

Appendice A

A.1 Tensore energia–impulso nella materia

Le leggi di conservazione delle grandezze fisiche possono essere espresse in modo generale ed in forma tensoriale partendo dalla seguente considerazione. Consideriamo un ente fisico classico continuo indicato da m e caratterizzato dalla funzione densità $\rho(x, y, z, t)$ definita da

$$\varrho = \frac{dm}{dV}$$

dove V è il volume spaziale tridimensionale euclideo. La legge di conservazione dell'ente m è allora espressa da

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \varrho dV = - \oint \varrho v d\mathbf{S} \quad (\text{A.1})$$

dove il primo integrale è eseguito su di un dato volume, il secondo integrale è eseguito sulla superficie che contorna il volume, $d\mathbf{S} = dS \cdot \mathbf{n}$ è l'elemento di superficie, essendo \mathbf{n} il versore normale alla superficie stessa, e infine v è la velocità.

Questa equazione è detta equazione di continuità ed esprime il fatto che la variazione nel tempo dell'ente contenuto all'interno di un volume assegnato eguaglia la quantità di ente che entra od esce dal volume stesso. Introducendo la densità di corrente \mathbf{j} definita come $\mathbf{j} = \varrho v$ l'equazione di continuità diventa

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \varrho dV = - \oint \mathbf{j} d\mathbf{S}.$$

Applicando il Teorema di Gauss si ottiene

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$$

Questa è l'equazione di continuità in forma differenziale. Poniamoci ora in \mathbb{M}^4 e definiamo il quadrivettore densità di corrente

$$J^i = (c\varrho, \varrho\dot{x}, \varrho\dot{y}, \varrho\dot{z}).$$

L'equazione di continuità diventa

$$\frac{\partial J^i}{\partial x^i} = 0.$$

Questa equazione mostra l'espressione quadridimensionale dell'operatore divergenza nello spazio \mathbb{M}^4 . Passando allo spazio \mathbb{E}^4 la divergenza deve essere eseguita utilizzando la derivazione covariante. Generalizzando ai tensori di tipo (1,1) l'equazione di continuità sarà data da

$$\nabla_j T_i^j = 0. \quad (\text{A.2})$$

Estendendo poi il concetto di continuità, la formula (A.2) rappresenta la forma matematica generale di una legge di conservazione.

Consideriamo un sistema fisico formato da materia classica continua immersa in un campo gravitazionale. Per questo sistema, definiamo il tensore energia–impulso della materia.

Consideriamo un semplice sistema fisico formato esclusivamente da materia classica continua immersa in un campo gravitazionale dato. In questo sistema, il campo gravitazionale è considerato assegnato a priori per cui ci si può soffermare solo sul moto della materia. Qui, la materia risente del campo gravitazionale (che ne determina il moto) ma non influisce su di esso. Ciò rappresenta la generalizzazione di quanto già visto circa il moto di una particella nel campo gravitazionale. Per questo sistema, definiamo il tensore energia–impulso della materia

$$T_{ij}$$

in modo che sia simmetrico e che sia soddisfatta la (A.2). Per i nostri scopi poniamo (vedi [5], pag. 358):

$$T_{ij} = (p + \varepsilon)u_i u_j - p g_{ij} \quad (\text{A.3})$$

essendo p la pressione, $\varepsilon = \rho c^2$ la densità di energia e u_i la quadrivelocità, tutte espresse, ovviamente, in funzione delle coordinate. Questa definizione soddisfa le nostre esigenze. Non intraprenderemo lo studio di tensori energia–impulso per il campo elettromagnetico e il campo gravitazionale.

