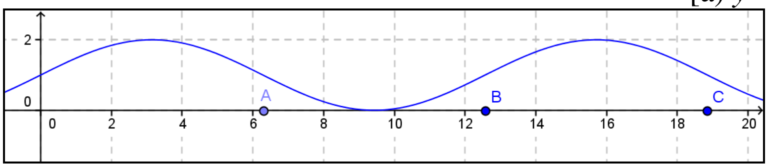
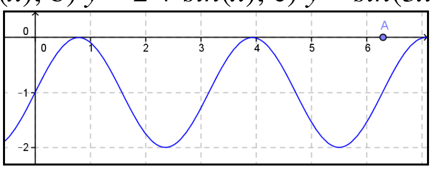
I punti a e b indicano le ascisse relative a π e 2π. Dal grafico rileviamo che il codominio della funzione è, approssimativamente, [–2; 4], cioè ha un'ampiezza di 6 unità, che è il triplo di quella di $sin(x)$, il che significa che il parametro b è, in valore assoluto, pari a 3. poiché la "forma" della funzione è simile a quella della sinusoide, nel senso che la funzione prima cresce, poi decresce, vuol dire che b è positivo, pertanto si ha: $b = 3$. Inoltre $y(0) = 1$, quindi vuol dire che la funzione è una traslazione di vettore (0; 1) di $y = 3sin(x)$, quindi deve essere $a = 1$. Passiamo adesso al periodo, che approssimativamente è π. Ciò significa che l'argomento assume due volte in [0; 2π] gli stessi valori, quindi deve essere $k = 2$. Infine la funzione cercata è $y = 1 + 3\ sin(2x)$

I seguenti grafici si riferiscono a funzioni del tipo y = a + b sin(c · x) con parametri numeri interi o di essi inversi. Determinare tali parametri. I punti indicano le ascisse relative a multipli interi di π

Livello 1

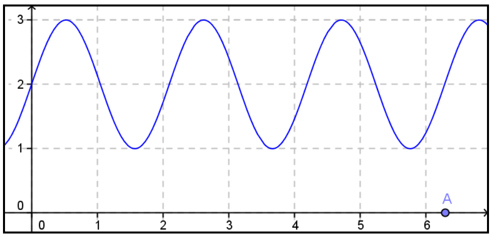
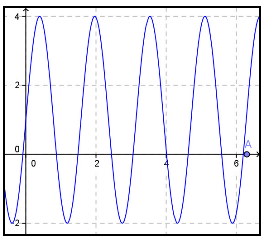
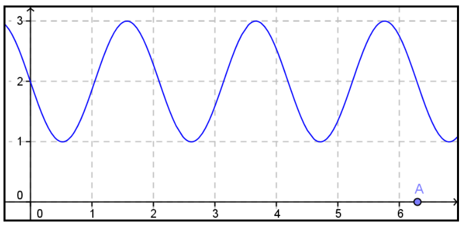
79. a)  b)  c) 

[a) $y = 2sin(x)$; b) $y = 2 + sin(x)$; c) $y = sin(3x)$]

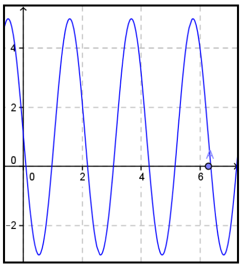
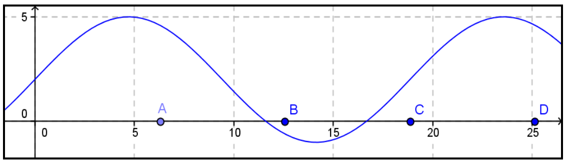
80. a)  b) 

[a) $y = 1 + sin(x/2)$; b) $y = -1 + sin(2x)$]

Livello 2

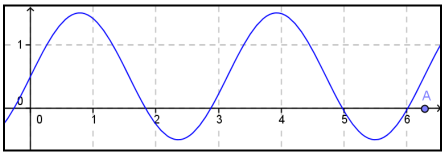
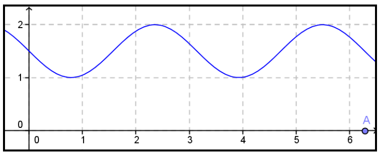
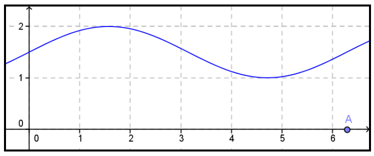
81. a)  b)  c) 

[a) $y = 2 + sin(3x)$; b) $y = 1 + 3sin(4x)$; c) $y = 2 - sin(3x)$]

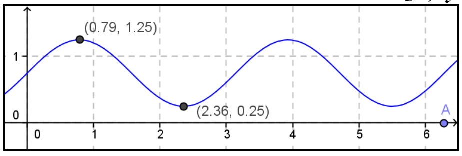
82. a)  b) 

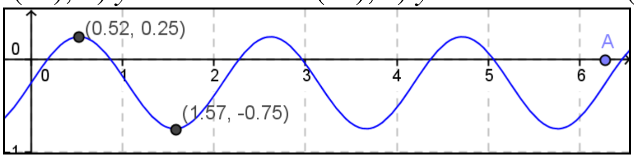
[a) $y = 2 + 3sin(x/3)$; b) $y = 1 - 4sin(3x)$]

Livello 3

83. a)  b)  c) 

[a) $y = 1/2 + sin(2x)$; b) $y = 3/2 - 1/2sin(2x)$; c) $y = 3/2 + 1/2\ sin(x)$]

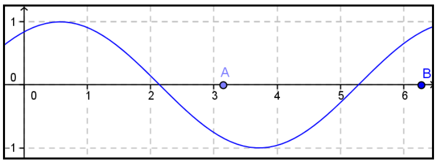
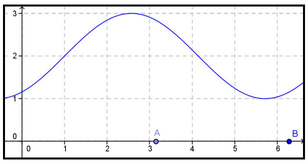
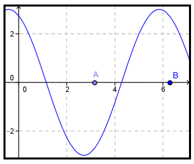
84. a) 

b) 

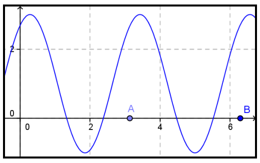
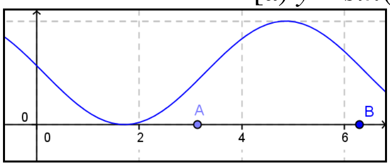
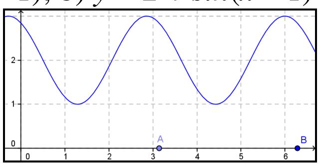
[a) $y = 3/4 + 1/2sin(2x)$; b) $y = -1/4 + 1/2sin(3x)$]

I seguenti grafici si riferiscono a funzioni del tipo y = a + b sin(c · x + d) con parametri numeri interi. Determinare tali parametri. I punti a e b indicano le ascisse π e 2π

Livello 3

85. a)  b)  c) 

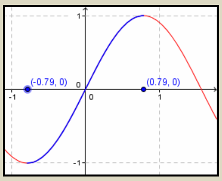
[a) $y = sin(x + 1)$; b) $y = 2 + sin(x - 1)$; c) $y = 3sin(x + 2)$]

86. a)  b)  c) 

[a) $y = 1 + 2\ sin(2x + 1)$; b) $y = 1 + sin(x + 3)$; c) $y = 2 - sin(2x - 1)$]

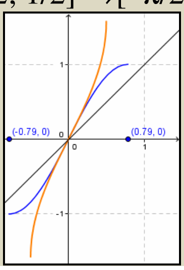
Lavoriamo insieme

Che grafico ha la funzione $y = sin^{-1}(2x)$?

Dobbiamo prima stabilire quando è invertibile $y = sin(2x)$. Poiché il periodo di questa funzione è 2 = π, l'invertibilità si avrà non più in [–π/2; π/2] come per $y = sin(x)$, bensì in [–π/4; π/4], come mostrato in figura. 

Del resto deve aversi ovviamente sempre l'argomento compreso tra –1 e 1, quindi deve essere $-1 \le 2x \le 1 \Rightarrow -1/2 \le x \le 1/2$. La funzione inversa è perciò $2x = sin(y) \Rightarrow x = 1/2\ sin(y)$, che ha dominio e codominio [–1/2; 1/2].

Quindi la funzione inversa è $y = sin^{-1}(2x)$: [–1/2; 1/2] →[–π/2; π/2]. Il grafico (in arancio) è di seguito.



Tracciare il grafico delle seguenti funzioni, determinandone dominio e codominio

Livello 3

87. a) $y = sin^{-1}(3x)$; b) $y = 2sin^{-1}(x/2)$; c) $y = 1 + sin^{-1}(2x)$; d) $y = cos^{-1}(x/4)$
[a) $[-1/3; 1/3] \to [-\pi/2; \pi/2]$; b) $[-2; 2] \to [-\pi; \pi]$; c) $[-1/2; 1/2] \to [1-\pi/2; 1+\pi/2]$; d) $[-2; 2] \to [-\pi; \pi]$]

88. a) $y = 2 - cos^{-1}(5x)$; b) $y = 4cos^{-1}(x/2)$; c) $y = sin^{-1}(x - 2)$
[a) $[-1/5; 1/5] \to [2 - \pi; 2]$; b) $[-2; 2] \to [0; 4\pi]$; c) $[-1; 2] \to [-\pi/2; \pi/2]$;]

89. a) $y = 2 + sin^{-1}(3 + x)$; b) $y = -1 + cos^{-1}(3x - 2)$; c) $y = 2 + 4\, cos^{-1}(2x + 3)$
[a) $[-4; -2] \to [2 - \pi/2; 2 + \pi/2]$; b) $[1/3; 1] \to [-1; -1 + \pi]$; c) $[-2; -1] \to [2; 2 + 4\pi]$]

90. a) $y = 3sin^{-1}(2x + 1)$; b) $y = 2cos^{-1}(x/2 - 3)$; c) $y = 1 + 2sin^{-1}(1 + x)$
[a) $[-1; 0] \to [-3/2\pi; 3/2\pi]$; b) $[4; 8] \to [0; 2\pi]$; c) $[-2; 0] \to [1 - \pi; 1 + \pi]$]

L'angolo di Geogebra

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%207/7-2-1.exe vi è un'applicazione che mostra come Geogebra permette lo studio delle funzioni goniometriche. Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%207/7-2-1.rar vi è il relativo file.

Attività

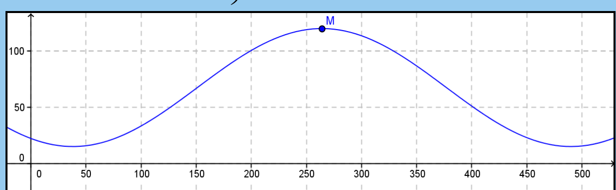
Usare il software per verificare i precedenti quesiti

L'angolo della MateFisica

Ci sono parecchi fenomeni fisici che hanno a che fare con gli argomenti svolti in questa unità. Certamente i fenomeni ondulatori, ma più in generale i fenomeni periodici. Vediamo subito un esempio per chiarire.

- *Un certo fenomeno fisico segue una legge del seguente tipo $y(t) = a + b\, sin(c \cdot t + d)$, in cui a, b, c e d sono dei parametri reali e t è il tempo. Se sappiamo che il periodo della funzione è di 452 s, che il minimo, pari a 15, si è ottenuto dopo circa 38 s, mentre il massimo valore è stato di 120. Vogliamo sapere a) dopo quanti secondi si ottiene il massimo; b) i valori dei parametri; c) quanto vale il fenomeno all'inizio e quanto alla fine del ciclo; d) quanto vale dopo 312s; e) quando raggiunge un valore di 50.*

  Osserviamo che non è esplicitata l'unità di misura di $y(t)$, ma questo è irrilevante. Passiamo alla risoluzione. a) Dato che il fenomeno è periodico il massimo si ottiene dopo mezzo periodo dal minimo, cioè dopo $(38 + 452/2)s = 264s$.b) Sappiamo che il periodo di una funzione sinusoidale del tipo dato è $2\pi/c$, quindi possiamo dire che si ha: $c = 2\pi/452 = \pi//226$. Inoltre poiché il minimo si ottiene prima del massimo, vuol dire che $b < 0$. E poiché il minimo si ha quando il seno vale –1, vuol dire che si ha: $a + b = 15$. Per lo stesso motivo, il massimo si ha quando il seno è 1, quindi avremo $a - b = 120$. Perciò: $\begin{cases} a-b=120 \\ a+b=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=67,5 \\ b=-52,5 \end{cases}$. Per determinare d teniamo conto che il minimo si ha per $x = 38$, quindi ($b < 0$): $\pi/226 \cdot 38 + d = \pi/2 + 2k\pi \Rightarrow d = 75\pi/226 + 2k\pi$. Infine la legge che regola il fenomeno è $y(x) = 67,5 - 52,5 \cdot sin\left(\frac{\pi}{226}x + \frac{75}{226}\pi + 2k\pi\right)$. Per semplicità consideriamo $k = 0$. Vediamo il grafico



  c) All'inizio e alla fine il fenomeno vale $y(0) = y(452) = 67,5 - 52,5 \cdot sin(75\pi/226) \approx 22,16$.

  d) Dopo 312 s vale $y(312) = 67,5 - 52,5 \cdot sin(\pi/226 \cdot 312 + 75\pi/226) \approx 108,74$. e) Vale 50 quando: $67,5 - 52,5 \cdot sin\left(\frac{\pi}{226} \cdot t + \frac{75}{226}\pi\right) = 50 \Rightarrow \frac{\pi}{226} \cdot t + \frac{75}{226}\pi = sin^{-1}\left(\frac{\cancel{17,5}^{1}}{\cancel{52,5}^{3}}\right) \Rightarrow t = \frac{sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{75}{226}\pi}{\frac{\pi}{226}}$. Ovviamente si ha: $sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{75}{226}\pi<0$ se, come fa una calcolatrice consideriamo il minimo arco il cui seno è 1/3, poiché 75π/226 ≈ 1,04, per fare sì che l'espressione precedente sia positiva, dato che $sin(\pi - \alpha) = sin(\alpha)$, dobbiamo prendere $\pi - sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\approx 2,80$. Quindi: $x=\frac{\pi - sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{75}{226}\pi}{\frac{\pi}{226}}\approx 126,56$ e $y(126,56) \approx 50$.

- Un altro importante esempio è l moto armonico semplice, che è un moto periodico che ubbidisce a una legge del tipo $y=A\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$, in cui T è il periodo e t è il tempo. Un esempio importante di moto armonico si ha nell'oscillazione di una massa attaccata a una molla, in condizioni ideali, ossia senza attrito. In un moto armonico di legge $y=A\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$, la velocità della massa in funzione del tempo è $y=-A\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot sin\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$, mentre quella dell'accelerazione è $y=-A\cdot\frac{4\pi^2}{T^2}\cdot cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$.
- Abbiamo anche la cosiddetta interferenza ondulatoria. Se consideriamo due onde (acustiche, ottiche, …) che ubbidiscono a leggi di tipo sinusoidale $y=cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$, queste possono interferire tra loro combinandosi in un'onda di ampiezza maggiore (interferenza costruttiva) o minore (interferenza distruttiva).
- Infine ricordiamo la corrente alternata, ossia quella corrente la cui intensità varia con il tempo in modo periodico, con una frequenza f legata alla cosiddetta *pulsazione* ω, dalla relazione $f = \omega/(2\pi)$. L'intensità variabile nel tempo è $I(t) = I_0 \cdot sin(\omega t)$. Per completezza di informazione aggiungiamo che, nel caso del sistema di distribuzione in Italia, in ambito civile si ha f = 50 Hz.

Attività

Non tutte le risposte sono da ritenersi vincolanti, perché dipendono dalla periodicità scelta

1. Gli eventi naturali possono considerarsi generalmente periodici. Supponiamo che la temperatura in una certa regione del mondo segua un andamento del tipo $y(x) = a + b\ sin(c \cdot x + d)$, con a, b, c e d dei parametri reali. Determinare il valore di tali parametri sapendo che la minima temperatura è stata raggiunta il 13 febbraio ed è stata di 2°, mentre la massima si è raggiunta esattamente dopo 182 giorni dalla minima, ed è stata di 38°. [$y(x) = 20 - 18 \cdot sin(\pi x/182 + 47\pi/182)$]
2. Con riferimento al precedente problema determinare quando, approssimativamente la temperatura è stata di circa 25°. Che temperatura c'era, all'incirca, il 24 settembre? [30 Ottobre; circa 34,1°]
3. Un certo fenomeno fisico segue una legge del seguente tipo $y(x) = a + b \cdot sin(c \cdot x + d)$, in cui a, b, c e d sono dei parametri reali. Se sappiamo che il periodo della funzione è di 188s, che il massimo, pari a 5, si è ottenuto dopo circa 37s, mentre il minimo valore è stato di 2. Dopo quanti secondi dall'inizio del fenomeno si è ottenuto il minimo? [131]
4. Con riferimento al precedente esercizio, che valore si ha dopo 57 secondi? [≈ 4,68]
5. Con riferimento al precedente esercizio, quanti secondi dopo il massimo si ottiene per la prima volta il valore 4? [≈ 73,83]
6. Il modello matematico di un certo fenomeno naturale è $y(x) = a + b \cdot sin(c \cdot x + d)$, a, b, c e d numeri reali. Determinare il valore di tali parametri sapendo che il massimo è (290; 75) e il minimo (110; 42). Determinare inoltre per quale x si ottiene, per la prima volta dopo il minimo, il valore 59. Infine determinare il valore ottenuto per x = 308. [$y(x) = 117/2 - 33/2 \cdot sin(\pi x/180 - \pi/9)$; ≈ 201,7; ≈ 74,2]
7. Il modello matematico di un certo fenomeno naturale è $y(x) = a + b \cdot cos(c \cdot x + d)$, a, b, c e d numeri reali. Determinare il valore di tali parametri sapendo che il minimo è (72; 17) e il massimo (20; 67). Determinare inoltre per quale x si ottiene, per la prima volta dopo il minimo, il valore 42. Infine determinare il valore ottenuto per x = 102. [$y(x) = 42 + 25 \cdot cos(\pi x/52 - 5\pi/13)$; 98; ≈ 48]
8. Il modello matematico di un certo fenomeno naturale è $y(x) = a + b \cdot cos(c \cdot x + d)$, a, b, c e d numeri reali. Determinare il valore di tali parametri sapendo che il minimo è (17; 47) e il massimo (325; 98). Determinare inoltre per quale x si ottiene, per la prima volta dopo il minimo, il valore 56. Infine

determinare il valore ottenuto per $x = 256$. [$y(x) = 145/2 – 51/2 \cdot cos(\pi x/308 – 17\pi/308)$; ≈ 102; ≈ 91,9]

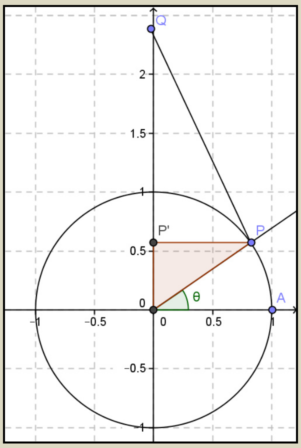
9. Una massa legata a una molla oscilla con legge $y(t) = 1,25 \cdot cos(3t)$, vogliamo sapere il periodo del moto, in secondi, e la massima espansione della molla. [$T = 2\pi/3$; 1,25 *cm*]
10. Con riferimento al problema precedente, determinare gli istanti in cui la molla raggiunge la massima espansione, la massima contrazione e passa per la posizione iniziale di equilibrio. [$2k\pi/3$; $(2k + 1) \cdot \pi/3$; $(2k + 1) \cdot\pi/6$]
11. Con riferimento al problema precedente, determinare se dopo 1,28 *s*, la molla si espande o contrae e quanto ampia è tale espansione o contrazione. Dopo quanti secondi la molla avrà la stessa espansione? E dopo quanti secondi una contrazione di uguale ampiezza? [Contrazione di circa 0,96 *cm*; ≈ 1,05*s*; ≈ 2,09*s*]
12. Con riferimento all'esercizio precedente, determinare le leggi della velocità e dell'accelerazione. [$y = – 3,75\ sin(3t)$; $y = – 11,25\ cos(3t)$]
13. Quanto valgono la massima velocità e la massima accelerazione di un moto armonico di legge $y(t) = A \cdot cos(2\pi t/T)$? $\left[v_{\max} = A\cdot\frac{2\pi}{T}; a_{\max} = A\cdot\frac{4\pi^2}{T^2}\right]$
14. Determinare velocità ed accelerazione massima di una molla che oscilla con periodo di 1,32*s* e ampiezza di 3,12*cm*. [≈ 14,85 *cm*/*s*; ≈ 70,69 cm^2/s^2]
15. Determinare la legge dell'oscillazione di una molla che oscilla con velocità massima di 0,23 *cm*/*s* e accelerazione massima di 0,41 cm^2/s^2. [$y = 0,13 \cdot cos(1,78t)$]
16. Per quali *t* le onde di leggi $y = 3 \cdot cos(2t)$; $y = 2 \cdot cos(t)$ hanno massima interferenza costruttiva? Quando totalmente distruttiva? [$t = 2k\pi$; $t = (2k + 1)\pi$, k, $\pi \in \mathbb{N}$]

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi

Lavoriamo insieme

Consideriamo la prima parte del secondo quesito assegnato al Liceo scientifico nell'a.s. 1992/93. *Dato un sistema di assi cartesiani ortogonali di centro O, tracciare la circonferenza γ di raggio unitario e centro O. Detto punto A il punto di coordinate* (1; 0), *indicare con* θ *l'angolo formato da una generica semiretta uscente dall'origine con il semiasse positivo delle x e con P il punto in cui tale semiretta interseca* γ ($\angle P\hat{O}A = \theta$). *Determinare in funzione di* θ *l'ordinata y del punto Q appartenente al semiasse positivo delle y tale che PQ* = 2.



Rappresentiamo quanto detto.

Si ha $P \equiv (cos(\theta); sin(\theta))$, come si ricava facilmente dal triangolo rettangolo OPP', dove P' è la proiezione di P sull'asse x. Abbiamo $Q \equiv (0; y)$, e poiché $\overline{PQ} = \sqrt{(cos(\theta)-0)^2 + (sin(\theta)-y)^2}$ la condizione diventa $\overline{PQ}^2 = 4 \Rightarrow cos^2(\theta) + sin^2(\theta) - 2\cdot y\cdot sin(\theta) + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 - 2\cdot y\cdot sin(\theta) - 3 = 0$, risolvendo otteniamo le

soluzioni: $y = \dfrac{2\cdot sin(\theta) \pm \sqrt{4\cdot sin^2(\theta)+12}}{2} = \dfrac{2\cdot sin(\theta)\pm 2\cdot\sqrt{sin^2(\theta)+3}}{2} =$
$= sin(\theta) \pm \sqrt{sin^2(\theta)+3}$. Accettiamo solo la soluzione positiva, data la richiesta.

1. (Liceo scientifico sperimentale 1991/92) In un piano cartesiano ortogonale si indichino con x e y le coordinate di un punto P e con X e Y le coordinate di un punto P'. Si consideri la trasformazione di equazioni: $\begin{cases} X = ax+by \\ Y = a'x+b'y \end{cases}$, tale che al punto A di coordinate $x = 1$, $y = 1$ corrisponda il punto A' di coordinate $X = 0$, $Y = 2$ e al punto b di coordinate $c = 1$, $y = 0$ corrisponda il punto b' di coordinate $X = 1$, $Y = 0$. Si studi la trasformazione ottenuta determinando in particolare i punti e le rette che si trasformano rispettivamente in se stessi. Detto α l'angolo acuto formato dalla retta r di equazione $y = mx$ e dalla sua trasformata r' si studi come varia la tangente trigonometrica di α al variare della retta r.
[$a = 1$, $b = -1$, $a' = 0$, $b' = 2$; Punti uniti: $(x, 0)$, rette unite: $ax + ay + c = 0$; $tan(\alpha) = \dfrac{|m^2+m|}{2m^2-m+1}$]

2. (Liceo scientifico 2011/2012) Sia $g(x) = sin\left(\dfrac{3\pi}{2}x\right)$, qual è il periodo della funzione g? Si disegni il grafico in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy. [4/3]

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
HSMC = A&M University High School Mathematics Contest

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato agli HSMC del 1999. *Se* $0 < A < 90$ e $cos(A) = 0,1$, *trovare il valore di* $log\,[cot\,(A)] + log\,[sin\,(A)]$.
Abbiamo: $log\,[cot\,(A)] + log[sin\,(A)] = log[cos(A)] = log(0,1) = -1$

1. (AHSME 1980) Se $b > 1$, $sin(x) > 0$, $cos(x) > 0$ e $log_b[sin(x)] = a$, calcolare $log_b[cos(x)]$. $\left[log_b\left(\sqrt{1-b^{2a}}\right)\right]$
2. (AHSME 1983) L'equazione $x^2 - px + q = 0$ ha per soluzioni $tan(\alpha)$ e $tan(\beta)$; $x^2 - rx + s = 0$ ha per soluzioni $cot(\alpha)$ e $cot(\beta)$. Determinare rs in funzione di p e q. $\left[\dfrac{p}{q^2}\right]$
3. (AHSME 1987) Calcolare $log[tan(1°)] + log[tan(2°)] + ... + log[tan(89°)]$. [0]
4. (AHSME 1999) Sia $sec(x) - tan(x) = 2$, $x \in \mathbb{R}$. Calcolare $sec(x) + tan(x)$. [0,5]
5. (HSMC2001) Calcolare $cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+2\cdot cos\left(\dfrac{2\pi}{2}\right)+3\cdot cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)+...+45\cdot cos\left(\dfrac{45\pi}{2}\right)$. [22]
6. (RICE2007) Calcolare $tan(10°)\cdot tan(20°)\cdot tan(30°)\cdot \ldots \cdot tan(70°)\cdot tan(80°)$. [1]

Questions in English

Working together

This is a question assigned at HSMC in 2003. *If* $sin(x) + cos(x) = 1/2$, *then* $sin^3(x) + cos^3(x)$ *is*?
We remember that $x^3 + y^3 = (x + y) \cdot (x^2 - xy + y2)$, hence we have:

$$sin^3(x)+cos^3(x)=[sin(x)+cos(x)]\cdot[sin^2(x)-sin(x)\cdot cos(x)+cos^2(x)]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot[sin^2(x)-sin(x)\cdot cos(x)+cos^2(x)]=\frac{1}{2}\cdot[1-sin(x)\cdot cos(x)]$$

but we can write: $[sin(x)+cos(x)]^2=\frac{1}{4}\Rightarrow sin^2(x)+2\cdot sin(x)\cdot cos(x)+cos^2(x)=\frac{1}{4}\Rightarrow$

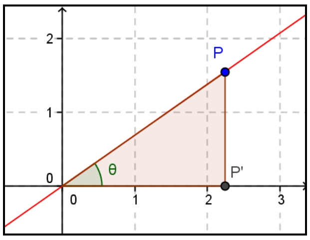
$\Rightarrow 1+2\cdot sin(x)\cdot cos(x)=\frac{1}{4}\Rightarrow sin(x)\cdot cos(x)=-\frac{3}{8}$. Hence $sin^3(x)+cos^3(x)=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{3}{8}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{11}{8}=\frac{11}{16}$

7. (AHSME 1999) Let x be a real number such that $sec(x) - tan(x) = 2$. Then $sec(x) + tan(x)$ is? [1/2]
8. (HSMC2000) Find the exact value of $sin[tan^{-1}(3)]$. $\left[\frac{3}{\sqrt{10}}\right]$
9. (HSMC2001) Find the exact value of $cos\left[sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right]$. $\left[\frac{\sqrt{5}}{3}\right]$
10. (HSMC2003) If $sin(x) + cos(x) = 1/2$, then $sin^3(x) + cos^3(x)$ is? [11/16]
11. (HSMC 2011) An arbitrary circle can intersect the graph of $y = cos(x)$ in
(A) at most 1 points; (b) at most 3 points; (C) at most 5 points;
(D) at most 7 points; (E) at most 9 points; (F) more than 9 points. [F]

Quelli che … vogliono sapere di più

Riferimento polare

Concludiamo presentando un nuovo sistema di riferimento nel piano. Rappresentiamo un punto in un piano cartesiano. La posizione di P si può determinare anche se conosciamo la misura del segmento OP e la misura dell'angolo $P\hat{O}P' = \theta$. Un sistema di riferimento di questo tipo viene detto **polare**, in cui il polo è il punto O, inoltre solo l'asse x è fissato, mentre l'asse y non ci interessa più, le informazioni relative a esso vengono sostituite dalla conoscenza dell'angolo $P\hat{O}P' = \theta$.



Ovviamente possiamo facilmente passare da un sistema all'altro, proprio usando la trigonometria. Infatti facilmente si ha: $P \equiv (x, y) \equiv \left(\overline{OP} \cdot cos(\theta), \overline{OP} \cdot sin(\theta)\right)$. O meglio, indicando $\overline{OP} = \rho$ avremo: $P \equiv (x, y) \equiv (\rho \cdot cos(\theta), \rho \cdot sin(\theta))$. Ovviamente possiamo ottenere anche le formule inverse. $P \equiv (\rho, \theta) \equiv \left(\sqrt{x^2 + y^2}, tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right)$. Il riferimento polare risulta particolarmente importante per determinare equazioni di curve che in coordinate cartesiane sono particolarmente complicate.

Esempio 12

L'equazione cartesiana di una circonferenza di centro nell'origine e raggio R è $x^2 + y^2 = R^2$. In coordinate polari essa diventa semplicemente: $[\rho \cdot cos(\theta)]^2 + [\rho \cdot sin(\theta)]^2 = R^2 \Rightarrow \rho^2\, cos^2(\theta) + \rho^2\, sin^2(\theta) = R^2 \Rightarrow \rho^2 = R^2$

Verifiche

Lavoriamo insieme

In coordinate polari una curva ha equazione $\rho = 10cos(\theta)$, quali sono le sue equazioni cartesiane?
Moltiplichiamo per ρ, ottenendo $\rho^2 = 10\rho \cdot cos(\theta)$, noi sappiamo che le relazioni fra coordinate cartesiane e polari sono: $\begin{cases} x = \rho \cdot cos(\theta) \\ y = \rho \cdot sin(\theta) \end{cases}$, quindi avremo: $\rho^2 = x$. Del resto si ha: $\rho^2 = x^2 + y^2$, quindi $x^2 + y^2 - 10x = 0$ è l'equazione cercata, che è quella di una circonferenza di centro in (5; 0) e raggio 5.

Esprimere in forma cartesiana le seguenti curve in forma polare

Livello 3

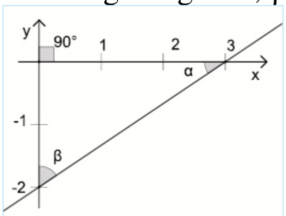
91. $\rho = 5sin(\theta)$; $sin(2\theta) = 1$; $\rho = sin(2\theta)$; $5sin^2(\theta) + 3 = 0$
[$x^2 + y^2 - 5y = 0$; $2xy^2 - 1 = 0$; $x^2 + y^2 - 2x^2y^2 = 0$; $4x^2 + 9y^2 - 1 = 0$]

92. $\rho^2 = 3 \cdot cos(2\theta)$; $13sin^2(\theta) = 3$; $\rho^2 = 2sin(\theta)\, cos(\theta)$
$\left[\left(1-\sqrt{3}\right) \cdot x^2 + \left(1+\sqrt{3}\right) \cdot y^2 = 0; 4x^2 - 9y^2 - 1 = 0; x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy = 0\right]$

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia navale) Verificare che, dati tre numeri reali $\alpha, \beta, \gamma \neq \pi/2 + k\pi$, $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ si ha: $tan(\alpha) + tan(\beta) + tan(\gamma) = tan(\alpha) \cdot tan(\beta) \cdot tan(\gamma)$.
2. (Accademia navale) Calcolare la misura in radianti e in gradi sessagesimali di un angolo alla circonferenza che insista su un arco di lunghezza uguale al raggio.
3. (Odontoiatria 1997) L'insieme dei valori assunti, per x reale, dalla funzione $f(x) = cos^2(x)$
   A) è l'intervallo [–1;1] b) è l'insieme dei numeri reali C) è l'intervallo [0,2] D) dipende dal fatto che x sia espresso in gradi o radianti E) è l'intervallo [0,1]
4. (Ingegneria 1999) Siano α e β due angoli legati fra di loro dalla relazione $\beta = \pi - \alpha$. Quale delle seguenti uguaglianze è vera?
   A) $tan(\alpha) + tan(\beta) = 0$ b) $cos(\alpha) = cos(\beta)$ C) $sin(\alpha) + sin(\beta) = 0$
   D) $tan(\alpha) = tan(\beta)$ E) $cos(\alpha) + cos(\beta) = -1$
5. (Odontoiatria 2000) Un angolo di ampiezza 1 radiante, in gradi sessagesimali, corrisponde a:
   A) poco più di 60° b) poco meno di 60° C) 50° D) un angolo retto E) 33°
6. (Ingegneria 2000) Si considerino le seguenti tre espressioni numeriche:
   (1) $log_2[sin(26\pi)]$ (2) $log_2[cos(26\pi)]$ (3) $log_2[tan(26\pi)]$
   Allora
   A) la (1) e la (2) hanno entrambe significato b) la (1) ha significato, la (3) non ha significato
   C) la (1) e la (2) sono entrambe prive di significato D) la (1) ha significato, la (2) non ha significato
   E) la (2) ha significato, la (1) non ha significato
7. (Ingegneria 2000) Se un angolo misura 15°, la sua misura ρ in radianti è
   A) $\frac{1}{4} rad < \rho < \frac{1}{2} rad$ b) $\frac{3}{4} rad < \rho < 1 rad$ C) $\rho < \frac{1}{4} rad$
   D) $\frac{1}{2} rad < \rho < 1 rad$ E) $\rho > 1 rad$
8. (Veterinaria 2001) Se un angolo x misura $2{,}01\pi$ radianti
   A) allora il punto $(cos(x), sin(x))$ appartiene al I quadrante
   b) allora il punto $(cos(x), sin(x))$ appartiene al II quadrante
   C) allora il punto $(cos(x), sin(x))$ appartiene al III quadrante
   D) allora il punto $(cos(x), sin(x))$ appartiene al IV quadrante
   E) la sua tangente è negativa
9. (Ingegneria 2002) La misura in radianti di un angolo di 20° è pari a
   A) $\pi/18$ b) $\pi/8$ C) $\pi/7$ D) $\pi/9$ E) $\pi/10$
10. (Medicina 2005) Si consideri la funzione trigonometrica $y = tan(x)$ con $0 < x \leq \pi$ (x è misurato in radianti). Quali fra i valori seguenti sono in ordine crescente?
    A) $tan(3)$, $tan(\pi)$, $tan(1)$, $tan(\pi/3)$ B) $tan(1)$, $tan(3)$, $tan(\pi)$, $tan(\pi/3)$
    C) $tan(\pi)$, $tan(1)$, $tan(\pi/3)$, $tan(3)$ D) $tan(\pi/3)$, $tan(\pi)$, $tan(3)$, $tan(1)$
    E) $tan(1)$, $tan(\pi/3)$, $tan(3)$, $tan(\pi)$
11. (Veterinaria 2007) Si consideri la funzione $y = sin(x)$ (x esprime l'ampiezza dell'angolo in radianti). I valori della funzione $sin(1)$, $sin(2)$, $sin(3)$ e $sin(4)$, disposti in ordine crescente, risultano:
    A) $sin(2)$, $sin(1)$, $sin(4)$, $sin(3)$ b) $sin(4)$, $sin(3)$, $sin(2)$, $sin(1)$ C) $sin(1)$, $sin(2)$, $sin(3)$, $sin(4)$
    D) $sin(4)$, $sin(3)$, $sin(1)$, $sin(2)$ E) $sin(3)$, $sin(4)$, $sin(2)$, $sin(1)$
12. (Ingegneria 2009) Un angolo misura 2 radianti, quindi
    A) il suo seno è positivo b) seno e coseno hanno lo stesso segno C) l'angolo è acuto
    D) la sua tangente non esiste E) il suo coseno è positivo
13. (Ingegneria, 2009) L'espressione $log\left[x^4 + 2x^2 + sin^2(x) + cos^2(x)\right]$ coincide con
    A) $4 \cdot log(1 + x)$ b) $\left[log\left(x^2 + 1\right)\right]^2$ C) $2 \cdot log(x^2 + 1)$
    D) $log\left(x^4 + 2x^2\right) + log\left[sin^2(x) + cos^2(x)\right]$ E) $2 \cdot log\left[1 + x + sin(x) + cos(x)\right]$

14. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza 2009) Un angolo di 3 radianti ha misura in gradi (sessagesimali) compresa: A) tra 0° e 90° b) tra 90° e 180° C) tra 180° e 270° D) tra 270° e 360°
15. (Facoltà scientifiche CISIA 2010) Considera gli angoli α, β in figura; quale tra la seguenti relazioni è



corretta?
A) $tan(\beta) < cos(\alpha)$ b) $sin(\beta) < cos(\alpha)$ C) $cos(\beta) > cos(\alpha)$ D) $tan(\beta) > tan(\alpha)$ E) $sin(\beta) < sin(\alpha)$
16. (Facoltà scientifiche CISIA 2010) Una sola delle seguenti funzioni ha periodo π. Quale?
A) $sin(x^2)$ b) $sin^2(x)$ C) $sin(x) + sin^2(x)$ D) $sin\ x + cos\ x$ E) $x + sin\ x$
17. (Corso di laurea in Informatica, Udine 2009) Si consideri la funzione $f(x) = sin(\omega x)$, dove ω è una costante positiva. Se $f(a) = 0$ e $f(b) = 1$, qual è la minima distanza possibile tra a e b?

A) $\frac{\pi}{2\omega}$ b) $\frac{\pi}{\omega}$ C) $\frac{2\pi}{\omega}$ D) $\frac{\pi}{4\omega}$

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito

http://mathinterattiva.altervista.org/volume_4_7.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1/2 $rad \approx 28°38'52''$	E	A	B	E	A	A	D
10	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**
A	D	A	C	B	D	B	A

7. La misurazione degli angoli

7.3 Equazioni e disequazioni goniometriche

Prerequisiti

- Concetto di angolo
- Concetto di misura
- Unità di misura sessagesimale degli angoli
- Le funzioni goniometriche elementari
- Dominio e codominio di una funzione
- Teoremi fondamentali di goniometria
- Uso della calcolatrice scientifica

Obiettivi

- Risolvere semplici equazioni e disequazioni goniometriche
- Sapere risolvere problemi di trigonometria mediante la risoluzione di equazioni o sistemi di equazioni goniometriche

Contenuti

- Risoluzione di equazioni e disequazioni goniometriche elementari
- Equazioni lineari in seno e coseno
- Equazioni omogenee in seno e coseno
- Disequazioni goniometriche

Risoluzione di equazioni goniometriche elementari

Anche se non lo abbiamo sottolineato, quando applichiamo le funzioni goniometriche inverse stiamo risolvendo delle equazioni. Infatti determinare per esempio $sin^{-1}(0{,}32)$ è lo stesso che determinare il minimo angolo, in valore assoluto, che sia soluzione dell'equazione $sin(x) = 0{,}32$. In questo paragrafo vogliamo trattare l'argomento in modo più organico. La prima cosa che dobbiamo osservare è che un'equazione goniometrica ha, in generale, infinite soluzioni che sono legate tra di loro da un comune periodo. Un'altra ovvia osservazione è data dal seguente risultato:

Teorema 1

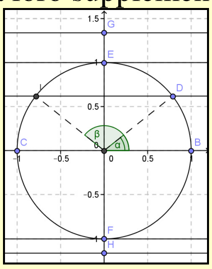
Supposto che la funzione $f(x)$ abbia significato e la rispettiva funzione goniometrica di cui essa è argomento abbia anch'essa significato, allora le equazioni

- $sin[f(x)] = h$, $h \in \mathbb{R}$; $cos[f(x)] = h$, $h \in \mathbb{R}$, hanno soluzioni solo se si ha: $-1 \le h \le 1$;
- $sec[f(x)] = h$, $h \in \mathbb{R}$; $csc[f(x)] = h$, $h \in \mathbb{R}$, hanno soluzioni solo se si ha: $h \le -1 \vee h \ge 1$;
- $tan[f(x)] = h$, $h \in \mathbb{R}$; $cot[f(x)] = h$, $h \in \mathbb{R}$, hanno sempre soluzioni reali.

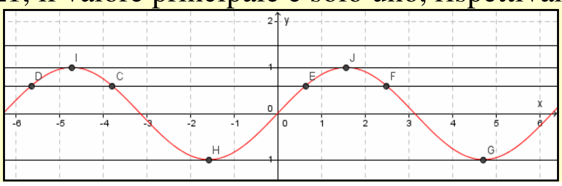
Esempio 1

Consideriamo l'equazione $sin(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$. Possiamo risolverla in diversi modi.

- Possiamo lavorare sulla circonferenza goniometrica. L'equazione ha soluzione solo se è $-1 \le a \le 1$, dato che per valori esterni a tale intervallo la retta, come mostrato per i punti G e H, non incontra la circonferenza goniometrica. Osserviamo che le soluzioni, limitatamente all'intervallo [0°; 360°] o [0; 2π] se lavoriamo in radianti, se $-1 < a < 1$ sono due, fra loro supplementari, indicati da α e β = 180° – α. Mentre se è



  $a = \pm 1$, la soluzione è unica.
- Potremmo anche lavorare sulla sinusoide. In questo caso ovviamente lavoriamo in radianti e le soluzioni sono infinite, sempre se $-1 \le a \le 1$ differenti di un multiplo di 2π dalle due principali, che sono le ascisse dei punti E e F. Se poi è $a = \pm 1$, il valore principale è solo uno, rispettivamente le ascisse dei punti J o G.



Vediamo adesso un esempio numerico.

Esempio 2

Vogliamo risolvere l'equazione $sin(x) = 1/2$. In gradi sessagesimali il minimo angolo il cui seno è 1/2 è 30°, in radianti è $\pi/6$. Ma sappiamo anche che, in generale, si ha: $sin(x) = sin(180° - x) = sin(\pi - x)$. Pertanto abbiamo anche la soluzione $180° - 30° = 150°$ o, in radianti, $\pi - \pi/6 = 5\pi/6$. Tenuto conto delle periodicità possiamo dire perciò che le soluzioni sono infinite e si possono esprimere nelle forme compatte: $x = 30° + k\,360° \vee x = 150° + k\,360°$; o, in radianti, $x = \pi/6 + 2k\pi \vee x = 5\pi/6 + 2k\pi$. In entrambi i casi $k \in \mathbb{Z}$.

Tenuto conto dell'esempio precedente possiamo perciò enunciare il seguente risultato, in cui le funzioni inverse indicano i minimi archi, in valore assoluto, che hanno il dato argomento. Osserviamo che le calcolatrici scientifiche forniscono appunto una approssimazione di tale valore, tutte le volte in cui applichiamo le funzioni goniometriche inverse.

Teorema 2

L'equazione $sin(x) = h$, $-1 \le h \le 1$, ha come soluzioni $x = sin^{-1}(h) + 2k\pi \vee x = \pi - sin^{-1}(h) + 2k\pi$, se calcoliamo in radianti e $x = sin^{-1}(h) + k\ 360° \vee x = 180° - sin^{-1}(h) + k\ 360°$ in gradi sessagesimali; $k \in \mathbb{Z}$.

Ricordando le proprietà del coseno e della tangente possiamo enunciare i seguenti risultati.

Teorema 3

L'equazione $cos(x) = h$, $-1 \le h \le 1$, ha come soluzioni, $x = \pm\, cos^{-1}(h) + 2k\pi$, se calcoliamo in radianti, oppure $x = \pm\, cos^{-1}(h) + k\ 360°$, in gradi sessagesimali; $k \in \mathbb{Z}$.

Teorema 4

L'equazione $tan(x) = h$, ha come soluzioni, $x = tan^{-1}(h) + k\pi$, se calcoliamo in radianti, $x = tan^{-1}(h) + k\ 180°$, in gradi sessagesimali; $k \in \mathbb{Z}$.

Dato che secante e cosecante possono essere ricondotte a coseno e seno, così come la cotangente alla tangente, non vale la pena di considerare risultati generali legati a tali funzioni.

Esempio 3

Vogliamo risolvere l'equazione $sec(x) = 3$. Essa è equivalente a: $cos(x) = 1/3$. Quindi, tenuto conto del teorema 3 possiamo dire che la soluzione generale è, $x = \pm cos^{-1}(1/3) + 2k\pi \approx \pm\, 1{,}23 + 2k\pi$, in radianti, oppure in gradi sessagesimali: $x = \pm cos^{-1}(1/3) + k\ 360° \approx \pm\, 70°31'44'' + k\ 360°$.

Possiamo risolvere anche equazioni goniometriche in cui non per forza l'argomento debba essere x.

Esempio 4

Risolvere l'equazione $tan(4x + 32°) = 1{,}32$. Data la presenza di 32° nell'argomento, le soluzioni sono ovviamente richieste solo in gradi sessagesimali. Si ha: $4x + 32° = tan^{-1}(1{,}32) + k\ 180° \approx\ 52°51'12'' + k\ 180°$. Ma l'incognita da determinare è sempre x: $4x \approx\ 20°51'12'' + k\ 180° \Rightarrow x \approx\ 5°12'48'' + k\ 45°$.

Capita anche di dover determinare soluzioni appartenenti ad un certo intervallo.

Esempio 5

Risolvere $tan(4x + 32°) = 1{,}32$; $-100° \le x \le 175°$. Riprendiamo il valore trovato nell'esempio precedente. Per stabilire quante delle infinite soluzioni rientrano nel dato intervallo, dobbiamo risolvere la coppia di disequazioni: $-100° \le 5°12'48'' + k\ 45° \le 175°$. Si ha: $-100° - 5°12'48'' \le k\ 45° \le 175° - 5°12'48'' \Rightarrow$ $\Rightarrow -105°12'48'' \le k\ 45° \le 169°47'12'' \Rightarrow -105°12'48''/45° \le k \le 169°47'12''/45°$. Ora si ha: $-105°12'48'' \approx -2{,}34$ e $169°47'12''/45° \approx 3{,}77$. Tenuto conto dell'intervallo delle soluzioni e che k è un numero intero, i valori accettabili sono $-2 \le k \le 3$. Per tali valori si ha: $5°12'48'' - 2 \cdot 45° = -84°47'12''$, $5°12'48'' - 1 \cdot 45° = -39°47'12''$, $5°12'48'' - 0 \cdot 45° = 5°12'48''$, $5°12'48'' + 1 \cdot 45° = 50°12'48''$, $5°12'48'' + 2 \cdot 45° = 95°12'48''$, $5°12'48'' + 3 \cdot 45° = 140°12'48''$. Invece $5°12'48'' - 3 \cdot 45° = -129°47'12'' < -100°$ e $5°12'48'' + 4 \cdot 45° = 185°12'48'' > 175°$. Potevamo anche usare un metodo meno "rigoroso", assegnando valori a k in modo più o meno arbitrario, verificando quali rientravano nell'intervallo dato.

Ci sono anche altre equazioni che si possono ricondurre facilmente alle precedenti.

Esempio 6

Vogliamo risolvere l'equazione $sin^2(2x + 1) - 3cos(2x + 1) - 2 = 0$. Trasformando il seno in coseno otteniamo un'equazione di secondo grado in questa incognita: $1 - cos^2(2x + 1) - 3cos(2x + 1) - 2 = 0 \Rightarrow cos^2(2x + 1) + 3cos(2x + 1) + 1 = 0$. Determiniamo il discriminante dell'equazione: $\Delta = 9 - 4 = 5 > 0$.

L'equazione ha soluzioni reali, troviamole: $cos(2x+1) = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow cos(2x+1) = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ $\vee cos(2x+1) = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$. Queste due equazioni hanno soluzioni solo se i termini a destra appartengono all'intervallo [–1; 1]. Dato che $\frac{-3-\sqrt{5}}{2} \approx -2,61; \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \approx -0,38$, solo la prima equazione ha soluzioni. Si ha allora: $cos(2x+1) = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ $\Rightarrow 2x + 1 \approx \pm 1,96 + 2k\pi \Rightarrow x \approx 0,48 + k\pi \vee x \approx -1,48 + k\pi$. Ovviamente le soluzioni sono da calcolarsi in radianti, come si vede dal fatto che l'argomento delle funzioni goniometriche è formato da un'espressione priva di gradi sessagesimali.

Vi sono ancora altri tipi di equazioni facilmente risolvibili.

Esempio 7

Vogliamo risolvere l'equazione $sin(4x + 15°) = sin(31° - 3x)$, $x \in [-40°; 127°]$. La risoluzione equivale alla domanda: quando due angoli hanno lo stesso seno? Ovviamente quando sono lo stesso angolo, ma anche, data la periodicità, quando differiscono di un multiplo di 360° (in questo caso, dato che vogliamo soluzioni in gradi sessagesimali). Così per esempio $sin(30°) = sin(390°) = sin(-330°) = \ldots = \;= sin(30° + k \cdot 360°)$. Ma dato che: $sin(x) = sin(180° - x) = sin(180° - x + k \cdot 180°)$, dobbiamo avere: $4x + 15° = 31° - 3x + k \cdot 360°$ oppure $4x + 15° = 180° - (31° - 3x) + k \cdot 360°$. Risolviamo la prima: $7x = 16° + k \cdot 360° \Rightarrow x = 16°/7 + k \cdot 360°/7 \Rightarrow x \approx 2°17'9'' + k \cdot 51°25'43''$. La seconda: $x = 134° + k \cdot 360°$. Adesso vediamo quante soluzioni rientrano nell'intervallo desiderato. Facilmente si vede che la seconda equazione non ammette soluzioni accettabili, poiché $134° - 360° < -40°$ e $134° > 127°$. Invece la prima equazione ammette soluzioni per $k = 0$ ($\approx 2°17'9''$), $k = 1$ ($\approx 53°42'52''$) e $k = 2$ ($\approx 105°18'35''$).

Più in generale possiamo enunciare i seguenti risultati.

Teorema 5

L'equazione $sin[f(x)] = sin[g(x)$ è equivalente a: $f(x) = g(x) + 2k\pi \vee f(x) = \pi - g(x) + 2k\pi$, se calcoliamo in radianti, e $f(x) = g(x) + k \cdot 360° \vee f(x) = 180° - g(x) + k \cdot 360°$ in gradi sessagesimali, $k \in \mathbb{Z}$.

Teorema 6

L'equazione $cos[f(x)] = cos[g(x)]$ è equivalente a $f(x) = \pm g(x) + 2k\pi$, se calcoliamo in radianti, oppure a $f(x) = \pm g(x) + k \cdot 360°$, in gradi sessagesimali, $k \in \mathbb{Z}$

Teorema 7

L'equazione $tan[f(x)] = tan[g(x)]$ è equivalente a $f(x) = g(x) + k\pi$, se calcoliamo in radianti, in gradi sessagesimali a $f(x) = g(x) + k \cdot 180°$, $k \in \mathbb{Z}$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Risolvere l'equazione $sin(5x - 25°) = 0{,}12$, $x \in [220°, 410°]$.

Cominciamo a determinare il minimo angolo il cui seno vale 0,12. Abbiamo: $sin^{-1}(0{,}12) \approx 6°53'32''$. Quindi in generale dobbiamo avere: $5x - 25° \approx 6°53'32'' + k \cdot 360°$ o $5x - 25° \approx 180° - 6°53'32'' + k \cdot 360°$. Ossia: $5x \approx 31°53'32'' + k \cdot 360°$ o $5x \approx 198°6'28'' + k \cdot 360°$, da cui $x \approx 6°22'42'' + k \cdot 72°$ o $x \approx 39°37'18'' + k \cdot 72°$. Quante di queste soluzioni rientrano nell'intervallo [220°, 410°]?

Risolviamo le disequazioni: $220° < 6°22'42'' + k \cdot 72° < 410° \Rightarrow 3 \le k \le 5$ e $220° < 39°37'18'' + k \cdot 72° < 410° \Rightarrow 3 \le k \le 5$. Quindi si ottengono 3 soluzioni da ciascuna delle due soluzioni generali:

$x_1 = 6°22'42''+3\cdot 72° = 222°22'42''$; $x_2 = 6°22'42'' + 4\cdot 72° = 294°22'42''$; $x_3 = 6°22'42'' + 5\cdot 72° = 366°22'42''$; $x_4 = 39°37'18''+3\cdot 72° = 255°37'18''$; $x_5 = 39°37'18''+4\cdot 72° = 327°37'18''$; $x_6 = 39°37'18''+5\cdot 72° = 399°37'18''$.

Risolvere le seguenti equazioni negli intervalli indicati

Livello 1

1. a) $cos(x) = 1/2$, $x \in [-100°; 512°]$; b) $sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [-300°; 400°]$; c) $cot(x) = 1$, $x \in [-25°; 190°]$

[a) $(-60° \vee 60° \vee 300° \vee 420°)$; b) $(-300° \vee -240° \vee 60° \vee 120°)$; c) 45°]

2. a) $tan(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x \in [-1000°; 10°]$; b) $csc(x) = \sqrt{2}$, $x \in [1000°; 1245°]$; c) $sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [-2; 5]$

[a) $(-930° \vee -750° \vee -570° \vee -390° \vee -210° \vee -30°)$; b) $(1125° \vee 1215°)$; c) $(-\pi/2 \vee 4\pi/3)$]

3. a) $sec(x) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, $x \in [-245°; 687°]$; b) $cos(x) = -1/2$, $x \in [-4; 3]$; c) $tan(x) = 1$, $x \in [-1; 3]$

[a) $(-210° \vee -150° \vee 150° \vee 210° \vee 510° \vee 570°)$; b) $(-2\pi/3 \vee 2\pi/3)$; c) $\pi/4$]

4. a) $cot(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x \in [-2; 5]$; b) $csc(x) = -\sqrt{2}$, $x \in [1; 4]$; c) $sec(x) = -1$, $x \in [-2; 3]$

[a) $(-\pi/3 \vee 2\pi/3)$; b) $(-\pi/4 \vee 5\pi/4)$; c) $\varnothing$]

5. a) $cot\left(\frac{2x}{3}\right) = \sqrt{3}$, $x \in [-250°; 107°]$; b) $sec(3/4x) = 1$, $x \in [-2; 6]$; c) $csc(4x) = 1$, $x \in [100°; 245°]$

[a) $(-225° \vee 45°)$; b) 0; c) $(112°30' \vee 202°30')$]

6. a) $sec\left(\frac{4}{3}x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x \in [-24°; 68°]$; b) $cos(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in [-110°; 312°]$; c) $tan\left(\frac{x}{3}\right) = \sqrt{3}$, $x \in [-100°; 105°]$

[a) $33°45'$; b) $(-67°30' \vee 67°30' \vee 112°30' \vee 247°30' \vee 292°30')$; c) $\varnothing$]

7. a) $sin(3x) = 1/2$, $x \in [-100°; 200°]$; b) $cos(3x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in [-1; 3]$; c) $csc(x/2) = 0$, $x \in [1; 4]$

[a) $(-70° \vee 10° \vee 50° \vee 130° \vee 170°)$; b) $(-5\pi/12 \vee -\pi/4 \vee \pi/4 \vee 11\pi/12)$; c) $\varnothing$]

8. a) $sin(3/5x) = -1/2$, $x \in [-1; 2]$; b) $cot(-2/5x) = 0$, $x \in [-2; 1]$; c) $tan(2x) = -\sqrt{3}$, $x \in [-1; 3\pi]$

[a) $-5\pi/18$; b) $\varnothing$; c) $(-\pi/6 \vee \pi/3 \vee 5\pi/6 \vee 4\pi/3 \vee 11\pi/6 \vee 7\pi/3 \vee 17\pi/6)$]

Livello 2

9. a) $cos(2x + 10°) = -1/2$, $x \in [-48°; 215°]$; b) $sin(32° - 2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in [-75°; 48°]$

[a) $(55° \vee 115°)$; b) $(-51°30' \vee -6°30')$]

10. a) $tan(4x + 15°) = -1$, $x \in [-200°; -100°]$; b) $cos(2 - 3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [-1; 2]$

$\left[\text{a) } (-195° \vee -150° \vee -105°);\ \text{b) } \frac{12 \pm \pi}{18}\right]$

11. a) $cot(4x+100°) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x \in [-50°; 100°]$; b) $sin(4x + 1) = 1/2$, $x \in [-3; 2]$

[a) (–40° ∨ 5° ∨ 50° ∨ 95°); b) (–11π/24 – 1/4 ∨ –7π/24 – 1/4 ∨ π/24 – 1/4 ∨ 5π/24 – 1/4 ∨ 17π/24 – 1/4)]

Nei seguenti esercizi i risultati sono approssimati ai secondi per difetto o per eccesso. I valori in radianti sono approssimati a due cifre decimali. Se le soluzioni sono più di sei, scriviamo solo le prime e le ultime

Livello 2

12. $cos(4x – 51°) = 0{,}46$; $x \in [–100°; 112°]$ [–92°54′12″∨ –61°35′48″∨ –2°54′12″∨ 28°24′12″∨ 87°5′48″]

13. $sin(2x + 17°) = 0{,}32$; $x \in [–50°; 315°]$ [0°49′54″∨ 72°10′7″∨ 180°49′54″∨ 252°10′7″]

14. $sec(3x + 10°) = 1{,}37$; $x \in [–100°; 300°]$

[–17°42′24″ ∨ 11°2′24″ ∨ 102°17′36″ ∨ 131°2′24″ ∨ 222°17′36″ ∨ 251°2′24″]

15. $csc(3x–54°) = –2{,}32$; $x \in [–10°;305°]$ [9°29′20″ ∨ 86°30′40″ ∨ 129°29′20″ ∨ 206°30′40″ ∨ 249°29′20″]

16. $tan(3x + 25°) = 0{,}84$; $x \in [–521°; 217°]$ [x_1 = –474°59′24″ ∨ x_2 = –414°59′24″ ∨ …∨ x_{12} = 185°0′36″]

17. $cot(32°– 2x) = 1{,}84$; $x \in [–20°; 501°]$

[1°44′19″ ∨ 91°44′19″ ∨ 181°44′19″ ∨ 271°44′19″ ∨ 361°44′19″ ∨ 451°44′19″]

18. $csc(5x + 32°) = –3{,}72$; $x \in [–251°; 62°]$

[–225°31′8″ ∨ –183°16′52″ ∨–153°31′8″ ∨ –111°16′52″ ∨ –81°31′8″ ∨ –39°16′52″ ∨ –9°31′8″ ∨ 32°43′8″]

19. $tan(4x – 54°) = 3{,}47$; $x \in [–35°; 247°]$

[–13°1′9″ ∨ 31°58′52″ ∨ 76°58′52″ ∨ 121°58′52″ ∨ 166°58′52″ ∨ 211°58′52″]

20. $sin(3x + 28°) = –0{,}61$; $x \in [–213°; 105°]$

[–176°48′13″ ∨ –141°51′47″ ∨ –56°48′13″ ∨ –21°51′47″ ∨ 63°11′47″ ∨ 98°8′13″]

21. $cos(84°– 2x) = 0{,}64$; $x \in [–15°; 279°]$ [16°53′46″ ∨ 67°6′15″ ∨ 196°53′45″ ∨ 247°6′15″]

22. $sec(3x + 7°) = –4{,}51$; $x \in [–231°; 312°]$

[x_1 = –208°3′47″ ∨ x_2 = –156°36′13″ ∨ …∨ x_8 = 203°23′47″ ∨ x_9 = 271°56′13″]

23. $cot(2x – 49°) = 0{,}94$; $x \in [–50°; 302°]$; $cos(3x + 1) = –0{,}56$; $x \in [–1; 3]$

[(–42°6′52″ ∨ 47°53′8″ ∨ 137°53′8″ ∨ 227°53′8″) ; (–1,05 ∨ 0,39 ∨ 1,04 ∨ 2,48)]

24. $sin(6x + 7) = –0{,}41$; $x \in [–1; 2]$; $cot(3x – 2) = 0{,}81$; $x \in [–2; 5]$

[(–0,19 ∨ –0,57 ∨ 0,47 ∨ 0,86 ∨ 1,52 ∨ 1,90); (–1,13 ∨ –0,08 ∨ 0,96 ∨ 2,01 ∨ 3,06 ∨ 4,10)]

25. $sec(2x + 4) = 1{,}27$; $x \in [–4; 3]$ [–3,90 ∨ –3,24 ∨ –2,33 ∨ –1,67 ∨ –0,76 ∨ –0,10 ∨ 0,81 ∨ 1,47 ∨ 2,38]

26. $tan(3x + 2) = –0{,}78$; $x \in [–1; 5]$ [–0,89 ∨ 0,16 ∨ 1,21 ∨ 2,25 ∨ 3,30 ∨ 4,35]

27. a) $csc(2x + 1) = –3{,}12$; $x \in [1; 4]$; b) $cos\left(\frac{x}{2}-3\right)=0{,}12; x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{4\pi}{3}\right]$ [a) (–0,66∨1,23 ∨ 2,48); b) 0,78]

28. $sin\left(\frac{3x}{2}-1{,}12\right)=-0{,}24; x\in\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{7\pi}{3}\right]$ [–3,60 ∨ –1,19 ∨ 0,03 ∨ 0,59 ∨ 4,78 ∨ 7,19]

29. a) $csc\left(\frac{4x}{5}+2{,}12\right)=-5{,}02; x\in\left[-\frac{5\pi}{4};\frac{9\pi}{2}\right]$; b) $sec(1{,}13x + 2{,}14) = –1{,}23$; $x\in\left[-\frac{\pi}{5};\frac{\pi}{8}\right]$

[a) (–2,90 ∨ 1,53 ∨ 4,95 ∨ 9,38 ∨ 12,81); b) (x_1 = –4,12 ∨ 0,34 ∨ …∨ x_{22} = 51,48 ∨ 55,94)]

30. a) $cot(1 – 2x) = 3{,}41$; $x\in\left[-\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$; b) $tan(3{,}14x + 2{,}31) = 2$; $x\in\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{3}\right]$

[a) (0,36 ∨ 1,93); b) (x_1 = –4,39 ∨ x_2 = –3,38 ∨ …; x_9 = 3,62 ∨ x_{10} = 4,62)]

Lavoriamo insieme

Abbiamo visto che l'equazione $sin(5x – 25°) = 0{,}12$, $x \in [220°, 410°]$, *ammette* 6 *soluzioni. Se consideriamo un generico intervallo* [30°, *a*], *quanto deve essere a numero intero, affinché la data equazione abbia 10 soluzioni*?

Abbiamo visto che le soluzioni generali sono: $x \approx 6°22'42'' + k \cdot 72°$ oppure $x \approx 39°37'18'' + k \cdot 72°$. Ora noi abbiamo $6°22'42'' + k \cdot 72° \geq 30°$ se $k \geq 1$ e $39°37'18'' + k \cdot 72° \geq 30°$ se $k \geq 0$. Essendo il periodo di entrambe le soluzioni pari a 72°, per avere altre 8 soluzioni, 4 dalla prima e 4 dalla seconda equazione, dobbiamo avere per la prima equazione $k = 5$ con la soluzione: $6°22'42'' + 5 \cdot 72° = 366°22'42''$ e $k = 4$ per la seconda con la soluzione: $39°37'18'' + 4 \cdot 72° = 327°37'18''$. Quindi il minimo valore intero *a* che risolve il problema è 367°.

Determinare il minimo valore del parametro positivo a, affinché le seguenti equazioni negli intervalli indicati i cui estremi sono sempre numeri interi, abbiano esattamente 5 soluzioni

Livello 3

31. a) $cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [57°; a]$; b) $sin(2x + 10°) = 1/2$, $x \in [40°; a + 2°]$; c) $tan(2x + 1) = -1$, $x \in [-1; 3a + 2]$

[a) 1050°; b) 428°; c) 4/3]

32. a) $cot(4x+ 2) = 0$, $x \in [-2;3a + 1]$; b) $csc(2x - 15°) = \sqrt{2}, x \in [a;125°]$; c) $sec(3x + 2) = -2$, $x \in [2a-1; 6]$

[a) 1/3; b) –285°; c) 1/2]

33. a) $cos(3x + 10°) = 0{,}13$, $x \in [-a; 10°]$; b) $sin(2x + 1) = -0{,}3$, $x \in [-4a + 1; 3]$ [a) 271°; b) 5/4]

34. a) $cot(-2x + 1) = 3$, $x \in [-2a + 1; 3]$; b) $csc(\sqrt{2} \cdot x + 15°) = 3, x \in [2a + 1°;125°]$ [a) 11/2; b) –204°]

35. a) $sec(3/4x + 1{,}12) = -2{,}2$, $x \in [-2; 6a + 1]$; b) $tan(x + 25°) = 2{,}13$, $x \in [-10°; 7a + 20°]$ [a) 3; b) 740/7]

Lavoriamo insieme

Risolvere l'equazione $sin[sin(x)] = 0$.

Si deve avere $sin(x)) = k \cdot 180° \vee sin(x) = k\pi$, a seconda che accettiamo la soluzione in gradi sessagesimali o in radianti. Per evitare complicazioni lavoriamo in radianti, perché sono numeri puri più facili da trattare. L'equazione ha soluzione solo se $-1 \le k\pi \le 1 \Rightarrow -1/\pi \le k \le 1/\pi$ e poiché $1/\pi \approx 0{,}32$ e k è un numero intero vi è una sola soluzione accettabile, cioè $k = 0$, quindi l'equazione data equivale all'equazione $sin(x) = 0$ pertanto le sue soluzioni sono $x = k\pi$.

Risolvere le seguenti equazioni

Livello 3

36. a) $sin[cos(x)] = 0$; b) $sin[tan(x)] = 0$; c) $cos[cos(x)] = 0$; d) $cos[sin(x)] = 0$

[a) $x = \pi/2 + k\pi$; b) $x = tan^{-1}(k\pi)$; c) ∅; d) ∅]

37. a) $cos[cos(x)] = 1$; b) $tan[tan(x)] = 0$; c) $tan[sin(x)] = 0$; d) $cot[cos(x)] = -1$

[a) $x = \pi/2 + k\pi$; b) $x = tan^{-1}(k\pi) + h\pi$; c) $x = k\pi$; d) $x = \pm cos^{-1}(\pi/4) + 2k\pi$]

38. a) $tan[sin(x)] = 1$; b) $tan[sin(x)] = -\sqrt{3}$ [a) $x = sin^{-1}(\pi/4) + 2k\pi \vee \pi - sin^{-1}(\pi/4) + 2k\pi$; b) ∅]

Lavoriamo insieme

Risolvere l'equazione: $4sin^2(x - 1) - sin(x - 1) - 2 = 0$, $-3 \le x \le 3$.

Risolviamo intanto l'equazione di II grado: $sin(x-1) = \frac{1 \pm \sqrt{1+32}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$. Vediamo se i valori ottenuti sono accettabili, ossia rientrano nell'intervallo [–1; 1]. Abbiamo: $\frac{1-\sqrt{33}}{8} \approx -0{,}59; \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8} \approx 0{,}84$. Entrambi sono accettabili. Dobbiamo risolvere le due equazioni_ $sin(x-1) = \frac{1-\sqrt{33}}{8} \Rightarrow x = 1 + sin^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right) + 2k\pi$ $\approx 0{,}37 + 2k\pi$ $\vee x = 1 + \pi - sin^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right) + 2k\pi \Rightarrow$ $x \approx 4{,}78 + 2k\pi$; $sin(x-1) = \frac{1+\sqrt{33}}{8} \Rightarrow x = 1 + sin^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right) +$ $2k\pi \approx 2{,}00 + 2k\pi \vee x = 1 + \pi - sin^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right) + 2k\pi \approx 3{,}14 + 2k\pi$. Vediamo adesso quante soluzioni rientrano nell'intervallo [–3; 3]. La prima famiglia di soluzioni ammette solo la soluzione $x_1 = 0{,}37$; per la seconda invece $x_2 = 4{,}78 - 2\pi \approx -1{,}50$; la terza $x_3 = 2{,}00$ e l'ultima nessuna soluzione.

Risolvere le seguenti equazioni negli intervalli indicati

Livello 1

39. $tan^2(x) = 3$; $x \in [-1234°; 3456°]$ [$x_1 = -1140° \vee x_2 = -1020° \vee … \vee x_{13} = 3180° \vee x_{14} = 3300°$]

40. a) $sin^2(x) = 1$; $x \in [-400°; 520°]$; b) $cos^2(x) = 1/4$; $x \in [-4; 5]$; $sec^2(x) = 2$; $x \in [-2; 6]$
[a) $(\pm 780° \vee \pm 270° \vee \pm 450°)$; b) $(\pm\pi/4 \vee 3\pi/4 \vee 5\pi/4 \vee 7\pi/4)$]

41. a) $cot^2(x) = 1$; $x \in [-2; 7]$; b) $sin^2(x) - sin(x) = 0$; $x \in [-4; 4]$
[a) $(\pm\pi/4 \vee 3\pi/4 \vee 5\pi/4 \vee 7\pi/4)$; b) $(\pm\pi \vee \pi/2)$]

42. a) $csc^2(x) = 4/3$; $x \in [-1000°; 50°]$; b) $cos^2(x) + 2cos(x) = 0$; $x \in [-40°; 525°]$
[a) $(-780° \vee -660° \vee -420° \vee -300° \vee -60°)$; b) $(90° \vee 270° \vee 450°)$]

43. a) $tan^2(x) - \sqrt{3} \cdot tan(x) = 0, x \in [-1; 5]$; b) $\sqrt{3}csc^2(x) = 2 \cdot csc(x), x \in [-1; 8]$
[a) $(0 \vee \pi/3 \vee \pi \vee 4\pi/3)$; b) $(\pi/3 \vee 4\pi/3 \vee 7\pi/3)$]

44. a) $3 \cdot cot^2(x) = \sqrt{3} \cdot cot(x), x \in [-205°; 754°]$; b) $sec^2(x) = 2sec(x)$; $x \in [-1002°; 615°]$
[a) $(x_1 = -120° \vee x_2 = -90° \vee x_3 = 60° \vee \ldots \vee x_9 = 600° \vee x_{10} = 630°)$; b) $(-660° \vee -300° \vee 60° \vee 420°)$]

45. $4 \cdot sin^2(x) + 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) \cdot sin(x) - \sqrt{2} = 0; x \in [0; 360°]$ [$30° \vee 150° \vee 225° \vee 315°$]

46. $2cos^2(x) + cos(x) - 1 = 0$, $x \in [-360°; 359°]$ [$-300° \vee -180° \vee -60° \vee 60° \vee 180° \vee 300°$]

47. $3 \cdot cot^2(x) - 4 \cdot \sqrt{3} \cdot cot(x) + 3 = 0, x \in [-3\pi; 5\pi]$ $\left[x_1 = -\frac{17\pi}{6} \vee x_2 = -\frac{8\pi}{3} \vee \ldots \vee x_{15} = \frac{25\pi}{6} \vee x_{16} = \frac{13\pi}{3}\right]$

48. a) $sec^2(x) + (\sqrt{2} - 1) \cdot sec(x) - \sqrt{2} = 0; x \in [-700°; 400°]$; b) $tan^2(x) - (\sqrt{3} - 1) \cdot tan(x) - \sqrt{3} = 0; x \in [-4; 3]$
[a) $(x_1 = -585° \vee x_2 = -495° \vee \ldots \vee x_7 = 225° \vee x_8 = 365°)$; b) $(-5\pi/4 \vee -2\pi/3 \vee -\pi/4 \vee \pi/3 \vee 3\pi/4)$]

49. $csc^2(x) + (\sqrt{2} + 2) \cdot csc(x) + 2 \cdot \sqrt{2} = 0; x \in [-5; 3]$ $\left[-\frac{5\pi}{6} \vee -\frac{3\pi}{4} \vee -\frac{\pi}{4} \vee -\frac{\pi}{6}\right]$

Livello 2

50. a) $cos^2(x)+6cos(x)-1=0;x\in[412°;625°]$; b) $4sin^2(x)-5sin(x)-3=0;x\in[125°;236°]$ [a) $\approx 440°39'39''$;b) $\varnothing$]

51. a) $3csc^2(x)-4csc(x)-5=0$; $x\in[748°; 821°]$; b) $3sec^2(x)+2sec(x)-1=0$; $x\in[274°; 351°]$ [a) $\approx 748°9'$; b) $\varnothing$]

52. a) $6tan^2(x) - 3tan(x) - 7 = 0$; $x\in[421°; 652°]$; b) $6tan^2(x) + tan(x) - 1 = 0$; $x\in[1; 3]$
[a) $(499°20'53'' \vee 593°38'48'')$; b) $\approx 2{,}68$]

53. a) $2cot^2(x) - 3cot(x) - 8 = 0$; $x\in[-245°; 306°]$; b) $3csc^2(x) + 5csc(x) + 1 = 0$; $x\in[2; 5]$
[a) $(-215°48'38'' \vee -160°53'20'' \vee -35°48'38'' \vee 19°6'40'' \vee 144°11'22'' \vee 199°6'40'')$; b) $\varnothing$]

54. a) $sin^2(x)-4cos(x) - 2 = 0$; $x\in[4; 6]$; b) $3csc^2(x) + 4csc(x) + 1 = 0$; $x\in[-4; 8]$ [a) $\approx 4{,}44$; b) $-\pi/2 \vee 3\pi/2$]

55. a) $cot^2(x) + 3cot(x) + 1 = 0$; $x\in[4; 9]$; b) $3cos^2(x) - 4sin(x) - 2 = 0$; $x\in[-1; 8]$
[a) $(\approx 5{,}08 \vee \approx 5{,}92 \vee \approx 8{,}22)$; b) $(\approx -0{,}90 \vee \approx 4{,}04 \vee \approx 5{,}38)$]

Livello 3

56. a) $5sin^2(2x + 1) + 3sin(2x + 1) - 1 = 0$; $x\in[-2; 1]$; b) $3cot^2(5 - 3x) + 7cot(5 - 3x) - 1 = 0$; $x\in[-2; 1]$
[a) $(\approx -1{,}57 \vee \approx -1{,}00 \vee \approx -0{,}38 \vee \approx 0{,}95)$; b) $(\approx -1{,}95 \vee \approx -1{,}35 \vee \approx -0{,}91 \vee \approx -0{,}30 \vee \approx 0{,}14 \vee \approx 0{,}75)$]

57. $2tan^2(4x-3)-tan(4x-3)- 3 = 0$; $x\in[-1; 2]$ $\left[\approx -0{,}58 \vee \frac{12-5\pi}{16} \vee \approx 0{,}21 \vee \frac{12-\pi}{16} \vee \approx 1{,}00 \vee \frac{3\pi+12}{16} \vee \approx 1{,}78\right]$

58. a) $3sec^2(2 - 3x) + 2sec(2 - 3x) - 2 = 0$; $x\in[-2; 1]$; b) $2cos^2(3x + 2) - cos(3x + 2) - 2 = 0$; $x\in[-1; 3]$
[a) $(\approx -0{,}58 \vee \approx -0{,}18)$; b) $(\approx 0{,}16 \vee \approx 0{,}61 \vee \approx 2{,}25 \vee \approx 2{,}70)$]

59. $4csc^2(2x + 1) + 5csc(2x + 1) + 1 = 0$; $x\in[-3; 2]$ [$-\pi/4 - 1/2 \vee 3\pi/4 - 1/2$)]

60. $6cos^2(2x + 32°) - 9cos(2x + 32°) + 2 = 0$; $x\in[-400°; 125°]$
[$\approx -338°52'13'' \vee \approx -233°7'47'' \vee \approx -158°52'13'' \vee \approx -53°7'47'' \vee \approx 21°7'47''$]

61. $8csc^2(3x - 47°) - 11csc(3x - 47°) + 3 = 0$; $x\in[-35°; 145°]$ [$45°40'$]

62. $3cot^2(58° - 3x) + 7cot(58° - 3x) + 1 = 0$; $x\in[-205°; 178°]$
[$x_1 \approx -193°33'50'' \vee \approx -152°27'15'' \vee \ldots \vee \approx 147°32'45'' \vee x_{13} \approx 166°26'10''$]

63. $3sin^2(2x + 15°) - 2sin(2x + 15°) - 3 = 0$; $x\in[-30°; 252°]$ [$\approx 105°33'31'' \vee \approx 149°26'29''$]

64. $6sec^2(2x + 35°) - 7sec(2x + 35°) + 1 = 0$; $x\in[-45°; 184°]$ [$\approx -17°30' \vee \approx 162°30'$]

65. a) $4tan^2(65° - 3x)-7tan(65°- 3x) + 2 = 0$; $x\in[-38°; 124°]$; b) $cot^4(2 + x) + cot^2(2 + x) - 6 = 0$; $x\in(1; 5)$
[a) $(\approx 3°34'29'' \vee \approx 15°4'25'' \vee \approx 63°34'29'' \vee \approx 75°4'25'' \vee \approx 123°34'29'')$; b) $(\approx 1{,}76 \vee \approx 3{,}67 \vee \approx 4{,}90)$]

66. $4cos^3(2x + 52°) - 4cos^2(2x + 52°) - cos(2x + 52°) + 1 = 0$; $x\in[-315°; 10°]$
[$-266°30' \vee -236°30' \vee -206°30' \vee -176°30' \vee -146°30'$]

67. $2sin^3(4x - 2°) - 3sin^2(4x - 2°) + 1 = 0$; $x\in[-102°; 105°]$ [$-97° \vee -67° \vee -37° \vee -7° \vee 83°$]

68. $tan^3(3x + 2) - tan^2(3x + 2) + 3\cdot tan(3x + 2) - 3 = 0;\ x\in[-2; 2]$ $\left[\frac{-3\pi-8}{12}\vee\frac{\pi-8}{12}\vee\frac{5\pi-8}{12}\vee\frac{9\pi-8}{12}\right]$

69. $cot^3(32° - 2x) + cot^2(32° - 2x) - 3cot(32° - 2x) - 3 = 0;\ x\in[-123°; 234°]$
$[-89° \vee -59° \vee -51°30' \vee 1° \vee 31° \vee 38°30' \vee 91° \vee 121° \vee 128°30' \vee 181° \vee 211° \vee 218°30']$

70. a) $csc^4(1 - 3x) - 5\cdot csc^2(1 - 3x) + 4 = 0;\ x\in(1; 3)$; b) $2sin^3(4x - 3) - 1 = 0;\ x\in[-3; -1]$
$\left[\text{a})\left(\frac{13\pi+6}{18}\vee\frac{-7\pi+18}{18}\vee\frac{11\pi+6}{18}\vee\frac{3\pi+4}{12}\vee\frac{5\pi+4}{12}\vee\frac{7\pi+4}{12}\vee\frac{9\pi+4}{12}\right);\text{b})\left(\approx-2{,}16;\approx-1{,}84;\approx-0{,}26\right)\right]$

71. $4sec^3(4x - 15°) + 8sec^2(4x - 15°) - 3sec(4x - 15°) - 6 = 0;\ x\in(120°; 401°)$
$[123°45' \vee 213°45' \vee 303°45' \vee 393°45']$

72. $24cos^3(5 - 3x) - 10cos^2(5 - 3x) - 13cos(5 - 3x) + 6 = 0;\ x\in(0; 3)$ $[\approx 0{,}38 \vee \approx 2{,}47 \vee \approx 2\ 95]$

73. $20tan^3(22° + x) + 47tan^2(22° + x) - 37tan(22° + x) + 6 = 0;\ x\in[-40°; 384°]$
$[\approx -13°33'54'' \vee \approx -0°11'55'' \vee \approx 66°26'6' \vee \approx 172°2'10'' \vee \approx 179°48'5'' \vee \approx 352°2'10'' \vee \approx 359°48'5'']$

Lavoriamo insieme

Risolvere l'equazione: $sin(8x + 5) = cos(12 - x);\ x\in[-6; 1]$.
Trasformiamo il coseno in seno (potremmo fare anche il viceversa): $sin(8x + 5) = sin(\pi/2 - 12 + x)$. Adesso imponiamo la condizione che i seni siano uguali: $8x + 5 = \pi/2 - 12 + x + 2k\pi \vee 8x + 5 = \pi - (\pi/2 - 12 + x) + 2k\pi$. Risolviamo le due equazioni: $7x = \pi/2 - 17 + 2k\pi \vee 9x = \pi/2 + 7 + 2k\pi \Rightarrow x = \pi/17 - 17/7 + 2/7k\pi \vee x = \pi/18 + 7/9 + 2/9k\pi$. Vediamo quante soluzioni rientrano nell'intervallo indicato:

$$-6\le\frac{\pi}{14}-\frac{17}{7}+\frac{2}{7}k\pi\le1\vee-6\le\frac{\pi}{18}+\frac{7}{9}+\frac{2}{9}k\pi\le1\Rightarrow-\frac{25}{7}-\frac{\pi}{14}\le\frac{2}{7}k\pi\le\frac{24}{7}-\frac{\pi}{14}\vee-\frac{61}{9}-\frac{\pi}{18}\le\frac{2}{9}k\pi\le\frac{2}{9}-\frac{\pi}{18}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-\frac{25}{2\pi}-\frac{1}{4}\le k\le\frac{12}{\pi}-\frac{1}{4}\vee-\frac{61}{2\pi}-\frac{1}{4}\le k\le\frac{1}{\pi}-\frac{1}{4}$$. Calcoliamo valori approssimati degli estremi:

$$-\frac{25}{2\pi}-\frac{1}{4}\approx-4{,}23;\frac{12}{\pi}-\frac{1}{4}\approx3{,}57;-\frac{61}{2\pi}-\frac{1}{4}\approx-9{,}96;\frac{1}{\pi}-\frac{1}{4}\approx0{,}07$$

Quindi, tenuto conto del fatto che k deve essere intero abbiamo: $-4 \le k \le 3 \vee -9 \le k \le 0$. La data equazione ha un totale di 8 + 10 = 18 soluzioni. Calcoliamone alcune:

$$x_1=\frac{\pi}{14}-\frac{17}{7}+\frac{2}{7}\cdot(-4\pi)\approx-5{,}79;\ldots;x_8=\frac{\pi}{14}-\frac{17}{7}+\frac{2}{7}\cdot3\pi\approx0{,}49;$$

$$x_9=\frac{\pi}{18}+\frac{7}{9}+\frac{2}{9}(-9\pi)\approx-5{,}33;\ldots;x_{18}=\frac{\pi}{18}+\frac{7}{9}\approx0{,}95.$$

Risolvere le seguenti equazioni negli intervalli indicati

***Livello* 1**

74. $sin(5x - 25°) = sin(75° - 3x);\ x\in[220°; 400°]$ $[237°30' \vee 245° \vee 282°30' \vee 327°30' \vee 372°30']$

75. $sec(8x - 68°) = sec(35° - 7x);\ x\in[158°; 376°]$
$[174°52' \vee 198°52' \vee 222°52' \vee 246°52' \vee 270°52' \vee 294°52' \vee 318°52' \vee 342°52' \vee 366°52']$

76. $cos(3x - 47°) = cos(57° - 9x);\ x\in[315°; 498°]$
$[338°40' \vee 361°40' \vee 368°40' \vee 398°40' \vee 421°40' \vee 428°40' \vee 458°40' \vee 481°40' \vee 488°40']$

77. $csc(6x+37°)=csc(29°-4x);\ x\in[235°; 428°]$ $[251°12'\vee237°\vee287°12'\vee323°12'\vee359°12'\vee395°12'\vee 417°]$

78. $cot(9x + 14°) = cot(38° + 4x);\ x\in[325°; 448°]$ $[328°48' \vee 364°48' \vee 400°48' \vee 436°48']$

79. $tan(6x - 58°) = tan(14° - 5x);\ x\in[112°; 338°]$
$[x_1 \approx 121°5'27'' \vee x_2 \approx 137°27'16'' \vee \ldots \vee x_{13} \approx 317°27'16'' \vee x_{14} \approx 333°49'5'']$

80. $csc(7x+4) = csc(8 - 3x);\ x\in[-3; 5]$ $\left[x_1=\frac{2-5\pi}{5},\ldots,x_{13}=\frac{7\pi+2}{5},x_{14}=\frac{\pi-12}{4},\ldots,x_{18}=\frac{9\pi-12}{4}\right]$

81. $sec(4x + 2) = sec(5 - 4x);\ x\in[-4; 3]$ $\left[x_1=\frac{3-10\pi}{8},\ldots,x_6=\frac{3}{8},\ldots,x_9=\frac{3+6\pi}{8}\right]$

82. $cos(5x + 4) = cos(3 - 2x);\ x\in[-5; 2]$ $\left[x_1=\frac{-1-10\pi}{7},\ldots,x_8=\frac{4\pi-1}{7},x_9=\frac{-7-2\pi}{3},\ldots,x_{12}=\frac{4\pi-7}{3}\right]$

83. $cot(5x + 3) = cot(4 + 2x)$; $x\in[-2; 6]$ $\left[x_1 = \frac{1-2\pi}{3}, x_2 = \frac{1-\pi}{3}, ..., x_8 = \frac{1+5\pi}{3}\right]$

84. $sin(2x + 7) = sin(5 - 4x)$; $x\in[-2; 5]$ $\left[x_1 = \frac{-1-\pi}{3}, ..., x_7 = \frac{5\pi-1}{3}, x_8 = \frac{12-\pi}{2}, ..., x_{10} = \frac{12-5\pi}{2}\right]$

85. $tan(8x + 2) = tan(11 - x)$; $x\in[-4; 2]$ $\left[x_1 = \frac{9-14\pi}{9}, x_2 = \frac{9-13\pi}{9}, ..., x_{17} = \frac{9+2\pi}{9}\right]$

Livello 2

86. $tan(7x + 94°) = cot(37° - 2x)$; $x\in[320°; 520°]$ $[351°48' \vee 387°48' \vee 423°48' \vee 459°48' \vee 495°48']$

87. $sin(7x + 12°) = cos(49° - 3x)$; $x\in[250°; 450°]$
$[264°42' \vee 277°15' \vee 300°42' \vee 336°42' \vee 367°15' \vee 372°42' \vee 408°42' \vee 444°42']$

88. $cot(7x - 34°) = tan(85° - 6x)$; $x\in[210°; 380°]$ $[219°]$

89. $cos(6x + 12°) = sin(32° - 8x)$; $x\in[125°; 248°]$ $[149°17'9'' \vee 157° \vee 175° \vee 200°42'51'' \vee 226°25'43'']$

90. $csc(3x + 28°) = sec(67° - 7x)$; $x\in[765°; 948°]$
$[768°54' \vee 804°54' \vee 811°15' \vee 840°54' \vee 876°54' \vee 901°15' \vee 912°54']$

91. $sec(7x - 64°) = csc(84° - 5x)$; $x\in[180°; 370°]$
$[184°50' \vee 214°50' \vee 215° \vee 244°50' \vee 274°50' \vee 304°50' \vee 334°50' \vee 364°50']$

92. $tan(6x - 7) = cot(4 + 3x)$; $x\in[-5; 3]$ $\left[\frac{6-13\pi}{18} \vee \frac{6-11\pi}{18} \vee ... \vee \frac{6+\pi}{18} \vee \frac{2+\pi}{6}\right]$

93. $cot(4x - 2) = tan(3 + 5x)$; $x\in[-2; 1]$ $\left[\frac{-2-9\pi}{18} \vee \frac{-2-7\pi}{18} \vee ... \vee \frac{-2+3\pi}{18} \vee \frac{-2+5\pi}{18}\right]$

94. $sin(9x + 7) = cos(11 + x)$; $x\in[-2; 2]$ $\left[x_1 = \frac{\pi-36}{20} \vee ... \vee x_6 = \frac{21\pi-36}{20} \vee x_7 = \frac{8-11\pi}{14} \vee ... \vee x_{11} = \frac{8+5\pi}{14}\right]$

95. $csc(4x + 7) = sec(10 - x)$; $x\in[-1; 3]$ $\left[\frac{9\pi-34}{6} \vee \frac{13\pi-34}{6} \vee \frac{6-3\pi}{10} \vee \frac{6+\pi}{10} \vee \frac{6+5\pi}{10}\right]$

96. $cos(4x - 5) = sin(7 + 3x)$; $x\in[-1\ 3]$ $\left[x_1 = \frac{-3\pi-4}{14} \vee x_2 = \frac{\pi-4}{14} \vee ... \vee x_8 = \frac{13\pi-4}{14}\right]$

Livello 3

Senza risolvere le equazioni determinare quante soluzioni sono comprese negli intervalli indicati

97. a) $sin(4x) = 0,73$; $x\in[0°; 360°]$; b) $sin(4x) = 0,23$; $x\in[0°; 300°]$; c) $sin(4x) = 0,15$; $x\in[100°; 360°]$
[a) 8; b) 7; c) 5]

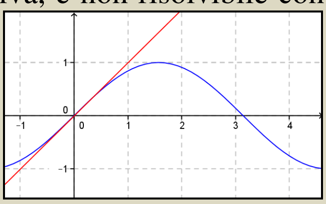
98. a) $sin(10 - 2x) = -0,34$; $x \in [-100°; 100°]$; b) $cos(170 + 2x) = 0,12$; $x \in [200°; 600°]$ [a) 3; b) 5]

99. a) $cos(4 - 3x) = -0,31$; $x \in [-5\pi/6; 5\pi/6]$; b) $cot(25° - 2x) = -3$; $x \in [-10°; 400°]$ [a) 5; b) 2]

100. a) $tan(x + 2) = 2,3$; $x\in[-2; 3]$; b) $sec(2x + 15°) = 2$; $x\in[-50°; 200°]$; c) $csc(2 + x) = -3$; $x\in[-5; 3]$
[a) b) 2; c) 3]

Lavoriamo insieme

Risolvere l'equazione sin(x) = x, con l'aiuto dei grafici

La risoluzione è in generale qualitativa, e non risolvibile con metodi analitici. Rappresentiamo nello stesso grafico la sinusoide e la retta $y = x$. 

