Corrispondenze fra insiemi B

B.1 Prime definizioni

Ti proponiamo un semplice esercizio per introdurre l'argomento che qui vogliamo trattare.

Quando camminiamo per la strada della nostra città, vediamo tanti segnali lungo il percorso che, attraverso simboli, ci danno informazioni sul comportamento corretto che dobbiamo tenere. Sia $A = \{\text{segnali stradali edlla figura sotto}\}$ e $B = \{\text{descrizione del segnale}\}$. Collega con una freccia un segnale stradale con il suo significato.

Curva pericolosa a destra

Divieto di transito

Divieto di sosta

Fermarsi e dare precedenza

Attraversamento ciclabile

Definizione B.1. Si chiama *corrispondenza* **K** *fra due insiemi* A e B, il predicato binario avente come soggetto un elemento di A e come complemento un elemento di B. Essa definisce un sottoinsieme $G_{\mathbf{K}}$ del prodotto cartesiano $A \times B$, costituito dalle coppie ordinate di elementi corrispondenti:

$$G_{\mathbf{K}} = \{(a, b) \in A \times B / a\mathbf{K}b\}.$$

❑ **Osservazione** Nel capitolo precedente abbiamo chiamato relazione un predicato binario che si riferisce a due elementi dello stesso insieme; la differenza di terminologia sta semplicemente nella sottolineatura del fatto che si considerano appartenenti allo stesso insieme oppure appartenenti a due insiemi diversi il soggetto e il complemento del predicato binario enunciato. A seconda del contesto in cui analizziamo un predicato binario, parleremo di corrispondenza o di relazione. Nelle pagine che seguono tratteremo di corrispondenze, mettendo in luce le loro caratteristiche.

Definizione B.2. Si chiama *dominio* $\mathcal{D}$ di una corrispondenza l'insieme A in cui si trova il soggetto della proposizione vera costruita con il predicato **K**; *codominio* $\mathcal{C}$ l'insieme degli elementi che costituiscono il complemento della stessa proposizione.

Per indicare in linguaggio matematico che si è stabilita una corrispondenza tra due insiemi A e B scriviamo:

$$\mathbf{K}: A \to B \text{ predicato}, \qquad \text{oppure} \qquad \mathbf{K}: A \xrightarrow{\mathbf{K}\text{: predicato}} B.$$

Formalizziamo il primo esercizio di questo capitolo:

$$\mathbf{K}: A \to B \text{ significare}, \qquad \text{oppure} \qquad \mathbf{K}: A \xrightarrow{\mathbf{K}\text{: significare}} B, \qquad \text{dominio } A\text{; codominio } B.$$

Definizione B.3. Definita una corrispondenza $\mathbf{K}: A \to B$, nella coppia (a, b) di elementi corrispondenti, b si chiama *immagine di* a nella corrispondenza $\mathbf{K}$. L'insieme delle immagini degli elementi del dominio è un sottoinsieme del codominio chiamato *insieme immagine*. Verrà indicato con IM. e IM. $\subseteq \mathcal{C}$.

B.2 Rappresentazione di una corrispondenza

B.2.1 Rappresentare una corrispondenza con un grafico cartesiano

Esempio B.1. Consideriamo gli insiemi $A = \{$Parigi, Roma, Atene$\}$ e $B = \{$Italia, Francia, Grecia$\}$. Il prodotto cartesiano $A \times B$ è rappresentato col grafico cartesiano della figura B.1 (i suoi elementi sono le crocette). Esso è formato dalle 9 coppie ordinate aventi come primo elemento una città (elemento di A) e come secondo elemento uno stato d'Europa (elemento di B).

Il predicato binario **K**: essere la capitale di, introdotto nell'insieme $A \times B$, determina il sottoinsieme $G_{\mathbf{K}}$ i cui elementi sono le coppie (Parigi, Francia); (Roma, Italia);(Atene, Grecia). Il dominio della corrispondenza è $\mathcal{D} = \{$Parigi, Roma, Atene$\}$ e il codominio è $\mathcal{C} = \{$Italia, Francia, Grecia$\}$ e IM. $= \mathcal{C}$.