Appendice B

Seguono i listati dei principali blocchi dei programmi in PHP di calcolo numerico utilizzati per la RG, reperibili anche presso la pagina web

<http://lnx.arrigoamadori.com/CalcoloNumerico/calcolonumericolnx.htm>

B.1 Programma tensori

```
// simboli di Christoffel

echo "<hr>";

echo "<b>Simboli di Christoffel</b>
      (il carattere '_' indica la derivata
      parziale) <p>";

for ($i = 0; $i <= $n; $i++)
{
    for ($k = 0; $k <= $n; $k++)
    {
        for ($l = 0; $l <= $n; $l++)
        {
            $rga = "0";

            for ($m = 0; $m <= $n; $m++)
            {
                if ($h[$i][$m] != "0")
                {
```

```

$rga = $rga . " + 1/2 * (" .
$h[$i][$m] . ") * [";

$rl = ""; $rk = ""; $rm = "";

if ($l == 0) {$rl = "x0";}
if ($l == 1) {$rl = "x1";}
if ($l == 2) {$rl = "x2";}
if ($l == 3) {$rl = "x3";}

if ($k == 0) {$rk = "x0";}
if ($k == 1) {$rk = "x1";}
if ($k == 2) {$rk = "x2";}
if ($k == 3) {$rk = "x3";}

if ($m == 0) {$rm = "x0";}
if ($m == 1) {$rm = "x1";}
if ($m == 2) {$rm = "x2";}
if ($m == 3) {$rm = "x3";}

if (strpos($g[$m][$k], $rl))
{
    $rga = $rga . " + (" .
    $g[$m][$k] . ")_" . $rl;
}

if (strpos($g[$m][$l], $rk))
{
    $rga = $rga . " + (" .
    $g[$m][$l] . ")_" . $rk;
}

if (strpos($g[$k][$l], $rm))
{
    $rga = $rga . " - (" .
    $g[$k][$l] . ")_" . $rm;
}

$rga = $rga . "];

if (strpos($rga, "[ ]"))
{
    $rga = "0";
}

```

```

        }

        $ga[$i][$k][$l] = $rga;
    }
}

}

for ($i = 0; $i <= $n; $i++)
{
    for ($j = 0; $j <= $n; $j++)
    {
        for ($k = 0; $k <= $n; $k++)
        {
            $rga = $ga[$i][$j][$k];

            $rga = str_replace("x0", $rx0, $rga);
            $rga = str_replace("x1", $rx1, $rga);
            $rga = str_replace("x2", $rx2, $rga);
            $rga = str_replace("x3", $rx3, $rga);

            echo "ga" . $i . $j . $k . " = " . $rga . "<br>";

        }
    }
}

// tensore di Ricci

echo "<hr>";

echo "<b>Tensore di Ricci</b>
      (il carattere '_' indica la derivata
      parziale) <p>";

for ($i = 0; $i <= $n; $i++)
{
    for ($k = 0; $k <= $n; $k++)

```

```
{  
  
    $rR = "0";  
  
    for ($l = 0; $l <= $n; $l++)  
    {  
  
        $rl = "";  
  
        if ($l == 0) {$rl = "x0";}   
        if ($l == 1) {$rl = "x1";}   
        if ($l == 2) {$rl = "x2";}   
        if ($l == 3) {$rl = "x3";}   
  
        if (strpos($ga[$l][$i][$k], $rl))  
        {  
  
            $rR = $rR . " + ga" . $l .  
            $i . $k . "_" . $rl;  
  
        }  
    }  
  
    for ($l = 0; $l <= $n; $l++)  
    {  
  
        $rk = "";  
  
        if ($k == 0) {$rk = "x0";}   
        if ($k == 1) {$rk = "x1";}   
        if ($k == 2) {$rk = "x2";}   
        if ($k == 3) {$rk = "x3";}   
  
        if (strpos($ga[$l][$i][$l], $rk))  
        {  
  
            $rR = $rR . " - ga" . $l .  
            $i . $l . "_" . $rk;  
  
        }  
    }  
  
    for ($l = 0; $l <= $n; $l++)
```

```

{
  for ($m = 0; $m <= $n; $m++)
  {
    if ($ga[$l][$i][$k] != "0" and
        $ga[$m][$l][$m] != "0")
    {
      $rR = $rR . " + ga" . $l .
            $i . $k . " * ga" . $m . $l . $m;
    }
  }
}

for ($l = 0; $l <= $n; $l++)
{
  for ($m = 0; $m <= $n; $m++)
  {
    if ($ga[$m][$i][$l] != "0" and
        $ga[$l][$k][$m] != "0")
    {
      $rR = $rR . " - ga" . $m .
            $i . $l . " * ga" . $l . $k . $m;
    }
  }
}

$R[$i][$k] = $rR;
}
}

for ($i = 0; $i <= $n; $i++)
{
  for ($j = 0; $j <= $n; $j++)
  {
    $rR = $R[$i][$j];

    $rR = str_replace("x0", $rx0, $rR);
    $rR = str_replace("x1", $rx1, $rR);
    $rR = str_replace("x2", $rx2, $rR);
  }
}

