Prefazione

Le scoperte scientifiche che sono veramente passate alla storia non sono moltissime, sebbene la scienza esista, praticamente, da quando esiste l'uomo. La teoria della relatività è, senza ombra di dubbio, una delle più grandi rivoluzioni del pensiero umano, ad opera principalmente del fisico tedesco Albert Einstein (Ulm, 14 marzo 1879, Princeton, 18 aprile 1955). La teoria della relatività generale, sublime capolavoro del pensiero umano, costituisce tuttora, ad ormai un secolo dalla sua stesura, la teoria di riferimento della gravitazione che corregge e amplia la vecchia teoria newtoniana e fa da base per gli attuali tentativi di quantizzazione della gravità. Come ogni teoria fisica anche la teoria della relatività è formalizzata in termini matematici; più precisamente la matematica che pone il fondamento della teoria della relatività è il calcolo tensoriale, costruito e studiato da Gregorio Ricci Curbastro (Lugo, 12 gennaio 1853, Bologna, 6 agosto 1925) e dal suo allievo Tullio Levi Civita (Padova, 29 marzo 1873, Roma, 29 dicembre 1941). È curioso e per certi versi affascinante osservare che il calcolo tensoriale introdotto da Ricci Curbastro e Levi Civita in ambito geometrico−differenziale abbia poi trovato una sua naturale collocazione nella teoria della relatività: infatti una relazione tensoriale è invariante rispetto ai cambiamenti di coordinate, ovvero di riferimento, per cui appare come la migliore candidata possibile ad essere posta come legge fisica.

Lo scopo di questa trattazione, principalmente didattico, è quello di presentare anzitutto, dopo un breve richiamo di meccanica lagrangiana nel capitolo 1, la teoria della relatività ristretta, esposta nel capitolo 2, come correzione della meccanica newtoniana alla luce del principio di costanza della velocità della luce nel vuoto. Lo studio dell'invarianza rispetto alle trasformazioni di Lorentz suggerisce la necessità di studiare le relazioni matematiche a più indici che sono invarianti rispetto ai cambiamenti di riferimento, ovvero di coordinate. Nel capitolo 3 dunque si sposta l'attenzione sul calcolo tensoriale e sullo studio della geometria intrinseca degli spazi coordinatizzabili. Nel capitolo 4 finalmente si passa allo studio delle basi teoriche della teoria della relatività generale. Verrà posta l'attenzione solo sui fondamenti della teoria stessa e sulle sue principali conseguenze a partire dal principio di equivalenza, accennando solo, come conclusione al capitolo 4, ad alcuni tra gli sviluppi più recenti, quali le onde gravitazionali, la cosmologia, i buchi neri o ancora il problema dell'unificazione delle forze.

Il seguente testo può essere rivolto, secondo la nostra opinione, a studenti dei corsi di laurea in matematica, fisica o ingegneria che desiderano avere una conoscenza di base di calcolo tensoriale e di teoria della relatività. Pertanto indichiamo come prerequisiti una buona conoscenza dell'analisi matematica in dimensione finita, una buona conoscenza della fisica generale e della meccanica analitica. I testi principali di riferimento per questa trattazione sono: L.D. Landau e E.M. Lifsic, *Meccanica*, Boringhieri, Torino 1965, pp. 253 e L.D. Landau e E.M. Lifsic, *Teoria dei campi*, Editori riuniti, Roma 1999, pp. 517 per la teoria della relatività ristretta e generale; T. Levi Civita, *Lezioni di Calcolo Differenziale assoluto*, trad. di E. Persico, Stock editore, Roma 1925, pp. 314, per il calcolo tensoriale. Altri riferimenti si possono trovare nella bibliografia presentata.

Infine, ma non ultimo in importanza, va sottolineato il fatto che la teoria della relatività, poiché si basa su pochi principi e sul fertile e potente calcolo tensoriale, ha anche il pregio di essere semplice, completa, elegante e bella.

Avvertenza. La cronologia delle scoperte ed invenzioni qui riportate, nonché la loro paternità, può essere imprecisa o incompleta. Ci scusiamo da subito per questo con il lettore. Come spesso si verifica nella storia della scienza, per esigenze di chiarezza, si schematizzano eccessivamente i complessi, lunghi e controversi processi che hanno portato ad una scoperta, invenzione o teoria compiuta. Questo porta spesso ad associare ad una teoria, scoperta o invenzione una data ed un singolo nome di scienziato in modo non rispettoso della verità storica. Un esempio fra tutti è proprio la genesi della teoria della relatività ristretta. Essa viene comunemente attribuita ad Einstein, dimenticando spesso i fondamentali ed essenziali apporti di molti altri scienziati, come ad esempio Poincaré, Minkowski e Lorentz.