✍ *Esercizi proposti:* B.1, B.2

B.2.2 Rappresentare una corrispondenza con un grafico sagittale

Esempio B.2. Nella figura B.2 sono rappresentati gli insiemi A e B con diagrammi Eulero-Venn. Collegando con una freccia, ciascun elemento di A con la sua forma, possiamo rappresentare

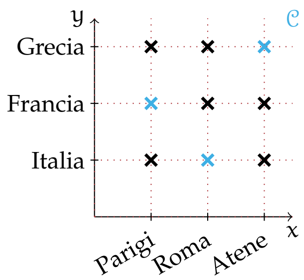


FIGURA B.1: Esempio B.1.

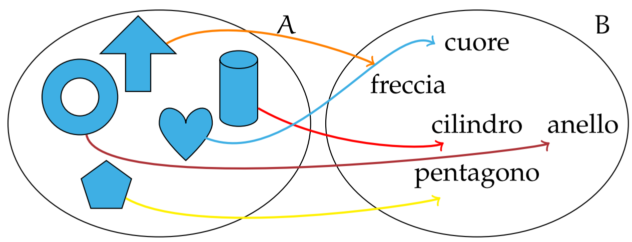


FIGURA B.2: Esempio B.2.

con un grafico sagittale la corrispondenza **K**: "essere di forma", tra gli insiemi assegnati. $\mathcal{A}$ risulta essere il dominio e $\mathcal{B}$ il codominio della corrispondenza; IM. $= \mathcal{C}$. La freccia che collega ogni elemento del dominio con la sua immagine rappresenta il predicato **K**.

✍ *Esercizio proposto:* B.3

Esempio B.3. Consideriamo gli insiemi $\mathcal{R} = \{$regioni d'Italia$\}$ e $\mathcal{M} = \{$Ligure, Ionio, Tirreno, Adriatico$\}$ e la corrispondenza $\mathbf{K} : \mathcal{R} \to \mathcal{M}$ essere bagnata/o da; $\mathcal{R}$ è il dominio e $\mathcal{M}$ il codominio di questa corrispondenza.

L'insieme $G_\mathbf{K}$ delle coppie ordinate aventi come primo elemento una regione e come secondo elemento un mare è: $G_\mathbf{K} = \{$(Liguria, Ligure); (Toscana, Tirreno); (Lazio, Tirreno); (Campania, Tirreno); (Basilicata, Tirreno); (Calabria, Tirreno); (Calabria, Ionio); (Puglia, Ionio); (Puglia, Adriatico); (Molise, Adriatico); (Abruzzo, Adriatico); (Emilia-Romagna, Adriatico); (Marche, Adriatico); (Veneto, Adriatico); (Friuli Venezia Giulia, Adriatico)$\}$. Se rappresentiamo questa corrispondenza con un grafico sagittale notiamo che non tutti gli elementi del dominio hanno l'immagine in **K**. La corrispondenza definita si può generare solo in un sottoinsieme del dominio.

Definizione B.4. Chiamiamo *insieme di definizione* della corrispondenza, indicato con I. D., il sottoinsieme del dominio i cui elementi hanno effettivamente un corrispondente nel codominio.

Nel grafico (figura B.3) è rappresentata una generica situazione formatasi dall'aver definito una corrispondenza tra due insiemi; sono in grigio l'insieme di definizione, sottoinsieme del dominio, e l'insieme immagine, sottoinsieme del codominio.

Osserviamo che in alcuni casi si ha la coincidenza del dominio con l'insieme di definizione e la coincidenza del dominio con l'insieme immagine: $\mathcal{D} =$ I. D. e $\mathcal{C} =$ IM..