```

```
$rR = str_replace("x3", $rx3, $rR);

    echo "R_" . $i . $j . " = " . $rR . "<br>";
}
}

// curvatura scalare

echo "<hr>";

echo "<b>Curvatura scalare</b>
      (il carattere '_' indica la derivata
      parziale) <p>";

$RR = "0";

for ($i = 0; $i <= $n; $i++)
{
    for ($j = 0; $j <= $n; $j++)
    {
        if ($h[$i][$j] != "0" and $R[$i][$j] != "0")
        {
            $RR = $RR . " + (" . $h[$i][$j] . ") *
                  (" . $R[$i][$j] . ")";
        }
    }
}

$rRR = $RR;

$rRR = str_replace("x0", $rx0, $rRR);
$rRR = str_replace("x1", $rx1, $rRR);
$rRR = str_replace("x2", $rx2, $rRR);
$rRR = str_replace("x3", $rx3, $rRR);

echo "R = " . $rRR . "<br>";

// tensore di Einstein

echo "<hr>";

echo "<b>Tensore di Einstein</b>
```

```

        (il carattere '_' indica la derivata
        parziale) <p>";

for ($i = 0; $i <= $n; $i++)
{
    for ($j = 0; $j <= $n; $j++)
    {
        $rG = "0 ";

        if ($R[$i][$j] != "0" and $g[$i][$j] != "0")
        {
            $rG = $rG . "+ (" . $R[$i][$j] . ") -
            1/2 * (" . $RR . ") *
            (" . $g[$i][$j] . ")";
        }

        $G[$i][$j] = $rG;
    }
}

for ($i = 0; $i <= $n; $i++)
{
    for ($j = 0; $j <= $n; $j++)
    {
        $rG = $G[$i][$j];

        $rG = str_replace("x0", $rx0, $rG);
        $rG = str_replace("x1", $rx1, $rG);
        $rG = str_replace("x2", $rx2, $rG);
        $rG = str_replace("x3", $rx3, $rG);

        echo "G_" . $i . $j . " = " . $rG . "<br>";
    }
}

```

B.2 Programma Moto di una particella nella metrica di Schwarzschild

```
for ($i = 1; $i <= $ni; $i++)
{
    // approssimazione della geodetica

    $tduepunto0 = - ($rg / ($r0 * ($r0 - $rg))) *
    $tpunto0 * $rpunto0;
    $rduepunto0 = - ($c * $c * $rg * ($r0 - $rg) /
    (2 * $r0 * $r0 * $r0)) *
    $tpunto0 * $tpunto0 + ($rg / (2 * $r0 *
    ($r0 - $rg))) * $rpunto0 *
    $rpunto0 + ($r0 - $rg) *
    $fipunto0 * $fipunto0;
    $fiduepunto0 = - (2 / $r0) * $rpunto0 *
    $fipunto0;

    $t1 = $t0 + $tpunto0 * $ds;
    $tpunto1 = $tpunto0 + $tduepunto0 * $ds;

    $r1 = $r0 + $rpunto0 * $ds;
    $rpunto1 = $rpunto0 + $rduepunto0 * $ds;

    $fi1 = $fi0 + $fipunto0 * $ds;
    $fipunto1 = $fipunto0 + $fiduepunto0 * $ds;

    ---> disegno punto (fi,r)

    $x = $r1 * cos($fi1);
    $y = $r1 * sin($fi1);

    ---> disegno punto (x,y)

    // iterazione

    $t0 = $t1;
    $tpunto0 = $tpunto1;
    $r0 = $r1;
    $rpunto0 = $rpunto1;
    $fi0 = $fi1;
    $fipunto0 = $fipunto1;}
```