Facilmente si vede che i due grafici si incontrano nell'origine. Possiamo perciò concludere che l'equazione data ha l'unica soluzione $x = 0$.

Utilizzando le rappresentazioni grafiche dire quante e, se possibile, quali soluzioni hanno le seguenti equazioni goniometriche

Livello 2

101. a) $cos(x) = x$; b) $tan(x) = x$; c) $sin(x/2) = x$; d) $cos(2x) = x$; e) $tan(x) = x + 1$; f) $sin(x) = x - 1$
[a) infinite; b) 0; c) $x \approx 0,50$; d) $x \approx 0,74$; e) infinite; f) 2]

102. a) $cos(x) = 2x – 1$; b) $sin(2x + 1) = x$; c) $3 + sin(x) = 2x – 1$; d) $cos(x/2 – 1) = 1 – x$; $tan(2x) = –x$
[a) $x \approx 0,82$; b) $x \approx 0,69$; c) $x \approx 2,35$; d) $x \approx 0,33$; infinite]

103. a) $2\cdot sin(4x – 1) = 3x – 2$; b) $1 + cos(x) = 3 – 2x$; c) $2\cdot tan(x/3) = 3x$; d) $1 – 3sin(x) = 2 + 3x$
[a) $x \approx 0,33$; b) $x \approx 0,58$; c) infinite; d) $x \approx – 0,17$]

Livello 3

104. a) $cos(x) = x^2$; b) $tan(x) = x^2$; c) $sin(x) = x^2$; d) $cos(x) = 1 – x^2$
[a) $x \approx \pm 0,82$; b) infinite; c) $x \approx 0,88$; d) $x \approx 0,74$]

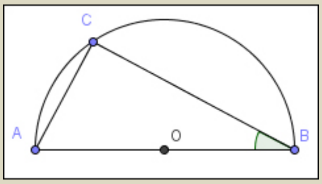
105. a) $tan(2x) = x^2 + 1$; b) $sin(x – 1) = x^2 – 1$; c) $cos(x) = 1/x$; d) $tan(x) = 1/x$
[a) infinite; b) $x \approx –0,24$; c) infinite; d) infinite]

106. a) $sin(x) = 1/x$; b) $1 + cos(2x – 1) = 2/x$; c) $2\cdot tan(x) = 1 – 1/x$; d) $2\cdot sin(3x) = 1/x$
[a) infinite; b) infinite; c) infinite; d) infinite]

107. a) $cos(x) + sin(x) = x$; b) $cos(x) – sin(x) = x$; c) $sin(x) + cos(x) = x^2$
[a) $x \approx 1,26$; b) $x \approx 0,46$; c) ($x \approx –0,56$;$x \approx 1,15$)]

Lavoriamo insieme

Data una semicirconferenza di diametro AB lungo 2, determinare su di essa, se esiste, un punto C in modo che si abbia: $\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}^2+\frac{2}{3}\cdot\overline{BC}^2=\frac{4}{3}$.

Consideriamo la figura. 

Abbiamo evidenziato uno dei due angoli acuti, che scegliamo come incognita, dato che esso ovviamente dipende dalla posizione di C sulla semicirconferenza. Possiamo trasformare la condizione data in un'equazione goniometrica, usando le proprietà sui triangoli rettangoli avremo, detto $A\hat{B}C = x$, abbiamo:

$$\overline{AC}=\overline{AB}\cdot sin(x)=2\cdot sin(x);\ \overline{BC}=\overline{AB}\cdot cos(x)=2\cdot cos(x)\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}^2+\frac{2}{3}\cdot\overline{BC}^2=\frac{4}{3}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{4}^2\cdot sin^2(x)+\frac{2}{3}\cdot 4\cdot cos^2(x)=\frac{4}{3}\Rightarrow 6\cdot sin^2(x)+8\cdot cos^2(x)-4=0.$$

L'equazione si risolve trasformando seno in coseno o viceversa: $6sin^2(x) + 8\cdot[1 – sin^2(x)] – 4 = 0 \Rightarrow sin^2(x) – 2 = 0$. Facilmente si nota che l'equazione non ha alcuna soluzione, quindi neanche il problema ne ha. Se invece la richiesta fosse stata: $\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}^2-\frac{2}{3}\cdot\overline{BC}^2=\frac{4}{3}$, l'equazione da risolvere sarebbe stata:

$$6\cdot sin^2(x)-8\cdot\left[1-sin^2(x)\right]-4=0\Rightarrow 14\cdot sin^2(x)-12=0\Rightarrow sin^2(x)=\frac{6}{7}\Rightarrow sin(x)=\sqrt{\frac{6}{7}}$$

Abbiamo scelto solo il valore positivo poiché l'angolo deve ovviamente essere acuto, quindi un valore approssimato dell'angolo soluzione sarà: $sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{6}{7}}\right)\approx 67°47'32''$.

Risolvere i seguenti problemi nei quali si deve impostare e risolvere un'equazione goniometrica

Livello 1

108. In una circonferenza una corda è perpendicolare al diametro e lo divide in due parti che stanno nel rapporto 3/5. Determina l'ampiezza dell'angolo al centro che insiste sulla corda. [≈ 151°2′42″]

109. Determinare le misure degli angoli interni di un triangolo rettangolo di ipotenusa lunga 3,89 e di area 3,73. [≈ 49°48′8″; ≈ 40°11′52″]

110. Determinare la misura di uno degli angoli alla base α di un triangolo isoscele di perimetro 4,77 e lato obliquo 1,47. [≈ 51°30′17″]

111. Un triangolo isoscele di lato obliquo lungo 3,14 ha area 4,92. Quanto misura uno degli angoli alla base? [≈ 43°11′36″ oppure ≈ 46°48′24″]

112. Su una semicirconferenza di diametro lungo 5,05, si scelga un punto *C*. Sia *D* la proiezione di *C* sulla tangente alla semicirconferenza in *B*. Se *CD* = 1,80, determinare $C\hat{A}B$. [≈36°39′25″]

113. Il rettangolo *ABCD* ha lati *AB* = 1 e *BC* = 2. Sulla retta condotta perpendicolarmente al piano del rettangolo nel punto medio del lato *BC* prendiamo un punto *V* in modo che il piano dei punti *V*, *B*, *C* formi col piano di *ABCD* un angolo *x*. Determinare *x* in modo che il volume della piramide di vertice *V* e base *ABCD* sia pari a 3 unità cubiche. [≈ 36°52′12″]

114. Sia *P* un punto sull'arco *AB*, quarta parte di un cerchio di centro *O* e raggio *r*. Determinare la misura dell'angolo $A\hat{O}P$ in modo che l'area del triangolo isoscele *OCP* di base *OP* e con *C* appartenente al segmento *OA*, sia $1/3r^2$. [≈ 53°7′48″]

115. Siano *A* e *B* due punti sulla circonferenza di centro *O* e raggio *r*. Determinare la misura di $A\hat{O}B$ in modo che l'area del triangolo equilatero *ABC* sia r^2. [≈ 98°53′58″]

Livello 2

116. Dato il triangolo isoscele *ABC*, di angolo al vertice di 30° e base lunga 5, tracciare il segmento *AD*, con *D* sul lato *BC*. Determinare la misura di $D\hat{A}B$, in modo che il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo *ABD* misuri 7. [≈ 84°4'31″]

117. In una circonferenza una corda forma con il diametro un angolo di 53° e lo divide nel rapporto 1/3. Determina l'ampiezza dell'angolo al centro che insiste sulla corda. [≈ 130°39′42″]

118. Sia *D* un punto sull'arco *AB*, quarta parte di un cerchio di centro *O* e raggio 4. Considera la proiezione ortogonale *F* di *D* sul raggio *OB* e il punto medio *E* del raggio *OA*. Determina la misura di $A\hat{O}D$ sapendo che $\overline{DE}^2 + \overline{DF}^2 = 17,22$. [≈ 39°05′31″ ∨ ≈ 77°03′50″]

119. Sia *P* un punto sull'arco *AB*, quarta parte di un cerchio di centro *O* e raggio *r*. Determinare la misura dell'angolo $A\hat{O}P$ in modo che l'area del quadrilatero *OACP* (*C* intersezione delle tangenti alla circonferenza in *P* e in *A*) sia $1/4r^2$. [≈ 28°4′21″]

120. In un triangolo rettangolo di ipotenusa lunga 7,75, la somma fra un cateto e la proiezione dello stesso cateto sull'ipotenusa è 4,82. Calcolare gli angoli acuti. [≈ 25°42′27″; ≈ 64°17′33″]

121. In un triangolo rettangolo di ipotenusa lunga 3,87, la differenza fra un cateto e la proiezione dello stesso cateto sull'ipotenusa è 0,87. Quanto misurano gli angoli acuti?
[≈ 19°57′16, ≈ 70°2′44″ oppure ≈ 41°12′10″, ≈ 48°47′50″]

122. In un trapezio isoscele di perimetro 16,90, le diagonali sono perpendicolari ai lati obliqui. Determinare la misura dell'angolo che la detta diagonale forma con la base maggiore, che è lunga 6,77.
[≈ 27°11′44″ oppure ≈ 32°53′10″]

123. Su una circonferenza di diametro *AB* lungo 4,32 *cm*, si consideri un punto *C*. Determinare la misura di $B\hat{A}C$ in modo che, detta *D* la proiezione di *C* sulla retta perpendicolare in *B* ad *AB*, si abbia $\overline{AC} + \overline{CD} = 4,86\ cm$. [≈ 81°34′42″ oppure ≈ 31°23′59″]

124. Data una semicirconferenza di diametro *AB*, sia un punto *C* su di essa e sia *H* la sua proiezione ortogonale su *AB*, determinare per quale valore dell'angolo $C\hat{A}B$, si ha $\frac{\overline{CB} + \overline{AH}}{\overline{AB} + \overline{HB}} = \frac{3}{4}$. [≈ 49°25′18″]

125. Data una semicirconferenza di diametro *AB*, sia un punto *C* su di essa e sia *H* la sua proiezione ortogonale su *AB*, determinare per quale valore dell'angolo $C\hat{A}B$, si ha $\frac{2 \cdot \overline{CB} + \overline{AH}}{\overline{AB} + 3 \cdot \overline{HB}} = 1$. [30°]

126. Il punto *K* è la proiezione sul diametro di un punto *P* su una semicirconferenza di diametro *AB* = 2*r*. Determinare la misura di $P\hat{A}B$ in modo che sia $\overline{AK} + \overline{PB} = \frac{9}{4}r$. [≈ 8°25′16″ oppure ≈ 58°36′1″]

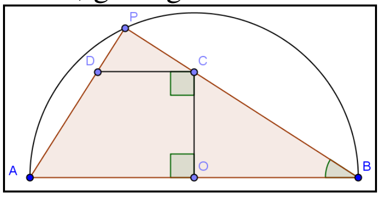
127. Un cono è circoscritto a una sfera di raggio 1,4 *cm*. Determinare l'ampiezza dell'angolo di apertura del cono, in modo che il volume dello stesso cono valga 28,4 cm^3. [≈ 18°52′27″ o ≈ 68°9′54″]

Livello 3

128. Dato il triangolo rettangolo *ABC*, dal punto medio *M* dell'ipotenusa *AB* si tracci la perpendicolare al cateto *BC* che lo incontra nel punto *D*. Determinare la misura di $A\hat{B}C$ in modo che sia $\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = 3 \cdot \frac{\overline{MD}}{\overline{BC}}$.
[≈ 24°41′34″]

129. Con riferimento al precedente quesito se si ha $\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = p \cdot \frac{\overline{MD}}{\overline{BC}}$, con p numero reale positivo, qual è il massimo valore che può assumere p? [4]

130. In figura, AB è lungo 6 cm, O è il centro della semicirconferenza, gli angoli in O e C sono retti. Determinare la misura di $A\hat{B}P$ in modo che sia $\overline{CD} = 1,91\ cm$.



[≈ 31°04′49″]

Equazioni omogenee in seno e coseno

Un altro tipo di equazioni facilmente risolvibili sono le cosiddette equazioni omogenee in seno e coseno. Poniamo una definizione.

Definizione 1

Dati a, b e c numeri reali e $f(x)$ una funzione reale di variabile reale

- $a \cdot sin[f(x)] + b \cdot cos[f(x)] = 0$, si chiama **equazione omogenea di I grado in seno e coseno**
- $a \cdot sin^2[f(x)] + b \cdot sin[f(x)] \cdot cos[f(x)] + c \cdot cos^2[f(x)] = 0$, si chiama **equazione omogenea di II grado in seno e coseno.**

Vediamo perché questo tipo di equazioni si risolve abbastanza semplicemente.

Esempio 8

Vogliamo risolvere l'equazione $3sin(4x + 1) – 5cos(4x + 1) = 0$. Cominciamo ad osservare che né le soluzioni dell'equazione $sin(4x + 1) = 0$, né quelle dell'equazione $cos(4x + 1) = 0$, sono soluzioni dell'equazione data. Infatti se si annulla il seno non si annulla il coseno e viceversa. Ciò significa che possiamo dividere per $sin(4x + 1)$ o per $cos(4x + 1)$, ottenendo così: $3tan(4x + 1) – 5 = 0 \vee 3 – 5cot(4x + 1) = 0$. Risolviamo la prima: $tan(4x + 1) = 5/3 \Rightarrow 4x + 1 = tan^{-1}(5/3) + k\pi \Rightarrow 4x + 1 \approx 1,03 + k\pi \Rightarrow x \approx 0,01 + k\pi/4$. Uguale risultato avremmo ottenuto risolvendo l'altra equazione.

Vediamo adesso un esempio di equazione di II grado omogenea.

Esempio 9

- Vogliamo risolvere l'equazione $7sin^2(3x – 10°) + 4sin(3x – 10°) \cdot cos(3x – 10°) = 0$. Stavolta non possiamo dividere per $sin(3x – 10°)$, poiché in tal modo verremmo a perdere delle soluzioni. Quindi trattiamo la detta equazione come se fosse una spuria di II grado, ossia mettiamo in evidenza il fattore comune e applichiamo il principio di annullamento del prodotto:
  $sin(3x – 10°)\cdot[7sin(3x – 10°)+ 4cos(3x – 10°)] = 0 \Rightarrow sin(3x – 10°) = 0 \vee 7sin(3x – 10°)+4cos(3x – 10°) = 0$
  In tal modo dobbiamo risolvere due equazioni, la seconda delle quali è una omogenea di I grado.
  $$sin(3x – 10°) = 0 \Rightarrow 3x – 10° = k \cdot 180° \Rightarrow x = 3°20' + k \cdot 60°$$
  $$7tan(3x – 10°) + 4 = 0 \Rightarrow 3x – 10° \approx –29°44'42'' + k \cdot 180° \Rightarrow x \approx –6°34'54''+ k \cdot 60°$$
- Invece l'equazione $7sin^2(3x – 10°) + 4sin(3x – 10°) \cdot cos(3x – 10°) + cos^2(3x – 10°) = 0$, la risolviamo dividendo per $cos^2(3x – 10°) = 0$ o per $sin^2(3x – 10°)$. Nel primo caso avremo:
  $7tan^2(3x – 10°) + 4tan(3x – 10°) + 1 = 0$, che è priva di soluzioni reali, avendo il discriminante negativo. Ovviamente dividendo per $sin^2(3x – 10°)$ avremmo ottenuto un'equazione diversa, ma equivalente e quindi anch'essa priva di soluzioni reali.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Risolvere l'equazione $3sin(7x + 2) – 2cos(7x + 2) = 0$, $x \in (–2; 1)$, *omogenea di I grado in seno e coseno.*
Dividiamo per $cos(7x + 2)$: $tan(7x + 2) = 2/3 \Rightarrow 7x + 2 \approx 0{,}196 + k\pi \Rightarrow x \approx – 0{,}26 + k\pi/7$. Adesso si tratta di vedere quali soluzioni appartengono all'intervallo indicato. Deve perciò essere:

$$–2 < – 0{,}26 + k\pi/7 < 1 \Rightarrow – 1{,}74 < k\pi/7 < 1{,}26 \Rightarrow – 3 \le k \le 2.$$

Abbiamo tenuto conto che k deve essere un numero intero. Quindi vi sono 6 soluzioni:

$$x_1 \approx –1{,}6;\ x_2 \approx –1{,}16;\ x_3 \approx –0{,}71;\ x_4 \approx –0{,}26;\ x_5 \approx 0{,}19;\ x_6 \approx 0{,}64.$$

Risolvere le seguenti equazioni omogenee di I grado in seno e coseno

Livello 1

1. a) $sin(x) – cos(x) = 0$; $x\in[120°; 210°]$; b) $sin(x) + cos(x) = 0$; $x\in[–120°; 107°]$ [a) $\varnothing$; b) –45°]
2. a) $\sqrt{3}\cdot sin(x) - cos(x) = 0, x\in[-2;3]$; b) $sin(x) + \sqrt{3}\cdot cos(x) = 0, x\in[-4;2]$ [a) $\pi/6$; β) $-\pi/6$]
3. a) $\sqrt{3}\cdot sin(x) + cos(x) = 0, x\in[-150°;270°]$; b) $sin(x) – 3cos(x) = 0$; $x\in[157°; 501°]$
   [a) –30° $\vee$ 150°; b) ≈ 251°33′54″ $\vee$ ≈ 431°33′54″]
4. a) $2sin(x) + 5cos(x) = 0$; $x\in[–15°; 1000°]$; b) $\sqrt{2}\cdot sin(x) + cos(x) = 0, x\in[-1;2]$
   $\left[\text{a) } \approx 111°48'5'' \vee \approx 291°48'5'' \vee \approx 471°48'5'' \vee \approx 651°48'5'' \vee \approx 831°48'5''; \text{b) } tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx -0{,}62\right]$
5. a) $4sin(x)–3cos(x)=0$; $x\in[–1;2]$; b) $3sin(x)–cos(x)=0$; $x\in[–1;5]$ [a) $tan^{-1}(3/4) \approx 0{,}64$; b) ≈ 0,32 $\vee$ ≈ 3,45]

Livello 2

6. $sin(3x – 12°) – 2cos(3x – 12°) = 0$; $x\in[220°; 410°]$ [≈ 265°8′42″ $\vee$ ≈ 325°8′42″ $\vee$ ≈ 385°8′42″]
7. $6sin(7x + 4°) – 8cos(7x+ 4°) = 0$; $x\in[213°; 453°]$
   [x_1 ≈ 238°26′50″ $\vee$ x_2 ≈ 264°9′41″ $\vee$ … $\vee$ x_8 ≈ 418°26′50″ $\vee$ x_9 ≈ 444°9′41″]
8. $4sin(3x+ 23°) + 9cos(3x+ 23°) = 0$; $x\in[125°; 246°]$ [≈ 150°19′15″ $\vee$ ≈ 210°19′15″]
9. $sin(2x – 47°) + cos(2x – 47°) = 0$; $x\in[145°; 215°]$ [181°]
10. $3sin(4x+ 15°) – 2cos(4x+ 15°) = 0$; $x\in[247°; 384°]$ [≈ 274°40′21″ $\vee$ ≈ 319°40′21″ $\vee$ ≈ 364°40′21″]
11. $sin(7x – 5) + cos(7x – 5) = 0$; $x\in[1; 2]$ $\left[\frac{3\pi+20}{28} \vee \frac{7\pi+20}{28} \vee \frac{11\pi+20}{28}\right]$
12. $sin(3x – 4) – 4cos(3x – 4) = 0$; $x\in[–2; 3]$ [≈ –1,37 $\vee$ ≈ –0,32 $\vee$ ≈ 0,73 $\vee$ ≈ 1,78 $\vee$ ≈ 2,82]
13. $3sin(5x – 3) + 5cos(5x – 3) = 0$; $x\in[1; 5]$[≈ 1,02 $\vee$ ≈1,65 $\vee$ ≈ 2,28 $\vee$ ≈ 2,91 $\vee$ ≈ 3,54 $\vee$ ≈ 4,16 $\vee$ ≈ 4,79]
14. $4sin(3x – 1) – 5cos(3x – 1) = 0$; $x\in[–2; 4]$ [≈ –1,46 $\vee$ ≈ –0,42 $\vee$ ≈ 0,63 $\vee$ ≈ 1,68 $\vee$ ≈ 2,73 $\vee$ ≈ 3,77]
15. $–2sin(7 – 2x) + 7cos(7 – 2x) = 0$; $x\in[–3; 4]$ [≈ –1,86 $\vee$ ≈ –0,29 $\vee$ ≈ 1,29 $\vee$ ≈ 2,85]

Lavoriamo insieme

Risolvere l'equazione non omogenea in seno e coseno: $sin^2(x) – 3sin(x)\cdot cos(x) + 4cos^2(x) – 2 = 0$.
L'equazione non è omogenea in seno e coseno a causa della presenza del termine noto. Però noi sappiamo che in goniometria vale la seguente identità, per qualsiasi angolo x: $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$, pertanto possiamo riscrivere la data equazione nel seguente modo equivalente:

$$sin^2(x) – 3sin(x)\cdot cos(x) + 4cos^2(x) – 2 \cdot [sin^2(x) + cos^2(x)] = 0 \Rightarrow sin^2(x) + 3sin(x)\cdot cos(x) – 2cos^2(x) = 0$$

che adesso è un'equazione omogenea e possiamo perciò risolverla con il consueto metodo:

$$tan^2(x) + 3tan(x) – 2 = 0 \Rightarrow tan(x) = \frac{-3\pm\sqrt{9+8}}{2} = \frac{-3\pm\sqrt{17}}{2} \Rightarrow x \approx 0{,}51 + k\cdot\pi \vee x \approx -1{,}30 + k\cdot\pi$$

Risolvere le seguenti equazioni omogenee, o riconducibili a esse, di II grado in seno e coseno, negli intervalli indicati

Livello 1

16. a) $sin^2(x) - 2sin(x)\cdot cos(x) + cos^2(x) = 0$, $x \in [-1; 3]$; $sin^2(x) + 3sin(x)\cdot cos(x) = 0$, $x \in [-2; 2]$
[a) $\pi/4$; b) $\approx -1{,}25 \vee 0 \vee \approx 1{,}89$]

17. $3sin^2(x) - 4sin(x)\cdot cos(x) - cos^2(x) = 0$, $x \in [-107°; 318°]$
[$\approx -12°8'51'' \vee \approx 57°8'51'' \vee \approx 167°51'9'' \vee \approx 237°8'51''$]

18. a) $5sin(x)\cdot cos(x) + 3cos^2(x) = 0$, $x \in [-310°; 357°]$; b) $4sin^2(x) - cos^2(x) = 0$, $x \in [-5; -3]$
[a) ($-270° \vee \approx -210°57'50'' \vee -90° \vee \approx -30°57'50'' \vee 90° \vee \approx 149°2'10'' \vee 270° \vee \approx 329°2'10''$); b) $\approx -3{,}6$]

19. $3sin^2(x) - sin(x)\cdot cos(x) + cos^2(x) = 0, x \in [-218°; 431°]$ [$\varnothing$]

20. $5sin^2(x) + 7sin(x)\cdot cos(x) + cos^2(x) = 0$, $x \in [-4; 0]$ [$\approx -3{,}3 \vee \approx -0{,}89$]

21. $sin^2(x) - 7sin(x)\cdot cos(x) + 10cos^2(x) = 0$, $x \in [-411°; 312°]$
[$x_1 \approx -296°33'54 \vee x_2 \approx -288°26'6'' \vee \ldots \vee x_7 \approx 243°26'56'' \vee x_8 \approx 251°33'54''$]

22. a) $sin^2(x)-5sin(x)\cdot cos(x)+6cos^2(x)=0, x \in [2; 5]$; b) $sin^2(x) - 5sin(x)\cdot cos(x) + 6cos^2(x) = 0$, $x \in [-201°; 3°]$
[a) ($\approx 2{,}25 \vee \approx 4{,}39$); b) ($\approx -99°27'44'' \vee -45°$)]

Livello 2

23. $sin^2(3x - 11°) - sin(3x - 11°)\cdot cos(3x - 11°) = 0$, $x \in [-45°; 140°]$
[$\approx -42°20' \vee \approx 3°40' \vee \approx 18°40' \vee \approx 63°40' \vee \approx 78°40' \vee 123°40' \vee \approx 138°40'$]

24. $sin^2(2x - 5) - 6cos^2(2x - 5) = 0$, $x \in [-1; 3]$ [$\approx -0{,}05 \vee \approx 0{,}34 \vee \approx 1{,}52$]

25. $3sin(5x - 12°)\cdot cos(5x - 12°) + cos^2(5x - 12°) = 0$, $x \in [-25°; 34°]$ [$-15°36' \vee \approx -1°17'14''$]

26. $sin^2(1 - 2x) - 2sin(1 - 2x)\cdot cos(1 - 2x) - cos^2(1 - 2x) = 0$, $x \in [-2; 3]$
[$\approx -1{,}66 \vee \approx -0{,}87 \vee \approx -0{,}09 \vee \approx 0{,}70 \vee \approx 1{,}48 \vee \approx 2{,}27$]

27. $sin^2(17° - 3x) - 5sin(17° - 3x)\cdot cos(17° - 3x) + 2cos^2(17° - 3x) = 0$, $x \in [-25°; 137°]$
[$\approx -20°12'42'' \vee \approx -2°13'30'' \vee \approx 40°12'42'' \vee \approx 58°13'30'' \vee \approx 100°12'42'' \vee \approx 118°13'30''$]

28. a) $sin^2(x)+4sin(x)\cdot cos(x)+cos^2(x)=3$; $x \in [120°;310°]$; b) $-sin^2(x)-2sin(x)\cdot cos(x)+cos^2(x) = -1$; $x \in [4; 6]$
[a) $225°$; b) $3\pi/2 \vee 7\pi/4$]

29. $cos^2(x) + 2sin(x)\cdot cos(x) - sin^2(x) = 4$; $x \in [230°; 465°]$;$-sin^2(x) - 2sin(x)\cdot cos(x) + 5cos^2(x) = 4$; $x \in [2; 6]$
[$\varnothing$; ($\approx 2{,}54 \vee \approx 3{,}42 \vee \approx 5{,}68$)]

30. $-sin^2(x) + 4sin(x)\cdot cos(x) + 6\cdot cos^2(x) = 3$; $x \in [304°; 415°]$ [$\approx 333°26'6''$]

31. a) $-sin^2(x) + 4sin(x)\cdot cos(x) - cos^2(x) = -3$; $x \in [2; 5]$; b) $cos^2(x) + 2sin(x)\cdot cos(x) - sin^2(x) = -2$; $x \in [3; 7]$
[a) $3\pi/4$; b) $\varnothing$]

Livello 3

32. $2sin^2(2x - 1) - 3sin(2x - 1)\cdot cos(2x - 1) + cos^2(2x - 1) - 2 = 0$, $x \in [-2; 1]$ [$\approx -1{,}23$]

33. $3sin^2(4x - 1) - sin(4x - 1)\cdot cos(4x - 1) + 2cos^2(4x - 1) - 3 = 0$, $x \in [-3; 2]$ $\left[\frac{4-13\pi}{16} \vee \frac{4-9\pi}{16} \vee \ldots \vee \frac{4+7\pi}{16}\right]$

34. $4sin^2(5x - 1) + 2sin(5x - 1)\cdot cos(5x - 1) - 4cos^2(5x - 1) - 3 = 0$, $x \in [2; 3]$
[$\approx 2{,}05 \vee \approx 2{,}29 \vee \approx 2{,}45 \vee \approx 2{,}53 \vee \approx 2{,}68 \vee \approx 2{,}91$]

35. $3sin^2(2x + 1) - sin(2x + 1)\cdot cos(2x + 1) + 4cos^2(2x + 1) - 1 = 0$, $x \in [-3; 4]$ [$\varnothing$]

36. $sin^2(3x + 2) - 6sin(3x + 2)\cdot cos(3x + 2) + cos^2(3x + 2) + 2 = 0$, $x \in [2; 5]$ $\left[\frac{11\pi-8}{12} \vee \frac{15\pi-8}{12} \vee \frac{19\pi-8}{12}\right]$

37. $sin^2(4x - 1) - sin(4x - 1)\cdot cos(4x - 1) - 4cos^2(4x - 1) + 3 = 0$, $x \in [-3; -2]$ [$\approx -2{,}98 \vee \approx -2{,}75 \vee -2{,}20$]

38. $sin^2(7x - 15°) - 4sin(7x - 15°)\cdot cos(7x - 15°) + 2cos^2(7x - 15°) - 3 = 0$, $x \in [-24°; 57°]$
[$\approx -6°22'37'' \vee \approx -0°11'21'' \vee \approx 19°20'14'' \vee \approx 25°31'30'' \vee \approx 45°3'6'' \vee \approx 51°14'21''$]

39. $4sin^2(2x + 34°) + sin(2x + 34°)\cdot cos(2x + 34°) - 8cos^2(2x + 34°) - 1 = 0$, $x \in [-248°; 71°]$
[$-228°9'44'' \vee \approx -168°13'10'' \vee \approx -138°9'44'' \vee \approx -78°13'10'' \vee \approx -48°9'44'' \vee \approx 11°46'50'' \vee \approx 41°50'16''$]

40. $sin^2(3x - 25°) - 4sin(3x - 25°)\cdot cos(3x - 25°) - cos^2(3x - 25°) - 1 = 0$, $x \in [-2°; 418°]$
[$\approx -0°31'18'' \vee \approx 59°28'42'' \vee \approx 119°28'42'' \vee \ldots \vee \approx 359°28'42'$}]

41. $3sin^2(5x + 41°) - sin(5x + 41°)\cdot cos(5x + 41°) + 2cos^2(5x + 41°) - 3 = 0$, $x \in [102°; 151°]$ [$126°48'$]

42. $5sin^2(6° - 2x) - sin(6° - 2x)\cdot cos(6° - 2x) - 5cos^2(6° - 2x) + 3 = 0$, $x \in [2°; 108°]$
[$\approx 78°14'12'' \vee \approx 104°54'29''$]

43. $4sin^2(4x + 18°) - sin(4x + 18°)\cdot cos(4x + 18°) - 3cos^2(4x + 18°) - 1 = 0$, $x \in [-112°; 17°]$
[$-105°45' \vee \approx -81°13'3'' \vee -60°45' \vee \approx -36°13'3'' \vee \approx -15°45' \vee \approx 8°46'57''$]

44. $sin^3(x) + 2sin^2(x)cos(x) + sin(x)\cdot cos^2(x) - 4\,cos^3(x) = 0$, $x \in [-100°; 150°]$ [$45°$]

Lavoriamo insieme

L'equazione $2sin^4(x) - sin^2(x) \cdot cos^2(x) - cos^4(x) = 0$, è ancora un'equazione omogenea, di IV grado stavolta. Il procedimento risolutivo è simile ai precedenti, dando luogo alla risoluzione di un'equazione biquadratica.

$$2 \cdot tan^4(x) - tan^2(x) - 1 = 0 \Rightarrow tan^2(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \prec \begin{matrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

La soluzione negativa non è ovviamente accettabile, pertanto dobbiamo risolvere solo l'equazione:

$$tan^2(x) = 1 \Rightarrow tan(x) = \pm 1 \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Risolvere le seguenti equazioni omogenee di IV grado in seno e coseno

Livello 2

45. a) $sin^4(x) - sin^2(x) \cdot cos^2(x) = 0$, $x \in [320°; 530°]$; b) $sin^4(x) - cos^4(x) = 0$; $x \in [750°; 876°]$ [a) (360° ∨ 405°); b) (765° ∨ 855°)]
46. a) $2sin^2(x)cos^2(x) + cos^4(x) = 0$; $x \in [624°;748°]$; b) $2cos^4(x) - sin^2(x)cos^2(x) + 3sin^4(x) = 0$; $x \in [578°;749°]$ [a) 630°; b) ∅]
47. a) $sin^4(x) - 2sin^2(x) \cdot cos^2(x) - 3cos^4(x) = 0$; $x \in [647°; 842°]$; b) $4sin^4(x) + cos^4(x) = 0$; $x \in [-4; 7]$ [a) (660° ∨ 780° ∨ 840°); b) ∅]
48. a) $sin^4(x) + sin^2(x)cos^2(x) - 5cos^4(x) = 0$; $x \in [-2; 3]$; b) $3sin^4(x) + sin^2(x)cos^2(x) - 2cos^4(x) = 0$; $x \in [3; 5]$ [a) (≈ –0,93 ∨ ≈ 0,93 ∨ ≈ 2,21); b) ≈ 3,83]
49. a) $4cos^4(x) - sin^2(x)cos^2(x) - 5sin^4(x) = 0$; $x \in [4; 7]$; b) $3sin^4(x) + 5 \cdot sin^2(x)cos^2(x) - cos^4(x) = 0$; $x \in [0; 2]$ [a) ≈ 5,44; ≈ b) 0,40]

Lavoriamo insieme

Risolvere l'equazione $2sin^4(x) - sin^2(x)cos^2(x) - cos^4(x) = 3$.

Non è un'equazione omogenea di IV grado, ma può ricondursi a essa mediante una procedura simile a quella mostrata per le omogenee di II grado: $2sin^4(x) - sin^2(x) \cdot cos^2(x) - cos^4(x) - 3 \cdot [sin^2(x) + cos^2(x)]^2 = 0 \Rightarrow 2sin^4(x) - sin^2(x) \cdot cos^2(x) - cos^4(x) - 3 \cdot [sin^4(x) + + cos^4(x) + 2sin^2(x) \cdot cos^2(x)] = 0 \Rightarrow sin^4(x) + 7sin^2(x) \cdot cos^2(x) + 4cos^4(x) = 0 \Rightarrow tan^4(x) + 7tan^2(x) + 4 = 0 \Rightarrow tan^2(x) = \frac{-7 \pm \sqrt{49-16}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{33}}{2}$. Stavolta entrambe le soluzioni sono negative, quindi l'equazione non ha soluzioni.

Risolvere le seguenti equazioni riconducibili a omogenee di IV grado in seno e coseno

Livello 3

50. $9sin^4(x) - 13sin^2(x) \cdot cos^2(x) - 10cos^4(x) = 2$; $x \in [30°; 340°]$ [60° ∨ 120° ∨ 240° ∨ 300°]
51. $14sin^4(x) + 6 \cdot sin^2(x) \cdot cos^2(x) = 5$; $x \in [75°; 476°]$ [135° ∨ 225° ∨ 315° ∨ 405°]
52. $15sin^4(x) + 11sin^2(x) \cdot cos^2(x) + 6cos^4(x) = 8$; $x \in [-62°; 348°]$ [45° ∨ 135° ∨ 225° ∨ 315°]
53. $3sin^4(x) - sin^2(x) \cdot cos^2(x) = 1$; $x \in [130°; 405°]$ [≈ 233°9′12″ ∨ ≈ 306°50′48″]
54. $sin^4(x) + 7sin^2(x) \cdot cos^2(x) - 6cos^4(x) = -2$; $x \in [-367°; 42°]$
55. $7sin^4(x) + 16sin^2(x) \cdot cos^2(x) - 15cos^4(x) = 6$; $x \in [1; 5]$ [π/3 ∨ 2π/3 ∨ 4π/3
56. $4sin^4(x) + cos^4(x) = 1$; $x \in [-1; 2]$; $3sin^4(x) - cos^4(x) + 1 = 0$; $x \in [-2; 2]$ [≈ ± 0,68; ≈ ±0,90]
57. $-17cos^4(x) - 2sin^2(x) \cdot cos^2(x) - sin^4(x) = -2$; $x \in [-4; 0]$ [–7π/6 ∨ –5π/6]
58. $3sin^4(x) + sin^2(x) \cdot cos^2(x) - 2 = 0$; $x \in [-1; 3]$ [≈ ±1,08 ∨ ≈ 2,06]
59. $-5sin^4(2x - 15°) - 5sin^2(2x - 15°) \cdot cos^2(2x - 15°) + 2cos^4(2x - 15°) = -2$; $x \in [-78°; 191°]$ [–60° ∨ –15° ∨ 30° ∨ 75° ∨ 120° ∨ 165°]
60. $sin^4(11° - 3x) + 3sin^2(11° - 3x) \cdot cos^2(11° - 3x) - 2cos^4(11° - 3x) = 1$; $x \in [35°; 150°]$ [36°20′ ∨ 43°40′ ∨ 83°40′ ∨ 93°40′ ∨ 96°20′ ∨ 103°40′]
61. $5sin^4(25° - 4x) + sin^2(25° - 4x) \cdot cos^2(25° - 4x) + cos^4(25° - 4x) = 3$; $x \in [-16°; 82°]$ [≈ 36°24′33″ ∨ ≈ 66°5′27″ ∨ ≈ 81°24′33″]
62. $4sin^4(5x + 47°) + sin^2(5x + 47°) \cdot cos^2(5x + 47°) - 3cos^4(5x + 47°) + 2 = 0$; $x \in [-66°; 42°]$ [≈ –49°50′30″ ∨ ≈ –40°57′30″ ∨ ≈ –13°50′30″ ∨ ≈ –4°57′30″ ∨ ≈ 22°9′30″ ∨ ≈ 31°2′30″]

63. $3cos^4(72° + 3x) – sin^2(72° + 3x) \cdot cos^2(72° + 3x) + 2sin^4(72° + 3x) + 3 = 0; x\in[–17°; 91°]$ [∅]

64. $sin^4(2 – 2x) + sin^2(2 – 2x) \cdot cos^2(2 – 2x) – 4cos^4(2 – 2x) = –2; x\in[–3; 1]$

$$\left[\frac{12-13\pi}{12}\vee\frac{12-11\pi}{12}\vee\frac{12-7\pi}{12}\vee\frac{12-5\pi}{12}\vee\frac{12-\pi}{12}\right]$$

65. $3sin^4(3x + 2) + 6sin^2(3x + 2) \cdot cos^2(3x + 2) – 5cos^4(3x + 2) – 1 = 0; x\in[–1; 2]$

$$\left[\frac{-\pi-8}{12}\vee\frac{\pi-8}{12}\vee\frac{3\pi-8}{12}\vee\ldots\vee\frac{9\pi-8}{12}\right]$$

66. $2cos^4(3x – 2) – 16sin^2(3x – 2) \cdot cos^2(3x – 2) + 2sin^4(3x – 2) + 3 = 0; x\in[–2; 1]$

$$\left[\frac{8-9\pi}{12}\vee\frac{8-7\pi}{12}\vee\ldots\vee\frac{8+\pi}{12}\right]$$

67. $sin^4(x + 5) – cos^4(x + 5) + 3 = 0; x\in[–3; 0]$ [∅]

68. $sin^4(2x – 3) + 3sin^2(2x – 3)\cdot cos^2(2x – 3) + 5cos^4(2x – 3) = 2; x\in[–2; 1]$ [≈ –1,22 ∨ ≈ –0,47 ∨ ≈ 0,35]

Risolvere i seguenti problemi nei quali deve impostarsi e risolvere un'equazione omogenea

Livello 2

69. Data una semicirconferenza di diametro AB lungo 1, determinare su di essa un punto C in modo che sia $\frac{7}{4}\cdot\overline{AC}^2-\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}^2=\frac{5}{4}$. Esprimere il risultato in termini dell'angolo β. [β ≈ 61°52′28″]

70. Nel triangolo rettangolo ABC di ipotenusa lunga 4,84 cm, si tracci l'altezza CH. Determinare la misura di $A\hat{B}C$ in modo che sia $\overline{CH}+\overline{BH}=3,07$. [≈ 62°01′33″]

71. Nel trapezio rettangolo $ABCD$, la diagonale AC è perpendicolare al lato obliquo BC, la base maggiore AB è lunga 5,25. Determinare il valore dell'angolo formato da AB e BC in modo che sia $\overline{BC}^2+2\cdot\overline{CD}-3\cdot\overline{AD}=0,33$. [≈ 25°54′7″ ∨ ≈ 45°39′47″]

72. Determinare l'ampiezza dell'angolo di apertura di un cono di altezza 3,25, in modo che la superficie laterale del cono valga 49,5 cm^2. [≈ 92°1′33″]

73. In una semicirconferenza di diametro AB lungo $2r$, sia un punto P, di cui M è la proiezione su AB. Determinare la misura di $P\hat{A}M$ in modo che la somma del quadruplo di AM con il doppio di MP sia $3r$. [≈ 64°44′35″]

74. Traccia la tangente t nel punto B alla semicirconferenza di diametro AB. Sia C un punto sulla semicirconferenza. D la sua proiezione su AB ed E quella su t, determina la misura di $C\hat{A}B$ in modo che sia $\overline{CD}+\overline{CE}=4,35\cdot\overline{AD}$. [≈ 58°42′03″]

75. Dato il triangolo ABC inscritto in una semicirconferenza di diametro AB, si tracci la perpendicolare in B e sia D l'intersezione di essa con il prolungamento del cateto AC. Determinare la misura di $A\hat{B}C$ in modo che sia $2\cdot\overline{CD}+3\cdot\overline{BC}=4\cdot\overline{AC}$. [≈ 49°36′34″]

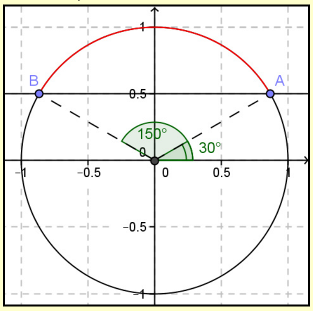
76. Sia una semicirconferenza di diametro AB, prolunghiamo AB dalla parte di A di un segmento AC lungo quanto il raggio. Scelto un punto D sulla semicirconferenza, determinare la misura dell'angolo $D\hat{A}B$ in modo che si abbia: $\overline{AD}\cdot\overline{BD}=\frac{3}{5}\cdot\overline{CD}^2$. [≈ 61°59′43″ o ≈ 78°11′56″]

Disequazioni goniometriche

A questo punto il passaggio alle disequazioni appare abbastanza semplice.

Esempio 10

Per risolvere la disequazione *sin*($3x$ – 48°) > 1/2, consideriamo la circonferenza goniometrica:

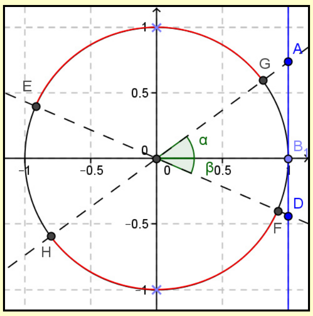


- Abbiamo indicato in rosso le soluzioni, limitatamente all'intervallo [0°; 360°]. Come era facile da capire, il seno è maggiore di 1/2 se l'argomento appartiene a (30°; 150°). Perciò: 30° < $3x$ – 48° < 150°, o, tenuto conto della periodicità: 30° + k·360° < $3x$ –48° < 150° + k·360° ⇒ 78° + k ·360° < $3x$ < 198° + k · 360° ⇒ 26° + k · 120° < x < 66° + k · 120°.
- Se invece avessimo cercato soluzioni in [20°; 70°] avremmo 26° < x < 66°;
- invece per $x \in$ [27°; 70°] avremmo 27° ≤ x < 66°;
- infine se $x \in$ [27°; 60°] la soluzione è 27° ≤ x ≤ 60°.

Vediamo adesso come risolvere una disequazione goniometrica di secondo grado.

Esempio 11

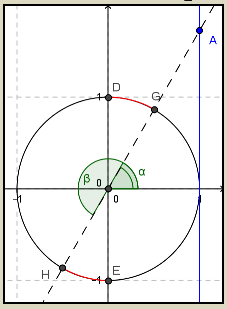
Risolvere $3tan^2(x) - tan(x) - 1 > 0$. $tan(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{6}$ è la soluzione dell'equazione di secondo grado in tangente, quindi la disequazione ha soluzioni: $tan(x) > \frac{1+\sqrt{13}}{6} \vee tan(x) < \frac{1-\sqrt{13}}{6}$, passando alle funzioni inverse avremo: $x > tan^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right) \approx 0,65 \vee x < tan^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right) \approx -0,41$. Rappresentiamo graficamente sulla circonferenza goniometrica.



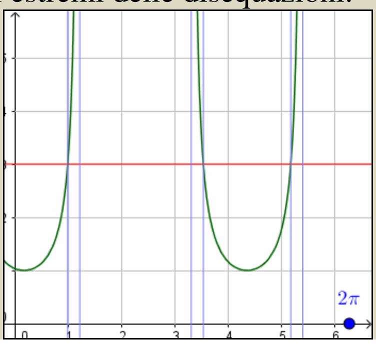
Ovviamente escludiamo ± π/2, valori per i quali la tangente non esiste. Le soluzioni sono sempre rappresentate in rosso. Allora, indicando per semplicità con α ≈ 0,65 e con β ≈ 0,41, scriviamo: α + kπ < x < π/2 + kπ ∨ π/2 + kπ < x < π + β + kπ.
Potevamo anche compilare una tabella in cui porre i segni dei singoli fattori, piuttosto che avvalerci della circonferenza goniometrica.

Verifiche

Lavoriamo insieme

- Vogliamo risolvere la disequazione $tan(4-3x)<\sqrt{3}$. Intanto cominciamo a vedere quando la tangente è uguale a $\sqrt{3}$ e sappiamo che ciò accade per $x = \pi/3 + k\pi$. Il grafico seguente ci mostra invece quando la tangente è minore di $\sqrt{3}$. 

Pertanto avremo le seguenti soluzioni: $\pi/2 + k\pi < 4 - 3x < \pi/3 + k\pi \Rightarrow -4 + \pi/2 + k\pi < -3x < -4 + \pi/3 + k\pi \Rightarrow 4/3 - \pi/9 + k\pi/3 < x < 4/3 + \pi/6 + k\pi/3$. Osserviamo che non è necessario cambiare il segno di $k\pi$, poiché k indica un qualsiasi intero relativo.
- Vogliamo risolvere la disequazione $sec(3/2x - 15°) > 3$ nell'intervallo [0°; 360°]. Questa è equivalente alla disequazione $\dfrac{1}{cos\left(\dfrac{3x}{2}-15°\right)}>3$. Quest'ultima, a sua volta, se il denominatore è positivo equivale a $cos(3/2x - 15°) < 1/3$, mentre se il denominatore è negativo, ovviamente non ha soluzioni. Se $0° \le x \le 360°$ allora $3/2 \cdot 0° < 3/2x < 3/2 \cdot 360° \Rightarrow 0° < 3/2x < 540° \Rightarrow -15° < 3/2x - 15° < 525°$. Quindi il coseno sarà positivo quando il suo argomento apparterrà a [0°; 90°] ∨ [270°; 450°]. Perciò la disequazione di partenza è equivalente al sistema: $\begin{cases} cos\left(\dfrac{3x}{2}-15°\right)<\dfrac{1}{3} \\ 0°<\dfrac{3x}{2}-15°<90° \vee 270°<\dfrac{3x}{2}-15°<450° \end{cases}$. Detto $\alpha = cos^{-1}(1/3) \approx 70°31'44''$, avremo: $\begin{cases} \alpha<\dfrac{3x}{2}-15°<360°-\alpha \\ 15°<\dfrac{3x}{2}<105° \vee 285°<\dfrac{3x}{2}<465° \end{cases}$. In effetti anche $\alpha + 360° < 3/2x - 15° < 360° - \alpha + 360°$ è soluzione, ma essa equivale a $2/3\alpha + 250° < x \le 360°$. Quindi il sistema da risolvere diviene: $\begin{cases} \dfrac{2}{3}\alpha+10°<x<250°-\dfrac{2}{3}\alpha \vee 250°+\dfrac{2}{3}\alpha<x\le 360° \\ 10°<x<70° \vee 190°<x<310° \end{cases}$. Infine le soluzioni sono: $2\alpha/3 + 10° < x < 70° \vee 190° < x < 250° - 2\alpha/3 \vee 250° + 2\alpha/3 < x \le 360°$, come si vede dal grafico seguente, in cui le parallele all'asse y sono quelle passanti per gli estremi delle disequazioni.



Risolvere le seguenti disequazioni negli intervalli indicati

Livello **1**

***In* [0°, 360°]**

131. a) $cos(x) > 0$; b) $sin(x) > 1$; c) $sin(x) \geq 1$
[a) $(0° < x < 90° \vee 270° < x < 360°)$; b) $x = 90°$; c) $(45° < x < 90° \vee 270° < x < 315°)$]

132. a) $cos(x) < 0$; b) $tan(x) < -\frac{\sqrt{3}}{3}$; c) $cot(x) \geq 1$
[a) $(90° < x < 270°)$; b) $(90° < x < 150° \vee 270° < x < 330°)$; c) $(0° < x \leq 45° \vee 180° < x \leq 225°)$]

***In* [0; 2π]**

133. a) $sin(x) \leq 1/2$; b) $cos(x) \leq -1$; $tan(x) < -1$
[a) $(0 \leq x \leq \pi/6 \vee 5\pi/6 \leq x \leq 2\pi)$; b) $x = 2\pi$; c) $(\pi/2 < x < 3\pi/4 \vee 3\pi/2 < x < 7\pi/4)$]

134. a) $csc(x) \leq -1$; b) $tan(x) > 0$; c) $cot(x) \geq \sqrt{3}$
[a) $(x = \pi/2 \vee \pi < x < 2\pi)$; b) $(0 < x < \pi/2 \vee \pi < x < 3\pi/2)$; c) $(0 \leq x \leq \pi/6 \vee \pi < x \leq 7\pi/6)$]

Livello 2

***In* [0°; 360°]**

135. a) $csc(x) \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$; b) $sec(x) > 1$; c) $sec(x) > \sqrt{2}$ [a) $(60° \leq x \leq 120° \vee 180° < x < 360°)$;
b) $(0° < x < 90° \vee 270° < x < 360°)$; c) $(45° < x < 90° \vee 270° < x < 315°)$]

136. a) $sin(3x - 24°) > \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $sec(2x - 51°) < -\sqrt{2}$ [a) $(28° < x < 48° \vee 148° < x < 168° \vee 268° < x < 288°)$;
b) $(70°30' < x < 93° \vee 138° < x < 160°30' \vee 70°30' < x < 273° \vee 318° < x < 340°30')$]

137. $cos(4x + 15°) > \frac{\sqrt{2}}{2}$
[$0° \leq x \leq 7°30' \vee 75° < x < 97°30' \vee 165° < x < 187°30' \vee 255° < x < 277°30' \vee 345° < x \leq 360°$]

138. $cot(3x + 13°) < -\frac{\sqrt{3}}{3}$
[$35°40' < x < 55°40' \vee 95°40' < x < 115°40' \vee \ldots \vee 275°40' < x < 295°40' \vee 335°40' < x < 355°40'$]

139. $tan(5x + 11°) > -1$ [$0° \leq x < 15°48' \vee 24°48' < x < 51°48' \vee$
$60°48' < x < 87°48' \vee \ldots \vee 312°48' < x < 339°48' \vee 348°48' < x \leq 360°$]

140. $csc(2x + 17°) > 2$ [$0° \leq x < 6°30' \vee 66°30' < x < 81°30' \vee 171°30' < x < 186°30' \vee$
$246°30' < x < 261°30' \vee 351°30' < x \leq 360°$]

***In* [0; 2π]**

141. a) $cos(3 - 2x) > -1/2$; b) $sec(x) > -\sqrt{2}$
$\left[\text{a) } \left(\frac{9-2\pi}{6} < x < \frac{9+2\pi}{6} \vee \frac{9+4\pi}{6} < x < \frac{9+8\pi}{6}\right); \text{ b) } \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2} \vee \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4} \vee \frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi\right)\right]$

142. $sec(4 - 3x) \geq 0$ $\left[\frac{-\pi+8}{6} < x < \frac{\pi+8}{6} \vee \frac{3\pi+8}{6} < x < \frac{5\pi+8}{6} \vee \frac{7\pi+8}{6} < x < \frac{9\pi+8}{6}\right]$

143. $sin(4x + 1) < \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\left[\frac{3\pi-4}{16} < x < \frac{9\pi-4}{16} \vee \frac{11\pi-4}{16} < x < \frac{17\pi-4}{16} \vee \frac{19\pi-4}{16} < x < \frac{25\pi-4}{16} \vee \frac{27\pi-4}{16} < x < \frac{33\pi-4}{16}\right]$

144. a) $csc\left(\frac{x}{3} - 2\right) \leq 1$; b) $tan\left(\frac{2}{3}x + 1\right) \leq -\sqrt{3}$ $\left[\text{a) } (0 \leq x < 6); \text{b) } \left(\frac{3\pi-6}{4} < x \leq \frac{2\pi-3}{2} \vee \frac{9\pi-6}{4} < x \leq 2\pi\right)\right]$

145. $cot(5 - 2x) \geq -1$ $\left[0 \leq x < \frac{5-\pi}{2} \vee \frac{20-3\pi}{8} \leq x < \frac{5}{2} \vee \frac{20+\pi}{8} \leq x < \frac{5+\pi}{2} \vee \frac{20+3\pi}{8} \leq x < \frac{5+2\pi}{8} \vee \frac{20+7\pi}{8} < x \leq 2\pi\right]$

Risolvere le seguenti disequazioni negli intervalli indicati

Livello 2

***In* [0°; 360°]**

146. a) $sin(x) > 0{,}72$; b) $cos(x) < -0{,}31$ [a) $(\alpha < x < 180° - \alpha, \alpha \approx 46°3'13'')$; b) $(\alpha < x < 360° - \alpha, \alpha \approx 108°3'33'')$]

147. $tan(x) \geq 2$ [$\alpha \leq x < 90° \vee 180° + \alpha \leq x < 270°, \alpha \approx 63°26'6''$]

148. $cot(x) \geq -4$ [$0 < x \leq \alpha \vee 180° < x \leq 180° + \alpha, \alpha \approx 165°57'50''$]

***In* [0; 2π]**

149. a) $sin(x) \geq -0,18$; b) $cos(x) \geq 0,54$
[a) $(0 \leq x \leq \pi + \alpha \vee 2\pi - \alpha \leq x \leq 2\pi,\ \alpha \approx 0,18)$; b) $(0 \leq x \leq \alpha \vee 2\pi - \alpha \leq x \leq 2\pi,\ \alpha \approx 1,00)$]

150. a) $tan(x) \leq -2$; b) $cot(x) < -3$
[a) $(\pi/2 < x \leq \alpha \vee 3\pi/2 < x \leq \pi + \alpha,\ \alpha \approx 2,03)$; b) $(\alpha < x \leq \pi \vee \pi + \alpha < x \leq 2\pi,\ \alpha \approx 2,82)$]

Livello 3

***In* [0°; 360°]**

151. $sin(2x + 15°) < 0,1$ [$\alpha < x < \beta \vee 180° + \alpha < x < 180° + \beta,\ \alpha \approx 79°37'49''$; $\beta \approx 175°22'10''$]

152. $cos(49° - 2x) < -0,8$ [$\alpha < x < \beta \vee 180° + \alpha < x < 180° + \beta,\ \alpha \approx 96°3'54''$; $\beta \approx 132°56'6''$]

153. $tan(14° - 2x) > 0,3$ [$52° + k\,90° < x < \alpha + k\,90°,\ \alpha \approx 88°39'1'',\ k = 0, 1, 2, 3$]

154. $cot(3x + 18°) > 0,14$ [$0° \leq x \leq \alpha \vee -6° + k60° < x < \alpha + k60° \vee 354° < x \leq 360°, \alpha \approx 21°20'36'',\ k = 1,2,\ldots 5$]

***In* [0; 2π]**

155. $sin(2x) > -0,31$ [$0 \leq x < \pi - \alpha \vee \alpha + k\pi < x < \pi - \alpha + k\pi \vee \alpha + 2\pi < x \leq 2\pi$; $\alpha = sin^{-1}(-0,31)$]

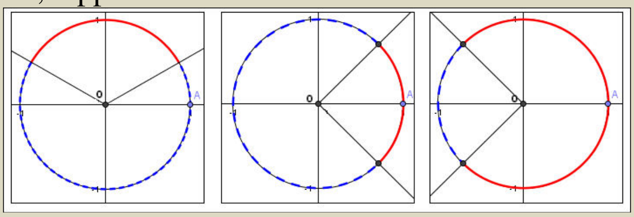
156. $tan(-4/3x) < -1,23$ [$\alpha + 3\pi/4 < x < 3\pi/8 + 3k\pi/4,\ \alpha \approx 0,67$; $k = 0, 1,$ 2]

157. $cot(4x) > 2,14$ [$k\pi/4 < x < \alpha + k\pi/4,\ \alpha \approx 0,11$; $k = 0, 1, ..., 7$]

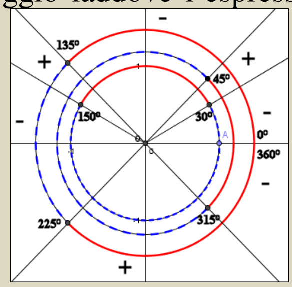
Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere la disequazione $[2sin(x) - 1] \cdot [2cos^2(x) - 1] > 0$.

Scomponiamo il secondo fattore: $\left[2 \cdot sin(x) - 1\right] \cdot \left[\sqrt{2} \cdot cos(x) - 1\right] \cdot \left[\sqrt{2} \cdot cos(x) + 1\right] > 0$. Adesso determiniamo il segno dei singoli fattori, rappresentando ciascuno su una distinta circonferenza goniometrica



Abbiamo rappresentato con il colore rosso e il tratto continuo i valori per cui l'espressione è positiva, con il blu e il tratteggio laddove l'espressione è negativa. Riportando il tutto in un'unica circonferenza avremo quanto segue.



Quindi: $30° < x < 45° \vee 135° < x < 150° \vee 225° < x < 315°$.

Risolvere le seguenti disequazioni negli intervalli indicati

Livello 2

158. $[2sin(x) - 1] \cdot [tan(x) + 1] < 0,\ x \in [0°; 360°]$
[$0° \leq x < 30°,\ 90° < x < 135°,\ 150° < x < 270°,\ 315° < x \leq 360°$]

159. $\left[2sin(x) - \sqrt{3}\right] \cdot \left[\sqrt{3} \cdot tan(x) - 1\right] > 0, x \in [0°; 360°]$
[$0° \leq x < 30°,\ 60 < x < 90°,\ 120° < x < 210°,\ 270° < x \leq 360°$]

160. $[sin(x) - 1] \cdot [cos(x) + 1] \geq 0,\ x \in [0°; 360°]$ [$90° \leq x \leq 180°$]

161. $\left[\sqrt{2} \cdot sin(x) - 1\right] \cdot \left[3 \cdot cot(x) - \sqrt{3}\right] > 0, x \in [0; 2\pi]$ $\left[\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3} \vee \frac{3\pi}{4} < x < \pi \vee \frac{4\pi}{3} < x < 2\pi\right]$

162. $\left[sec(x) - \sqrt{2}\right] \cdot \left[\sqrt{3} \cdot csc(x) + 2\right] \leq 0, x \in [0; 2\pi]$ $\left[0 < x < \frac{\pi}{4} \vee \frac{4\pi}{3} \leq x < \frac{3\pi}{2} \vee \frac{5\pi}{3} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}\right]$

163. a) $sin^2(x) - 1 < 0,\ x \in [0°; 360°]$; b) $tan^2(x) - 3 \geq 0,\ x \in [0°; 360°]$
[a) $(0° \leq x \leq 360°,\ x \neq 90°, 270°)$; b) $(60° \leq x \leq 120° \vee 240° \leq x \leq 300°,\ x \neq 90°, 270°)$]

164. $2cos^2(x) + cos(x) \geq 0,\ x \in [-1; 4]$ [$-1 \leq x \leq \pi/2 \vee 2\pi/3 \leq x \leq 4$]

165. a) $csc^2(x) - 2 \ge 0, x \in [-100°; 400°]$; b) $3cot^2(x) - 1 < 0, x \in [-3; 1]$
[a) $(-45° \le x \le 45° \vee 135° \le x \le 225° \vee 315° \le x \le 400°, x \ne 0°, 180°, 360°)$; b) $(-2\pi/3 < x < -\pi/3)$]

166. $sin^2(x) - sin(x) < 0, x \in [-50°; 460°]$ [$0° < x < 180°, 360° < x \le 460°, x \ne 90°, 450°$]

167. $\sqrt{3} \cdot tan^2(x) - tan(x) \ge 0, x \in [-200°; 200°]$
[$-200° \le x \le -180° \vee -150° \le x \le 0° \vee 30° \le x \le 180°, x \ne -90°, 90°$]

168. $2 \cdot sin^2(x) - sin(x) - 1 \ge 0, x \in [-25°; 541°]$ [$x = 90° \vee 210° \le x \le 330° \vee x = 450°$]

169. $\sqrt{3} \cdot cot^2(x) + (\sqrt{3}-1) \cdot cot(x) - 1 < 0, x \in [250°; 750°]$
[$250° \le x < 315° \vee 420° < x < 495° \vee 600° < x < 675°$]

170. $csc^2(x) - (\sqrt{2}-2) \cdot csc(x) - 2 \cdot \sqrt{2} \ge 0, x \in [-1250°; -900°]$
[$-1250° \le x \le -1230° \vee -1110° \le x \le -1035° \vee -945° \le x < -900°, x \ne -1080°$]

171. $4 \cdot sin^2(x) - 2 \cdot (\sqrt{3}+1) \cdot sin(x) + \sqrt{3} \le 0, x \in [0; 4]$ [$\pi/6 \le x \le \pi/3 \vee 2\pi/3 \le x \le 5\pi/6$]

172. $sin^2(x) + 2sin(x) \cdot cos(x) + cos^2(x) > 0, x \in [-101°; 303°]$ [$x \ne -45°, 135°$]

173. $sin^2(x) - (\sqrt{3}-1) \cdot sin(x) \cdot cos(x) - \sqrt{3} \cdot cos^2(x) > 0, x \in [-270°; 308°]$
[$-270° < x < -225° \vee -120° < x < -45° \vee 60° < x < 135° \vee 240° \le 308°, x \ne -90°, 90°, 270°$]

174. $3 \cdot sin^2(x) + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot sin(x) \cdot cos(x) - 3 \cdot cos^2(x) \le 0, x \in [-1; 2]$ [$\pi/6 \le x \le 2, x \ne \pi/2$]

175. $sin(x)cos(x) + cos^2(x) \le 0, x \in [-31°; 507°]$ [$90° \le x \le 135° \vee 270° \le x \le 315° \vee 450° \le x \le 507°$]

Livello 3

176. $\dfrac{2sin(x)-1}{\sqrt{3}-tan(x)} < 0,\ x \in [0; 2\pi]$ $\left[0 \le x < \dfrac{\pi}{6} \vee \dfrac{\pi}{3} < x < \dfrac{\pi}{2} \vee \dfrac{5}{6}\pi < x < \dfrac{4}{3}\pi \vee \dfrac{3}{2}\pi < x \le 2\pi\right]$

177. $\dfrac{2 \cdot sin(x)+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-tan(x)} > 0,\ x \in [0; 2\pi]$ $\left[0 \le x < \dfrac{\pi}{3} \vee \left(\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3}{2}\pi \wedge x \ne \dfrac{4}{3}\pi\right) \vee \dfrac{5}{3}\pi < x \le 2\pi\right]$

178. $\dfrac{2 \cdot cos(x)-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3} \cdot cot(x)} > 0,\ x \in [0; 2\pi]$ $\left[0 < x < \dfrac{\pi}{6} \vee \left(\dfrac{2}{3}\pi < x < \dfrac{5}{3}\pi \wedge x \ne \pi\right) \vee \dfrac{11}{6}\pi < x < 2\pi\right]$

179. $\dfrac{sec(x)+2}{1+tan(x)} < 0,\ x \in [0°; 360°]$ [$0° \le x \le 90° \vee 120° \le x \le 135° \vee 240° < x < 315 \wedge x \ne 270°$]

180. $\dfrac{2 \cdot sin(x)-1}{1-\sqrt{3} \cdot tan(x)} \le 0,\ x \in [0°; 360°]$ [$0° \le x < 90° \vee 150° \le x \le 210° \vee 270° \le x \le 360°, x \ne 30°$]

181. $\dfrac{4 \cdot sin^2(x)-1}{\sqrt{3}+tan(x)} \ge 0,\ x \in [0°; 360°]$ [$30° \le x < 90° \vee 120° < x \le 150° \vee 210° \le x < 270° \vee 300 < x \le 330°$]

182. $\left[\sqrt{3} \cdot cot(2x-31°)-1\right] \cdot \left[2 \cdot cos(4x+11°)+1\right] < 0, x \in [0°; 90°]$
[$0° \le x < 45°30' \vee 27°15' < x < 45°30' \vee 57°15' < x \le 90°$]

183. $\left[2 \cdot cos(4x+1)-1\right] \cdot \left[\sqrt{3} \cdot tan(3x-2)-1\right] \le 0, x \in [-2; 1]$
$\left[\dfrac{12-11\pi}{18} \le x \le \dfrac{4-3\pi}{6} \vee \dfrac{-3-\pi}{12} \le x \le \dfrac{12-5\pi}{18} \vee \dfrac{\pi-3}{12} \le x \le \dfrac{4-\pi}{6} \vee \dfrac{\pi+12}{8} \le x \le 1\right]$

184. $2cos^2(4x + 1) - 1 > 0, x \in [-2; 1]$ $\left[\dfrac{-4-5\pi}{16} < x < \dfrac{-4-3\pi}{16} \vee \dfrac{-4-\pi}{16} < x < \dfrac{-4+\pi}{16} \vee \dfrac{-4+3\pi}{16} < x < -\dfrac{4+5\pi}{16}\right]$

185. $\left[sin(3-x)+2\right] \cdot \left[cot(5x+1)+\sqrt{3}\right] \le 0, x \in [-2; 1]$
$\left[\dfrac{-6-13\pi}{30} < x < \dfrac{-1-2\pi}{5} \vee \dfrac{-6-7\pi}{30} < x < \dfrac{-1-\pi}{5} \vee \dfrac{-6-\pi}{30} < x < -\dfrac{1}{5} \vee \dfrac{-6+5\pi}{30} < x < \dfrac{-1+\pi}{5}\right]$

186. $tan^2(3x + 15°) - 3 < 0, x \in [-10°; 105°]$ [$15° < x < 35° \vee 75° < x < 95°, x \ne 25°, 85°$]

187. $cos(3x + 1) + 2cos^2(3x + 1) - 1 \ge 0, x \in [-2; 1]$ $\left[\dfrac{-3-\pi}{9} < x < \dfrac{-3+\pi}{9}, x \ne \dfrac{-1+\pi}{3}\right]$

188. $\sqrt{3}\cdot sin(x)-cos(x)>0, x\in[-123°;456°]$ [$30° < x < 90° \vee 180° < x < 210° \vee 390° < x < 450°$]

189. $sin(x) + cos(x) > 0$, $x \in [-1; 4]$ [$-1 \le x \le -\pi/4$]

190. $3\cdot sin(x)+\sqrt{3}\cdot cos(x)\le 0, x\in[-23°;256°]$ [$150° \le x \le 180°$]

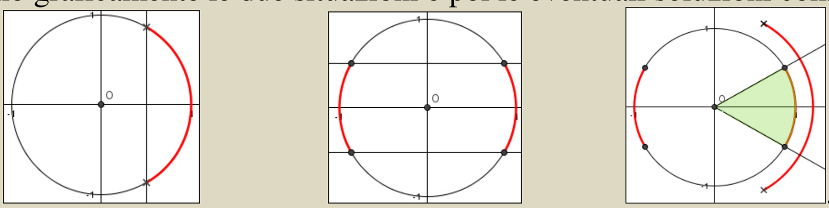
191. $sin(4x-1)-\sqrt{3}\cdot cos(4x-1)>0, x\in[-2;2]$

$$\left[\frac{3-5\pi}{12}<x<\frac{2-3\pi}{8}\vee\frac{3+\pi}{12}<x<\frac{2+\pi}{8}\vee\frac{1-\pi}{4}<x<\frac{3-2\pi}{12}\vee\frac{1+\pi}{4}<x<\frac{3+4\pi}{12}\right]$$

Lavoriamo insieme

Risolvere il seguente sistema di disequazioni goniometriche: $\begin{cases}2\cdot cos(x)-1>0\\4\cdot sin^2(x)-1\le 0\\0\le x\le 2\pi\end{cases}$.

Risolviamo singolarmente ciascuna disequazione: $cos(x) > 1/2 \Rightarrow 0 \le x < \pi/3 \vee 5\pi/3 < x \le 2\pi$. Passiamo alla seconda: $4sin^2(x) - 1 \le 0 \Rightarrow sin^2(x) \le 1/4 \Rightarrow -1/2 \le sin(x) \le 1/2 \Rightarrow 0 \le x \le \pi/6 \vee 5\pi/6 \le x \le 7\pi/6 \vee 11\pi/6 \le x \le 2\pi$. Rappresentiamo graficamente le due situazioni e poi le eventuali soluzioni comuni.



Pertanto le soluzioni del sistema sono: $0 \le x \le \pi/6 \vee 11\pi/6 \le x \le 2\pi$.

Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni goniometriche

Livello 2

192. a) $\begin{cases}sin(x)>-\dfrac{1}{2}\\tan(x)-1<0\\0°\le x\le 360°\end{cases}$; b) $\begin{cases}2\cdot cos(x)>1\\2\cdot sin^2(x)-1>0\\0\le x\le 360°\end{cases}$

[a) ($0° \le x \le 45° \vee 90° < x < 220° \vee 330° < x \le 360°$); b) ($45° < x < 60° \vee 300° < x < 315°$)]

193. a) $\begin{cases}2\cdot sin(x)<\sqrt{2}\\tan(x)-1<0\\0\le x\le 2\pi\end{cases}$; b) $\begin{cases}csc^2(x)-4<0\\4\cdot sin^2(x)-1<0\\0°\le x\le 360°\end{cases}$; c) $\begin{cases}sin(x)<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\2\cdot cos(x)-1>0\\0\le x\le 2\pi\end{cases}$

[a) ($0 \le x \le \pi/4 \vee 3\pi/4 < x < 5\pi/4 \vee 3\pi/2 < x \le 2\pi$); b) $\varnothing$; c) ($5\pi/3 < x < 7\pi/4$)]

194. a) $\begin{cases}sin(x)<\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\cos(x)-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<0\\0°\le x\le 360°\end{cases}$; b) $\begin{cases}2\cdot cos(x)>\sqrt{3}\\4sin^2(x)-3<0\\0°\le x\le 360°\end{cases}$

[a) ($45° < x < 60° \vee 120° < x < 315°$); b) ($0° \le x < 30° \vee 330° < x \le 360°$)]

Livello 3

195. a) $\begin{cases} sin(x)-1<0 \\ \sqrt{3}\cdot cot(x)-1>0 \\ csc(x)>2 \\ 0\le x\le 2\pi \end{cases}$; b) $\begin{cases} \sqrt{3}\cdot csc(x)-2<0 \\ 2\cdot sin(x)+1>0 \\ tan(x)-1\ge 0 \\ 0°\le x\le 360° \end{cases}$; c) $\begin{cases} 3\cdot cot^2(x)-1>0 \\ 4\cdot cos^2(x)<3 \\ 0\le x\le 360° \end{cases}$

[a) (0 < x < π/6); (60° < x < 90°); c) (0° < x < 30° ∨ 150° < x < 180° ∨ 210° < x < 240° ∨ 300° < x < 330°]

196. a) $\begin{cases} \dfrac{4\cdot sec^2(x)-3}{1-sin(x)}<0 \\ 8\cdot sin^3(x)<1 \\ 0\le x\le 2\pi \end{cases}$;b) $\begin{cases} \dfrac{2\cdot sin(x)-1}{\sqrt{2}\cdot cos(x)+1}<0 \\ \sqrt{3}-cot(x)<0 \\ tan(x)>\sqrt{3} \\ 0\le x\le 2\pi \end{cases}$ [a) 0≤ x< π/6 ∨ 5π/6 < x < 7π/6 ∨ 11π/6 < x ≤ 2π); b)∅]

197. a) $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}\cdot tan(x)+1}{4\cdot sin^2(x)-1}\ge 0 \\ \dfrac{2\cdot sin(x)+1}{1-sec^2(x)}>0 \\ 0°\le x\le 360° \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2^{sin x}>1 \\ 3^{cos x}<1 \\ 0°\le x\le 360° \end{cases}$ [a) (30° < x < 90° ∨ 210° < x < 270°); b) (90° < x < 180°)]

Risolvi i seguenti problemi in cui si devono impostare e risolvere disequazioni

Livello 2

198. Determinare in quale intervallo varia la misura dell'angolo acuto maggiore di un triangolo rettangolo di ipotenusa lunga 8,58 e di area compresa tra 13,12 e 14,38. [≈ 64°18′28″ < α < ≈ 67°15′54″]
199. Un triangolo isoscele di lato obliquo lungo 2,06, ha il perimetro minore di 6. Che valori possono assumere gli angoli alla base? [minori di ≈ 62°51′3″]
200. Dato un sistema di assi cartesiani ortogonali di centro O, tracciare la circonferenza γ di raggio unitario e centro O. Siano A ≡ (1; 0), B ≡ (0; 2), $P\hat{O}A = x$. Determinare per quali x si ha $2,54<\overline{PQ}<2,92$.
[≈ 111°16′42″ < x < ≈ 151°50′10″ o ≈ 201°16′42″ < x < ≈ 241°50′10″]
201. Con riferimento al precedente problema, sia B ≡ (0; y) e $\overline{PQ}=2$, determinare per quali valori di y il problema ammette soluzioni. [$-3\le y\le -1$ o $1\le y\le 3$]
202. Con riferimento al precedente problema, sia B ≡ (0; 3,12) e $\overline{PQ}=k$, determinare per quali valori di k il problema ammette soluzioni. [$-4,12\le k\le -2,12$ o $2,12\le k\le 4,12$]
203. In un triangolo rettangolo di ipotenusa lunga 8,62, la differenza fra un cateto e la proiezione dell'altro cateto sull'ipotenusa è compresa tra 1,25 e 5,13. In quale intervallo si trovano le misure degli angoli acuti? [≈ 42°55′48″ < β < ≈ 59°7′57″, ≈ 30°52′3″ < γ < ≈ 47°4′12″]
204. In un triangolo rettangolo di ipotenusa lunga 7,08, la somma fra un cateto e la proiezione dell'altro cateto sull'ipotenusa è compresa tra 8,16 e 8,73. In quale intervallo si trovano le misure degli angoli acuti? [≈ 35°41′25″ < β < ≈50°56′9″, ≈ 39°3′51″ < γ < ≈54°18′35″;
≈ 68°17′46″ < β < ≈79°10′28″, ≈ 10°49′32″ < γ < ≈21°42′14″]
205. Data una semicirconferenza di diametro AB lungo 1, determinare su di essa un punto C in modo che sia $\frac{4}{3}\cdot\overline{AC}^2-\frac{3}{4}\cdot\overline{BC}^2<1$. [0° < β < ≈ 66°25′189″]
206. Data una semicirconferenza di diametro AB lungo 1, determinare su di essa un punto C in modo che sia $\frac{3}{4}<\frac{5}{6}\cdot\overline{AC}^2+\frac{1}{8}\cdot\overline{BC}^2<\frac{5}{4}$. [≈ 69°56′25″ < β < 90°]

Livello 3

207. Sia un quadrato *ABCD* di lato 2 *cm*, si scelga un punto *F* sul lato *BC*, si tracci *DF* e sia *EF* perpendicolare a *DF*, con *E* sul lato *AB*. Determinare i valori che deve assumere l'angolo $F\hat{D}C$, in modo che la somma fra il triplo di *FB* e il doppio di *AE* sia minore di 8. [tra circa 12°21′54″ e 45°]

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi

1. (Liceo scientifico 2005/06) L'equazione risolvente un dato problema è: $k\,cos2x - 5k + 2 = 0$, dove k è un parametro reale e x ha le seguenti limitazioni: $15° < x < 45°$. Si discuta per quali k le radici dell'equazione sono soluzioni del problema. $\left[\frac{2}{5} < k < \frac{40+4\cdot\sqrt{3}}{97}\right]$
2. (Liceo scientifico 1992/93) Sia $\begin{cases} x = sin(t) \\ y = sin(2t) \end{cases}$. Esprimere y in funzione di x. $\left[y = 2\cdot|x|\cdot\sqrt{1-x^2}\right]$

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.