Ringraziamo per il supporto tecnico e scientifico: il dott.Luca Giuzzi, Paolo Glorioso, il prof. Roberto Lucchetti, la prof. Silvia Pianta ed il prof. Mauro Spera che ha letto con attenzione il libro. In particolare L. Lussardi ringrazia il prof. Bruno Bigolin dal quale l'autore ha appreso il calcolo tensoriale nella forma originalmente data dai grandi maestri Ricci Curbastro e Levi Civita.

Ringraziamo infine tutta la comunità di www.matematicamente.it grazie alla quale ci siamo conosciuti: il direttore prof. Antonio Bernardo, che ha letto scrupolosamente il lavoro e ha segnalato parecchie sviste, e tutti coloro che si sono mostrati interessati alla stesura del testo.

Godiasco (Pavia), *Arrigo Amadori*
Agosto 2008 *Luca Lussardi*

Capitolo 1

Elementi di meccanica classica

La meccanica classica è la teoria fisica fondamentale ed anche storicamente la prima teoria che spiega i fenomeni in termini di interazioni fra corpi. Essa trae origine principalmente dai lavori di Galileo (l'ideatore del metodo scientifico, 1564−1642), Newton (1642−1727), Lagrange (1736−1813), Hamilton (1805−1865). Ma fu Newton colui che alla meccanica classica diede i contributi più importanti. Per questo egli può esserne considerato a pieno titolo il padre. Con la definizione dei basilari tre principi, Newton portò la meccanica classica a livello di teoria compiuta. Inoltre Newton, in concomitanza con Leibniz, ma indipendentemente da egli, costruì quella matematica, il calcolo infinitesimale, evoluto poi nel moderno calcolo differenziale e calcolo integrale, che è alla base della meccanica classica. Sulla meccanica classica si fondano le teorie fisiche successive, in particolare la teoria della relatività e la meccanica quantistica, che di essa costituiscono necessarie correzioni ed ampliamenti. Sono possibili diversi modelli di meccanica classica; in questo capitolo limiteremo la nostra trattazione al modello lagrangiano.

1.1 Il modello lagrangiano

Il modello lagrangiano per la meccanica classica è il seguente. Consideriamo un sistema meccanico isolato, che non interagisce con l'esterno, composto da n punti materiali, ovvero corpi dotati di massa le cui dimensioni sono trascurabili e che chiameremo anche particelle. Le masse delle particelle siano $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Il sistema meccanico è immerso nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ in cui è sempre possibile definire un sistema di riferimento inerziale K; d'ora in poi denoteremo con SRI un sistema di riferimento inerziale (per il significato della parola inerziale si veda la sezione 1.2).

Un SRI è costituito da un sistema di riferimento spaziale cartesiano ortogonale $Oxyz$ associato ad un orologio ideale, solidale con esso, che misura il tempo t. Diremo semplicemente che al SRI K è associato il tempo t. Le particelle sono individuate dai raggi vettori $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Un generico raggio vettore r_i è dato dalla tripla $r_i = (x_i, y_i, z_i)$. La situazione è rappresentata dalla figura 1.1.

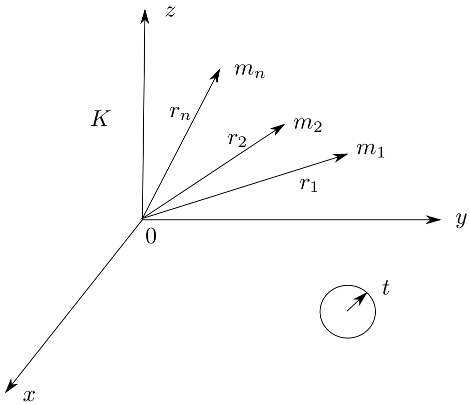

Figura 1.1: Le particelle $m_1, \ldots, m_n$ nel SRI K.

Il sistema meccanico in oggetto è descritto, rispetto ad un SRI, dalla lagrangiana

$$L(r_1, r_2, \ldots, r_n, \dot{r}_1, \dot{r}_2, \ldots, \dot{r}_n) \tag{1.1}$$

definita come

$$L = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 - U(r_1, r_2, \ldots, r_n) \tag{1.2}$$

dove le v_i sono i moduli delle velocità $v_i = \dot{r}_i$ delle particelle, cioè $v_i = ||v_i||$. Si noti che la lagrangiana (1.2) non contiene esplicitamente il tempo (per un approfondimento di questo fatto si veda la sezione 1.3).