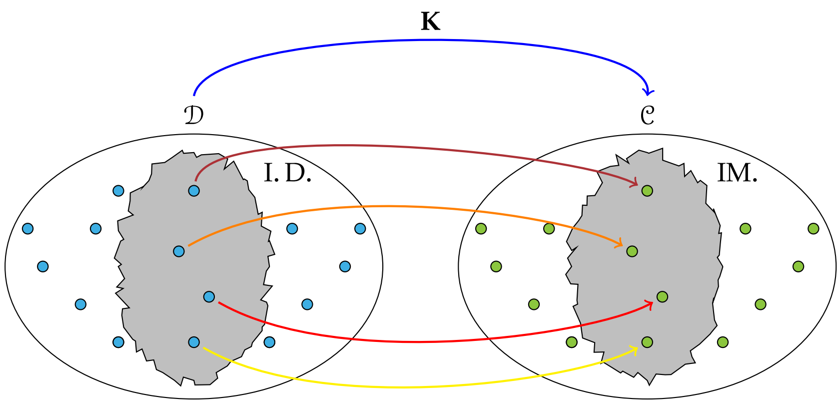


FIGURA B.3: Corrispondenza tra due insiemi.

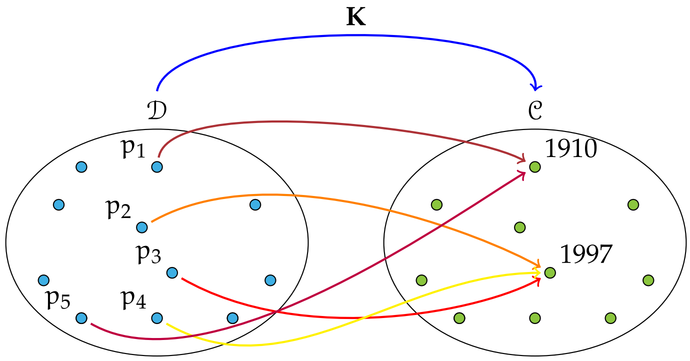


FIGURA B.4: Corrispondenza *molti a uno*: più persone sono nate nello stesso anno.

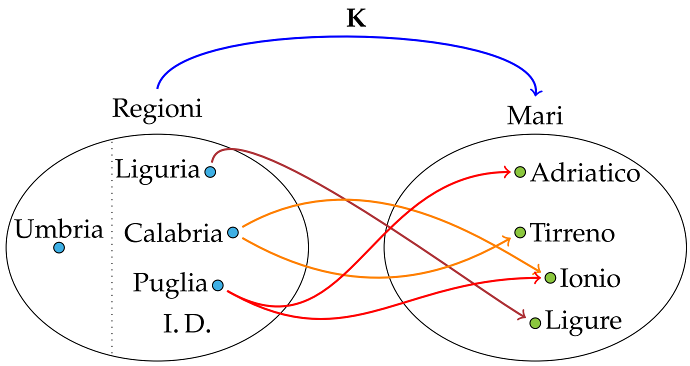


FIGURA B.5: Esempio di corrispondenza di tipo *molti a molti*.

B.3 Caratteristiche di una corrispondenza

Esempio B.4. Generalizziamo uno degli esercizi precedenti sulle date di nascita. Prendiamo come dominio $\mathcal{D} = \{\text{persone italiane viventi}\}$ e come codominio $\mathcal{C} = \{\text{gli anni dal 1900 al 2012}\}$. Evidentemente I. D. $= \mathcal{D}$: ogni persona ha un determinato anno di nascita, ma più persone sono nate nello stesso anno. Inoltre IM. potrebbe coincidere con $\mathcal{C}$, vista la presenza sul territorio nazionale di ultracentenari. Comunque scriveremo IM. $\subseteq \mathcal{C}$. Il grafico sagittale di questa corrispondenza è del tipo rappresentato nella figura B.4.

Esempio B.5. Analizziamo la corrispondenza dell'esempio precedente $\mathbf{K} : \mathsf{R} \to \mathsf{M}$ "essere bagnata/o da" tra l'insieme delle regioni d'Italia e l'insieme dei mari.

I. D. $\subset \mathcal{D}$ poiché alcune regioni non sono bagnate da alcun mare. Moltre regioni sono bagnate dallo stesso mare, ma succede che alcune regioni siano bagnate da due mari.

IM $=$ C: un mare bagna almeno una regione. Il grafico sagittale di questa corrispondenza è del tipo rappresentato nella figura B.5.