A = Abacus rivista di matematica online
HSMC = A&M University High School Mathematics Contest
NC = North Carolina Mathematical Contest
SC = South Carolina Mathematical Contest
ARML = American Regions Math League
MT = Mathematics Teacher, rivista della NCTM
RICE = Rice University Mathematics Tournament
V = Vermont High School Prize

Lavoriamo insieme

Questo quesito è stato assegnato agli HSMC del 2004. *Sapendo che* $8tan(x) = 3cos(x)$, *determinare* $sin(x)$.

Si ha: $\frac{8\cdot sin(x)}{cos(x)} = 3\cdot cos(x)$. Se fosse $cos(x) = 0$; $tan(x)$ sarebbe indefinito, quindi possiamo moltiplicare per $cos(x)$ ambo i membri, ottenendo: $8sin(x) = 3cos^2(x) \Rightarrow 8sin(x) = 3[1 - sin^2(x)] \Rightarrow 3sin^2(x) + 8sin(x) - 3 = 0$. Risolvendo l'equazione di secondo grado otteniamo $sin(x) = -3$ (impossibile) o $sin(x) = 1/3$, che è la soluzione corretta.

1. (V 2003) Trovare la somma di tutte le soluzioni di $2cos(2x) + 1 = 0$, $0 \le x \le 100\pi$. [10000π]
2. (RICE 2006) Determinare l'area della regione definita da $x^2 + y^2 \le \pi^2$ e $y \ge sin(x)$. [$\pi^3/2$]
3. (HSMC 2006) Quante soluzioni ha l'equazione $2\theta = 101\pi \cdot 1 - cos(\theta)]$? Suggerimento: Rappresentare geometricamente i due membri dell'equazione. [103]
4. (RICE 2006) L'equazione $sin(cos^{-1}(tan(sin^{-1}(x)))) = x$, ha due numeri positivi x come soluzioni, determinare il loro prodotto. [1]
5. (HSMC2007) Determinare quante soluzioni ha l'equazione $sin(x) = x/100$. [63]
6. (A2007) L'altezza minore di un triangolo rettangolo è lunga 7 *cm*, l'angolo minore è di 15°. Quanto misura l'ipotenusa? [28]
7. (ARML 2008) Siano $O \equiv (0; 0)$ e $A \equiv (5; 0)$. Per certi valori positivi di k, esiste $f(x) = ax^2$, $a > 0$, per cui $\angle Q\hat{O}A = 2\cdot\angle P\hat{O}A$, con $P \equiv (1; f(1))$ e $Q \equiv (k; f(k))$. Calcolare tutti i valori positivi di k. [$k > 2$]

Questions in English

Working together

This is a question assigned at HSMC in 2007.

What is the number of solutions of the equation $sin(x) = \frac{x}{30\pi}$, *where x is in radians*?

We have solutions iff[1] $\left|\frac{x}{30\pi}\right| \le 1 \Rightarrow -1 \le \frac{x}{30\pi} \le 1 \Rightarrow -30\pi \le x \le 30\pi$. These solutions are the intersections between the graph of $y = sin(x)$ and the graph of the line $y = \frac{x}{30\pi}$. The line pass by origin and is positive for $x > 0$ and negative for $x < 0$, hence it has two intersections with $y = sin(x)$ in each interval $[2k\pi; (2k + 1) \cdot \pi]$, $-15 \le k \le 14$. Hence we have $2 \cdot 30 - 1 = 59$ roots. We have subtracted 1 because the origin is counted twice, in the intervals $[-2\pi; 0]$, $0; 2\pi]$.

8. (MT1996) How many solutions does the equation $x = 4\, cos(x)$ have if $-5 \le x \le 5$? [3]
9. (HSMC1999) Solve $sin^{-1}[cos(x)] = 71°$ for x, where $0 \le x \le 90°$. [19°]
10. (HSMC2000) Find the exact value of $sin[tan^{-1}(3)]$. $\left[\frac{3}{\sqrt{10}}\right]$
11. (HSMC2000) Solve $\begin{cases} cos(x+y) - cos(x) - cos(y) = 1 \\ sin(x+y) - sin(x) - sin(y) = 0 \end{cases}; x, y \in [0, 2\pi]$.
$\left[\left(x = \frac{\pi}{2}, y = \frac{3\pi}{2}\right); \left(x = \frac{3\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2}\right)\right]$
12. (NC 2002) [If $log_{sin(x)}[cos(x)] = 1/2$ and $0 < x < \pi/2$, find the value of $sin(x)$. $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$
13. (HSMC2002) Given $5\, tan(x) = 6\, cos(x)$, with $0 < x < \pi$, find $sin(x)$. [2/3]
14. (SC2009) How many solutions does the equation $sin(x) \cdot sin(2x) \cdot sin(3x) \cdot \ldots \cdot sin(12x) = 0$, have in the interval $(0, \pi]$? [46]

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia militare) L'equazione $cos(x) = -3$ ha per soluzione
A) $x = 30°$ B) L'equazione non ha soluzioni C) $x = 120°$ D) $x = 0°$
2. (Accademia navale) Riconoscere che l'equazione $cos[cos(x)] = 0$ è impossibile, mentre l'equazione $sin[sin(x)] = 0$ ammette soluzioni (quali?).
3. (Accademia navale) Risolvere il seguente sistema di disequazioni $\begin{cases} \sqrt{sin^2 x} > sin\, x \\ \sqrt{cos^2 x} > cos\, x \end{cases}$.
4. (Scuola superiore di Catania) È dato il sistema nell'incognita ϑ: $\begin{cases} 8 \cdot cos^2 \vartheta - 6 \cdot sin\, \vartheta - 3 = 0 \\ m \cdot cos\, \vartheta - sin\, \vartheta - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$. Per quali valori del parametro m il sistema ha soluzioni? Determinare le soluzioni.
5. (Veterinaria 2000) L'equazione $-sin^2(x) + 1 = 3$
A) ha due soluzioni reali B) ha due soluzioni reali e coincidenti C) non ha soluzioni
D) ha infinite soluzioni E) ha soluzione $x = 45°$
6. (Ingegneria 2000) La condizione cui deve soddisfare il parametro k affinché l'equazione $4sin(x) = 3k$ abbia soluzione è A) $k \ge -4/3$ B) $k \le 4/3$ C) k può essere qualsiasi D) $k = \pm 4/3$ E) $-4/3 \le k \le 4/3$

[1] Iff is an abbreviation for "if and only if"

7. (Ingegneria 2002) Indicato con x un angolo la cui misura in radianti può variare tra 0 e 2π, il numero di soluzioni dell'equazione $sin(x) + cos(x) = 0$ è A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4
8. (Odontoiatria 2004) La disequazione $2 \cdot cos^2(x) + \sqrt{2} < 0$
   A) ha infinite soluzioni B) ammette solo soluzioni irrazionali
   C) equivale alla disequazione $2cos^4(x) + 1 > 0$ D) ha soluzioni comprese fra $-\pi/4$ e $\pi/4$
   E) non ha soluzioni
9. (Medicina 2002) L'equazione $x^2 + sin(x) + 1 = 0$
   A) ha infinite soluzioni perché $sin(x)$ è una funzione periodica B) è un'equazione di 2° nell'incognita x
   C) ha soluzioni appartenenti all'intervallo $[-\pi/2; \pi/2]$ D) ha una sola soluzione E) non ha soluzioni
10. (Ingegneria 2009) Le soluzioni dell'equazione $sin(x) = \frac{1}{sin(x)}$ sono
    A) $x = \pi/2 + k\pi$, per ogni valore intero di k B) nessuna delle altre risposte C) $x = k\pi/2$, per ogni valore intero di k D) $x = 3\pi/2 + 2k\pi$, per ogni valore intero di k E) $x = \pi/2 + 2k\pi$, per ogni valore intero di k
11. (Ingegneria 2009) Per $0 \le x \le \pi/2$ l'equazione $\sqrt{3} \cdot sin^2(x) + \sqrt{3} \cdot cos^2(x) - 2 \cdot sin(x) = 0$ ha soluzione
    A) $x = \pi/3$ B) $x = \pi/6$ C) $x = \pi/4$ D) $x = 0$ E) $x = \pi/2$
12. (Ingegneria 2009) L'equazione $sin(x) = -x$
    A) ammette infinite soluzioni B) Se $h > 0$ è una soluzione, allora anche $x = h + \pi$ lo è
    C) non ammette soluzioni D) ammette soltanto una soluzione E) ammette esattamente due soluzioni

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_4_7.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	**2**	**3**
B	$x = k\pi$	$\pi + 2k\pi < x < 3\pi/2 + 2k\pi$
4	**5**	**6**
$m = \pm\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}$ $\vartheta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \vartheta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$	C	E
7	**8**	**9**
C	E	E
10	**11**	**12**
A	A	D

7. La misurazione degli angoli

7.4 Formule goniometriche

Prerequisiti

- Concetto di angolo
- Concetto di misura
- Unità di misura sessagesimale degli angoli
- Le funzioni goniometriche elementari
- Dominio e codominio di una funzione
- Teoremi fondamentali di goniometria
- Uso della calcolatrice scientifica
- Equazioni e disequazioni goniometriche

Obiettivi

- Sapere padroneggiare le formule più comuni sugli archi
- Sapere risolvere problemi di trigonometria mediante l'uso delle formule goniometriche

Contenuti

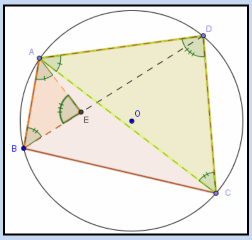
- Formule di addizione, sottrazione, duplicazione e bisezione degli archi
- Formule di prostaferesi e di Werner

Formule di addizione, sottrazione, duplicazione e bisezione degli archi

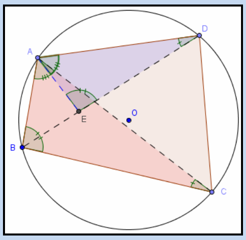
Adesso vogliamo trovare delle formule che possono risultare utili per semplificare alcuni calcoli, anche se con l'uso delle calcolatrici scientifiche adesso sono meno importanti di un tempo.
Cominciamo ad enunciare un importante risultato di geometria.

Teorema 1 (di Tolomeo)

Sia *ABCD* un quadrilatero inscritto in una circonferenza, allora si ha: il prodotto delle misure delle diagonali è uguale alla somma dei prodotti dei lati opposti.
In simboli: $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$.
Dimostrazione.



Tracciamo *BE*, con *E* sulla diagonale *BD* in modo che sia $\angle B\hat{A}E = \angle D\hat{A}C$. Potrebbe anche succedere che *E* appartenga alla diagonale *AC*. In ogni caso i triangoli *ABE* e *ACD* sono simili perché hanno gli angoli ordinatamente uguali. Infatti, oltre i due angoli precedenti, si ha anche $\angle A\hat{B}E = \angle A\hat{C}D$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $\overset{\frown}{AD}$. Quindi: $\frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{BE}$.



Anche i triangoli *ABC* e *AED* sono simili, poiché $\angle A\hat{D}E = \angle A\hat{C}B$ perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco $\overset{\frown}{AB}$, mentre $\angle B\hat{A}C = \angle E\hat{A}D$ perché ottenuti aggiungendo agli angoli $\angle B\hat{A}E = \angle D\hat{A}C$, lo stesso angolo $E\hat{A}C$. Possiamo quindi scrivere: $\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{DE}$.
Sommiamo termine a termine: $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BE} + \overline{AC} \cdot \overline{DE} = \overline{AC} \cdot \left(\overline{BE} + \overline{DE}\right) = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$, è la tesi.

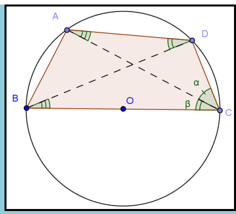
I protagonisti

Claudio Tolomeo nacque in una località imprecisata dell'Egitto nel 85. Le notizie sulla sua vita sono scarse e sono legate soprattutto alla sua attività di astronomo. La prima data certa di una sua indagine astronomica è il 26 Marzo 127, l'ultima del 2 Febbraio 141. Le sue opere sono però giunte ai nostri giorni. La più importante di esse è l'*Almagesto*, un trattato in 13 libri, il cui nome è una latinizzazione della parola araba *al–majisti*¸che è a sua volta una traduzione del greco *la massima compilazione*. Quest'opera tratta da un punto di vista matematico i moti del sole, della luna e dei pianeti allora conosciuti, ed è stato la base della teoria astronomica utilizzata per 1400 anni, fino alla cosiddetta rivoluzione copernicana. Le tavole astronomiche contenute nei libri di Tolomeo fanno largo uso della trigonometria. Morì ad Alessandria, in Egitto, nel 165.

Come corollario del precedente teorema otteniamo la prima formula che stavamo cercando.

Corollario 1 (Formula di sottrazione degli archi dei seni).

Si ha: $sin(\alpha - \beta) = sin(\alpha) \cdot cos(\beta) - sin(\beta) \cdot cos(\alpha)$.
Dimostrazione



Applichiamo il teorema di Tolomeo al quadrilatero in figura, in cui $BC = 2r$, è diametro $\angle B\hat{C}D = \alpha > \angle B\hat{C}A = \beta$: $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{DC} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$ (1). Poiché ABC e BCD sono triangoli rettangoli perché inscritti in una semicirconferenza si ha: $\overline{AC} = 2r \cdot cos(\beta); \overline{BD} = 2r \cdot sin(\alpha); \overline{AB} = 2r \cdot sin(\beta)$; $\overline{DC} = 2r \cdot cos(\alpha)$. Per il teorema della corda invece $\overline{AD} = 2r \cdot sin(\alpha - \beta)$, quindi sostituendo alla (1) otteniamo: $2r \cdot cos(\beta) \cdot 2r \cdot sin(\alpha) = 2r \cdot sin(\beta) \cdot 2r \cdot cos(\alpha) + 2r \cdot sin(\alpha - \beta) \cdot 2r \Rightarrow sin(\alpha - \beta) = sin(\alpha) \cdot cos(\beta) - sin(\beta) \cdot cos(\alpha)$, che è quello che si voleva provare.

Esempio 1

Utilizzando la precedente formula possiamo determinare $sin(15°)$ senza utilizzare la calcolatrice scientifica. Infatti abbiamo: $sin(15°) = sin(45° - 30°)$ e quindi applicando la precedente formula avremo:

$$sin(15°) = sin(45° - 30°) = sin(45°) \cdot cos(30°) - sin(30°) \cdot cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

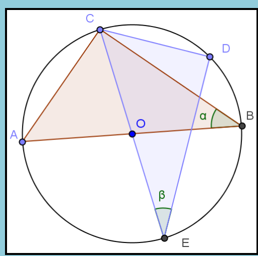
Abbiamo anche quest'altro risultato.

Corollario 2 (Formula di addizione degli archi dei coseni).

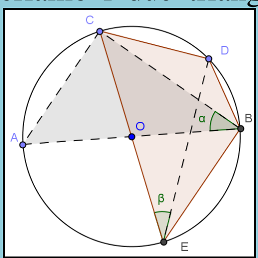
Si ha: $cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha) \cdot cos(\beta) - sin(\alpha) \cdot sin(\beta)$.

Dimostrazione

Consideriamo i due triangoli rettangoli in figura.



Costruiamo adesso il quadrilatero $BDCE$



a cui applichiamo il teorema di Tolomeo: $\overline{ED} \cdot \overline{BC} = \overline{CE} \cdot \overline{BD} + \overline{BE} \cdot \overline{CD}$ (1). Per le proprietà dei triangoli rettangoli si ha: $\overline{ED} = 2r \cdot cos(\beta)$; $\overline{CE} = 2r$; $\overline{BC} = 2r \cdot cos(\alpha); \overline{CD} = 2r \cdot sin(\beta)$. Osserviamo poi che $\angle C\hat{B}D = \angle C\hat{E}D = \beta$ perché entrambi insistono sull'arco $\overset{\frown}{CD}$, quindi $\angle D\hat{B}A = \alpha + \beta$, perciò $\overline{BD} = 2r \cdot cos(\alpha + \beta)$. Ma OBC è isoscele sulla base BC, quindi $\angle B\hat{C}O = \alpha$, e $\overline{BE} = 2r \cdot sin(\alpha)$. Sostituiamo nella (1): $2r \cdot cos(\beta) \cdot 2r \cdot cos(\alpha) = 2r \cdot 2r \cdot cos(\alpha + \beta) + 2r \cdot sin(\alpha) \cdot 2r \cdot sin(\beta)$. Da cui: $cos(\beta) \cdot cos(\alpha) = cos(\alpha + \beta) + sin(\alpha) \cdot sin(\beta) \Rightarrow cos(\alpha + \beta) = cos(\beta) \cdot cos(\alpha) - sin(\alpha) \cdot sin(\beta)$, che è quello che voleva provarsi.

Esempio 2

Utilizzando la precedente formula possiamo determinare il valore esatto di $cos(75°)$, infatti possiamo scrivere: $cos(75°) = cos(45° + 30°) = cos(30°) \cdot cos(45°) - sin(30°) \cdot sin(45°) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Non ci sorprende il fatto che tale valore coincida con $sin(15°) = cos(90° - 15°) = cos(75°)$.

Utilizzando le due formule precedenti possiamo provare i seguenti risultati.

Teorema 2

Valgono le seguenti identità, per tutti i valori degli angoli per cui le singole espressioni hanno significato:

$sin(\alpha \pm \beta) = sin(\alpha) \cdot cos(\beta) \pm sin(\beta) \cdot cos(\alpha)$ $\quad$ $cos(\alpha \pm \beta) = cos(\alpha) \cdot cos(\beta) \mp sin(\alpha) \cdot sin(\beta)$

$$tan(\alpha \pm \beta) = \frac{tan(\alpha) \pm tan(\beta)}{1 \mp tan(\alpha) \cdot tan(\beta)} \qquad cot(\alpha \pm \beta) = \frac{cot(\alpha) \cdot cot(\beta) \mp 1}{cot(\alpha) \pm cot(\beta)}$$

$$sec(\alpha \pm \beta) = \frac{sec(\alpha) \cdot sec(\beta) \cdot csc(\alpha) \cdot csc(\beta)}{csc(\alpha) \cdot csc(\beta) \mp sec(\alpha) \cdot sec(\beta)} \qquad csc(\alpha \pm \beta) = \frac{sec(\alpha) \cdot sec(\beta) \cdot csc(\alpha) \cdot csc(\beta)}{csc(\alpha) \cdot sec(\beta) \pm sec(\alpha) \cdot csc(\beta)}$$

Dimostrazione

Proviamo solo qualcuna di queste. Già conosciamo la formula di sottrazione del seno, vediamo quella di addizione: $sin(\alpha + \beta) = sin[\alpha - (-\beta)] = sin(\alpha) \cdot cos(-\beta) - sin(-\beta) \cdot cos(\alpha) = sin(\alpha) \cdot cos(\beta) + sin(\beta) \cdot cos(\alpha)$.

Adesso l'addizione della tangente: $tan(\alpha + \beta) = \frac{sin(\alpha + \beta)}{cos(\alpha + \beta)} = \frac{sin(\alpha) \cdot cos(\beta) + sin(\beta) \cdot cos(\alpha)}{cos(\alpha) \cdot cos(\beta) - sin(\alpha) \cdot sin(\beta)}$, che semplifichiamo:

$$tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{sin(\alpha) \cdot \cancel{cos(\beta)}}{cos(\alpha) \cdot \cancel{cos(\beta)}} + \frac{sin(\beta) \cdot \cancel{cos(\alpha)}}{\cancel{cos(\alpha)} \cdot cos(\beta)}}{\frac{\cancel{cos(\alpha) \cdot cos(\beta)}}{\cancel{cos(\alpha) \cdot cos(\beta)}} - \frac{sin(\alpha) \cdot sin(\beta)}{cos(\alpha) \cdot cos(\beta)}} = \frac{tan(\alpha) + tan(\beta)}{1 - tan(\alpha) \cdot tan(\beta)}.$$

Lasciamo per esercizio le altre dimostrazioni.

Esempio 3

Usando le precedenti formule di addizione vogliamo mostrare che non esiste $tan(90°)$:

$$tan(90°) = tan(30° + 60°) = \frac{tan(30°) + tan(60°)}{1 - tan(30°) \cdot tan(60°)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{1 - 1} = ?$$

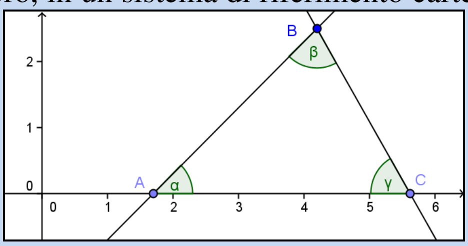
Sfruttando le formule di addizione della tangente possiamo determinare l'angolo formato da due rette di cui conosciamo le equazioni cartesiane.

Teorema 3

L'angolo formato dalle rette di equazioni $ax + by + c = 0$ e $a'x + b'y + c' = 0$ è $tan^{-1}\left(\frac{a'b - ab'}{aa' + bb'}\right)$. Se le rette sono in forma esplicita: $y = mx + p$, $y = m'x + p'$ è $tan^{-1}\left(\frac{m - m'}{1 + mm'}\right)$.

Dimostrazione

Tracciamo due rette non parallele agli assi, né fra di loro, in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale.



Le rette formano un triangolo con l'asse delle ascisse. Sia $ax + by + c = 0$ la retta per AB e quella per BC, sia $a'x + b'y + c' = 0$. Determiniamo l'angolo formato dalle rette: $\angle C\hat{B}A = 180° - \angle B\hat{A}C - \angle A\hat{C}B$. Si ha: $tan(\angle B\hat{A}C) = -\frac{a}{b}; 180° - tan(\angle A\hat{C}B) = -\frac{a'}{b'} \Rightarrow tan(\angle A\hat{C}B) = \frac{a'}{b'}$.

Abbiamo tenuto conto del fatto che $\angle A\hat{C}B$ è il supplementare dell'angolo che la retta forma con il semiasse positivo delle ascisse e tangenti di angoli supplementari sono opposti. Si ha perciò la validità della seguente uguaglianza: $tan\left(\angle C\hat{B}A\right)=tan\left(180°-\angle B\hat{A}C-\angle A\hat{C}B\right)=tan\left(\angle B\hat{A}C+\angle A\hat{C}B\right)$, da cui possiamo scrivere:

$$tan\left(\angle C\hat{B}A\right)=tan\left(\angle B\hat{A}C+\angle A\hat{C}B\right)=\frac{tan\left(\angle B\hat{A}C\right)+tan\left(\angle A\hat{C}B\right)}{1-tan\left(\angle B\hat{A}C\right)\cdot tan\left(\angle A\hat{C}B\right)}=\frac{-\frac{a}{b}+\frac{a'}{b'}}{1-\left(-\frac{a}{b}\cdot\frac{a'}{b'}\right)}=\frac{\frac{-a\cdot b'+a'b}{\cancel{b\cdot b'}}}{\frac{b\cdot b'+aa'}{\cancel{b\cdot b'}}}=\frac{a'b-a\cdot b'}{aa'+b\cdot b'}$$

che è quello che volevamo dimostrare. Facilmente si trova la relazione con i coefficienti angolari.

Esempio 4

- Consideriamo le rette di equazione $3x + y - 1 = 0$ e $2x - 3y + 2 = 0$, usando la formula precedente determiniamo la misura dell'angolo da esse formato: $tan^{-1}\left(\frac{2\cdot 1-3\cdot(-3)}{3\cdot 2+1\cdot(-3)}\right)=tan^{-1}\left(\frac{11}{3}\right)\approx 74°44'42"$.
- Ovviamente la formula non si può applicare per rette perpendicolari, perché in tal caso il denominatore si annulla, ricordiamo che per rette perpendicolari si ha appunto $a\cdot a' + b\cdot b' = 0$. Analogamente se le rette sono parallele avremo $a\cdot b' - a'\cdot b = 0$ e così l'angolo sarà di 0°.

Dalle formule di addizione si ottengono facilmente le seguenti altre formule.

Corollario 3 (formule di duplicazione degli archi)

Valgono le seguenti identità, per tutti i valori degli angoli per cui le singole espressioni hanno significato:

$sin(2\alpha) = 2\cdot sin(\alpha)\cdot cos(\alpha)$ $\quad$ $cos(2\alpha) = cos^2(\alpha) - sin^2(\alpha) = 2cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2sin^2(\alpha)$

$tan(2\alpha)=\frac{2\cdot tan(\alpha)}{1-tan^2(\alpha)}$ $\quad$ $cot(2\alpha)=\frac{cot^2(\alpha)-1}{2\cdot cot(a)}$

$sec(2\alpha)=\frac{sec^2(\alpha)\cdot csc^2(\alpha)}{csc^2(\alpha)-sec^2(\alpha)}$ $\quad$ $csc(2\alpha) = 1/2\cdot sec(\alpha)\cdot csc(\alpha)$

Dimostrazione

Proviamo solo la prima. Data la formula di addizione del seno $sin(\alpha + \beta) = sin(\alpha)\cdot cos(\beta) + sin(\beta)\cdot cos(\alpha)$. la scriviamo, per $\alpha = \beta$: $sin(\alpha + \alpha) = sin(\alpha)\cdot cos(\alpha) + sin(\alpha)\cdot cos(\alpha) = 2\cdot sin(\alpha)\cdot cos(\alpha)$. Che è la formula voluta. Allo stesso modo si ottengono le altre.

Esempio 5

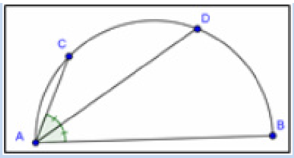
- La formula di duplicazione permette di esprimere una funzione goniometrica mediante altre funzioni goniometriche dell'angolo metà, per esempio: $cos\left(\frac{7}{8}\alpha\right)=cos^2\left(\frac{7}{16}\alpha\right)-sin^2\left(\frac{7}{16}\alpha\right)$.
- Oppure possiamo scrivere
  $[sin(\alpha) + cos(\alpha)]^2 = sin^2(\alpha) + 2\, sin(\alpha)\cdot cos(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1 + 2\, sin(\alpha)\cdot cos(\alpha) = 1 + sin(2\alpha)$.

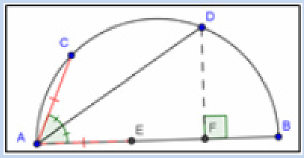
Come applicazione delle formule di duplicazione dimostriamo il seguente risultato relativo ai poligoni regolari, riprendendo una formula già provata nella precedente unità.
Adesso vogliamo determinare una relazione anche per $sin(\alpha/2)$.

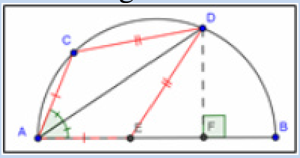
Teorema 4 (Formula di bisezione del seno)

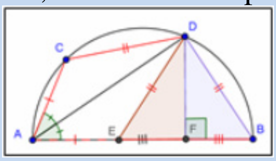
Si ha: $sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-cos(\alpha)}{2}}$.

Dimostrazione

Consideriamo un semicerchio e un suo arco $\overset{\frown}{BC}$, che andiamo a bisecare in *D*. 

Adesso tracciamo la perpendicolare da *D* al diametro e il segmento *AE* uguale ad *AC*. 

Così i triangoli *ACD* e *AED* sono fra loro uguali, per il criterio LAL, pertanto lo sono anche *ED* e *CD*. 

Ma ovviamente sono uguali anche *CD* e *DB*, dato che *D* è punto medio dell'arco $\overset{\frown}{BC}$. Sono perciò uguali anche i triangoli rettangoli *DEF* e *DFB*. 

Quindi sono uguali *EF* e *FB*. Ma si ha anche $\overline{FB} = \overline{AB} - \overline{AF} = \overline{AB} - \left(\overline{AE} + \overline{EF}\right) = \; = \overline{AB} - \left(\overline{AC} + \overline{FB}\right) \Rightarrow$ $2 \cdot \overline{FB} = \overline{AB} - \overline{AC} \Rightarrow \overline{FB} = \dfrac{\overline{AB} - \overline{AC}}{2}$. Per il I teorema di Euclide: $\overline{DB}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{FB} \Rightarrow \overline{DB}^2 = \overline{AB} \cdot \dfrac{\overline{AB} - \overline{AC}}{2}$.
Indicando con $\angle C\hat{A}B = \alpha$, si ha: $\overline{AB}^2 \cdot sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \overline{AB} \cdot \dfrac{\overline{AB} - \overline{AB} \cdot cos(\alpha)}{2} \Rightarrow sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1 - cos(\alpha)}{2}$.

Esempio 6

Vogliamo determinare *sin*(22°30′), senza usare la calcolatrice scientifica. Poiché *sin*(22°30′) = *sin*(45°/2), possiamo applicare la precedente formula: $sin(22°30') = \sqrt{\dfrac{1 - cos(45°)}{2}} = \sqrt{\dfrac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\dfrac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{4}$.

Possiamo determinare anche le formule di bisezione per le altre funzioni goniometriche.

Teorema 5 (Formule di bisezione)

Valgono le seguenti identità, per tutti i valori degli angoli per cui le singole espressioni hanno significato:

$$sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cos(\alpha)}{2}} \qquad cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + cos(\alpha)}{2}} \qquad tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cos(\alpha)}{1 + cos(\alpha)}}$$

$$cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + cos(\alpha)}{1 - cos(\alpha)}} \qquad sec\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{2 \cdot sec(\alpha)}{1 + sec(\alpha)}} \qquad csc\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{2 \cdot sec(\alpha)}{sec(\alpha) - 1}}$$

Dimostrazione

Proviamo solo quella del coseno. Consideriamo la formula di duplicazione del coseno, espressa usando solo il coseno: $cos(2\alpha) = 2cos^2(\alpha) - 1$, valida qualsiasi cosa scriviamo al posto di α, quindi anche per α/2: $cos(\alpha) = cos(2 \cdot \alpha/2) = 2\,cos^2(\alpha/2) - 1$, da cui si ricava l'espressione del coseno, ottenendo la formula voluta.

Esempio 7

Vogliamo determinare in altro modo il valore già calcolato di *tan*(22°30′), ossia con le formule di bisezione.

Abbiamo: $\sqrt{\dfrac{1 - cos(45°)}{1 + cos(45°)}} = \sqrt{\dfrac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\dfrac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{\dfrac{\left(2 - \sqrt{2}\right)^2}{\left(2 + \sqrt{2}\right) \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right)}} = \sqrt{\dfrac{4 - 4 \cdot \sqrt{2} + 2}{4 - 2}} = \sqrt{3 - 2 \cdot \sqrt{2}}$

Il risultato sembra diverso dal precedente. Verifichiamo che invece sono lo stesso numero.

$$\sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1\Rightarrow 3-3\cdot\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2\Rightarrow 3-2\cdot\sqrt{2}=2-2\cdot\sqrt{2}+1\Rightarrow 3-2\cdot\sqrt{2}=3-2\cdot\sqrt{2}$$

Come applicazione delle formule di bisezione possiamo provare il seguente risultato.

Teorema 6 (formule di Briggs–Retico)

In un qualsiasi triangolo valgono le seguenti formule, in cui p indica il semiperimetro del triangolo:

$$sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{b\cdot c}}\qquad sin\left(\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{\frac{(p-a)\cdot(p-c)}{a\cdot c}}\qquad sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\sqrt{\frac{(p-a)\cdot(p-b)}{a\cdot b}}$$

$$cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{p\cdot(p-a)}{b\cdot c}}\qquad cos\left(\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{\frac{p\cdot(p-b)}{a\cdot c}}\qquad cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\sqrt{\frac{p\cdot(p-c)}{a\cdot b}}$$

$$tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{p\cdot(p-a)}}\qquad tan\left(\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{\frac{(p-a)\cdot(p-c)}{p\cdot(p-b)}}\qquad tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\sqrt{\frac{(p-a)\cdot(p-b)}{p\cdot(p-c)}}$$

Dimostrazione

Proviamo solo la prima. Partiamo dalla formula di bisezione del seno, in cui possiamo scegliere il segno positivo perché in ogni caso abbiamo da considerare seni di angoli non superiori a 180°, anzi a 90° perché consideriamo l'angolo metà: $sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-cos(\alpha)}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}}$. Abbiamo espresso il coseno mediante il Teorema di Carnot. Adesso continuiamo a semplificare.

$$sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(a-b+c)\cdot(a+b-c)}{4bc}}\qquad(1)$$

Consideriamo in che relazioni si trovano i due fattori al numeratore con il semiperimetro:

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{a+b-c+2c}{2}=\frac{a+b-c}{2}+c\Rightarrow 2\cdot(p-c)=a+b-c;$$

$$p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{a-b+c+2b}{2}=\frac{a-b+c}{2}+b\Rightarrow 2\cdot(p-b)=a-b+c$$

Sostituiamo nella (1): $sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{\cancel{2}\cdot(p-b)\cdot\cancel{2}\cdot(p-c)}{\cancel{4}bc}}=\sqrt{\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{bc}}$, che rappresenta la tesi.

Esempio 8

Vogliamo trovare le misure degli angoli di un triangolo di lati a = 9, b = 8, c = 7, usando le formule precedenti. $p=\frac{7+8+9}{2}=12$, quindi $sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{(12-7)\cdot(12-8)}{7\cdot 8}}=\sqrt{\frac{5}{14}}\Rightarrow;\frac{\alpha}{2}\approx 36°41'57''\Rightarrow\alpha\approx 73°23'54''$; $sin\left(\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{\frac{(12-7)\cdot(12-9)}{7\cdot 9}}=\sqrt{\frac{5}{21}}\Rightarrow;\frac{\beta}{2}\approx 29°12'21''\Rightarrow\beta\approx 58°24'42''$; e $sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\sqrt{\frac{(12-8)\cdot(12-9)}{8\cdot 9}}=$ $=\sqrt{\frac{1}{6}}\Rightarrow\frac{\gamma}{2}\approx 24°5'41''\Rightarrow\gamma\approx 48°11'22''$.

Un importante corollario delle formule di Briggs–Retico è il seguente risultato.

Corollario 4 (Formula di Erone).

L'area S di un triangolo di lati a, b, c e semiperimetro p è $S=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$.

Dimostrazione

Partiamo dalla formula per il calcolo dell'area di un triangolo qualsiasi: 1/2 · ab $sin(\gamma)$. Adesso esprimiamo il

seno usando la formula di duplicazione: $\frac{1}{\cancel{2}}ab\cdot\cancel{2}sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)=ab\cdot sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$. Adesso applichiamo le formule di Briggs: $a\cdot b\cdot\sqrt{\frac{(p-a)\cdot(p-b)}{a\cdot b}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(p-c)}{a\cdot b}}=\sqrt{\cancel{a^2\cdot b^2}\cdot\frac{(p-a)\cdot(p-b)}{\cancel{a\cdot b}}\cdot\frac{p\cdot(p-c)}{\cancel{a\cdot b}}}=$
$=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$. Questa è la tesi.

Esempio 9

L'area di un triangolo rettangolo di cateti lunghi 3 e 4 è (3 · 4) /2 = 6. Vogliamo verificare questo risultato con il teorema di Erone. L'ipotenusa è lunga $\sqrt{3^2+4^2}=5$, il semiperimetro $p=\frac{3+4+5}{2}=6$. Quindi abbiamo: $S=\sqrt{6\cdot(6-3)\cdot(6-4)\cdot(6-5)}=\sqrt{6\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\sqrt{6^2}=6$.

Un risultato simile alla formula di Erone sussiste anche per un quadrilatero qualsiasi.

Teorema 7 (di Brahmagupta)

L'area di un quadrilatero *ABCD* si ottiene mediante la seguente formula, in cui *p* è il semiperimetro e α e γ sono due angoli opposti: $S=\sqrt{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d)-a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}$.

Dimostrazione Omessa.

Il precedente teorema si semplifica per i quadrilateri ciclici.

Corollario 5

L'area di un quadrilatero ciclico *ABCD* è $S=\sqrt{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d)}$.

Dimostrazione.

Dal teorema precedente, dato che per i quadrilateri ciclici gli angoli opposti sono supplementari, quindi la loro metà è un angolo retto e il coseno è nullo.

Esempio 10

Una condizione necessaria e sufficiente per la ciclicità di un quadrilatero è che gli angoli opposti siano supplementari, quindi un rettangolo è ciclico. In questo caso i lati sono a due a due uguali, *a* e *b*, il semiperimetro sarà perciò *a* + *b* e gli angoli sono retti. Per la formula di Brahmagupta l'area si trova nel seguente modo:

$$S=\sqrt{(a+b-a)^2\cdot(a+b-b)^2-a^2\cdot b^2\cdot cos^2\left(\frac{90°+90°}{2}\right)}=\sqrt{b^2\cdot a^2-a^2\cdot b^2\cdot cos^2(90°)}=a\cdot b.$$

Che ovviamente coincide con la ben nota formula.

Utilizzando le formule di bisezione troviamo anche la misura di alcuni enti particolari di un triangolo.

Teorema 8

In un triangolo il segmento intercettato dalla bisettrice di un angolo interno è dato dal rapporto fra il doppio prodotto dei lati che comprendono il detto angolo e la somma degli stessi lati, il tutto moltiplicato per il coseno della metà dell'angolo. In simboli $b_a=\frac{2\cdot b\cdot c\cdot cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{b+c};b_b=\frac{2\cdot a\cdot c\cdot cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}{a+c};b_c=\frac{2\cdot a\cdot b\cdot cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{a+b}$

Dimostrazione

Consideriamo un qualsiasi triangolo e tracciamo la bisettrice di uno dei suoi angoli interni. Ricaviamo la misura di AD usando il Teorema dei seni applicato al triangolo ABD: $\frac{\overline{BD}}{sin\left(D\hat{A}B\right)}=\frac{\overline{AD}}{sin\left(A\hat{B}D\right)}\Rightarrow$ $\overline{AD}=\frac{\overline{BD}\cdot sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{sin(\alpha)}$. Ricordiamo il Teorema della Bisettrice che afferma che ogni bisettrice di un angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati: $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}$. Adesso usiamo la proprietà del comporre: $\frac{\overline{AB}+\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AD}+\overline{DC}}{\overline{AD}}\Rightarrow\frac{\overline{AB}+\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}\Rightarrow\frac{c+a}{c}=\frac{b}{\overline{AD}}$. Semplifichiamo la precedente proporzione. $\frac{c+a}{c}=\frac{b}{\frac{\overline{BD}\cdot sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{sin(\alpha)}}\Rightarrow\frac{c+a}{c}=\frac{b\cdot sin(\alpha)}{\overline{BD}\cdot sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$. Per il Teorema dei seni applicato ad ABC, ricavando b mediante a, abbiamo ancora: $\frac{c+a}{c}=\frac{\frac{a\cdot sin(\beta)}{\cancel{sin(\alpha)}}\cdot\cancel{sin(\alpha)}}{\overline{BD}\cdot sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\Rightarrow\frac{c+a}{c}=\frac{a\cdot sin(\beta)}{\overline{BD}\cdot sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$. Per la formula di duplicazione del seno: $\frac{c+a}{c}=\frac{a\cdot 2\cdot\cancel{sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\cdot cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\overline{BD}\cdot\cancel{sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}}\Rightarrow\frac{c+a}{c}=\frac{a\cdot 2\cdot cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\overline{BD}}$. Infine ricaviamo la misura cercata: $\overline{BD}=\frac{2\cdot a\cdot c\cdot cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}{a+c}$. Ecco la tesi.

Esempio 11

Consideriamo il triangolo rettangolo (3, 4, 5), vogliamo trovare le misure dei segmenti intercettati dalle bisettrici degli angoli interni. Intanto calcoliamo i coseni di tali angoli.

$$cos(\alpha)=0;cos(\beta)=\frac{4^2+5^2-3^2}{2\cdot4\cdot5}=\frac{32}{40}=\frac{4}{5};cos(\gamma)=\frac{3^2+5^2-4^2}{2\cdot3\cdot5}=\frac{18}{30}=\frac{3}{5}.$$

Adesso calcoliamo i coseni degli angoli metà:

$$cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2};cos\left(\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+4/5}{2}}=\sqrt{\frac{9}{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}};cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+3/5}{2}}=\sqrt{\frac{8}{10}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Possiamo applicare le formule stabilite dal teorema precedente.

$$b_a=\frac{\cancel{2}\cdot3\cdot4\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}}{3+4}=\frac{12\cdot\sqrt{2}}{7};b_b=\frac{2\cdot5\cdot4\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}}{5+4}=\frac{40}{3\cdot\sqrt{10}};b_c=\frac{2\cdot5\cdot3\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}}{5+3}=\frac{15}{2\cdot\sqrt{5}}$$

Vediamo ancora un risultato.

Teorema 9

Detto r il raggio del cerchio inscritto in un triangolo di lati a, b, c si ha:

$$r=(p-a)\cdot tan(\alpha/2)=(p-b)\cdot tan(\beta/2)=(p-c)\cdot tan(\gamma/2)$$

Dimostrazione

Sappiamo che si ha: $r = S/p$, per il teorema di Erone possiamo scrivere: $r=\frac{\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}}{p}=$

$$= \frac{\sqrt{p\cdot(p-a)}\cdot\sqrt{(p-b)\cdot(p-c)}}{p} = \frac{\cancel{p}\cdot(p-a)\cdot\sqrt{(p-b)\cdot(p-c)}}{\cancel{p}\cdot\sqrt{p\cdot(p-a)}\cdot} = \frac{(p-a)\cdot\sqrt{(p-b)\cdot(p-c)}}{\sqrt{p\cdot(p-a)}\cdot}.$$

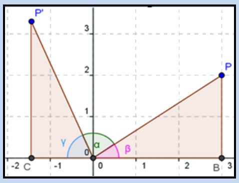
Usando le formule di Briggs–Retico abbiamo la tesi.

Concludiamo il paragrafo determinando, come applicazione delle formule di addizione e sottrazione degli archi, le leggi di una rotazione di angolo qualsiasi.

Teorema 10

Valgono le seguenti leggi che trasformano il punto $P \equiv (x; y)$ nel punto $P' \equiv (x'; y')$, ottenuto mediante la rotazione di un angolo α attorno all'origine $\begin{cases} x' = x\cdot cos(\alpha) - y\cdot sin(\alpha) \\ y' = x\cdot sin(\alpha) + y\cdot cos(\alpha)\end{cases}$

Dimostrazione

Consideriamo la figura 

in cui abbiamo ruotato il punto P attorno ad O di un angolo α. Si ha: $\begin{cases}\overline{OB} = \overline{OP}\cdot cos(\beta) \\ \overline{BP} = \overline{OP}\cdot sin(\beta)\end{cases}; \begin{cases}\overline{OC} = \overline{OP'}\cdot cos(\gamma) \\ \overline{CP'} = \overline{OP'}\cdot sin(\gamma)\end{cases}$, ovviamente OP e OP' sono segmenti uguali. Nelle ipotesi della figura possiamo anche scrivere: $\begin{cases} x = \overline{OP}\cdot cos(\beta) \\ y = \overline{OP}\cdot sin(\beta)\end{cases}; \begin{cases} x' = -\overline{OP'}\cdot cos(\gamma) \\ y' = \overline{OP'}\cdot sin(\gamma)\end{cases}$. Abbiamo anche: γ = 180° – (α + β), quindi: $\begin{cases} x' = \overline{OP'}\cdot cos(\alpha+\beta) = x'\cdot[cos(\alpha)\cdot cos(\beta) - sin(\alpha)\cdot sin(\beta)] \\ y' = \overline{OP'}\cdot sin(\alpha+\beta) = y'\cdot[sin(\alpha)\cdot cos(\beta) + cos(\alpha)\cdot sin(\beta)]\end{cases}$, che possiamo anche semplificare, nel modo seguente, $\begin{cases} x' = \overline{OP}\cdot cos(\alpha)\cdot cos(\beta) - \overline{OP}\cdot sin(\alpha)\cdot sin(\beta) = x\cdot cos(\alpha) - y\cdot sin(\alpha) \\ y' = \overline{OP}\cdot sin(\alpha)\cdot cos(\beta) + \overline{OP}\cdot cos(\alpha)\cdot sin(\beta) = x\cdot sin(\alpha) + y\cdot cos(\alpha)\end{cases}$, dato che $x = \overline{OP}\cdot cos(\beta)$, $y = \overline{OP}\cdot sin(\beta)$, ottenendo la tesi. Analoghi procedimenti possono farsi negli altri casi in cui P e/o P' appartengano a un altro quadrante.

Esempio 12

Ruotando il punto $P \equiv (1; 2)$ attorno all'origine di 60°, troveremo il punto di coordinate:

$$\begin{cases} x' = 1\cdot cos(60°) - 2\cdot sin(60°) = \dfrac{1-2\cdot\sqrt{3}}{2} \\ x' = 1\cdot sin(60°) + 2\cdot cos(60°) = \dfrac{\sqrt{3}+2}{2}\end{cases}$$

Possiamo anche ottenere le leggi di una rotazione attorno a un centro qualsiasi.

Teorema 11

Le seguenti leggi $\begin{cases} x' = a + (x-a)\cdot cos(\alpha) - (y-b)\cdot sin(\alpha) \\ y' = b + (x-a)\cdot sin(\alpha) + (y-b)\cdot cos(\alpha)\end{cases}$ trasformano il punto $P \equiv (x; y)$ in $P' \equiv (x'; y')$, ottenuto mediante la rotazione di un angolo α attorno al centro $C \equiv (a; b)$.

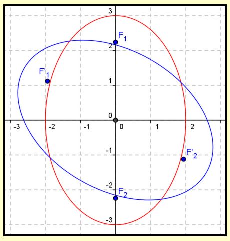
Dimostrazione.

Basta applicare le traslazioni che portano C in O: $\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b\end{cases}$, quindi applicare le leggi della rotazione attorno ad O già trovate.

Queste leggi ci permettono di determinare le equazioni di una generica conica.

Esempio 13

Consideriamo l'ellisse canonica $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, vogliamo ruotarla attorno O di 60°. Applichiamo le precedenti leggi per O e 60°: $\begin{cases} x' = \frac{x-\sqrt{3}\cdot y}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}\cdot x + y}{2} \end{cases}$, adesso ricaviamo le leggi inverse: $\begin{cases} x = \frac{x'+\sqrt{3}\cdot y'}{2} \\ y = \frac{y'-\sqrt{3}\cdot x'}{2} \end{cases}$ e sostituiamo: $\frac{\left(\frac{x'+\sqrt{3}\cdot y'}{2}\right)^2}{4}+\frac{\left(\frac{y'-\sqrt{3}\cdot x'}{2}\right)^2}{9}=1$. Semplifichiamo ed eliminiamo gli apici, ottenendo l'equazione cercata: $21x^2+10\cdot\sqrt{3}\cdot xy+31y^2-144=0$. Vediamo la rappresentazione grafica.



I protagonisti

Ad **Henry Briggs** (1561 –1630) abbiamo già accennato nell'unità 5.2 sui logaritmi, egli compilò anche tavole goniometriche, legate sempre ai logaritmi, sempre per questioni astronomiche.
Georg Joachim von Lauchen Rheticus nacque ne1 1514 a Feldkirch, in Austria. Fu un famoso astronomo e per due anni, a partire dal Maggio 1539, lavorò con Copernico. Proprio a causa dei suoi studi astronomici ebbe a che fare con la trigonometria. Nel 1541 curò la pubblicazione del *De Revolutionibus* di Copernico a cui aggiunse le prime tavole trigonometriche di seno e coseno mai pubblicate. Mori nel 1574 a Kassa, in Ungheria.
Erone nacque ad Alessandria d'Egitto. Come per molti antichi studiosi, le notizie biografiche sono molto incerte. Per parecchio tempo si pensò che fosse vissuto intorno al 150 a.C. e poi invece intorno al 250 d.C. Adesso si pensa che sia nato intorno al 10 d.C. e morto intorno al 75. Fu uno studioso di geometria e di meccanica. Sono arrivati fino a noi diverse opere, fra cui ricordiamo *Sulla dioptra* (opera astronomica), *La pneumatica* (su strumenti meccanici che utilizzavano l'aria o l'acqua) *La Meccanica* in 3 libri, *La Geometria* (anche se taluni pensano non sia opera sua). La sua famosa formula è enunciata nella *Metrica*, uno dei tre libri della *Meccanica*.
Brahmagupta nacque in India nel 598 ed ivi morì nel 670. Fu un matematico e un astronomo. Ricordiamo in particolare la sua opera astronomica *Brahmasphutasiddhanta* (L'apertura dell'Universo), scritta nel 628. In questo lavoro enunciò e dimostrò la formula sui quadrilateri ciclici. L'opera contiene anche una interessante trattazione del numero zero (all'epoca ancora considerato un non numero) e dei numeri negativi, ancora non accettati dalla comunità matematica.

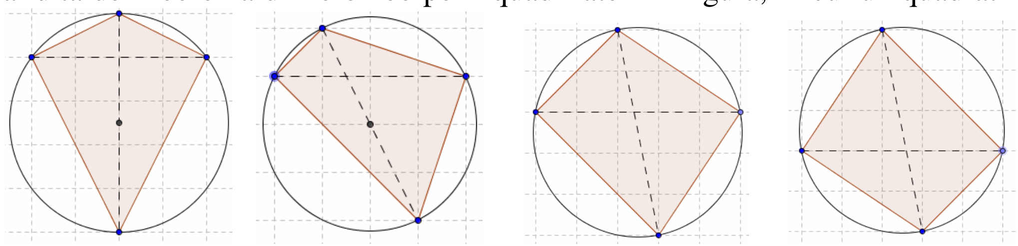
Verifiche

Lavoriamo insieme

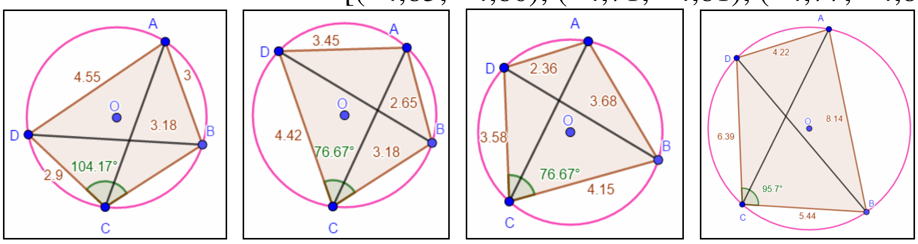
Verificare la validità del teorema di Tolomeo per un quadrato, che è inscrivibile in una circonferenza.
Le diagonali di un quadrato di lato ℓ misurano $\ell\cdot\sqrt{2}$. Quindi secondo il teorema deve aversi: $\ell\cdot\ell+\ell\cdot\ell=\left(\ell\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(\ell\cdot\sqrt{2}\right)\Rightarrow 2\cdot\ell^2=2\cdot\ell^2$, che è vero.

Livello 1

1. Verificare la validità del Teorema di Tolomeo per un rettangolo generico di lati lunghi *a* e *b*.
2. A quale altro famoso Teorema equivale il teorema di Tolomeo nel caso di un rettangolo?
[Teorema di Pitagora]
3. Usando il teorema di Tolomeo determinare la misura della diagonale di un trapezio isoscele di basi lunghe *a* e *b* e lato obliquo lungo *c*. $\left[\sqrt{a\cdot b+c^2}\right]$
4. Verificare la validità del Teorema di Tolomeo per i quadrilateri in figura, in cui un quadratino ha lato

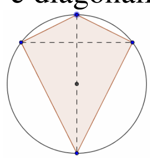


di 1 *cm*.
5. Tenendo conto delle figure determinare la misura delle diagonali di *ABCD*.
[(≈4,83; ≈4,80); (≈4,71; ≈4,81); (≈4,77; ≈4,81); (≈8,53; ≈8,79)]

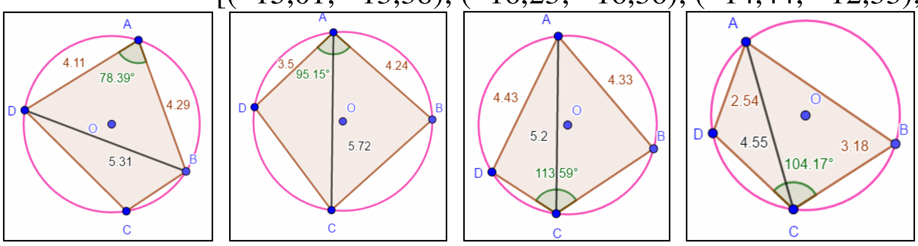


Livello 2

6. Verificare la validità del Teorema di Tolomeo per un trapezio isoscele generico di basi lunghe *a* e *b* e lato obliquo lungo *c*.
7. Verificare la validità del Teorema di Tolomeo per un aquilone generico di lati lunghi *a* e *b* e diagonali



perpendicolari uno dei quali è diametro della circonferenza circoscritta.
8. Verificare la validità del Teorema di Tolomeo per un quadrilatero ciclico di lati consecutivi lunghi 3,07; 3,68; 4,89 e 4,45. Si sa che le diagonali sono fra loro perpendicolari.
9. Un quadrilatero è inscritto in una semicirconferenza di diametro lungo 25 *cm*, ha i due lati consecutivi al diametro lunghi rispettivamente 7 *cm* e 15 *cm*. Quanto misura il quarto lato? [15 *cm*]
10. Tenendo conto delle figure determinare la misura del perimetro e dell'area di *ABCD*.
[(≈15,01; ≈13,38); (≈16,23; ≈16,36); (≈14,44; ≈12,33); (≈13,35; ≈10,03)]



11. Un trapezio isoscele è inscritto in una semicirconferenza di diametro d, se il lato obliquo è lungo a, quanto misura il quarto lato? $\left[\dfrac{d^2-2a^2}{d}\right]$

12. Esternamente a un lato AB di un quadrato costruiamo un triangolo rettangolo ABC che ha per ipotenusa AB. Se i cateti sono lunghi rispettivamente 1,35 *cm* e 1,96 *cm*, determinare la misura del segmento CD, in cui D è il centro del quadrato. *Suggerimento*: applicare il teorema di Tolomeo al quadrilatero $ABCD$. [≈ 2,34*cm*]

Livello 3

13. Nel quadrilatero $ABCD$, $\angle\widehat{A} = 120°, \angle\widehat{B} = \angle\widehat{D} = 90°, \overline{AB} = 4{,}01\,cm, \overline{AD} = 1{,}44\,cm$. Trovare $\overline{AC}$. [≈ 5,65]

14. Un quadrilatero ciclico ha due lati consecutivi lunghi 3 e 4, l'angolo fra essi compreso retto, la diagonale che parte da tale angolo lunga anch'essa 4. Determinare la misura dei rimanenti lati del quadrilatero. [≈ 4,86; ≈ 1,35]

15. Dimostrare l'inverso del teorema di Tolomeo: *Se in un quadrilatero la somma dei prodotti dei lati opposti uguaglia il prodotto delle diagonali, allora il quadrilatero è ciclico.*

16. Il rettangolo $ABCD$ ha i lati AB e BC lunghi rispettivamente 1,34 *cm* e 2,48 *cm*. Scegliamo il punto E su BC in modo che si abbia BE lungo 1,03 *cm*. Il prolungamento di AE incontra la circonferenza circoscritta al rettangolo nel punto F, determinare la misura di BF. [≈ 1,71 *cm*]

17. Dato il triangolo rettangolo di cateti lunghi 3 e 4, dal punto medio del cateto maggiore si tracci la perpendicolare all'ipotenusa, che la incontra nel punto A, determinare la distanza di A dal vertice dell'angolo retto, usando il teorema di Tolomeo. $\left[\dfrac{4}{5}\cdot\sqrt{13}\right]$

18. Un quadrilatero è inscritto in una semicirconferenza di diametro d, con i due lati consecutivi al diametro lunghi rispettivamente a e b. Quanto misura il quarto lato? $\left[\dfrac{\sqrt{\left(d^2-a^2\right)\cdot\left(d^2-b^2\right)}-ab}{d}\right]$

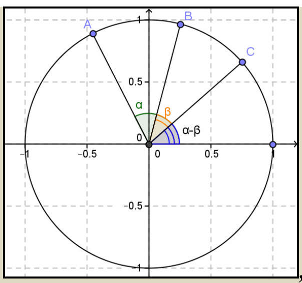
19. Un triangolo isoscele ABC, di base BC, è inscritto in una circonferenza, si scelga un punto P sull'arco $\overset{\frown}{BC}$, provare che si ha: $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}+\overline{PC}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$.

20. Con riferimento al problema precedente, cosa succede se il triangolo è equilatero? $\left[\overline{PA} = \overline{PB} + \overline{PC}\right]$

21. Un quadrato $ABCD$ è inscritto in una circonferenza, si scelga un punto P sull'arco $\overset{\frown}{BC}$, provare che si ha: $\dfrac{\overline{PA}+\overline{PC}}{\overline{PB}+\overline{PD}} = \dfrac{\overline{PD}}{\overline{PA}}$.

Formule di addizione e sottrazione

Lavoriamo insieme



Usando la figura , *in cui* $A \equiv (cos(\alpha), sin(\alpha))$, $B \equiv (cos(\beta), sin(\beta))$ *e* $C \equiv (cos(\alpha - \beta), sin(\alpha - \beta))$ *provare la formula di addizione del coseno.*

L'arco CD è uguale ad AB, pertanto $\overline{CD}^2 = \overline{AB}^2 = [cos(\alpha) - cos(\beta)]^2 + [sin(\alpha) - sin(\beta)]^2 = cos^2(\alpha) + cos^2(\beta) - 2\,cos(\alpha)\cdot cos(\beta) + sin^2(\alpha) + sin^2(\beta) - 2\,sin(\alpha)\cdot sin(\beta) = 2 - 2\,cos(\alpha)\cdot cos(\beta) + 2 - 2\cdot sin(\alpha)\cdot sin(\beta) = 2 - 2\cdot[cos(\alpha)\cdot cos(\beta) + sin(\alpha)\cdot sin(\beta)]$. Analogamente determiniamo l'altro quadrato: $\overline{CD}^2 =$

$[cos(\alpha-\beta)-1]^2+[sin(\alpha-\beta)-1]^2=cos^2(\alpha-\beta)+1-2\,cos(\alpha-\beta)+sin^2(\alpha-\beta)=2-2cos(\alpha-\beta)$. Infine $\overline{AB}^2=\overline{CD}^2 \Leftrightarrow 2-2[cos(\alpha)\cdot cos(\beta)+sin(\alpha)\cdot sin(\beta)]=2-2cos(\alpha-\beta) \Rightarrow cos(\alpha)\cdot cos(\beta)+sin(\alpha)\cdot sin(\beta)$ $=cos(\alpha-\beta)$, che è proprio ciò che volevamo provare.

Usando le formule di addizione e sottrazione degli archi e i valori degli archi notevoli calcolare quanto richiesto

Livello 1

22. a) $sin(75°)=sin(45°+30°)$; b) $cos(105°)=cos(60°+45°)$; c) $sin(15°)=sin(45°-30°)$ $\left[\text{a) } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}; \text{b) } \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}; \text{c) } \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right]$

23. a) $cos(90°)=cos(45°+45°)$; b) $tan(15°)=tan(45°-30°)$; c) $cot(60°)=cos(30°+30°)$ $\left[\text{a) } 0; \text{b) } 2-\sqrt{3}; \text{c) } \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

24. $tan(120°)=tan(60°+60°)=tan(90°+30°)=tan(120°-30°)$ $\left[-\sqrt{3}\right]$

25. a) $sin(150°)=sin(75°+75°)=sin(180°-30°)$; b) $cot(0°)=cos(45°-45°)$ [a) 1/2; b) ∅]

26. a) $cos(135°)=cos(30°+105°)$; b) $sin(105°)=sin(15°+90°)$ $\left[\text{a) } -\frac{\sqrt{2}}{2}; \text{b) } \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right]$

27. a) $sec(75°)$; $csc(75°)$; b) $sec(105°)$; c) $csc(105°)$ $\left[\text{a) } \sqrt{6}+\sqrt{2}; \text{b) } \sqrt{6}-\sqrt{2}; \text{c) } -\sqrt{6}-\sqrt{2}; \text{d) } \sqrt{6}-\sqrt{2}\right]$

Determinare quanto richiesto sulla base dei dati noti

Livello 2

28. $sin(\alpha)=1/2$, $cos(\beta)=1$, $\alpha\in[\pi/2;\pi]$, $\beta\in[3\pi/2;2\pi]$; b) $cos(\alpha+\beta)=?$; $tan(\alpha-\beta)=?$ $\left[cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{3}}{2}; tan(\alpha-\beta)=-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

29. $sin(\alpha)=2/7$, $cos(\beta)=-7/9$, $\alpha\in[\pi/2;\pi]$, $\beta\in[\pi;3/2\pi]$; b) $sin(\alpha+\beta)=?$; $tan(\alpha-\beta)=?$ $\left[sin(\alpha+\beta)=\frac{4\cdot\sqrt{10}}{21}-\frac{2}{9}; tan(\alpha-\beta)=\frac{-2\cdot\left(243\cdot\sqrt{5}+686\cdot\sqrt{2}\right)}{2077}\right]$

30. $sin(\alpha)=-3/5$, $cos(\beta)=6/7$, $\alpha\in[\pi;3\pi/2]$, $\beta\in[3\pi/2;2\pi]$; b) $sin(\alpha-\beta)=?$; $tan(\alpha+\beta)=?$ $\left[sin(\alpha-\beta)=\frac{-4\cdot\sqrt{13}-18}{35}; tan(\alpha+\beta)=\frac{-2\cdot\left(25\cdot\sqrt{13}-98\right)}{153}\right]$

31. $sin(\alpha)=3/4$, $cos(\beta)=8/9$, $\alpha\in[\pi/2;\pi]$, $\beta\in[3\pi/2;2\pi]$; b) $cos(\alpha+\beta)=?$; $cot(\alpha-\beta)=?$ $\left[cos(\alpha+\beta)=\frac{3\cdot\sqrt{17}-8\cdot\sqrt{7}}{36}; cot(\alpha-\beta)=\frac{51+8\cdot\sqrt{119}}{17\cdot\sqrt{7}-24\cdot\sqrt{17}}\right]$

32. $sin(\alpha)=-0{,}1$; $cos(\beta)=-0{,}2$; $\alpha\in[3\pi/2;2\pi]$, $\beta\in[\pi;3/2\pi]$; b) $cos(\alpha-\beta)=?$; $cot(\alpha+\beta)=?$ $\left[cos(\alpha+\beta)=\frac{-3\cdot\sqrt{11}+2\cdot\sqrt{6}}{50}; cot(\alpha+\beta)=\frac{3\cdot\sqrt{11}+8\cdot\sqrt{6}}{95}\right]$

33. $sin(\alpha)=0{,}3$; $cos(\beta)=-0{,}4$; $\alpha\in[0;\pi/2]$, $\beta\in[\pi;3/2\pi]$; b) $sin(\alpha+\beta)=?$; $tan(\alpha+\beta)=?$ [$sin(\alpha+\beta)\approx-0{,}994$; $tan(\alpha+\beta)\approx 9{,}326$

Lavoriamo insieme

Semplificare la seguente espressione: $[1 + tan(x)] \cdot [1 + tan(45° - x)]$.

Applichiamo la formula di sottrazione della tangente al secondo membro: $[1+tan(x)]\cdot\left[1+\frac{tan(45°)-tan(x)}{1+tan(45°)\cdot tan(x)}\right]=$

$$=[1+tan(x)]\cdot\left[1+\frac{1-tan(x)}{1+tan(x)}\right]=\cancel{[1+tan(x)]}\cdot\frac{1+\cancel{tan(x)}+1-\cancel{tan(x)}}{\cancel{1+tan(x)}}=2$$

Semplificare le seguenti espressioni usando, laddove possibile, le formule di addizione e sottrazione degli archi

Livello 1

34. a) $sin(x - y) \cdot sin(x) + cos(x - y) \cdot cos(x)$; b) $sin(x + y) \cdot cos(x) - cos(x - y) \cdot sin(x)$ [a) $cos(y)$; b) $sin(y) \cdot (2cos^2(x) - 1)$]

35. a) $sin(x - 30°) + cos(x + 60°)$; b) $sin(x - 45°) + cos(x + 45°)$; c) $sin(x + 45°) - cos(x + 45°)$ [a) 0; b) 0; c) $\sqrt{2}\, sin(x)$]

36. a) $sin(x + 60°) - cos(x - 30°)$; b) $sin(x + y) - cos(x + y)$ [a) 0; b) $sin(y) - cos(x) \cdot cos(y) + sin(x) \cdot cos(y) + sin(y) \cdot cos(x)$]

37. a) $tan(x + y) \cdot tan(x - y)$; $tan(x + 45°) \cdot tan(x - 45°)$; b) $tan(x + 30°) \cdot tan(x - 60°)$ $\left[\text{a) } \frac{cos^2(y)-cos^2(x)}{cos^2(x)-sin^2(y)};\text{b)}-1;\text{c)}-1\right]$

Livello 2

38. a) $tan^2(x + 45°) - tan^2(x - 45°)$; b) $sin^2(x + 30°) - sin^2(x + 60°)$ $\left[\text{a) } \frac{8\cdot sin(x)\cdot cos(x)}{1-4\cdot sin^2(x)\cdot cos^2(x)};\text{b) } \frac{1}{2}-cos^2(x)\right]$

39. a) $cos^2(x + 45°)+sin^2(x - 45°)$; b) $cos^2(x + 45°) - cos^2(x - 45°)$ [a) $1 - 2sin(x)cos(x)$; b) $2\, sin(x)\, cos(x)$]

40. a) $cos^2(x + y) + sin^2(x - y)$; b) $cot(x + y) \cdot cot(x - y)$; c) $\frac{cos(x+y)+cos(x-y)}{sin(x+y)-sin(x-y)}$

$$\left[\text{a) } 1-4sin(x)cos(x)sin(y)cos(y);\text{b) } \frac{sin^2(y)-cos^2(x)}{cos^2(x)-cos^2(y)};\text{c) } cot(y)\right]$$

Livello 3

41. a) $sin(x–y) + cos(x+90°–y)$; b) $sin(x+y) – cos(x+y–90°)$; c) $tan(x+y)\cdot tan(x+y–90°)$ [a) 0; b) 0; c) –1]

42. a) $\frac{sin(x+y)}{cos(x-90°+y)}\cdot\frac{cos(x+90°-y)}{sin(x-y)}$; b) $\frac{sin(x+y)}{cos(x-90°+y)}\cdot\frac{sin(x-y)}{cos(x+90°-y)}$ [a) –1; b) –1]

43. Sviluppare $sin(x + y + z)$ [$cos(x)cos(y)cos(z)+cos(x)sin(y)cos(z)+sin(x)cos(y)cos(z) - sin(x)sin(y)sin(z)$]

44. Sviluppare $cos(x + y + z)$[$cos(x)cos(y)cos(z)–cos(x)sin(y)sin(z)– sin(x)cos(y)sin(z) - sin(x)sin(y)cos(z)$]

Lavoriamo insieme

Noi sappiamo che, per ogni angolo x, si ha: $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$, *possiamo quindi dire che la precedente uguaglianza è una identità per ogni numero reale x. Nel box Lavoriamo insieme precedente abbiamo visto che* $[1 + tan(x)] \cdot [1 + tan(45° - x)] = 2$, *possiamo dire che anche questa uguaglianza è un'identità per ogni numero reale* x?

No, perché per esempio per $x = 90°$ otteniamo $[1 + tan(90°)] \cdot [1 + tan(45° - 90°)]$, che è un'espressione priva di significato perché contiene l'espressione $tan(90°)$ essa stessa senza significato. Possiamo perciò dire che abbiamo a che fare con una identità solo per quegli x per cui le espressioni presenti hanno tutte significato, ossia per: $x \neq 90° + k180° \wedge 45° - x \neq 90° + k180° \Rightarrow x \neq -45° + k180°$

***Verificare se le seguenti sono identità, stabilendo altresì il relativo dominio in* [0°; 360°] *o* [0; 2π]**

Livello 2

45. $\dfrac{cos^2(x+y)-cos^2(x-y)}{sin^2(x)\cdot cos^2(y)}=-4\cdot cot(x)\cdot tan(y)$ [Sì; $x \notin \{0; \pi\}$, $y \notin \{\pi/2; 3\pi/2\}$]

46. $\dfrac{sin^2(x+y)-sin^2(x-y)}{sin(x)\cdot sin(y)}=4\cdot cos(x)\cdot cos(y)$ [Sì; $x, y \notin \{0, \pi\}$]

47. $\dfrac{cos^2(x+y)+cos^2(x-y)}{sin^2(x)\cdot cos^2(y)}=2\cdot\left[cot^2(x)+tan^2(y)\right]$ [Sì; $x \notin \{0; \pi\}$, $y \notin \{\pi/2; 3\pi/2\}$]

48. a) $\dfrac{sin^2(x+y)+sin^2(x-y)}{sin^2(x)\cdot sin^2(y)}=2\cdot\left[cot^2(x)-cot^2(y)\right]$; b) $\dfrac{sin(x+y)-sin(x-y)}{cos(x+y)+cos(x-y)}=-tan(y)$ [a) No; b) No]

49. $\dfrac{1+tan(x)}{1-tan(x)}=\dfrac{sin(x+45°)}{sin(45°-x)}$ [Sì; $x \notin \{45°, 90°, 135°, 225°, 270°\}$]

50. $\dfrac{sin(x+y)+sin(x-y)}{cos(x+y)-cos(x-y)}=-cot(y)$ [Sì; $x \neq 0 \wedge y \notin \{0, \pi\}$]

51. $\left[sin(x+30°)-sin(x-30°)\right]\cdot tan(x+45°)=\dfrac{cos(x)\cdot\left[sin(x)+cos(x)\right]}{cos(x)-sin(x)}$ [Sì; $x \notin \{45°, 225°\}$]

52. a) $\dfrac{tan(x+30°)}{tan(x-30°)}\cdot\dfrac{tan(x-60°)}{tan(x+60°)}=-1$; b) $\dfrac{sin(x+45°)}{cos(x-45°)}\cdot\dfrac{cos(x+45°)}{sin(x-45°)}=-1$

[a) No; b) Sì; $x \notin \{45°, 135°, 225°, 315°\}$]

53. $\dfrac{sin(x+60°)}{cos(x-30°)}\cdot\dfrac{sin(x-60°)}{cos(x+30°)}=-1$ [Sì; $x \notin \{60°, 120°, 240°, 300°\}$]

Lavoriamo insieme

Risolvere l'equazione: $sin(x-5°)-sin(x+5°)+3cos(x)=0$, $x \in [254°; 501°]$.
Applichiamo le formule di addizione e di sottrazione del seno: $sin(x)\cdot cos(5°)-sin(5°)\cdot cos(x)-sin(x)\cdot cos(5°)-sin(5°)\cdot cos(x)+3cos(x)=0 \Rightarrow -2sin(5°)\cdot cos(x)+3cos(x)=0 \Rightarrow -cos(x)\cdot[2sin(5°)-3]=0 \Rightarrow cos(x)=0$. Le soluzioni comprese nell'intervallo indicato sono: $x = 270° \vee x = 450°$.

Risolvere le equazioni seguenti negli intervalli indicati

Livello 1

54. $sin(x+y)-sin(x-y)=0$, $x, y \in [-150°; 400°]$ [$x = -90° \vee 90° \vee 270°$; $y = 0° \vee 180° \vee 360°$]
55. $cos(x-y)+cos(x+y)=0$, $x, y \in [-300°; 300°]$ [$x, y = -270° \vee -90° \vee 90° \vee 270°$]
56. $sin(x+30°)-cos(x)=0$, $x \in [-100°; 431°]$ [$30° \vee 210° \vee 390°$]
57. $sin(x+45°)-cos(x-45°)=0$, $x \in [-210°; 410°]$ [Identità]
58. $sin(x)+cos(x-60°)=0$, $x \in [-250°; 317°]$ [$-195° \vee -15° \vee 165°$]
59. $sin(x+45°)-cos(x-60°)=0$, $x \in [0°; 360°]$ [$52°30' \vee 232°30'$]
60. $cos(x+\pi/6)+2cos(x)-3sin(x)=0$, $x \in [-2; 4]$ [$\approx 0{,}69 \vee \approx 3{,}83$]
61. $sin(x-\pi/3)+sin(x)-cos(x)=0$, $x \in [-2; 4]$ [$\approx 0{,}89$]
62. $sin(x+1)-sin(x-1)+5cos(x)=0$, $x \in [2; 5]$ [$3\pi/2$]
63. $cos(x+2)-cos(x-2)-sin^2(x)=0$, $x \in [-1; 5]$ [$0 \vee \pi$]

Livello 2

64. $sin(x+y)-sin(x-y)-3cos(x)=0$, $x \in [125°; 348°]$ [270°]
65. $cos(x+y)-cos(x-y)+4sin(x)=0$, $x \in [247°; 415°]$ [360°]
66. $sin(x+y)-sin(x-y)+5cos(x)=0$, $x \in [27°; 218°]$ [90°]
67. $cos(x+30°)-cos(x-30°)+3sin(x)=1$, $x \in [25°; 541°]$ [$30° \vee 150° \vee 390° \vee 510°$]
68. $cos(x+\pi/4)-cos(x-\pi/4)-1=0$, $x \in [-2; 5]$ [$-\pi/4 \vee 5\pi/4$]
69. $sin(x+\pi/3)-sin(x)+cos(x-\pi/6)=0$, $x \in [-2; 3]$ [$x \approx -0{,}96 \vee \approx 0{,}96$]
70. $cos(x+\pi/3)-1/2cos(x)+sin(x)-0{,}1=0$, $x \in [-3; 1]$ [$\approx 0{,}84$]
71. $sin(x+\pi/3)-0{,}5sin(x)-3cos(x)+0{,}51=0$, $x \in [1; 4]$ [$\approx 1{,}33$]

72. $tan(x + \pi/4) - tan(x - \pi/4) - 1 = 0$, $x \in [1; 4]$ [$\varnothing$]

73. $tan(x + \pi/6) - tan(x - \pi/3) + 5 = 0$, $x \in [-3; 3]$ [$\approx -1,89 \vee \approx -0,73 \vee \approx 1,25 \vee \approx 2,41$]

Lavoriamo insieme

Risolvere la disequazione $sin(x + 30°) - cos(x - 30°) > 0$, $x \in [0°; 360°]$.

Sviluppiamo: $sin(x)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+cos(x)\cdot\frac{1}{2}-cos(x)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-sin(x)\cdot\frac{1}{2}>0 \Rightarrow \left(\sqrt{3}-1\right)\cdot sin(x)+\left(1-\sqrt{3}\right)\cdot cos(x)>0$

$\Rightarrow sin(x) - cos(x) > 0$. Abbiamo ottenuto una disequazione omogenea di I grado in seno e coseno. Per risolverla consideriamo i seguenti due sistemi: $\begin{cases} tan(x)-1>0 \\ cos(x)>0 \end{cases} \vee \begin{cases} tan(x)-1<0 \\ cos(x)<0 \end{cases}$, che risolviamoli in [0°, 360°].

$\begin{cases} 45°<x<90° \vee 225°<x<270° \\ 0<x<90° \vee 270°<x<360° \end{cases} \vee \begin{cases} 0° \le x<45° \vee 90°<x<225° \vee 270°<x \le 360° \\ 90°<x<270° \end{cases} \Rightarrow 45° < x < 225°,\ x \neq 90°.$

Come si vede la soluzione non è stata controllata per $x = 90°$, poiché in tale valore il coseno si annulla e quindi non possiamo applicare il procedimento. Quindi dobbiamo verificare cosa accade per tale valore: $sin(90° + 30°) - cos(90° - 30°) = sin(120°) - cos(60°) > 0$. Perciò anche $x = 90°$ è soluzione. Pertanto la soluzione è: $45° < x < 225°$.

Risolvere le seguenti disequazioni nella circonferenza goniometrica

Livello 2

74. $sin(x + 45°) - sin(x - 30°) > 0$ [$0° \le x < 82°30' \vee 262°30' < x \le 360°$]

75. $cos(x - 45°) + cos(x + 60°) \le 0$ [$172°30' \le x \le 352°30'$]

76. $sin(x + 45°) + sin(x)$ [$0° \le x \le 157°30' \vee 337°30' \le x \le 360°$]

77. $2cos(x + 30°) + cos(x) \ge 0$ [$0° \le x \le \alpha \vee 180° + \alpha \le x \le 360°;\ \alpha \approx 69°53'46''$]

78. $tan(x - 45°) + tan(x + 45°) > 0$ [$0° < x < 45° \vee 90° < x < 135° \vee 180° < x < 225° \vee 270° < x < 315°$]

79. $tan(x + \pi/4) - tan(x - \pi/4) > 0$ [$\pi/4 < x < 3\pi/4 \vee 5\pi/4 < x < 7\pi/4$]

80. $tan(x - \pi/4) + tan(x) < 0$ [$0 \le x < \pi/8 \vee 3\pi/4 < x < 9\pi/8 \vee 7\pi/4 < x \le 2\pi$]

81. $tan(x + \pi/4) - tan(x) \ge 0$ [$0 \le x < \pi/4 \vee \pi/2 < x < 5\pi/4 \vee 3\pi/2 < x \le 2\pi$]

82. $sin(x + 2) - sin(x - 2) - 3sin(x) < 0$ [$0 \le x < \alpha \vee \pi + \alpha < x \le 2\pi;\ \alpha \approx 0,54$]

83. $cos(x + 3) + cos(x - 3) + cos(x) < 0$ [$\pi < x < 2\pi$]

Lavoriamo insieme

Verificare che in un triangolo qualsiasi la seguente $\frac{b^2}{c^2}=\frac{cot(\alpha)+cot(\gamma)}{cot(\alpha)+cot(\beta)}$ *è un'identità*

Lavoriamo sul secondo membro:

$$\frac{cot(\alpha)+cot(\gamma)}{cot(\alpha)+cot(\beta)}=\frac{\frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)}+\frac{cos(\gamma)}{sin(\gamma)}}{\frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)}+\frac{cos(\beta)}{sin(\beta)}}=\frac{\frac{cos(\alpha)\cdot sin(\gamma)+cos(\gamma)\cdot sin(\alpha)}{\cancel{sin(\alpha)}\cdot sin(\gamma)}}{\frac{cos(\alpha)\cdot sin(\beta)+cos(\beta)\cdot sin(\alpha)}{\cancel{sin(\alpha)}\cdot sin(\beta)}}=\frac{sin(\alpha+\gamma)}{sin(\gamma)}\cdot\frac{sin(\beta)}{sin(\alpha+\beta)}$$

Siamo in un triangolo, quindi: $\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 180° - \gamma \Rightarrow sin(\alpha + \beta) = sin(180° - \gamma) = sin(\gamma)$;

analogamente: $sin(\alpha + \gamma) = sin(\beta)$. Quindi la precedente espressione diviene: $\frac{sin(\beta)}{sin(\gamma)}\cdot\frac{sin(\beta)}{sin(\gamma)}=\left[\frac{sin(\beta)}{sin(\gamma)}\right]^2$

Applicando il teorema dei seni abbiamo: $\frac{b}{sin(\beta)}=\frac{c}{sin(\gamma)}\Rightarrow\frac{b}{c}=\frac{sin(\beta)}{sin(\gamma)}$. Quindi l'uguaglianza è effettivamente un'identità.

Livello 2

84. Come diventa l'identità svolta nel box *Lavoriamo insieme* in un triangolo rettangolo di ipotenusa a? $\left[\frac{b^2}{c^2}=\frac{cot(\gamma)}{cot(\beta)}=\frac{tan(\beta)}{tan(\gamma)}\right]$

Verificare la validità delle seguenti identità in un triangolo qualsiasi

85. a) $sin(\alpha) = sin(\beta) \cdot cos(\gamma) + sin(\gamma) \cdot cos(\beta)$; b) $cos(\alpha) = sin(\beta) \cdot sin(\gamma) - cos(\beta) \cdot cos(\gamma)$
86. $cos^2(\alpha) + cos^2(\beta) + cos^2(\gamma) + 2cos(\alpha) \cdot cos(\beta) \cdot cos(\gamma) = 1$
87. $sin(\alpha) \cdot cos(\beta) \cdot cos(\gamma) - sin(\alpha) \cdot sin(\beta) \cdot sin(\gamma) + cos(\alpha) \cdot sin(\beta) \cdot cos(\gamma) + cos(\alpha) \cdot cos(\beta) \cdot sin(\gamma) = 0$
88. a) $cos(\gamma) \cdot sin(\alpha + \beta) + sin(\gamma) \cdot cos(\alpha + \beta) = 0$; b) $\frac{sin^2(\alpha)}{sin(\beta-\gamma)}=\frac{a^2}{b^2-c^2}$

Livello 3

89. a) $tan(\alpha) + tan(\beta) + tan(\gamma) = tan(\alpha)\cdot tan(\beta)\cdot tan(\gamma)$; b) $csc(\alpha-\beta)\cdot[a\cdot cos(\beta)-b\cdot cos(\alpha)]=\frac{a}{sin(\alpha)}$
90. a) $tan(\beta)=\frac{b\cdot sin(\alpha)}{c-b\cdot cos(\alpha)}$; b) $\frac{b+c}{b-c}=\frac{sin(\beta)+sin(\gamma)}{sin(\beta)-sin(\gamma)}$; c) $\frac{1+cos(\alpha-\beta)\cdot cos(\gamma)}{1+cos(\alpha-\gamma)\cdot cos(\beta)}=\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}$
91. $a \cdot [cos(\alpha) + cos(\beta) \cdot cos(\beta) \cdot cos(\gamma)] = 2R \cdot sin(\alpha) \cdot sin(\beta) \cdot sin(\gamma)$. Dove R è il raggio della circonferenza circoscritta
92. Come diventa la precedente identità in un triangolo rettangolo di ipotenusa a? [$a = 2R$]

Lavoriamo insieme

Verificare che in un triangolo qualsiasi, in cui R è il raggio della circonferenza circoscritta, l'uguaglianza $1+cos(\alpha-\beta)\cdot cos(\gamma)=\frac{a^2+b^2}{4\cdot R^2}$ *è un'identità.*

Lavoriamo sul primo membro: $1 + cos(\alpha - \beta) \cdot cos(\gamma) = 1 + [cos(\alpha) \cdot cos(\beta) + sin(\alpha) \cdot sin(\beta)] \cdot cos(\gamma) = 1 + [cos(\alpha) \cdot cos(\beta) - sin(\alpha) \cdot sin(\beta) + 2sin(\alpha) \cdot sin(\beta)] \cdot cos(\gamma) = 1 + [cos(\alpha + \beta) + 2sin(\alpha) \cdot sin(\beta)]\cdot cos(\gamma)$ (1). Dato che siamo in un triangolo si ha: $\alpha + \beta = 180° - \gamma \Rightarrow cos(\alpha + \beta) = cos(180°- \gamma) = -cos(\gamma)$. Quindi la (1) diviene: $1 + [-cos(\gamma) + 2sin(\alpha) \cdot \cdot sin(\beta)] \cdot cos(\gamma) = 1 - cos^2(\gamma) + 2sin(\alpha) \cdot sin(\beta) \cdot cos(\gamma) \cdot cos(\gamma) = sin^2(\gamma) + 2sin(\alpha) \cdot sin(\beta) \cdot cos(\gamma) \cdot cos(\gamma)$ (2). Ora per il teorema della corda si ha: $c = 2R \cdot sin(\gamma)$ da cui si ha: $sin(\gamma)=\frac{c}{2R}$. Perciò la (2) diventa: $\frac{c^2}{4\cdot R^2}+2\cdot\frac{a}{2R}\cdot\frac{b}{2\cdot R}\cdot cos(\gamma)=\frac{c^2+2\cdot a\cdot b\cdot cos(\gamma)}{4\cdot R^2}$. Applichiamo il teorema di Carnot al numeratore: $\frac{c^2+2\cdot a\cdot b\cdot cos(\gamma)}{4\cdot R^2}=\frac{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot cos(\gamma)+2\cdot a\cdot b\cdot cos(\gamma)}{4\cdot R^2}=\frac{a^2+b^2}{4\cdot R^2}$.
Abbiamo verificato l'identità.