B.3 Programma Propagazione della luce nella metrica di Schwarzschild

```
for ($i = 1; $i <= $ni; $i++)
{
    // approssimazione della geodetica

    $rduepunto0 = ($rg / (2 * $r0 *
    ($r0 - $rg))) * $rpunto0 *
    $rpunto0 + ($r0 - $rg) *
    $fipunto0 * $fipunto0;
    $fiduepunto0 = - (2 / $r0) * $rpunto0 *
    $fipunto0;

    $r1 = $r0 + $rpunto0 * $ds;
    $rpunto1 = $rpunto0 + $rduepunto0 *
    $ds;

    $fi1 = $fi0 + $fipunto0 * $ds;
    $fipunto1 = $fipunto0 + $fiduepunto0 *
    $ds;

    ---> disegno punto (fi,r)

    $x = $r1 * cos($fi1);
    $y = $r1 * sin($fi1);

    ---> disegno punto (x,y)

    // iterazione

    $r0 = $r1;
    $rpunto0 = $rpunto1;
    $fi0 = $fi1;
    $fipunto0 = $fipunto1;
}
```


Bibliografia

- [1] Manfredo Perdigao Do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhauser, Boston 1992.
- [2] Boris Dubrovin, Anatolij Fomenko e Sergej Novikov, *Geometria contemporanea: metodi e applicazioni*, Editori riuniti, Roma 1988.
- [3] Stephen Hawking e George Ellis, *The large scale structure of space-time*, Cambridge university press, Cambridge, New York 1973.
- [4] Lev Davidovic Landau e Evgenij Mihajlovic Lifsic, *Meccanica*, Boringhieri, Torino 1965.
- [5] Lev Davidovic Landau e Evgenij Mihajlovic Lifsic, *Teoria dei campi*, Editori riuniti, Roma 1999.
- [6] Tullio Levi Civita, *Lezioni di Calcolo Differenziale assoluto*, trad. di E. Persico, Stock editore, Roma 1925.
- [7] Corrado Mencuccini e Vittorio Silvestrini, *Fisica Generale I e II*, Liguori editore, Napoli 1995.
- [8] Gregory Naber, *The Geometry of Minkowski Spacetime*, Springer–Verlag, New York 1992.
- [9] Carlo Rovelli, *Quantum gravity*, Cambridge university press, Cambridge, New York 2004.
- [10] Barry Spain, *Calcolo Tensoriale*, Edizioni cremonese, Roma 1971.
- [11] Robert Wald, *General relativity*, University Of Chicago Press, Chicago 1984.