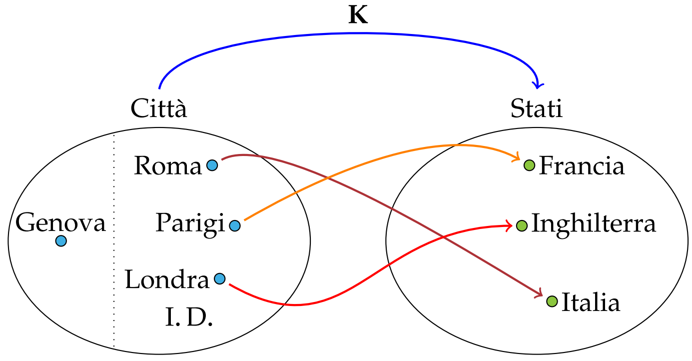


FIGURA B.6: Esempio di corrispondenza di tipo *uno a uno*.

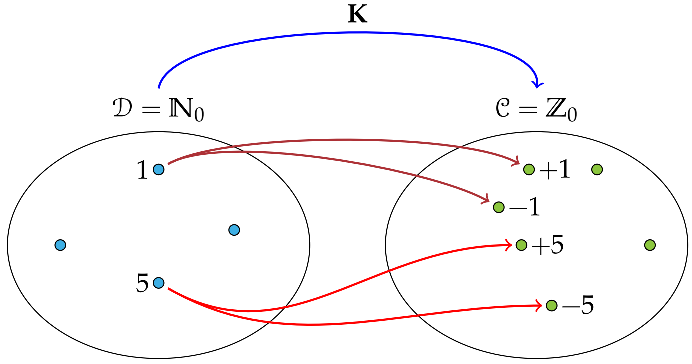


FIGURA B.7: Esempio di corrispondenza di tipo *uno a molti*.

Esempio B.6. Generalizziamo la corrispondenza **K**: "essere la capitale di" tra il dominio $\mathcal{C} = \{\text{città d'Europa}\}$ e il codominio $\mathcal{S} = \{\text{stati d'Europa}\}$. È evidente che I. D. $\subset \mathcal{C}$: non tutte le città sono capitali, mentre IM. $= \mathcal{C}$ in quanto ogni stato ha la sua capitale; inoltre due città diverse non possono essere capitali dello stesso stato. Il grafico sagittale di questa corrispondenza è del tipo rappresentato nella figura B.6.

Esempio B.7. Consideriamo, tra l'insieme $\mathbb{N}_0$ dei numeri naturali diversi da zero e l'insieme $\mathbb{Z}_0$ degli interi relativi diversi da zero, la corrispondenza **K**: "essere il valore assoluto di". Per la definizione di valore assoluto di un intero, possiamo senz'altro dire: $\mathbb{N}_0 = \mathcal{D} =$ I. D.; $\mathbb{Z}_0 = \mathcal{C} =$ IM.. Ma succede che due numeri opposti hanno lo stesso valore assoluto, quindi ogni elemento di $\mathbb{N}_0$ ha due immagini, per cui il grafico sagittale di questa corrispondenza è come nella figura B.7.

Definizione B.5. Le corrispondenze di tipo *molti a uno* e *uno a uno* sono dette *univoche*; in esse ogni elemento dell'insieme di definizione ha una sola immagine nel codominio.

Esempio B.8. Consideriamo la corrispondenza **K** che associa ad ogni persona il suo codice fiscale: ogni persona ha il proprio codice fiscale, persone diverse hanno codice fiscale diverso. Dominio e I. D. coincidono e sono l'insieme $P = \{\text{persone}\}$. Codominio e IM. coincidono e sono l'insieme $F = \{\text{codici fiscali}\}$. Il grafico sagittale di questa corrispondenza è del tipo *uno a uno*. È di questo tipo il grafico sagittale della corrispondenza che associa ad ogni automobile la sua targa, ad ogni moto il suo numero di telaio, ad ogni maggiorenne, cittadino italiano, il suo certificato elettorale ...