Livello 3

93. Tenendo conto dell'esercizio svolto nel box Lavoriamo insieme semplificare $\frac{1+cos(\alpha-\beta)\cdot cos(\gamma)}{1+cos(\alpha-\gamma)\cdot cos(\beta)}$. $\left[\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}\right]$
94. Come diventa l'identità verificata nel box Lavoriamo insieme in un triangolo rettangolo di ipotenusa c? $\left[\frac{c^2}{4\cdot R^2}=1\right]$
95. Tenuto conto dell'esercizio precedente ricavare una relazione fra la misura dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo e quella del raggio della circonferenza circoscritta. [L'ipotenusa è diametro della circonferenza circoscritta]

Lavoriamo insieme

In un triangolo si ha: $sin(\alpha + \beta) = 1/3$, $cos(\beta + \gamma) = -1/3$, $a = 3$, *determinare la misura del perimetro*.

Abbiamo già visto che in un triangolo si ha: $sin(\alpha + \beta) = sin(\gamma)$ e $cos(\beta + \gamma) = -cos(\alpha)$, perciò dobbiamo determinare il perimetro di un triangolo di cui conosciamo (possiamo ricavarli) due angoli e un lato. Ma non vogliamo calcolare un valore approssimato del perimetro, determinando $sin^{-1}(1/3)$, $cos^{-1}(1/3)$, bensì un valore esatto. Allora cominciamo a calcolare $sin(\alpha) = \sqrt{1 - cos^2(\alpha)} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3}$. Applichiamo il teorema dei seni: $\frac{a}{sin(\alpha)} = \frac{c}{sin(\gamma)} \Rightarrow c = \frac{a\cdot sin(\gamma)}{sin(\alpha)} = 3\cdot\frac{\frac{1}{\cancel{3}}}{\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\cancel{3}}} = \frac{3}{2\cdot\sqrt{2}} = \frac{3\cdot\sqrt{2}}{4}$. Per calcolare il lato rimanente con il teorema dei seni ci serve *sin* $sin(\alpha + \gamma)$ e per fare ciò ci serve calcolare $cos(\gamma) = \pm\sqrt{1 - sin^2(\gamma)} = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\frac{2\cdot\sqrt{2}}{3}$. Quale segno dobbiamo scegliere? Dipende se γ è acuto o ottuso. Nel primo caso $sin(\beta) = sin(a+\gamma) = sin(\alpha)\cdot cos(\gamma) + sin(\gamma)\cdot cos(\alpha) = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2\cdot\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = 1$ cioè il triangolo è rettangolo. Quindi: $b = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3\cdot\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{\cancel{18}^{9}}{\cancel{16}^{8}}} = \sqrt{\frac{81}{8}} = \frac{9}{2\cdot\sqrt{2}} = \frac{9\cdot\sqrt{2}}{4}$ e il perimetro misura $3 + 3\cdot\sqrt{2}$. Adesso vediamo se è possibile che sia $cos(\gamma) = -\sqrt{1 - sin^2(\gamma)} = \frac{-2\cdot\sqrt{2}}{3} \Rightarrow$ $sin(\beta) = 8/9 - 1/9 = 7/9$. In questo caso il triangolo non è rettangolo ma ottusangolo, di angolo ottuso γ. Si ha: $\frac{a}{sin(\alpha)} = \frac{b}{sin(\beta)} \Rightarrow b = \frac{a\cdot sin(\beta)}{sin(\alpha)} = \cancel{3}\cdot\frac{\frac{7}{\cancel{9}}}{\frac{2\cdot\sqrt{2}}{\cancel{3}}} = \frac{7}{2\cdot\sqrt{2}} = \frac{7\cdot\sqrt{2}}{4}$. E il perimetro: $3 + \frac{5\cdot\sqrt{2}}{2}$. Quindi abbiamo effettivamente due soluzioni.

Livello 2

Determinare la misura del perimetro dei seguenti triangoli con i dati accanto

96. $sin(\alpha + \beta) = 1/2$, $cos(\beta + \gamma) = -1/4$, $a = 5$ $\left[5 + \frac{3630515\cdot\sqrt{15}}{1860498}\right]$

97. $sin(\alpha + \gamma) = 1/5$, $cos(\alpha + \beta) = 1/8$, $b = 5$ $\left[\frac{30\cdot\sqrt{42} + 75\cdot\sqrt{7} + 35}{8}\right]$

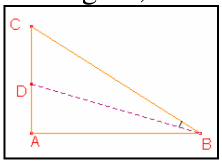
98. a) $cos(\alpha + \beta) = -2/3$, $a = 4$, $b = 3$; b) $sin(\alpha + \gamma) = 0{,}87$, $a = 3{,}64$, $c = 5{,}96$ [a) 10; b) ≈ 14,83]

99. Nel triangolo AXB, AB è lungo 4,07, $B\hat{A}X = 45°$, determinare la misura di $A\hat{X}B$ se $\overline{XA} = 5{,}26$. [≈ 50°23′7″]

100. Con riferimento al precedente quesito, prolunghiamo AB dalla parte di B in modo da ottenere il segmento BC uguale ad AB. Determinare $A\hat{X}B$ in modo che a) $\overline{XC} = 4{,}62$ b) $\overline{XC} = 6{,}11$. [a) Impossibile; b) ≈ 30°17′7″ ∨ ≈ 73°56′58″]

101. (Dal Progetto Matematica & realtà dell'Università di Perugia) La statua della libertà è alta 92 *m* compreso il piedistallo di 46 *m*. Descrivere come varia l'angolo di visuale in funzione della distanza dalla

statua. Determinare qual è l'angolo di visuale corrispondente a 70 *m*. In figura, *AD* è il piedistallo, *CD* la statua, *AB* la distanza e l'angolo segnato è quello da determinare.



$\left[tan^{-1}\left(\frac{46\cdot\overline{AB}}{\overline{AB}^2+46\cdot 92}\right);\approx 19°25'23''\right]$

102. Con riferimento al problema precedente, se $\overline{AD}=\overline{CD}=46\,m$, determinare $\overline{AB}$ se l'angolo di visuale è circa 18°. [≈ 42,88 *m* ∨ ≈ 98,69 *m*]

103. Con riferimento al problema della statua, se $\overline{AD}=\overline{CD},\overline{AB}=70\,m$, determinare $\overline{AD}$, se l'angolo di visuale è circa 15°. [≈ 22,70 *m* ∨ ≈ 107,92 *m*]

104. Con riferimento al problema della statua, se $\overline{AB}=70\,m,\overline{CD}=46\,m$, determinare $\overline{AD}$ se l'angolo di visuale è circa 23°. [≈ 33,70*m*]

105. Un aereo si avvicina a una velocità di circa 900 *Km/h*, a un'altezza di 5127 metri dal suolo. Se l'angolo che l'ipotetica linea che congiunge la punta dell'aereo con un punto fissato sul suolo davanti l'aereo è di 17°14′33″, dopo un minuto di quanto è aumentata la di misura tale angolo? [≈ 56°15′5″]

106. In un cerchio di raggio che misura 3, tracciare una corda *AB* uguale al lato del quadrato inscritto nella circonferenza. Considerare poi un punto *C* appartenente al maggiore dei due archi *AB*. Determinare la misura di $C\hat{A}B$ in modo che la somma dei quadrati dei lati del triangolo *ABC* sia 50. [≈ 17°58′47″ ∨ 117°1′13″]

107. *ABC* è un triangolo equilatero di perimetro 6 cm, si tracci una semiretta per *A* che incontra i rimanenti lati, e siano *H* e *K* le proiezioni ortogonali di *B* e *C* su essa. Determinare i valori che deve assumere l'angolo $H\hat{A}B$, in modo che il rapporto fra le misure dei segmenti *BH* e *CK*, risulti compreso tra 0,25 e 2,41. [tra ≈ 10°53′36″ e ≈ 43°25′37″]

108. Un triangolo *LMN* è inscritto in una circonferenza di diametro lungo 6,17 *cm* e $\angle L\hat{M}N=60°$. Determina l'ampiezza di $M\hat{L}N$ in modo che sia $\overline{LM}^2-\overline{MN}^2=3$. [≈ 57°25′53″]

Livello **3**

109. Con riferimento al problema della statua della libertà, lasciando inalterati tutti i dati tranne l'altezza della statua, che è sempre uguale al piedistallo, per quali angoli di visuale α il problema ha soluzione? [0° < α < 19°28′16″]

Formule di duplicazione e bisezione

Lavoriamo insieme

Sapendo che sin(α) = 2/3, α ∈ [90°; 180°], *determinare cos*(2α) e *tan*(α/2), *senza approssimazioni*.
Ci serviamo delle formule di duplicazione e di quelle di bisezione. Nel primo caso abbiamo: *cos*(2α) = 1 – 2*sin*^{2}(α) = 1 – 2 · 4/9 = 1 – 8/9 = 1/9. Nel secondo caso dobbiamo premettere un altro calcolo: $cos(\alpha)=-\sqrt{1-sin^2(\alpha)}=-\sqrt{1-\frac{4}{9}}=-\sqrt{\frac{5}{9}}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$; la scelta del segno dipende dal fatto che l'angolo si trova nel secondo quadrante, dove il coseno è appunto negativo. Adesso abbiamo:

$$tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-cos(\alpha)}{1+cos(\alpha)}}=\sqrt{\frac{1-\frac{-\sqrt{5}}{3}}{1+\frac{-\sqrt{5}}{3}}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)^2}{9-5}}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Determinare quanto richiesto sulla base dei dati noti, usando le formule di duplicazione o bisezione

Livello **1**

110. $sin(\alpha) = 2/7$, $cos(\beta) = -7/9$, $\alpha \in [90°; 180°]$, $\beta \in [180°; 270°]$; $cos(2\alpha) = ?$, $cot(2\beta) = ?$ $\left[\frac{41}{49}; \frac{17\cdot\sqrt{2}}{112}\right]$

111. $sin(\alpha) = -3/5$, $cos(\beta) = 6/7$, $\alpha \in [\pi; 3\pi/2]$, $\beta \in [3\pi/2; 2\pi]$; $csc(2\alpha) = ?$, $sin(2\beta) = ?$ $\left[\frac{25}{24}; -\frac{12\cdot\sqrt{13}}{49}\right]$

112. $sin(\alpha) = 3/4$, $cos(\beta) = 8/9$, $\alpha \in [0; 90°]$, $\beta \in [270°; 360°]$; $sec(2\alpha) = ?$, $tan(2\beta) = ?$ $\left[-8; -\frac{16\cdot\sqrt{17}}{47}\right]$

113. $sin(\alpha) = -5/6$, $cos(\beta) = 7/9$, $\alpha \in [180°; 270°]$, $\beta \in [270°; 360°]$; $tan(2\alpha) = ?$, $cos(2\beta) = ?$ $\left[-\frac{5\cdot\sqrt{11}}{7}; \frac{17}{81}\right]$

114. $sin(\alpha) = 2/7$, $cos(\beta) = -5/8$, $\alpha \in [0; \pi/2]$, $\beta \in [\pi; 3\pi/2]$; $cot(2\alpha) = ?$, $cos(2\beta) = ?$ $\left[\frac{41\cdot\sqrt{5}}{60}; -\frac{7}{32}\right]$

115. $sin(\alpha) = 1/4$, $cos(\beta) = 3/5$, $\alpha \in [\pi/2; \pi]$, $\beta \in [0; \pi/2]$; $sin(2\alpha) = ?$, $tan(2\beta) = ?$ $\left[-\frac{\sqrt{15}}{8}; -\frac{24}{7}\right]$

116. $sin(\alpha) = 1/5$, $cos(\beta) = -2/3$, $\alpha \in [90°;180°]$, $\beta \in [180°;270°]$; $cos(\alpha/2)=?$, $cot(\beta/2) = ?$ $\left[\frac{\sqrt{30}-2\cdot\sqrt{5}}{10}; -\frac{\sqrt{5}}{5}\right]$

117. $sin(\alpha) = 2/5$, $cos(\beta) = 3/4$, $\alpha \in [90°; 180°]$, $\beta \in [270°; 360°]$; $csc(\alpha/2)=?$, $sin(\beta/2) = ?$ $\left[\frac{\sqrt{35}-\sqrt{15}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right]$

118. $sin(\alpha) = 1/3$, $cos(\beta) = 4/9$, $\alpha \in [0°; 90°]$, $\beta \in [270°; 360°]$; $sec(\alpha/2)=?$, $tan(\beta/2) = ?$ $\left[2\cdot\sqrt{3}-\sqrt{6}; -\frac{\sqrt{65}}{13}\right]$

119. $sin(\alpha) = -3/5$, $cos(\beta) = 5/8$, $\alpha \in [180°; 270°]$, $\beta \in [0°; 90°]$; $tan(\alpha/2)=?$, $cos(\beta/2) = ?$ $\left[-3; \frac{\sqrt{13}}{4}\right]$

120. $sin(\alpha) = 1/7$, $cos(\beta) = -8/9$, $\alpha \in [0; \pi/2]$, $\beta \in [\pi; 3\pi/2]$; $csc(\alpha/2)=?$, $cos(\beta/2) = ?$ $\left[\sqrt{42}+2\cdot\sqrt{14}; -\frac{\sqrt{2}}{6}\right]$

Lavoriamo insieme

Determinare la formula di triplicazione del seno.
$sin(3\alpha) = sin(2\alpha + \alpha) = sin(2\alpha)\ cos(\alpha) + sin(\alpha)\ cos(2\alpha) = 2sin(\alpha)cos(\alpha)cos(\alpha) + sin(\alpha)\ [2cos^2(\alpha) - 1] = 2sin(\alpha)cos^2(\alpha) + 2sin(\alpha)cos^2(\alpha) - sin(\alpha) = = 4sin(\alpha)cos^2(\alpha) - sin(\alpha) = sin(\alpha)[4cos^2(\alpha) - 1] = sin(\alpha)[4 - 4sin^2(\alpha) - 1] = 3sin(\alpha) - 4sin^3(\alpha)$.

Esprimere la prima funzione mediante la seconda funzione

Livello 2

121. a) $cos(13\alpha/2)$, $cos(13\alpha/4)$; b) $cos(13\alpha/2)$, $sin(13\alpha)$; c) $cos(3\alpha)$, $cos(\alpha)$; d) $cos(4\alpha)$, $cos(\alpha)$
[a) $2cos^2(13\alpha/4) - 1$; b) $1 - 2sin^2(13\alpha)$; c) $4cos^3(\alpha) - 3cos(\alpha)$; d) $8cos^4(\alpha) - 8cos^2(\alpha) + 1$]

122. a) $cos(4\alpha)$, $sin(\alpha)$; b) $cos(\alpha)$, $cos(\alpha/4)$; c) $sin(4\alpha)$, $sin(\alpha)$ e $cos(\alpha)$
[a) $8sin^4(\alpha) - 8sin^2(\alpha) + 1$; b) $8sin^4(\alpha/4) + 1$; c) $8sin(\alpha)\cdot cos^3(\alpha) - 4sin(\alpha)\cdot cos(\alpha)$]

Livello 3

123. a) $sin(2x)\cdot cos(x) + sin(3x)$, $sin(x)$; b) $cos(2x)\cdot cos(x) - cos(3x)$, $cos(x)$; c) $sin(2x)\cdot sin(x) - cos(3x)$, $cos(x)$
[a) $5sin(x) - 6sin^3(x)$; b) $2cos(x) - 2cos^3(x)$; c) $5cos(x) - 6cos^3(x)$]

124. a) $sin(4x)\cdot cos(x) - sin(3x)$, $sin(x)$; b) $cos(4x) - sin(3x)$, $sin(x)$
[a) $8sin^5(x) - 8sin^3(x) + sin(x)$; b) $8sin^4(x) + 4sin^3(x) - 8sin^2(x) - 3sin(x) + 1$]

125. Senza usare la calcolatrice semplificare: $cos(36°) - cos(72°)$ [1/2]

Lavoriamo insieme

Verificare se $\frac{sin^2(\alpha)}{tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}-1=cos(\alpha)\cdot[2+cos(\alpha)]$ *è un'identità nel suo insieme di definizione, ossia per quegli angoli per cui si ha:* $\begin{cases}\frac{\alpha}{2}\neq\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi\\ tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha\neq\pi+2k\cdot\pi\\ \frac{\alpha}{2}\neq k\cdot\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha\neq\pi+2k\cdot\pi\\ \alpha\neq 2k\cdot\pi\end{cases}\Rightarrow\alpha\neq k\cdot\pi$.

Lavoriamo sul primo membro: $\frac{sin^2(\alpha)}{\frac{1-cos(\alpha)}{1+cos(\alpha)}}-1=\frac{1-cos^2(\alpha)}{\frac{1-cos(\alpha)}{1+cos(\alpha)}}-1=\frac{\left[\cancel{1-cos(\alpha)}\right]\cdot\left[1+cos(\alpha)\right]}{\frac{\cancel{1-cos(\alpha)}}{1+cos(\alpha)}}-1=[1+cos(\alpha)]^2$ $-1=1+2\cdot cos(\alpha)+cos^2(\alpha)-1=cos(\alpha)\cdot[2+cos(\alpha)]$. L'identità è stata verificata.

Verificare la validità delle seguenti identità, e determinare l'insieme di definizione, con gli angoli misurati in radianti

Livello 1

126. $sec(x)=\frac{1}{2}\cdot\left[tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]$ $\left[x\neq\pm\frac{(4k+1)\cdot\pi}{2}\wedge x\neq\left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot\pi\right]$

127. $tan(x)=\frac{1}{2}\cdot\left[tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]$ $\left[x\neq\pm\frac{(4k+1)\cdot\pi}{2}\wedge x\neq\left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot\pi\right]$

128. a) $tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-tan(\alpha)}{1+tan(\alpha)}$; b) $\frac{sin^2(\alpha)}{cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}+cos(\alpha)=2-cos(\alpha)$

$\left[\alpha\neq\frac{(4k+1)\cdot\pi}{4}\wedge\alpha\neq\left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot\pi;\alpha\neq(2k+1)\cdot\pi\right]$

129. a) $\frac{sin^2(\alpha)}{cot^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}+\frac{sin(2\alpha)}{sin(\alpha)}=2-sin^2(\alpha)$; b) $\frac{sin^2(\alpha)}{sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}+cos(\alpha)=2+3\cdot cos(\alpha)$ [a) $\alpha\neq k\pi$; b) $\alpha\neq 2k\pi$]

130. $\frac{cos(2\alpha)}{cos(\alpha)-sin(\alpha)}-cos(\alpha)-sin(2\alpha)=sin(\alpha)\cdot\left[1-2\cdot cos(\alpha)\right]$ $\left[\alpha\neq\left(k+\frac{1}{4}\right)\pi\right]$

Livello 2

131. a) $1-4sin^2(\alpha)\cdot cos^2(\alpha)=cos^2(2\alpha)$; b) $sec(\gamma)=1+tan(\gamma/2)\cdot tan(\gamma)$ [$\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\gamma\notin\{(2k+1)\pi;(k+1/2)\pi\}$]

132. a) $sin^2(\gamma)=\left[\frac{sin(2\gamma)}{2}\right]^2+\left[\frac{1-sin(90°-2\gamma)}{2}\right]^2$; b) $1-sin(2\alpha)=2sin(45°-\alpha)\cdot cos(45°+\alpha)$

[a) $\forall\gamma\in\mathbb{R}$; b) $\forall\alpha\in\mathbb{R}$]

133. a) $cot(2x)+tan(x)=csc(2x)$; b) $tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1-cos(\alpha)}{sin(\alpha)}$ [a) $x\neq k\pi/2$, $\gamma\neq(k+1/2)\pi$; b) $\alpha\neq k\pi$]

134. a) $tan(\alpha)=\frac{2}{cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)-tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$; b) $tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{sin(\alpha)}{1+cos(\alpha)}$

$\left[\text{a) }\alpha\neq\frac{(4k+1)\cdot\pi}{2}\wedge\alpha\neq k\cdot\pi;\text{b) }\alpha\neq(2k+1)\cdot\pi\right]$

135. a) $cos(\beta)=\dfrac{cot\left(\dfrac{\beta}{2}\right)-tan\left(\dfrac{\beta}{2}\right)}{cot\left(\dfrac{\beta}{2}\right)+tan\left(\dfrac{\beta}{2}\right)}$; b) $tan\left(\dfrac{\beta}{2}\right)=\dfrac{1-cos(\beta)}{sin(\beta)}$

$$\left[\text{a) } \beta \neq \frac{(4k+3)\cdot\pi}{2} \wedge \beta \neq k\cdot\pi; \text{b) } \beta \neq k\cdot\pi\right]$$

Lavoriamo insieme

Risolvere la seguente equazione: $cos(2x) + 7sin(x) + 4 = 0$, $x \in [-307°; 252°]$.
Applichiamo la formula di duplicazione del coseno, espressa solo in termini del seno: $1 - 2sin^2(x) + 7sin(x) + 4 = 0 \Rightarrow 2sin^2(x) - 7sin(x) - 5 = 0 \Rightarrow sin(x)=\dfrac{7\pm\sqrt{49+40}}{4}=\dfrac{7\pm\sqrt{89}}{4}$. Da cui le due equazioni elementari: $sin(x)=\dfrac{7+\sqrt{89}}{4}>1 \vee sin(x)=\dfrac{7-\sqrt{89}}{4}\approx -0,61$. La prima è priva di soluzioni. Per la seconda invece si ha: $x \approx -37°28'51'' + k360° \vee x \approx 217°28'51'' + k360°$. Determiniamo le soluzioni accettabili:

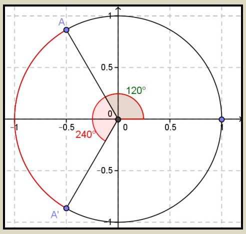
$x_1 \approx -37°28'51''$; $x_2 \approx 217°28'51''$; $x_3 \approx -142°31'19''$

Risolvere le seguenti equazioni negli intervalli indicati
Livello 2

136. a) $cos(2x) - 3sin(x) + 4 = 0$; $x\in[207°; 426°]$; b) $cos(2x) - 3cos(x) - 1 = 0$; $x\in[207°; 426°]$ [a) ∅; b) 240°]
137. $sin(2x) - 7sin^2(x) + 1 = 0$; $x\in[374°; 536°]$ [≈ 242°34′4″]
138. $sin(2x) + 3cos^2(x) - 2 = 0$; $x\in[57°; 327°]$ [≈ 107°35′17″ ∨ ≈ 319°47′32″]
139. $sin(2x) - 5sin^2(x) + 3 = 0$; $x\in[102°; 425°]$ [≈ 122°30′11″ ∨ ≈ 281°5′59″]
140. $cos(2x) - 7sin(x) + 1 = 0$; $x\in[374°; 536°]$ [≈ 375°24′2″ ∨ ≈ 524°35′58″]
141. $cos^2(x) + cos^2(x//2) - 1 = 0$; $x\in[207°; 426°]$ [300° ∨ 420°]
142. a) $cos(2x)-3sin(x)+4 = 0$; $x\in[-120°; 135°]$; b) $sin^2(x/2)-5cos^2(x)- 2 = 0$; $x\in[178°; 502°]$ [a) 90°; b) ∅]
143. a) $cos(2x)-5sin^2(x)+ 3 = 0$; $x\in[1; 4]$; b) $cos(2x) - 3cos(x) + 1 = 0$; $x\in[2; 4]$ [a) (≈ 2,28 ∨ ≈ 3,99); b) ∅]
144. a) $cos(2x)+3cos^2(x)-2=0$; $x\in[1;3]$; b) $cos(2x)+7sin(x)+4=0$; $x\in[-3;0]$ [a) ≈2,46; b) (≈–2,49 ∨ ≈ –0,65)]

Lavoriamo insieme

Risolvere la disequazione: $cos(2x) - 3cos(x) - 1 > 0$, $x \in [0°; 360°]$.
Applichiamo la formula di duplicazione: $2cos^2(x) - 1 - 3cos(x) - 1 > 0 \Rightarrow 2cos^2(x) - 3cos(x) - 2 > 0$. Risolviamo prima l'equazione associata: $cos(x)=\dfrac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\dfrac{3\pm 5}{4}=\begin{cases}2\\-\dfrac{1}{2}\end{cases}$. Quindi, per la disequazione: $cos(x) > 0 \vee cos(x) < -1/2$. La prima non ha ovviamente soluzioni, mentre la seconda: $120° < x < 240°$, come si evince dalla figura seguente.



Risolvere le seguenti disequazioni nella circonferenza goniometrica
Livello 2

145. a) $cos(2x)- sin(x) - 1 < 0$; b) $2 sin(2x) - sin^2(x) + 3 > 0$ [a) (0<x<180°∨ 210°<x< 330°); b) (0≤x≤360°)]
146. $sin(2x) - 2sin^2(x) + 2 > 0$ [0 ≤ x < 90°∨ 135° < x < 270°∨ 315° < x ≤ 360°]
147. a) $sin(2x) + 2cos^2(x) - 2 \le 0$; b) $3cos^2(x) + sin^2(x/2) - 1 < 0$ [a) (45°≤x ≤ 180°∨ 225° ≤ x ≤ 360°); b) ∅]

148. $3cos(2x) - 2sin(x) + 1 \ge 0$ $\left[0 \le x \le sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \vee 180° - sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \le x \le 360°\right]$

149. $4cos(2x) - 5sin(x) + 1 < 0$ $\left[sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{185}-5}{16}\right) < x < \pi - sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{185}-5}{16}\right)\right]$

150. $cos^2(x/2) - cos^2(x) + 2 > 0$

$$\left[cos^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{41}}{4}\right) < x < 2\pi - cos^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{41}}{4}\right) \vee cos^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{41}}{4}\right) < x < 2\pi - cos^{-1}\left(\frac{1+\sqrt{41}}{4}\right)\right]$$

151. $cos(2x) + cos^2(x) \le 0$ $\left[cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) < x < 2\pi - cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \vee cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) < x < 2\pi - cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$

152. a) $cos(2x) + sin(x) > 0$; b) $sin(2x) - sin^2(x) + 3 \ge 0$

$$\left[\text{a) } (0 \le x \le 2\pi); \text{b) } \left(0 \le x < \frac{7\pi}{6} \wedge x \ne \frac{\pi}{2}\right) \vee \frac{11\pi}{6} < x \le 2\pi\right]$$

153. a) $sin(2x) - cos(2x) + 1 < 0$;b) $cos(2x) - 3sin(x) - 1 \le 0$ $\left[\text{a)}\left(\frac{3\pi}{4} < x < \pi \vee \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi\right); \text{b)}(0 \le x \le \pi)\right]$

Lavoriamo insieme

Vogliamo provare che nel triangolo di lati lunghi 4, 5 e 6 *unità l'angolo maggiore è doppio del minore.*
Indicando con a il lato minore e con c il maggiore e usando il teorema di Carnot possiamo scrivere: $cos(\gamma) = \frac{4^2+5^2-6^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{8}; cos(\alpha) = \frac{6^2+5^2-4^2}{2 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{3}{4}$. Del resto si ha anche la validità della seguente uguaglianza: $cos(2\alpha) = 2 \cdot cos^2(\alpha) - 1 = 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \cancel{2} \cdot \frac{9}{\cancel{16}^{8}} - 1 = \frac{1}{8} = cos(\gamma)$. Dato che gli angoli sono acuti, se i coseni sono uguali anche gli angoli lo sono, quindi $2\alpha = \gamma$.

Livello 2

154. Verificare che in un triangolo rettangolo di ipotenusa a si ha: $tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{\frac{a-c}{a+c}}$ e $tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{a-c}{b}$.

155. Verificare le formule precedenti per un triangolo rettangolo di angoli acuti 30° e 60°.

156. Verificare le formule precedenti per un triangolo rettangolo di angoli acuti 45° e 45°.

Verificare la validità delle seguenti identità in un triangolo qualsiasi

157. a) $a^2 = (b+c)^2 - 4bc \cdot cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$; b) $(a-b+c) \cdot (a+b-c) = 4bc \cdot sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

158. a) $tan\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right) = cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{c-b}{c+b}$; $a^2 = (b+c)^2 - 4bc \cdot cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

159. Semplificare la prima delle precedenti in un triangolo rettangolo di ipotenusa a. $\left[sin(\beta-\gamma) = \frac{b^2-c^2}{b^2+c^2}\right]$

Livello 3

160. $cos^2(\alpha) + cos^2(\beta) + cos^2(\gamma) + 2cos(\alpha) \cdot cos(\beta) \cdot cos(\gamma) = 1$

161. $1 + cos(2\alpha) + cos(2\beta) + cos(2\gamma) + 4cos(\alpha) \cdot cos(\beta) \cdot cos(\gamma) = 0$

162. a) $cos(2\alpha) + cos(2\beta) + cos(2\gamma) + 1 = 4cos(\alpha) \cdot cos(\beta) \cdot cos(\gamma)$;b) $cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cdot csc\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{a+b}{c}$

Lavoriamo insieme

Verificare se in un triangolo qualsiasi la seguente è un'identità $\dfrac{tan\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)}{tan\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}=\dfrac{a-b}{a+b}$.

Lavoriamo sul membro sinistro: $\dfrac{tan\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)}{tan\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}=\sqrt{\dfrac{\dfrac{1-cos(\alpha-\beta)}{1+cos(\alpha-\beta)}}{\dfrac{1-cos(\alpha+\beta)}{1+cos(\alpha+\beta)}}}=\sqrt{\dfrac{1-cos(\alpha-\beta)}{1+cos(\alpha-\beta)}\cdot\dfrac{1+cos(\alpha+\beta)}{1-cos(\alpha+\beta)}}=$

$$=\sqrt{\frac{1-cos(\alpha)\cdot cos(\beta)-sin(\alpha)\cdot sin(\beta)}{1+cos(\alpha)\cdot cos(\beta)+sin(\alpha)\cdot sin(\beta)}\cdot\frac{1+cos(\alpha)\cdot cos(\beta)-sin(\alpha)\cdot sin(\beta)}{1-cos(\alpha)\cdot cos(\beta)+sin(\alpha)\cdot sin(\beta)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{[1-sin(\alpha)\cdot sin(\beta)]^2-cos^2(\alpha)\cdot cos^2(\beta)}{[1+sin(\alpha)\cdot sin(\beta)]^2-cos^2(\alpha)\cdot cos^2(\beta)}}=\sqrt{\frac{[1-sin(\alpha)\cdot sin(\beta)]^2-[1-sin^2(\alpha)]\cdot[1-sin^2(\beta)]}{[1+sin(\alpha)\cdot sin(\beta)]^2-[1-sin^2(\alpha)]\cdot[1-sin^2(\beta)]}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\cancel{1}-2\cdot sin(\alpha)\cdot sin(\beta)+\cancel{sin^2(\alpha)\cdot sin^2(\beta)}-\cancel{1}+sin^2(\alpha)+sin^2(\beta)-\cancel{sin^2(\alpha)\cdot sin^2(\beta)}}{\cancel{1}+2\cdot sin(\alpha)\cdot sin(\beta)+\cancel{sin^2(\alpha)\cdot sin^2(\beta)}-\cancel{1}+sin^2(\alpha)+sin^2(\beta)-\cancel{sin^2(\alpha)\cdot sin^2(\beta)}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{sin^2(\alpha)+sin^2(\beta)-2\cdot sin(\alpha)\cdot sin(\beta)}{sin^2(\alpha)+sin^2(\beta)+2\cdot sin(\alpha)\cdot sin(\beta)}}=\sqrt{\frac{[sin(\alpha)-sin(\beta)]^2}{[sin(\alpha)+sin(\beta)]^2}}=\frac{|sin(\alpha)-sin(\beta)|}{sin(\alpha)+sin(\beta)}$$

Adesso teniamo conto del teorema della corda: $\dfrac{\left|\dfrac{a}{2R}-\dfrac{b}{2R}\right|}{\dfrac{a}{2R}+\dfrac{b}{2R}}=\dfrac{|a-b|}{a+b}$. In effetti l'identità sembrerebbe non essere valida, a causa della presenza del valore assoluto. Non è così perché se $a > b$ è anche $\alpha>\beta\Rightarrow\alpha-\beta>0\Rightarrow tan\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)>0$ e se $a < b$ è anche $\alpha<\beta\Rightarrow\alpha-\beta<0\Rightarrow tan\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)<0$. Quindi dobbiamo togliere il valore assoluto, perché quando $a < b$ il primo membro sarebbe negativo e il secondo positivo.

Verificare la validità delle seguenti identità in un triangolo qualsiasi, in cui A indica l'area, p il semiperimetro, r il raggio della circonferenza inscritta, R il raggio della circonferenza circoscritta

Livello 3

163. $A=p\cdot tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\cdot tan\left(\dfrac{\beta}{2}\right)\cdot tan\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)$ (Usare le formule di Briggs–Retico e la formula di Erone)

164. $r=(p-a)\cdot tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=(p-b)\cdot tan\left(\dfrac{\beta}{2}\right)=(p-c)\cdot tan\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)$

165. a) $r=4\cdot R\cdot sin\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\cdot sin\left(\dfrac{\beta}{2}\right)\cdot sin\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)$; b) $p\cdot A=a\cdot b\cdot c\cdot cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\cdot cos\left(\dfrac{\beta}{2}\right)\cdot cos\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)$

166. Tenuto conto che il raggio della circonferenza inscritta in un triangolo è dato dal rapporto fra l'area e il semiperimetro, usando la formula di Erone e le formule di Briggs, esprimere il raggio mediante il semiperimetro p, un lato a e l'angolo a esso opposto α.

Lavoriamo insieme

François Viète, nonostante fosse un avvocato diede importanti contributi alla matematica, specialmente per la notazione e la simbologia. Nel suo libro Ad logisticem speciosam notae priores (Prime note sulla logistica speciosa[1]*) del 1631, ha enunciato il seguente risultato. Se (B, D, A) è una terna pitagorica (cioè se (*B^2 +

[1] La logistica speciosa è il calcolo simbolico

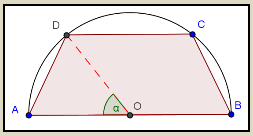
$D^2 = A^2$) anche la terna ($2BD$, $D^2 - B^2$, A^2), è pitagorica e inoltre quest'ultimo triangolo ha un angolo acuto doppio di un angolo acuto di quello di partenza. Verificare tale proposizione.
Cominciamo a provare che la terna è pitagorica. Abbiamo: $(2BD)^2 + (D^2 - B^2)^2 = 4B^2D^2 + D^4 - 2B^2D^2 + B^4 = D^4 + 2B^2D^2 + B^4 = (B^2 + D^2)^2$. Poiché sappiamo che $B^2 + D^2 = A^2$, abbiamo provato quanto richiesto. Adesso proviamo che gli angoli acuti del secondo triangolo sono doppi dei corrispondenti angoli acuti del primo. Siano $tan(\beta) = \frac{B}{D}, tan(\beta') = \frac{2 \cdot B \cdot D}{D^2 - B^2}$. Abbiamo: $tan(\beta') = \frac{2 \cdot \frac{B \cdot D}{D^2}}{\frac{D^2 - B^2}{D^2}} = \frac{2 \cdot \frac{B}{D}}{\left[1 - \left(\frac{B}{D}\right)^2\right]} = \frac{2 \cdot tan(\beta)}{\left[1 - tan(\beta)^2\right]} = tan(2\beta)$.

Livello 3

167. Applicare il risultato dell'esercizio svolto precedente alla terna (3, 4, 5), determinando l'altra terna e le misure degli angoli acuti dei due triangoli.
[(7, 24, 25); ≈ 16°15′37″, ≈ 73°44′23″; ≈ 36°52′12″, ≈ 53°7′48″]
168. Provare questo risultato di Viète: se (B, D, A) è una terna pitagorica e le quantità siano tutte positive, allora anche ($3BD^2 - B^3$, $D^3 - 3B^2D$, A^3) è pitagorica se quest'ultimo triangolo ha un angolo acuto opposto triplo di uno di quello di partenza. Bisogna usare la formula di triplicazione della tangente.
169. Applicare il risultato dell'esercizio precedente alla terna (5, 12, 13), determinando l'altra terna e le misure degli angoli acuti dei due triangoli.
[(828, 2035, 2197); ≈ 22°8′25″, ≈ 67°51′35″; ≈ 22°37′12″, ≈ 67°22′48″]
170. Vale anche quest'altra formula di Viète: se (B, D, A) è una terna pitagorica e le quantità siano tutte positive, allora anche ($4BD^3 - 4B^3D$, $D^4 - 6B^2D^2 + B^4$, A^4) è pitagorica, se quest'ultimo triangolo ha un angolo acuto opposto quadruplo di uno di quello di partenza.
171. Applicare la formula precedente alla terna (5, 12, 13), determinando l'altra terna e le misure degli angoli acuti dei due triangoli.[(354144,164833,390625), ≈24°57′33″, ≈65°2′27″; ≈16°15′37″,≈73°44′23]

Lavoriamo insieme

Un trapezio è inscritto in una semicirconferenza, con la base maggiore coincidente con il diametro. Dopo avere provato che il trapezio è isoscele, determinare la misura dell'area mediante il raggio della circonferenza e l'angolo segnato in figura.



Il trapezio deve essere isoscele perché i triangoli OAD e OCB sono ovviamente isosceli, quindi gli angoli $D\hat{A}O, C\hat{B}O$, sono uguali. L'area del trapezio si può trovare come somma delle aree dei tre triangoli in cui esso è diviso dai raggi OC e OD. Quindi si ha:

$$S_{ABCD} = S_{AOD} + S_{ODC} + S_{OCB} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot sin(\alpha) + \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot sin(\pi - 2\alpha) + \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot sin(\alpha) =$$

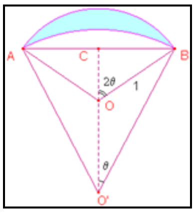
$$= \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \left[2 \cdot sin(\alpha) + sin(2\alpha)\right] = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \left[2 \cdot sin(\alpha) + 2 \cdot sin(\alpha) \cdot cos(\alpha)\right] = r^2 \cdot sin(\alpha)\left[1 + cos(\alpha)\right]$$

Risolvere i seguenti problemi in cui vi è da impostare e risolvere un'equazione in cui sono da applicarsi formule di duplicazione e/o bisezione

Livello 1

172. Con riferimento al problema risolto nel box lavoriamo insieme, determinare il perimetro del trapezio.
$\left[2r \cdot \left[1 + 2 \cdot sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + cos(\alpha)\right]\right]$
173. In un triangolo si ha: $cos(2\alpha) = 3/4$, $cos(2\beta) = 7/8$, $a = 10$. Determinare la misura di b. $\left[5 \cdot \sqrt{2}\right]$
174. In un triangolo si ha: $sin(\alpha + \beta) = 5/7$, $sin(2\gamma) = 11/15$. Determinare $cos(\gamma)$. [77/150]
175. In un triangolo si ha: $cos(\alpha + \beta) = -3/8$, $sin(2\gamma) = 8/13$. Determinare $sin(\gamma)$. [32/39]

176. In un triangolo si ha: $cos(\alpha + \gamma) = -7/9$, $b = 4$, $c = 3$. Determinare l'area. $\left[\frac{3\cdot\sqrt{15}}{4}\right]$



177. In figura l'area evidenziata, compresa fra i due settori circolari si chiama *lunula*. Determinare l'area di tale figura in funzione dell'angolo θ, sapendo che il minore dei due raggi è lungo 1 unità. $[2 \cdot (1 - 2\, cos^2(\theta) + sin(\theta) \cdot cos(\theta))]$

178. Trovare le lunghezze dei segmenti che le bisettrici del triangolo i cui lati sono lunghi 3, 5 e 7 unità, hanno in comune con il triangolo stesso. $\left[\frac{5\sqrt{21}}{4};\frac{3\sqrt{7}}{2};\frac{15}{8}\right]$

179. Calcolare l'area di un triangolo di lati lunghi 5, 7 e 9. $\left[\frac{21\sqrt{11}}{4}\right]$

180. Si consideri un punto *M* su un quarto di cerchio di raggio 1 *cm*, con centro *O* ed estremi *A* e *B*. Siano *P* e *Q* le proiezioni di *M* su *OA* e *OB*, determinare i valori che deve assumere l'angolo $M\hat{O}P$, in modo che il rettangolo *OPMQ* abbia area compresa tra 0,37 e 0,45. [Fra ≈ 23°51′57″ e ≈ 32°4′45″]

Livello 2

181. Di un triangolo *ABC* si sa che l'angolo di vertice *A* misura il doppio di quello di vertice *B* e che i lati *BC* e *AC* misurano rispettivamente 11,41 e 7,32. Determinare la misura del lato incognito e degli angoli. [≈ 10,47; ≈ 38°47′49″; ≈ 77°35′38″; ≈ 63°36′33″]

182. Un trapezio è inscritto in una semicirconferenza, con la base maggiore coincidente con il diametro. Dopo avere provato che il trapezio è isoscele, determinare la misura dell'area mediante il raggio della circonferenza e uno degli angoli adiacenti alla base. $[4r^3 sin^3(\alpha) \cdot cos(\alpha)]$

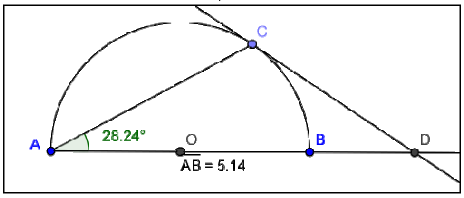
183. Data una circonferenza di diametro $\overline{AB} = 3{,}14\,cm$, si prendano su di essa da parte opposta di *AB*, due punti *C* e *D* tali che $\angle A\hat{B}C = 30°, \angle A\hat{B}D = x$, determinare per quale valore di *x* si ha: $\overline{CD}^2 = 9{,}49\,cm^2$. [≈ 78,65°]

184. In un triangolo isoscele si ha $a = b$. In che relazione sono $sin(\alpha)$ e $sin(\gamma)$? $[sin(2\alpha) = sin(\gamma)]$

185. Provare che se in un triangolo si ha $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$, allora si ha $\gamma = 2\alpha$.

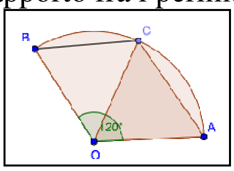
186. Sia *M* un punto su una semicirconferenza di centro *O* e diametro $\overline{AB} = 2$, determinare $\angle M\hat{A}B$ in modo che, tracciato il raggio *OP* parallelo ad *AM*, sia $\overline{AM} - \overline{MP}^2 = \frac{5}{4}$. [≈ 35°39′33″]

187. In figura *CD* è tangente alla semicirconferenza, determinare la misura di *AD*. [≈ 7,22]



188. Risolvere il problema precedente con dati generici: $\overline{AB} = 2r, \angle C\hat{A}B = \alpha$. $\left[\frac{2r\cdot cos^2(\alpha)}{cos(2\alpha)}\right]$

189. Dato un settore circolare in cui l'angolo al centro *AOB* è di 120°, determinare la misura di $A\hat{O}C$, con *C* un punto dell'arco *AB*, tale che il rapporto fra i perimetri dei triangoli *AOC* e *COB* sia 0,93.



[≈ 52°48′4″]

190. Sia M un punto su una semicirconferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 2$, determinare $\angle M\hat{A}B$ in modo che, tracciato il raggio OP parallelo ad AM, si abbia $\overline{AM} + 2 \cdot \overline{MP}^2 = 3$. [60°]
191. In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2$, condurre una corda AC, quindi la corda AD che biseca l'angolo $B\hat{A}C$. Determinare $\angle B\hat{A}C$ in modo che sia: $\overline{AC} + \overline{AD} = 3,75$. [$\approx 25°48'30''$]
192. Su una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2\,cm$, si scelga un punto C, sia AD la bisettrice dell'angolo $B\hat{A}C$. Determinare $\angle B\hat{A}C$ in modo che $2,75 < \overline{AC} + \overline{AD} < 3,68$. [Fra $\approx 29°15'31''$ e $\approx 59°32'17''$]
193. In un triangolo ABC l'angolo di vertice C è la metà di quello di vertice B; $\overline{BC} = 3$, BH e CK sono altezze. Determinare $\angle A\hat{C}B$ in modo che si abbia $\overline{BH}^2 + 3 \cdot \overline{CK} = 9$. [$\approx 26°33'54''$]

Livello 3

194. Un punto X appartiene a una circonferenza, AB è una corda lunga 3,72, della stessa circonferenza scelta in modo tale che sia $\angle B\hat{A}X = 45°$. Prolunghiamo AB dalla parte di B in modo da ottenere il segmento BC uguale ad AB. Determinare $\angle X\hat{A}B$ in modo che sia $\overline{XA}^2 = 0,34 \cdot \overline{XC}^2$. Un dato non è necessario, quale? [$\approx 73°51'47''$; $\overline{AB}$]
195. Nel triangolo ABC, $\overline{AB} = 3,62\,cm, \overline{BC} = 1,93\,cm$. Sapendo che $\angle A\hat{B}C = 2 \cdot \angle B\hat{A}C$, determinare le misure degli angoli. (Servono le formule di triplicazione) [$\approx 32°1'3''$]
196. Determinare l'angolo della base di un triangolo isoscele ottusangolo sapendo che il raggio del cerchio circoscritto è di 2,83 *cm*, e che la differenza fra il doppio della base e il triplo dell'altezza è di 4,35 *cm*. [$\approx 14°8'27''$ o $\approx 38°59'22''$]
197. Il trapezio rettangolo $ABCD$ ha retti gli angoli di vertici A e D; inoltre $\angle A\hat{C}B = 78°51'36''$. Determinare $\angle C\hat{A}B$, sapendo che la somma della base minore CD e dell'altezza AD ha con la base maggiore AB un rapporto di 1,16. [$\approx 8°39'45''$ o $\approx 47°28'39''$]
198. Se il precedente rapporto è k, per quali valori il problema ha soluzioni? [$\approx -0,12 \le k \le \approx 1,32$]
199. Provare che se in un triangolo si ha $a^2 = b \cdot (b + c)$, allora si ha: $\alpha = 2\beta$.
200. Se in un triangolo si ha $\gamma = 2\alpha$, determinare una relazione fra a, c e α. [$c = 2a \cdot cos(\alpha)$]
201. Spiegare perché non è possibile che in un triangolo si abbia: $sin(2\alpha) > 0$, $cos(\beta + \gamma) > 0$.
202. E' data una semicirconferenza il cui diametro AB misura $2r$, tracciare una corda AC in modo che, detto D l'estremo del raggio parallelo alla corda, si abbia $\overline{AC} + \overline{CD} = 2,2 \cdot r$. Si assuma come incognita la misura di $B\hat{A}C$. [$\approx 15°53'13''$ o $\approx 42°25'19''$]
203. Dato un triangolo equilatero ABC di lato a, determinare sul lato AC un punto M in modo che la somma dei quadrati delle sue distanze dai vertici A e B abbia rapporto 7/5 con il quadrato del lato del triangolo. Sia incognita la misura di $A\hat{M}B$. [$\approx 73°8'48''$]
204. Un cono è inscritto in una sfera di raggio R, determinare l'angolo formato dall'apotema del cono con il suo asse in modo tale che la superficie laterale del cono sia $3\pi R^2/2$. [$30° \vee \approx 40°38'47''$]

Leggi della rotazione

Lavoriamo insieme

Vogliamo trovare le leggi della rotazione attorno al punto (–1; 2) di 30°. Basta applicare le leggi stabilite dal Teorema 11: $\begin{cases} x' = -1 + x \cdot cos(30°) - y \cdot sin(30°) \\ x' = 2 + x \cdot sin(30°) + y \cdot cos(30°) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ x' = 2 + \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}$

Determinare i trasformati dei punti P rispetto alle rotazioni di centro C e angolo α indicati

Livello 2

205. a) $P \equiv (0; 0)$, $C \equiv (1; 1)$, $\alpha = 45°$; b) $P \equiv (1; 2)$, $C \equiv (0; 0)$, $\alpha = 45°$ $\left[\text{a) } P' \equiv (1;1); \text{b) } P' \equiv \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

206. a) $P \equiv (-1; 0)$, $C \equiv (0; 0)$, $\alpha = 30°$: b) $P \equiv (-1; -2)$, $C \equiv (0; 0)$, $\alpha = 150°$
$\left[\text{a) } P' \equiv \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right); \text{b) } P' \equiv \left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}; \frac{-1-2\cdot\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

207. a) $P \equiv (2; -1)$, $C \equiv (0; 0)$, $\alpha = -45°$; b) $P \equiv (0; -1)$, $C \equiv (-1; 1)$, $\alpha = 90°$ $\left[\text{a) } P' \equiv \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}\right); \text{b) } P' \equiv (0;1)\right]$

208. a) $P \equiv (1; 0)$, $C \equiv (0; 0)$, $\alpha = 270°$; b) $P \equiv (1; -2)$, $C \equiv (1; -1)$, $\alpha = 60°$
$\left[\text{a) } P' \equiv (0;-1); \text{b) } P' \equiv \left(\frac{2\cdot\sqrt{3}+3}{2}; \frac{\sqrt{3}-4}{2}\right)\right]$

209. a) $P \equiv (0; 2)$, $C \equiv (0; 0)$, $\alpha = 210°$; c) $P \equiv (0; -2)$, $C \equiv (0; 0)$, $\alpha = 240°$ $\left[\text{a) } P' \equiv (1;-\sqrt{3}); \text{b) } P' \equiv (-\sqrt{3};1)\right]$

210. a) $P \equiv (3; -2)$, $C \equiv (1; 2)$, $\alpha = 120°$; b) $P \equiv (-2; -1)$, $C \equiv (2; 1)$, $\alpha = 180°$
$\left[\text{a) } P' \equiv \left(\frac{2\cdot\sqrt{3}-1}{2}; \frac{6+3\cdot\sqrt{3}}{2}\right); \text{b) } P' \equiv (4;2)\right]$

Determinare le equazioni delle rotazioni delle seguenti coniche rispetto all'origine di angolo α indicato

Livello 3

211. a) $x^2/9 + y^2 = 1$, $\alpha = 45°$; b) $x^2/4 - y^2 = 1$, $\alpha = -45°$; c) $x^2/16 + y^2/9 = 1$, $\alpha = 30°$
$\left[\text{a) } 5x^2 - 8xy + 5y^2 - 9 = 0; \text{b) } 3x^2 + 10xy + 3y^2 - 8 = 0; \text{c) } 43x^2 - 14\cdot\sqrt{3}xy + 57y^2 - 576 = 0\right]$

212. a) $y^2 - x^2/25 = 1$, $\alpha = 150°$; b) $x^2 - y^2 = 1$, $\alpha = -135°$; c) $y = x^2$, $\alpha = 60°$
$\left[\text{a) } 11x^2 + 26\cdot\sqrt{3}xy + 37y^2 - 50 = 0; \text{b) } 2xy = 1; \text{c) } x^2 + 2\cdot\sqrt{3}xy + 3y^2 + 2\cdot\sqrt{3}\cdot x - 2y = 0\right]$

213. a) $y = -x^2$, $\alpha = -330°$; b) $x = 2y^2 - 1$, $\alpha = -60°$
$\left[\text{a) } 3x^2 + 2\cdot\sqrt{3}xy + y^2 - 2x + 2\cdot\sqrt{3}y = 0; \text{b) } 3x^2 + 2\cdot\sqrt{3}xy + y^2 - x + \sqrt{3}\cdot y - 2 = 0\right]$

214. $y = x^2 - x + 1$, $\alpha = 150°$ $\left[3x^2 - 2\cdot\sqrt{3}xy + y^2 + 2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot x + 2\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot y + 4 = 0\right]$

215. Tenuto conto degli esercizi precedenti, possiamo dire che l'equazione di un'ellisse canonica ruotata attorno all'origine si riconosce da quale particolarità? [Manca dei termini in x e y]

Equazioni lineari in seno e coseno

Abbiamo già risolto le equazioni omogenee in seno e coseno sia di I che di II grado. Anzi per queste ultime abbiamo visto che sappiamo risolverle anche se non sono omogenee ma hanno un termine noto, poiché grazie all'identità $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$, possiamo riportarle a equazioni omogenee. Non siamo riusciti a fare lo stesso con le equazioni non omogenee di I grado in seno e coseno. Adesso vogliamo vedere come fare. Ci sarà utile il seguente risultato.

Teorema 12

Per un generico angolo $x \neq \pi + 2k\pi$ valgono le seguenti formule parametriche:

$$sin(x) = \frac{2 \cdot tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}; cos(x) = \frac{1 - tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Dimostrazione

Proviamo solo la prima. Scriviamo $sin(x)$ usando la formula di duplicazione: $sin(2x) = 2sin(x)cos(x)$. Adesso dividiamo tutto per $1 = sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$: $sin(x) = \frac{2 \cdot sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{x}{2}\right)}{sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$. Dividiamo numeratore e denominatore per $cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x \neq \pi + 2k\pi$: $sin(x) = \frac{2 \cdot \frac{sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cancel{cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{cos^{\cancel{2}}\left(\frac{x}{2}\right)}}{\frac{sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \cancel{\frac{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}} = \frac{2 \cdot tan\left(\frac{x}{2}\right)}{tan^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1}$.

Analogamente si dimostra l'altra, lasciata per esercizio.

Grazie ai risultati recedenti, possiamo quindi ricondurre a equazioni di secondo grado algebriche, e perciò risolvere, le cosiddette equazioni lineari in seno e coseno, cioè equazioni: $a\ sin[f(x)] + b\ cos[f(x)] + c = 0$.

Esempio 14

Vogliamo risolvere l'equazione lineare $3\ sin(x) + 2\ cos(x) - 1 = 0$. Applichiamo le formule parametriche, indicando con $t = tan\left(\frac{x}{2}\right)$: $3 \cdot \frac{2 \cdot t}{1 + t^2} + 2 \cdot \frac{1 - t^2}{1 + t^2} - 1 = 0$. L'equazione ottenuta è un'equazione fratta che risolviamo facilmente: $6t + 2 - 2t^2 - 1 - t^2 = 0 \Rightarrow 3t^2 - 6t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{12}}{3}$. Adesso risostituiamo, ottenendo l'equazione: $tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{3 \pm \sqrt{12}}{3} \Rightarrow \frac{x}{2} \approx 1{,}136 + k\pi \vee \frac{x}{2} \approx -0{,}153 + k\pi \Rightarrow x \approx 2{,}272 + 2k\pi \vee x \approx -0{,}306 + 2k\pi$.

Visto che le formule parametriche si applicano per $x \neq \pi + 2k\pi$, dobbiamo verificare che $x = \pi + 2k\pi$ non sia soluzione dell'equazione. Abbiamo: $3\ sin(\pi) + 2\ cos(\pi) - 1 = 0 - 2 - 1 \neq 0$. Pertanto le soluzioni trovate sono le uniche.

In effetti possiamo risolvere le equazioni lineari in seno e coseno anche in altro modo.

Esempio 15

Vogliamo risolvere l'equazione lineare 3 *sin*(*x*) + 2 *cos*(*x*) – 1 = 0 senza usare le formule parametriche. Mettiamo l'equazione a sistema con l'identità fondamentale della goniometria: $\begin{cases} 3 \cdot sin(x) + 2 \cdot cos(x) - 1 = 0 \\ sin^2(x) + cos^2(x) = 1 \end{cases}$. A questo punto possiamo trasformare il sistema in uno fra due equazioni algebriche, semplicemente ponendo *sin*(*x*) = *A*, *cos*(*x*) = *B*. Si ha così: $\begin{cases} 3 \cdot A + 2 \cdot B - 1 = 0 \\ A^2 + B^2 = 1 \end{cases}$, che risolviamo per esempio con il metodo di sostituzione:

$$\begin{cases} A = \dfrac{1-2B}{3} \\ \left(\dfrac{1-2B}{3}\right)^2 + B^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1-2B}{3} \\ \dfrac{1-4B+4B^2}{9} + B^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1-2B}{3} \\ 13B^2 - 4B - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1-2B}{3} \\ B = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+104}}{13} = \dfrac{2 \pm 6 \cdot \sqrt{3}}{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{\dfrac{9 \mp 12 \cdot \sqrt{3}}{13}}{3} \\ B = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+104}}{13} = \dfrac{2 \pm 6 \cdot \sqrt{3}}{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{3 \mp 4 \cdot \sqrt{3}}{13} \\ B = \dfrac{2 \pm 6 \cdot \sqrt{3}}{13} \end{cases}$$

Quindi abbiamo: $\begin{cases} sin(x) = \dfrac{3 - 4 \cdot \sqrt{3}}{13} \\ cos(x) = \dfrac{2 + 6 \cdot \sqrt{3}}{13} \end{cases} \vee \begin{cases} sin(x) = \dfrac{3 + 4 \cdot \sqrt{3}}{13} \\ cos(x) = \dfrac{2 - 6 \cdot \sqrt{3}}{13} \end{cases}$. Ora si ha:

$$\begin{cases} sin(x) = \dfrac{3 - 4 \cdot \sqrt{3}}{13} \Rightarrow x \approx -0,307 + 2k\pi \vee x \approx 3,449 + 2k\pi \\ cos(x) = \dfrac{2 + 6 \cdot \sqrt{3}}{13} \Rightarrow x \approx \pm 0,307 + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow x \approx -0,307 + 2k\pi$$

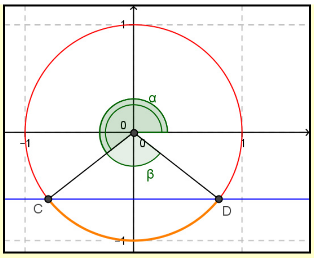
$$\begin{cases} sin(x) = \dfrac{3 + 4 \cdot \sqrt{3}}{13} \Rightarrow x \approx 0,869 + 2k\pi \vee x \approx 2,273 + 2k\pi \\ cos(x) = \dfrac{2 - 6 \cdot \sqrt{3}}{13} \Rightarrow x \approx \pm 2,273 + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow x \approx 2,273 + 2k\pi$$

che corrispondono alle soluzioni trovate in precedenza, a parte qualche minima differenza dovuta alle approssimazioni.

Le disequazioni sono ovviamente riconducibili alle rispettive equazioni, ma poi si deve tenere conto delle rispettive funzioni goniometriche interessate.

Esempio 16

Risolvere la disequazione $sin^2(3 - 4x) - sin(3 - 4x) - 1 > 0$. Risolviamo la disequazione nell'incognita *sin*(3 – 4*x*), quindi intanto risolviamo l'equazione associata: $sin(3-4x) = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow sin(3-4x) = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Abbiamo eliminato la soluzione positiva perché maggiore di 1 e perciò non accettabile. La disequazione dovrebbe avere le seguenti soluzioni: $sin(3-4x) > \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \vee sin(3-4x) < \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. La prima disequazione ovviamente non ha soluzioni. Per risolvere la seconda consideriamo la circonferenza goniometrica, su cui segniamo gli angoli il cui seno è pari al valore dato. I valori segnati con il bordo arancione, sono tutti quelli riferiti alle soluzioni della disequazione, almeno limitatamente ai valori compresi tra 0 e 2π.



Per averli tutti basta scrivere i periodi: $\alpha = \pi - sin^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 2k\pi < 3x - 4 < \beta = 2\pi + sin^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 2k\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{4 + \pi - sin^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{3} + \frac{2}{3}k\pi < x < \frac{4 + 2\pi + sin^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{3} + \frac{2}{3}k\pi$. Osserviamo che, poiché $sin^{-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ è un numero negativo, abbiamo reso positivo l'arco aggiungendovi 2π. Volendo possiamo esprimere il tutto anche in modo più comprensibile, $\gamma + \frac{2}{3}k\pi < x < \delta + \frac{2}{3}k\pi, \gamma \approx 2,16; \delta \approx 3,65$, ossia usando delle approssimazioni e dei simboli.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Risolvere l'equazione $sin(x) - cos(x) = -1/4$, $x \in [-120°, 320°]$.

Applicando le formule parametriche abbiamo: $\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} = -\frac{1}{4}$, $t = tan(x/2)$. Semplifichiamo: $8t - 4 + 4t^2 + 1 + t^2 = 0 \Rightarrow 5t^2 + 8t - 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{-4 \pm \sqrt{16+15}}{5} = \frac{-4 \pm \sqrt{31}}{5}$. Abbiamo quindi da risolvere altre due equazioni, la prima: $tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{-4+\sqrt{31}}{5} \Rightarrow x/2 \approx 17°24'32'' + k180° \Rightarrow x \approx 34°49'2'' + k360°$, ha una sola soluzione accettabile (per $k = 0$): $x \approx 34°49'2''$. La seconda: $tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{-4-\sqrt{31}}{5}$, $x/2 \approx -62°24'32'' + k180° \Rightarrow x \approx -124°49'2'' + k360$. Ha anch'essa una sola soluzione accettabile (per $k = 1$): $x \approx 235°10'48''$.

Risolvere le seguenti equazioni lineari in seno e coseno negli intervalli indicati

Livello 1

1. a) $3sin(x) + cos(x) = -2$; $x \in [0°; 360°]$; b) $2sin(x) - cos(x) = 2$; $x \in [-3; 0]$ [a) ($\approx 200°47'48'' \vee \approx 302°20'1''$); b) $\varnothing$]
2. a) $3sin(x) + \sqrt{3}\, cos(x) = -3$; $x \in [115°; 270°]$; b) $cos(x) - \sqrt{2}\, sin(x) = 1$; $x \in [-20°; 525°]$ [a) ($210° \vee 270°$); b) ($0° \vee \approx 250°31'44'' \vee 360°$)]
3. a) $3sin(x)+4cos(x) = 2$; $x \in [-1; 2]$; b) $sin(x)+cos(x) = 1/3$; $x \in [2; 6]$; c) $sin(x) + cos(x) + 1 = 0$; $x \in [-4; 4]$ [a) ($\approx -0,516 \vee \approx 1,803$); b) ($\approx 2,118 \vee \approx 5,736$); c) ($-5\pi/4 \vee -\pi \vee -\pi/4 \vee 3\pi/4 \vee \pi$)]

Livello 2

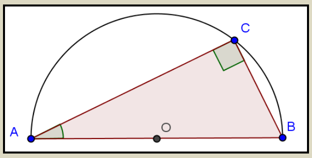
4. $sin(x + 12°) + 2 \cdot cos(x + 12°) = 1$; $x \in [220°; 410°]$ [$\approx 311°7'48''$]
5. $6 \cdot sin(3x + 27°) - 7 \cdot cos(3x + 27°) = 0,71$; $x \in [100°; 420°]$ [$\approx 128°56'18'' \vee \approx 185°59'38'' \vee \approx 248°56'18'' \vee \approx 305°59'38'' \vee \approx 368°56'18''$]
6. $3 \cdot sin(4x + 2°) - 7 \cdot cos(4x + 2°) = -0,25$; $x \in [-40°; 200°]$ [$\approx -28°19'46'' \vee \approx 15°43'48'' \vee \approx 61°40'14'' \vee x \approx 105°43'48'' \vee x \approx 151°40'14'' \vee x \approx 195°43'48''$]
7. $sin(2x - 4°) + 3 \cdot cos(2x - 4°) = 0,31$; $x \in [250°; 542°]$ [$\approx 329°1'49'' \vee \approx 413°24'17'' \vee \approx 509°1'49''$]
8. $4 \cdot sin(x + 12°) - 3 \cdot cos(x + 12°) = 0,75$; $x \in [15°; 520°]$ [$\approx 33°29'48'' \vee \approx 196°14'35'' \vee \approx 393°29'48''$]
9. $sin(2x + 35°) + 2 \cdot cos(2x + 35°) + 2 = 0$; $x \in [-100°; 100°]$ [$\approx -80°56'6'' \vee 72°30' \vee \approx 99°3'54''$]
10. $sin(5x - 2) + 6 \cdot cos(5x - 2) = 0,21$; $x \in [1; 4]$ [$\approx 1,382 \vee \approx 1,997 \vee \approx 2,639 \vee \approx 3,254 \vee \approx 3,896$]
11. $sin(3x + 2) + 4 \cdot cos(3x + 2) = 0,75$; $x \in [-1; 2]$ [$\approx -0,122 \vee \approx 1,047 \vee \approx 1,972$]
12. $sin(x + 12) + 2 \cdot cos(x + 12) = -0,59$; $x \in [3; 4]$ [$\varnothing$]

Livello 3

13. $cos(x + \pi/4) - cos(x - \pi/3) - cos(x) = -0,1$; $x \in [-2; 5]$ [$\approx -0,41 \vee \approx 2,62$]
14. $sin(x + \pi/3) + cos(x - \pi/6) = 1$; $x \in [-2; 3]$ [$\approx -0,52 \vee \approx 1,57$]
15. $cos(x + \pi/4) - cos(x) + sin(x) + 0,25 = 0$; $x \in [-3; 1]$ [$\approx -1,71 \vee \approx 0,14$]
16. $sin(x + \pi/3) - sin(x) - 3cos(x) - 0,23 = 0$; $x \in [1; 4]$ [$\approx 1,91$]
17. Sotto quale condizione sui parametri a, b e c, l'equazione $a \cdot sin(x) + b \cdot cos(x) + c = 0$, ha come una delle sue soluzioni $x = \pi + 2k\pi$? [$b = c$]
18. Con riferimento al precedente quesito, in che relazione sono a e $b = c$, se $x = \pi + 2k\pi$ è l'unica soluzione? [$-2a < b < 2a$]

Lavoriamo insieme

Data una semicirconferenza di diametro AB lungo 2, determinare su di essa un punto C in modo che sia $\frac{4}{3}\cdot\overline{AC}-\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}=\frac{3}{4}$.

Consideriamo la figura seguente, 

in cui abbiamo costruito un triangolo ovviamente rettangolo di ipotenusa *AB*. Facilmente ricaviamo i dati incogniti in funzione dell'angolo $C\hat{A}B=x$. $\overline{AC}=2\cdot cos(x);\overline{BC}=2\cdot sin(x)$. Quindi il problema ha le stesse soluzioni del sistema $\begin{cases}\frac{4}{3}\cdot 2\cdot cos(x)-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot sin(x)=\frac{3}{4}\\ 0°<x<90°\end{cases}$. Perciò: $\begin{cases}32\cdot cos(x)-12\cdot sin(x)-9=0\\ 0°<x<90°\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}32\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}-12\cdot\frac{2t}{1+t^2}-9=0\\ 0<t<1\end{cases}$ $\Rightarrow\begin{cases}32-32t^2-24t-9-9t^2=0\\ 0<t<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}41t^2+24t-23=0\\ 0<t<1\end{cases}\Rightarrow t=\frac{\sqrt{1087}-12}{41}$. Visto il significato di *t*, l'angolo *x* deve essere $\frac{x}{2}=tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1087}-12}{41}\right)\Rightarrow\frac{x}{2}\approx 27°5'15''\Rightarrow x\approx 54°10'30''$.

Risolvere i seguenti problemi

Livello 2

19. Il diametro *AB* di una semicirconferenza di centro *O* misura 6 cm e il quadrilatero *ABCD* in essa inscritto ha il lato *CD* lungo 3 cm. Determinare $A\hat{O}D$, in modo che sia $\frac{\overline{AD}^2+\overline{BC}^2}{\overline{AB}+\overline{CD}}=2$. [60°]
20. Sia *M* un punto su una semicirconferenza di centro *O* e diametro *AB*. Determinare il valore dell'angolo $M\hat{A}B$ in modo che sia $\overline{AM}+4\cdot\overline{BM}=4\cdot\overline{AB}$. [≈ 61°55′39″]
21. Il lato *AB* di un triangolo *ABC* è lungo 5. Si tracci una semiretta di vertice *A* interna al triangolo, sia *D* la proiezione di *B* sulla detta semiretta. Determinare la misura di $D\hat{A}B$ in modo che sia $\overline{AD}+2\cdot\overline{BD}=2\cdot\overline{AB}$. [≈ 36°52′12″]
22. Dato un cerchio di raggio che misura *r*, si consideri su di esso una corda *AB* uguale al lato del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza. Dato un punto *P* sull'arco maggiore *AB*, determinare $\angle P\hat{A}B$ in modo che sia $\overline{AP}+\overline{PB}=2r$. [≈ 5°15′52″ ∨ ≈ 114°44′8″]
23. Sia *P* un punto sull'arco *AB*, quarta parte di un cerchio di centro *O* e raggio *r*. Determinare $\angle A\hat{O}P$ in modo che l'area del quadrilatero *NOMP* (*M* e *N* punti medi di *OA* e *OB*) sia $5r^2/16$. [≈ 17°6′52″ ∨ ≈ 72°53′8″]
24. In un triangolo *ABC* si ha: $2\cdot B\widehat{C}A=A\widehat{B}C,\overline{BC}=3$, *BH* e *CK* sono altezze. Determinare l'ampiezza di $B\widehat{C}A$ in modo che sia $\overline{BH}^2+\overline{CK}=5$. [≈ 30°8′15″]
25. Si consideri un punto *P* su un quarto di cerchio di raggio 1 *cm*, di centro *O* ed estremi *A* e *B*. Determinare i valori che deve assumere l'angolo $C\hat{O}P=x$, in modo che il quadrilatero *OCPB*, con *C* punto medio di *OA*, abbia area maggiore di 0,42. [≈ 67°51′37″ < *x* < 90°]
26. I due segmenti *OA* e *OB* sono fra loro ortogonali e lunghi rispettivamente 3,26 *cm* e 3,56 *cm*. Sia *P* un punto interno all'angolo tale che sia $\overline{OP}=\overline{OA}$. Determinare $\angle A\widehat{O}P$ in modo che si abbia $2\cdot\overline{PE}+3\cdot\overline{PF}=3,3\cdot\overline{OB}$, in cui $\overline{PE}$ è la distanza di *P* da *OB* e $\overline{PF}$ la distanza di *P* da *OA*. [≈ 54°27′52″ ∨ ≈ 58°9′20″]
27. É dato il triangolo *ABC*, rettangolo in *B*, del quale l'altezza relativa all'ipotenusa è lunga 2,01*cm*. Determinare l'ampiezza degli angoli interni in modo che il perimetro del triangolo sia lungo 9,97 *cm*. [≈ 38°41′30″, ≈ 51°18′30″]

28. Nel triangolo *ABC*, rettangolo in *B*, l'angolo acuto di vertice *A* è di 30°. Tracciata la semicirconferenza di diametro *AB*, esterna al triangolo, sia su di essa un punto *P* e sia *Q* l'intersezione della perpendicolare per *P* ad *AB* con l'ipotenusa *AC*. Determinare $\angle P\hat{A}B$ in modo che si abbia $\overline{AQ}+\overline{QP}=2\cdot\overline{AP}$. [≈ 33°54′15″]

29. Sia il triangolo rettangolo *ABC* con angoli acuti di 60° e 30° e l'ipotenusa *BC* lunga 4,91 *cm*. Per *A*, conduciamo una retta *s* esterna al triangolo e siano *B′* e *C′* le proiezioni ortogonali di *B* e *C* su di essa. Determinare le misure dei due angoli che i cateti formano con *s*, sapendo che il perimetro del trapezio *BCC′B′* è 14 *cm*. [≈ 28°23′55″, ≈ 61°36′05″]

30. Un trapezio rettangolo ha basi lunghe 2,74 *cm* e 8,75 *cm*. Determinare la misura del suo angolo acuto in modo che il perimetro sia lungo 25,81 *cm*. [≈ 44°43′19″]

31. Due semicirconferenze di diametri uguali *AB* e *BC*, sono tangenti esternamente in *B*. Presi i punti *C* sulla prima ed *E* sulla seconda in modo che $C\hat{B}E=45°$. Calcolare la misura di $C\hat{B}A$ in modo che sia $2\cdot\overline{BC}+3\cdot\overline{EC}=2\cdot\overline{AB}$. [≈ 72°32′22″]

32. Sia *d* la misura della diagonale *AC* del rettangolo *ABCD*; determinare l'angolo che essa forma con la base *AB* in modo che valga la relazione $\overline{AB}+2\cdot\overline{BC}=\sqrt{3}\cdot d$. [≈ 24°12′12″]

Livello 3

33. Con riferimento al precedente problema se la condizione è $2\cdot\overline{BC}+3\cdot\overline{EC}=k\cdot\overline{AB}$, con *k* numero reale positivo, per quali valori di *k* il problema ha soluzione? $\left[0<k<\sqrt{13-6\cdot\sqrt{2}}\right]$

34. E' dato l'angolo retto *xOy* ed il punto *P* della sua bisettrice per il quale $\overline{OP}$ = 1 condurre per *P* una trasversale in modo che dette *A* e *B* le sue intersezioni con i lati *Ox* e *Oy* si abbia. $\frac{1}{\overline{PA}}+\frac{1}{\overline{PB}}=2$. Calcolare $\angle P\hat{A}O$. [45°]

35. Calcolare l'ampiezza 2*x* dell'angolo al vertice di un triangolo isoscele, dato il rapporto 1/4 tra il perimetro e l'altezza relativa alla base. [≈ 96°56′33″]

36. È data la semicirconferenza di diametro *AB* lungo 2*r* e la semiretta *t* tangente in *B* e giacente nel medesimo semipiano della semicirconferenza rispetto alla retta *AB*. Dato su *t* un punto *P*, determinare $\angle B\hat{A}P$ in modo che, detta *Q* l'ulteriore intersezione della retta *AP* con la semicirconferenza, si abbia: $2\cdot\overline{BQ}+3\cdot\overline{PQ}=\frac{2}{3}\cdot\overline{BP}$. [≈ 67°49′38″]

37. Nel trapezio *ABCD* rettangolo in *A* e *D*, l'angolo di vertice *B* è di 60°. Dato un punto *P* sul lato obliquo *CB*, determinare la misura di $P\hat{D}C$ in modo che si abbia $\overline{DP}+\overline{CP}=2\cdot\overline{DC}$. [≈ 21°47′12″]

38. Il triangolo *ABC* è inscritto in una circonferenza di raggio lungo 2,13 *cm*. Sapendo che la distanza dal centro al lato *AB* è di 2,26 *cm* e che il perimetro è di 10,34 *cm*, determinare la misura dell'angolo di vertice *A*. [≈ 64°36′57″ o ≈ 83°20′38″]

Formule di prostaferesi e di Werner

Vediamo di determinare altre formule che a volte possono rivelarsi utili.

Teorema 13

Valgono le seguenti formule, dette di *prostaferesi*: $sin(\alpha) \pm sin(\beta) = 2 \cdot sin\left(\frac{\alpha \pm \beta}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\alpha \mp \beta}{2}\right)$

$cos(\alpha) - cos(\beta) = -2 \cdot sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$ $\quad cos(\alpha) + cos(\beta) = 2 \cdot cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

Dimostrazione

Proviamo solo la prima nel caso della differenza. Consideriamo le formule di addizione e sottrazione dei seni: $sin(x + y) = sin(x) \cdot cos(y) + sin(y) \cdot cos(x)$; $sin(x - y) = sin(x) \cdot cos(y) - sin(y) \cdot cos(x)$. Sottraiamo membro a membro le due uguaglianze: $sin(x + y) - sin(x - y) = sin(x) \cdot cos(y) + sin(y) \cdot cos(x) - sin(x) \cdot cos(y) + sin(y) \cdot cos(x) = 2\ sin(y) \cdot cos(x)$. Come si vede abbiamo trasformato una somma di seni in un prodotto. Vogliamo scrivere meglio la formula, in modo che essa sia applicabile ad angoli generici α e β. Quindi poniamo: $\begin{cases} x + y = \alpha \\ x - y = \beta \end{cases}$, da cui facilmente si ottiene: $\begin{cases} x = \frac{\alpha + \beta}{2} \\ y = \frac{\alpha - \beta}{2} \end{cases}$. Sostituendo otteniamo la formula cercata. Analogamente si provano le altre.

Che cosa significa?

La parola prostaferesi deriva dalla giustapposizione di due parole di origine greca, *prosthesis* (πρόσθεσις) e *aphairesis* (ἀφαίρεσις), che significano rispettivamente somma e sottrazione. Ed è quindi una formula che trasforma somme e sottrazioni in prodotti.

Esempio 17

Vogliamo calcolare il valore di $sin(75°) + sin(15°)$ senza ricorrere alla calcolatrice. Mediante il precedente risultato abbiamo: $2 \cdot sin\left(\frac{75° + 15°}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{75° - 15°}{2}\right) = 2 \cdot sin(45°) \cdot cos(30°) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Ci sono anche delle formule in qualche modo inverse di quelle di prostaferesi.

Corollario 6 (Formule di Werner)

Valgono le seguenti formule: $sin(x) \cdot sin(y) = 1/2 \cdot [cos(x - y) - cos(x + y)]$

$sin(x) \cdot cos(y) = 1/2 \cdot [sin(x - y) + sin(x + y)]$ $\quad cos(x) \cdot cos(y) = 1/2 \cdot [cos(x - y) + cos(x + y)]$

Dimostrazione

Si ottengono immediatamente dalle formule di prostaferesi. Consideriamo per esempio la formula di prostaferesi per la somma dei seni:

$$\begin{array}{l} sin(x) + sin(y) = 2 \cdot sin\left(\frac{x + y}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{x - y}{2}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow sin\left(\frac{x + y}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{x - y}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left[sin(x) + sin(y)\right] \end{array} \quad (1)$$

. Adesso poniamo $\begin{cases} \frac{x + y}{2} = \alpha \\ \frac{x - y}{2} = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2\alpha \\ x - y = 2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \alpha - \beta \end{cases}$. Sostituendo nella (1) troviamo la formula di Werner per il prodotto di seno e coseno.

L'angolo storico

Le formule di Jacob Werner (1468 – 1522) furono usate da questo astronomo nel suo campo di lavoro, ma sembra che fossero già note al matematico arabo ibn Yussuf (835 - 912). Anche quelle di prostaferesi nacquero o comunque furono utilizzate per semplificare calcoli trigonometrici in ambito astronomico.

Come applicazione delle formule di prostaferesi proviamo un'interessante proprietà sui triangoli.

Teorema 14 (di Nepero)

In un qualsiasi triangolo si ha: $\frac{a-b}{a+b}=\frac{tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)};\frac{a-c}{a+c}=\frac{tan\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{tan\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)};\frac{b-c}{b+c}=\frac{tan\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}{tan\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}$

Dimostrazione

Proviamo la prima, le altre sono ovviamente identiche. Per il teorema dei seni abbiamo: $\frac{sin(\alpha)}{sin(\beta)}=\frac{a}{b}$. Applichiamo le cosiddette proprietà del comporre e dello scomporre:

$$\frac{sin(\alpha)+sin(\beta)}{sin(\beta)}=\frac{a+b}{b};\frac{sin(\alpha)-sin(\beta)}{sin(\beta)}=\frac{a-b}{b}.$$

I due rapporti possono anche scriversi come uno solo: $\frac{sin(\alpha)-sin(\beta)}{sin(\alpha)+sin(\beta)}=\frac{a-b}{a+b}$. Adesso applichiamo le formule di prostaferesi al primo membro: $\frac{\cancel{2}\cdot sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cancel{2}\cdot sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}=\frac{a-b}{a+b}\Rightarrow\frac{tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}=\frac{a-b}{a+b}$.

Esempio 18

Vogliamo verificare la validità delle formule di Nepero per un triangolo rettangolo in cui gli angoli acuti misurano β = 30° e γ = 60°. In questo caso sappiamo che, detta a l'ipotenusa, si ha $b=\frac{1}{2}a, c=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Deve quindi essere:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{a-\frac{1}{2}a}{a+\frac{1}{2}a}=\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{3}{2}a}=\frac{1}{3};\frac{tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}=\frac{tan\left(\frac{90°-30°}{2}\right)}{tan\left(\frac{90°+30°}{2}\right)}=\frac{tan(30°)}{tan(60°)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3};$$

$$\frac{a-c}{a+c}=\frac{a-\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a+\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}};\frac{tan\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{tan\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}=\frac{tan\left(\frac{90°-60°}{2}\right)}{tan\left(\frac{90°+60°}{2}\right)}=\frac{tan(15°)}{tan(75°)};$$

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-2;\frac{tan\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}{tan\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}=\frac{tan\left(\frac{30°-60°}{2}\right)}{tan\left(\frac{30°+60°}{2}\right)}=\frac{tan(-15°)}{tan(45°)}$$

Verifiche

Lavoriamo insieme

Verificare la validità della seguente identità: $\frac{sin(x)+sin(y)}{sin(x)-sin(y)}=\frac{tan\left(\frac{x+y}{2}\right)}{tan\left(\frac{x-y}{2}\right)}$.

Applicando le formule di prostaferesi al primo membro abbiamo: $\frac{\cancel{2}\cdot sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\cancel{2}\cdot sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}$. Facilmente si vede che l'espressione equivale al secondo membro dell'identità di partenza, che risulta perciò verificata.