Indice analitico

- abbassamento degli indici, 56
 accelerazione di gravità, 75
 algebra esterna, 55
 azione, 13
- big crunch, 111
 brane, 112
 buco nero, 109
- cambiamento di coordinate ammissibile, 50
 campo elettrico, 17
 campo elettromagnetico, 17
 campo gravitazionale, 77
 campo gravitazionale costante, 87
 campo statico, 87
 campo stazionario, 87
 cono di luce, 34
 contrazione, 53
 contrazione di Lorentz, 28
 convenzione di Einstein, 51
 coordinate, 49
 coordinate geodetiche, 68
 costante cosmologica, 110
 costante dielettrica del vuoto, 18
 curvatura, 69
 curvatura scalare, 70
- d'alambertiano, 108
 densità di carica, 18
 densità di corrente, 18
 derivata covariante di un invariante, 59
 derivata covariante di un tensore, 63
 derivata covariante di un vettore contro-
 variante, 62
- derivata covariante di un vettore cova-
 riante, 63
 derivata intrinseca, 64
 differenza tra tensori, 53
 differenziale assoluto, 64
 dilatazione di Lorentz, 29
- energia a riposo, 41
 energia cinetica, 12
 energia meccanica, 15
 energia potenziale, 12
 equazione delle onde, 19
 equazione di continuità, 113
 equazione di d'Alambert, 18
 equazione parallelismo, 65
 equazioni di Einstein, 90
 equazioni di Eulero–Lagrange, 13
 equazioni di Maxwell, 18
 espressione differenziale mista, 55
 etere, 19
 eventi simultanei, 84
- forma differenziale, 55
 formula di Leibniz, 59
 forza di Lorentz, 44
 funzionale di energia, 68
 futuro assoluto, 36
- geodetica, 67
 gradiente, 51
 gravitone, 111
- identità di Bianchi, 71
 impulso, 16
 innalzamento degli indici, 56
 intervallo di genere spazio, 35

- intervallo di genere tempo, 35
intervallo nullo, 33
- lagrangiana, 12
laplaciano, 18
linea d'universo, 30
lunghezza di un vettore, 56
lunghezza propria del regolo, 28
- meccanica relativistica, 37
metrica di Schwarzschild, 94
metrica galileiana, 78
modello aperto, 111
modello chiuso, 111
modello lagrangiano, 11
modello piatto, 111
momento angolare, 16
- onda gravitazionale, 108
onde elettromagnetiche, 19
- passato assoluto, 36
permeabilità magnetica del vuoto, 18
polo, 68
potenziale scalare, 18
potenziale vettore, 18
primo principio della meccanica, 14
principio di equivalenza, 76
principio di equivalenza forte, 80
principio di minima azione, 13
principio di relatività generale, 79
principio di relatività ristretta, 22
principio di relatività galileiana, 15
prodotto interno, 54
pseudometrica di Lorentz, 32
punto d'universo, 30
- quadriaccelerazione, 39
quadricorrente, 45
quantità di moto, 16
- raggio gravitazionale, 97
raggio vettore quadridimensionale, 31
- secondo principio della meccanica, 13
- simboli di Christoffel, 61
simbolo di Kronecker, 50
sistema di riferimento inerziale, 11
sistema sincrono, 86
somma tra tensori, 53
spazio curvo, 70
spazio di Minkowski, 32
spazio isotropo, 15
spazio omogeneo, 15
spazio piatto, 70
stringhe, 112
supergravità, 112
- tempo omogeneo, 15
tempo proprio, 29, 81
tempo universale, 87
tensore antisimmetrico, 52
tensore completamente antisimmetrico,
52
tensore completamente simmetrico, 52
tensore di Ricci, 70
tensore di Riemann, 70
tensore di tipo (p, q) , 50
tensore energia-impulso, 114
tensore metrico, 55
tensore simmetrico, 52
terzo principio della meccanica, 16
trasformazioni di Galileo, 14
trasformazioni di Lorentz, 23
trasporto per parallelismo, 65
- velocità della luce, 19
vettore controvariante, 51
vettore covariante, 51
vettore tangente, 51
vettori ortogonali, 57



Arrigo Amadori (Cesena, 1950), laureato in Fisica a Bologna nel 1975, ha insegnato nelle scuole superiori. Ora svolge attività di divulgazione scientifica e nel 2007 ha fondato il Circolo Matematico Cesenate di cui è presidente.



Luca Lussardi (Brescia, 1977), laureato in Matematica a Brescia nel 2001, ha ottenuto il Ph. D. in Matematica a Pavia nel 2005. Ora è borsista in Analisi Matematica presso il Politecnico di Torino.