❑ **Osservazione** In tutti questi casi la corrispondenza è di tipo *uno a uno*, il dominio coincide con l'insieme di definizione e l'insieme immagine coincide con il codominio.

Definizione B.6. Una corrispondenza di tipo *uno a uno* in cui $\mathcal{D} = \text{I. D.}$ e $\mathcal{C} = \text{IM.}$ è detta *corrispondenza biunivoca*.

✍ *Esercizi proposti:* B.4, B.5, B.6, B.7, B.8, B.9, B.10

B.4 Esercizi

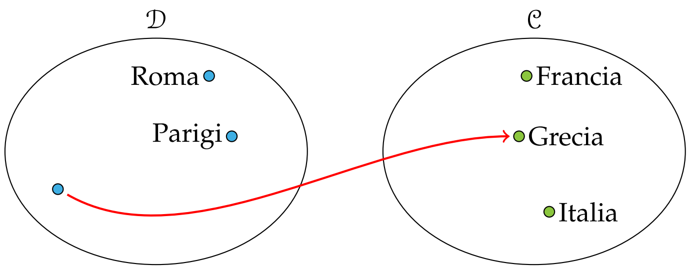
B.4.1 Esercizi dei singoli paragrafi

B.2 - Rappresentazione di una corrispondenza

B.1. Rappresenta con un grafico cartesiano la corrispondenza **K**: essere nato nell'anno di dominio l'insieme $A = \{\text{Galileo, Napoleone, Einstein, Fermi, Obama}\}$ e codominio l'insieme $B = \{1901, 1564, 1961, 1879, 1769, 1920, 1768\}$. Rappresenta per elencazione il sottoinsieme $G_{\mathbf{K}}$ del prodotto cartesiano $A \times B$. Stabilisci infine gli elementi dell'immagine IM..

B.2. L'insieme $S = \{\text{casa, volume, strada, ufficio, clavicembalo, cantautore, assicurazione}\}$ è il codominio della corrispondenza **K**: essere il numero di sillabe di il cui dominio è $X = \{x \in \mathbb{N} / 0 < x < 10\}$. Rappresenta con un grafico cartesiano la corrispondenza assegnata, evidenzia come nel primo esempio di questo paragrafo l'insieme $G_{\mathbf{K}}$, scrivi per elencazione l'insieme IM..

B.3. Completa la rappresentazione con grafico sagittale della corrispondenza essere capitale di. La freccia che collega gli elementi del dominio con quelli del codominio rappresenta il predicato **K**: essere la capitale di.