Verificare l'eventuale validità delle seguenti identità

Livello **1**

1. a) $\frac{cos(x)+cos(y)}{cos(x)-cos(y)}=\frac{cot\left(\frac{x+y}{2}\right)}{tan\left(\frac{x-y}{2}\right)}$; b) $\frac{sin(x)+sin(y)}{cos(x)+cos(y)}=\frac{cos(y)-cos(x)}{sin(x)-sin(y)}$ [a) No; b) Sì]

2. a) $\frac{sin(x)+sin(y)}{cos(y)-cos(x)}=\frac{cos(x)+cos(y)}{sin(x)-sin(y)}$; b) $tan(\alpha)+tan(\beta)=\frac{sin(\alpha+\beta)}{sin(\alpha)\cdot sin(\beta)}$ [a) Sì; b) No]

3. a) $tan(\alpha)-tan(\beta)=\frac{sin(\alpha-\beta)}{cos(\alpha)\cdot cos(\beta)}$; b) $sin(x)\cdot cos(45°+x)+cos(x)\cdot sin(45°+x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ [a) Sì; b) No]

4. $cos(27°+x)\cdot cos(18°-x)-sin(27°+x)\cdot sin(18°-x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ [Sì]

5. $cos(13° + x)\ cos(47° + x) - sin(47° + x)\ sin(13° - x) = 1/2$ [Sì]

Livello **2**

6. $sin^2(x) - sin^2(y) - sin(x + y) \cdot sin(x - y)$; $cos^2(x) - cos^2(y) - sin(x + y) \cdot sin(x - y)$ [Sì; No]

Lavoriamo insieme

Calcolare $\frac{1}{2\cdot sin(10°)}-2\cdot sin(70°)$ *senza usare la calcolatrice.*

Scriviamo un'unica frazione $\frac{1-4\cdot sin(70°)\cdot sin(10°)}{2\cdot sin(10°)}$. Adesso applichiamo le formule di Werner al prodotto al numeratore: $\frac{1-[2\cdot cos(60°)-2\cdot cos(80°)]}{2\cdot sin(10°)}$. Sostituiamo ancora: $\frac{1-\left[2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot sin(10°)\right]}{2\cdot sin(10°)}=\frac{2\cdot sin(10°)}{2\cdot sin(10°)}=1$.

Senza l'uso della calcolatrice calcolare o semplificare le seguenti espressioni

Livello **2**

7. a) $sin(10°) \cdot sin(20°) - cos(10°) \cdot cos(20°)$; b) $sin^2(58°) - sin^2(32°) - cos(64°)$ $\left[\text{a) } -\frac{\sqrt{3}}{2};\text{ b) } 0\right]$

8. a) $\frac{1}{2\cdot cos(10°)} - 2\cdot cos(70°)$; b) $\frac{1}{2\cdot cos(20°)} - 2\cdot cos(50°)$; c) $\frac{\sqrt{2}}{2\cdot sin(52°30')} - 2\cdot cos(7°30')$

$\left[\text{a) } -tan(10°);\text{b) } -1;\text{c) } -\frac{\sqrt{3}}{2\cdot sin(52°30')}\right]$

9. a) $cos(74°)cos(29°)+ sin(74°)sin(29°)$; b) $cos^2(22°30')–cos^2(67°30')$; b) $cos^2(17°)–cos^2(73°) – cos(34°)$ $\left[\text{a) } \frac{\sqrt{2}}{2};\text{b) } \frac{\sqrt{2}}{2};\text{c) } 0\right]$

10. a) $sin(20°)\cdot sin(25°) + cos(20°)\cdot sin(25°)$; b) $sin(58°)\cdot cos(28°) – cos(58°)\cdot sin(28°)$ $\left[\text{a) } \frac{\sqrt{2}}{2};\text{b) } \frac{1}{2}\right]$

11. L'equazione dell'onda armonica è $y = a \cdot cos(\omega t + \varphi)$. Due onde armoniche che si sovrappongono producono la cosiddetta interferenza. Determinare l'equazione dell'interferenza di due onde armoniche di uguali ampiezze, a, pulsazioni, ω, e di diverse fasi φ_1 e φ_2. $\left[2a\cdot cos\left(\frac{\phi_1-\phi 2}{2}\right)\cdot cos\left(\omega t+\frac{\phi_1+\phi 2}{2}\right)\right]$

Livello 3

12. a) $\frac{sin\left(\frac{\pi}{9}\right)+sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)+sin\left(\frac{4\pi}{9}\right)+sin\left(\frac{5\pi}{9}\right)}{cos\left(\frac{\pi}{9}\right)+cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)+cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)+cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)}$; b) $cos(\pi/8) + cos(3\pi/8) + cos(5\pi/8) + cos(7\pi/8)$

$\left[\text{a) } \sqrt{3};\text{b) } 0\right]$

13. $sin(\pi/8) + sin(3\pi/8) + sin(5\pi/8) + sin(7\pi/8)$ $\left[\sqrt{4+2\cdot\sqrt{2}}\right]$

14. Affinché possa calcolarsi senza calcolatrice il valore esatto di $sin(\alpha) \cdot sin(\beta) – cos(\alpha) \cdot cos(\beta)$, dobbiamo conoscere il valore di quale espressione? $[cos(\alpha + \beta)]$

Determinare la minima soluzione positiva delle seguenti equazioni

15. a) $cos(81°) + cos(39°) = cos(x)$; $sin(21°) + sin(39°) = cos(x)$; $sin(72°) – sin(48°) = sin(x)$ [21°; 9°; 12°]
16. a) $sin(63°) – sin(3°) = cos(x)$; $sin(65°) – cos(35°) = sin(x)$; $sin(84°) – cos(54°) = cos(x)$ [33°; 5°; 66°]

Lavoriamo insieme

Vverificare se in un triangolo qualsiasi la seguente uguaglianza è un'identità

$$sin(\alpha) + sin(\beta) + sin(\gamma) = 4cos(\alpha/2)\cdot cos(\beta/2)\cdot cos(\gamma/2)$$

Abbiamo: $sin(\alpha) + sin(\beta) + sin(\gamma) = sin(\alpha) + sin(\beta) + sin(180° – \alpha – \beta) = sin(\alpha) + sin(\beta) + sin(\alpha + \beta)$

Applichiamo le formule di prostaferesi alla prima somma e la formula di duplicazione al terzo addendo:

$$2\cdot sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+2\cdot sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=2\cdot sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\left[cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right].$$

Applichiamo ancora una formula di prostaferesi:

$$2\cdot sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot 2\cdot cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\beta}{2}\right)=4\cdot sin\left(\frac{180°-\gamma}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\beta}{2}\right)=$$

$$=4\cdot sin\left(90°-\frac{\gamma}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\beta}{2}\right)=4\cdot cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)$$

Abbiamo a che fare con un'identità.

Verificare la validità delle seguenti identità in un triangolo qualsiasi

Livello 2

17. a) $p = 4R\cdot cos(\alpha/2)\cdot cos(\beta/2)\cdot cos(\gamma/2)$; b) $2a\cdot R\cdot sin(\beta – \gamma) = b^2 \cdot cos^2(\gamma) – c^2 \cdot cos^2(\beta)$
18. $a \cdot sin(\beta) \cdot sin(\gamma) + b \cdot sin(\alpha) \cdot sin(\gamma) + c \cdot sin(\alpha) \cdot sin(\beta) = 3A/R$

19. a) $cos^2(\alpha) + cos^2(\beta) + cos^2(\gamma) + 2 \cdot cos(\alpha) \cdot cos(\beta) \cdot cos(\gamma) = 1$; b) $\dfrac{sin(\alpha)+sin(\beta)+sin(\gamma)}{cos(\alpha)+cos(\beta)+cos(\gamma)} = tan(\beta)$

Lavoriamo insieme

Risolvere l'equazione $\dfrac{sin(8x)+sin(2x)}{cos(8x)-cos(2x)} = 2$, $x \in [-102°; 217°]$.

Applichiamo le formule di prostaferesi: $\dfrac{2 \cdot sin(5x) \cdot cos(3x)}{-2 \cdot sin(5x) \cdot sin(3x)} = 2$. Adesso, prima di potere dividere per il fattore comune $sin(5x)$, dobbiamo assicurarci che i valori che annullano tale espressione non siano soluzioni dell'equazione data. Poiché $sin(5x) \Rightarrow 5x = k \cdot 180° \Rightarrow x = k \cdot 36°$, verifichiamo che tale valore non è soluzione: $\dfrac{sin(5k \cdot 36°) \cdot cos(3k \cdot 36°)}{-sin(5k \cdot 36°) \cdot sin(3k \cdot 36°)} = \dfrac{sin(k \cdot 180°) \cdot cos(k \cdot 108°)}{-sin(k \cdot 180°) \cdot sin(k \cdot 108°)} = \dfrac{0}{0}$. Otteniamo una espressione priva di senso. Dividiamo per $sin(5x)$: $-cot(3x) = 2 \Rightarrow 3x \approx 153°26'5'' + k\ 180° \Rightarrow x \approx 51°8'41'' + k\ 60°$. Le soluzioni accettabili sono: $x_1 \approx -68°51'19''$; $x_2 \approx -8°51'19''$; $x_3 \approx 51°8'41''$; $x_4 \approx 111°8'41''$; $x_5 \approx 171°8'41''$.

Risolvere le seguenti equazioni negli intervalli indicati

Livello 1

20. $\dfrac{cos(5x)-cos(3x)}{sin(5x)+sin(3x)} = -\dfrac{7}{3}$, $x \in [-94°; 216°]$ [$\approx 66°48'5''$]

21. $\dfrac{sin(7x)-sin(x)}{cos(7x)+cos(x)} = \dfrac{4}{3}$, $x \in [-74°; 167°]$ [$\approx -42°17'24'' \vee \approx 17°42'36'' \vee \approx 77°42'36'' \vee \approx 137°42'36''$]

22. $\dfrac{sin(10x)+sin(4x)}{cos(10x)-cos(4x)} = -\dfrac{3}{4}$, $x \in [-27°; 168°]$ [$\approx 17°42'36'' \vee \approx 77°42'36'' \vee \approx 137°42'36''$]

23. $\dfrac{sin(12x)-sin(6x)}{cos(12x)-cos(6x)} = -5$, $x \in [-30°; 29°]$ [$\approx -18°44'36'' \vee \approx 1°15'24'' \vee \approx 21°15'24''$]

24. $\dfrac{cos(9x)+cos(3x)}{sin(9x)-sin(3x)} = 9$, $x \in [105°; 229°]$ [$\approx 122°6'48'' \vee \approx 182°6'48''$]

25. $\dfrac{cos(5x)-cos(2x)}{sin(5x)-sin(2x)} = 5$, $x \in [-45°; 139°]$ [$\approx -22°28'58'' \vee \approx 28°56'45'' \vee \approx 80°22'27'' \vee \approx 131°48'8''$]

26. $\dfrac{sin(4x)+sin(3x)}{cos(4x)-cos(3x)} = 3$, $x \in [-71°; 291°]$ [$\approx -36°52'12''$]

27. $\dfrac{cos(5x)+cos(7x)}{sin(5x)+sin(7x)} = -\dfrac{2}{3}$, $x \in [-8°; 90°]$ [$\approx 20°36'54'' \vee \approx 50°36'54'' \vee \approx 80°36'54''$]

28. $\dfrac{cos(12x)-cos(7x)}{sin(12x)-sin(7x)} = \dfrac{11}{3}$, $x \in [-9°; 48°]$ [$\approx -7°52'4'' \vee \approx 11°4'46'' \vee \approx 30°1'37''$]

29. $\dfrac{cos(13x)-cos(17x)}{sin(13x)+sin(17x)} = -\dfrac{14}{5}$, $x \in [-84°; 214°]$ [$\approx -35°10'23'' \vee \approx 54°49'37'' \vee \approx 144°49'37''$]

30. $\dfrac{sin(14x)-sin(7x)}{cos(14x)+cos(7x)} = \dfrac{15}{4}$, $x \in [-74°; 35°]$ [$\approx -29°58'49'' \vee \approx 21°26'53''$]

Lavoriamo insieme

Risolvere l'equazione $sin(3x) + sin(5x) - sin(2x)cos(x) = 0$; $x \in [0°; 360°]$.

Applichiamo la formula di prostaferesi alla prima somma: $2sin(4x) \cdot cos(x) - sin(2x) \cdot cos(x) = 0$. Mettiamo in evidenza a fattor comune: $cos(x) \cdot [2sin(4x) - sin(2x)] = 0$. Per il principio di annullamento del prodotto si ha : $cos(x) = 0 \vee 2sin(4x) - sin(2x) = 0$. Risolviamo singolarmente, nell'intervallo richiesto: $cos(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 90° \vee x_2 = 270°$. E poi: $2sin(4x) - sin(2x) = 0 \Rightarrow 2 \cdot 2 \cdot sin(2x) \cdot cos(2x) - sin(2x) = 0 \Rightarrow sin(2x) \cdot [4cos(2x) - 1] = 0$, da cui $sin(2x) = 0 \Rightarrow 2x = 0° \vee 2x = 180° \vee 2x = 360° \vee 2x = 540° \Rightarrow x_3 = 0° \vee x_1 = 90° \vee x_4 = 180° \vee x_2 = 270°$ e ancora: $4cos(2x) - 1 = 0 \Rightarrow cos(2x) = 1/4 \Rightarrow x_5 \approx 37°45'40'' \vee x_6 \approx 142°14'20'' \vee x_7 \approx 217°45'40'' \vee x_8 \approx 322°14'20''$. Quindi in conclusione abbiamo 8 soluzioni comprese in [0°; 360°] (2 si ripetono).

***Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni nell'intervallo* [0°; 360°]**

Livello 2

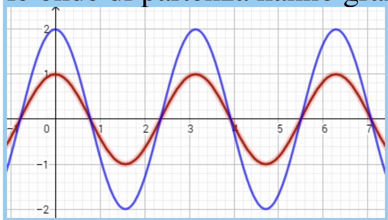
31. $cos(2x) + cos(3x) + cos(4x) = 0$ [30°∨ 90°∨ 120°∨ 150°∨ 210°∨ 240°∨ 270°∨ 330°]
32. $sin(x) - sin(2x) + sin(3x) = 0$ [0°∨ 60°∨ 90°∨ 180°∨ 270°∨ 300°∨ 360°]
33. $cos(x) - cos(3x) + sin(2x) = 0$ [0°∨ 180°∨ 210°∨ 330°∨ 360°]
34. $cos(3x) - sin(5x) + sin(x) = 0$ [30°∨ 90°∨ 150°∨ 210°∨ 270°∨ 330°]
35. $cos(4x) + cos(8x) + sin(4x)cos(6x) = 0$ [15°∨ 45°∨ 75°∨ 105°∨ 135°∨ 165°∨ 195°∨ 225°∨ 255°∨ 285°∨ 315°∨ 345°]
36. $sin(8x) - sin(4x) - sin(4x)cos(6x) = 0$ [0°∨ 15°∨ 45°∨ 75°∨ 90°∨ 105°∨ 135°∨ 165°∨ 180°∨ 195°∨ 225°∨ 255°∨ 270°∨ 285°∨ 315°∨ 345°∨ 360°]
37. $cos(6x) - cos(4x) + sin(2x)sin(5x) = 0$ [0°∨ 72°∨ 144°∨ 180°∨ 216°∨ 288°∨ 360°]
38. $sin(4x) + sin(6x) - sin(2x)sin(5x) = 0$ [0°∨ 36° ∨ 72°∨ 90° ∨ 108° ∨ 144° ∨ 180° ∨ 216° ∨ 252° ∨ ∨ 270° ∨ 288° ∨ 324° ∨ 360°]
39. $sin(4x) - sin(5x) + sin(6x) > 0$ $[0° < x < 36° \vee 60° < x < 72° \vee 108° < x < 144° \vee 180° < x < 216° \vee 252° < x < 288° \vee 300° < x < 324°]$
40. $sin(2x) - cos(x) + cos(3x) < 0$ $[30° < x < 90° \vee 150° < x < 180° \vee 270° < x < 360°]$
41. $sin(2x) - sin(3x) + sin(4x) < 0$ $[120° < x < 180° \vee 240° < x < 360° \vee\ x \neq 300°]$
42. $sin(4x) - sin(8x) + \sqrt{3}\, sin(2x) \le 0$ $[0° \le x \le 5° \vee 55° \le x \le 65° \vee 90° \le x \le 115° \vee 115° \le x \le 175° \vee 235° \le x \le 245° \vee 270° \le x \le 295° \vee 3055° \le x \le 355°]$
43. $sin(3x) + sin(7x) + \sqrt{2}\, sin(5x) = 0$ [67°30′∨72°∨112°30′∨144°∨216°∨ 247°30′∨ 288°∨ 292°30′∨360°]
44. $cos(5x) - cos(3x) + 2sin(2x) = 0$ [0°∨ 22°30′∨ 90°∨ 112°30′∨ 180°∨ 202°30′∨ 270°∨ 292°30′∨360°]
45. $cos\,(11x) + cos(7x) - 2\,cos(9x) \ge 0$ $[0° \le x \le 10° \vee 30° \le x \le 50° \vee 70° \le x \le 90° \vee 110° \le x \le 130° \vee 150° \le x \le 170° \vee\ 180° \vee 190° \le x \le 210° \vee 230° \le x \le 250° \vee 270° \le x \le 290° \vee 310° \le x \le 330° \vee 350° \le x \le 360°]$

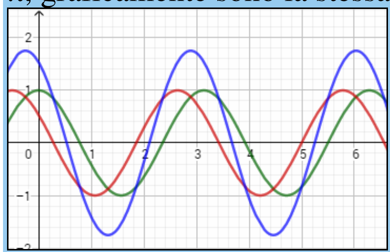
Livello 3

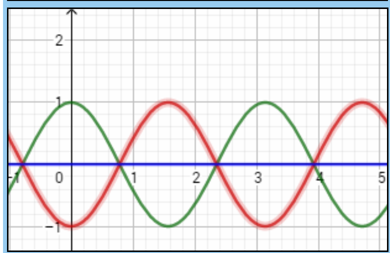
46. $sin(2x + 15°) + sin(4x - 15°) - sin(3x) = 0$ [60°∨ 75°∨ 120°∨ 180°∨ 240°∨ 300°∨ 315°∨ 360°]
47. $sin(3x - 20°) - sin(5x + 10°) + sin(x + 15°) = 0$ [16°15′∨ 76°15′∨ 106°15′∨ 165°∨ 166°15′∨ 256°15′∨ 286°15′∨ 345°∨ 346°15′]
48. $cos(6x + 20°) + cos(4x - 80°) - cos(5x - 30°) < 0$ $[10° < x < 24° \vee 60° < x < 96° \vee 132° < x < 168° \vee 204° < x < 240° \vee 250° < x < 276° \vee 312° < x < 348°]$
49. $cos(4x + 10°) - cos(30° - 8x) + sin(6x - 10°) > 0$ $[1°40' < x < 28°20' \vee 61°40' < x < 88°20' \vee 115° < x < 121°40' \vee 148°20' < x < 175° \vee 181°40' < x < 208°20' \vee 241°40' < x < 268°20' \vee 295° < x < 301°40' \vee 328°20' < x < 355°]$
50. In un triangolo si ha $a = 5$, $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$. Usando il teorema di Nepero determinare b. [≈ 4,34]
51. In un triangolo si ha $a = 5$, $b = 4$, $\alpha = 60°$. Usando il teorema di Nepero determinare β. [≈ 21°4'3″]

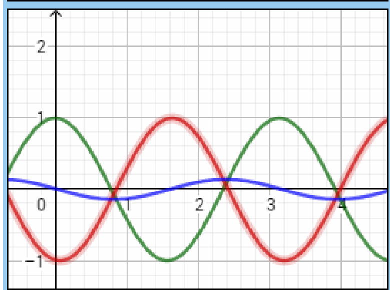
L'angolo della MateFisica

Consideriamo due onde sinusoidali governate dalle leggi $y_1(t) = a \cdot cos(\omega t)$ e $y_2(t) = a \cdot cos(\omega t + \phi)$. Pertanto le onde hanno la stessa ampiezza, a, la stessa frequenza, $2\pi/\omega$, ma *sfasate* di ϕ. Ossia dal punto di vista grafico sono le stesse cosinusoidi, ma fra loro traslate lungo l'asse dell'ascisse. Se queste onde si incontrano si produce *un'interferenza*, formando un'onda la cui legge è semplicemente $y_1(t) + y_2(t)$, ossia: $a \cdot cos(\omega t) + a \cdot cos(\omega t + \phi)$, che si può semplificare utilizzando le formule di prostaferesi, ottenendo così: $y(t) = 2a \cdot cos\left(\frac{\omega t + \omega t + \phi}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\omega t - \omega t - \phi}{2}\right) = 2a \cdot cos\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$ per cui abbiamo a che fare con un'onda che ha la stessa frequenza, ma uno sfasamento di $\varphi/2$ e un'ampiezza data da $2a \cdot cos(\varphi/2)$. Possiamo così avere *intereferenze costruttive*, ossia le due onde si *rafforzano* creando un'onda di doppia ampiezza, che accade quando $cos(\varphi/2) = 1$, cioè $\varphi = 2k\pi$. Ma anche *intereferenze distruttive*, quando $cos(\varphi/2) = 0$, cioè $\varphi = \pi + 2k\pi$. Ovviamente ci sono poi tutti i casi intermedi fra i due estremi. Vediamo degli esempi grafici, in cui le onde di partenza hanno grafici di colore rosso e verde, quello di interferenza ha colore blu.


Interferenza totalmente costruttiva, le due funzioni hanno uno sfasamento di 2π, graficamente sono la stessa funzione e sono rappresentate una sull'altra.


Interferenza parzialmerte costruttiva, lo sfasamento è uguale a 1, vicino a 0.


Interferenza totalmente distruttiva, la somma è l'asse x, lo sfasamento è π.


Interferenza parzialmente distruttiva, lo sfasamento è 3, vicino a π.

Attività

1. Determina la funzione intereferenza di due onde sfasate di 2, quindi rappresentale.
2. Come nell'esercizio precedente con sfasamento –2.
3. Come nell'esercizio precedente con sfasamento $-\pi$.
4. Come nell'esercizio precedente con sfasamento $\pi/4$.
5. In generale l'ampiezza della funzione interferenza di due onde di ampiezza a, varia fra quali valori? Giustificare la risposta. [0 e $2a$]

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi. Le soluzioni commentate si trovano alla fine del libro.

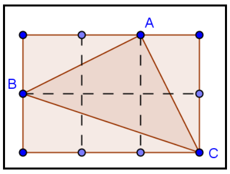
1. Determinare il minimo e il massimo di $2^{sin(x)cos(x)}$. $\left[\frac{1}{\sqrt{2}};\sqrt{2}\right]$

Determinare il periodo delle seguenti funzioni:

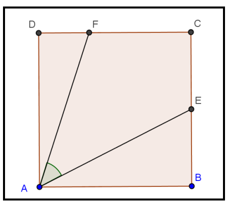
2. $y=\sum_{k=1}^{n} sin(k\cdot x)$; $y=\sum_{k=1}^{n} sin\left(\frac{x}{k}\right)$; $y = sin(kx) + cos(hx) + tan(mx)$ $\left[2\pi;2\pi;Max\left(\frac{2\pi}{k};\frac{2\pi}{h};\frac{\pi}{m}\right)\right]$

Determinare periodo e codominio delle seguenti funzioni

3. $sin^{-1}(ax)$; $sin^{-1}(a\,x + b)$ $\left[\left[-\frac{1}{|a|};\frac{1}{|a|}\right]\to\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right];\left[\frac{-b-1}{|a|};\frac{-b+1}{|a|}\right]\to\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right]$
4. $h\,sin^{-1}(a\,x + b)$; $k + sin^{-1}(a\,x + b)$
$\left[\left[\frac{-b-1}{|a|};\frac{-b+1}{|a|}\right]\to\left[-|h|\cdot\frac{\pi}{2};|h|\cdot\frac{\pi}{2}\right];\left[\frac{-b-1}{|a|};\frac{-b+1}{|a|}\right]\to\left[k-\frac{\pi}{2};k+\frac{\pi}{2}\right]\right]$
5. $k + h\,sin^{-1}(a\,x + b)$; $k + h\,cos^{-1}(a\,x + b)$
$\left[\left[\frac{-b-1}{|a|};\frac{-b+1}{|a|}\right]\to\left[k-|h|\cdot\frac{\pi}{2};k+|h|\cdot\frac{\pi}{2}\right];\left[\frac{-b-1}{|a|};\frac{-b+1}{|a|}\right]\to\left[k;k+|h|\cdot\pi\right]\right]$
6. $cos^{-1}(ax)$; $cos^{-1}(a\cdot x + b)$ $\left[\left[-\frac{1}{|a|};\frac{1}{|a|}\right]\to[0;\pi];\left[\frac{-b-1}{|a|};\frac{-b+1}{|a|}\right]\to[0;\pi]\right]$
7. $h\cdot\ cos^{-1}(a\,x + b)$; $k + cos^{-1}(a\cdot x + b)$ $\left[\left[\frac{-b-1}{|a|};\frac{-b+1}{|a|}\right]\to\left[0;|h|\cdot\pi\right];\left[\frac{-b-1}{|a|};\frac{-b+1}{|a|}\right]\to\left[k;k+\pi\right]\right]$
8. Sia $sec(x) + tan(x) = 22/7$, $csc(x) + cot(x) = m/n$, con m ed n numeri naturali primi tra di loro. Determinare $m + n$. [44]



9. Usando la figura a lato determinare il valore esatto di $tan^{-1}(1/2) + tan^{-1}(1/3)$. [π/4]
10. Senza usare la calcolatrice calcolare $tan[tan^{-1}(1/2) + tan^{-1}(1/4) + tan^{-1}(1/5)]$. Suggerimento: applicare la formula di addizione $tan(x + y + z + t) = tan[(x + y) + (z + t)]$. [14/5]
11. Dato il quadrato $ABCD$ di lato 2,46 cm, determinare sulla retta AB un punto P in modo che si abbia $\left(\frac{\overline{PC}}{\overline{PD}}\right)^2=0,39$. Esprimere il risultato in termini dell'angolo $A\hat{P}D$. Un dato è inutile, quale?
[$\approx 28°16'52'' \vee \approx 35°9'14''$, la misura del lato]
12. Un cono è circoscritto a una sfera di raggio R, determinare l'angolo formato dall'apotema del cono con il suo asse in modo tale che il rapporto tra la superficie totale del cono e la superficie della sfera sia pari a 10. [$\approx 34°32'7''$]
13. Studiare il precedente problema quando il rapporto è il numero reale m. Per quali valori di m il problema ha soluzione? [$m \geq 8$]
14. Sia E il punto medio del lato BC del quadrato $ABCD$, e sia F un punto su CD tale che $\overline{DF}=\frac{1}{3}\overline{CD}$.



Calcolare la misura di $E\hat{A}F$. Suggerimento: Calcolare $tan\left(D\hat{A}F+E\hat{A}B\right)$. [45°]
15. Studiare il precedente problema quando il rapporto è il numero reale m. Per quali valori di m il pro-

blema ha soluzione? $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2} < m < \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$

16. Un cono di rotazione è circoscritto ad una sfera di raggio r. Sapendo che il rapporto tra la superficie totale del cono e quella della sfera è 8,25, calcolare la misura dell'angolo che un lato qualunque del cono forma con l'asse. [≈ 15°4′57″ o ≈ 24°32′55″]
17. Con riferimento al problema precedente, detto m il rapporto assegnato, per quali valori di m vi sono soluzioni? Quando il problema ha una soluzione, quanto misura l'angolo? [$m \ge 8$; ≈ 19°28′16″]
18. Data una sfera, tagliarla con un piano in modo che il cerchio sezione sia equivalente alla differenza fra la superficie di una delle calotte risultanti e la superficie laterale del cono avente la stessa base e la stessa altezza di quella calotta. Determinare l'angolo formato dall'apotema di detto cono col piano secante. [≈ 51°49′38″]
19. Una semicirconferenza ha il diametro AB lungo 7,08 cm; nel semipiano che la contiene sia dato sulla tangente in A il punto M tale che AM abbia lunghezza doppia del diametro. Determinare la misura dell'angolo $A\hat{B}P$, con P sulla semicirconferenza in modo che si abbia: $\overline{MP} = \overline{AP} + 1{,}51 \cdot \overline{BP}$.
[≈ 16°24′12″ o ≈ 55°36′10″]
20. Un pentagono regolare $ABCDE$ è inscritto in una circonferenza, si scelga un punto P sull'arco $\overset{\frown}{BC}$, provare che si ha: $\overline{PA} + \overline{PD} = \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PE}$.
21. Un esagono regolare $ABCDEF$ è inscritto in una circonferenza, si scelga un punto P sull'arco $\overset{\frown}{BC}$, provare che si ha: $\overline{PE} + \overline{PF} = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$.
22. Il punto O è l'ortocentro del triangolo ABC, di cui si sa che $\angle B\hat{A}C = 60°, \overline{AO} = 2{,}15\,cm$. Determinare l'ampiezza dell'angolo $C\hat{A}O$ in modo che si abbia: $2 \cdot \overline{OB} + 3 \cdot \overline{OC} = 2{,}47 \cdot \overline{BC}$. [≈ 13°3′22″]
23. È data una circonferenza di centro O e raggio lungo 2,81 cm, della quale sia AB una corda il cui punto medio è M. Determinare la lunghezza di tale corda in modo che sia $\overline{AB} + \overline{OM} = 2{,}19 \cdot \overline{OA}$.
[≈ 4,42 cm ∨ ≈ 5,43cm]
24. Con riferimento al problema precedente, detto un punto C sulla circonferenza in modo che si abbia: $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2{,}5 \cdot \overline{AB}^2$, si trovi la misura di $C\hat{A}B$.
[per AB ≈ 4,42 cm ci sono 2 soluzioni: ≈ 50°10′27″, ≈77°58′6″; per AB ≈ 5,43 non ci sono soluzioni]
25. Provare che se in un triangolo si ha: $b + c = 2a$, allora l'area del triangolo è uguale a $\frac{3}{4} \cdot a^2 \cdot tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Verificare il risultato per i triangoli di lati lunghi (3, 4, 5), (3, 5, 7). Possiamo applicare la formula al triangolo (1, 2, 3)? [No, perché non è un triangolo]
26. Un triangolo rettangolo ABC ha l'ipotenusa BC lunga 5,81 cm e la somma della mediana CM con la metà del cateto AB è 6,57 cm. Determinare le misure degli angoli acuti.
[≈ 68°42′48″ e ≈ 21°17′12″; oppure ≈ 50°9′16″ e ≈ 39°50′44″]
27. Nel triangolo rettangolo ABC, l'ipotenusa BC è lunga 3,41 cm, il cateto CA è minore od uguale al cateto BA. Sia M il punto medio di BC e D il punto in cui l'asse di BC incontra la retta AB, determinare la misura degli angoli acuti, sapendo che l'area del rettangolo di lati CA e DM è uguale a 3,43 cm^2.
[≈ 41°36′54″, ≈ 48°23′6″]
28. Un cono è ottenuto facendo ruotare un triangolo rettangolo di ipotenusa lunga 2 attorno a uno dei suoi cateti. Determinare l'angolo formato dall'apotema e dal raggio in modo che la misura del volume del cono appartenga all'intervallo [5π/8; 64π/81]. [≈14°28′39″ ∨ ≈ 52°15′24″]
29. É dato un angolo retto XOY e sono dati due punti A e B sui lati OX ed OY in modo che $\overline{OA} = \sqrt{3} \cdot \overline{OB}$. Sia P un punto interno all'angolo retto tale che $O\hat{P}A = 90°$, determinare la misura di $A\hat{O}P$ se $\overline{OP}^2 + \overline{PB}^2 = 1{,}68 \cdot \overline{OB}^2$. [≈ 51°1′23″]
30. Con riferimento al problema precedente, se si ha $\overline{OP}^2 + \overline{PB}^2 = k \cdot \overline{OB}^2$, con k numero reale positivo, per quali valori di k il problema ammette soluzioni? Quando il problema ammette una sola soluzione, quanto misura $A\hat{O}P$? $\left[2 \cdot \left(2-\sqrt{3}\right) \le k \le 2 \cdot \left(2+\sqrt{3}\right); \approx 28°11'12" \vee \approx 82°22'9"\right]$

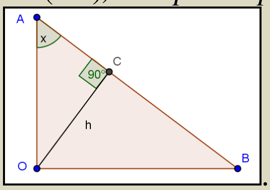
31. In generale $sin(x + y) \neq sin(x) + sin(y)$, stabilire quali proprietà devono verificare x ed y affinché si abbia l'uguaglianza. Suggerimento: usare le formule di duplicazione e di prostaferesi.
[$x + y = 2k\pi \vee x = 2k\pi \vee y = 2k\pi$]

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi

Lavoriamo insieme

Il seguente problema è stato assegnato agli esami di stato del Liceo scientifico nell'a.s. 1970/71.
È dato il triangolo AOB rettangolo in O, del quale sia h l'altezza relativa all'ipotenusa. Detta x l'ampiezza dell'angolo $O\hat{A}B$, e posto $t = tan(x/2)$, si esprima per mezzo di h e di t il perimetro del triangolo.

Consideriamo la figura 

. Ricaviamo OA dal triangolo rettangolo AOC: $h = \overline{OA} \cdot sin(x) \Rightarrow \overline{OA} = \frac{h}{sin(x)} = \frac{h\cdot(1+t^2)}{2\cdot t}$ (abbiamo usato le formule parametriche). Facciamo lo stesso con OB nel triangolo rettangolo BOC: $h = \overline{OB} \cdot sin(90° - x) \Rightarrow \overline{OB} = \frac{h}{cos(x)} = \frac{h\cdot(1+t^2)}{1-t^2}$. Ricaviamo AB con il teorema di Pitagora: $\overline{AB} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2} = \sqrt{\frac{h^2\cdot(1+t^2)^2}{4\cdot t^2} + \frac{h^2\cdot(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2}} = h\cdot(1+t^2)\sqrt{\frac{1}{4\cdot t^2} + \frac{1}{(1-t^2)^2}} =$

$$h\cdot(1+t^2)\sqrt{\frac{1+t^4-2t^2+4t^2}{4\cdot t^2\cdot(1-t^2)^2}} = h\cdot(1+t^2)\sqrt{\frac{1+t^4+2t^2}{4\cdot t^2\cdot(1-t^2)^2}} = h\cdot(1+t^2)\sqrt{\frac{(1+t^2)^2}{4\cdot t^2\cdot(1-t^2)^2}} = h\cdot(1+t^2)\cdot\frac{(1+t^2)}{2\cdot t\cdot(1-t^2)} = \frac{h\cdot(1+t^2)^2}{2\cdot t\cdot(1-t^2)}$$

Pertanto il perimetro è : $\frac{h\cdot(1+t^2)}{2\cdot t} + \frac{h\cdot(1+t^2)}{1-t^2} + \frac{h\cdot(1+t^2)^2}{2\cdot t\cdot(1-t^2)} = h\cdot(1+t^2)\cdot\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{(1+t)}}{\cancel{2}\cdot t\cdot\cancel{(1-t^2)}^{1-t}} = h\cdot\frac{1+t^2}{t\cdot(1-t)}$.

1. (Liceo scientifico 1970/71) Dato un triangolo isoscele inscritto in una circonferenza di raggio r, esprimere la somma dell'altezza e del doppio della base mediante l'angolo al vertice.
[$y = 2rcos^2(x) + 4r\, sin(2x)$, $0 < x < \pi/2$; indicando con $2x$ la misura del detto angolo]
2. (Liceo scientifico 1971/72) Data una circonferenza di diametro $AB = 2r$, si prendano su di essa da parte opposta di AB, due punti C e D tali che $A\hat{B}C = \pi/3$, $A\hat{B}D = \alpha$, Si esprima il rapporto $y = \frac{\overline{AD}^2 - \overline{CD}^2}{\overline{BC}^2}$, per mezzo di $x = tan(\alpha)$.
$\left[y = \frac{3x^2 - 2\cdot\sqrt{3}x - 3}{1+x^2}\right]$
3. (Liceo scientifico PNI 1989/90) Data la semicirconferenza di centro O e raggio r, si consideri il triangolo isoscele ABV i cui lati obliqui AV e BV siano tangenti alla semicirconferenza rispettivamente nei punti F e G e tale che la proiezione di V sulla base AB coincida con O. Detto P un punto dell'arco FG e, rispettivamente, L e M le intersezioni della tangente alla semicirconferenza in P con i lati AV e BV, si dimostri che i triangoli AOL e BMO sono simili. Indicato con x uno degli angoli alla base del triangolo ABV, si esprima in funzione di esso la somma s tra il lato del quadrato equivalente al rettangolo di lati AL e BM e l'altezza VO del triangolo ABV, osservando che s non dipende dalla posizione di P.
$\left[s = r\cdot\frac{sin(x)+cos(x)}{sin(x)\cdot cos(x)},\quad 0 < x < \frac{\pi}{2}\right]$

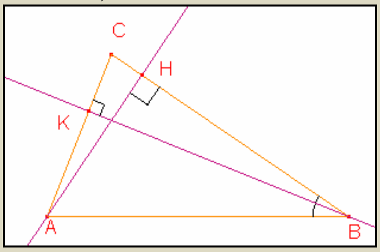
4. (Liceo scientifico 2005/06) Si considerino i triangoli la cui base è $AB = 1$ e il cui vertice C varia in modo che l'angolo $C\hat{A}B$ si mantenga doppio dell'angolo $A\hat{B}C$. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto da C.

[$3x^2 - y^2 - 4x + 1 = 0$]

Lavoriamo insieme

Vogliamo risolvere una parte di un problema assegnato nell'a.s. 2006/07 nei licei scientifici ordinari e anche in quelli con la sperimentazione PNI.

Si considerino i triangoli la cui base è $\overline{AB} = 1$ e il cui vertice C varia in modo che l'angolo $C\hat{A}B$ si mantenga doppio dell'angolo $A\hat{B}C$. Si determini l'ampiezza dell'angolo $A\hat{B}C$ che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati AC e BC e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).



Dobbiamo determinare tutto in funzione dell'angolo indicato, la cui misura incognita chiamiamo x. Abbiamo $\overline{AH} = \overline{AB} \cdot sin(x) = sin(x); \overline{BK} = \overline{AB} \cdot sin(2x) = sin(2x)$. Quindi dobbiamo determinare il massimo della funzione $y = sin^2(x) + sin^2(2x)$. Se teniamo conto della formula di duplicazione, la funzione diviene:

$$y = sin^2(x) + [2sin(x) \cdot cos(x)]^2 \Rightarrow y = sin^2(x) + 4\, sin^2(x) \cdot cos^2(x) \Rightarrow y = sin^2(x) \cdot [1 + 4\, cos^2(x)] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = sin^2(x) \cdot [1 + 4 - 4\, sin^2(x)] \Rightarrow y = sin^2(x) \cdot [5 - 4\, sin^2(x)].$$

Così se poniamo $sin^2(x) = t$, la funzione diventa $y = t \cdot (5 - 4t) \Rightarrow y = -4t^2 + 5t$ che rappresenta l'equazione di una parabola che volge la concavità verso il basso, pertanto il suo massimo è rappresentato dall'ascissa del vertice, se ovviamente questo valore corrisponde a un valore accettabile per l'angolo x. Il vertice ha ascissa $\frac{-5}{-2 \cdot 4} = \frac{5}{8}$, pertanto il massimo si ha per $sin^2(x) = \frac{5}{8} \Rightarrow sin(x) = \sqrt{\frac{5}{8}} \Rightarrow x = sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{5}{8}}\right) \approx 52°14'20''$, che è un valore accettabile.

5. (Liceo scientifico 2011/2012) Quale delle seguenti funzioni è positiva per ogni x reale?
A) $cos[sin(x^2 + 1)]$ B) $sin[cos(x^2 + 1)]$ C) $sin[ln(x^2 + 1)]$ D) $cos[ln(x^2 + 1)]$ [A]

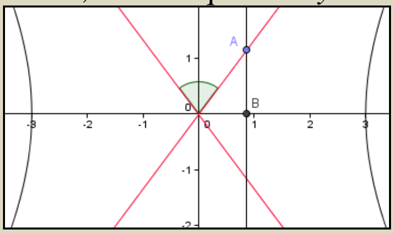
Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.

HSMC = A&M University High School Mathematics Contest
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
ARML = American Regions Math League
MT = Mathematics Teacher, rivista della NCTM
RICE = Rice University Mathematics Tournament
SC = South Carolina Mathematical Contest
V = Vermont High School Prize

Lavoriamo insieme

Consideriamo un quesito assegnato agli HSMC nel 2003.
Gli asintoti dell'iperbole $x^2/9 - y^2/16 = 1$*, passano per l'origine. Determinare il coseno del loro angolo acuto di intersezione.*
Ricordiamo che gli asintoti dell'iperbole $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, hanno equazioni $y = \pm bx/a$; pertanto in questo caso sarà: $y = \pm 4x/3$. Adesso consideriamo la figura.



L'angolo di cui dobbiamo determinare il coseno è quello indicato, che è il doppio dell'angolo che un asintoto forma con l'asse delle y, che a sua volta è il complementare di $A\hat{O}B$. Quindi

$$cos(\alpha) = cos\left(2 \cdot B\hat{A}O\right) = 2 \cdot cos^2\left(B\hat{A}O\right) - 1 = 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = 2 \cdot \frac{16}{25} - 1 = \frac{7}{25}.$$

Abbiamo tenuto conto del fatto che AOB è simile al triangolo (3, 4, 5), quindi il coseno è rapporto di 4 e 5.

1. (AHSME 1971) Il quadrilatero $ABCD$ è inscritto in una semicirconferenza di diametro $\overline{AD} = 4$, sapendo che $\overline{AB} = \overline{BC} = 1$, determinare la misura di CD. [3,5]
2. (AHSME 1976) Se $sin(2x) = a$, determinare $sin(x) + cos(x)$. $\left[\sqrt{a+1}\right]$
3. (AHSME 1979) Sapendo che $a = 1/2$ e $(a + 1) \cdot (b + 1) = 2$, determinare il valore espresso in radianti di $tan^{-1}(a) + tan^{-1}(b)$. [π/4]
4. (AHSME 1987) Determinare il seno dell'angolo formato congiungendo un vertice di un quadrato con i punti medi dei due lati non adiacenti. [3/5]

Lavoriamo insieme

Consideriamo un quesito assegnato agli HSMC nel 2008.
Senza usare la calcolatrice calcolare: $sin(\pi/32) \cdot cos(\pi/32) \cdot cos(\pi/16) \cdot cos(\pi/8) \cdot cos(\pi/4)$.
Dovremmo riconoscere facilmente che il primo prodotto è ″quasi″ la formula di duplicazione. Possiamo allora scrivere: $1/2 \cdot [2sin(\pi/32) \cdot cos(\pi/32)] \cdot cos(\pi/16) \cdot cos(\pi/8) \cdot cos(\pi/4) = 1/2 \cdot sin(\pi/16) \cdot cos(\pi/16) \cdot cos(\pi/8) \cdot cos(\pi/4)$. Ma allora possiamo ripetere il procedimento più volte, ottenendo: $1/4 \cdot sin(\pi/8) \cdot cos(\pi/8) \cdot cos(\pi/4) = 1/8 \cdot sin(\pi/4) \cdot cos(\pi/4) = 1/16 \cdot sin(\pi/2) = 1/6$.

5. (HSMC2006) Calcolare $sin^8(75°) - cos^8(75°)$. $\left[\frac{7 \cdot \sqrt{3}}{16}\right]$
6. (V 2007) Sia θ un angolo acuto per cui $tan(2\theta) + cot(2\theta) = 10$. Esprimere $sin(4\theta)$ come numero razionale. [1/5]
7. (ARML 2008) Sia $sin[2sin(x)] = cos[(2cos(x)]$; $0 < x < \pi/2$ e $tan(x) + cot(x) = \frac{a}{b - \pi^c}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calcolare $a + b + c$. [50]
8. (ARML 2008) Sia x in radianti, se $f(x) = sin\left(\frac{2x}{50}\right), g(x) = cos\left(\frac{50x}{2008}\right), h(x) = tan\left(\frac{x}{27}\right)$ e i periodi di f, g e h siano p, q ed r rispettivamente. Calcolare $max\ \{p, q, r\}$. [100π]

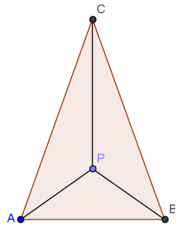
Lavoriamo insieme

Consideriamo un quesito assegnato nel agli HSMC nel 2008.
Senza usare la calcolatrice determinate il valore dell'espressione: $tan^{-1}(1/2) + tan^{-1}(1/3)$.
Diciamo $x = tan^{-1}(1/2)$, $y = tan^{-1}(1/3) \Rightarrow tan(x) = 1/2$, $tan(y) = 1/3$. Per la formula di addizione si ha:

$tan(x+y)=\dfrac{tan(x)+tan(y)}{1-tan(x)\cdot tan(y)}=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\dfrac{\frac{5}{6}}{1-\frac{1}{6}}=1$. Poiché x e y sono angoli acuti avremo

$x + y = tan^{-1}(1/2) + tan^{-1}(1/3) = \pi/4$.

9. (SC 2008) In figura, *AP* è bisettrice dell'angolo di vertice *A*, *BP* bisettrice di quello di vertice *B*.



$\overline{AP}=\overline{BP}=\sqrt{3}, \overline{CP}=3$, determinare l'area di *ABC*. $\left[4\cdot\sqrt{2}\right]$

10. (HSMC 2009) Data l'ellisse $x^2-4\cdot\sqrt{3}\cdot xy+13y^2-8x+6y=16$, ruotiamo gli assi coordinate di un angolo θ così che divengano paralleli agli assi dell'ellisse. Determinare il minimo valore di θ in radianti. [π/12]

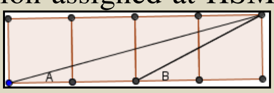
11. (V 2010) Senza calcolatrice semplificare $cos^3(15°)\cdot sin(15°)-cos(15°)\cdot sin^3(15°)$. $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{8}\right]$

12. (HSMC 2011) Calcola $\theta=tan^{-1}\left[\dfrac{sin(\pi/18)+sin(2\pi/18)}{cos(\pi/18)+cos(2\pi/18)}\right]$, in gradi sessagesimali. [15°]

Questions in English

Working together

This is a question assigned at HSMC in 2005. *In figure we have 4 squares with lines connecting the indicated vertices.*



The angles between the slanted lines and the horizontal are denoted by A and B. what is the measure of the angle A + B?

We have: $tan(A)=\dfrac{1}{4}, tan(B)=\dfrac{1}{2}, tan(A+B)=\dfrac{tan(A)+tan(B)}{1-tan(A)\cdot tan(B)}=\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}=\dfrac{6}{7}$.

Thus $A+B=tan^{-1}\left(\dfrac{6}{7}\right)\approx 40°36'5''$.

13. (MT1997) Using Ptolemy's theorem, if the cyclic quadrilateral *ABCD* has sides *AB* = 6, *CD* = 9 and *DA* = 7, calculate the approximate value of the diagonal *BD*. [10,7]
14. (HSMC2004 If *sin*(*x*) – *cos*(*x*) = 1/5, π/4 ≤ *x* ≤ π/2, find *cos*(2*x*). [±7/5]
15. (V2006) Suppose that *x* and *y* are real numbers such that *tan*(*x*) + *tan*(*y*) = 42 and *cot*(*x*) + *cot*(*y*) = 49. What is the value of *tan*(*x* + *y*) ? [294]
16. (V2007) Suppose that $sin(2x)=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$. Express $sin^4(x)+cos^4(x)$ as a rational number in lowest terms. [13/14]
17. (V 2007) In triangle *ABC*, *AC* = 12. If one of the trisectors of angle *B* is the median to *AC* and the other trisector of angle *B* is the altitude to *AC*, find the area of triangle *ABC*. $\left[18\cdot\sqrt{3}\right]$

18. (HSMC2008) Without any electronic device calculate $[1/2 - sin^2(\pi/16)]^2$. $\left[\frac{2+\sqrt{2}}{16}\right]$

19. (ARLM2008) If $f(x) = sin\left(\frac{x}{25}\right), g(x) = cos\left(\frac{25x}{1004}\right), h(x) = tan\left(\frac{x}{100}\right)$, and x be in radians. Let the periods of f, g, and h be p, q, and r respectively. Compute max $\{p, q, r\}$. $[r]$

20. (V 2009) Find the value of $sin^5(15°) \cdot cos^2(15°)$. Express your answer as a rational number in lowest terms. [1/16]

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia navale) Risolvere le seguenti equazioni: $4 \cdot sin^2 x - 3 = 0; 4 \cdot sin^2(2x) - 1 = 0; \frac{sin(2x)}{tan\, x} = 0$.
2. (Accademia navale) Risolvere l'equazione $sin(5x) - sin(3x) = sin(x)$.
3. (Accademia navale) Risolvere il seguente sistema di disequazioni $\begin{cases} sin\, x + cos\, x < 1 \\ sin\, x - cos\, x < 0 \end{cases}$.
4. (Accademia navale) Determinare i valori di k per i quali la disuguaglianza $k \cdot cos(x) - sin(x) + 1 \geq 0$ è vera per ogni x.
5. (Odontoiatria 2002) La funzione $y = cos(x) \cdot sin(x)$
   A) è periodica di periodo π B) non è periodica C) è periodica di periodo $3\pi/2$
   D) è periodica di periodo $\pi/2$ E) è periodica di periodo $2\pi/3$
6. (Medicina 2004) L'espressione goniometrica $sin(9x) - sin(3x)$ equivale a
   A) $6sin(x)$ B) $sin(9x) \cdot cos(3x) - sin(3x) \cdot cos(9x)$ C) $3\,[sin(3x) - sin(x)]$
   D) $1/2 \cdot [cos(6x) - cos(12x)]$ E) $2\, cos(6x)\, sin(3x)$

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_4_7.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	2	3
$x = \pi/3 + k\pi \vee x = 2\pi/3 + k\pi$; $x = \pm\pi/4 + k\pi \vee x = k\pi$	$x = \pi/12 + k\pi/6 \vee x = k\pi$	$-3\pi/4 + 2k\pi < x < 2k\pi$
4	**5**	**6**
$k = 0$	A	E

7. La misurazione degli angoli

7.5 Forma trigonometrica dei numeri complessi

Prerequisiti

- Il calcolo polinomiale.
- Il concetto di campo.
- Risoluzione delle equazioni di primo e secondo grado.
- I numeri complessi

Obiettivi

- Comprendere il concetto di estensione di una struttura algebrica
- Comprendere il concetto di numero complesso
- Operare algebricamente con i numeri complessi

Contenuti

- Forma trigonometrica, radici ennesime dei numeri complessi e piano di Argand – Gauss

Quelli che … vogliono sapere di più

- Il campo dei numeri complessi
- Equazioni in $\mathbb{C}$

Parole Chiave

Modulo – Norma – Numero complesso – Numero complesso coniugato – Unità immaginaria

Simbologia

$\sqrt[n]{z}^{(c)}$	Indica le radici ennesime complesse di z

Richiamiamo le conoscenze

Radice ennesima algebrica

Definizione A

Dato un numero reale x, diciamo sua *radice ennesima algebrica,* l'unico numero reale y concorde con x, se esiste, per cui si ha: $y^n = x$. La radice ennesima algebrica la indichiamo con il simbolo $\sqrt[n]{x}$.

Esempio A

- $\sqrt[4]{16} = 2$ perché $2^4 = 16$; nonostante si abbia anche $(-2)^4 = 16$ non possiamo scrivere $\sqrt[4]{16} = -2$, perché $\sqrt[4]{16} > 0$ mentre $-2 < 0$.
- Abbiamo invece $\sqrt[3]{-64} = -\sqrt[3]{64} = -4$. Allo stesso modo $\sqrt{-4}$ non è un numero reale, perché il quadrato di ogni numero reale non è mai un numero reale negativo.

Relazioni di ordinamento

Definizione B

Data una relazione binaria di un insieme su se stesso: $\Re : A \to A$, diciamo che essa gode della
- **proprietà riflessiva** se $a \ \Re \ a$, $\forall \ a \in A$; cioè ogni elemento è in relazione con se stesso.
- **proprietà antiriflessiva** se $a \ \not\Re \ a$, $\forall \ a \in A$; cioè nessun elemento è in relazione con se stesso.
- **proprietà antisimmetrica** se $a \ \Re \ b \wedge b \ \Re \ a \Rightarrow a = b$, $\forall \ a, b \in A$; cioè se un elemento è in relazione con un secondo e anche il viceversa è vero allora i due elementi coincidono.
- **proprietà transitiva** se $a \ \Re \ b \wedge b \ \Re \ c \Rightarrow a \ \Re \ c$, $\forall \ a, b, c \in A$; cioè se dal sapere che un elemento è in relazione con un secondo e questo è in relazione con un terzo, possiamo dedurre che anche il primo è in relazione con il terzo.
- **proprietà di connessione** se $a \ \Re \ b \vee b \ \Re \ a$, $\forall \ a, b \in A$. Cioè due elementi qualsiasi sono sempre in relazione fra loro.

Definizione C

Ogni relazione binaria su A, che verifica le proprietà riflessiva o antiriflessiva, antisimmetrica e transitiva è una **relazione di ordinamento** su A. Cioè gli elementi di A possono disporsi in una *graduatoria* in modo da stabilire chi viene prima e chi viene dopo. In particolare
- se vale la proprietà riflessiva si parla di **ordine debole**, ossia è possibile che vi siano elementi *pari merito*,
- se vale la proprietà antiriflessiva si parla di **ordine stretto**, nel senso che non vi sono *pari merito*.
- se vale anche la proprietà di connessione si parla di **ordine totale**, viceversa si parla di **ordine parziale**.

Esempio B

- $(\mathbb{R}, >)$ è un ordine totale stretto sui numeri reali e su ogni suo sottoinsieme, che perciò possono mettersi in una *scala ascendente*, dal minore al maggiore.
- L'ordine delle parole di un vocabolario è invece un ordine totale debole, dato che i sinonimi stanno allo stesso livello, nel senso che per esempio i diversi significati della parola catena (oggetto di metallo, vincolo, successione di avvenimenti, ...) sono posti in un ordine che non è però assoluto, essi possono scambiarsi fra loro senza che ciò pregiudichi la *serietà* del vocabolario. Invece non possono interscambiarsi gli ordini delle parole catena e carena.
- L'ordine delle file negli uffici in cui vi sono più sportelli è un ordine parziale stretto, dato che le persone in file hanno un ordine totale solo all'interno delle file, ma non fra file diverse.

Forma trigonometrica, radici ennesime dei numeri complessi e piano di Argand–Gauss

Vogliamo rappresentare graficamente i numeri complessi. Abbiamo già osservato che essi si si possono considerare come coppie di numeri reali, la parte reale e quella immaginaria. Quindi è abbastanza immediato pensare che al numero complesso *a* + *bi* si possa associare il punto di coordinate (*a*; *b*).

Definizione 1

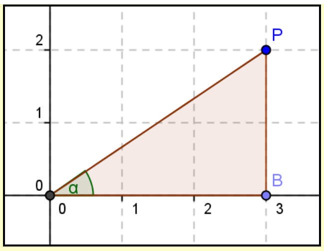
Diciamo **piano di Argand-Gauss** il sistema di riferimento cartesiano ortogonale nel quale sulle ascisse rappresentiamo le parti reali dei numeri complessi e sulle ordinate i coefficienti dell'immaginario.

Esempio 1

Nel piano di Argand-Gauss il punto (3; 2), rappresenta il numero complesso 3 + 2*i*.

Questo ci permette di fornire una ulteriore interpretazione dei numeri complessi, stavolta usando la trigonometria.

Esempio 2



In figura abbiamo la rappresentazione, nel piano di Argand-Gauss, del numero complesso 3 + 2*i*. Possiamo però anche dire che si ha: $3 = \overline{OP} \cdot cos(\alpha); 2 = \overline{OP} \cdot sin(\alpha)$, quindi possiamo anche dire che si ha: $3 + 2i = \overline{OP} \cdot [cos(\alpha) + sin(\alpha) \cdot i]$, o meglio, dato che $\overline{OP} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, scriviamo: $3 + 2i = \sqrt{13} \cdot [cos(\alpha) + sin(\alpha) \cdot i]$. Possiamo anche esprimere l'angolo mediante le coordinate: $\alpha = tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$. Quindi alla fine avremo: $3 + 2i = \sqrt{13} \cdot \left\{ cos\left[tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right] + sin\left[tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right] \cdot i \right\}$.

Generalizziamo quanto visto nell'esempio precedente.

Definizione 2

Dato il numero complesso *a* + *bi*, diciamo sua **forma trigonometrica** l'espressione

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cdot [cos(\vartheta) + sin(\vartheta) \cdot i], \text{ in cui } \vartheta = \begin{cases} tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) & se\ \ a \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & se\ \ a = 0, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & se\ \ a = 0, b < 0 \end{cases}.$$

Esempio 3

- La forma trigonometrica del numero complesso 1 + *i*, è $\sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \left[cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot i\right]$, dato che si ha:

$\vartheta = tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$. E in effetti: $\sqrt{2}\cdot\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot i\right)=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot i\right)=\frac{2}{2}+\frac{2}{2}i=1+i$.

- Invece ovviamente si ha: 1 = $cos(0) + sin(0) \cdot i$ e – 1 = $cos(\pi) + sin(\pi) \cdot i$.
- Infine $i = cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot i$ e $-i = cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot i$.

Cosa succede moltiplicando due numeri complessi in forma trigonometrica?

Esempio 4

Vogliamo moltiplicare i numeri complesso 1 + i e $1-\sqrt{3}i$. Nell'esempio precedente abbiamo visto che si ha: $1+i=\sqrt{2}\cdot\left[cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot i\right]$. Poniamo in forma trigonometrica anche l'altro numero: $\vartheta = tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{1}\right)=-\frac{\pi}{3}$, quindi: $1-\sqrt{3}i=\sqrt{1+3}\cdot\left[cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cdot i\right]=2\cdot\left[cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cdot i\right]$.

Adesso effettuiamo la moltiplicazione:

$$(1+i)\cdot(1-\sqrt{3}i)=\left[\sqrt{2}\cdot\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot i\right)\right]\left[2\cdot\left(cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cdot i\right)\right]=$$

$$=2\cdot\sqrt{2}\cdot\left[cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cdot i+sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cdot i+sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cdot i^2\right]=$$

$$=2\cdot\sqrt{2}\cdot\left\{\left[cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]+\left[cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]\cdot i\right\}$$

Osserviamo che possiamo semplificare usando le formule di addizione di seno e coseno:

$$2\cdot\sqrt{2}\cdot\left[cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)+sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\cdot i\right]=2\cdot\sqrt{2}\cdot\left[cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\cdot i\right]=2\cdot\sqrt{2}\cdot\left[cos\left(\frac{\pi}{12}\right)-sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\cdot i\right]$$

Il procedimento precedente ci permette di enunciare il seguente risultato, generalizzato anche alle divisioni.

Teorema 1

Si ha: $$\left\{\rho_1\cdot\left[cos(\vartheta_1)+sin(\vartheta_1)\cdot i\right]\right\}\cdot\left\{\rho_2\cdot\left[cos(\vartheta_2)+sin(\vartheta_2)\cdot i\right]\right\}=\rho_1\cdot\rho_2\cdot\left[cos(\vartheta_1+\vartheta_2)+sin(\vartheta_1+\vartheta_2)\cdot i\right]$$

$$\frac{\rho_1\cdot\left[cos(\vartheta_1)+sin(\vartheta_1)\cdot i\right]}{\rho_2\cdot\left[cos(\vartheta_2)+sin(\vartheta_2)\cdot i\right]}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\left[cos(\vartheta_1-\vartheta_2)+sin(\vartheta_1-\vartheta_2)\cdot i\right]$$

Dimostrazione Per esercizio, sulla falsariga dell'esempio 4.

Si ha la seguente interessante conseguenza.

Corollario 1

Vale la seguente formula di De Moivre:

$$(a+bi)^n=\left\{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left[cos(\vartheta)+sin(\vartheta)\cdot i\right]\right\}^n=\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^n\cdot\left[cos(n\cdot\vartheta)+sin(n\cdot\vartheta)\cdot i\right].$$

Esempio 5

Abbiamo $(1 + i)^5 = \left(\sqrt{2}\right)^5\cdot\left[cos\left(5\cdot\frac{\pi}{4}\right)+sin\left(5\cdot\frac{\pi}{4}\right)\cdot i\right]=4\cdot\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-4-4i$.

Possiamo generalizzare ancora le precedenti formule per calcolare le radici dei numeri complessi.

Esempio 6

Vogliamo calcolare $\sqrt{-9-40i}$. La definizione di radice quadrata non varia, stiamo perciò cercando un numero, naturalmente complesso, $a + bi$, il cui quadrato è uguale al radicando. Cioè vogliamo risolvere l'equazione $(a + bi)^2 = -9 - 40i$. Sviluppiamo il quadrato: $a^2 - b^2 + 2abi = -9 - 40i$, uguagliamo parte reale e parte complessa: $\begin{cases} a^2-b^2=-9 \\ 2ab=-40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2-b^2=-9 \\ ab=-20 \end{cases}$. Abbiamo ottenuto un sistema di quarto grado, non simmetrico, nelle variabili reali a e b. Risolviamolo: $\begin{cases} \left(-\dfrac{20}{b}\right)^2-b^2=-9 \\ a=-\dfrac{20}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{400}{b^2}-b^2=-9 \\ a=-\dfrac{20}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{400-b^4+9b^2}{4b^2}=0 \\ a=-\dfrac{20}{b} \end{cases}$.

Risolviamo l'equazione: $b^4 - 9b^2 - 400 = 0 \Rightarrow b^2 = \dfrac{9 \pm \sqrt{81+1600}}{2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{1681}}{2} = \dfrac{9 \pm 41}{2} = \prec \begin{matrix} 25 \\ -16 \end{matrix}$, quindi abbiamo due equazioni che hanno soluzioni $b = \pm 5 \vee \pm 4i$. Adesso sostituiamo i due valori trovati nel sistema per ottenere i valori di a. $\begin{cases} b=\pm 5 \\ a=-\dfrac{20}{\pm 5} \end{cases} \wedge \begin{cases} b=\pm 4i \\ a=-\dfrac{20}{\pm 4i} \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow \begin{cases} b=\pm 5 \\ a=\mp 4 \end{cases} \wedge \begin{cases} b=\pm 4i \\ a=\mp\dfrac{5}{i}=\pm 5i \end{cases}$.

Quindi possiamo dire che vi sono quattro radici quadrate del numero complesso $-9 - 40i$, dato che abbiamo ottenuto quattro soluzioni? Scriviamo queste soluzioni nella tabella e osserviamo che i quattro valori danno solo due distinti numeri complessi, che sono le due radici quadrate: $\pm 4 \mp 5i$.

a	b	$a + b\ \ i$
4	-5	$4 - 5i$
-4	5	$-4 + 5i$
$5i$	$4i$	$5i + i\ \cdot 4i = 5i - 4$
$-5i$	$-4i$	$-5i + i\ \cdot (-4i) = -5i + 4$

L'esempio precedente ci fa notare che vi è una differenza fra la radice quadrata algebrica, quella calcolata in $\mathbb{R}$, e la stessa radice calcolata in $\mathbb{C}$. Infatti nel primo caso la radice quadrata, se esiste, è unica; in questo caso ve ne sono due, entrambe accettabili. Mentre infatti sia 3^2 sia $(-3)^2 = 9$, ma $\sqrt{9}=3$, perché $\sqrt{9}>0$ mentre $-3 < 0$; per i numeri complessi non abbiamo definito il concetto di numero positivo o negativo, quindi possiamo scrivere tanto $\sqrt{-9-40i}=4-5i$, quanto $\sqrt{-9-40i}=-4+5i$.

Definizione 3

Diciamo **radici ennesime di un numero complesso** z tutti i numeri complessi la cui ennesima potenza è pari a z.

Notazione 1

Le radici ennesime di numero complesso z si indicano con $\sqrt[n]{z}^{(c)}$.

Esempio 7

Possiamo allora dire che $\sqrt{1}=1$, mentre $\sqrt{1}^{(c)}=\pm 1$.

Adesso possiamo generalizzare la formula di De Moivre per esponenti razionali.

Teorema 2

Esistono esattamente n radici ennesime, fra loro distinte, di un numero complesso e si ottengono usando la seguente identità di De Moivre:

$$\sqrt[n]{a+bi}=\sqrt[n]{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left[cos(\vartheta)+sin(\vartheta)\cdot i\right]}=\sqrt[2n]{a^2+b^2}\cdot\left[cos\left(\frac{\vartheta+2k\pi}{n}\right)+sin\left(\frac{\vartheta+2k\pi}{n}\right)\cdot i\right];k=0,...,n-1.$$

Esempio 8

Vogliamo calcolare le radici quarte dell'unità: $\sqrt[4]{1}^{(c)}$. Si ha: 1 = *cos*(0) + *sin*(0) · *i*; adesso applichiamo il risultato del teorema 2. $\sqrt[4]{1}^{(c)} = \sqrt[4]{1} \cdot \left[cos\left(\frac{2k\pi}{4}\right) + sin\left(\frac{2k\pi}{4}\right) \cdot i \right], k = 0, ..., 3$, cioè le 4 radici sono:

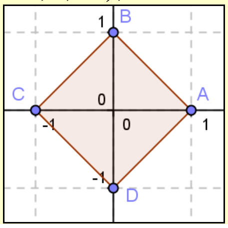
$$cos(0) + sin(0)\, i = 1,\ cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot i = i,\ cos(\pi) + sin(\pi)\, i = -1,\ cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \cdot i = -i$$

Perciò le radici quarte dell'unità sono: (±1, ±*i*).

Concludiamo con un'ultima questione.

Esempio 9

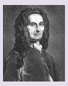
Rappresentando le radici quarte dell'unità: (1, –1, *i*, –*i*), otteniamo i vertici di un quadrato



Quanto visto nell'esempio precedente non è un caso, ma accade sempre. Se rappresentiamo le radici ennesime del numero 1 sul piano di Argand-Gauss otteniamo i vertici di un poligono regolare di *n* lati.

I protagonisti

Jean Robert Argand nacque il 18 Luglio 1768 a Ginevra e morì il 13 Agosto 1822 a Parigi. Il lavoro nel quale è trattata la rappresentazione dei numeri complessi è del 1806. Però già nel 1787 il norvegese Caspar Wessel (1745-1818), aveva scritto un articolo su questo argomento, che però fu pubblicato solo nel 1799 e soprattutto non fu notato dai matematici, fino al 1895. Anche il lavoro di Argand passò inosservato, però una copia fu spedita al famoso matematico francese Legendre che a sua volta ne inviò una copia a un modesto altro matematico, François Français. Alla morte di questi il fratello Jacques Français lavorò sul lavoro di Argand e nel settembre 1813 pubblicò un lavoro sull'argomento, alla fine del quale disse di essersi basato su un libro di uno sconosciuto autore.

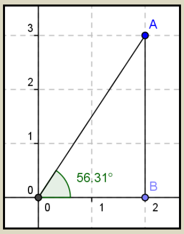

Abraham de Moivre nacque il 26 Maggio 1667 a Vitry-le-François e morì il 27 Novembre 1754 a Londra. È considerato un pionere della geometria analitica della teoria della Probabilità. In particolare nel 1718pubblicò il lavoro *The Doctrine of Chance: A method of calculating the probabilities of events in play*. La formula trigonometrica associata al suo nome apparve in un suo articolo del 1722, ma una precedente formula, abbastanza simile l'aveva già pubblicata nel 1707.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Esprimere in forma trigonometrica il numero complesso 2 + 3*i*.

Cominciamo a calcolare l'angolo: $\vartheta = tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0,98$, ovviamente in radianti. In gradi è ≈ 56°18'38". Possiamo quindi scrivere: $2+3i=\sqrt{4+9}\cdot\left[cos(\vartheta)+sin(\vartheta)i\right] = \sqrt{13}\cdot\left[cos(\vartheta)+sin(\vartheta)i\right]$. Per concludere rappresentiamo il tutto nel piano di Argand Gauss.



Rappresentare nel piano di Argand Gauss ed esprimere in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi

Livello 1

1. 1 ; – *i* ; 1 – *i* $\left[cos(0)+sin(0)\cdot i; cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot i; \sqrt{2}cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot i\right]$

2. $\sqrt{3}+i$; $\sqrt{3}-i$; $1+\sqrt{3}i$ $\left[2cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+2sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot i; 2cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cdot i; 2cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+2sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot i\right]$

3. 1 + 2*i* ; 3 + 4*i* $\left[\left(\sqrt{5}cos(\vartheta)+\sqrt{5}sin(\vartheta)i; \vartheta\approx 1,107\right); \left(5cos(\vartheta)+5sin(\vartheta)i; \vartheta \approx 0,927\right)\right]$

Usando la formula di De Moivre semplificare le seguenti potenze

Livello 1

4. $(1-i)^7$; $(1+i)^{11}$; $\left(1-\sqrt{3}i\right)^3$; $\left(3-\sqrt{3}i\right)^6$; $\left(\sqrt{3}-3i\right)^4$; $\left(\sqrt{3}+3i\right)^8$

$\left[8+8i; -32+32i; -8; -1728; -72+72\cdot\sqrt{3}i; -10368+10368\sqrt{3}i\right]$

Lavoriamo insieme

Calcolare le radici quadrate complesse di 3 – 2*i*, *ossia calcolare* $\sqrt{3-2i}^{(c)}$.

Il risultato è ancora un numero complesso, *x* + *iy*, che verifica: $(x + iy)^2 = 3 - 2i$, quindi $x^2 - y^2 + 2ixy = 3 - 2i$. Dato che però due numeri complessi sono uguali solo se hanno uguali le rispettive parti reali e immaginarie, dobbiamo risolvere il sistema: $\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ xy=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(-\frac{1}{y}\right)^2-y^2=3 \\ x=-\frac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{y^2}-y^2=3 \\ x=-\frac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-y^4=3y^2 \\ x=-\frac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} y^4+3y^2-1=0 \\ x=-\frac{1}{y} \end{cases}$. Risolviamo adesso l'equazione $y^2=\frac{-3\pm\sqrt{9+4}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2} \Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}}$. Accettiamo solo le soluzioni reali. Quindi: $\begin{cases} x=\mp\sqrt{\frac{2}{-3+\sqrt{13}}} \\ y=\pm\sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\mp\sqrt{\frac{2\cdot\left(-3-\sqrt{13}\right)}{\left(-3+\sqrt{13}\right)\cdot\left(-3-\sqrt{13}\right)}} \\ y=\pm\sqrt{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}} \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x=\mp\sqrt{\dfrac{2\cdot\left(-3-\sqrt{13}\right)}{-13+9}} \\ y=\pm\sqrt{\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\mp\sqrt{\dfrac{2\cdot\left(-3-\sqrt{13}\right)}{-4}} \\ y=\pm\sqrt{\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\mp\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}} \\ y=\pm\sqrt{\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}} \end{cases}.$$

Le radici sono dunque: $\pm\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}}\mp i\sqrt{\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}}$.

Calcolare le seguenti radici quadrate complesse

Livello 2

5. $\sqrt{-3}^{(c)}$; $\sqrt{25+9i}^{(c)}$; $\sqrt{1-i}^{(c)}$; $\sqrt{i}^{(c)}$

$$\left[\pm i\sqrt{3};\pm\frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{706}+25\right)}+i\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{706}-25\right)}}{2};\pm\left(\frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)}}{2}-\frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}}{2}i\right);\pm\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right]$$

6. $\sqrt{-i}^{(c)}$; $\sqrt{2-i}^{(c)}$; $\sqrt{3i}^{(c)}$; $\sqrt{i-5}^{(c)}$

$$\left[\pm\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2};\pm\left(\frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{5}+2\right)}}{2}-\frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)}}{2}i\right);\pm\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{6}}{2};\pm\frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{26}-5\right)}+i\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{26}+5\right)}}{2}\right]$$

7. $\sqrt{\dfrac{1}{2}-i}^{(c)}$; $\sqrt{\dfrac{2}{3}i-\dfrac{1}{2}}^{(c)}$; $\sqrt{4i}^{(c)}$; $\sqrt{\dfrac{i-21}{4}}^{(c)}$

$$\left[\pm\frac{\sqrt{\sqrt{5}+1}-i\sqrt{\sqrt{5}-1}}{2};\pm\frac{\sqrt{6}+2i\sqrt{6}}{6};\pm\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right);\pm\frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{442}-21\right)}+i\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{442}+21\right)}}{4}\right]$$

8. $\sqrt{3i-4}^{(c)}$; $\sqrt{4i+3}^{(c)}$; $\sqrt{4i-3}^{(c)}$; $\sqrt{3-5i}^{(c)}+\sqrt{5i+3}^{(c)}$; $\sqrt{1+2i}^{(c)}-\sqrt{1-2i}^{(c)}$

$$\left[\pm\frac{\sqrt{2}+3i\sqrt{2}}{2};\pm(2+i);\pm(1+2i);\pm\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{34}+3\right)};\pm\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}\cdot i\right]$$

9. $\sqrt{3+4i}^{(c)}$; $\sqrt{3i+4}^{(c)}$; $\sqrt{5i+12}^{(c)}$; $\sqrt{12i+5}^{(c)}$; $\sqrt{8i+15}^{(c)}$; $\sqrt{8+15i}^{(c)}$

$$\left[\pm(2+i);\pm\frac{3\cdot\sqrt{2}+i\cdot\sqrt{2}}{2};\pm\frac{5\cdot\sqrt{2}+i\cdot\sqrt{2}}{2};\pm(3+2i);\pm(4+i);\pm\frac{5\cdot\sqrt{2}+3i\cdot\sqrt{2}}{2}\right]$$

Livello 3

10. $\sqrt{\sqrt{2}-i}^{(c)}$; $\sqrt{1-\sqrt{2}i}^{(c)}$; $\sqrt{|a+ib|}^{(c)}$

$$\left[\frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}-i\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}}{2};\pm\frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)}-i\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}}{2};\pm\sqrt[4]{a^2+b^2}\right]$$

11. $\sqrt{\dfrac{\sqrt{i}+1}{2}}^{(c)}$; $\sqrt{\sqrt{2}i-1}^{(c)}$ $\left[\pm\dfrac{\sqrt{2\cdot\left(2\sqrt{\sqrt{2}+2}+\sqrt{2}+2\right)}+i\sqrt{2\cdot\left(2\cdot\sqrt{\sqrt{2}+2}-\sqrt{2}-2\right)}}{4};\pm\dfrac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}\pm i\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)}}{2}\right]$

12. $\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}^{(c)}$; $\sqrt{i-\sqrt{3}}^{(c)}$; $\sqrt{\sqrt{10}+\sqrt{6}i}^{(c)}$; $\sqrt{a^2i}^{(c)}$

$$\left[\pm\frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}+i\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}}{2};\pm\frac{\sqrt{\sqrt{3}-1}+i\sqrt{\sqrt{3}+1}}{2};\pm\frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{10}+4\right)}\pm i\sqrt{-2\cdot\left(\sqrt{10}-4\right)}}{2};\pm\frac{|a|\cdot\sqrt{2}+i\cdot|a|\cdot\sqrt{2}}{2}\right]$$

Lavoriamo insieme

Calcolare $\sqrt[4]{3-4i}^{(c)}$.

Piuttosto che cercare dei numeri complessi la cui quarta potenza sia uguale al radicando, consideriamo l'identità $\sqrt[4]{3-4i}^{(c)} = \sqrt{\sqrt{3-4i}^{(c)}}^{(c)}$. Ma $\sqrt{3-4i}^{(c)} = \pm 2 \mp i$, infatti: $3 - 4i = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, da cui $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^4 + 3y^2 - 4 = 0 \\ x = -2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 1 \\ x = -\dfrac{2}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm 1 \\ x = \mp 2 \end{cases}$ e quindi abbiamo $\sqrt[4]{3-4i}^{(c)} = \sqrt{\pm 2 \mp i}^{(c)}$. Utilizzando ora il consueto procedimento per il calcolo delle radici quadrate di un numero complesso, otteniamo le seguenti 4 radici: $\sqrt[4]{3-4i}^{(c)} = \sqrt{\pm 2 \mp i}^{(c)} = \pm \dfrac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{5}\pm 2\right)} \mp i\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{5}\mp 2\right)}}{2}$. Infatti: $\sqrt{\pm 2 \mp i}^{(c)} = v + w \Rightarrow \pm 2 \mp i = (v + w)^2$, poiché $\pm 2 \mp i = \pm(2 - i)$ si ha $\pm(2 - i) = (v + iw)^2 = v^2 - w^2 + 2vwi$, da cui:

$$\begin{cases} v^2 - w^2 = \pm 2 \\ 2vw = \mp 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{4w^2} - w^2 = \pm 2 \\ v = \mp \dfrac{1}{2w} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 4w^4 = \pm 8w^2 \\ v = \mp \dfrac{1}{2w} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4w^4 \pm 8w^2 - 1 = 0 \\ v = \mp \dfrac{1}{2w} \end{cases} \Rightarrow w^2 = \frac{\mp 8 + \sqrt{80}}{8} =$$

$$= \frac{\mp 8 + 4\sqrt{5}}{8} = \frac{\mp 4 + 2\sqrt{5}}{4} \Rightarrow \begin{cases} w = \pm \dfrac{\sqrt{2(\sqrt{5}\mp 2)}}{2} \\ v = \mp \dfrac{1}{2w} = \mp \dfrac{1}{\sqrt{2(\sqrt{5}\mp 2)}} = \mp \dfrac{\sqrt{2(\sqrt{5}\pm 2)}}{2} \end{cases}.$$

Calcolare le seguenti radici ennesime complesse, usando, laddove possibile, l'espressione in forma trigonometrica

Livello 2

13. $\sqrt[4]{i}^{(c)}$; $\sqrt[4]{3+4i}^{(c)}$ $\left[\pm\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}-\sqrt{2+\sqrt{2}}i}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}i}{2}; \pm\dfrac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)}-\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{5}+2\right)}i}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{5}+2\right)}+\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)}i}{2}\right]$

14. $\sqrt[4]{5-12i}^{(c)}$ $\left[\pm\dfrac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{13}-3\right)}+\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{13}+3\right)}i}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{13}+3\right)}-\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{13}-3\right)}i}{2}\right]$

15. $\sqrt[4]{8+15i}^{(c)}$ $\left[\pm\dfrac{\sqrt{2\cdot\sqrt{17}-5\cdot\sqrt{2}}-\sqrt{2\cdot\sqrt{17}+5\cdot\sqrt{2}}i}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{2\cdot\sqrt{17}+5\cdot\sqrt{2}}+\sqrt{2\cdot\sqrt{17}-5\cdot\sqrt{2}}i}{2}\right]$

Determinare e rappresentare sul piano di Argand Gauss le seguenti radici complesse

16. $\sqrt[8]{1}^{(c)}$; $\sqrt[3]{i}^{(c)}$; $\sqrt[4]{-i}^{(c)}$
$\left[\left(\pm 1, \pm\sqrt{2}\cdot\dfrac{1+i}{2}, \pm\sqrt{2}\cdot\dfrac{1-i}{2}, \pm i\right); \left(\dfrac{\pm\sqrt{3}+i}{2}, -i\right); \left(\pm\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}\mp\sqrt{2-\sqrt{2}}i}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}i}{2}\right)\right]$

17. $\sqrt[3]{1}^{(c)}$; $\sqrt[6]{-1}^{(c)}$; $\sqrt[6]{1}^{(c)}$ $\left[\left(1, \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right); \left(\pm i, \pm\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}, \pm\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right); \left(\pm 1, \pm\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}, \pm\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

Quelli che… vogliono sapere di più

Il campo dei numeri complessi

Un altro modo di introdurre i numeri complessi è quello di stabilire una loro relazione con $\mathbb{R}^2$, ossia di considerare la corrispondenza biunivoca che a ogni coppia di numeri reali (a, b) associa il numero complesso $a + bi$. Vogliamo quindi stabilire un isomorfismo fra $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$. Per far ciò definiamo le seguenti operazioni di somma e prodotto: $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$; $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.
Con queste definizioni, che sono equivalenti alle precedenti definizioni algebriche polinomiali, le coppie $(a, 0)$ costituiscono i numeri reali, le coppie $(0, b)$ i numeri complessi *puri*, in particolare $(0, 1)$ rappresenta l'unità immaginaria i. Naturalmente questa coppia verifica la proprietà fondamentale dell'unità immaginaria: infatti $(0, 1) \cdot (0, 1) = (0 - 1, 0 +) = (-1, 0)$, che rappresenta appunto -1.
Abbiamo anche detto che il campo dei numeri reali è ordinato totalmente, nel senso che si può stabilire una *graduatoria* fra due numeri reali qualsiasi dicendo chi viene *prima* e chi *dopo*. In particolare scegliendo lo 0 come elemento separatore distinguiamo i numeri reali positivi da quelli negativi. Anche $\mathbb{C}$ può ordinarsi totalmente, anche se non possiamo poi parlare di numeri complessi positivi e di numeri complessi negativi.

Teorema 3

Il campo $\mathbb{C}$ è totalmente ordinato.

Dimostrazione

In $\mathbb{C}$ definiamo la seguente relazione binaria: $a + bi \ \mathfrak{R} \ c + di \Leftrightarrow b < d \vee (b = d \wedge a < c)$. Così per esempio

$$7 + 2i \ \mathfrak{R} \ 11 + 4i, \text{ perché } 2 < 4; \ 7 + 2i \ \mathfrak{R} \ 7 + 4i, \text{ perché } 7 = 7 \wedge 2 < 4.$$

Verifichiamo che è una relazione di ordine totale forte.
Vale la proprietà antiriflessiva; se infatti fosse vera la proprietà riflessiva allora è vero $a + bi \ \mathfrak{R} \ a + bi$ cioè è vera una delle due seguenti cose false: $b < b \vee (b = b \wedge a < a)$.
Vale la proprietà antisimmetrica, infatti sia $a + bi \ \mathfrak{R} \ c + di$. Ma allora se $b < d$, è anche vero che $d < b$ e quindi è falso che $c + id \ \mathfrak{R} \ a + bi$. Se invece $b = d \wedge a < c$, ancora una volta risulta falso $c + di \ \mathfrak{R} \ a + bi$.
Vale la proprietà transitiva. Infatti se si ha $a + bi \ \mathfrak{R} \ c + di \wedge c + di \ \mathfrak{R} \ m + in$, allora possiamo avere:

$$b < d \wedge d < n \Rightarrow b < n \Leftrightarrow a + bi \ \mathfrak{R} \ m + in;$$

$$b < d \wedge (d = n \wedge c < m) \Rightarrow b < d = n \Rightarrow b < n \Leftrightarrow a + bi \ \mathfrak{R} \ m + in;$$

$$(b = d \wedge a < c) \wedge (d < n) \Rightarrow b = d < n \Rightarrow b < n \Leftrightarrow a + bi \ \mathfrak{R} \ m + in;$$

$$(b = d \wedge a < c) \wedge (d = n \wedge c < m) \Rightarrow (b = d = n) \wedge (a < c < m) \Rightarrow (b = n) \wedge (a < m) \Leftrightarrow a + bi \ \mathfrak{R} \ m + in.$$

Vale anche la proprietà di connessione, dato che se due numeri complessi sono distinti vuol dire che hanno o la parte reale o la parte immaginaria, o entrambe diverse. Così per i numeri complessi $a + bi$ e $a + ci$, con $b \neq c$, deve aversi $b < c$ oppure $c < b$, cioè $a + bi \ \mathfrak{R} \ a + ci$, oppure $a + ci \ \mathfrak{R} \ a + bi$. Per i numeri complessi $a + bi$ e $c + bi$, con $a \neq c$, deve aversi $a < c$ oppure $c < a$, cioè $a + bi \ \mathfrak{R} \ c + bi$, oppure $c + bi \ \mathfrak{R} \ a + bi$. Infine, per i numeri complessi $a + bi$ e $c + di$, con $a \neq c \wedge b \neq d$, deve aversi $b < d$ oppure $d < b$, cioè

$$a + bi \ \mathfrak{R} \ c + di, \text{ oppure } c + di \ \mathfrak{R} \ a + bi.$$

L'ordine precedentemente mostrato è quello cosiddetto lessicografico, ossia quello che viene usato nei dizionari, nel senso che una parola viene prima di un'altra se la precede nell'ordine alfabetico. Pur avendo ordinato totalmente $\mathbb{C}$ non possiamo parlare di numeri complessi positivi e negativi, ciò dipende dal fatto che l'essere negativo o positivo di un numero ha a che fare con l'operazione di prodotto, in particolare con il fatto che il prodotto di due numeri concordi (entrambi positivi o entrambi negativi) è positivo, mentre noi sappiamo che per esempio $i^2 = -1$. Non solo, ma cercando di creare un ordine con lo zero otteniamo sempre delle assurdità. Infatti, secondo l'ordine stabilito deve essere $i > 0$, del resto l'ordine valido per i numeri reali viene conservato, inoltre nei numeri reali moltiplicando per una quantità positiva ambo i membri di una disuguaglianza questa non cambia verso. Allora dovrebbe essere vera anche questa catena di disuguaglianze:
$-1 < 1 \Rightarrow i \cdot (-1) < i \cdot 1 \Rightarrow -i < i \Rightarrow i \cdot (-i) < i \cdot i \Rightarrow -i^2 < i^2 \Rightarrow 1 < -1$. Che è un'assurdità.

Equazioni in $\mathbb{C}$

Il numero immaginario è un meraviglioso ricorso allo spirito di Dio, quasi un essere anfibio fra l'essere e il non essere. *Gottfried Whilhem Leibniz*

Il problema

In $\mathbb{C}$ qualsiasi equazione algebrica ha soluzioni? E se la risposta è affermativa, quante ne ha? Che relazione c'è fra il grado dell'equazione e il numero delle sue soluzioni?

Prima di rispondere al quesito posto dal problema consideriamo altre questioni.
Dato un polinomio in una sola variabile, che indichiamo simbolicamente con $p(x)$, noi sappiamo (Teorema di Ruffini) che se al posto di x sostituiamo un numero reale q, il numero $p(q)$ che otteniamo svolgendo i calcoli, rappresenta il resto della divisione di $p(x)$ per $(x - q)$. In particolare sappiamo che se $p(q) = 0$, allora q è una delle soluzioni dell'equazione $p(x) = 0$.

Esempio 10

Consideriamo il polinomio $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. Calcoliamo il numero $p(1) = 1^3 + 1^2 + 1 + 1 = 4$. Quindi per quanto detto in precedenza $x = 4$ non è una soluzione dell'equazione $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. Adesso calcoliamo $p(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = 0$, quindi stavolta possiamo dire che $x = -1$ è una soluzione dell'equazione $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

I risultati dell'esempio precedente ci pongono il problema di stabilire se il teorema di Ruffini, con le dovute astrazioni, è valido anche per numeri complessi. La risposta è positiva, dato che è la stessa definizione di soluzione di un'equazione a dirci che se sostituendo alla variabile un numero appartenente a qualsiasi insieme, il risultato è zero, allora quel numero è una soluzione dell'equazione associata. Inoltre, se estendiamo il concetto di fattorizzabilità nell'insieme dei polinomi anche ai coefficienti complessi, possiamo enunciare il seguente teorema.

Teorema 4

Se $p(x)$ è un polinomio di grado n e z è un suo zero (cioè $p(z) = 0$), $z \in \mathbb{C}$, allora $p(x)$ si può esprimere come il prodotto del binomio $x - z$ per un polinomio di grado $n - 1$.

Esempio 11

Consideriamo il polinomio $p(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6$. Calcoliamo il numero complesso
$$p(i) = i^4 + i^3 - 5 \cdot i^2 + i - 6 = 1 - i + 5 + i - 6 = 0$$
Possiamo dire che $x = i$ è una soluzione dell'equazione $x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 = 0$.
Anzi possiamo dire che $x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 = (x - i) \cdot q(x)$, in cui $q(x)$ è un polinomio di terzo grado da determinare con la consueta regola di Ruffini.
$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 1 & -5 & 1 & -6 \\ i & & i & i-1 & -6i-1 & 6 \\ \hline & 1 & 1+i & i-6 & -6i & 0 \end{array}$$
, naturalmente abbiamo applicato le regole per le operazioni fra numeri complessi. Possiamo allora dire che si ha la seguente uguaglianza:
$$x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 = (x - i) \cdot [x^3 + (1 + i) \cdot x^2 + (i - 6) \cdot x - 6i$$
Si vede poi che il polinomio di terzo grado è divisibile fra l'altro per $x = -i$, quindi continuiamo a ridurre di grado. Infine si vede che gli zeri del polinomio di quarto grado sono: i, $-i$, 2, -3, quindi possiamo scrivere:
$$x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6 = (x - i) \cdot (x + i) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3).$$

Un'altra cosa che possiamo notare è il fatto che la precedente equazione aveva due soluzioni complesse fra loro coniugate, del resto anche le equazioni di secondo grado a delta negativo abbiamo detto che hanno due soluzioni complesse e coniugate. Ciò ci suggerisce di vedere se questo è un fatto limitato alle equazioni di grado pari o se è vero in generale. Noi diciamo che vale il seguente risultato che non dimostriamo, come i seguenti.

Teorema 5

Se un'equazione polinomiale ha una soluzione complessa z allora ha per soluzione anche la sua complessa coniugata $\bar{z}$.

Vale inoltre il seguente importantissimo teorema.

Teorema 6 (Fondamentale dell'algebra o di D'Alembert – Gauss)

Ogni equazione polinomiale di grado n a coefficienti reali, risolta in $\mathbb{C}$, ammette n soluzioni, ogni soluzione potendo avere molteplicità maggiore di 1.

Esempio 12

- L'equazione $(x-2)^{82}=0$, ha 82 soluzioni tutte coincidenti con $x=2$.
- L'equazione $(x-i)^3\cdot(x+5)^2=0$, ha 3 soluzioni coincidenti con $x=i$ e 2 con $x=-5$. Non ha, né deve avere, come una delle sue soluzioni $x=-i$ (coniugato di i) perché non è un'equazione a coefficienti reali.

L'angolo storico

Il teorema 6 è ricordato con il nome di D'Alembert e Gauss perché il primo dei due lo enunciò nel 1747 senza riuscire a darne una dimostrazione corretta, il secondo invece ne propose la prima dimostrazione completa e rigorosa nella sua tesi di laurea del 1799. Nel seguito lo dimostrò con altre tecniche altre due volte.

Come immediata conseguenza dei precedenti teoremi si ha il seguente corollario.

Corollario 3

Ogni equazione algebrica di grado dispari a coefficienti reali, ha almeno una soluzione reale.

Dimostrazione Per il teorema 5 le soluzioni complesse sono a coppie. Per il teorema 6 esse sono in numero dispari, quindi almeno una di esse deve essere reale.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Risolvere l'equazione di secondo grado $4x^2 - 3x + 5 = 0$ *nel campo* $\mathbb{C}$.
Applichiamo la formula risolutiva, anche se il discriminante è negativo, dato che stiamo operando sui numeri complessi: $x = \frac{3 \pm \sqrt{9-80}}{8} = \frac{3 \pm \sqrt{-71}}{8}$. Se fossimo in $\mathbb{R}$ scriveremmo che l'equazione è priva di soluzioni, ma poiché siamo in $\mathbb{C}$ sfruttiamo il fatto che $\sqrt{-1} = i$: $x = \frac{3 \pm i \cdot \sqrt{71}}{8}$. Le soluzioni sono complesse coniugate.

Risolvere le seguenti equazioni in $\mathbb{C}$
Livello 1

1. $x^2 + x + 1 = 0$; $3x^2 + 5x + 11 = 0$; $x^2 - 9x + 15 = 0$ $\left[x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}; x = \frac{-5 \pm \sqrt{107}i}{6}; x = \frac{9 \pm \sqrt{21}}{2}\right]$

2. $x^2 - 3x + 1 = 0$; $x^2 - x + 1 = 0$; $x^2 - 3x + 4 = 0$ $\left[x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}; x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}; x = \frac{3 \pm \sqrt{7}i}{2}\right]$

3. $5x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 0$; $x^4 + 1 = 0$ $\left[x = \frac{-\sqrt{2} \pm 3 \cdot \sqrt{2}i}{10}; \left(x = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i}{2} \vee x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i}{2}\right)\right]$

4. $x^3 + x - 2 = 0$; $x^3 + 2 = 0$ $\left[\left(x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2} \vee x = 1\right); \left(x = \frac{\sqrt[3]{2} \pm \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}i}{2} \vee x = -\sqrt[3]{2}\right)\right]$

5. $x^2 + x + 4 = 0$; $\sqrt{2}x^2 - x + 1 = 0$ $\left[x = \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{2}; x = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2 \cdot \left(4 \cdot \sqrt{2} - 1\right)} \cdot i}{4}\right]$

Lavoriamo insieme

Risolvere l'equazione di secondo grado $ix^2 - x + 1 = 0$, *nel campo dei complessi.*
Applichiamo la formula risolutiva valida per le equazioni a coefficienti reali, senza considerare il segno del discriminante, anche perché potrebbe essere non reale: $x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4i}}{2i}$. Abbiamo quindi il problema di calcolare le radici quadrate del numero complesso $1 - 4i$. Procedendo come in precedenza, troviamo: $\sqrt{1-4i}^{(c)} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}} \mp i \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$. Visto che il segno ± è già presente nella formula possiamo scrivere che le soluzioni della data equazione sono:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}} \mp i \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}}{2i} = \frac{i \pm i \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}}{-2} = -\frac{1}{2}i \mp i \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{17}+1}{8}} \mp \sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{8}}$$

Risolvere le seguenti equazioni a coefficienti numeri complessi
Livello 2

6. $x^2 + x + 1 = 0$; $x^2 + ix = 0$; $x^2 + ix - 1 = 0$ $\left[x = \frac{-1 \pm i \cdot \sqrt{3}}{2}; \left(x = -i \vee x = 0\right); x = \frac{\pm\sqrt{3} - i}{2}\right]$

7. $ix^2 - x - i = 0$; $x^2 - 2ix - 1 = 0$; $ix^2 - x + i = 0$ $\left[x = \frac{\pm\sqrt{3} - i}{2}; x = i; x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot i\right]$

8. $x^2 - i = 0$; $x^3 - i = 0$ $\left[x = \pm\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2}; \left(x = \frac{\pm\sqrt{3} + i}{2} \vee x = -i\right)\right]$

Livello 3

9. $ix^2 - x + 1 = 0$ $\left[x = \frac{\sqrt{2 \cdot \left(\sqrt{17} - 1\right)} + i \cdot \left(\sqrt{2 \cdot \left(\sqrt{17} + 1\right)} - 2\right)}{4} \vee x = \frac{-\sqrt{2 \cdot \left(\sqrt{17} - 1\right)} - i \cdot \left(\sqrt{2 \cdot \left(\sqrt{17} + 1\right)} + 2\right)}{4}\right]$

10. $x^2 - (1 + i) \cdot x - 1 = 0$ $\left[x = \frac{\sqrt{\sqrt{5} + 2} + 1 + i \cdot \left(\sqrt{\sqrt{5} - 2} + 1\right)}{2} \vee x = \frac{-\sqrt{\sqrt{5} + 2} + 1 - i \cdot \left(\sqrt{\sqrt{5} - 2} - 1\right)}{2}\right]$

11. $(1 - i) \cdot x^2 - 2x + 1 = 0$; $(1 - i) \cdot x^2 - (1 + i) \cdot x - 1 = 0$

$\left[x = \frac{1 + i \cdot \left(\pm\sqrt{2} + 1\right)}{2}; x = \pm\frac{-\left(\sqrt{\sqrt{5} + 2} + \sqrt{\sqrt{5} - 2}\right) - i \cdot \left(\sqrt{\sqrt{5} + 2} - \sqrt{\sqrt{5} - 2} - 2\right)}{4}\right]$

12. $\frac{x^2}{i} - x - 1 = 0$ $\left[x = \frac{\sqrt{2 \cdot \left(\sqrt{17} - 1\right)} + i \cdot \left(\sqrt{2 \cdot \left(\sqrt{17} + 1\right)} + 2\right)}{4} \vee x = \frac{-\sqrt{2 \cdot \left(\sqrt{17} - 1\right)} - i \cdot \left(\sqrt{2 \cdot \left(\sqrt{17} + 1\right)} - 2\right)}{4}\right]$

Lavoriamo insieme

- *Data un'equazione di secondo grado* $ax^2 + bx + c = 0$, *determinare la somma e il prodotto delle sue soluzioni, reali o complesse, mediante i coefficienti della stessa equazione.*

  Siano z_1 e z_2 le soluzioni dell'equazione; sappiamo anche che possiamo scrivere:

  $$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - z_1) \cdot (x - z_2).$$

  Sviluppiamo le moltiplicazioni:

  $$ax^2 + bx + c = a \cdot [x^2 - (z_1 + z_2) \cdot x + z_1 \cdot z_2] = a \cdot x^2 - a \cdot (z_1 + z_2) \cdot x + a \cdot z_1 \cdot z_2.$$

  Applicando il principio di identità dei polinomi, secondo il quale due polinomi sono identici se hanno lo stesso grado e ordinatamente gli stessi coefficienti possiamo dire che si ha:

  $$b = -a \cdot (z_1 + z_2) \wedge c = a \cdot z_1 \cdot z_2 \Rightarrow z_1 + z_2 = -b/a;\ z_1 \cdot z_2 = c/a.$$

- *Come prima per una qualsiasi equazione terzo grado*: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

  Supponiamo che z_1, z_2 e z_3 siano le soluzioni, reali o complesse, distinte o no. Avremo allora

  $$ax^3 + bx^2 + cx + d = a \cdot (x - z_1) \cdot (x - z_2) \cdot (x - z_3) = a \cdot [x^2 - (z_1 + z_2) \cdot x + z_1 \cdot z_2\ ] \cdot (x - z_3) =$$
  $$= a \cdot [x^3 - (z_1 + z_2 + z_3) \cdot x^2 + (z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3 + z_1 \cdot z_2) \cdot x - z_1 \cdot z_2 \cdot z_3]\ .$$

  Quindi stavolta abbiamo le seguenti relazioni:

  $$b = -a \cdot (z_1 + z_2 + z_3) \wedge c = a \cdot (z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3 + z_1 \cdot z_2) \wedge d = a \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$$
  $$z_1 + z_2 + z_3 = -b/a\ \wedge z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3 + z_1 \cdot z_2 = c/a\ \wedge z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -\ d/a.$$

  Quindi la somma delle soluzioni è sempre pari al rapporto $-b/a$, il prodotto è invece $-\ d/a$, infine il rapporto c/a è uguale alla somma di tutti i prodotti delle soluzioni a due a due.

Livello 2

Determinare la somma s e il prodotto p di tutte le soluzioni reali e complesse delle equazioni seguenti:

13. a) $x^3 + x^2 - x + 1 = 0$; b) $2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = 0$ [a) $s = p = -1$); b) ($s = -3/2$, $p = -5/2$)]
14. a) $x^3 + 1 = 0$; b) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ [a) $s = 0$; $p = -1$); b) ($s = -b/a$, $p = e/a$]
15. Determinare il prodotto di tutte le soluzioni reali e complesse dell'equazione $x^6 + 64 = 0$. [64]

Livello 3

16. Determinare il valore del parametro k in modo tale che l'equazione $x^4 + kx^3 - x^2 + x - 1 = 0$, abbia soluzioni la cui somma sia 0. [0]
17. Determinare il valore del parametro k in modo tale che l'equazione $x^4 + kx^3 - kx^2 + kx - 1 = 0$, abbia soluzioni il cui prodotto sia 1. [Impossibile]

Lavoriamo insieme

Data l'equazione $x^4 - x^3 - 6x^2 + 14x - 12 = 0$, *determinare tutte le sue soluzioni reali e complesse..*
Noi sappiamo che le eventuali soluzioni intere sono divisori del termine noto, quindi in questo caso dobbiamo cercarle fra i divisori di 12, cioè fra gli elementi dell'insieme: $\{-12, -6, -4, -3, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Grazie al teorema di Ruffini dobbiamo sostituire al posto dell'incognita i detti numeri e verificare se così facendo otteniamo zero. Cominciamo a provare con i numeri più piccoli in valore assoluto:

$$x = 1 \Rightarrow 1^4 - 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 14 \cdot 1 - 12 = 1 - 1 - 6 + 14 - 12 = -4;$$
$$x = -1 \Rightarrow (-1)^4 - (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 + 14 \cdot (-1) - 12 = 1 + 1 - 6 - 14 - 12 = -30;$$
$$x = 2 \Rightarrow 2^4 - 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 14 \cdot 2 - 12 = 16 - 8 - 24 + 28 - 12 = 0.$$

Avendo trovato una soluzione, potremmo abbassare di grado con la regola di Ruffini, ma in tal modo otteniamo un'equazione di terzo grado, la quale avrà le stesse soluzioni della precedente equazione, a parte eventualmente $x = 2$, quindi continuiamo a sostituire per determinare le altre eventuali soluzioni intere.

$$x = -2 \Rightarrow (-2)^4 - (-2)^3 - 6 \cdot (-2)^2 + 14 \cdot (-2) - 12 = 16 + 8 - 24 - 28 - 12 = -40;$$
$$x = 3 \Rightarrow 3^4 - 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 14 \cdot 3 - 12 = 81 - 27 - 54 + 42 - 12 = 30;$$
$$x = -3 \Rightarrow (-3)^4 - (-3)^3 - 6 \cdot (-3)^2 + 14 \cdot (-3) - 12 = 81 + 27 - 54 - 42 - 12 = 0.$$

Quindi, anche $x = -3$ è soluzione. Adesso abbassiamo due volte di grado.

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 1 & -1 & -6 & 14 & -12 \\
2 & & 2 & 2 & -8 & 12 \\
\hline
 & 1 & 1 & -4 & 6 & 0 \\
-3 & & -3 & 6 & -6 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 2 & 0 &
\end{array}$$

Quindi possiamo scrivere: $x^4 - x^3 - 6x^2 + 14x - 12 = (x - 2) \cdot (x + 3) \cdot (x^2 - 2x + 2) = 0$. Adesso applichiamo la formula risolutiva all'ultimo trinomio: $x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$. Possiamo quindi concludere che le soluzioni dell'equazione $x^4 - x^3 - 6x^2 + 14x - 12 = 0$, sono:

$$x = 2,\ x = -3,\ x = 1 - i,\ x = 1 + i.$$

Risolvere le seguenti equazioni e sistemi in $\mathbb{C}$ (se le soluzioni hanno molteplicità k nelle risposte scriveremo k fra parentesi) se non vi sono soluzioni intere, provare con quelle razionali

Livello 2

18. a) $x^4 + x^3 + 7x^2 + 9x - 18 = 0$; b) $x^4 - 3x^3 + 10x^2 - 6x - 20 = 0$ [a) $(1 \vee -2 \vee \pm 3i)$; b) $(2 \vee -1 \vee 1 \pm 3i)$]
19. a) $x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 14x + 5 = 0$; $x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$ [a) $(1\ (2) \vee 2 \pm i)$; b) $(1\ (3) \vee \pm i)$]
20. a) $x^3 + 5x^2 + 8 \cdot x + 6 = 0$; b) $x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$; c) $x^6 - 4x^5 + 3x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 4x + 5 = 0$ [a) $(-3 \vee -1 \pm i)$; b) $(-1 \vee \pm i\ (2))$; c) $(-1\ (2) \vee 1\ (2) \vee 2 \pm i)$]

Livello 3

21. $x^4 + 2 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot x^3 - 4 \cdot \sqrt{2} \cdot x^2 - 6 \cdot \left(\sqrt{2} + 1\right) \cdot x - 9 = 0$ $\left[-1 \vee 3 \vee -\sqrt{2} \pm i\right]$
22. a) $6x^4 + x^3 + 23x^2 + 4x - 4 = 0$; b) $8x^4 + 50x^3 + 91x^2 + 14x - 10 = 0$ [a) $(-1/2 \vee 1/3 \vee \pm 2i)$; b) $(-1/4 \vee -1/2 \vee -3 \pm i)$]
23. a) $x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 7 \cdot x + 12 = 0$; b) $\begin{cases} (1-2i)x + (1+2i)y = 1 \\ ix - 3y = -1 \end{cases}$ $\left[\text{a)}\left(1 \vee 4 \vee -1 \pm \sqrt{2}i\right); \text{b)}\left(x = \frac{6+4i}{13},\ y = \frac{3+2i}{13}\right)\right]$

24. a) $\begin{cases} ix+2y=-i \\ 3x+y=1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3ix+2y=i-1 \\ (1+i)x-y=-2i \end{cases}$ $\left[\text{a) } \left(x=\frac{11+8i}{37},\ y=\frac{4-24i}{37}\right); \text{b) } \left(x=-\frac{17+i}{29},\ y=\frac{-16+40i}{29}\right)\right]$

Lavoriamo insieme

Un numero reale che risulta soluzione di un'equazione di qualsiasi grado con coefficienti numeri razionali si chiama numero ***algebrico,*** *diversamente si chiama* ***trascendente.*** *Anche se in genere verificare se un certo numero è o no algebrico è difficile, non lo è in casi particolari. Provare che* $\sqrt{2}+1$ *è un numero algebrico*

Dobbiamo cercare un'equazione di cui è soluzione. Procediamo nel modo seguente: poniamo $\sqrt{2}+1=x$ e facciamo in modo da eliminare la radice quadrata $\sqrt{2}=x-1 \Rightarrow 2=(x-1)^2 \Rightarrow 2=x^2-2x+1 \Rightarrow x^2-2x-1=0$. L'equazione ottenuta è quella cercata, a coefficienti interi. Ovviamente vi sono infinite altre equazioni di cui il numero è soluzione, questa è quella con minore esponente.

Dimostrare che i seguenti sono numeri algebrici, determinando l'equazione algebrica di grado minimo, di cui sono soluzioni

Livello 3

25. $\sqrt{3}-1$; $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ $[x^2+2x-2=0;\ x^4-10x^2+1=0;\ x^4-14x^2+9=0]$

26. $\sqrt[3]{2}-1$; $\sqrt[4]{2}+1$ $[x^3+3x^2+3x-1=0;\ x^4-4x^3+6x^2-4x-1=0]$

27. $1+\sqrt[5]{3}$; $\sqrt{2}+\sqrt{3}+1$ $[x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-4=0;\ x^4-4x^3-4x^2+16x-8=0]$

28. $\sqrt{3+\sqrt{2}}$; $1+\sqrt{3-\sqrt{2}}$ $[x^4-6x^2+7=0;\ x^4-4x^3+8x+2=0]$

29. $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$; $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ $[x^8-4x^6+2x^4+4x^2-2=0;\ x^8-8x^6+20x^4-16x^2+2=0]$

30. $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ $[x^{16}-16x^{14}+104x^{12}-352x^{10}+660x^8-672x^6+336x^4-64x^2+2=0]$

31. $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $a, b \in \mathbb{R}^+$ $[x^4-2x^2\cdot(a+b)+a^2-2ab+b^2=0]$

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

1. Costruire la tabella operatoria dell'insieme $\{1, -1, i, -i\}$ rispetto all'ordinaria operazione di prodotto, provando quindi che è un gruppo ciclico abeliano.
2. Provare che l'insieme $\{a+bi: a, b \in \mathbb{Z}\}$, rispetto alle ordinarie operazioni di addizione e moltiplicazione fra numeri complessi è un anello, detto degli interi di Gauss.
3. Dire un motivo perché $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$ e $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$, non possono essere isomorfi. Suggerimento: se fossero isomorfi le equazioni dovrebbero avere le stesse ...
[$x^2=-1$ non ha soluzioni in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e ha due soluzioni in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$]
4. Data l'equazione $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0=0$, un'equazione di grado n a coefficienti reali, determinare per quali valori dei coefficienti la somma e il prodotto delle soluzioni, se numeri reali, sono positivi. [La somma è positiva se a_n e a_{n-1} hanno segno discorde. Il prodotto è positivo se n è pari e a_n e a_0 hanno segno concorde, oppure se n è dispari e a_n e a_0 hanno segno discorde]
5. Dimostrare che $x=\frac{-1+i\cdot\sqrt{3}}{2}$ e $y=\frac{-1-i\cdot\sqrt{3}}{2}$ sono soluzioni dell'equazione $x^{3n}+y^{3n}=2$ e, per n non multiplo di 3, dell'equazione $x^n+y^n=-1$.

6. Consideriamo l'insieme $\{1, i, j, k\}$ a cui associamo la seguente tabella operatoria

$\otimes$	1	i	j	k
1	1	j	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Consideriamo poi l'insieme delle scritture simboliche $Q = \{a + bi + cj + dk: a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, su cui definiamo due operazioni, la somma $\oplus$ e il prodotto $\otimes$, che agiscono come la somma e il prodotto di due polinomi con il rispetto della precedente tabella.
Verificare che $(Q, \oplus, \otimes)$ è un corpo ma non un campo, detto *corpo dei quaternioni*.

7. Calcolare $\sqrt{a+ib}^{(c)}$ $\left[\pm\frac{\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)}\pm i\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}}{2}\right]$

8. Quando $\sqrt{a+ib}^{(c)}$, con $a, b \in \mathbb{Z}$, è un numero complesso a coefficienti entrambi interi (detto intero di Gauss)? $\left[2\cdot\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right) \text{ e } 2\cdot\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right) \text{ quadrati perfetti}\right]$

9. Fornire un esempio che mostri che $\sqrt{a+ib}^{(c)}$ è intero di Gauss mentre $\sqrt{b+ia}^{(c)}$ non lo è.
[$8 + 6i$ e $6 + 8i$]

10. Fornire un esempio che mostri che $\sqrt{a+ib}^{(c)}$ è intero di Gauss mentre $\sqrt{a-ib}^{(c)}$ non lo è.
[Impossibile]

11. Calcolare $\sqrt{a+ib}^{(c)}+\sqrt{a-ib}^{(c)}$ $\left[\pm\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)}\right]$

12. Calcolare $\sqrt{a+ib}^{(c)}-\sqrt{a-ib}^{(c)}$ $\left[i\cdot\sqrt{2\cdot\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}\cdot\frac{b}{|b|}\right]$

13. Dimostrare che $\pm\, i$ sono radici di $\sqrt[n]{1}^{(c)}$, per ogni n multiplo di 4 .

14. Risolvere $10z^2 - 3iz - k = 0$, al variare di k in $\mathbb{C}$.
[Per $k \le 9/40$ e $k \ne 0$ le soluzioni sono immaginarie pure; per $k = 0$ vi è una soluzione reale $z = 0$ e una immaginaria pura, $3/10i$; per $k > 9/40$ sono complesse]

15. Data una generica equazione di II grado a coefficienti complessi, $x^2 + 2(c + di)\, x + m + ni = 0$. Determinare per quali valori dei parametri si hanno soluzioni a) uguali; b) una reale; c) una immaginaria pura; d) complesse coniugate.
[a) $m + in = (c + id)^2$; b) $n^2 - 4cdn + 4md^2 = 0$; c) $n^2 - 4cdn + 4mc^2 = 0$; d) $d = n = 0$, $c^2 < m$]

16. Tenuto conto dell'esercizio precedente, senza risolvere le equazioni stabilire quali delle seguenti equazioni verificano le rispettive condizioni a), b), c), d). Verificare poi la correttezza della deduzione.
a) $(1 - i) \cdot x^2 + (1 + i) \cdot x + 2i = 0$; b) $(1 - i) \cdot x^2 + 2 \cdot (1 + i) \cdot x + 2i = 0$; c) $x^2 - 2 \cdot (1 + i) \cdot x + 2i = 0$;
d) $x^2 + (4 - i) \cdot x - 4i = 0$; e) $x^2 - 3 \cdot (1 + i) \cdot x + 2 + 6i = 0$; f) $x^2 + 4x + 5 = 0$.
[soluzioni uguali: c): $x = 1 + i$; una soluzione reale: a): $x = 1-i \vee x = -1$; d): $x = i \vee x = -4$; e) $x = 1 + 3i \vee x = 2$; una soluzione immaginaria pura: d); soluzioni complesse coniugate: f) $x = -2 \pm i$; nessuna delle precedenti: b) $x = \frac{\pm\sqrt{2}+i\cdot\left(\mp\sqrt{2}-2\right)}{2}$]

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
AHSME = Annual High School Mathematics Examination HSMC = A&M University High School Mathematics Contest
RICE = Rice University Mathematics Tournament.

Lavoriamo insieme

Questo quesito è stato assegnato agli HSMC del 2005.
Indichiamo $cos(\theta) + i\ sin(\theta)$, *con* $cis(\theta)$. *Calcolare* $cis(3\pi/16) \cdot cis(5\pi/16)$.
In generale si ha: $cis(a) \cdot cis(b) = [cos(a) + i\ sin(a)] \cdot [cos(b) + i\ sin(b)] = [cos(a)\ cos(b) - sin(a)\ sin(b)] + i\ [cos(a)\ sin(b) + sin(a)\ cos(b)] = cos(a + b) + i\ sin(a + b) = cis(a + b)$. Quindi

$$cis\left(\frac{3+5}{16}\pi\right) = cis\left(\frac{\pi}{2}\right) = cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + sin\left(\frac{\pi}{2}\right)i = i\,.$$

1. (AHSME 1962) L'equazione $2x^2 - 12x + s = 0$ ha come una delle sue soluzioni $x = 3 + 2i$, calcola s. [26]
2. (AHSME 1964) Semplificare l'espressione $1 + 2i + 3i^2 + \ldots + (n + 1) \cdot i^n$, con n numero naturale multiplo di 4. $\left[\frac{n+2-in}{2}\right]$
3. (AHSME 1971) Semplificare $(1 - w + w^2) \cdot (1 + w - w^2)$, sapendo che w è una delle soluzioni immaginarie dell'equazione $x^3 = 1$. [4]
4. (AHSME 1972) $a \pm bi$ sono le soluzioni dell'equazione $x^2 + qx + r = 0$, determinare q in funzione di a e b. [$-2a$]
5. (AHSME 1980) Per quanti numeri interi n, $(n + i)^4 \in \mathbb{R}$? [3]
6. (AHSME 1988) Determinare $|z|^2$, con $z \in \mathbb{C}$ e $z + |z| = 2 + 8i$. [289]
7. (AHSME 1982) Se $a + bi$ è soluzione dell'equazione $c_4z^4 + i \cdot c_3z^3 + c_2z^2 + i \cdot c_1z + c_0 = 0$, quale fra i seguenti è anche soluzione? A) $-a - ib$ B) $a - ib$ C) $-a + b\ i$ D) $b + ia$ [B]
8. (AHSME 1984) Se $w = cos(40°) + i \cdot sin(430°)$, determinare $\frac{1}{\left|w+2w^2+3w^3+\ldots+9w^9\right|}$. $\left[\frac{2}{9}\cdot sin(20°)\right]$
9. (HSMC 2003) Determinare il massimo di $(x + y)^2$ se x e y sono numeri tali che $x^2 + y^2 = 1$. Sugg. Portare in coordinate polari. [2]
10. (Rice 2006) Una ragazza vuol lasciare il suo ragazzo, perché secondo lei egli è più interessato alla matematica. Frustrata grida: "Voi matematici non avete anima siete tutti numeri ed equazioni! Qual è la radice quadrata della tua incompetenza?!" Il suo ragazzo crede che ella voglia dire la radice quadrata di se stesso, cioè di i (Scritto in maiuscolo, in inglese significa per Io). Qual è quindi la risposta? $\left[\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(1+i)\right]$
11. (Rice 2007) Un grafico in coordinate polari ha equazione $r(\theta) = cos(\theta) + ½$, determinare la minima coordinata x di un punto sul grafico. $\left[-\frac{1}{16}\right]$
12. (ARML 2008) Nel piano complesso z, z^2, z^3 sono, in un certo ordine, tre dei vertici di un quadrato non-degenere. a e b siano il minimo e il massimo valore possibile dell'area del quadrato. Trovare $(a; b)$. $\left[\left(\frac{5}{8};10\right)\right]$
13. (Rice 2008) Se $r \cdot e^{i\theta}$ è una radice dell'equazione $x^8 - x^7 + x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$, con $r > 0$, e $0 \leq \theta \leq 360°$ determinare tutti i valori possibili di θ. [20°; 60°; 100°; 140°; 220°; 260°; 300°; 340°]
14. (Rice 2008) Due numeri complessi z_1 e z_2 sono tali che $z_1 \cdot z_2$ è un numero complesso puro e z_1/z_2 un numero reale. Per quante coppie ordinate $(z_1; z_2)$ si ha: $|z_1| = |z_2| = 1$? [8]
15. (Rice 2008) Un numero complesso $z = a + bi$ si dice Gaussiano se ha a e b numeri interi. Un primo

Gaussiano è un numero Gaussiano che non può essere scritto come prodotto di due numeri Gaussiani con coefficienti di valore assoluto minimo. Fattorizzare $-4 + 7i$ in primi Gaussiani con parti reali positive. $[(1 + 2i) \cdot (2 + 3i)]$

16. (Rice 2008) Determinare 3 numeri complessi a, b e c tali che: $a + b + c = ab + bc + ac = abc = 1$. $[i, -i, 1]$

Questions in English

Working together

This is a question assigned at HSMC in 2002.
Suppose that x and y are complex numbers such that $x + y = xy = 1$. *What is the value of* $x^3 + y^3$?
If $x + y = xy = 1$, then we have $x^3 + y^3 = (x + y) \cdot (x^2 - xy + y^2) = (x + y) \cdot (x^2 + 2xy + y^2 - 3xy) =$
$= (x + y) \cdot [(x + y)^2 - 3xy] = 1 \cdot (1 - 3 \cdot 1) = -2$.

17. (AHSME 1984) Four complex numbers lie at the vertices of a square in the complex plane. Three of the numbers are $1 + 2i$, $-2 + i$, and $-1 - 2i$. The fourth number is? $[2 - i]$
18. (HSMC1999) Find two distinct complex numbers each of which is the square of the other. $\left[\dfrac{-1 \pm \sqrt{3} \cdot i}{2}\right]$
19. (HSMC2007) The complex numbers $1 + i$ and $1 + 2i$ are both roots of the equation $x^5 - 6x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$. Where A, B, C, D are real numbers. What is the value of D? Hint: Remember that complex roots are in pairs, if $a + bi$ is a root, also $a - bi$ is a root and D is the product of all five roots. $[-20]$

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Accademia navale) Verificare che, al avariare del parametro reale θ, le coppie $(x; y)$ tali che $\begin{cases} x = 5 \cdot cos\,\theta \\ y = 2 \cdot sin\,\theta \end{cases}$ individuano nel piano cartesiano i punti di una ellisse della quale si chiede l'eccentricità. (Suggerimento: quadrare e sommare, quindi eliminare θ).
2. (Accademia navale) Si descriva il luogo geometrico dei centri delle circonferenze di equazioni $[x - cos(\theta)]^2 + [x - sin(\theta)]^2 = 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Si riconosca che tali circonferenze passano tutte per uno stesso punto: quale?

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_4_7.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	2
$\left[\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} = 1, e = \dfrac{\sqrt{21}}{5}\right]$	L'origine

8. I numeri naturali e l'infinito

8.1 L'insieme dei numeri naturali

Prerequisiti

- Sistema di riferimento cartesiano ortogonale
- Concetto di funzione
- Concetto di infinito
- Gli insiemi numerici fondamentali e le loro proprietà

Obiettivi

- Comprendere il concetto di insieme infinito
- Comprendere il concetto di equipotenza fra insiemi infiniti
- Comprendere il concetto di numerabilità
- Sapere applicare il principio di induzione

Contenuti

- Assiomi dei numeri naturali
- Il concetto di insieme infinito e di numerabilità
- Il Principio di induzione

Parole Chiave

Equipotenza – Induzione - Potenza del numerabile – Potenza del continuo

Simbologia

$\aleph_0$ Aleph con zero indica la potenza del numerabile

Assiomi dei numeri naturali

Abbiamo considerato i numeri naturali come oggetti conosciuti, ossia come l'insieme dei numeri {1, 2, 3, ...}, ma adesso lo studente è più grande, più maturo, ha arricchito il suo bagaglio culturale. Quindi è opportuno cercare di stabilire quali sono le proprietà che in qualche modo caratterizzano tale insieme, che è poi l'insieme numerico *base*, quello cioè a partire dal quale si costruiscono, per *ampliamento*, gli altri insiemi numerici, gli interi relativi, i razionali, i reali.
Essi sono dovuti al matematico italiano Giuseppe Peano che li presentò per la prima volta nel 1889 in *Arithmetices principia nova methodo exposita*1889, scritta in una lingua di sua invenzione, il *latino sine flexione*, e poi nelle diverse edizioni del suo *Formulario Mathematico* (cinque edizioni dal 1894 al 1908)
Di seguito riportiamo alcuni di questi assiomi, *tradotti* in un linguaggio più comprensibile.
Intanto si premettono alcune notazioni.

Notazione 1

- Il segno N indica numero intero positivo
- 1 indica l'unità
- $a + 1$ indica il numero successivo del numero a
- = indica il segno di uguaglianza.

Seguono i veri e propri assiomi, in cui i simboli letterali indicano tutti numeri.

- 1 è un numero
- Ogni numero è uguale a se stesso
- Se $a = b$ anche $b = a$
- Se $a = b$ e $a = c$, anche $a = c$
- Se a è un numero, anche $a + 1$ è un numero
- 1 non è successivo di alcun numero

Osserviamo che, come negli assiomi della geometria di Euclide, vi sono degli *enti primitivi*, che sono quelli che abbiamo elencato nella notazione 1. I veri e propri assiomi contengono le proprietà rigflessiva, simmetrica e transitiva, che già sappiamo essere caratteristiche delle relazioni di equivalenza. Per cui gli assiomi veramente *tipici* sono gli ultimi due. Ne manca un terzo che presenteremo a parte in uno dei prossimi paragrafi.
Chiudiamo questo breve paragrafo, osservando che nelle diverse versioni degli assiomi Peano ha sostituito il numero 1, come *primo naturale*, con lo 0.

Il concetto di insieme infinito e di numerabilità

L'intero è maggiore delle sue parti
Aristotele, Metafisica

Il problema

40 studenti sono certamente più di 35 studenti, possiamo ugualmente dire che i punti di un segmento lungo 1 cm sono più di quelli di un segmento lungo mezzo centimetro? O che tutti i numeri interi sono più dei numeri pari? Cioè possiamo estendere il concetto di maggiore valido per insiemi finiti anche a quelli infiniti?

Il concetto di infinito è certamente uno dei più delicati e difficili che si trovano ad affrontare non solo le scienze, ma anche le discipline filosofiche. La prima questione è definire cosa intendiamo con il dire che un insieme è infinito. Rispondere che infinito è ciò che non è finito, ovviamente è una non risposta, perché dovremmo chiarire cosa è il finito. Per dare una risposta più convincente dobbiamo cercare di capire cosa distingue in modo netto un insieme finito da uno infinito. Uno dei primi ad accorgersi della più interessante differenza fu Galileo Galilei, di cui riportiamo un passo delle sue opere.

L'Antologia

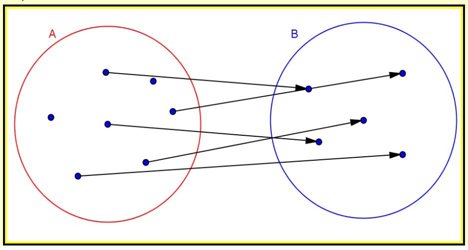
Galileo Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, 1638

Salviati – Onde se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, essere più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima, non è così?
Simplicio – Non si può dir altrimenti.
Salviati – Interrogando io di poi, quanti siano i numeri quadrati, si può con verità rispondere, loro esser tanti quante sono le proprie radici, avvenga che ogni quadrato ha la sua radice, ogni radice il suo quadrato, né quadrato alcuno ha più d'una sola radice, né radice alcuna più d'un quadrato solo.
Simplicio – Così sia.
Salviati – Ma se io domanderò, quante siano le radici, non si può negare che elle non siano quante tutti i numeri, poiché non vi è numero alcuno che non sia radice di qualche quadrato; e stante questo, converrà dire che i numeri quadrati siano quanti tutti i numeri, poiché tanti sono quante le lor radici, e radici sono tutti i numeri: e pur da principio dicemmo, tutti i numeri esser assai più che tutti i quadrati, essendo la maggior parte non quadrati.

Quindi Galileo osserva prima che l'insieme dei numeri naturali contiene l'insieme dei quadrati perfetti, dato che tutti i quadrati perfetti sono numeri naturali, ma ci sono numeri naturali come il 3 o il 124, che non sono quadrati perfetti. Cioè $Q_p = \{1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots\} \subset \mathbb{N}$. Eppure lo stesso Galilei fa notare altresì che ogni numero naturale si può associare al proprio quadrato, non ci sono numeri naturali che non hanno quadrato, quindi vuol dire che *i numeri naturali sono quanti i quadrati perfetti*.
Questo è un risultato paradossale, nel senso non che sia assurdo, ma che è inatteso. Non ci aspettiamo che qualcosa della quale siamo convinti che sia più grande di un'altra, invece sia uguale all'altra.
Prima di continuare dobbiamo stabilire se questo ragionamento è corretto. Possiamo confrontare due insiemi con il metodo dell'accoppiamento? Certamente sì, poiché in questo modo siamo in grado di stabilire se alla fine della procedura ci rimane qualcosa, e quindi uno dei due insiemi è maggiore dell'altro o no, e perciò sono uguali. Perlomeno nel caso di insiemi finiti esso funziona senz'altro.

Esempio 1

In figura mostriamo che l'insieme A è maggiore dell'insieme B, poiché con il metodo *dell'accoppiamento* in A rimangono elementi non accoppiati, mentre in B ciò non succede.



Questo procedimento è tipico della matematica, lo ricordiamo qui.

Definizione 1

Una legge che a ogni elemento di un insieme *A* associa uno e un solo elemento di un insieme *B* e viceversa, si chiama **corrispondenza biunivoca di *A* in *B***.

Possiamo allora stabilire un concetto di uguaglianza numerica fra insiemi.

Definizione 2

Se vi è una corrispondenza biunivoca di *A* in *B*, diciamo che *A* e *B* sono **equipotenti**.

Quindi adesso possiamo caratterizzare gli insiemi infiniti.

Definizione 3

Diciamo che un insieme *A* è **infinito** se può mettersi in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.

La precedente definizione è dovuta a Richard Dedekind (1831 – 1916). Poniamo una prima importante definizione.

Definizione 4

Diciamo che l'insieme dei numeri naturali e qualsiasi insieme a esso equipotente ha la **potenza del numerabile** ed indichiamo tale potenza con il simbolo $\aleph_0$, che si legge Aleph[1] con zero.

Dire che un insieme è numerabile vuol dire che lo possiamo trattare come i numeri naturali, cioè possiamo scrivere i suoi elementi ordinati in modo che essi si possano indicare con un numero naturale, cioè $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$. Non è difficile dimostrare che anche i numeri interi relativi sono un insieme numerabile.

Esempio 2

Poniamo in relazione gli insiemi $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, con la seguente legge: a ogni intero positivo associamo il suo doppio (per esempio $1 \to 2$, $2 \to 4$, $3 \to 6$, …), a zero associamo 1, a ogni numero negativo associamo il successivo del doppio del loro valore assoluto (per esempio $-1 \to 3$, $-2 \to 5$, $-3 \to 7$, …). La relazione così definita è una corrispondenza biunivoca, infatti preso un qualsiasi numero intero sappiamo associargli un numero naturale (per esempio al numero intero –540 associamo $2 \cdot 540 + 1 = 1081$), e viceversa a ogni numero naturale sappiamo associare un numero intero relativo (per esempio al numero 673 associamo $-\frac{673-1}{2}=-336$. Ovviamente potremmo inventare infinite leggi per mettere in corrispondenza biunivoca $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$.

[1] Aleph è la prima lettera dell'alfabeto ebraico.

Vale anche il seguente più generale risultato.

Teorema 1

L'unione di un numero finito di insiemi numerabili è un insieme numerabile.

Dimostrazione Per semplicità consideriamo due soli insiemi numerabili, A e B. Ciò vuol dire che possiamo scriverli nel modo seguente: $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots\}$. Allora possiamo scrivere $A \cup B = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots\}$, in cui alcuni degli elementi potrebbero anche essere ripetuti due volte e quindi uno di essi dovrebbe eliminarsi. Ma consideriamo il caso più generale possibile, cioè che A e B non abbiano elementi in comune e quindi non vi siano elementi da cancellare. Possiamo mettere $A \cup B$ in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$, per esempio mettendo in corrispondenza gli elementi di A con i numeri pari e quelli di B con i dispari. Per dimostrare il caso più generale in cui gli insiemi numerabili sono k ($A_1, A_2, \ldots, A_k$), possiamo ripetere un procedimento simile. Cioè associare gli elementi di A_1 con i numeri che divisi per k hanno resto 1, quelli di A_2 con i numeri che divisi per k hanno resto 2, e così via, quelli di A_k con i multipli di k.

Grazie al precedente risultato possiamo dimostrare in modo diverso che $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ sono equipotenti.

Corollario 1

L'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi è numerabile

Dimostrazione Si ha $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$ e i due insiemi sono ovviamente numerabili.

Più difficile è dimostrare il seguente fatto.

Teorema 2

L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è numerabile.

Dimostrazione

Costruiamo una tabella infinita come mostrato in figura :

$$\begin{array}{llll} \frac{0}{1} & & & \\ \frac{1}{1} & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{1} & & \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{1} & & \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & \frac{4}{1} \\ \ldots\ldots & & & \end{array}$$

In essa compaiono tutti i numeri razionali non negativi, infatti nella prima riga vi è l'unica frazione che, ridotta ai minimi termini, ha per somma dei suoi termini 1, nella seconda quella di somma 2, in generale nella n–esima quelle frazioni ridotte ai minimi termini, a/b per cui $a + b = n$. All'interno di ciascuna riga scriviamo le frazioni ordinate in modo che sia scritta per prima quella che ha il numeratore minore. In questo modo nella tabella abbiamo scritto tutti i numeri razionali. Adesso costruiamo la relazione che pone in corrispondenza biunivoca i razionali con i naturali, applicando il cosiddetto **primo procedimento diagonale di Cantor**, che consiste nel toccare tutti gli elementi della tabella nel modo indicato in figura seguente.

$$\begin{array}{llll} \frac{0}{1}\downarrow & & & \\ \frac{1}{1}\downarrow & & & \\ \frac{1}{2}\rightarrow & \frac{2}{1}\swarrow & & \\ \frac{1}{3}\rightarrow & \frac{3}{1}\swarrow & & \\ \frac{1}{4}\rightarrow & \frac{2}{3}\rightarrow & \frac{3}{2}\rightarrow & \frac{4}{1}\swarrow \\ \ldots\ldots & & & \end{array}$$

Così avremo la seguente corrispondenza biunivoca

$$\frac{0}{1}\to 1,\frac{1}{1}\to 2,\frac{1}{2}\to 3,\frac{2}{1}\to 4,\frac{1}{3}\to 5,\frac{3}{1}\to 6,\frac{1}{4}\to 7,\frac{2}{3}\to 8,\frac{3}{2}\to 9,\frac{4}{1}\to 10,\ldots.$$

Quindi $\mathbb{Q}^+$ è numerabile, d'altro canto $\mathbb{Q}=\mathbb{Q}^+\cup\mathbb{Q}^-$, e quindi per il Teorema 1, anche $\mathbb{Q}$ è numerabile.

A questo punto potrebbe sembrare che qualsiasi insieme infinito sia numerabile. Ciò non è affatto vero. Premettiamo una definizione.

Definizione 5

Diciamo **numero reale** la scrittura formale $z,a_1a_2a_3a_4\ldots$, in cui z è un numero intero e a_i rappresentano *cifre*, ossia numeri naturali compresi tra 0 e 9, in modo che da un indice i in poi tutte gli a_i possono anche essere uguali tra loro, purché sia $a_i \neq 9$.

Chiariamo il motivo per cui nella definizione precedente abbiamo escluso i numeri di periodo 9. Supponiamo che esista per esempio il numero 2, 3459999… = $2,345\overline{9}$, noi sappiamo che un numero del genere si può trasformare in frazione con la regola seguente: $2,345\overline{9}=\frac{23459-2345}{9000}=\frac{21114}{9000}=\frac{1173}{500}=2,346$. Cioè avremmo due diverse espressioni per uno stesso numero. Quello *dell'equivoco* è uno dei peggiori problemi con cui hanno a che fare le scienze e deve sempre essere evitato. Quando si parla di un oggetto matematico, tutti quelli che lo conoscono devono riferirsi allo stesso oggetto, in questo caso invece avremmo due possibilità. Ciò accade con tutti i numeri di periodo 9 ed ecco quindi il perché della loro esclusione.

Teorema 3

L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali non è numerabile.

Dimostrazione

Stavolta usiamo il cosiddetto **secondo principio diagonale di Cantor**. Supponiamo per assurdo che $\mathbb{R}$ sia numerabile, ciò significa che si può scrivere $\mathbb{R} = \{r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots\}$. Adesso facciamo vedere invece che esiste un numero reale a cui non è associato alcun numero naturale. Ricordando la definizione 5 un numero reale si scrive $z,a_1a_2a_3a_4\ldots$. Supponiamo che si abbia per esempio

$$r_1 = -2,12437\ldots;\ r_2 = 122,41903\ldots;\ r_3 = 0,12983\ldots;\quad r_4 = -47,02578\ldots;\ \ldots$$

Costruiamo adesso un numero reale che è diverso da ciascuno dei numeri reali indicati con r_i, semplicemente scrivendo un numero la cui parte intera è 0, la sua prima cifra decimale è diversa dalla prima cifra decimale di r_1, la sua seconda cifra decimale è diversa dalla seconda cifra decimale di r_2, la sua terza cifra decimale è diversa dalla terza cifra decimale di r_3, e in generale la sua n–esima cifra decimale è diversa dalla n–sima cifra decimale di r_n. Ovviamente faremmo sempre in modo da evitare il periodo 9. Questo numero che potrà essere, con i dati da noi scelti, per esempio 0,2643..., è un numero reale ma è diverso da ogni r_i. Quindi abbiamo la tesi.

Diciamo che l'insieme dei numeri reali ha **la potenza del continuo**.

Sorge una domanda immediata. Esistono insiemi che sono più potenti di $\mathbb{N}$ e meno potenti di $\mathbb{R}$? A questa domanda non si può fornire risposta[2], come è stato provato da Kurt Gödel nel 1940 e da Paul Cohen nel 1967, quindi possiamo enunciare le seguenti proprietà che si escludono a vicenda, ma che possono considerarsi entrambe accettabili, anche se non contemporaneamente.

Ipotesi del continuo (CH).

Non ci sono insiemi che sono più potenti di $\mathbb{N}$ e meno potenti di $\mathbb{R}$.

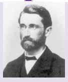
Negazione dell'ipotesi del continuo (¬CH).

Esistono insiemi che sono più potenti di $\mathbb{N}$ e meno potenti di $\mathbb{R}$.

[2] Almeno in un certo sistema assiomatico che è quello che va per la maggiore

L'ipotesi del continuo è un esempio di problema indecidibile, nel senso che sia esso che la sua negazione possono essere considerati assiomi di distinti sistemi entrambi coerenti.

I protagonisti


Julius Wilhelm Richard Dedekind nacque a Braunschweig il 6 Ottobre 1831. Frequentò il Collegium Carolinum a Braunschweig che era un misto fra scuola superiore e Università, dove ricevette una buona base matematica che perfezionerà in seguito iscrivendosi all'Università di Gottinga dove insegnava il grande Gauss. Consegue il dottorato nel 1852. Nel 1854, cominciò a insegnare teoria della probabilità e geometria all'università di Gottinga. Nel 1858 si trasferì al Politecnico di Zurigo. In questi anni cominciò i suoi fondamentali studi sulle sezioni dei numeri razionali che porteranno a una sistematizzazione teorica dei numeri reali, che si cercava da tempo in matematica. Nel 1862 ritornò al Collegium Carolinum, diventato una Scuola tecnica superiore, dove finirà la sua carriera. Nel 1872 pubblicò uno dei suoi più importanti lavori *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (*Continuità e numeri irrazionali*). Nel 1874 incontrò Cantor con cui cominciò a lavorare, anche se indipendentemente sulla teoria degli insiemi infiniti. Nel 1888 pubblicò un altro suo importantissimo lavoro: *Was sind und was sollen die Zahlen?* (*Cosa sono i numeri e cosa dovrebbero essere?*) dove definisce gli insiemi infiniti come abbiamo visto. Morì a Braunschweig il 12 Febbraio 1916.


Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor nacque il 3 Marzo 1845 a San Pietroburgo. Nel 1856 con la famiglia si trasferì in Germania. Nel 1867 conseguì il dottorato presso l'Università di Berlino. Ben presto cominciò a occuparsi della teoria degli insiemi infiniti e nel 1873 provò che i numeri razionali possono essere posti in corrispondenza biunivoca con i naturali. Negli stessi anni intraprese una fitta e proficua corrispondenza con Dedekind che si occupava di problemi simili. In una di queste lettere, nel 1877, comunicò all'amico, usando la famosa frase: *Lo vedo, ma non ci credo*, di avere provato un risultato paradossale, ossia che i punti dell'intervallo [0, 1] sono *tanti quanti* quelli di un insieme a *n* dimensioni. Cominciò a pubblicare i suoi risultati, che però erano troppo moderni per l'epoca e trovò molti oppositori, fra cui il potente Kronecker che fece di tutto per impedirgli una carriera accademica di rilievo. Anche per questo motivo, unito a diversi problemi familiari, fra cui la morte di un giovane figlio, cominciò a soffrire di stati depressivi. Così fu ricoverato diverse volte in manicomio, e proprio in un sanatorio morì, povero, il 6 Gennaio 1918 ad Halle, in Germania.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Mettere in corrispondenza biunivoca l'insieme dei multipli di 5, {5, 10, 15, 20, …}, *con il suo sottoinsieme dei multipli di* 15, {15, 30, 45, 60, …}.

Per esempio possiamo associare al generico multiplo di 5, che possiamo perciò scrivere $5n$, il generico multiplo di 15, che indichiamo con $15n$, secondo lo stesso fattore n. Cioè associamo 5 a 15, $20 = 5 \cdot 4$ a $60 = 15 \cdot 4$ e così via. Quindi l'insieme dei multipli di 5, secondo la definizione data, è un insieme infinito.

***Livello* 1**

1. Utilizzando la corrispondenza biunivoca fra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ definita nell'esempio 2, determinare il corrispondente naturale associato all'intero 235 e il corrispondente intero associato al naturale 235. [470; –117]
2. Porre in corrispondenza biunivoca $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ con una legge diversa da quella dell'esempio 2.
3. Porre in corrispondenza biunivoca $\mathbb{Z}$ con i naturali pari.

Stabilire quali fra le seguenti coppie di insiemi sono equipotenti (Con M_n indichiamo l'insieme dei multipli del numero naturale n)

***Livello* 2**

4. a) $M_8, \left\{\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \ldots\right\}$; b) M_5 , $\left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \ldots\right\}$; c) $\mathbb{Z}$, $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \ldots\right\}$; d) M_8 , $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ [a) Sì; b) Sì; c) Sì; d) No]
5. a) $\{1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots\}$, $\mathbb{R}^+$; b) M_4, $\mathbb{R}^-$; c) $\mathbb{Q}^+$, $\left\{-\frac{7}{8}, \frac{14}{9}, -\frac{21}{10}, \ldots\right\}$; d) $\mathbb{Z}^-$, $\left\{\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \ldots\right\}$ [a) No; b) No; c) Sì; d) Sì]
6. a) $\{2, 4, \ldots, 2n, \ldots\}, \mathbb{R}$; b) $\{1, 3, \ldots, 2n - 1, \ldots\}, \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}^+$; c) $\{1, 8, \ldots, n^3, \ldots\}, \left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{6}{27}, \ldots\right\}$ [a) No; b) No; c) Sì]
7. (Maturità scientifica PNI 2012/2013) Tre amici discutono animatamente di numeri reali. Anna afferma che sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti e dunque i razionali sono tanti quanti gli irrazionali. Paolo sostiene che gli irrazionali costituiscono dei casi eccezionali, ovvero che la maggior parte dei numeri reali sono razionali. Luisa afferma, invece, il contrario: sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti, ma esistono più numeri irrazionali che razionali. Chi ha ragione? Si motivi esaurientemente la risposta. [Luisa]

***Livello* 3**

8. Provare che l'insieme dei numeri reali negativi non può essere numerabile.
9. Provare che l'insieme dei numeri irrazionali non può essere numerabile.
10. Provare che un segmento di lunghezza 1 ha "tanti punti" quanto una retta.
11. Provare che l'insieme prodotto cartesiano $A \times B = \{(a; b), a \in A, b \in B\}$ di insiemi numerabili è un insieme numerabile.
12. Provare che l'unione di una infinità numerabile di insiemi numerabile è numerabile.

Giochiamo alla matematica

Parecchi giochi logici sono effettuati a partire dai paradossi relativi all'infinito. Il più famoso di essi è quello dell'hotel infinito di Hilbert. Il famoso matematico immaginò che esistesse in una qualche galassia un hotel formato da infinite stanze, ciascuna con un ben determinato numero intero posto sulla sua porta. Un certo giorno l'hotel risulta esaurito, tutte le sue infinite stanze sono occupate da infiniti ospiti. La sera giunge un altro ospite. Si chiede: l'albergatore deve mandare via il cliente o riesce ugualmente ad alloggiarlo in una stanza? Rispondere alla domanda equivale solo a provare che l'insieme $\mathbb{N}$ e l'insieme $\mathbb{N} \cup \{0\}$ sono equipotenti, il che è vero perché abbiamo visto che l'unione di insiemi numerabili e numerabile. Se poi vogliamo mostrare come risolvere "praticamente" il problema, basta far spostare ciascun ospite nella camera successiva, lasciando così vuota la prima camera che sarà perciò destinata all'ospite sopraggiunto.

Attività

1. Mostrare che è possibile sistemare nell'hotel di Hilbert esaurito altri 10 clienti.
2. Mostrare che è possibile sistemare nell'hotel di Hilbert esaurito altri infiniti clienti, di infinità numerabile.

Il Principio di induzione

Avendo a che fare con insiemi numerabili può capitare di dovere dimostrare proprietà che riguardano i loro infiniti elementi.

Esempio 3

Se volessimo dimostrare che tutti i quadrati dei numeri interi compresi tra 1 e 100 hanno cifra delle unità diversa da 3, potremmo effettuare un ragionamento oppure potremmo più semplicemente calcolare tutti e 100 i quadrati e vedere che nessuno di essi finisce per 3. Questo tipo di procedura non è elegante ma è efficace, poiché risolve la questione. Ovviamente se avessimo voluto dimostrare che la proprietà vale per i quadrati di tutti i numeri inferiori a 1 miliardo, la verifica diventerebbe eccessivamente lunga e dovremmo farci aiutare per esempio da un sistema automatico.

Abbiamo osservato che verificare che i quadrati dei numeri naturali minori di un miliardo non finiscono mai per 3, è una procedura troppo lunga, però, almeno in linea teorica, è fattibile. Se volessimo dimostrare che il quadrato di qualsiasi numero naturale non finisce per 3 la verifica non sarebbe neanche fattibile perché non possiamo fare infinite verifiche. A volte però per provare proprietà relative ad insiemi infiniti ma numerabili, possiamo fare due sole verifiche che valgono per infinite.

Esempio 4

Il seguente aneddoto è riferito al piccolo Gauss, che divenne in seguito uno dei più grandi matematici di tutti i tempi. Si dice che alle scuole elementari, il maestro per far stare buoni i bambini assegnò loro di sommare tutti i numeri interi da 1 a 100. Dopo pochi minuti il piccolo genio porto la lavagnetta con il risultato corretto: 5050. La leggenda vuole che il bimbo avesse scoperto che la somma era riconducibile al prodotto (100 · 101)/2. Noi vogliamo provare più in generale che la somma dei primi n numeri naturali si trova con la seguente formula: $1+2+3+...+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$, di cui il caso di Gauss è particolare per n = 100. Ora se possiamo verificare che essa è vera per n = 100, semplicemente sommando tutti i 100 numeri e facendo vedere che effettivamente la loro somma è 5050, non possiamo verificarla per tutti i numeri naturali. Allora facciamo in questo modo. Intanto ci assicuriamo che la regola è valida per il primo valore per cui ha significato, cioè n = 1. E in effetti: $1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}$. Ora vogliamo fare un tipo di verifica che vale per un numero generico e che mostriamo per esempio per n = 15. Supponiamo di avere già dimostrato che 1 + 2 + 3 + … + 14 = 14 · 15/2. Allora per verificare che la proprietà è vera anche per n = 15, non c'è bisogno di rifare tutte le somme. Possiamo dire che 1 + 2 + 3 + … + 14 + 15 = (1 + 2 + 3 + … + 14) + 15 = 14 · 15/2 + 15. Questo ovviamente ci permette di semplificare i calcoli e adesso di mettere in evidenza, scrivendo: 1 + 2 + 3 + … + 14 + 15 = 15 · (14/2 + 1) = 15 · 16/2, che è proprio la regola valida per n = 15.

La procedura mostrata nel precedente esempio può essere applicata a un generico numero naturale n, ottenendo così il seguente risultato generale, che non è altri che una versione più *ricca*, dell'assioma mancante nella lista vista nel primo paragrafo.

Principio di induzione

Se $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$ è un insieme numerabile e P è una proprietà, se

1. a_1 verifica P
2. comunque scegliamo un elemento a_n in A, il sapere che P è verificata da a_n implica che P è verificata anche da a_{n+1}, allora P è verificata da tutti gli elementi di A.

Esempio 5

Dimostriamo la formula di Gauss usando il principio di induzione. Abbiamo già verificato che essa è vera per $n = 1$, quindi dobbiamo fare vedere che se è vera per un n generico lo è anche per il successivo $(n + 1)$. Cioè vogliamo dimostrare che $1+2+3+...+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2} \Rightarrow 1+2+3+...+n+(n+1)=\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$.

Per fare ciò dobbiamo cercare di scrivere quello che vogliamo provare in modo da sfruttare quello che già sappiamo. Allora scriviamo: $1 + 2 + \ldots + n + (n + 1) = [1 + 2 + \ldots + n] + (n + 1)$, infatti in questo modo all'interno delle parentesi quadrate abbiamo una somma che è quella dell'ipotesi, e quindi per la quale sappiamo il risultato, che perciò andiamo a sostituirlo a essa, ottenendo: $\frac{n\cdot(n+1)}{2}+(n+1)$. Adesso mettiamo in evidenza a fattor comune: $(n+1)\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right)=(n+1)\cdot\left(\frac{n+2}{2}\right)=\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$ e abbiamo ottenuto proprio ciò che volevamo provare. Quindi la formula è dimostrata.

Nelle verifiche avremo a che fare con concetti di divisibilità, pertanto ci risultano utili i seguenti risultati.

Teorema 4

La somma di due numeri divisibili per n è divisibile per n.

Dimostrazione

Dire che a è divisibile per n, vuol dire che $a = n \cdot h$. Quindi se anche $b = n \cdot k$, avremo $a + b = n \cdot h + n \cdot k = n \cdot (h + k)$, che è proprio la tesi voluta.

Non è vero invece che se la somma è divisibile per n entrambe sono divisibili per n, mentre è vero che se la somma è divisibile per n e un addendo è divisibile per n, anche l'altro lo è.

Esempio 6

- $3 + 5 = 8$, ma nessuno dei due addendi è divisibile per 8.
- $a = n \cdot h$, $a + b = n \cdot k$, da cui $a + b = n \cdot h + b = n \cdot k$, quindi $b = n \cdot k - n \cdot h = n \cdot (k - h)$.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Osserviamo che si ha: 1·2 + 2·3 + 3·4 = 20 = 3·4·5/3, *e anche* 1·2 + 2·3 + 3·4 + 4·5 = 40 = 4·5·6/3. *Provare per induzione la seguente formula generale*: 1·2 + 2·3 + ... + n·(n + 1) = n·(n + 1)·(n + 2)/3.

Verifichiamola per n = 1. $1\cdot 2=\frac{1\cdot(1+1)\cdot(1+2)}{3}=\frac{1\cdot 2\cdot \cancel{3}}{\cancel{3}}=1\cdot 2$. Adesso mostriamo che se 1·2 + 2·3 + ... + n·(n + 1) = n·(n + 1)·(n + 2)/3, allora si ha: 1·2 + 2·3 + ... + (n + 1)·(n + 2) = (n + 1)·(n + 2)·(n + 3)/3. Abbiamo: 1·2 + 2·3 + ... + n·(n + 1)·(n + 2) = [1·2 + 2·3 + ... + n·(n + 1)] + (n + 1)·(n + 2). Sostituiamo all'espressione fra parentesi quadrate l'ipotesi induttiva: n·(n + 1)·(n + 2)/3 + (n + 1)·(n + 2). Mettiamo in evidenza a fattor comune: (n + 1)·(n + 2)·(n/3 + 1) = (n + 1)·(n + 2)·(n + 3)/3, cioè la tesi.

Provare la validità delle seguenti proprietà, usando il metodo di dimostrazione per induzione

Livello 2

1. a) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$; b) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$
2. a) $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n\cdot(4n^2-1)}{3}$; b) $12^2 + 5^2 + 8^2 + \ldots + (3n-1)^2 = \frac{n\cdot(6n^2+3n-1)}{2}$
3. a) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]^2$; b) $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$
4. a) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$; b) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$
5. a) $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n\cdot(n+1)}{2\cdot(2n+1)}$; b) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$
6. a) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2\cdot(2n^2-1)$; b) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Livello 3

7. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{4}$
8. $(1^5 + 2^5 + \ldots + n^5) + (1^7 + 2^7 + \ldots + n^7) = 2\cdot(1 + 2 + \ldots + n)^4$
9. $3\cdot(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) - 3\cdot(1 + 2 + \ldots + n) = n^3 - n$
10. $3\cdot(1^5 + 2^5 + \ldots + n^5) + (1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) = 4\cdot(1 + 2 + \ldots + n)^3$

Lavoriamo insieme

Provare per induzione che $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$ *è divisibile per* 6, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Per n = 1, si ha 1 · 2 · 3 = 6. Adesso proviamo che se è vero che $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$ è divisibile per 6 è anche vero che $(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)$ è divisibile per 6. Dobbiamo però formalizzare che significa che un numero è divisibile per 6. Che possa scriversi come prodotto di 6 per un termine generico, cioè

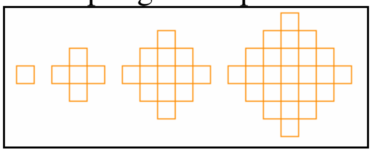
$$n\cdot(n+1)\cdot(n+2) = 6\cdot h.$$

Ora si ha: $(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3) = (n+1)\cdot(n+2)\cdot n + (n+1)\cdot(n+2)\cdot 3$. Adesso applichiamo l'ipotesi induttiva al primo addendo: $6\cdot h + (n+1)\cdot(n+2)\cdot 3 = 3\cdot[2h + (n+1)\cdot(n+2)]$.
Il prodotto di due numeri interi consecutivi è pari, quindi possiamo scrivere $3\cdot(2h + 2\cdot k) = 6\cdot(h + k)$, che è quello che voleva dimostrarsi.

Provare la validità delle seguenti proprietà valide per ogni n naturale, usando il metodo di dimostrazione per induzione. Può essere utile ricordare che la somma di numeri divisibili per h è divisibile per h

Livello 3

11. a) $17^n - 12^n$ è divisibile per 5; b) $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ è divisibile per 8; c) $7^n + 5^{2n+1}$ è divisibile per 6
12. a) $13^{2n} + 6$ è divisibile per 7; b) $3^{2n} + 4^{n+1}$ è divisibile per 5; c) $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ è divisibile per 133
13. $cos(\alpha) + cos(3\alpha) + ... + cos((2n-1)\cdot\alpha) = \dfrac{sin(2n\cdot\alpha)}{2\cdot sin(\alpha)}$
14. $sin(\alpha) + sin(3\alpha) + ... + sin((2n-1)\cdot\alpha) = \dfrac{1-cos(2n\cdot\alpha)}{2\cdot sin(\alpha)}$
15. Le figure seguenti costituiscono una successione di poligoni, che prosegue sempre seguendo la stessa legge. Determinare quanti quadrati formano il poligono al passo n e dimostrarla poi per induzione.



[$2n^2 - 2n + 1$]

Lavoriamo insieme

Vogliamo provare che $n^3 + 5n$ è divisibile per 6, senza il principio di induzione. Fattorizziamo: $n \cdot (n^2 + 11)$. Se n è pari, l'altro fattore è dispari e viceversa, quindi l'espressione è pari. Se n è multiplo di 3 abbiamo finito, se non lo è, vuol dire che diviso per 3 ha resto 1 o 2, cioè $n = 3h + 1 \vee n = 3h - 1$, quindi $n^2 + 11 = (3h + 1)^2 + 11 = 9h^2 + 6h + 1 + 11 = 9h^2 + 6h + 12 = 3 \cdot (3h^2 + 2h + 4)$, che è divisibile per 3. Analogo risultato nell'altra possibilità. Concludiamo perciò che in ogni caso $n^3 + 5n$ è divisibile per 6.

Provare la validità delle seguenti proprietà, valide per ogni n naturale, usando un metodo di dimostrazione diretto

Livello 3

16. a) $n^2 \cdot (n^2 - 1)$ è divisibile per 12; b) $n^5 - n$ è divisibile per 30; c) $n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n$ è divisibile per 8
17. a) $n^3 + 11n$ è divisibile per 6; b) $7^n - 5^n$ è divisibile per 2; c) $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$ è divisibile per 9

La sfida

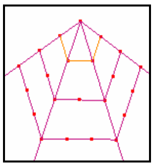
Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi

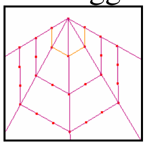
1. Si osservi che $1 = 1^3$, $3 + 5 = 2^3$, $7 + 9 + 11 = 3^3$, congetturare una legge generale e provarla per induzione. $\left[\sum_{k=1}^{n-1}(n^2 - n + 2k + 1) = n^3\right]$
2. Provare che $3n^5 + 5n^3 - 8n$ è divisibile per 120, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
3. Provare che $a^n - b^n$ è divisibile per $(a - b)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, a e b numeri reali positivi.
4. Provare la disuguaglianza di Bernoulli: $(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x$, $\forall n \in \mathbb{N}, x \geq -1$.
5. Consideriamo il seguente schema infinito di numeri interi non negativi, che hanno i numeri 0, 1, 2, 3, . . . lungo gli estremi, mentre i numeri interni sono ottenuti sommando i due numeri adiacenti della riga precedente. Mostriamo le righe fino alla sesta.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 0 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 2 & & 2 & & 2 & & & \\
 & & 3 & & 4 & & 4 & & 3 & & \\
 & 4 & & 7 & & 8 & & 7 & & 4 & \\
5 & & 11 & & 15 & & 15 & & 11 & & 5
\end{array}
$$

Con $f(n)$ denotiamo la somma dei numeri della riga n. Qual è il resto della divisione di $f(100)$ per 100? (*Suggerimento*: Provare per induzione che $f(n) = 2^n - 2$) [74]

6. Provare che $n! > 2^{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$. Si ha: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.
7. Provare che $\prod_{k=1}^{n} cos(2^k \cdot \theta) = \dfrac{sin(2^{n+1}\cdot\theta)}{2^{n+1}\cdot sin(\theta)}, \forall n \in \mathbb{N}$.
8. In figura abbiamo tracciato i primi 3 numeri pentagonali (5, 12, 22), determinare la legge che permette di passare da un numero pentagonale al successivo, quindi trovare la legge che permette di determina-

re l'n–esimo numero pentagonale, dimostrandola per induzione.  $\left[\frac{3n^2+5n+1}{2}\right]$

9. In figura abbiamo tracciato i primi 3 numeri esagonali (6, 15, 28), determinare la legge che permette di passare da un numero esagonale al successivo, quindi trovare la legge che permette di determinare l'n–esimo numero esagonale, dimostrandola per induzione.  [$2n^2 + 3n + 1$]

Data la successione di Fibonacci* : {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …} *in cui ogni numero, a parte i primi due, è somma dei due che lo precedono. Sulla base degli esempi proposti enunciare e dimostrare una congettura

10. $1 + 1 = 3 - 1$; $1 + 1 + 2 = 5 - 1$; $1 + 1 + 2 + 3 = 8 - 1$; $1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 13 - 1$. [$F(1) + F(2) + \ldots + F(n) = F(n - 2) - 1$]
11. $1 + 3 = 5 - 1$; $1 + 3 + 8 = 13 - 1$; $1 + 3 + 8 + 21 = 34 - 1$ [$F(2) + F(4) + \ldots + F(2n) = F(2n + 1) - 1$]
12. $1 + 2 = 3$; $1 + 2 + 5 = 8$; $1 + 2 + 5 + 13 = 21$. [$F(1) + F(3) + \ldots + F(2n - 1) = F(2n)$]
13. $1^2 + 1^2 = 1\cdot2$; $1^2 + 1^2 + 2^2 = 2\cdot3$; $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 3\cdot5$; $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 5\cdot8$ [$F^2(1) + F^2(2) + \ldots + F^2(n) = F(n) \cdot F(n + 1)$]
14. $1^2 + 1^2 = 2$; $1^2 + 2^2 = 5$; $2^2 + 3^2 = 13$; $3^2 + 5^2 = 34$; $5^2 + 8^2 = 89$ [$F^2(k) + F^2(k + 1) = F(2k + 1)$]
15. $2^2 - 1^2 = 1\cdot3$; $3^2 - 2^2 = 1\cdot5$; $5^2 - 3^2 = 2\cdot8$; $8^2 - 5^2 = 3\cdot13$; $13^2 - 8^2 = 5\cdot21$ [$F^2(k+1) - F^2(k) = F(k-1)\cdot F(k+2)$]
16. $1 \cdot 2 = 1^2 + 1$; $1 \cdot 3 = 2^2 - 1$; $2 \cdot 5 = 3^2 + 1$; $3 \cdot 8 = 5^2 - 1$; $5 \cdot 13 = 8^2 + 1$ [$F(2k - 1) \cdot F(2k + 1) = F^2(2k) - 1$; $F(2k) \cdot F(2k + 2) = F^2(2k + 1) + 1$]

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi

I temi completi dei Licei Scientifici per gli ultimi anni sono scaricabili, con soluzione, dal sito

http://matdidattica.altervista.org/esamidistato.htm

1. (Liceo scientifico 2002/03) Considerati i primi n numeri naturali a partire da 1: 1, 2, 3, ..., $n - 1$, n, moltiplicarli combinandoli due a due in tutti i modi possibili. La somma dei prodotti ottenuti risulta uguale a: A) $\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$; B) $\frac{n\cdot(n^2-1)}{3}$; C) $\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(3n+1)}{24}$; D) $\frac{n\cdot(n^2-1)\cdot(3n+2)}{24}$. Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata. [D]
2. (Liceo scientifico PNI 2013/14) Le lettere $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ denotano, rispettivamente, gli insiemi dei numeri naturali, interi, razionali e reali mentre il simbolo $\aleph_0$ (*aleph-zero*) indica la cardinalità di $\mathbb{N}$. Gli insiemi $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ hanno anch'essi cardinalità $\aleph_0$? Si motivi la risposta. [$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sì; $\mathbb{R}$ no]

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito

http://mathinterattiva.altervista.org/volume_4_8.htm

8. I numeri naturali e l'infinito

8.2 Combinatoria

Prerequisiti

- I numeri naturali e i numeri reali
- Operazioni aritmetiche elementari e loro proprietà
- Concetto di insieme numerabile
- Sviluppo della potenza ennesima di un binomio e triangolo di Tartaglia
- Equazioni algebriche

Obiettivi

- Imparare a "contare" in modo intelligente, evitando inutili calcoli
- Conoscere e sapere usare il concetto di fattoriale
- Comprendere i diversi modi di raggruppare oggetti appartenenti a insiemi numerabili
- Comprendere la differenza fra raggruppamenti semplici e ripetuti
- Comprendere la differenza fra i diversi tipi di raggruppamenti
- Conoscere le formule per il calcolo dei raggruppamenti più diffusi

Contenuti

- Raggruppamenti semplici e con ripetizione e principio dei cassetti
- Disposizioni semplici e ripetute
- Permutazioni semplici e ripetute
- Combinazioni semplici e ripetute

Parole Chiave

Coefficienti binomiali – Combinazioni – Disposizioni – Fattoriale – Permutazioni

Raggruppamenti semplici e con ripetizione e principio dei cassetti

Il problema

Erminia vuole avere la certezza di vincere al totocalcio, quindi si chiede quante colonne deve giocare per essere sicura di individuare tutti i risultati possibili. Come possiamo aiutarla?

Il problema di contare in modo opportuno insiemi particolarmente numerosi, o comunque di difficile determinazione, è uno dei più importanti della matematica. La prima cosa da fare è distinguere i diversi raggruppamenti che possono farsi scegliendo alcuni elementi da un insieme.

Esempio 1

- Nel problema di Erminia vogliamo conoscere tutti i possibili modi di ordinare i simboli 1 X 2 su 14 diverse uscite, cioè tutte le colonne di 14 simboli scelti fra 3. Ovviamente essendo i simboli da usare meno di quelli che ci servono uno almeno di essi deve ripetersi più di una volta.
- Se invece Erminia avesse giocato al superenalotto, in cui si tratta di individuare 6 numeri scelti da 90, tutti i 6 numeri devono essere diversi, quindi non vi saranno ripetizioni.

Tenuto conto dell'esempio precedente, una prima distinzione la facciamo sulla possibilità che i gruppi che vogliamo formare siano di elementi tutti diversi o no.

Definizione 1

Dato un insieme A di n elementi diversi, chiamiamo
- **raggruppamenti semplici** di A, il numero di gruppi che possono formarsi con alcuni elementi di A tutti distinti tra loro;
- **raggruppamenti ripetuti** di A, il numero di gruppi che possono formarsi con alcuni elementi di A non tutti distinti tra loro.

Nella definizione precedente alcuni significa almeno uno, ma anche tutti gli elementi. Adesso enunciamo un risultato apparentemente banale, ma di fondamentale importanza nel calcolo combinatorio.

Principio dei cassetti

Se abbiamo alcuni cassetti e un numero di oggetti superiore al numero dei cassetti, allora in almeno un cassetto c'è più di un oggetto.

Il principio è veramente banale e qualcuno potrebbe perciò obiettare che è inutile. In realtà in matematica nulla è così banale da potersi ritenere inutile. Cominciamo a vedere qualche problema con una semplice applicazione del principio dei cassetti, detto anche del nido del piccione (Pigeon-hole in inglese).

Esempio 2

- In un cassetto sono messi a caso 10 calzini neri e 8 calzini bianchi identici. Giorgio si sveglia una mattina e senza accendere la luce per non svegliare sua moglie prende dei calzini. Quanti ne deve prendere come minimo per essere sicuro che ce ne siano due dello stesso colore? La risposta è semplice e non dipende da quanti calzini ci sono nel cassetto, ma solo da quanti colori ci sono. Basta che ne prenda 3, infatti se è sfortunato prendendone due ne prenderà uno bianco e l'altro nero, ma a questo punto il terzo è bianco o nero e perciò ne ha sicuramente due dello stesso colore.
- Se invece volesse averne certamente due di un dato colore, per esempio tutti e due bianchi allora dovrà prenderne almeno 12, perché i primi 10 potrebbero essere tutti i calzini neri. Allo stesso modo se vuol essere sicuro di prenderne almeno due neri deve prenderne almeno 10, perché i primi 8 potrebbero essere tutti bianchi.

Verifiche

Quali fra i seguenti raggruppamenti sono semplici e quali ripetuti?

Livello 1

1. PIN formato con 5 cifre [Ripetuti] Targhe automobilistiche italiane [Ripetuti]
2. Numeri interi minori di 100 le cui cifre sono in ordine crescente (pe 123, 369, ma non 452) [Semplici]
3. Anagrammi della parola CARTE [Semplici] Anagrammi della parola CARTA [Ripetuti]
4. Anagrammi della parola CARTA che iniziano per A [Semplici]
5. Anagrammi della parola CARTA che iniziano per C [Ripetuti]
6. Numeri usciti al gioco della roulette in tre turni successivi [Ripetuti]
7. Combinazioni di una cassaforte che usa 5 lettere scelte fra 5 vocali [Ripetuti]
8. Possibili menu completi (primo, secondo, dolce) [Semplici]
9. Estrazione del primo numero sulla ruota di Roma [Semplici]
10. Partite di una giornata di un campionato di calcio a 10 squadre [Semplici]
11. Estrazione di due carte da un mazzo da Ramino, senza considerare il seme, ma solo il valore [Ripetuti]
12. Estrazione di due carte da un mazzo da Ramino, considerando il seme, ma non il valore [Ripetuti]
13. Estrazione di due carte da un mazzo da Ramino, considerando il seme e il valore [Semplici]
14. Esiti dei lanci di una moneta per 10 volte [Ripetuti]
15. Esiti dell'estrazione di una pallina da un'urna che ne contiene 10 di colori tutti diversi [Semplici]
16. Esiti dell'estrazione di una pallina da un'urna che ne contiene 10 di colori non tutti diversi [Semplici]
17. Esiti dell'estrazione di due palline da un'urna che ne contiene 10 di colori tutti diversi [Semplici]
18. Esiti dell'estrazione di due palline da un'urna che ne contiene 10 di colori non tutti diversi [Ripetuti]

Lavoriamo insieme

In una busta vi è lo stesso numero di calzini bianchi e di calzini neri, indistinguibili al tatto. Sappiamo che il minimo numero di calzini da prendere, a caso, per averne un paio dello stesso colore è lo stesso del minimo numero da prendere per averne due di colore differente. Quanti calzini ci sono nella busta?