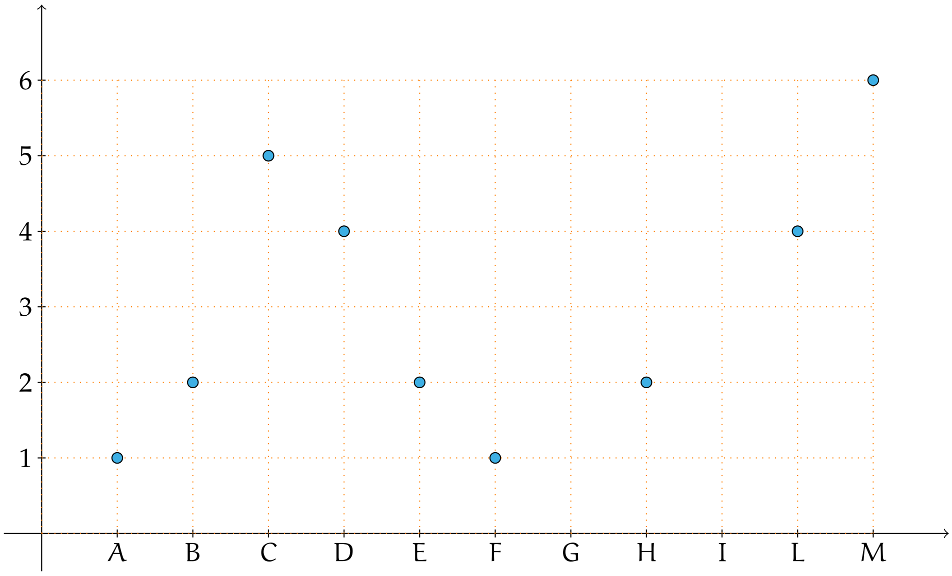


B.3 - Caratteristiche di una corrispondenza

B.4. È univoca la corrispondenza **K** definita tra l'insieme $P = \{\text{parola del proverbio rosso di sera, bel tempo si spera}\}$ e l'insieme $A = \{\text{lettere dell'alfabeto italiano}\}$ che associa ad ogni parola la sua iniziale? Ti sembra corretto affermare che dominio e insieme di definizione coincidono? Completa con il simbolo corretto la relazione tra insieme immagine e codominio: IM. . . . $\mathcal{C}$. Fai il grafico sagittale della corrispondenza.

B.5. **K** è la corrispondenza tra l'insieme $\mathbb{N}$ dei naturali e l'insieme degli interi relativi $\mathbb{Z}$ espressa dal predicato essere il quadrato di. Ti sembra corretto affermare che dominio e insieme di definizione coincidono? Perché IM. $= \mathcal{C}$? La corrispondenza è univoca?

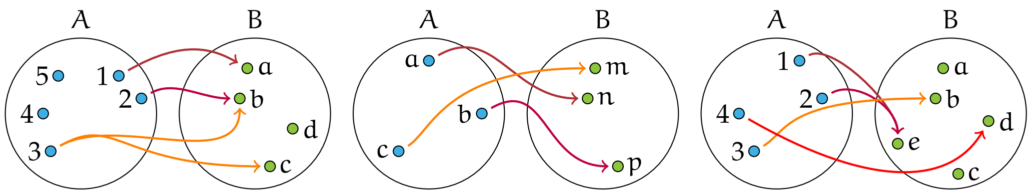
B.6. Una corrispondenza **K** è assegnata con il suo grafico cartesiano.



Completa e rispondi alle domande:

a) $\mathcal{D}$ ={. . . . .};
b) $\mathcal{C}$ ={. . . . .};
c) I. D. ={. . . . .};
d) IM. ={ . . . . };
e) la corrispondenza è biunivoca?
f) 2 è l'immagine di quali elementi dell'insieme di definizione?
g) quale elemento del codominio è l'immagine di M?

B.7. I tre grafici sagittali rappresentano altrettante corrispondenze, $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$, $\mathbf{K}_3$. Completa per ciascuna di esse la descrizione schematizzata nel riquadro sottostante:



$\mathcal{D}$ =	. . .	$\mathcal{D}$ =	. . .	$\mathcal{D}$ =	. . .
$\mathcal{C}$ =	. . .	$\mathcal{C}$ =	. . .	$\mathcal{C}$ =	. . .
I. D. =	. . .	I. D. =	. . .	I. D. =	. . .
IM. =	. . .	IM. =	. . .	IM. =	. . .
Tipo=	. . .	Tipo=	. . .	Tipo=	. . .

B.8. Il dominio della corrispondenza **K** è l'insieme $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}$ ne è il codominio; l'immagine della coppia (a, b) è l'intero $p = a \cdot b$.

a) Stabilisci l'insieme di definizione e l'insieme immagine;
b) perché questa corrispondenza non è biunivoca?
c) tutte le coppie aventi almeno un elemento uguale a zero hanno come immagine . . . ;
d) 1 è l'immagine di . . . ;
e) se gli elementi della coppia sono numeri concordi, allora l'immagine è . . . ;
f) un numero negativo è immagine di . . .

Fai degli esempi che illustrino le tue affermazioni precedenti.

B.9. Il dominio della corrispondenza **K** è l'insieme $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}$ ne è il codominio; l'immagine della coppia (a, b) è il numero razionale $q = \frac{a}{b}$.

a) Stabilisci l'insieme di definizione e l'insieme immagine;
b) completa:
    a) lo zero è immagine delle coppie . . . ;
    b) se gli elementi della coppia sono numeri opposti l'immagine è . . . ;
    c) se gli elementi della coppia sono numeri concordi allora l'immagine è . . . ;
    d) un numero negativo è immagine di . . .
c) fai degli esempi che illustrino le tua affermazioni precedenti.