Per il principio dei cassetti, dato che i colori sono due, il minimo numero di calzini da prendere per avere la certezza che siano dello stesso colore è 3. Dato che questo numero coincide con il minimo numero da prendere per averne due di colore diverso, vuol dire che in totale i calzini sono 4, due bianchi e due neri

Livello 1

19. In un cassetto ci sono 4 calzini rossi, 5 verdi e 6 blu. Quanti calzini si devono prendere, come minimo, per essere sicuri che almeno due di essi siano dello stesso colore? [4]
20. Con riferimento all'esercizio precedente, quanti calzini dobbiamo prendere, come minimo, per essere sicuri di prendere almeno due calzini rossi? [13]
21. Ci sono 80 palle in un cestino. 35 sono rosse, 25 verdi, 15 gialle e 5 nere. Prendendo le palle senza guardare, quante se ne devono prendere, come minimo, per essere sicuri che ve ne sia almeno a) una rossa; b) una rossa o una nera; c) una rossa e una nera; d) due di diverso colore; e) tre dello stesso colore. [a) 46; b) 41; c) 76; d) 36; e) 9]
22. In una scatola ci sono alcune palle rosse ed alcune verdi. Sappiamo che dobbiamo estrarre almeno 10 palle per avere la sicurezza di estrarre, senza guardare, una palla rossa. Quante palle verdi ci sono nella scatola? [9]
23. Scegliamo a caso 3 numeri interi consecutivi, possiamo essere sicuri che almeno uno di essi è multiplo di 3? È possibile che ve ne siano due multipli di 3? [Sì; no]
24. Scegliamo a caso 5 numeri interi consecutivi, possiamo essere sicuri che almeno uno di essi è multiplo di 5? [Sì]
25. Quante persone dobbiamo prendere per essere certi che almeno due di esse siano nate lo stesso mese? E lo stesso giorno? E lo stesso giorno e mese? [13; 32; 366]
26. In un mazzo di carte da poker quante carte dobbiamo prendere, minimo, per essere sicuri che due di esse abbiano lo stesso seme? Che siano entrambe dello stesso colore? Che siano dello stesso valore numerico? [5; 3; 14]
27. Apriamo il vocabolario a caso e scegliamo una parola. Quante parole dobbiamo scegliere, minimo, per essere sicuri che almeno due di esse inizino con la stessa lettera? E almeno tre parole? [27; 53]

Lavoriamo insieme

Un classico problema che si risolve con il principio dei cassetti è il seguente.
A una festa ci sono alcune persone, per esempio 24, alcune si salutano con una stretta di mano, altre no. Dimostrare che almeno due persone hanno stretto lo stesso numero di mani.
Cominciamo a osservare che ciascuno dei presenti può stringere da 0 a 23 mani, dato che non può stringere la mano con se stesso, o che, se lo facesse, in ogni caso non la conteremmo come stretta di mano. Quindi abbiamo in teoria 24 numeri da assegnare a 24 persone, il che funziona. Il problema però è che ciò non è vero, perché se esistesse una persona che non ha stretto la mano di nessuno, non ci potrebbe essere una persona che ha stretto 23 mani. Quindi l'insieme delle strette di mano è formato solo da 23 numeri: {1, 2, 3, …, 23} oppure {0, 1, 2, …, 22}. Ma allora, per il principio dei cassetti avremmo più persone che numeri di strette di mano, quindi almeno due persone dovrebbero avere stretto lo stesso numero di mani.

Livello 2

28. Scegliamo a caso n numeri naturali diversi, quanto deve essere minimo n, per essere sicuri che almeno due dei numeri scelti abbiano somma pari? [3]
29. Scegliamo a caso n numeri naturali diversi, quanto deve essere minimo n, per essere sicuri che almeno due dei numeri scelti abbiano somma dispari? [Il problema non ha soluzione]
30. Quanti numeri naturali minori di 20, dobbiamo scegliere a caso, al minimo, per essere sicuri che ce ne siano almeno due che sommati diano un risultato dispari? [11]
31. Scegliamo a caso 5 numeri dispari minori di 15, ed effettuiamo tutte le somme a due a due di questi numeri. Per esempio, se scegliamo i primi 5 numeri dispari: {1, 3, 5, 7, 9} otterremo: {1 + 3, 1 + 5, …, 1 + 9, 3 + 5, 3 + 7, 3 + 9, …, 7 + 9}. Tutte le somme ottenute sono diverse tra loro, comunque scegliamo i 5 numeri? [No]
32. In un sacchetto immettiamo dei biglietti con tutte le parole distinte formate da due lettere scelte da un alfabeto di 26. Quanti biglietti dobbiamo scegliere, minimo, per essere sicuri che almeno due di essi contengano una parola che abbia le stesse lettere? [326]
33. Consideriamo i numeri interi da 1 a 8, ne prendiamo n a caso e siamo sicuri che almeno due dei numeri scelti hanno somma divisibile per 9, qual è il minimo valore di n? [5]

Lavoriamo insieme

Consideriamo l'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, *sappiamo che esso ha* $2^5 = 32$ *sottoinsiemi, dimostrare che fra questi* 32 *sottoinsiemi ve ne sono almeno due disgiunti, che hanno la stessa somma degli elementi.*
In effetti li troviamo subito, per esempio {1, 2} e {3}, se però l'insieme fosse in generale $\{1, 2, 3, ..., n\}$ la questione diverrebbe più complessa. Ragioniamo nel modo seguente. La somma degli elementi varia da 0, somma degli elementi dell'insieme vuoto, a $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n\cdot(n+1)}{2} < 2^n$, quindi ovviamente i 2^n sottoinsiemi non possono avere tutti somma diversa. Il problema è quello di provare che gli insiemi sono disgiunti. Supponiamo che A e B abbiano la stessa somma ma non siano disgiunti, cioè si abbia $A \cap B = C$, con $C \neq \varnothing$. Osserviamo che $A \backslash B$ e $B \backslash A$ sono insiemi ovviamente disgiunti, e hanno anche la stessa somma, perché abbiamo tolto da entrambi C.

Livello 3

34. Dal sacchettino dei 90 numeri della tombola ne scegliamo a caso n, per essere sicuri che la somma di almeno due di essi sia divisibile per 3, quanto deve essere n? [32]
35. Provare che fra i sottoinsiemi di {1, 2, …, n}, ce ne sono almeno due disgiunti che hanno la stessa somma.
36. Quanti numeri naturali minori di $2n$, dobbiamo scegliere a caso, al minimo, per essere sicuri che ce ne siano almeno due che sommati diano un risultato dispari? [$n + 1$]
37. Scegliamo 5 numeri dispari minori di n, ed effettuiamo tutte le somme a due a due. Se scegliessimo $n = 26$, potremmo ottenere tutte le somme distinte, per esempio scegliendo i numeri {1, 5, 11, 17, 25} otterremmo le somme {6, 12, 18, 26, 16, 22, 30, 28, 36, 42}, tutte diverse tra loro. Qual è il minimo n per il quale possiamo ottenere, con una opportuna scelta, tutte somme diverse tra loro? [20]
38. Il sistema RGB (Red Green Blue) è usato nei monitor per visualizzare le diverse tonalità di colori. O-

gni colore è formato da una terna di numeri compresi tra 0 e 255, che rappresenta la "quantità" di ciascuno dei tre colori principali. Così per esempio il rosso "puro" ha la terna (255, 0, 0). Si dice che si usano 16,7 milioni di diversi colori. È corretto? Quanti sono precisamente? [16777216]

39. Con riferimento al precedente esercizio, se volessimo ottenere almeno un miliardo di diverse tonalità, quanti diverse tonalità del singolo colore principale dovremmo usare? [1000]

40. Abbiamo un bersaglio circolare, quante freccette dobbiamo lanciare, con la certezza che colpiranno il bersaglio, in modo che almeno due di esse non distino più del raggio? [5]

41. Provare che, scelte sei persone a caso almeno tre di esse o sono mutuamente amiche o sono del tutto sconosciute. *Suggerimento*: ragionare per assurdo.

Disposizioni semplici e ripetute

Ovviamente la scelta dei raggruppamenti può effettuarsi in diversi modi, anche nell'ambito dei raggruppamenti semplici o composti.

Esempio 3

- Nel gioco del superenalotto l'ordine con cui si susseguono i 6 numeri non è importante perché la sestina vincente è sempre scritta in ordine crescente e non importa se un certo numero sia stato estratto nella ruota di Napoli o in quella di Torino, ma solo che sia stato estratto.
- Invece nel caso del totocalcio l'ordine è importante, la colonna formata da 1 seguito da 13 X è diversa da quella in cui 1 è riferito alla seconda partita e tutti gli altri sono X.

Quindi una seconda distinzione riguarda la possibilità che i gruppi siano ordinati o no.

Definizione 2

Dato un insieme A di n elementi e un numero naturale k, chiamiamo **disposizioni di *n* oggetti di classe *k***, il numero di gruppi di k elementi che possono formarsi con gli elementi di A, in modo che ogni gruppo differisca dagli altri o per un elemento o per l'ordine in cui si presentano gli elementi, o, se ripetuti, per il numero di volte che si ripetono.

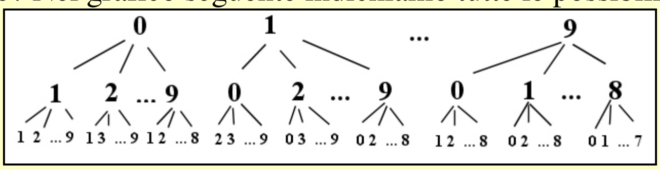
Notazione 1

- Le disposizioni semplici si indicano con $D_{n,k}$;
- Le disposizioni con elementi si indicano ripetuti con $D'_{n,k}$.

Come possiamo calcolare il numero delle disposizioni?

Esempio 4

Il codice PIN di un bancomat è formato in genere da 5 cifre che possono anche ripetersi, supponiamo per semplicità che sia formato solo da 3 cifre tutte diverse scelte fra le 10 cifre 0, 1, 2, …, 9. Quanti diversi codici PIN possiamo ottenere? Nel grafico seguente indichiamo tutte le possibilità.



La prima cifra la possiamo scegliere fra le 10, dato che la seconda cifra deve essere diversa dalla prima per tale cifra restano solo 9 scelte, ma per ognuna delle prime 10 scelte, quindi ci sono $10 \cdot 9 = 90$ scelte. Infine per la terza cifra rimangono 8 scelte per ognuna delle precedenti 90 scelte. Quindi il totale è $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Generalizzando i risultati dell'esempio precedente otteniamo facilmente il seguente risultato.

Teorema 1

Il numero di disposizioni semplici di n oggetti di classe k è dato dal prodotto di k numeri interi consecutivi decrescenti a partire da n, in simboli: $D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.

Dimostrazione Per esercizio, sulla falsariga dell'esempio 4.

Abbiamo detto che i codici PIN reali hanno più cifre anche ripetute, proprio perché allora sarebbe molto facile per un malintenzionato trovarlo, dato che con sole 3 cifre diverse le possibilità sarebbero soltanto 720. Senza contare il fatto che in questo modo ci sarebbero solo 720 clienti che possono usare un bancomat, se no siamo costretti a fare usare lo stesso codice a due diversi clienti.

Esempio 5

Se aumentiamo a 5 le cifre e accettiamo la loro ripetizione è ovvio che ogni volta vi saranno sempre 10 scelte, dato che la seconda scelta può coincidere con la prima e le successive con una delle precedenti. Quindi in totale i codici diversi saranno $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100000$. Come si vede adesso intercettare un codice PIN a tentativi diventa praticamente impossibile (anche perché per motivi di sicurezza dopo 5 tentativi falliti la carta viene ritirata), ma i clienti che possono accontentarsi sono molti di più e anche se ovviamente ci saranno due clienti con lo stesso PIN, perché 100000 è sempre un numero *piccolo*, per i tanti cittadini che usano il bancomat, la possibilità che due di essi abbiano lo stesso numero e possano incontrarsi scambiandosi le carte, anche per errore, è molto remota. Oltre tutto vi è da considerare che il bancomat dipende anche dalla banca, quindi per ogni banca possono esserci 100000 pin diversi.

Dallo svolgimento del precedente esempio, si ricava facilmente il seguente risultato.

Teorema 2

Il numero di disposizioni di n oggetti, ognuno ripetuto fino a un massimo di k volte è $D'_{n,k} = n^k$.
Dimostrazione Per esercizio, sulla falsariga dell'esempio 5.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Quanti numeri di 3 *cifre hanno almeno una cifra uguale a* 7?
Conviene calcolare quanti non hanno neanche una cifra uguale a 7. Un numero di 3 cifre senza una certa cifra, per esempio il 7, è un numero per il quale la prima cifra si può scegliere fra 8 numeri (escluso 0 e 7), la seconda e la terza fra 9 numeri, quindi in totale vi sono $8 \times 9 \times 9 = 648$ numeri che non hanno il 7 fra le loro cifre, su un totale di 900. Quindi quelle che hanno almeno un 7 sono $900 - 648 = 252$.

Si ricorda che i numeri NON possono iniziare per* 0*, i codici, i PIN e simili, sì.

Livello 1

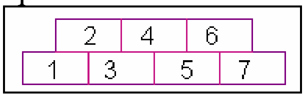
1. In un campionato di calcio a diciotto squadre, ciascuna squadra incontra le altre due volte. Quante partite si sono svolte in totale? [306]
2. A una finale olimpica dei 100 metri partecipano 8 atleti. Vengono premiati i primi tre. Quante sono le possibili classifiche dei premiati? [336]
3. Quanti numeri di 5 cifre tutte diverse esistono? [27216]
4. Quanti numeri di 3 cifre tutte dispari esistono? [60]
5. Quanti numeri con 3 cifre pari (0 è considerato pari, ma non può stare al primo posto) e 1 dispari, tutte diverse, esistono? [1020]
6. Quanti numeri di 3 cifre hanno almeno una cifra uguale a 7? [252]
7. Marco scrive il numero di telefono di Daria in un foglio, ma dopo avere scritto 3471585 finisce l'inchiostro e riporta a mente gli altri tre. Nel tempo che cerca una nuova penna però dimentica le cifre mancanti. Quante telefonate deve fare Marco per essere sicuro di contattare Daria? [1000]
8. Con riferimento al problema precedente, quante sono le telefonate se ricorda che le cifre mancanti sono diverse tra loro? [720]
9. Con riferimento al problema 7, quante sono le telefonate se ricorda che le cifre mancanti sono diverse tra loro e formate da due pari e un dispari, e senza zeri? Se le cifre possono essere uguali? [180; 240]
10. Una targa italiana è formata da due lettere, tre numeri e due lettere. Quante diverse targhe possiamo formare, scegliendo le lettere fra 26? E se non usiamo O e I? [456976000; 331776000]
11. Un'urna contiene 5 palline numerate da 1 a 5. Estraiamo 3 palline rimettendo, dopo ogni estrazione, la pallina nell'urna. Quante diverse terne di estrazioni possiamo ottenere? Quante di queste non contengono il numero 5? [125; 64]
12. Come cambiano i risultati dell'esercizio precedente se invece a ogni estrazione non rimettiamo nell'urna la pallina estratta? [60; 24]
13. Un test è composto da 10 domande Vero-Falso, quante sono tutte le diverse sequenze di risposte possibili? [1024]

Livello 2

14. Con riferimento al problema 2, se tre dei finalisti sono italiani, quante sono le possibili classifiche dei premiati che contengono almeno un italiano? [276]
15. Quanti sono i numeri di 4 cifre formati utilizzando tutte quelle che compaiono in 2012? [9]
16. Quanti numeri di 4 cifre hanno almeno due cifre uguali? *Suggerimento*: sottrarre dai numeri a 4 cifre quelli con le cifre diverse. [4464]
17. Quanti numeri di 4 cifre hanno esattamente due cifre uguali? [3888]
18. In un campionato di calcio ciascuna squadra incontra le altre due volte. Se in totale si sono svolte 182 partite, quante squadre vi sono? [14]
19. A una finale olimpica vengono premiati i primi tre concorrenti. Se le possibili classifiche dei premiati sono 990, quanti sono i partecipanti? [11]
20. A una finale olimpica partecipano 18 concorrenti. Se le possibili classifiche dei premiati sono 73440, quanti sono i premiati? [4]
21. In un pannello elettrico vi sono 4 interruttori adiacenti. In quanti modi diversi il pannello può trovarsi in modo che non vi siano mai due interruttori adiacenti entrambi spenti? [8]
22. Risolvere il problema precedente con 5 interruttori. [12]
23. Consideriamo tutte le tabelle di verità degli enunciati composti da n proposizioni logiche, quante sono

quelle diverse tra loro? $\left[2^{2^n}\right]$

24. In figura è mostrato lo schema di un gioco in cui si deve andare dalla cella 1 alla cella 7, con le seguenti regole: da una cella si può andare ad una confinante solo se quest'ultima ha un numero superiore. In quanti diversi modi si può completare il percorso? [13]



25. Quanti sono i numeri naturali di quattro cifre in cui compare una e una sola volta la cifra 5 ed essa è la cifra più grande presente nel numero? [425]
26. Quanti numeri fra 1 e 2013 hanno almeno una cifra uguale a 4? [543]
27. Nella città di Fantasia non vi sono due cittadini che abbiano gli stessi denti mancanti, cioè ci possono essere due a cui mancano due denti, ma se a uno mancano il sesto e il settimo dell'arcata inferiore, all'altro se manca il sesto non può mancare il settimo. Qual è al massimo la popolazione di questo paese, se ognuno ha un massimo di 32 denti e solo il presidente ne ha esattamente 32? [4294967296]
28. In una gara di matematica vi sono tre categorie di età: junior, standard e senior. I partecipanti per ciascuna categoria sono rispettivamente 10, 12 e 15. Se in ogni categoria vengono premiati i primi tre quante sono le diverse classifiche finali dei premiati? [4770]
29. Le diverse sequenze di risposte possibili a un test di n domande Vero-Falso sono 32768. Quante sono tutte le domande? E se le risposte fossero 393216? [15; I dati sono incoerenti]
30. Ad una gara mondiale di matematica con 10 domande, in cui ogni domanda ha 3 diverse opzioni, hanno partecipato un milione di studenti. È possibile che fra le diverse sequenze di risposte fornite ci siano tutte le sequenze possibili, considerando il fatto che alle domande si può anche non rispondere? [No, servono almeno 1048576 partecipanti]

Livello 3

31. Nel totocalcio si può giocare un risultato fisso (1, X, 2), oppure una doppia (p.e. 1 X, che significa che si indovina purché si verifichi uno dei due risultati), o un tripla (certezza di indovinare: 1 X 2). Da quante colonne è costituito un sistema del totocalcio a 14 partite, con 5 doppie? E uno con 5 triple? E uno con 2 triple e 4 doppie? [32; 243; 144]

Lavoriamo insieme

Risolvere l'equazione $D_{n,5} = 3 \cdot D_{n,4}$.
Traduciamo i simboli: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) = 3 \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)$, ovviamente deve essere $n \geq 5$, pertanto possiamo semplificare tutti i fattori uguali, ottenendo: $n - 4 = 3 \Rightarrow n = 7$.
Verifichiamo: $D_{7,5} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$, $3 \cdot D_{7,4} = 3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$.

Risolvere le seguenti equazioni

Livello 3

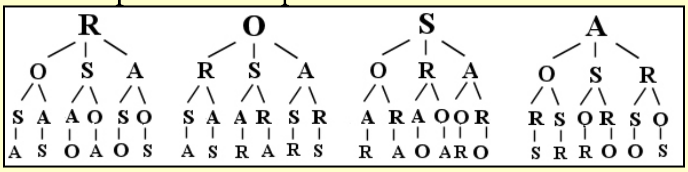
32. a) $D_{n,4} = 8D_{n,3}$; b) $D_{n,7} = 11D_{n,6}$; c) $D_{n,15} = 3D_{n,14}$; d) $D_{n,5} = 3D_{n,3}$ [a) 11; b) 17; c) 17; d) ∅]
33. a) $D_{n,5} = 72 \cdot D_{n,3}$; b) $D_{n,8} = 72 \cdot D_{n,6}$; c) $D_{n,5} = 60D_{n,2}$; d) $D_{n,9} = 24D_{n,6}$ [a) 12; b) 15; c) 7; d) 10]
34. a) $D_{n,10} = 120D_{n,7}$; b) $D_{n,4} + 8D_{n,3} = 60D_{n,2}$; c) $D_{n,5} - 4D_{n,4} = 24D_{n,3}$ [a) 13; b) 7; c) 11]
35. a) $D_{n,5} - 2D_{n,4} = 3D_{n,3}$; b) $D_{n,5} + 3D_{n,4} = 35 \cdot D_{n,3}$; c) $D_{n,2} + D_{n,5} = \frac{337}{96}(D_{n,4} + 5D_{n,3})$ [a) ∅; b) 8; c) 10]
36. a) $D_{n,3} + 5D_{n-1,4} = \frac{1005}{28} D_{n+1,2}$; b) $D_{n+1,7} - 5 \cdot D_{n+2,6} + 70 \cdot D_{n,5} = 0$ [a) 7; b) 9]

Permutazioni semplici e ripetute

Abbiamo già osservato che alcuni può anche significare tutti, come facciamo per esempio quando vogliamo costruire gli anagrammi di una certa parola.

Esempio 6

Quanti sono gli anagrammi, anche privi di senso, della parola ROSA? Il problema equivale a scegliere tutte le 4 lettere e a ordinarle in modo diverso per ottenere parole diverse. Otterremo $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ diverse parole, come mostrato in figura.



Definizione 3

Dato un insieme A di n elementi e un numero naturale k, chiamiamo **permutazioni di *n* oggetti**, il numero di gruppi che possono formarsi con tutti gli elementi di A, in modo che ogni gruppo differisca dagli altri solo per l'ordine in cui si presentano gli elementi.

Notazione 2

- Le permutazioni semplici si indicano con P_n;
- Le permutazioni con ripetizione si indicano con $P_{a,b, \ldots, k}$.

Al prodotto di tutti i numeri interi consecutivi da 1 fino a n, si associa un nome e un simbolo.

Definizione 4

Il prodotto dei primi n numeri interi consecutivi si chiama **fattoriale di *n***.

Notazione 3

Il fattoriale di n si indica con $n!$.

A questo punto è ovvio il seguente risultato.

Teorema 3

Il numero di permutazioni semplici di n oggetti è $n!$.

Cosa accade se imponiamo che qualcuna delle scelte possa ripetersi?

Esempio 7

Quanti sono gli anagrammi della parola CORO? Sono 24 come quelli della parola ROSA? No, perché mentre per ROSA scambiando fra loro la seconda e la quarta lettera avremo la parola diversa RASO, facendo lo stesso con CORO, otterremo ancora CORO. Quindi la domanda che dobbiamo porci è: quanti dei 24 anagrammi di CORO sono uguali fra loro? Ovviamente sono tanti quanti i modi di scambiare le lettere uguali, cioè 2. Quindi avremo solo 24/2 = 12 diversi anagrammi di CORO.

Generalizzando il precedente esempio otteniamo il seguente risultato.

Teorema 4

Il numero di permutazioni di n oggetti, ognuno ripetuto k_i volte, con $1 \le i \le h$ è $\dfrac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_h)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_h!}$

Dimostrazione

Basta tenere conto del fatto che fra le $n! = (k_1 + k_2 + \ldots + k_h)!$ permutazioni possibili ve ne sono $k_1!$ che rappresentano lo stesso simbolo, quando scambiamo fra loro i k_1 simboli uguali fra loro, poi ve ne sono altri k_2! che rappresentano ancora la stessa sequenza e così via, fino a k_h!. Quindi dobbiamo dividere il tutto per il prodotto di tutte le sequenze di simboli uguali.

Per comprendere meglio la dimostrazione precedente consideriamo un altro esempio.

Esempio 8

Quanti sono gli anagrammi della parola MAMMA? I 5! = 120 anagrammi che possiamo ottenere scambiando fra loro tutte le 5 lettere, sono in realtà formate da 3! = 6 che rappresentano le stesse parole perché sono ottenute scambiando fra loro le lettere M, per esempio vi sono 6 diverse MAMMA. Per capirci meglio indichiamo le tre lettere con 3 simboli diversi M, m e *m*. Allora le parole MAm*m*A, MA*m*mA, mAM*m*A, mA*m*MA, *m*AMmA e *m*AmMA, sono 6 diverse permutazioni che però rappresentano la stessa parola. Quindi i 120 anagrammi di partenza adesso sono diventati solo 120/6 = 20. Allo stesso modo possiamo scambiare fra loro le A, ottenendo altre coppie di parole che sono uguali. Per esempio indicando con A e a, le permutazioni MAMMa e MaMMA sono in effetti la stessa parola. Quindi in totale abbiamo 20/2 = 10 diversi anagrammi, che sono i seguenti: AAMMM, AMAMM, AMMAM, AMMMA, MAAMM, MAMAM, MAMMA, MMAAM, MMAMA, MMMAA.

Verifiche

Lavoriamo insieme

- *Quanti sono gli anagrammi della parola COMBINATORICA, anche prive di senso*?
  Abbiamo 13 lettere non tutte distinte, quindi il problema riguarda le permutazioni con ripetizione di 13 elementi, in cui 4 lettere (A, C, I, O) si ripetono due volte. Sono perciò $\frac{13!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!} = 389\ 188\ 800$.
- *Quanti degli anagrammi precedenti iniziano con la lettera* C?
  Ciò equivale a contare gli anagrammi della parola OMBINATORICA, che sono $\frac{12!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} = 59\ 875\ 200$.
- *Quanti iniziano per M*?
  Stavolta dobbiamo contare gli anagrammi di COBINATORICA, che sono $\frac{12!}{2!\cdot 2!\cdot 2!2!} = 29\ \ 937\ 200$

Quando si parla di anagrammi questi possono essere anche privi di senso nella lingua italiana

Livello **1**

1. Quanti sono gli anagrammi della parola AMORE? Quanti di essi iniziano per A? Quanti iniziano per A e finiscono per E? [120; 24; 6]
2. Quanti sono gli anagrammi di MATEMATICA? Quanti iniziano per M? Quanti iniziano e finiscono per M? Quanti iniziano per M e non finiscono per M? [151200; 30240; 3360; 26880]
3. Marzia ha saputo che il suo professore assegna sempre dei test con 12 domande con 4 risposte possibili, indicate con A, B, C, D in modo che le risposte esatte siano suddivise esattamente fra le 4 opzioni. Quante sono le possibili sequenze di 12 risposte che soddisfano questi requisiti? [369600]
4. Con riferimento al quesito precedente, quante diventano le sequenze se sappiamo che la prima risposta è uguale all'ultima? E se invece prima e ultima sono diverse? [806400; 19152000]
5. Quanti numeri di 5 cifre dispari tutte diverse possiamo costruire? [120]
6. Quanti numeri di 5 cifre pari tutte diverse (0 lo consideriamo pari) possiamo costruire? [96]
7. In quanti modi 6 persone possono sedersi in fila su sei posti? E se si siedono attorno a un tavolo, la risposta cambia? Si tenga conto che quello che conta non è la sedia in cui si è seduti, ma la successione delle persone sedute. [720; Sì: 120]
8. 7 interruttori attivano macchine diverse, in quanti modi possono esservene 3 accese e 4 spente? [35]
9. Il codice ASCII viene utilizzato per codificare lettere, numeri e simboli, usando il codice binario che prevede solo i simboli 0 e 1. Ogni elemento del codice è una sequenza di 8 cifre scelte fra 0 e 1. Quanti diversi simboli possiamo codificare? [256]
10. Se avessimo bisogno di codificare 1000 simboli da quante cifre 0 o 1, minimo, dovrebbe essere formato ogni simbolo? [10]
11. 7 sedie sono poste in riga per essere occupate da 2 professori e 5 studenti. In quanti modi possono sistemarsi le 7 persone in modo che gli insegnanti siano seduti agli estremi? [240]
12. Anna, Bice, Carla, Dario, Elio e Franco vanno in vacanza ed affittano 3 stanze doppie. In quanti modi possiamo sistemarli nelle stanze in modo che Anna stia con Dario e Carla non stia con Elio? [12]

Livello **2**

13. 9 sedie sono poste in riga per essere occupate da 3 professori e 6 studenti. In quanti modi possono sedersi i 9 in modo che gli studenti siano seduti tutti uno accanto all'altro? [8640]
14. In quanti modi 3 maschi e 4 femmine possono sedersi in una fila da 7 in modo che agli estremi della file siano sedute persone dello stesso sesso? Quante di sesso diverso? [2160; 2880]
15. Con le cifre 1, 2, 3, 4 e 5, possiamo formare 120 diversi numeri di 5 cifre distinte. Se ordiniamo questi numeri dal più piccolo al più grande, quale sarà il 75°? [41325]
16. Quanti numeri di 4 cifre hanno la somma delle cifre pari a 5? [35]
17. La famosa partita Italia Germania dei mondiali 1970 finì 4 a 3 per l'Italia. Se non sappiamo la sequenza corretta dei gol, quante sono le diverse possibilità? [35]
18. Con riferimento al quesito precedente se conosciamo solo il risultato, ma non sappiamo chi ha fatto 4 reti e chi 3, quante sono le sequenze? [70]

19. Consideriamo la parola MITO, quanti dei suoi anagrammi non contengono nessuna delle lettere scritta nello stesso posto di MITO (cioè IMOT va bene, IMTO no)? [9]
20. Tre coppie di coniugi vanno a teatro e prenotano un'intera fila di sei posti. In quanti diversi modi possono sedersi se ciascun marito è seduto accanto alla rispettiva moglie? [12]
21. Con riferimento al precedente quesito, le 6 persone si siedono come vogliono, in modo però che due di essi, Amedeo e Marta, non stiano seduti accanto. Quanti sono i modi possibili? [480]
22. Sempre con riferimento al precedente quesito, stavolta Amedeo sta seduto alla destra di Marta, non importa se accanto o no ad ella. Quanti sono i modi? [360]
23. Un codice segreto è formato da 12 simboli, a 3 a 3 uguali rispettivamente a ♣♦♥♠. Quanti codici presentano primo e ultimo simbolo uguali? Quanti li hanno diversi? [67200; 302400]

Livello 3

24. Con riferimento al precedente quesito, quanti di essi sono scritti in modo che i 4 simboli occupino i primi 4, i secondi 4 e gli ultimi 4 posti? E quanti dei precedenti non hanno simboli consecutivi uguali? [13824; 7776]
25. 8 sedie sono poste in riga per essere occupate da 3 italiani e 5 francesi. In quanti modi possono sistemarsi le 8 persone in modo che almeno uno degli italiani sia seduto agli estremi? [25920]
26. Un codice segreto è formato da 8 simboli diversi scelti fra lettere dell'alfabeto italiano e cifre. Quanti possiamo formarne imponendo che vi siano massimo 4 vocali e minimo 4 cifre? [66071376000]
27. Con riferimento al precedente quesito cambia qualcosa se invece che vocali scegliamo lettere qualsiasi? Giustificare la risposta. [No]
28. Scriviamo tutti gli anagrammi della parola Matematica nell'ordine dei vocabolari. Quale parola occupa il 2014° posto? Quale posto occupa la parola Cemaatimat? [Aacmmiteta; 51285°]
29. Un quesito di Henry Dudeney. Consideriamo il seguente triangolo di lettere, in quanti modi diversi possiamo leggere la parola ABRACADABRA? [1024]

A
B B
R R R
A A A A
C C C C C
A A A A A A
D D D D D D D
A A A A A A A A
B B B B B B B B B
R R R R R R R R R R
A A A A A A A A A A A

Lavoriamo insieme

Con quanti zeri finisce 3479!?
Essendo 3479! un prodotto di 3479 numeri interi, gli zeri finali dipendono da quanti fattori 10 esso contiene. Cioè da quanti 2 e da quanti 5 contiene, e poiché i 5 sono meno dei 2, basta contare quanti 5 contiene. Il più grande multiplo di 5 contenuto in 3479 è $695 \cdot 5 = 3475$. Quindi abbiamo 695 fattori 5. Qualcuno di questi però contiene più fattori 5, per esempio i multipli di 25, che sono 139 (dato che $25 \cdot 139 = 3475$); poi i multipli di 125 che sono 27 (poiché $125 \cdot 27 = 3375$); quindi i multipli di 625, che sono 5 (dato che $5 \cdot 625 = 3125$); infine 1 multiplo di 3125. Quindi in totale l'esponente del fattore 5 è $695 + 139 + 27 + 5 + 1 = 867$, che sono proprio il numero degli zeri finali di 3479!.

Livello 2

Determinare con quanti zeri finiscono i seguenti fattoriali

30. a) 15!; b) 20!; c) 25!; d) 125!; e) 1235!; f) 2013! [a) 3; b) 4; c) 6; d) 31; e) 306; f) 501]
31. Per quanti valori di n, n! finisce con 5 zeri? E con 6 zeri? [Nessuno; 5]
32. Determinare la cifra delle unità del numero $1! + 2! + 3! + \ldots + 2017!$ [3]
33. Determinare la cifra delle unità del numero $1! - 2! + 3! - 4! + \ldots - 10!$ [9]

Lavoriamo insieme

Semplificare la seguente somma: $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{999}{1000!}$.

Scriviamo nel seguente modo: $\frac{2-1}{2!}+\frac{3-1}{3!}+\frac{4-1}{4!}+\ldots+\frac{1000-1}{1000!}=\frac{2}{2!}-\frac{1}{2!}+\frac{3}{3!}-\frac{1}{3!}+\frac{4}{4!}-\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1000}{1000!}-\frac{1}{1000!}=$

$=\frac{1}{1!}-\cancel{\frac{1}{2!}}+\cancel{\frac{1}{2!}}-\cancel{\frac{1}{3!}}+\cancel{\frac{1}{3!}}-\cancel{\frac{1}{4!}}+\ldots+\cancel{\frac{1}{999!}}-\frac{1}{1000!}=1-\frac{1}{1000!}$

Livello 3

34. 2001 divide 2002! poiché 2002! = 2000! × 2001 × 2002. Qual è il più grande numero intero k, tale che 2001^k divide 2002!? [71]
35. n! finisce con 100 zeri, qual è il minimo valore che può assumere n? [405]
36. Qual è la cifra delle decine del numero 1! + 2! + 3! +…+ 2017! [1]
37. Con quanti zeri finisce 5^n? $\left[\frac{5^n-1}{4}\right]$
38. Provare che la cifra delle unità del numero 1! + 2! + 3! +…+ n! è 3 per ogni $n > 4$.
39. Provare che la cifra delle unità del numero 1! – 2! + 3! – 4! + … + $(-1)^n \cdot n!$ è 9 per $n > 4$.
40. Semplificare la seguente somma: $\frac{2}{2!}+\frac{4}{3!}+\frac{6}{4!}+\ldots+\frac{998}{500!}$. $\left[2-\frac{2}{500!}\right]$
41. Semplificare il seguente prodotto: $\frac{1}{2!}\cdot\frac{2}{3!}\cdot\frac{3}{4!}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100!}$. $\left[\frac{1}{2!\cdot 3!\cdot 4!\cdot\ldots\cdot 98!\cdot 100!}\right]$

Combinazioni semplici e ripetute

A questo punto rimane da considerare un ultimo tipo di raggruppamento, quello in cui l'ordine non importa, come nel caso delle estrazioni del lotto, in cui importa solo determinare i numeri estratti, non l'ordine in cui lo sono.

Definizione 5

Dato un insieme A di n elementi e un numero naturale k, chiamiamo **combinazioni di *n* oggetti di classe *k***, il numero di gruppi di k elementi che possono formarsi con gli elementi di A, in modo che ogni gruppo differisca dagli altri solo per uno o più elementi.

Notazione 4

- Le combinazioni semplici si indicano con $C_{n,k}$, o più comunemente con $\binom{n}{k}$.
- Le combinazioni con ripetizione si indicano con il simbolo $C'_{n,k}$

Vediamo un esempio.

Esempio 9

Quante sono le diverse estrazioni in una certa ruota al gioco del lotto? Si tratta di scegliere 5 numeri fra 90. Saremmo perciò tentati di dire che sono $D_{90,5} = 90 \cdot 89 \cdot 87 \cdot 88 \cdot 86$. Solo che in questo caso l'ordine non è importante, la cinquina (1, 2, 3, 4, 5) e la cinquina (1, 3, 2, 5, 4) sono considerate uguali ai fini del gioco. Ciò significa che ogni cinquina si può ripetere in 5! modi formalmente diversi ma effettivamente uguali. Quindi il numero cercato è $\binom{90}{5} = \frac{D_{90,5}}{5!} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 43\ 949\ 268$.

Generalizzando la procedura dell'esempio si dimostra il seguente risultato.

Teorema 5

Il numero di combinazioni semplici di n oggetti è

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{D_{n.k}}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Dimostrazione per esercizio

L'ultimo termine dell'uguaglianza è facilmente giustificabile.

Esempio 10

Il numeratore di $\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$ è diverso da 90! per la mancanza del prodotto dei primi 85 numeri interi consecutivi, cioè di 85!. Se moltiplichiamo numeratore e denominatore per 85! l'espressione diventa: $\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 85!} = \frac{90!}{5! \cdot 85!}$.

La precedente forma di scrivere l'espressione delle combinazioni semplici porta a enunciare il seguente risultato.

Teorema 6

Si ha: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Dimostrazione Per il teorema 5 abbiamo $\binom{n}{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot [n-(n-k)]!} = \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$.

In effetti potevamo anche dire più semplicemente che scegliere *k* elementi fra *n* è lo stesso che scegliere i rimanenti $n - k$.

Che significato possiamo dare al simbolo $\binom{n}{0}$? Che significa *non* scegliere elementi? In quanti modi possiamo *non* scegliere elementi? Tenuto conto del teorema precedente $\binom{n}{0} = \binom{n}{n}$ e in questo caso scegliere tutti gli elementi si può fare e ovviamente in un modo solo.

Definizione 6

Si ha $\binom{n}{0} = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Le combinazioni semplici si ritrovano nello sviluppo della potenza di un binomio.

Esempio 11

Sviluppiamo $(a + b)^4$ senza utilizzare la regola legata al cosiddetto triangolo di Tartaglia, che permette di determinare i coefficienti dello sviluppo. Scriviamo quindi $(a + b)^4 = (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b)$. Eseguendo la moltiplicazione senza usare le potenze troveremo dei monomi che si distinguono fra loro solo dal numero di volte in cui compare ciascuna delle lettere *a* e *b*. Andiamo infatti dai monomi che contengono 4 *a* e nessun *b*, a quelli che contengono 3 *a* e 1 *b* e così via fino a 0 *a* e 4*b*. Quindi per contare quanti di questi monomi ci sono per ogni tipo, in modo da raggrupparli (cioè *aaab* e *abaa*, per esempio), dobbiamo usare proprio le combinazioni semplici. Infatti per esempio contare quanti monomi sono simili ad *aaab*, equivale a stabilire in quanti modi possiamo distribuire la lettera *b* su 4 posti, in modo che l'ordine non conti, e questi sono proprio $\binom{4}{1}$ e così via. Quindi:

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0} \cdot a^4 + \binom{4}{1} \cdot a^3 b + \binom{4}{2} \cdot a^2 b^2 + \binom{4}{3} \cdot ab^3 + \binom{4}{4} \cdot b^4.$$

Ragionando come nell'esempio precedente possiamo dimostrare il seguente risultato.

Teorema 7 (del binomio di Newton)

Si ha: $$(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot ab^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} b^k .$$

Definizione 7

Le combinazioni di *n* oggetti di classe *k* vengono anche chiamate **coefficienti binomiali**.

Quindi possiamo riscrivere anche il triangolo di Tartaglia in funzione dei coefficienti binomiali, abbiamo però bisogno di dare un significato anche al simbolo $\binom{0}{0}$, che per estensione della definizione 6, viene anch'esso posto uguale a 1.

$$\begin{array}{llllll} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{array} = \begin{array}{llllll} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\ \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\ \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \end{array}$$

In questo triangolo abbiamo ovviamente la simmetria stabilita dal Teorema 6, ma anche la regola che permette di determinare ogni termine di una riga, diverso da quelli estremi, mediante la somma di due termini della riga precedente.

Esempio 12

Considerando il triangolo di Tartaglia abbiamo, per esempio, $\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}$.

Il risultato precedente si può generalizzare.

Teorema 8 (Formula di Stifel)

Si ha: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Dimostrazione

Per il teorema 6: $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot [n-1-(k-1)]!} + \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-1-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-1-k)!} =$

$= \frac{(n-1)! \cdot k + (n-1)! \cdot (n-k)}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{(n-1)! \cdot (k+n-k)}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{(n-1)! \cdot n}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$, che è la tesi.

Per capire come abbiamo effettuato il minimo comune denominatore, nella dimostrazione precedente consideriamo un caso particolare.

Esempio 13

Si ha: $\frac{9!}{6! \cdot 3!} + \frac{9!}{7! \cdot 2!} = \frac{9!}{6! \cdot 2!} + \frac{9!}{6! \cdot 7 \cdot 2!}$, dato che 7! = 7 · 6! e 3! = 3 · 2!, il minimo comune denominatore sarà 7! · 3!, quindi: $\frac{9!}{6! \cdot 3!} + \frac{9!}{7! \cdot 2!} = \frac{9! \cdot 7 + 9! \cdot 3}{7! \cdot 3!} = \frac{9! \cdot 10}{7! \cdot 3!} = \frac{10!}{7! \cdot 3!}$.

Mediante le combinazioni possiamo risolvere un interessante problema aritmetico.

Esempio 14

Quanti divisori ha 12? Scomponiamo il 12 ottenendo $2^2 \cdot 3$. Ora ci chiediamo: cosa è un divisore di 12? Un numero che contiene solo fattori presenti in 12, cioè un numero del tipo $2^a \cdot 3^b$, in cui a può essere un qualunque numero intero compreso tra 0 e 2, e b un qualunque intero compreso tra 0 e 1. Quindi per scrivere un divisore di 12 dobbiamo scegliere opportunamente a e b, poiché ci sono 3 scelte per a e 2 per b, in totale i divisori sono $\binom{2}{1}\times\binom{3}{2}=2\times 3=6$. Infatti essi sono: 1 (se $a = b = 0$), 2 (se $a = 1$, $b = 0$), 4 (se $a = 2$, $b = 0$), 3 (se $a = 0$, $b = 1$), 6 (se $a = b = 1$), 12 (se $a = 2$, $b = 1$).

Quanto visto nel precedente esempio può generalizzarsi nel seguente risultato.

Teorema 9

Il numero $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_h^{\alpha_h}$, in cui i p_i sono numeri primi, ha $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \ldots (\alpha_h + 1)$ divisori.

Dimostrazione

Ogni divisore di N è del tipo $p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_h^{\beta_h}$, in cui gli esponenti possono assumere tutti i valori interi da 0 a α_h e quindi ci sono $\alpha_1 + 1$ scelte per p_1, $\alpha_2 + 1$ scelte per p_2, …, $\alpha_h + 1$ scelte per p_h. Cioè quello che volevamo provare.

Concludiamo con un importante risultato, che presentiamo con un esempio.

Esempio 15

Consideriamo il numero 1234, le cui cifre sappiamo possono permutarsi in 24 modi. Alcune di queste hanno le cifre che non occupano alcuna delle posizioni relative a esse, come 2143, mentre altri invece hanno almeno una cifra corrispondente alla propria posizione, come 1342, in cui 1 sta nella posizione 1. Per semplicità una cifra che occupa la posizione relativa al proprio valore la chiamiamo **punto fisso**. Se volessimo sapere quante delle 24 permutazioni hanno almeno un punto fisso, come dobbiamo fare? Ovviamente le 24 permutazioni sono suddivise in 4 permutazioni da 6 elementi, in cui ogni cifra è un punto fisso (4 iniziano per 1, 4 hanno il 2 nella posizione 2 e così via). Ma altrettanto ovviamente alcune di queste hanno più di un punto fisso e perciò dobbiamo contarle una sola volta. Per esempio 1234 fa parte di tutti e quattro gli insiemi, dato che ha tutti i punti fissi.

Per risolvere il quesito posto nel precedente esempio, enunciamo il seguente risultato.

Teorema 10 (Principio di inclusione-esclusione)

Dati n insiemi finiti, la loro unione ha un numero di elementi dato dalla seguente regola: sommiamo gli elementi degli insiemi, togliamo gli elementi di tutte le intersezioni a due a due, aggiungiamo gli elementi di tutte le intersezioni a tre a tre e così via alternando addizioni e sottrazioni.

Dimostrazione

Consideriamo solo il caso di tre insiemi, che può facilmente generalizzarsi. Intanto la regola possiamo scriverla in questo modo: $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$. Prendere gli elementi dell’unione significa ovviamente prenderli una sola volta, ecco perché dobbiamo togliere poi gli elementi comuni a ogni coppia di insiemi. Solo che in questo modo abbiamo eliminato del tutto gli elementi comuni a tutti gli insiemi, che perciò dobbiamo aggiungere.

Risolviamolo il problema posto nell’esempio 15 usando il principio di inclusione – esclusione.

Esempio 16

Gli insiemi da considerare sono A = {1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432} con 1 punto fisso; B = {1234, 1243, 3214, 3241, 4213, 4231}, con 2 fisso; C = {1234, 1432, 2134, 2431, 4132, 4231} con 3 fisso; infine D = {1234, 1324, 2134, 2314, 3124, 3214} con 4 fisso. Osserviamo che vi sono elementi che si ripetono, in particolare $A \cap B$ = {1234, 1243}, $A \cap C$ = {1234, 1234}, $A \cap D$ = {1234, 1324}, $B \cap C$ = {1234, 4231}, $B \cap D$ = {1234, 3214}, $C \cap D$ = {1234, 2134}. Quindi dai 24 elementi dei singoli insiemi dobbiamo togliere quelli già contati. In questo modo però 1234 che avevamo contato 4 volte nella prima somma, adesso lo abbiamo eliminato 6 volte, quindi dobbiamo “recuperare” questi elementi, e perciò aggiungere gli elementi degli insiemi $A \cap B \cap C = A \cap B \cap D = A \cap C \cap D = B \cap C \cap D$ = {1234}, così però abbiamo contato 1234 una volta in più, dobbiamo quindi toglierlo, cioè dobbiamo eliminare gli elementi di $A \cap B \cap C \cap D = \{1234\}$. Infine le permutazioni cercate sono in numero di 6 + 6 + 6 + 6 – 2 – 2 – 2 – 2 – 2 – 2 + 1 + 1 + 1 + 1 – 1 = 15. Esse sono: 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 3214, 3241, 4213, 4231, 2134, 2431, 4132, 2314, 3124.

Concludiamo considerando le combinazioni ripetute.

Esempio 17

Da un insieme di 5 oggetti possiamo prenderne 3, indipendentemente dall'ordine, in $\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot \cancel{4}^{2} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 10$ diversi modi. Cosa accade se invece accettiamo che possiamo ripetere alcuni dei simboli, per esempio ognuno per un massimo di 2 volte? È come se in un sacchetto mettessimo i 5 oggetti e facessimo 2 estrazioni, in modo però che la prima volta ci limiteremmo a registrare l'oggetto estratto che perciò viene reimmesso nel sacchetto. In questo modo possiamo fare un totale di 5 × 5 = 25 estrazioni. Però siccome l'ordine non conta, dobbiamo eliminare le coppie di elementi uguali in ordine diverso, quante sono? Intanto le coppie di elementi uguali le possiamo ottenere in un solo modo e sono ovviamente 5, quindi le coppie di oggetti diversi sono 25 – 5 = 20, che valgono però per metà dato che a due a due contengono gli stessi elementi in diverso ordine. Quindi le combinazioni con ripetizione di 5 oggetti ognuno dei quali si può ripetere massimo 2 volte sono 10 + 5 = 15. Questo numero si può anche scrivere come $\binom{5+2-1}{2} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$.

Ragionando come nell'esempio precedente possiamo dimostrare il seguente risultato.

Teorema 11

Le combinazioni di n oggetti, ognuno dei quali ripetuto fino a massimo di k volte sono $C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$.

Esempio 18

In quanti modi possiamo scrivere il numero 15 come somma di tre numeri interi non negativi? Potremmo scrivere 1 + 12 + 2 = 1 + 8 + 7 = 0 + 0 + 15, ed altri modi ancora. Ovviamente in questo caso l'ordine non è importante, dato che per esempio 1 + 12 + 2 = 1 + 12 + 2 sono la stessa sequenza. Abbiamo quindi a che fare con combinazioni, che sono ripetute. Perciò 15 = $a + b + c$, e ognuno dei simboli può assumere un valore da 0 a 15. Quindi il numero richiesto è $C'_{15,3} = \binom{15+3-1}{3} = \binom{17}{3} = \frac{17 \cdot 16 \cdot 15}{6} = 17 \cdot 8 \cdot 5 = 680$.

Vogliamo trovare adesso un risultato che riguarda gli sviluppi delle potenze di polinomi.

Esempio 19

Vogliamo sviluppare il cubo del quadrinomio $(a + b + c + d)^3$, che equivale al prodotto dei tre quadrinomi $(a + b + c + d) \cdot (a + b + c + d) \cdot (a + b + c + d)$, che ovviamente è formato da 64 monomi, alcuni dei quali simili fra loro. Da un punto di vista combinatorico il problema equivale a scrivere tutte le terne, anche ripetute in cui i tre simboli vengono scelti tra quattro e a causa della validità della proprietà commutativa (*abb* e *bba* sono lo stessi monomio), i monomi sviluppo del cubo del quadrinomio sono dati dal numero delle combinazioni con ripetizione di 4 elementi a tre a tre, e quindi sono $\binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$.

Rimane però il problema di determinare i coefficienti degli sviluppi. In questo caso dobbiamo contare quanti monomi sono simili fra loro. Ma ciò riguarda le permutazioni con ripetizione, dato che dobbiamo contare tutti gli anagrammi delle "parole" di tre lettere, scelte tra quattro, ciascuna delle quali può ripetersi da 0 a 3 volte. Così per esempio il monomio *abb* si ripeterà $\frac{3!}{1! \cdot 2!} = \frac{6}{2} = 3$ volte. E così via per tutti gli altri.

In vista dell'esempio precedente poniamo una notazione ed enunciamo un risultato.

Notazione 5

Le permutazioni con ripetizione si indicano con $\begin{pmatrix} n_1+n_2+...+n_k \\ n_1 n_2 ... n_k \end{pmatrix} = \dfrac{(n_1+n_2+...+n_k)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}$ e si chiamano anche **coefficienti multinomiali**.

Teorema 12 (del polinomio di Leibniz)

Si ha: $(a_1+a_2+...+a_k)^n = \sum_{m_1+m_2+...+m_k=n} \begin{pmatrix} m_1+m_2+...+m_k \\ m_1 m_2 ... m_k \end{pmatrix} \cdot a_1^{m_1} \cdot a_2^{m2} \cdot ... \cdot a_k^{m_k}$, dove la somma è fatta in modo che gli addendi siano tutte le possibilità di ottenere n.

Dimostrazione Omessa

Esempio 20

Sviluppiamo $(a + b + c + d)^3$ con la regola del teorema precedente

$$(a+b+c+d)^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3000 \end{pmatrix} \cdot a^3 + \begin{pmatrix} 3 \\ 0300 \end{pmatrix} \cdot b^3 + \begin{pmatrix} 3 \\ 0030 \end{pmatrix} \cdot c^3 + \begin{pmatrix} 3 \\ 0003 \end{pmatrix} \cdot d^3 +$$

$$+\begin{pmatrix} 3 \\ 2100 \end{pmatrix} \cdot a^2 b + \begin{pmatrix} 3 \\ 2010 \end{pmatrix} \cdot a^2 c + \begin{pmatrix} 3 \\ 2001 \end{pmatrix} \cdot a^2 d + \begin{pmatrix} 3 \\ 0210 \end{pmatrix} \cdot b^2 c + \begin{pmatrix} 3 \\ 0201 \end{pmatrix} \cdot b^2 d + \begin{pmatrix} 3 \\ 0021 \end{pmatrix} \cdot c^2 d +$$

$$+\begin{pmatrix} 3 \\ 1200 \end{pmatrix} \cdot ab^2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1020 \end{pmatrix} \cdot ac^2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1002 \end{pmatrix} \cdot ad^2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 0120 \end{pmatrix} \cdot bc^2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 0102 \end{pmatrix} \cdot bd^2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 0012 \end{pmatrix} \cdot cd^2 +$$

$$+\begin{pmatrix} 3 \\ 1110 \end{pmatrix} \cdot abc + \begin{pmatrix} 3 \\ 1101 \end{pmatrix} \cdot abd + \begin{pmatrix} 3 \\ 1011 \end{pmatrix} \cdot acd + \begin{pmatrix} 3 \\ 0111 \end{pmatrix} \cdot bcd =$$

$$a^3+b^3+c^3+d^3+3a^2b+3a^2c+3a^2d+3b^2c+3b^2d+3c^2d+3ab^2+3ac^2+3ad^2+3bc^2+3bd^2+$$

$$+3cd^2+6abc+6abd+6acd+6bcd$$

I protagonisti

Michael Stifel nacque nel 1487 a Esslingen, in Germania. Nel 1511 fu ordinato monaco nel monastero Agostiniano di Esslingen. Nel 1522 fu espulso perché non condivideva il fatto che anche i poveri dovessero dare le elemosine, così divenne pastore luterano nella cittadina di Lochau, ma anche qui dovette dimettersi a causa di una sua falsa previsione sulla fine del mondo.

Dopo varie traversie, nel 1559 ottenne un posto di lettore di aritmetica e geometria presso l'Università di Jena. Qui inventò i logaritmi indipendentemente da Napier con un metodo del tutto diverso. La sua più famosa opera è *Arithmetica integra*, pubblicata nel 1544. In quest'opera usa fra i primi i coefficienti binomiali e i simboli +, -, √. Mediante una complicata risistemazione delle lettere LEO DECIMVS provò che il papa Leone X era il numero 666, cioè il numero della bestia. Morì a Jena il 19 Aprile 1567.

L'angolo storico

I problemi combinatorici hanno interessato i matematici sin dagli albori, ma il primo testo in cui ciò è stato fatto con un criterio ordinato è stato *Dissertatio de arte combinatoria* scritto da Gottfried Leibniz nel 1666. Nello stesso periodo Pascal studiò le proprietà del triangolo che in Italia va sotto il nome di Tartaglia, nel seguito molti altri matematici si occuparono di questi problemi, come Abraham de Moivre (1667 – 1754), che enunciò il principio di inclusione-esclusione. In seguito la scienza si sviluppò soprattutto con le sue importanti applicazioni ad altri settori matematici e no (teoria dei grafi, teoria dei codici, criptazione, …). Attualmente è indispensabile nei problemi di sicurezza.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Durante una festa furono scambiate un totale di 36 strette di mano. Se ognuno dei partecipanti ha stretto la mano a tutti gli altri una volta sola, quanti erano i partecipanti?

Il problema equivale a considerare tutte le coppie non ordinate che si possono estrarre da un insieme di n elementi (le persone). Abbiamo cioè a che fare con le combinazioni semplici di n elementi di classe 2. Dobbiamo quindi risolvere l'equazione $\binom{n}{2}=36 \Rightarrow \frac{n\cdot(n-1)}{2}=36 \Rightarrow n\cdot(n-1)=72$. Piuttosto che risolvere l'equazione è facile osservare che due numeri naturali consecutivi il cui prodotto è 72 sono 8 e 9. Pertanto le persone erano 9. Infatti, ciascuno ha stretto 8 mani, per un totale di 72 strette che ovviamente devono essere dimezzate perché la stretta di mano fra A e B è la stessa che quella fra B e A.

Livello 1

1. Durante un party furono scambiate un totale di 105 strette di mano. Se ognuno dei partecipanti ha stretto la mano a tutti gli altri una volta sola, quanti erano i partecipanti? [15]
2. Quante terne diverse si possono giocare al lotto? [117480]
3. Quante rette passano per 5 punti di un piano a tre a tre non allineati? [10]
4. Quante rette distinte passano per dodici punti posti nel piano in modo che non ve siano tre allineati? [66]
5. In quanti diversi modi possiamo dare le prime 3 carte a uno dei giocatori nel gioco della briscola, usando quindi 40 carte? [9880]
6. In quanti diversi modi possiamo dare le prime 5 carte a uno dei giocatori nel gioco del poker, usando 32 carte? [201376]
7. In quanti diversi modi possiamo dare le prime 13 carte a uno dei giocatori nel gioco del ramino, usando 52 carte? [635013559600]
8. Sei persone hanno un palco a teatro con solo quattro sedie: in quanti modi diversi possono sistemarsi le persone, 4 sedute e due in piedi? Ovviamente non è importante in quale sedia si siede ciascuna delle persone, ma solo se è seduta o rimane in piedi. [15]
9. Con riferimento al precedente quesito, sempre con 4 sole sedie, se i possibili modi sono 70, quante sono le persone? [8]
10. Con riferimento al precedente quesito, quante sedie dovremmo avere a disposizione, se vogliamo che i possibili modi per sistemare un totale di 10 persone siano 210? [6]
11. In un'urna sono contenute 10 palle bianche, 12 rosse e 15 verdi. Le palle sono tutte indistinguibili fra di loro. In quanti diversi modi possiamo estrarre 6 palline, a due a due di ciascuno dei tre colori, nel caso in cui le palline estratte non siano reinserite nell'urna? [311850]
12. Avendo a disposizione 5 tipi di salumi, 4 di formaggi, 6 di verdure determinare quanti diversi tramezzini possono crearsi contenenti ciascuno 1 salume, 2 formaggi e 3 verdure. [600]
13. Per laurearsi in una certa disciplina si devono fare 20 esami, 10 obbligatori, 2 a scelta fra 5 materie di tipo matematico, 3 a scelta fra 6 di tipo giuridico, 4 a scelta fra 8 di tipo economico e 1 lingua scelta fra 5. Determinare quanti sono i diversi piani di studio. [70000]
14. In quante estrazioni di due numeri della tombola, la somma degli estratti è 60? [29]
15. Da un mazzo di 40 carte ne scegliamo 4, quante scelte sono formate solo da figure? [495]
16. Lanciamo una moneta regolare per 10 volte di seguito in quanti diversi modi possiamo ottenere esattamente 3 volte testa? [120]
17. Giorgia ha un orologio, un bracciale, una collana e un anello che conserva in modo casuale in due scatoline di diverso colore. In quanti modi può farlo? [22]
18. Quanti numeri interi di quattro cifre *abcd* verificano le seguenti proprietà: *a* è pari; *b* è divisibile per 5; *c* è primo; *d* è dispari? (0 è divisibile di ogni numero intero) [160]

Lavoriamo insieme

Quante sono le possibili combinazioni di punteggi lanciando 3 dadi?
Lanciando 3 dadi possiamo avere un punteggio complessivo che va da un minimo di 3 (1 + 1 + 1), a un massimo di 18 (6 + 6 + 6). In pratica a ognuno dei 3 dadi, indistinguibili, dobbiamo assegnare un numero che può andare da 1 a 6. Ovviamente possiamo anche avere numeri che si ripetono, abbiamo perciò a che fare con le combinazioni di 6 oggetti, ognuno dei quali si può ripetere fino a 3 volte. Quindi sono $\binom{6+3-1}{3}=\binom{8}{3}=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3!}=56$ modi.

Livello 2

19. In quanti modi possiamo mettere 10 biglie in 3 scatole, in modo che ogni scatola possa contenere da 0 a 10 biglie? [66]
20. Quante sono le soluzioni intere non negative dell'equazione $x + y + z + t = 10$? [286]
21. Da un mazzo di carte napoletane da 40 scegliamo a caso 3 carte, quante sono le diverse scelte che non contengono neanche un asso? Solo un asso? Almeno un asso? [7140; 2520; 2740]
22. A una festa intervengono 10 mamme con i loro rispettivi primogeniti. Sapendo che ogni mamma stringe la mano a tutti gli intervenuti tranne il proprio figlio e non vi sono strette di mano tra i bambini, quante strette di mano vengono complessivamente scambiate? [135]
23. Dati n punti nel piano a tre a tre non allineati, quante rette passano per i dati punti? $\left[\binom{n}{3}\right]$
24. A è un insieme di 5 elementi ed ha $2^5 = 32$ sottoinsiemi. Quanti di questi sottoinsiemi hanno 3 elementi? [10]
25. Una pizzeria dichiara di fare più di 1000 pizze diverse, usando 10 ingredienti diversi. Ogni pizza è diversa dalle altre se contiene almeno un ingrediente diverso. Ogni pizza contiene almeno un ingrediente. La dichiarazione è corretta? Giustificare la risposta. [Sì, sono 1023]
26. Lanciamo una moneta regolare per 10 volte di seguito in quanti diversi modi possiamo ottenere almeno 3 volte testa? (Conviene considerare l'evento complementare: ottenere meno di 3 teste) [968]
27. $xy + x^2 + xz$ è un polinomio omogeneo di secondo grado in tre variabili. Quanti termini ha un polinomio omogeneo di secondo grado in 3 variabili completo? [6]
28. Da un mazzo di 40 carte ne scegliamo 4, quante scelte hanno lo stesso seme? Quante scelte i 4 semi? [840; 400]
29. Quanti monomi compongono lo sviluppo della quinta potenza di un quadrinomio? [56]
30. Un gioco è detto equo se la vincita è inversamente proporzionale al rischio che si corre. Così nella testa e croce, poiché si ha un evento vincente su due, il gioco è equo se si punta 1 e si incassa 2, cioè si vince 1. Nel gioco dei dadi su un singolo lancio, se si punta 1 si deve incassare 6, e così via. Nel lotto, puntando sull'ambo, ossia giocando due numeri, se si vince si incassa 250 volte la posta. Il gioco è equo? E se non lo è, quanto dovrebbe incassarsi? [No, 4005]
31. Con riferimento al precedente quesito, quante volte la posta dovrebbe incassarsi al lotto per un terno, se il gioco fosse equo? [11748]
32. Per laurearsi in una disciplina scientifica si devono fare 20 esami, 12 obbligatori, almeno 2 a scelta fra 4 materie di tipo matematico, esattamente 2 a scelta fra 5 di tipo fisico, le rimanenti a scelta fra 10 altre materie. Determinare quanti sono i diversi piani di studio. [17850]
33. Avendo a disposizione 6 tipi di salumi, 3 di formaggi, 4 di verdure determinare quanti diversi tramezzini possono crearsi contenenti ciascuno al massimo 2 salumi, esattamente 2 formaggi e al minimo 2 verdure. [726]
34. Quanti dei numeri naturali di 3 cifre hanno le cifre disposte in ordine crescente? E quante in ordine decrescente? [84; 120]

Lavoriamo insieme

Consideriamo lo sviluppo del binomio $(a + 2b)^6$, *quanto vale la somma di tutti i suoi coefficienti numerici*?
Sappiamo che lo sviluppo si ottiene con il binomio di Newton, in cui i coefficienti si ottengono moltiplicando i coefficienti binomiali per le relative potenze dei coefficienti dei monomi, in questo caso:

$2^0 \cdot \binom{6}{0} + 2^1 \cdot \binom{6}{1} + 2^2 \cdot \binom{6}{2} + 2^3 \cdot \binom{6}{3} + 2^4 \cdot \binom{6}{4} + 2^5 \cdot \binom{6}{5} + 2^6 \cdot \binom{6}{6}$ = 1 + 12 + 60 + 160 + 240 + 192 + 64 = 729.

In effetti bastava osservare che lo stesso risultato si sarebbe ottenuto per qualsiasi binomio i cui monomi avevano coefficienti 1 e 2 rispettivamente, in particolare il binomio in cui $a = b = 1$, cioè $(1 + 2)^6 = 3^6 = 729$.

Livello 2

35. Quanto vale la somma di tutti i coefficienti numerici di $(a + b)^6$? [64]
36. Quanto vale la somma di tutti i coefficienti numerici di $(x - 2y)^{18}$? [1]
37. Costruiamo il triangolo di Tartaglia-Pascal, fermandoci alla decima riga, quanti 1 abbiamo scritto? E quanti numeri diversi da 1? [19; 36]
38. Costruiamo il triangolo di Tartaglia-Pascal, fermandoci alla n -esima riga, quanti 1 abbiamo scritto? E quanti numeri diversi da 1? $\left[2n-1; \frac{n^2-3n+2}{2}\right]$

Livello 3

39. Sviluppare $(a + b + c)^4$.
40. Determinare il coefficiente di a^3b^2c nello sviluppo di $(a + b + c + d)^6$. [60]
41. Nel gioco del bridge si distribuiscono 13 carte a ciascuno dei 4 giocatori. Quanti sono i diversi modi in cui un mazzo di carte può essere distribuito fra i 4 giocatori? $\left[\binom{52}{13} \cdot \binom{39}{13} \cdot \binom{26}{13}\right]$
42. Nell'espressione $(a + b + c + x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^6$, tutti gli x_i rappresentano monomi diversi a coefficiente unitario. Il coefficiente di a^3b^2c dipende dagli x_i? Giustificare la risposta. [No]

Lavoriamo insieme

Calcolare $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$.

Piuttosto che effettuare tutte le somme, osserviamo che la detta somma, per il Teorema 7, altri non è che lo sviluppo di $(1+1)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{5-k}$ e perciò vale $2^5 = 32$.

Calcolare il valore delle seguenti somme

Livello 2

43. a) $\binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \ldots + \binom{7}{6} + \binom{7}{7}$; b) $\binom{12}{0} - \binom{12}{1} + \ldots - \binom{12}{11} + \binom{12}{12}$ [a) 128; b) 0]
44. a) $\binom{15}{3} + \binom{15}{4} + \ldots + \binom{15}{14} + \binom{15}{15}$; b) $\binom{11}{4} - \binom{11}{5} + \ldots + \binom{11}{10} - \binom{11}{11}$ [a) 32647; b) 120]
45. a) $\binom{11}{0} - \binom{10}{0} + \binom{11}{1} - \binom{10}{1} + \ldots + \binom{11}{10} - \binom{10}{10}$; b) $\binom{7}{0} + \binom{5}{0} + \binom{7}{1} + \binom{5}{1} + \ldots + \binom{7}{4} + \binom{5}{4}$ [a) 1023; b) 130]
46. a) $\binom{5}{0} + 2 \cdot \binom{5}{1} + 4 \cdot \binom{5}{2} + 8 \cdot \binom{5}{3} + 16 \cdot \binom{5}{4} + 32 \cdot \binom{5}{5}$; b) $\binom{4}{0} + 3 \cdot \binom{4}{1} + 9 \cdot \binom{4}{2} + 27 \cdot \binom{4}{3} + 81 \cdot \binom{4}{4}$
    Suggerimento: considerarli come sviluppo di un particolare binomio di Newton [a) 243; b) 256]

Livello 3

47. a) $\binom{6}{0}^2 + \binom{6}{1}^2 + \binom{6}{2}^2 + \binom{6}{3}^2 + \binom{6}{4}^2 + \binom{6}{5}^2 + \binom{6}{6}^2$; b) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$ [a) 924; b) 2^n]
48. a) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \binom{n}{n-1} + (-1)^n \cdot \binom{n}{n}$; b) $\binom{n}{0} + m \cdot \binom{n}{1} + m^2 \cdot \binom{n}{2} + m^3 \cdot \binom{n}{3} + \ldots + m^n \cdot \binom{n}{n}$
    [a) 0; b) $(1+m)^n$]

49. A è un insieme di n elementi che ha 2^n sottoinsiemi. Quanti di essi hanno $k < n$ elementi? $\left[\binom{n}{k}\right]$

50. Provare la validità della seguente identità $\binom{n}{k+1}=\frac{n-k}{k+1}\cdot\binom{n}{k}$.

51. I numeri di Fibonacci si ottengono con la regola, $F_1 = F_2 = 1$; $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$. Verificare che si ottengono anche mediante i coefficienti binomiali, come mostrato di seguito.

$$F_1=\binom{0}{0}, F_2=\binom{1}{0}, F_3=\binom{2}{0}+\binom{1}{1}, F_4=\binom{3}{0}+\binom{2}{1}, F_5=\binom{4}{0}+\binom{3}{1}+\binom{2}{2},$$
$$F_6=\binom{5}{0}+\binom{4}{1}+\binom{3}{2}, F_6=\binom{6}{0}+\binom{5}{1}+\binom{4}{2}+\binom{3}{3},\ldots$$

52. Quanti termini ha un polinomio omogeneo di grado n in k variabili completo, ossia con tutti i monomi possibili? $\left[\binom{n+k-1}{n}\right]$

53. Calcolare $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots+\binom{n}{n}$, per n pari. $[2^{n-1}]$

54. Calcolare $\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots+\binom{n}{n-1}$, per n pari. $[2^{n-1}]$

55. Verificare la seguente identità $\frac{n-2k-1}{k+1}\cdot\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}-2\cdot\binom{n}{k}$, $n > k$.

56. Provare per induzione che $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$.

57. Provare per induzione la validità degli esercizi 48, 53 e 54.

Lavoriamo insieme

Risolvere l'equazione $\binom{n-1}{3}+\binom{n-1}{4}+\binom{n}{5}+\binom{n+1}{6}=\binom{11}{5}$.

Non conviene sviluppare i singoli coefficienti, perché otterremmo un'equazione molto complicata. Usiamo invece la formula di Stifel per accorpare a due a due i coefficienti:

$$\left[\binom{n-1}{3}+\binom{n-1}{4}\right]+\binom{n}{5}+\binom{n+1}{6}=\binom{11}{5}\Rightarrow\left[\binom{n}{4}+\binom{n}{5}\right]+\binom{n+1}{6}=\binom{11}{5}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left[\binom{n+1}{5}+\binom{n+1}{6}\right]=\binom{11}{5}\Rightarrow\binom{n+2}{6}=\binom{11}{5}\Rightarrow\binom{n+2}{6}=\binom{11}{6}\Rightarrow n+2=11\Rightarrow n=9$$

Risolvere le seguenti equazioni nell'insieme dei numeri naturali

Livello 2

58. a) $\binom{n}{2}=21$; b) $\binom{n}{3}=10$; c) $\binom{n}{4}=330$; d) $\binom{n}{3}=164$; e) $\binom{n}{4}=1365$; f) $\binom{n}{n-1}=10$; g) $\binom{n}{4}+\binom{n}{5}=6$

[a) 6; b) 5; c) 11; d) ∅; e) 15; f) 11; g) 5]

59. a) $\binom{n}{7}+\binom{n}{8}=\binom{10}{2}$; b) $\binom{n}{5}+\binom{n}{6}=\binom{8}{5}$; c) $\binom{n}{3}+\binom{n}{4}+\binom{n+1}{5}=\binom{18}{5}$; d) $\binom{n-1}{8}+\binom{n}{7}+\binom{n-1}{7}=\binom{13}{5}$

[a) 9; b) ∅; c) 16; d) 12]

60. a) $\binom{n-2}{3}+\binom{n-2}{4}+\binom{n-1}{5}+\binom{n}{6}=\binom{31}{6}$; b) $\binom{2n+1}{8}+\binom{2n+2}{9}+\binom{2n}{6}+\binom{2n}{7}=\binom{21}{10}$ [a) 30; b) ∅]

Livello 3

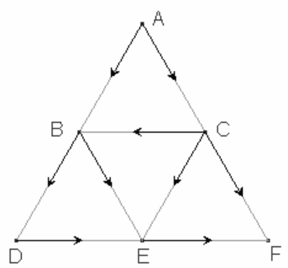
Nei seguenti esercizi si suggerisce di scomporre in fattori primi il secondo membro

61. a) $\binom{7}{n}=35$; b) $\binom{11}{n}=165$; c) $\binom{8}{n}=56$; d) $\binom{12}{n+1}=792$; e) $\binom{15}{2n-1}=6435$; f) $\binom{23}{2n}=1771$

[a) ($3 \vee 4$); b) ($3 \vee 8$); c) $\varnothing$; d) ($4 \vee 6$); e) 3; f) 10]

Quesiti di riepilogo

1. Prendi tutti i numeri di 4 cifre formati solo con le cifre 1 o 2, che possono ripetersi da 0 a 4 volte. Se sommi le cifre di ciascuno di questi numeri, quanti diversi totali puoi ottenere? Se le cifre possibili sono 0 o 1, il risultato precedente cambia? Se le cifre sono 2018, con 1 e 2? [5; Sì, 4; 2019]
2. Scriviamo tutti i possibili numeri che contengono tutte le cifre 1, 2, 3, 4, una sola volta dal più piccolo al più grande. Quale numero occupa la diciannovesima posizione? Che posizione occupa il 3142? [4123; 14]
3. Lancio un dado regolare (6 facce con i punteggi da 1 a 6) 10 volte. Il prodotto dei 10 numeri ottenuti è 7776; qual è la massima somma possibile dei 10 punteggi? E se ottenessi 7540? [35; Impossibile]
4. Su un orologio digitale si vedono gli orari da 00:00 a 23:59. Per quanto tempo, in un giorno, si vedranno 3 cifre uguali e una diversa sull'orologio? [76]
5. In un campionato di softball, dopo che ogni squadra ha giocato contro ciascuna delle rimanenti per 4 volte, la classifica vede i seguenti punteggi: 22, 19, 14 e 12. Se per ogni vittoria si ottengono 3 punti e 1 punto per ogni pareggio, quante partite sono finite in pareggio? [5]
6. Chiamiamo decrescente un numero intero le cui cifre sono tali che ognuna è minore di quelle alla sua sinistra. Per esempio 8540 è un numero decrescente di 4 cifre. Quanti numeri decrescenti ci sono fra 100 e 500? [10]
7. Uno strano dado sulle facce ha punti che valgono 2, 2, 3, 3, 5 e 8. Se lanciamo due dadi come questo, quanti diversi punteggi possiamo ottenere? [9]
8. Ad una festa partecipano n coppie. Ogni uomo stringe la mano a tutti i partecipanti tranne che alla propria moglie, le donne solo agli uomini. Quante strette di mano vengono effettuate? [$n \cdot (n-1)$]
9. $n > 4$ persone fanno un gioco in cui una coppia gioca contro un'altra. Quante partite devono fare affinché ogni possibile coppia giochi contro ciascuna delle altre? $\left[\binom{n}{2}\cdot\binom{n-2}{2}\right]$
10. Quanti sono i numeri di tre cifre in cui la cifra delle unità vale la metà di quella delle centinaia mentre quella delle decine è diversa sia rispetto alle unità che alle centinaia? [32]
11. Gli spigoli di un cubo hanno, in *cm*, misure intere. Il volume è meno di 1 metro cubo e non più piccolo di 1 decimetro cubo. Quante diverse misure potrebbe avere il cubo? [90]
12. Usando solo i cammini e le direzioni mostrate in quanti diversi modi possiamo andare da A ad F? [6]



13. Ci sono n lampade, ciascuna delle quali può essere accesa o spenta singolarmente. In quanti modi differenti puoi avere almeno una lampada accesa? [$2^n - 1$]
14. Di un numero di telefono di 7 cifre conosciamo le prime 5 cifre, quante telefonate dobbiamo fare per essere sicuri di centrare il numero corretto? E se le cifre note sono sempre 5 tutte diverse ma non sappiamo che posto occupano? [100; 252000]
15. Tre bambini, partecipano ad una gara, in cui sono gli unici concorrenti. Sapendo che nella classifica finale c'è uno e un solo pari merito, quante diverse classifiche possono esservi? [6]
16. Un clown sale una scala con 6 scalini uno o due per volta. In quanti modi differenti può arrivare al sesto gradino? [12]

17. In un gioco sono messi tre paletti a terra e si devono lanciare degli anelli su di essi. Centrare ciascuno dei tre anelli consente di ottenere rispettivamente, 1, 3 o 5 punti. Se lanciando tre anelli siamo sicuri che nessuno di essi cadrà fuori dai paletti, quanti diversi punteggi possono ottenersi? Ovviamente possiamo centrare uno stesso paletto con più di un anello. [7]
18. Quanti numeri interi fra 1 e 2016 hanno almeno una cifra uguale a 7? [542]
19. Abbiamo 10 palle identiche, 5 rosse, 3 bianche e 2 verdi, vogliamo metterne 4 in una scatola e 6 nell'altra. In quanti modi diversi possiamo farlo? [11]
20. Quanti numeri di 4 cifre hanno almeno una cifra che si ripete? [4464]
21. A, B, C, D ed E vogliono sedere in 5 posti adiacenti; ma Ann vuole sedere accanto a B e D accanto a E, mentre C non vuole sedere vicino a E. In quanti diversi modi possono sedersi? [16]
22. In un torneo di tennis ognuno gioca contro ciascuno degli altri. Dato che le partite sarebbero troppe, gli organizzatori invitano 4 giocatori in meno e così facendo riducono di 50 le partite. Quanti giocatori partecipano al torneo? [15]
23. Un biglietto di autobus è formato da una griglia 3 × 3 contenente nell'ordine i numeri da 1 a 9. La macchina obliteratrice buca 4 dei 9 numeri. Per quanti giorni possono effettuarsi obliterazioni diverse? [126]
24. In quanti modi differenti 5 interruttori adiacenti possono essere posizionati, in modo che ve ne siano sempre almeno due adiacenti spenti? E se sono n? [10; $1 + 2 + \ldots + n$]
25. Cinque ragazze e tre ragazzi giocano a pallavolo. In quanti diversi modi possono farsi due squadre composte da 4 giocatori ciascuna, in modo che in ogni squadra ci sia almeno un maschio? [30]
26. 4 bambini devono dividersi fra loro 6 mele. Se qualcuno può anche non riceverne nessuna e qualcuno può prenderle anche tutte, in quanti diversi modi possiamo fare ciò? [84]
27. Ci sono 12 ragazze e 15 ragazzi che partecipano ad una festa. In quanti diversi modi possiamo scegliere 4 coppie di ballerini, maschio e femmina, fra di loro? [16216200]
28. 5 coppie devono essere divise in due gruppi in modo che uno contenga 6 persone e fra di loro almeno due delle coppie iniziali. In quanti diversi modi possiamo effettuare tale suddivisione? [130]
29. Quanti degli anagrammi della parola Caramella iniziano per C e finiscono per a? [1260]

L'angolo di Derive

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%208/8-2-1.exe si scarica un'applicazione che mostra come Derive tratta il calcolo combinatorio.
Per il relativo file si clicca su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%208/8-2-1.dfw

L'angolo di Microsoft Mathematics

Su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%208/8-2-2.exe si scarica un'applicazione che mostra come Microsoft Mathematics tratta il calcolo combinatorio.
Per il relativo file si clicca su http://mathinterattiva.altervista.org/Matematiche/Multimediali/Quarto%20volume/Capitolo%208/8-2-2.rar .

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

1. Dimostrare che ciascuno degli insiemi $A_n = \{k \in \mathbb{N}: n! + 1 \leq k \leq n! + n\}$ non ha numeri primi.
2. Di fattoriali che finiscono con 6 zeri, o con 7 zeri o con 8 zeri, ve ne sono 5. Possiamo dire che di fattoriali che finiscono con n zeri ve ne sono sempre esattamente 5? Giustificare la risposta.
[No. Per ogni n, di numeri il cui fattoriale ha n zeri ve ne sono 0 oppure 5]
3. Con riferimento al precedente quesito, per quali valori di n, non esistono fattoriali che finiscono con n zeri?
[Numeri del tipo $\left(\frac{5^n-1}{4}-1, \frac{5^n-1}{4}-2, \ldots, \frac{5^n-1}{4}-n+1\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}}$, per esempio 5, 29, 30, 153, 154, 155, …]
4. Quante delle permutazioni della successione di cifre $123\ldots n$, non hanno punti fissi, cioè cifre che oc-

cupano la posizione uguale al loro valore, cioè 1 nella prima, 2 nella seconda, …? $\left[n!\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right]$

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi

1. (Liceo scientifico 2002/03) Si consideri una data estrazione in una determinata Ruota del Lotto. Calcolare quante sono le possibili cinquine che contengono i numeri 1 e 90. [109736]
2. (Liceo scientifico PNI 2002/2003) Quante partite di calcio della serie A vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre? [306]
3. (Liceo scientifico 2003/2004) Considerate gli insiemi $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{a, b, c\}$; quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B? [81]
4. (Liceo scientifico 2005/2006) Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a + b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n\in\mathbb{N}$.
5. (Liceo scientifico 2006/2007) Si risolva l'equazione $4\cdot\binom{n}{4}=15\cdot\binom{n-2}{3}$. [6, 10]
6. (Liceo scientifico 2007/2008) Se $\binom{n}{1},\binom{n}{2},\binom{n}{3}$ con $n > 3$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n? [7]
7. (Liceo scientifico 2008/2009) Si dimostri l'identità $\binom{n}{k+1}=\binom{n}{k}\cdot\frac{n-k}{k+1};n,k\in\mathbb{N},n>k$.
8. (Liceo scientifico 2010/2011) Il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi n. [7]
9. (Liceo scientifico 2011/2012) Siano dati nello spazio n punti $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$. Quanti sono i segmenti che li congiungono a due a due? Quanti i triangoli che hanno per vertici questi punti (supposto che nessuna terna sia allineata)? Quanti i tetraedri (supposto che nessuna quaterna sia complanare)? $\left[\binom{n}{2};\binom{n}{3};\binom{n}{4}\right]$
10. (Liceo scientifico 2012/2013) Con le cifre da 1 a 7 è possibile formare 7! = 5040 numeri corrispondenti alle permutazioni delle 7 cifre. Ad esempio i numeri 1234567 e 3546712 corrispondono a due di queste permutazioni. Se i 5040 numeri ottenuti dalle permutazioni si dispongono in ordine crescente qual è il numero che occupa la settima posizione e quale quello che occupa la 721-esima posizione? [1235467; 2134567]
11. (Liceo scientifico PNI 2012/2013) Qual è il numero che occupa la 5036-esima posizione e quale quello che occupa la 1441-esima posizione? [7654132; 3124567]
12. (Liceo scientifico 2013/2014) Nello sviluppo di $\left(2a^2-3b^3\right)^n$ compare il termine – 1080 a^4b^9. Qual è il valore di n? [5]
13. (Liceo scientifico 2013/14) Dei numeri 1,2,3.......6000, quanti non sono divisibili né per 2, né per 3 né per 5? [1600]

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.

A = Abacus AHSME = Annual High School Mathematics Examination AMC = American Mathematical Contest
B = Giochi della Bocconi C = Canadian Mathematics Competition
HSMC = A&M University High School Mathematics Contest K = Kangaroo
MT = Mathematics Teacher, rivista della NCTM RICE = Rice University Mathematics Tournament.

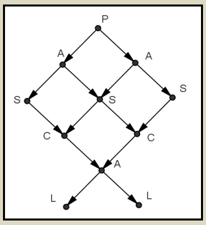
Lavoriamo insieme

Vediamo un'applicazione del principio dei piccioni, usando un quesito assegnato all'Abacus International del Marzo 2005.
Su una spiaggia possono affittarsi: 8 *pedalò,* 10 *canoe e* 6 *tavole da surf. Un giorno* 6 *di questi oggetti sono stati affittati. Stabilire, per ognuna delle seguenti affermazioni relativa agli oggetti non affittati, quali sono vere, quali false e per quali non si può decidere se sono vere o false.*
a) *Non ci sono più tavole da surf.* Può essere vera perché potrebbero essere state affittate tutte e sei, ma potrebbe anche non esserlo, se uno dei 6 oggetti affittati non è una tavola da surf.
b) *È possibile affittare ciascuno dei* 3 *oggetti.* Ancora una volta può essere vero o falso, perché abbiamo visto in a) che potrebbero essere state affittate solo le 6 tavole da surf che perciò non sarebbero più disponibili.
c) *C'è almeno una tavola da surf disponibile.* Come in precedenza e per gli stessi motivi, l'affermazione può essere vera o falsa.
d) *C'è almeno un pedalò disponibile.* Stavolta l'affermazione è vera perché i pedalò sono più dei 6 oggetti affittati.
e) *Non ci sono più pedalò.* Per la stessa motivazione del punto precedente l'affermazione è sicuramente falsa, ce ne sono almeno 2.
f) Ci sono al massimo due canoe disponibili. Questa è falsa, perché anche se sono state affittate solo canoe ne rimangono almeno 4.

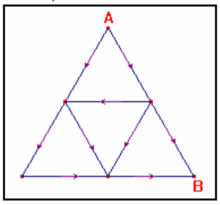
1. (AHSME 1959) Un club ha x membri i quali sono suddivisi in 4 comitati in accordo con le seguenti regole: a) Ogni membro appartiene esattamente a due comitati. b) Ogni coppia di comitati ha un solo membro in comune. Relativamente a x quale delle seguenti affermazioni è vera? Giustificare la risposta. A) non può essere determinato B) ha un unico valore compreso tra 8 e 16
C) può assumere due distinti valori compresi tra 8 e 16 D) ha un unico valore compreso tra 4 e 8
E) può assumere due distinti valori compresi tra 4 e 8 [D)]
2. (AHSME 1961) $695 = a_1 + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + \ldots + a_n \cdot n!$, $a_k \in \mathbb{N}$, $0 \le a_k \le k$, cioè è scritto in base fattoriale. Determinare a_4. [3]
3. (AHSME 1961) Espandiamo $\left(\frac{a}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{a^2}\right)^6$, quanto vale il terzo termine? [$15/x$]
4. (AHSME 1962) Espandiamo $\left(1 - \frac{1}{a}\right)^6$, quanto vale la somma degli ultimi tre coefficienti? [10]
5. (AHSME 1963) Espandiamo $\left(a - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^7$, quanto vale il coefficiente di $a^{-\frac{1}{2}}$? [–21]
6. (AHSME 1965) Quanto vale la somma di tutti i coefficienti numerici dell'espansione $(x^2 - 2xy + y^2)^7$? [0]
7. (AHSME 1965) Il numero 15! finisce con k zeri se espresso in base 12 e con h zeri in base 10. Quanto vale $k + h$? [8]
8. (AHSME 1978) In un torneo di tennis a due sono iscritti n uomini e $2n$ donne. Ogni giocatore gioca esattamente una partita con ogni altro. Sapendo che il rapporto tra il numero dipartite vinte dalle donne rispetto a quelle vinte dagli uomini è 7/5, determinare n. [3]
9. (AHSME 1985) Consideriamo la parola CONTEST, quanti dei suoi anagrammi hanno le prime due lettere formate da vocali? [120]

Lavoriamo insieme

Il seguente quesito è stato assegnato ai Canadian Mathematics Competition del 2004.



Quanti diversi percorsi, nel diagramma seguente, formano la parola PASCAL?
Osserviamo che ogni cammino che parte dalla P finisce in una delle due L e forma la parola "PASCAL", quindi basta contare quanti cammini vanno dalla P a una delle due L. È semplice vedere che ognuna delle 2 C può essere raggiunta in 3 modi, poi la A successiva in 6 modi, e perciò ciascuna delle L in 6 modi, per un totale di 12

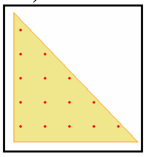
10. (AHSME 1986) In figura è mostrata la mappa stradale di un villaggio residenziale, tutte le strade sono a senso unico e hanno la stessa lunghezza, le frecce ne indicano i versi di percorrenza. In quanti diversi modi riusciamo ad andare da A a B? 

Due percorsi sono considerati diversi se hanno diversa lunghezza complessiva o se hanno diversi ordini di percorrenza. [6]
11. (AHSME 1986) Consideriamo tutte le permutazioni della parola AHSME ordinate alfabeticamente, quale lettera occupa l'ultima posizione della 86-esima parola? [E]
12. (AHSME 1988) Un bambino ha 96 costruzioni, per ciascuna costruzione distinguiamo il materiale di cui è fatta, la dimensione, il colore e la forma. Sappiamo che vi sono 2 materiali: plastica, legno; 3 misure: piccola, media, grande; 4 colori: blu, rosso, verde, giallo; 4 forme: cerchio, esagono, quadrato, triangolo. Quante delle costruzioni hanno esattamente due caratteristiche diverse dalla costruzione "plastica, media, rossa, circolare"? [29]
13. (AHSME 1989) Calcolare $\sum_{k=0}^{49}(-1)^k \cdot \binom{99}{2k}$. Sugg: considerare lo sviluppo di $(1 + i)^{99}$. [2^{-49}]
14. (AHSME 1993) Nel piano cartesiano ortogonale consideriamo tutti i triangoli i cui vertici hanno entrambe le coordinate intere e comprese tra 1 e 4. Quanti sono tali triangoli? Sugg: eliminare da tutte le possibili terne quelle che giacciono sulla stessa retta. [516]
15. (AHSME 1993) Scegliamo dieci punti sul semiasse positivo delle ascisse e cinque punti sul semiasse positivo delle ordinate. Congiungiamo ciascun punto scelto sull'asse x con tutti quelli scelti sull'asse y, qual è il massimo numero di intersezioni di questi 50 segmenti che giacciono all'interno del primo quadrante? [450]
16. (AHSME 1994) 9 sedie sono poste in riga per essere occupate da 3 professori e 6 studenti. In quanti modi possono sistemarsi le 9 persone in modo che ogni insegnante sia seduto fra due studenti? [60]
17. (AHSME 1995) Quanti numeri di 4 cifre, in base 10, N = $abcd$, soddisfano tutte le seguenti condizioni? i) $4000 \le N < 6000$; ii) N è multiplo di 5; iii) $3 \le b < c \le 6$. A) 10 B) 18 C) 24 D) 36 E) 48 [C]
18. (AHSME 1995) Per quanti insiemi di 3 numeri naturali $\{a, b, c\}$ $a \cdot b \cdot c = 2310$? [40]
19. (AHSME 1996) Quanti segmenti hanno entrambi gli estremi sui vertici di un dato cubo? [28]
20. (AHSME 1997) Un numero crescente, come 34689, è un intero positivo le cui cifre sono disposte in ordine crescente. Ci sono $\binom{9}{5} = 126$ numeri crescenti di 5 cifre. Ordinandoli dal più piccolo al più grande, il 97° numero non contiene quale delle seguenti cifre? A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8 [B]
21. (AHSME 1998) Per ogni intero positivo n, sia $a_n = \frac{(n+9)!}{(n-1)!}$, k denoti il più piccolo intero positivo per cui la cifra non nulla più a destra di a_k sia dispari. La cifra nulla più a destra di a_k è? [9]
22. (A1998) In una scatola ci sono alcune palle rosse ed alcune verdi. Sappiamo che dobbiamo estrarre almeno 7 palle per avere la sicurezza di estrarre, senza guardare, una palla rossa, mentre ne dobbiamo

estrarre almeno 13 per avere la sicurezza di estrarre due palle di colori diversi. Quante palle rosse e quante verdi ci sono nella scatola? [6; 12]

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato nel 2008 agli HSMC.
Se 2008^k *divide* 2007! *mentre* 2008^{k+1} *non lo divide, quanto vale* k?
Scomponiamo 2008 in fattori primi, ottenendo $2^3 \cdot 251$. Ora 2007 = 251 · 7 + 250. Quindi in 2007! troviamo 257 solo 7 volte, quindi 2008^7 è un divisore di 2007!, mentre 2008^8 no. Quindi $k = 7$.

23. (AHSME 1998) Un numero telefonico di 7 cifre $d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7$ lo diciamo memorabile se la sequenza $d_1d_2d_3$ è esattamente la stessa di una almeno delle due sequenze $d_4d_5d_6$ o $d_5d_6d_7$. Supposto che ogni cifra possa assumere I valori interi da 0 a 9, determinare il numero di diversi numeri telefonici memorabili. [19990]
24. (AHSME 1998) Calcolare $\frac{1}{log_2(100!)}+\frac{1}{log_3(100!)}+...+\frac{1}{log_{100}(100!)}$. [1]
25. (AMC 2000) Ci sono 5 pioli gialli, 4 rossi, 3 verdi, 2 blu e 1 arancione su una tavola triangolare, come in figura.  In quanti modi possiamo sistemare i pioli, in modi che nessuna riga (orizzontale) o colonna (verticale) contenga due pioli dello stesso colore? [5!· 4!· 3! · 2! · 1!]
26. (AMC 2000) 8 triangoli equilateri isometrici, ciascuno di un diverso colore vengono usati per costruire un ottaedro regolare. In quanti modi diversi possiamo costruire l'ottaedro? (Due ottaedri colorati sono diversi se uno di essi non può essere ruotato in modo da essere uguale all'altro.) [1680]
27. (AMC 2001) Pat vuole comprare 4 ciambelle scegliendo fra le seguenti: glassata, cioccolata e zuccherata. Quante diverse scelte può fare? [15]
28. (AMC 2001) Dato l'ennagono regolare di vertici $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$, quanti distinti triangoli equilateri possiamo costruire scegliendo almeno due dei 9 vertici? [66]
29. (AMC 2001) Un ragno ha un calzino e una scarpa per ciascuna delle sue otto zampe. In quanti diversi ordini il ragno può mettere calzini e scarpe supposto che su ogni zampa il calzino deve sempre essere messo prima della scarpa? $\left[\frac{16!}{2^8}\right]$
30. (K2001) Venti caramelle sono distribuite tra alcuni kangourou in modo che ogni kangourou riceva almeno una caramella e che mai due kangourou abbiano un numero uguale di caramelle. Quanti kangourou al massimo sono presenti alla distribuzione delle caramelle? [5]
31. (A2002) Ad una festa partecipano 13 coppie. Ogni uomo stringe la mano a tutti i partecipanti tranne che alla propria moglie, le donne solo agli uomini. Quante strette di mano vengono effettuate? [156]
32. (B2003) Nel frigorifero dei gelati ci sono 60 ghiaccioli di 5 gusti diversi, una dozzina per ogni gusto. Qual è il numero minimo di ghiaccioli che si devono prendere (senza guardare …) per essere sicuri di averne presi due dello stesso gusto? [6]

Lavoriamo insieme

Consideriamo il seguente quesito assegnato nel 2008 al South Carolina Mathematical Contest.
Quanto fa la somma $\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+\frac{5}{3!+4!+5!}+...+\frac{2007}{2005!+2006!+2007!}$?
Osserviamo che possiamo scrivere: $\frac{3}{1!+2!+3!}=\frac{1}{1!}\cdot\frac{3}{1+2+3\cdot 2}$; $\frac{4}{2!+3!+4!}=\frac{1}{2!}\cdot\frac{4}{1+3+4\cdot 3}$ e, più in generale $\frac{n}{(n-2)!+(n-1)!+n!}=\frac{1}{(n-2)!}\cdot\frac{n}{1+(n-1)+n\cdot(n-1)}=\frac{1}{(n-2)!}\cdot\frac{n}{\cancel{n}+n^2-\cancel{n}}=\frac{1}{(n-2)!}\cdot\frac{1}{n}$. Ma possiamo

ancora meglio semplificare: $\frac{1}{(n-2)!}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{n-1}{n}=\frac{1}{(n-1)!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}$.

Quindi: $\left(\frac{1}{2!}-\cancel{\frac{1}{3!}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3!}}-\cancel{\frac{1}{4!}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{4!}}-\cancel{\frac{1}{5!}}\right)+\ldots+\left(\cancel{\frac{1}{2006!}}-\frac{1}{2007!}\right)=\frac{1}{2!}-\frac{1}{2007!}$.

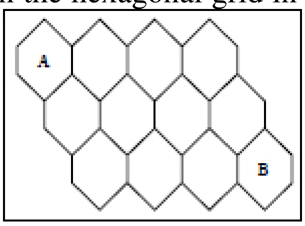
33. (A2004) 5 persone vogliono giocare a bridge, un gioco in cui una coppia gioca contro un'altra. Quante partite devono fare affinché ogni possibile coppia giochi contro ciascuna delle altre? [15]
34. (HSMC 2004) Determinare il valore di n per cui si ha: $n!=\sum_{k=1}^{15}k$. [5]
35. (HSMC 2004) Mary digita un numero di 6 cifre ma la tastiera non funziona bene e non scrive i due 1, così il numero scritto è 2002. Quanti diversi numeri di 6 cifre ha potuto digitare? [15]
36. (C2005) In un sacchetto ci sono 8 palline gialle, 7 rosse e 5 nere. Senza guardare, Igor toglie N palline dal sacchetto ed è sicuro che comunque ha preso le palline nel sacchetto, sono rimaste almeno 4 palline di un colore e 3 palline di un altro colore. Qual è il massimo valore che può avere N? [7]
37. (A2006) Quanti numeri interi di 3 cifre hanno per somma delle cifre un numero dispari? [450]
38. (HSMC 2006) Qual è il più piccolo intero positivo n per cui n! finisce con 4 zeri? [20]
39. (HSMC2006) Una successione è definita da $a_n = sin\left(\frac{n!\cdot\pi}{2006}\right)$, qual è il primo valore di n per cui si hanno valori non nulli. [58]
40. (Rice 2006) Calcolare $\sum_{k=10}^{2006}\binom{k}{10}$. $\left[\binom{2007}{11}\right]$
41. (Rice 2006) Un punto reticolo è un punto del piano cartesiano le cui coordinate sono entrambe numeri interi. Dato un insieme di 100 distinti punti reticolo, determinare il minimo numero di segmenti AB per cui A, B e il loro punto medio sono tutti punti reticolo distinti. [1200]
42. (Rice 2006) Ordinare in forma crescente I numeri $\left(10^{100}\right)^{10}, 10^{\left(10^{10}\right)}, 10^6!, (100!)^{10}$.
$\left[\left(10^{100}\right)^{10}, (100!)^{10}, 10^6!, 10^{\left(10^{10}\right)}\right]$
43. (A2007) Heidi lancia tre dadi (dello stesso colore, indistinguibili) e ne somma i punteggi. Se registra solo i punteggi pari e maggiori di 8, quanti diversi casi può registrare? [19]
44. (HSMC 2007) Determinare il resto della divisione di $(0! + 1! + ... + 64!)^2$ per 5. [1]
45. (Rice 2007) Quante parole di 5 lettere si possono formare con le lettere S, I e T, se per parola si intende una qualsiasi sequenza di lettere che non contiene tre consonanti consecutive? [123]
46. (Rice 2007) Daniel conta il numero di modi di formare un numero naturale usando le cifre 1, 2, 2, 3 e 4 (ogni cifra al più una volta). Edward conta il numero di modi per formare con le lettere della parola "BANANAS" una parola, anche priva di senso, di 6 lettere. Fernando conta il numero di modi per distribuire nove caramelle identiche a 3 bambini. Determinare la somma dei numeri così ottenuti. [645]
47. (ARML 2008) Sia S una successione crescente di numeri di 4 cifre distinte, scelti dall'insieme {1, 3, 5, 7, 9}. Determinare il termine di posto 96 di S. [7953]
48. (Rice 2008) Quanto fa la somma dei fattori primi di 20!? [77]
49. (Rice 2008) Sia N il numero di anagrammi della parola di 34 lettere SUPERCALIFRAGILISTICEXPIALIDOCIOUS. Quanti divisori ha N? [3225600]
50. (Rice 2008) Un'espressione è creata scrivendo a caso 5 simboli scelti fra le 9 cifre non nulle e i quattro simboli delle operazioni aritmetiche elementari. Quante espressioni matematicamente valide possono così ottenersi, senza usare la moltiplicazione implicita? [150093]

Questions in English

Working together

This is a question assigned at HSMC in 2007. *Determine the remainder when* $(1! + 2! + \ldots + 64!)^2$ *is divided by* 4.

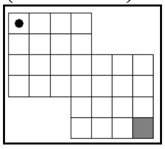
Since 4!, 5!, 6!, 7!, …, 64! are all divisible by 4, it suffices to find the remainder when $(1! + 2! + 3!)^2$ is divided by 4. But $(1! + 2! + 3!)^2 = (1 + 2 + 6)^2 = 92 = 81$. Thus the remainder is 1.

51. (MT1994) In how many ways can two dice be rolled to yield a sum divisible by 3? [7]
52. (MT1996) In a special football game, a touchdown is worth 7 points and a field goal is worth 5 points. No other types of scoring is possible. In how many different ways can a team score 199 points? [6]
53. (MT1996) Maria opened her bank to find only dimes and quarters[1], in the ratio of two dimes to five quarters. The total value of the money is between \$ 3.00 to \$ 10.00. How many totals are possible for the amount of money in her bank? [4]
54. (MT1996) For how many three-digit whole[2] numbers does the sum of the digits equal 25? [6]
55. (MT1996) A 2 by 2 square is divided into four 1 by 1 squares. Each small square is to be painted either green or red. In how many different ways can the painting be accomplished so that no green square shares its top or right side with any red square? Use as few as zero or as many as four small green squares. [6]
56. (HSMC 2000) Given 10 noncollinear points in a plane, how many different lines can be drawn if each line passes through exactly 2 points? [45]
57. (HSMC 2000) The final race in a swimming event involves 8 swimmers. Three of the swimmers are from one country and the other five are from different countries. Each is to be given a lane assignment between 1 and 8 for the race. Aside from the obvious rule that no two swimmers can be assigned to the same lane, there are two other restrictions. The first is that no two swimmers from the same country can be in adjacent lanes. The second is that the two outside lanes cannot be occupied by swimmers from the same country. With these rules, how many different lane assignments are possible for this race? [11520]
58. (HSMC 2001) Hasse wants to buy four donuts from a dealer with an ample supply of three types of donuts: glazed, chocolate and powdered. How many different selections are possible? [15]
59. (HSMC 2001) A palindrome is a number whose value is unchanged when its digits are reversed. How many palindromes are there which are greater than 10 and less than 800? [79]
60. (HSMC 2002) In the hexagonal grid in the figure, you may step from your current hexagon to any adjacent hexagon. 

How many 5-step paths are there from A to B? [10]
61. (HSMC 2002) The number $\frac{1001! - 998!}{999!}$ can be written in the form $\frac{a}{b}$, where a and b are positive integers that are relatively prime. What is the units digit of a? [9]
62. (HSMC 2004) The 120 permutations of AHSME are arranged in dictionary order, as if each were an ordinary five-letter word. Find the 85-th word in the list. [MHAES]
63. (HSMC 2007) Each car of a five-car train must be painted a solid colour. The only colour choices are red, blue and yellow. If each of these colours must be used for at least one car, in how many ways can this train be painted? [150]
64. (HSMC 2007) Determine the remainder when $(0! + 1! + \ldots + 64!)^2$ is divided by 5. [1]
65. (HSMC 2008) Two subsets of the set S = {a, b, c, d, e} are to be chosen so that their union is S and their intersection contains exactly two elements. In how many ways can this be done, assuming that the order in which the subsets are chosen is irrelevant? [40]

[1] Decini e quartini, cioè 10 e 25 cents
[2] Intero

66. (HSMC 2008) So that ZIP codes may be machine readable, the Postal Service encodes them as a group of five bars, some tall, some short, in groups of five. In how many distinct ways can two tall and three short bars be arranged? [10]

67. (SC 2008) A game piece is placed on the upper left square of a game board with 30 squares as shown.  By a sequence of 11 moves, each from a given square to an adjoining square either to the right or down, the piece is to go from the upper left square to the bottom right shaded square. How many 11-move sequences are possible? [300]

68. (Rice 2009) In the game Pokeymawn, players pick a team of 6 different Pokeymawn creatures. There are 25 distinct Pokeymawn creatures, and each one belongs to exactly one of four categories: 7 Pokeymawn are plant-type, 6 Pokeymawn are bug-type, 4 Pokeymawn are rock-type, and 8 Pokeymawn are bovine-type. However, some Pokeymawn do not get along with each other when placed on the same team: bug-type Pokeymawn will eat plant-type Pokeymawn, plant-type Pokeymawn will eat rock-type Pokeymawn, and bovine-type Pokeymawn will eat anything except other Bovines. How many ways are there to form a team of 6 different Pokeymawn such that none of the Pokeymawn on the team want to eat any of the other Pokeymawn? [245]

69. (Rice 2009) Four cards are drawn from a standard deck (52 cards) with suits indistinguishable (for example, A♠ is the same as A♣). How many distinct hands can one obtain? [1820]

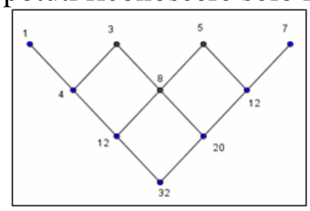
Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

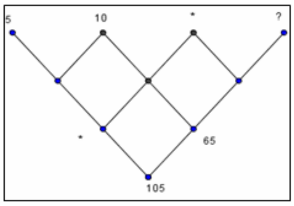
1. (Accademia militare) Sia n un numero naturale e si indichi con il simbolo $n!$ il prodotto dei numeri naturali minori o al più uguali a n. Quale delle relazioni elencate è vera per ogni n?
A) $2(n!) = (2n)!$ B) $n! = (n \cdot (n - 1))!$ C) $n! = n \cdot (n + 1)$ D) $n! = (n^2 - n) \cdot (n - 2)!$

2. (Odontoiatria 1997) Disponendo di 7 lettere dell'alfabeto, tutte diverse, il numero di parole con 4 lettere che si possono formare potendo ripetere 2 o 3 o 4 volte la stessa lettera è:
A) 4^4 B) 4^7 C) 7^4 D) 7^7 E) 49

3. (Ingegneria 1999) Una scatola contiene 10 cubi. Ogni faccia di ciascun cubo è colorata di verde oppure di bianco oppure di rosso. In totale, 6 cubi hanno almeno una faccia verde, 7 hanno almeno una faccia bianca e 9 hanno almeno una faccia rossa; inoltre, nessuno dei 10 cubi ha tutte le facce dello stesso colore. Quanti cubi nella scatola hanno facce di tutti e tre i colori? A) 8 B) 9 C) 2 D) 0 E) 1

4. (Architettura 2007) Gianni ha trovato un vecchio giornale enigmistico che riportava uno schema triangolare in cui ogni numero, dalla seconda riga in giù, era uguale alla somma dei due numeri situati sopra al numero stesso, esattamente come succede nella prima figura. Lo schema di Gianni era in gran parte illeggibile, si sono potuti riconoscere solo i 4 numeri indicati nella seconda figura.





Sapreste aiutare Gianni a ricostruire lo schema originario? Indicate in particolare quale numero deve stare nella casella indicata con ” ? ”. A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

5. (Economia Varie Università) In un vaso ci sono 60 palline di tre diversi colori: rosse, gialle e blu. Qual è il numero minimo di palline che occorre estrarre per essere sicuri di averne 3 di uno stesso colore?
A) 6 B) 7 C) 9 D) 12

6. (Facoltà scientifiche, Roma La Sapienza) Il codice per aprire un lucchetto è costituito da una sequenza di quattro cifre (da 0 a 9). Ho dimenticato il codice, ma mi ricordo che le cifre sono tutte distinte e che tra le prime tre cifre ci sono sicuramente i numeri 6 e 9. Quante sequenze di quattro numeri dovrei provare per essere certo di aprire il lucchetto? A) 100 B) 118 C) 336 D) 600

7. (Corso di laurea in Informatica, Udine 2009) Si considerino tutti gli anagrammi della parola ‘FUNGHI’, ovvero tutte le parole che si ottengono permutando le sei lettere. Tra esse, quante sono le parole che non cominciano per ‘F’? A) 360 B) 600 C) 720 D) 120

8. (Corso di laurea in Informatica, Udine 2009) Durante una vacanza, sette amici prendono in affitto due automobili. Una di esse ha due posti, l'altra ne ha cinque. In quanti modi differenti possono distribuirsi i sette amici sulle due automobili? A) 21 B) 14 C) 28 D) 35
9. (Ingegneria, 2009) Il circolo canottieri Santerno è formato da sei rematori, tutti ugualmente bravi ed affiatati tra loro. Deve mandare una rappresentanza di quattro atleti al campionato regionale. In quanti diversi modi può essere formata una tale rappresentanza? A) 720 B) 5 C) 15 D) 4 E) 6
10. (Medicina 2013) I coniugi Bianchi hanno un figlio e una figlia e sono bisnonni. Ciascuno dei loro discendenti maschi ha due figli maschi e nessuna figlia femmina. Ciascuna delle loro discendenti femmine ha un figlio maschio e una figlia femmina (tutti i loro discendenti sono attualmente vivi). Quanti pronipoti maschi hanno i coniugi Bianchi? A) 7 B) 8 C) 10 D) 11 E) 14
11. (Scuola superiore di Catania) L'animatore di un villaggio turistico vuole organizzare un torneo di ramino che si svolga in 13 serate, in modo che ogni sera quattro giocatori disputino un incontro e che alla fine delle 13 serate ogni partecipante incontri una ed una sola volta tutti gli altri. Quanti giocatori possono iscriversi al torneo?
12. (Scuola superiore di Catania) Mario vuole telefonare a Giorgio, ma non ricorda il suo numero di telefono. Ricorda però che è un numero di sette cifre, tutte diverse, e in ordine crescente. Decide di provare tutti i numeri possibili, fino a quando risponde la famiglia di Giorgio, quanti numeri deve provare nel caso più sfortunato?
13. (Scuola superiore di Catania) Sia n un numero maggiore di 3000. dimostrare o confutare le seguenti asserzioni.
   A) $(n - 1)!$ è divisibile per n B) $(n - 2)!$ è divisibile per n C) $(n - 3)!$ è divisibile per n
   D) $(n/2 + 1)!$ è divisibile per n (n pari) E) $(n/2)! - 1$ è divisibile per n (n pari)
   F) $(n/2 - 1)!$ è divisibile per n (n pari) G) $(n/2 - 2)!$ è divisibile per n (n pari)
   H) $(n/2 - 3)!$ è divisibile per n (n pari)

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_4_8.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
D	C	D	C	B	C	B
8	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	
A	C	A	40	120	A), B), C): Falso se n è primo D) : Vero; E) : Falso sempre F), G), H): Falso se $n/2$ è primo	

8. I numeri naturali e l'infinito

8.3 Progressioni numeriche

Prerequisiti

- I numeri naturali e le operazioni su di essi
- Concetto di applicazione
- Concetto di insieme infinito
- Insiemi numerabili

Obiettivi

- Comprendere il concetto di progressione
- Conoscere le più importanti proprietà delle progressioni
- Sapere applicare le formule delle progressioni a problemi pseudo–reali

Contenuti

- Progressioni aritmetiche
- Progressioni geometriche

Parole Chiave

Progressione – Ragione

Progressioni aritmetiche

"Sai sommare?" chiese la Regina Bianca. "Allora quanto fa uno più uno più uno più uno più uno più uno più uno più uno?" "Non lo so", rispose Alice "Ho perso il conto"
Lewis Carroll, Attraverso lo specchio

Vogliamo studiare dei particolari insiemi numerabili. Cominciamo a porre qualche definizione.

Definizione 1

Diciamo **successione numerica** un insieme ordinato di numeri reali.

Notazione 1

Una successione si indica con $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, o, se non vi è possibilità di equivoco, semplicemente con $\{a_n\}$. Il suo generico elemento che nell'insieme occupa la posizione numero n si indica con a_n.

Esempio 1

$\left\{\frac{2n+7}{3n-1} : n\in\mathbb{N}\right\}$ è una successione, i cui primi elementi sono: $\left\{\frac{2\cdot 1+7}{3\cdot 1-1}=\frac{9}{2}, \frac{2\cdot 2+7}{3\cdot 2-1}=\frac{11}{5}, \frac{2\cdot 3+7}{3\cdot 3-1}=\frac{13}{8}, \ldots\right\}$.

Fra le successioni ve ne sono alcune che meritano di essere evidenziate.

Definizione 2

Diciamo **progressione aritmetica** una successione numerica in cui la differenza tra due elementi consecutivi è costante. In simboli $a_{n+1} - a_n = d,\ \forall n\in\mathbb{N}$; d si chiama **ragione** della progressione.

Esempio 2

- La successione $a_n = \{2n\}_{n\in\mathbb{N}}$, rappresenta i numeri pari. E poiché ogni numero pari è 2 unità più grande del precedente, questa è una progressione aritmetica di ragione 2. Si ha: $a_{n+1} - a_n = 2 \cdot (n + 1) - 2 \cdot n = 2$.
- Invece $a_n = \{n^2+n+3\}_{n\in\mathbb{N}}$ non è una progressione aritmetica perché

$$a_{n+1} - a_n = (n + 1)^2 + (n + 1) + 3 - (n^2 + n + 3) = 2n + 1.$$

Proprio per la loro stessa definizione possiamo ottenere semplici relazioni fra gli elementi di una stessa progressione aritmetica.

Esempio 3

Data la progressione aritmetica {4, 7, 10, 13, …}, di ragione 3, possiamo trovare facilmente il suo 20° termine senza bisogno di calcolare i precedenti 19. Infatti si può scrivere: $\{4, 4 + 3, 4 + 2 \cdot 3, 4 + 3 \cdot 3, \ldots\}$. Cioè in generale $a_n = 4 + (n - 1) \cdot 3$. Quindi $a_{20} = 4 + (20 - 1) \cdot 3 = 4 + 19 \cdot 3 = 61$.

Il precedente risultato permette di enunciare la seguente legge generale.

Teorema 1

Fra due distinti elementi di una stessa progressione aritmetica di ragione d, a_p e a_t, con $p > t$, vale la seguente relazione: $a_p = a_t + (p - t) \cdot d$.

Dimostrazione

Per la definizione di progressione aritmetica si ha: $a_p = a_{p-1} + d = a_{p-2} + d + d = \ldots = a_1 + (p - 1) \cdot d \quad (*)$
e anche $a_t = a_1 + (t - 1) \cdot d$, ma allora avremo anche $a_1 = a_t - (t - 1) \cdot d$, quindi sostituendo nella (*) si ha:
$a_p = a_t - (t - 1) \cdot d + (p - 1) \cdot d = a_t + (p - 1 - t + 1) \cdot d = a_t + (p - t) \cdot d$, che è proprio la tesi.

Vediamo un'applicazione.

Esempio 4

- Data la progressione in cui il primo termine $a_1 = 7$ e la ragione $d = 5$, il suo 15° elemento è, in base al teorema precedente: $a_{15} = 7 + (15 - 1) \cdot 5 = 77$.
- Nella progressione aritmetica in cui, $a_4 = 2$ e $d = 3$, $a_{12} = 2 + (12 - 4) \cdot 3 = 26$.

Vediamo un'altra questione.

Esempio 5

Di una progressione aritmetica conosciamo $a_1 = 3$, e $a_{15} = 23$, vogliamo determinare i rimanenti termini. Basta determinare la ragione, ma ciò si fa facilmente, tenendo conto del Teorema1, infatti: $a_{15} = a_1 + 14 \cdot d \Leftrightarrow 23 = 3 + 14d \Rightarrow d = 20/14 = 10/7$. Trovata la ragione, i termini mancanti sono: $\{3; 31/7; 41/7; ...; 151/7; 23\}$.

Anche il calcolo dei termini di una progressione aritmetica risulta facilitato.

Esempio 6

Vogliamo calcolare velocemente la somma dei primi 50 numeri interi consecutivi, che costituiscono una progressione aritmetica di ragione 1. Osserviamo che possiamo accoppiare i 50 numeri nel seguente modo:

$$(1 + 50) + (2 + 49) + (3 + 48) + \ldots + (25 + 26) = 51 + 51 + 51 + \ldots + 51.$$

Gli addendi sono tutti uguali e sono in numero di 25, quindi la somma cercata è $51 \cdot 25 = 1275$.

Tenuto conto del precedente esempio si ottiene il seguente risultato, che abbiamo già provato con l'induzione.

Teorema 2

La somma dei primi n numeri naturali è data da $1+2+...+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Dimostrazione

Distinguiamo due casi. n pari, quindi $n = 2k$, allora possiamo accoppiare gli addendi nel seguente modo: $1 + 2 + \ldots + (2k - 1) + 2k = (1 + 2k) + (3 + 2k - 1) + (3 + 2k - 2) + \ldots + (k + k + 1)$. Ottenendo così k addendi tutti uguali a $(2k + 1)$, quindi la somma è $k \cdot (2k + 1)$, ma $k = n/2$ e $2k + 1 = n + 1$, quindi la somma è $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$, che coincide con la tesi. Se n é dispari, cioè $n = 2k + 1$, accoppieremo lasciando il termine centrale: $1 + 2 + \ldots + 2k + (2k + 1) = (1 + 2k + 1) + (3 + 2k) + (3 + 2k - 1) + \ldots + (k + k + 2) + (k + 1)$. Stavolta abbiamo k addendi uguali a $2k + 2$, quindi la somma è $k \cdot (2k + 2) + (k + 1) = (k + 1) \cdot (2k + 1)$. E dato che si ha: $n = 2k + 1$, $k+1=\frac{n+1}{2}$, otteniamo ancora una volta la somma voluta.

Adesso enunciamo un risultato che riguarda la somma di alcuni termini consecutivi di una progressione aritmetica.

Teorema 3

In una progressione aritmetica di ragione d, la somma dei primi n elementi è data dalla formula:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n\cdot\frac{2a_1+(n-1)\cdot d}{2}=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$$

Dimostrazione

Vogliamo calcolare $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, se ricaviamo tutti gli addendi, tranne il primo, mediante il primo, avremo: $a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + [a_1 + (n - 1) \cdot d] = n \cdot a_1 + (1 + 2 + \ldots + n - 1) \cdot d$. Sostituiamo la somma in parentesi con il risultato del teorema 2: $n\cdot a_1+\frac{(n-1)\cdot n}{2}\cdot d=n\cdot\left[a_1+\frac{(n-1)\cdot d}{2}\right]=n\cdot\frac{2a_1+(n-1)\cdot d}{2}$

Del resto si ha: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$, quindi la precedente si può anche scrivere nel modo seguente: $\frac{a_1 + \left(a_1 + (n-1) \cdot d\right)}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Esempio 7

Data la progressione aritmetica di ragione 1/2, il cui quinto termine è 3/4, vogliamo determinare la somma dei termini che vanno dal terzo al decimo inclusi. La formula stabilita dal teorema precedente può applicarsi considerando a_5 come primo termine: $a_5 + a_6 + ... + a_{10} = 6 \cdot \frac{2a_5 + 5 \cdot d}{2} = 3 \cdot \left(2 \cdot \frac{3}{4} + 5 \cdot \frac{1}{2}\right) = 12$. Per la somma voluta ci serve $a_3 + a_4 = 2a_3 + d = 2 \cdot (a_5 - 2d) + d = 2a_5 - 3d = 2 \cdot 3/4 - 3 \cdot 1/2 = 0$. Quindi la somma è 12.

Verifiche

Dopo avere determinato quali fra le seguenti successioni sono progressioni aritmetiche, per quelle che lo sono calcolarne la ragione

Livello 1

1. a) $\{3n + 2\}$; b) $\{7n – 1\}$; c) $\{n^2 + 2\}$; d) $\{1 – 5n\}$; e) $\{n^3 – 1\}$; f) $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$

[a) 3; b) 7; c) No; d) –5; e) No; f) No]

Livello 2

2. a) $\{sin(n)\}$; b) $\{sin(n\cdot\pi)\}$; c) $\{n + sin(n\cdot\pi)\}$; d) $\{kn + m\}$; e) $\{cos(n\cdot\pi)\}$; f) $\{2n + (–1)^n\cdot cos(n\cdot\pi)\}$

[a) No; b) 0; c) 1; d) k; e) No; f) 2]

Lavoriamo insieme

Filippo firma un contratto con il suo datore di lavoro nel quale si stabilisce che il suo stipendio iniziale è di €1000,00 *mensili e ogni anno riceverà un aumento pari al* 2% *dello stipendio vigente. Quanto sarà il suo stipendio mensile dopo* 10 *anni, cioè l'undicesimo anno*?

Abbiamo a che fare con una progressione aritmetica? Vediamo i primi termini di questa successione: {1000; 1020; 1040,40} non è una progressione aritmetica, poiché la differenza fra due termini successivi non è costante, € 20,00 la prima differenza e € 20,40 la seconda. Quindi possiamo rispondere alla domanda o elencando tutti gli stipendi o cercando una regola generale. Vediamo il secondo procedimento. Si ha $\{1000; 1000 + 0{,}02 \cdot 1000 = 1000 \cdot (1{,}02) = 1020; 1020 + 0{,}02 \cdot 1020 = 1020 \cdot (1{,}02)= 1000 \cdot 1{,}02^2\}$, non è difficile capire che in generale, dopo n anni lo stipendio sarà € $1000{,}00 \cdot 1{,}02^n$, quindi dopo 10 anni sarà diventato € $1000{,}00 \cdot 1{,}02^{10} \approx$ € 1218,99. Se invece l'aumento fosse stato sempre del 2% del primo stipendio avremmo avuto una progressione aritmetica, di ragione 20 e quindi dopo 10 anni avremmo avuto € 1000,00 + € 20,00 · 10 = € 1200,00.

Livello 1

3. Giada firma un contratto con il suo datore di lavoro nel quale si stabilisce che il suo stipendio iniziale è di 1200 euro mensili e ogni anno riceverà un aumento pari al 3% dello stipendio iniziale. Quanto sarà il suo stipendio mensile dopo 20 anni, cioè il ventunesimo anno? [1920]
4. Con riferimento al precedente quesito, dopo quanti anni lo stipendio raggiungerebbe o supererebbe i 2000 euro la prima volta? Se raggiunge i 2000 euro dopo 15 anni, quanta percentuale di aumento si ha rispetto allo stipendio iniziale? [23; ≈ 4,45%]

Delle seguenti progressioni aritmetiche, sulla base dei dati, determinare quanto richiesto

5. a) $a_1 = 1$, $d = 4$, $a_{40} =$?; b) $a_{27} = 3/4$, $d = 2/3$, $a_{38} =$?; c) $a_6 = 4$, $a_{18} = 15$, $d =$?; d) $a_1 = 15$, $a_{10} = 27$, $d =$?
[a) 157; b) 97/12; c) 11/12; d) 4/3]
6. a) $a_{17} = 2/3$, $a_4 = –1/2$, $d =$?; b) $a_{23} = –3/4$, $d = 5/6$, $a_{47} =$?; c) $a_1 = 10$, $a_n = 21$, $d = 3$, $n =$?
[a) 7/78; b) 77/4; c) ∅]
7. a) $a_1 = 37$, $a_n = 13$, $d = –24/11$, $n =$?; b) $a_3 = 7$, $a_n = 24$, $d = 17/16$, $n =$?; c) $a_n = 14$, $a_{27} = 31$, $d = 17/12$, $n =$? [a) 12; b) 19; c) 14]
8. a) $a_{13} = 10$, $a_n = 26$, $d = 1/3$, $n =$?; b) $a_{10} = 21$, $a_n = 40$, $d = 2/3$, $n =$? [a) 39; b) ∅]

Livello 2

9. I numeri $\{x – 1, x + 1, 2x + 3\}$ sono in progressione aritmetica determinare x. [0]
10. I numeri $\{2x – 1, 3x + 1, 4x\}$ sono in progressione aritmetica determinare x. [∅]
11. Devo partire da A per arrivare a B, che distano 186 km e ho un motorino che con un pieno fa 38 *Km*. Quanti distributori almeno, devono esserci sulla strada AB ed a che distanza minima devono essere posti l'uno dall'altro, perché io possa essere sicuro di raggiungere B? [4; 37]
12. Un cerchio la cui area misura x è interno ad un altro cerchio di area $x + y$. Se il raggio del cerchio più grande misura 3 cm, e se $(x, y, x + y)$ formano una progressione aritmetica, quanto misura il raggio del cerchio più piccolo? $\left[\sqrt{3}\ cm\right]$

Lavoriamo insieme

Calcolare la somma di tutti i numeri naturali compresi fra 75 *e* 789 *e divisibili per* 11.

I numeri divisibili per 11 costituiscono, ovviamente, una progressione aritmetica di ragione 11, quindi dobbiamo calcolare la somma degli elementi di tale progressione. Ora $a_1 = 77 = 7 \cdot 11$, e $a_{65} = 781 = 71 \cdot 11$.

Quindi si ha: $S_{7,65} = \dfrac{(2\cdot 77 + 64\cdot 11)\cdot 65}{2} = 27885$.

***Livello* 1**

Calcolare la somma di tutti i numeri naturali compresi fra h e k e divisibili per n

13. a) (h=15, k = 684, n = 5); b) (h=35, k = 843, n = 3); c) (h=34, k = 789, n = 7); d) (h=75, k=789, n = 11) [a) 46565; b) 118665; c) 54180; d) 27885]

***Livello* 2**

La somma dei naturali divisibili per h compresi fra n e k è S, determinare n

14. a) (h = 4, k = 541, S = 28656); b) (h = 6, k = 123, S = 2520) [a) $64 \le n \le 67$; b) $210 \le n \le 215$]
15. a) (h = 8, k = 201, S = 3848); b) (h = 11, k = 530, S = 10153) [a) ∅; b) $243 \le n \le 263$]

Delle seguenti progressioni aritmetiche, sulla base dei dati, determinare quanto richiesto

***Livello* 2**

16. a) (S_{15} = 41, a_1 = 7, d = ?); b) (S_{23} = 17, a_1 = 2, d = ?) ; (S_{35} = 2140, a_1 = ?, d = 3) [a) –64/105; b) –29/253; c) 71/7]
17. a) (S_{18} = 315, a_1 = ?, d = 1/2; b) (S_n = 100, a_1 = 3, d = 2, n = ?); c) (S_n = 1593/5, a_1 = 4, d = 3/5, n = ?) [a) 53/4; b) ∅; c) 27]
18. a) (S_{20} = 248, a_1 = 2, a_{20} = ?); b) (S_{13} = 157, a_{13} = 5, a_1 = ?) [a) 114/5; b) 249/13]
19. a) (S_n = 312, a_1 = 4, a_n = 21, n = ?); b) (S_n = 503, a_1 = 7, a_n =747/37, n = ?) [a) ∅; b) 37]

Lavoriamo insieme

La somma dei primi dieci termini di una progressione aritmetica è quattro volte la somma dei primi cinque termini. Se a_1 = 3, *quanto vale* d?

Abbiamo $\sum_{k=1}^{10} a_k = 10\cdot\dfrac{2a_1 + 9\cdot d}{2} = 10a_1 + 45d = 30 + 45d$; mentre $\sum_{k=1}^{5} a_k = 5\cdot\dfrac{2a_1 + 4\cdot d}{2} = 5a_1 + 10d = 15 + 10d$,

quindi si ha: $30 + 45d = 4\cdot(15 + 10d) \Rightarrow 45d - 40d = 60 + 30 \Rightarrow 5d = 30 \Rightarrow d = 6$.

***Livello* 2**

20. Determinare la somma dei primi n numeri a) naturali pari; b) naturali dispari; c) multipli di 4; d) multipli di h. [a) $n^2 + n$; b) n^2; c) $2n^2 + 2n$; d) $h\cdot(n^2 + n)/2$]
21. Consideriamo la somma S dei primi n numeri pari, qual è il minimo n per cui $S > 10^6$? [1000]
22. Semplificare $\dfrac{2+4+6+...+2n}{1+3+5+...+(2n-1)}$. $\left[\dfrac{n+1}{n}\right]$
23. La somma dei primi $3n$ numeri naturali supera di 150 la somma dei primi n naturali. Quanto è n? [6]
24. $\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{6} a_k = 110, a_1 = 3, d = ?$; $\sum_{k=3}^{8} a_k + 152 = \sum_{k=6}^{12} a_k, d = 5, a_1 = ?$ [2; 3]

Date le due progressioni aritmetiche di cui sono dati il primo elemento e la ragione, determinare, se esiste, un numero naturale n, per cui valgono le date uguaglianze

25. $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k$. a) (a_1 = 2, d = 3); (b_1 = 5, d = 2);. b) (a_1 = 14, d = 1/2); (b_1 = 7, d = 3/4) [a) 7; b) 57]
26. $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2\cdot\sum_{k=1}^{n} b_k$ .a) (a_1 = 8, d = 1/4); (b_1 = 2, d = 1/3);. b) (a_1 = 15, d =1/4); (b_1 = 3, d =1/2) [a)∅; b)25]

Lavoriamo insieme

Date due progressioni aritmetiche $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$, *si costruisca una nuova progressione aritmetica sommando le due progressioni termine a termine*, $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n$. *Sapendo che si ha*: $a_1 = 25$, $b_1 = 75$, $a_{100} + b_{100} = 100$, *determinare la somma dei primi* 100 *termini della nuova progressione*.

Dobbiamo calcolare $\left(a_1+b_1\right)+\ldots+\left(a_{100}+b_{100}\right)=\dfrac{\left(a_1+b_1\right)+\left(a_{100}+b_{100}\right)}{2}\cdot 100=\dfrac{\left(25+75\right)+100}{2}\cdot 100=10000$.

Livello 3

27. La somma di tre numeri in progressione aritmetica è 30, mentre la somma dei loro quadrati è 372, determinare i tre numeri. Suggerimento: indicare i numeri con $(x - d, x, x + d)$. [{4, 10, 16}]
28. La somma di tre termini di una progressione aritmetica è 15/2, mentre la somma dei loro reciproci è 37/30, determinare i termini. [{2; 5/2; 3}]
29. Di una progressione aritmetica si sa che la somma dei primi 10 termini vale 100, mentre quella dei primi 100 termini vale 10. Quanto vale la somma dei primi 110 termini? [–110]
30. Provare che se $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n}\}$ è una progressione aritmetica decrescente di ragione d, allora si ha: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n - (a_{n+1} + \ldots + a_{2n}) = n^2 \cdot d$.
31. Provare che se $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n-1}\}$ è una progressione aritmetica decrescente di ragione d, allora si ha: $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n-1} = (2n - 1) \cdot a_n$.
32. Provare che se $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n}\}$ è una progressione aritmetica decrescente di ragione d, allora si ha: $n \cdot (a_1 + a_{2n}) = n \cdot (a_1 + a_{2n-1}) = \ldots = n \cdot (a_n + a_{n+1})$.
33. Provare che una successione $p(n)$ che verifica la seguente proprietà $p\left(n+1\right)=\dfrac{k\cdot p\left(n\right)+1}{k}$, con k numero reale non nullo è una progressione aritmetica. Quanto vale la ragione? [k]
34. Indichiamo con $p(n)$ una generica progressione aritmetica di 40 termini, con $a_1 = n$ e $d = 2n - 1$. Determinare la somma di tutti i 400 termini delle progressioni da $p(1)$ a $p(10)$. [80200]

Progressioni geometriche

Consideriamo un altro genere di successioni numeriche, affini alle progressioni aritmetiche.

Definizione 3

Diciamo **progressione geometrica** una successione numerica in cui il rapporto tra due elementi consecutivi è costante. In simboli $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, il rapporto costante q si chiama **ragione**.

Esempio 8

Le successive potenze di un numero, per esempio di 2, sono progressioni geometriche di ragione la base comune. Infatti la legge generale è $a_n = \{2^n\}$, quindi $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$.

Anche per le progressioni geometriche possiamo determinare semplici formule per determinare un elemento conoscendone un altro e la sua posizione.

Esempio 9

Data la progressione geometrica di ragione 1/2, il cui quarto elemento è 4, vogliamo trovare il suo decimo elemento. Cominciamo a costruire il quinto elemento a partire dal quarto: $4\cdot 1/2 = 2$. Il sesto è $2\cdot 1/2 = 1$. Ma è anche $4\cdot 1/2\cdot 1/2 = 4\cdot(1/2)^2$. Quindi facilmente si ha che il settimo elemento, a partire dal quarto è $4\cdot(1/2)^3$. E pertanto il decimo elemento sarà: $4\cdot(1/2)^6 = 1/16$.

Generalizzando l'esempio precedente otteniamo il seguente risultato.

Teorema 4

Dati due distinti elementi a_p e a_t di una stessa progressione geometrica di ragione q, si ha: $a_p = a_t \cdot q^{p-t}$.

Dimostrazione

Per esercizio sulla falsariga dell'esempio 9.

La precedente vale indipendentemente dalle relative posizioni dei due elementi.

Esempio 10

Con riferimento all'esempio 9: $a_{10} = a_4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-4} = \frac{1}{16}$, ma anche $a_4 = a_{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-10} = \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = \frac{1}{16} \cdot 2^6 = 4$.

Vediamo una questione analoga a quella già vista per le progressioni aritmetiche.

Esempio 11

Di una progressione geometrica conosciamo $a_1 = 2$ e $a_{10} = 15$, vogliamo determinare i rimanenti termini. Troviamo q: $a_{10} = a_1 \cdot \sqrt[9]{q} \Rightarrow 15 = 2 \cdot \sqrt[9]{q} \Rightarrow q = \left(\frac{15}{2}\right)^9$. Perciò si ha: $\left\{2, \frac{15^9}{2^8}, \sqrt{\frac{15^9}{2^7}}, \frac{15^3}{4}, \ldots, \sqrt[7]{\frac{15^9}{4}}, \sqrt[8]{\frac{15^9}{2}}, 15\right\}$.

Anche per le progressioni geometriche possiamo trovare semplici regole per il calcolo delle somme.

Esempio 12

Un'antica leggenda narra che l'inventore degli scacchi volesse essere ricompensato con 1 chicco di riso posto nella prima casella della scacchiera, con 2 nella seconda, 4 nella terza e così via sempre raddoppiando fino a 2^{63} chicchi nell'ultima (la 64[a]). Già questo numero è enorme, vale circa $9 \cdot 10^{18}$, ma vogliamo calcolare quanti chicchi in realtà erano richiesti. Dobbiamo cioè sommare i primi 64 termini della progressione geometrica di ragione 2 e primo termine 1, ossia di $S = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}$. Osserviamo che moltiplicando ciascun termine per 2 otteniamo il doppio della somma richiesta: $2S = 2 + 2^2 + \ldots + 2^{63} + 2^{64}$. Questa somma è molto simile alla precedente, differendo da essa solo per due addendi, pertanto se sottraiamo la prima dalla seconda troveremo facilmente la somma richiesta:

$$2S - S = (2 + 2^2 + \ldots + 2^{63} + 2^{64}) - (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}) \Rightarrow S = 2^{64} - 1 \approx 1,8 \cdot 10^{19}.$$

Che è effettivamente un numero di chicchi di riso enorme, che neanche il potentissimo re possedeva.

Con la stessa procedura mostrata nell'esempio precedente otteniamo il seguente risultato generale.

Teorema 5

La somma di k termini consecutivi di una progressione geometrica di ragione q, a partire da quello di posto p è: $S_{p,k} = \sum_{m=p}^{p+k} a_m = a_p \cdot \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}$.

Dimostrazione Per esercizio sulla falsariga dell'esempio 12.

Verifiche

Lavoriamo insieme

Un capitale di € 1500,00 è investito al tasso fisso di interesse annuo i = 3%, in modo però che l'interesse maturato non venga liquidato ma venga aggiunto al capitale iniziale. Questo si chiama regime di capitalizzazione composta. Qual è la progressione con cui aumenta il capitale?

Al primo anno il capitale diventa € (1500,00 + 1500,00 · 0,03) = € 1500,00 · 1,03.

Al secondo anno il capitale diventa € [1500,00 · 1,03 + (1500,00 · 1,03) · 0,03] = € 1500,00 · $1{,}03^2$.

Non è difficile capire che al terzo anno sarà € 1500,00 · $1{,}03^3$ e , in generale, all'anno n, € 1500,00 · $1{,}03^n$.

Quindi abbiamo a che fare proprio con una progressione geometrica di ragione 1,03 e di termine iniziale 1500,00.

Livello 1

1. Se in una progressione geometrica la ragione è negativa i suoi termini che segno hanno? [Alternato]
2. Con riferimento al problema del box Lavoriamo insieme, dopo 10 anni quanto varrà il capitale investito? [≈ € 2336,95]
3. Sempre con riferimento al problema del box Lavoriamo insieme, se il tasso di interesse fosse del 3,50%, quale sarebbe la risposta al precedente quesito? [≈ € 2513,02]
4. Un capitale di x euro è investito in regime di capitalizzazione composta per 12 anni, al tasso del 2,75%. Se il capitale finale maturato è di € 1661,74, quanto è x? [€ 1200,00]
5. Un capitale di 2000 euro è investito in regime di capitalizzazione composta per 20 anni, al tasso del x%. Se il capitale finale maturato è di € 4382,25, quanto è x? [4]
6. Dopo aver provato che i numeri $\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[6]{2}$ sono in progressione geometrica, determinare il quarto termine di tale progressione. [1]

Delle seguenti progressioni geometriche, sulla base dei dati, determinare quanto richiesto

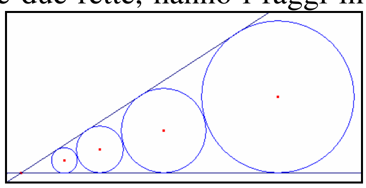
7. a) $a_1=3$, $q=1/3$, a_5 = ?; b) $a_1=12$, $q= -3/4$, a_6=?; c) $a_5 = 3/2$, $q = 1/2$, a_{12}=? [a) 1/27; b) –729/256; 3/256]
8. a) $a_3 = 2/5$, $a_7 = 5/8$, q = ?; b) $a_3 = 2/5$, $a_7 = -5/8$, q = ?; c) $a_1=2$, $a_{10}=120$, q=? $\left[\text{a) } \pm\frac{\sqrt{5}}{2}; \text{b) } \varnothing; \text{c) } \sqrt[9]{60}\right]$
9. d) $a_7 = 3/2$, $q = -1/4$, a_2 = ? d) $a_1 = 32/27$, $a_n = 81/4$, $q = 3/2$, n = ? [a) –1536; b) 8]

Livello 2

10. Affinché i termini di una progressione geometrica siano ordinati in modo crescente, quanto deve essere la ragione? [Maggiore di 1]
11. Affinché i termini di una progressione geometrica siano ordinati in modo decrescente, quanto deve valere la ragione? [Positiva e minore di 1]
12. Fra i numeri 8 e 5832 sono inseriti cinque numeri che con i precedenti formano una progressione geometrica, quanto vale il quinto di questi numeri? [±1944]
13. Dati i numeri 20, 50, 100 aggiungiamo a ciascuno di essi un uguale numero, ottenendo così una progressione geometrica. Quanto vale l'addendo costante? Quanto la ragione? [25; 5/3]

Livello 3

14. Provare che le circonferenze in figura, che sono tangenti fra loro e con le due rette, hanno i raggi in



progressione geometrica.
15. Dimostrare che se il secondo termine di una progressione geometrica il cui primo termine è 1, è un quadrato o un cubo, allora tutti gli altri termini sono quadrati o cubi.
16. Dimostrare che se il secondo termine di una progressione geometrica il cui primo termine è 1, non è un quadrato, allora i soli quadrati della progressione possono essere quelli di posto dispari.
17. Dimostrare che se il secondo termine di una progressione geometrica il cui primo termine è 1, non è un cubo, allora i soli cubi della progressione possono essere quelli che occupano i posti 4, 7, 10, …

Lavoriamo insieme

In una progressione geometrica la differenza fra il quinto ed il quarto termine è 576 e la differenza fra il secondo ed il primo termine è 9. Quanto vale la somma dei primi cinque termini?

Le condizioni del problema equivalgono al sistema seguente: $\begin{cases} a_5 - a_4 = 576 \\ a_2 - a_1 = 9 \end{cases}$, che ha 4 incognite, perciò riconduciamo tutto a due sole incognite: $\begin{cases} a_4 \cdot q - a_4 = 576 \\ a_1 \cdot q - a_1 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_4 \cdot (q-1) = 576 \\ a_1 \cdot (q-1) = 9 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_4}{a_1} = \frac{576}{9} \Rightarrow \frac{a_4}{a_1} = 64$.

D'altro canto sappiamo pure che $a_4 = a_1 \cdot q^3$, quindi avremo: $\frac{a_4}{a_1} = 64 \Rightarrow \frac{a_1 \cdot q^3}{a_1} = 64 \Rightarrow q^3 = 64 \Rightarrow q = 4$.

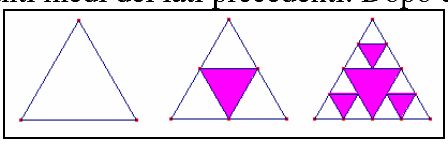
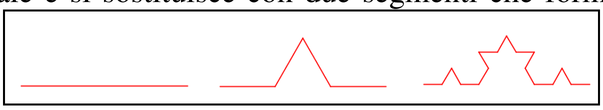
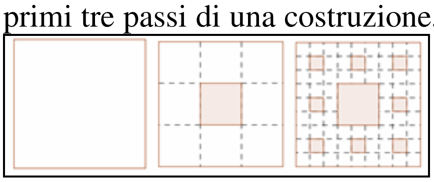
Quindi $a_1 \cdot (q-1) = 9 \Rightarrow a_1 = \frac{9}{4-1} = 3$. Si ha perciò: $\sum_{k=1}^{5} a_k = a_1 \cdot \frac{q^5 - 1}{q-1} = 3 \cdot \frac{4^5 - 1}{4-1} = 4^5 - 1 = 1023$.

Livello 2

Delle seguenti progressioni geometriche, sulla base dei dati, determinare quanto richiesto

18. a) $a_1 = -1/2$, $q = 2$, $S_8 = ?$; b) $a_1 = -1/2$, $q = -2$, $S_8 = ?$; c) $a_5 = 2$, $q = 1/3$, $S_7 = ?$ [a) –255/2; b) 85/2; c) 2186/9]
19. a) $a_4 = 3/2$, $q = -1/3$, $S_{10} = ?$; b) $q = 3$, $S_4 = 80/9$, $a_1 = ?$; c) $q = -1/2$, $S_7 = 12/5$, $a_1 = ?$ [a) –7381/243; b) 2/9; c) 768/215]
20. a) $a_1 = -1/2$, $q = -1/2$, $S_n = 171/512$, $n = ?$; b) $a_1 = -2/3$, $q = 3/2$, $S_n = 665/48$, $n = ?$ [a) 9 ; 6]
21. a) $a_2 = 4$, $q = 1/2$, $S_n = 127/8$, $n = ?$; b) $a_4 = 4/3$, $q = 1/3$, $S_n = 484/27$, $n = ?$ [a) 6; ∅]
22. Determinare una formula per calcolare la somma delle prime n potenze di 2. [$2^{n+1} - 1$]
23. Determinare una formula per calcolare la somma delle prime n potenze di k. $\left[\frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}\right]$
24. In una progressione geometrica formata da sei termini la somma fra i termini di posto dispari è 84 e quella fra i rimanenti termini è 168, determinare tutti i termini. [{4, 8, 16, 32, 64, 128}]

Livello 3

25. In una progressione geometrica la somma dei primi due termini è 5, mentre la somma dei primi sei termini è 655/81, quanto è la somma dei termini dal terzo al settimo? [1100/243 ∨ 844/243]
26. In figura ci sono i primi tre passi di una costruzione, nota come triangolo di Sierpinski, ottenuta costruendo triangoli equilateri i cui estremi sono punti medi dei lati precedenti. Dopo cinque passi quanta  parte del triangolo originale è non colorata? [81/256]
27. In figura ci sono i primi tre passi di una costruzione, nota come curva fiocco di neve di von Koch, ottenuta a partire da un segmento lungo una unità, che viene diviso in 3 parti uguali, quindi si elimina la parte centrale e si sostituisce con due segmenti che formano con il segmento eliminato un triangolo equilatero.  Se continuiamo questa costruzione per altri 7 passi, quanto sarà lunga la spezzata finale? [$(4/3)^9$]
28. In figura ci sono i primi tre passi di una costruzione, nota come tappeto di Sierpinski, ottenuta a partire da un quadrato,  che viene diviso in 9 quadrati uguali e poi si elimina il quadrato centrale, e così via. Se continuiamo questa costruzione per un totale di 8 passi, quanta sarà l'area eliminata? [$2^{21}/3^{14}$]

Risolvere i seguenti problemi presenti in alcuni antichi testi matematici

29. (Zhang Qiujian Suan Jing) Un cavallo ha percorso 700 miglia in 7 giorni, dimezzando la sua velocità ogni giorno. Quante miglia ha percorso ogni giorno? [≈ 352,76]
30. (Fibonacci, 1202) Un uomo possiede inizialmente 100 denari e spende ogni giorno 1/10 di ciò che ha. Con quanti denari rimane dopo 12 giorni? [≈ 28,24]
31. (Chuquet, 1484) Un uomo percorre 1, 3, 9, ... leghe in giorni successivi. Continuando a questo ritmo, quante leghe percorrerà in 5 giorni e mezzo? [242,5]
32. (Chuquet, 1484) Una botte contiene una quantità di vino pari a 9,5 barili. Il suo contenuto viene trasferito nei barili in modo tale che: il primo barile si riempie in 1 ora; il secondo barile si riempie in 2 ore; il terzo barile si riempie in 4 ore; e così via, raddoppiando ogni volta il tempo. Quante ore sono necessarie per svuotare la botte? [≈ 723,077]
33. (Ozanam, 1778) Un villaggio ha 210 persone; ogni 25 anni, la popolazione triplica. Quante persone ci saranno nel villaggio dopo 225 anni? [1377810]

La sfida

Qui riportiamo alcuni quesiti particolarmente impegnativi.

1. Definiamo differenze finite di ordine k di una successione a_n le seguenti quantità: $\Delta^1(a_n) = a_{n+1} - a_n$, $\Delta^2(a_n) = \Delta^1(a_{n+1}) - \Delta^1(a_n)$, ..., $\Delta^k(a_n) = \Delta^{\kappa-1}(a_{n+1}) - \Delta^{\kappa-1}(a_n)$. dimostrare che se a_n è un polinomio di grado k, allora tutte le differenze finite di ordine maggiore di k sono nulle.
2. Determinare la somma dei primi n numeri naturali sapendo che è un quadrato perfetto minore di 100. [Sono possibili tre soluzioni: 1, 8, 49]
3. Determinare il minimo n per cui la somma dei primi n numeri pari sia maggiore di k, con k numero intero fissato. $\left[n > \left\lceil \frac{-1+\sqrt{4k+1}}{2} \right\rceil\right]$
4. Determinare una regola determinare quanta parte del triangolo di Sierpinski (vedi esercizio 27) è non colorata dopo n passi. $[(3/4)^{n-1}]$
5. Determinare una regola per calcolare la lunghezza della curva fiocco di neve di von Koch (vedi esercizio 28), dopo n passi. $[(4/3)^{n-1}]$
6. Determinare una regola determinare quanta parte del tappeto di Sierpinski (vedi esercizio 27) è eliminata, dopo n passi $[(4/3)^{n-1}]$
7. Dimostrare che un numero del tipo $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ è un numero perfetto se $(2^n - 1)$ è un numero primo. Ricordiamo che un numero si dice perfetto se è uguale alla somma di tutti i suoi divisori escluso il numero stesso. Per esempio $6 = 1 + 2 + 3$, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

Temi assegnati agli esami di stato

I seguenti sono adattamenti dei temi assegnati in alcuni esami di stato degli anni scorsi, abbiamo variato solo la richiesta del problema, ma non i dati né lo spirito dei problemi
I temi completi dei Licei Scientifici per gli ultimi anni sono scaricabili, con soluzione, dal sito
http://matdidattica.altervista.org/esamidistato.htm

1. (Liceo scientifico PNI 1994/95) In un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy è dato il punto $A_0 \equiv (1, 0)$. Si costruisca il triangolo rettangolo OA_oA_1 avente il vertice A_1 sull'asse delle ordinate e sia α l'angolo $O\hat{A}_0A_1$. Si conduca per A_1 la perpendicolare alla retta A_oA_1 che incontra l'asse delle ascisse in A_2; si conduca per A_2 la perpendicolare alla retta A_1A_2 che incontra l'asse delle ordinate in A_3 e così via, ottenendo una spezzata $A_oA_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n$ i cui vertici di indice dispari appartengono all'asse delle ordinate e quelli di indice pari all'asse delle ascisse. Il candidato dimostri che le lunghezze dei lati della spezzata sono in progressione geometrica e calcoli la lunghezza l_n della spezzata. $\left[l_n = \frac{1-\left[tan(\alpha)\right]^n}{cos(\alpha)-sin(\alpha)} \right]$
2. (Istituto magistrale PNI 1994/95) Su una semiretta di origine A_0 è dato il segmento $A_0 A_1$ di lunghezza 2. Si considerino i segmenti adiacenti A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{n-1} A_n$ tali che il rapporto tra ogni segmento e il precedente sia k. Il candidato dimostri che le aree dei cerchi aventi per diametro i suddetti segmenti sono i termini di una progressione geometrica e calcoli l'area S_n della parte di piano delimitata dalla successione delle prime n circonferenze. $\left[\pi \cdot \frac{k^n-1}{k-1} \right]$

Quesiti assegnati in gare nazionali e internazionali

Ciascun simbolo si riferisce a una gara matematica.
AHSME = Annual High School Mathematics Examination
HSMC = A&M University High School Mathematics Contest
MT = Mathematics Teacher, rivista della NCTM
RICE = Rice University Mathematics Tournament

Lavoriamo insieme

Consideriamo un quesito assegnato agli HSMC del 2006.
Sia S la somma dei primi n termini della progressione 8, 12, 16, . . . *Sia T la somma dei primi n termini della progressione* 17, 19, 21, . . . *Supponiamo* $n \neq 0$. *Per quali valori di n si ha S = T*?
La prima progressione è formata dai multipli di 4 a partire da 4 · 2, così il termine n–esimo è $4\cdot(n + 1)$. Quindi $S = 8 + 12 + \ldots + 4n + 4(n + 1) = 4 \cdot [2 + 3 + \ldots + n + (n + 1)] = 4 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + n) + 4n = \cancel{4}^2 \cdot \frac{n\cdot(n+1)}{\cancel{2}} + 4n = 2n^2 + 6n$. La seconda progressione è formata dai dispari a partire da 17 = 2 · 9 – 1, così e il termine n–esimo è $2 \cdot (9 + n - 1) - 1 = 2 \cdot (n + 8) - 1$. Quindi $T = 17 + 19 + \ldots + [2(n + 8) - 1] = (2 \cdot 9 - 1) + (2 \cdot 10 - 1) + \ldots + [2 \cdot (n + 8) - 1] = 2 \cdot [9 + 10 + \ldots + (n + 8)] - n = 2 \cdot [1 + 2 + \ldots + (n + 8)] - 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 8) - n = \cancel{2} \cdot \frac{(n+8)\cdot(n+9)}{\cancel{2}} - \cancel{2} \cdot \frac{8\cdot 9}{\cancel{2}} - n = n^2 + 17n + 72 - 72 - n = n^2 + 16n$. Allora $S = T$ implica $2n^2 + 6n = n^2 + 16n \Rightarrow n^2 - 10n = 0 \Rightarrow n = 10$. Ovviamente la soluzione nulla non si accetta.

1. (AHSME 1958) Il primo termine di una successione di numeri naturali consecutivi è $k^2 + 1$, determinare la somma dei primi $2k + 1$ elementi di tale successione. $[k^3 + (k + 1)^3]$
2. (AHSME 1959) Diciamo progressione armonica una successione di numeri i cui reciproci sono in progressione aritmetica, per esempio $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$. I primi tre termini di una progressione armonica sono 3, 4, 6. Determinare la somma dei primi quattro termini di tale progressione. [25]
3. (AHSME 1960) Data una progressione aritmetica di primo termine a e ragione d, sommiamo i suoi

primi n termini, i suoi primi $2n$ termini e i suoi primi $3n$ termini. Indichiamo con s_1, s_2 e s_3 le tre somme. Quanto vale $s_3 - s_2 - s_1$? [$2n^2d$]

4. (AHSME 1961) La somma dei primi 50 termini di una progressione aritmetica è 200, la somma dei successivi 50 termini è 2700. Quanto vale a_1? [–20,5]
5. (AHSME 1962) Tutti gli angoli interni di un pentagono sono in progressione aritmetica, quale fra i seguenti valori misura certamente uno degli angoli? A) 108° B) 90° C) 72° D) 54° E) 36° [A]
6. (AHSME 1964) La somma di n termini di una progressione aritmetica di ragione 2 è 53, se a_1 è intero e $n > 1$, quali sono i possibili valori che può assumere n? [3, 9, 17, 51, 153]
7. (AHSME 1965) Comunque consideriamo n termini di una progressione aritmetica, sommano $2n + 3n^2$. determinare quanto vale il termine di posto r. [$6r - 1$]
8. (AHSME 1966) Date le progressioni {8, 12, 16, ...} e {17, 19, 21, ...}, per quali valori di n le loro somme sono uguali? [10]
9. (AHSME 1968) Gli angoli interni di un poligono convesso sono in progressione aritmetica di ragione 5°, se l'angolo maggiore è 160°, quanti lati ha il poligono? [9]
10. (AHSME 1973) Una progressione aritmetica ha un numero pari di termini, la somma dei termini di posto dispari è 24, quella di quelli di posto pari è 30. Sapendo che la differenza fra l'ultimo e il primo termine è 10,5, determinare quanti sono i termini. [8]
11. (AHSME 1976) Le misure degli angoli interni di un poligono convesso sono in progressione aritmetica. Se l'angolo più piccolo misura 100° ed il più grande 140°, quanti lati ha il poligono? Suggerimento: si ricordi che in un poligono convesso con n lati, la misura della somma degli angoli interni uguaglia quella di $n - 2$ angoli piatti. [6]
12. (AHSME 1978){x, a_1, a_2, y} e {x, b_1, b_2, b_3, y} sono due progressioni aritmetiche. Quanto vale $\frac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1}$? [4/3]
13. (AHSME 1981) Un triangolo rettangolo ha i lati in progressione aritmetica, quale dei seguenti numeri può essere la misura di uno dei lati? A) 22 B) 58 C) 81 D) 91 E) 361 [C]
14. (AHSME 1982) $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$, $n > 3$, sono in progressione aritmetica, determinare n. [7]
15. (AHSME 1987) a, x, b e $2x$ sono in progressione aritmetica, determinare a/b. [1/3]
16. (AHSME 1991) Gli angoli interni di un esagono convesso sono in progressione aritmetica, quale fra i seguenti numeri può rappresentare la misura dell'angolo maggiore? [D]
 A) 165° B) 197° C) 170° D) 175° E) 179°
17. (AHSME 1993) In una progressione aritmetica si ha: $a_4 + a_7 + a_{10} = 17$ e $a_4 + a_5 + ... + a_{14} = 77$, sapendo che $a_k = 13$, determinare k. [18]
18. (AHSME 1997) Quale dei seguenti interi può essere la somma di 100 numeri interi consecutivi? [A)]
 A) 1627384950 B) 2345678910 C) 3579111300 D) 4692581470 E) 5815937260
19. (HSMC 2006) La somma di 49 interi consecutivi è 74. Qual è il primo di essi? [25]
20. (HSMC 2007) Determinare la somma dei primi 19 termini di una progressione aritmetica sapendo che $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$. [1064]

Lavoriamo insieme

Consideriamo un quesito assegnato nel 2002 agli HSMC.

Tre numeri interi sono in progressione geometrica. Sappiamo che la loro somma è 21, *mentre la somma dei loro reciproci è* $\frac{7}{12}$, *quanto vale il maggiore di essi*?

Indichiamo i tre numeri con x, $x \cdot r$, $x \cdot r^2$. I dati in nostro possesso si traducono nel seguente sistema di equazioni: $\begin{cases} x + x \cdot r + x \cdot r^2 = 21 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{x \cdot r} + \frac{1}{x \cdot r^2} = \frac{7}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot (1 + r + r^2) = 21 \\ \frac{1}{x} \cdot \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\right) = \frac{7}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot (1 + r + r^2) = 21 \\ \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1 + r + r^2}{r^2}\right) = \frac{7}{12} \end{cases}$. Moltiplichiamo termine a termine: $\cancel{x} \cdot (1 + r + r^2) \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \left(\frac{1 + r + r^2}{r^2}\right) = \cancel{21}^{7} \cdot \frac{7}{\cancel{12}_{4}} \Rightarrow \left(\frac{1 + r + r^2}{r}\right)^2 = \frac{49}{4} \Rightarrow \left(\frac{1}{r} + 1 + r\right)^2 = \frac{49}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}+1+r=\pm\frac{7}{2} \Rightarrow 2r^2+(2\mp 7)\cdot r+2=0 \Rightarrow \prec \begin{array}{l} 2r^2-5r+2=0 \Rightarrow r=\frac{5\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{5\pm 3}{4}=\prec \begin{array}{l} 2 \\ \frac{1}{2} \end{array} \\ 2r^2+9r+2=0 \Rightarrow r=\frac{-9\pm\sqrt{72}}{4} \end{array}$$

La seconda equazione ha soluzioni non razionali, quindi non accettabili, poiché i termini della progressione sono interi. Quindi ci sono due progressioni, che in realtà sono la stessa progressione, ordinata in modo diverso. Cioè $x\cdot(1+2+4)=21 \vee x\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=21 \Rightarrow x=3 \vee x=12$ e le progressioni sono: 3, 6, 12 o 12, 6, 3. In ogni caso il massimo è 12.

21. (AHSME 1953) In una progressione geometrica di termini positivi, ogni termine è uguale alla somma dei due termini che lo seguono, quanto vale la ragione? $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$
22. (AHSME 1955) Dimostrare che se l'equazione $ax^2 + 2bx + c = 0$ ha due soluzioni reali e coincidenti, allora a, b e c sono in progressione geometrica.
23. (AHSME 1955) Consideriamo una progressione geometrica il cui primo termine e la ragione non sono nulli e una progressione aritmetica il cui primo termine è 0. Costruiamo una nuova successione sommando termine a termine gli elementi delle dette progressioni. Quanto vale la somma dei primi dieci termini di questa nuova successione, sapendo che i suoi primi 3 termini sono {1, 1, 2}? [978]
24. (AHSME 1963) Tre numeri non nulli, $\{a, b, c\}$ formano una progressione aritmetica. Sapendo che $\{a + 1, b, c\}$ e $\{a, b, c + 2\}$ sono progressioni geometriche, determinare b. [12]
25. (AHSME 1971) Moltiplichiamo i primi n elementi della progressione $\left\{10^{\frac{1}{11}}, 10^{\frac{2}{11}}, \ldots\right\}$. Quanti dobbiamo moltiplicarne almeno affinché il prodotto superi 100000? [11]
26. (AHSME 1972) Trovare due numeri a e b in modo tale che $\{3, a, b\}$ sia una progressione geometrica, e $\{a, b, 9\}$ una progressione aritmetica. [4,5; 6,75]
27. (AHSME 1972) Sia P il prodotto dei primi n termini di una progressione geometrica, S la loro somma e S' la somma dei loro reciproci. Esprimere P in funzione di S, S' e n. $[(S \cdot S')^{n-2}]$
28. (AHSME 1973) a, b, c sono tre numeri in progressione geometrica, con $1 < a < b < c$, n è un numero naturale maggiore di 1. Consideriamo $log_a(n)$, $log_b(n)$, $log_c(n)$, quale delle seguenti affermazioni è corretta? Giustificare le risposte. [C]
A) formano una progressione geometrica B) formano una progressione aritmetica
C) i reciproci formano una progressione aritmetica D) il secondo termine è n–esima potenza del primo e il terzo è n–esima potenza del secondo.
29. (AHSME 1974) In una progressione geometrica $a_5 - a_4 = 576$ e $a_2 - a_1 = 9$. Quanto vale la somma dei primi cinque termini? [1023]
30. (AHSME 1977) Consideriamo una successione di numeri positivi, $\{a_n\}$ che verificano la seguente proprietà $a_{n+2} = a_n \cdot a_{n+1}$. Quando a_n è una progressione geometrica? [Solo se $a_1 = a_2 = 1$]
31. (AHSME 1981) In una progressione geometrica la somma dei primi due termini è 7, mentre la somma dei primi sei termini è 91, quanto vale la somma dei primi quattro termini? [28]
32. (AHSME 1994) x, y, z sono in progressione geometrica di ragione r; x, $2y$, $3z$ sono in progressione aritmetica. Quanto vale r? [1/3]
33. (Rice 2006) Il quinto termine di una progressione geometrica è 5!, il sesto è 6!. Qual è il quarto termine? [0,999999]

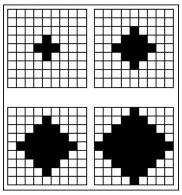
Questions in English

Working together

This is a question assigned at HSMC in 2001. *If* x, $2x + 2$, $3x + 3$, … *are nonzero terms in a geometric progression* (*geometric sequence*), *what is the fourth term*?

We know that $\frac{2x+2}{x}=\frac{3x+3}{2x+2}\Rightarrow\frac{2\cdot(x+1)}{x}=\frac{3\cdot(x+1)}{2\cdot(x+1)}\Rightarrow\frac{2\cdot(x+1)}{x}=\frac{3}{2}$. Hence the ratio is 3/2 and the fourth term is $3\cdot(x+1)\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{2}x+\frac{9}{2}$.

In effect we can be more precise $\frac{2\cdot(x+1)}{x}=\frac{3}{2}\Rightarrow 4x+4=3x\Rightarrow x=-4$, so the terms are: –4, –6, –9, –27/2.

34. (HSMC 1999) The sum of n terms in an arithmetic progression is 153, and the common difference is 2. If the first term is an integer, and $n > 1$, then what is the number of all possible values for n? [5]
35. (AHSME 1999) Define a sequence of real numbers a_1, a_2, a_3, by $a_1 = 1$ and $a_{n+1}^3=99\cdot a_n^3$ for all $n \geq 1$. Then a_{100} equals? [99^{33}]
36. (HSMC 1999) If 3 + 7 + 11 + … + 87 = 15k , find k . [66]
37. (HSMC 2001) Consider the sequence in figure.  If this sequence continues, how many shaded squares will there be at stage 10? [221]
38. (HSMC 2002) What is the smallest positive integer $n > 1$ such that 1 + 2 + 3 + … + n is divisible by 9? [8]

Working together

This is a question assigned at HSMC in 2003. *The sum of the third and fourth terms in a sequence of consecutive integers is* 47. *What is the sum of the first five terms of the sequence?*

Let $\{x, x + 1, x + 2, x + 3; \ldots\}$ be a sequence of consecutive integers. Now $(x + 2) + (x + 3) = 47 \Rightarrow 2x+ 5 = 47 \Rightarrow 2x = 42 \Rightarrow x = 21$ and we have that $x + (x + 1) + (x + 2)+(x + 3)+(x + 4) = 5x + 10 = 5(21) + 10 = 115$.

39. (HSMC 2005) The sum of the sixth and the ninth terms of an arithmetic sequence is 20, and their product is 64. Find the tenth term if the first term is negative. [20]
40. (HSMC 2007) Find the sum of the first 19 terms of an arithmetic sequence a_1, a_2, a_3, ... if it is known that $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$. [1064]
41. (HSMC 2006) Find all possible first terms of the geometric sequence if the sum and the product of its first three terms are equal to 63 and 1728 respectively. [3 o 48]
42. (HSMC 2006) Three numbers, with the third one being 12, form a geometric sequence. If the third number were 9, the numbers would form an arithmetic sequence. Find the first two numbers. (Find all possible answers.) [(3, 6) o (27, 18)]
43. (HSMC 2007) If the product of three numbers in geometric progression is 216 and their sum is 19, find the largest of the three numbers. [9]
44. (HSMC2008) The numbers $ln(a^3 \cdot b^7)$, $ln(a^5 \cdot b^{12})$, $ln(a^8 \cdot b^{15})$, are the first three terms of an arithmetic sequence whose 12^{th} term is $ln(b^n)$,. What is n? [112]

Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1. (Odontoiatria 1997) In una progressione geometrica il primo elemento è 2 e il sesto è 0,0625. Il quinto valore della progressione è: A) 0,125 B) 0,0125 C) 0,5 D) 0,05 E) nessuno dei precedenti è corretto
2. (Odontoiatria 1998) Gli angoli di un triangolo sono in progressione aritmetica, e il maggiore e' il doppio del minore; i valori in gradi degli angoli sono:
A) 20, 30, 40 B) 40, 50, 80 C) 60, 90, 120 D) 40, 60, 80 E) 45, 70, 95.
3. (Scuola Superiore di Catania) Dimostrare che se tre numeri reali (diversi tra loro) formano una progressione aritmetica, allora quei tre numeri, nello stesso ordine, non possono formare una progressione geometrica. Trovare poi tre numeri reali relativi (diversi tra loro e da 0) in progressione aritmetica che, in un ordine diverso, formino una progressione geometrica.
4. (Corso di laurea in Informatica, Udine 2009) Fra le seguenti terne di numeri ce n'è una ed una sola formata da numeri in progressione geometrica.
A) $\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{4}{15}$ B) $\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{9}{16}$ C) $\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{3}{25}$ D) $\frac{1}{5},\frac{2}{15},\frac{3}{20}$

Per svolgere un Test finale di* 10 *quesiti, collegati al sito
http://mathinterattiva.altervista.org/volume_4_8.htm

Risposte Test di ammissione alle Università o alle Accademie militari

1	**2**	**3**	**4**
A	D	[(–2a, a, 4a) pgr. aritm. d = 3a. (a, –2a, 4a), pgr. geom. q = –2	C