B.10. In un gruppo di 10 persone, due si erano laureate in medicina e tre in legge nell'anno 1961, mentre quattro anni dopo, una si era laureata in fisica, un'altra in scienze e due in legge. Considerate i seguenti insiemi: $P = \{x/x \text{ è una persona del gruppo}\}$; $A = \{1960, 1961, 1964, 1965\}$; $F = \{x/x \text{ è una facoltà universitaria}\}$. Fatene la rappresentazione con diagramma di Eulero-Venn e studiate le corrispondenze $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$, espresse dai predicati: $\mathbf{K}_1$: essersi laureato nell'anno e K_2: essere laureato in, mettendo in evidenza per ciascuna dominio, codominio, insieme di definizione, immagine, tipo.

Completate:

a) nel gruppo ci sono . . . persone laureate in legge, di cui . . . nell'anno 1961 e le altre . . . nell'anno . . . ;
b) nel 1961 si sono laureate . . . di cui . . . in medicina;
c) negli anni . . . non si è laureata nessuna persona del gruppo considerato;
d) tra le 10 persone . . . non si è laureata.

N.B.: ciascuno possiede una sola laurea.

Maria si è laureata in fisica nello stesso anno in cui si è laureato suo marito Luca; andrea è fratello di Luca, non è medico, ha frequentato una facoltà diversa da quella del fratello e si è laureato in un anno diverso. Supponendo che Maria, Luca e Andrea siano tra le 10 persone di cui sopra, completate:

Maria di è laureata nell'anno . . . . Andrea di è laureato nell'anno . . . in . . . . Luca si è laureato nell'anno . . . in . . .

N.B.: ciascuno possiede una sola laurea.

Matematica C^3– Algebra 1

COORDINATORI DEL PROGETTO Antonio Bernardo, Anna Cristina Mocchetti, Claudio Carboncini.

AUTORI Claudio Carboncini, Antonio Bernardo, Erasmo Modica, Anna Cristina Mocchetti, Germano Pettarin, Francesco Daddi, Angela D'Amato, Nicola Chiriano.

HANNO COLLABORATO Laura Todisco, Daniele Zambelli, Michela Todeschi, Nicola De Rosa, Paolo Baggiani, Luca Tedesco, Vittorio Patriarca, Francesco Speciale, Alessandro Paolino, Luciano Sarra, Maria Rosaria Agrello, Alberto Giuseppe Brudaglio, Lucia Rapella, Francesca Lorenzoni, Sara Gobbato, Mauro Paladini, Anna Maria Cavallo, Elena Stante, Giuseppe Pipino, Silvia Monatti, Andrea Celia, Gemma Fiorito, Dorotea Jacona, Simone Rea, Nicoletta Passera, Pierluigi Cunti, Francesco Camia, Anna Rita Lorenzo, Alessandro Castelli, Piero Sbardellati, Luca Frangella, Raffaele Santoro, Alessandra Marrata, Mario Bochicchio, Angela Iaciofano, Luca Pieressa, Giovanni Quagnano.

PROGETTAZIONE E IMPLEMENTAZIONE IN LaTeX Dimitrios Vrettos.

COLLABORATORI Claudio Carboncini, Silvia Cibola, Tiziana Manca.

COLLABORAZIONE, COMMENTI E SUGGERIMENTI Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica C^3 - Algebra 1 o se vuoi inviare i tuoi commenti e/o suggerimenti scrivi a antoniobernardo@matematicamente.it.

Versione del documento: 4.0 del 10 aprile 2013.
Stampa quarta edizione: aprile 2013.
ISBN 9788896354438

DATI TECNICI PER L'ADOZIONE DEL LIBRO A SCUOLA
Titolo: Matematica C^3, Algebra 1 - quarta edizione.
Codice ISBN: 9788896354438
Editore: Matematicamente.it.
Anno di edizione: 2013.
Prezzo: € 0,00.
Formato: ebook (PDF).