Il termine $\frac{1}{2} m_i v_i^2$ è detto energia cinetica della i-esima particella per cui

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

è l'energia cinetica del sistema. Il termine U è detto energia potenziale del sistema e descrive l'interazione mutua delle particelle. L'energia potenziale U è scalare e dipende solo dalle posizioni delle particelle. Più precisamente U è una funzione delle mutue distanze fra tutte le particelle, considerate a due a due:

$$U = U(|r_1 - r_2|, |r_1 - r_3|, \ldots, |r_i - r_j|, \ldots), \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

La forma matematica di U esprime un fatto fondamentale in meccanica classica: l'interazione fra le particelle avviene istantaneamente ovvero la velocità di interazione è infinita. Ovviamente, questa affermazione nella realtà delle cose è falsa; però, se le velocità delle particelle sono molto piccole rispetto alle velocità delle interazioni, cosa che si verifica nei fenomeni ordinari, la meccanica classica approssima fedelmente la realtà.

Se poniamo

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

la lagrangiana si scrive più semplicemente come $L = T - U$. Allo scorrere del tempo, le particelle percorrono curve continue, dette traiettorie, date dalle equazioni orarie

$$\begin{cases} r_1 = r_1(t) \\ \dots \\ r_n = r_n(t). \end{cases}$$

Secondo il principio di minima azione, il moto delle particelle fra gli istanti t_1 e t_2 deve avvenire in modo che l'azione

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(r_1, r_2, \dots, r_n, \dot{r}_1, \dot{r}_2, \dots, \dot{r}_n)\, dt$$

sia minima, o, più debolmente, abbia un estremo. Il presente problema variazionale conduce alle equazioni di Eulero−Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} = \frac{\partial L}{\partial r_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{1.3}$$

che sono, in tal caso, le equazioni del moto del sistema meccanico dato, risolvendo le quali si trovano le equazioni orarie delle particelle $r_i = r_i(t)$. Le equazioni (1.3) costituiscono un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine che è risolubile assegnando le condizioni iniziali $r_1(t_0), \dots, r_n(t_0), \dot{r}_1(t_0), \dots, \dot{r}_n(t_0)$. Questo significa che, note posizioni e velocità di tutte le particelle in un certo istante e nota la forma dell'energia potenziale, è possibile conoscere in ogni istante successivo come il sistema evolve, cioè le posizioni e le velocità che le particelle avranno in qualunque istante successivo. Questo è il concetto di base della meccanica classica. Se applichiamo le equazioni del moto alla lagrangiana $L = T - U$ si ricava

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial r_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Le quantità $\dfrac{dv_i}{dt} = \dot{v}_i$ sono le accelerazioni delle particelle. Se introduciamo la forza

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial r_i},$$

che agisce sulla i-esima particella, si ottiene la ben nota formula di Newton

$$m_i \dot{v}_i = F_i$$

che esprime il *secondo principio della meccanica.*

1.2 Il principio di relatività galileiana

Consideriamo una particella libera, ovvero che non interagisce con altre particelle, di massa m rispetto ad un SRI. Per essa vale $U = 0$ per cui la sua lagrangiana diventa

$$L = \frac{1}{2}mv^2.$$

Applicando le equazioni del moto si ricava $\dot{v} = 0$ ovvero v è costante. Un SRI è quindi un sistema di riferimento rispetto al quale una particella libera si muove di moto rettilineo uniforme. Siamo quindi in grado di formulare il principio d'inerzia di Galileo, detto anche *primo principio della meccanica*: una particella libera si muove di moto rettilineo uniforme rispetto ad un SRI.

Siccome un SRI è un sistema di riferimento rispetto al quale una particella libera si muove di moto rettilineo uniforme, il principio d'inerzia è evidentemente un'affermazione circolare. Questa circolarità fa sì che il principio sia inevitabilmente debole. Essendo altresì basilare in fisica, si è cercato di rifondarlo su principi più forti. Mach, nel 1893, lo riformulò affermando che l'inerzia di una particella è il risultato dell'azione di tutte le particelle dell'universo sulla medesima. Questa ipotesi fu una delle basi concettuali sulle quali Einstein costruì la teoria della relatività generale.

Si considerino ora due sistemi di riferimento cartesiani ortogonali K e K' di cui K è inerziale e K' si muove rispetto al precedente con velocità V costante lungo l'asse x, mantenendo dunque costanti gli angoli fra i rispettivi assi come mostrato nella figura 1.2. Al sistema K è associato il tempo t, al sistema K' è associato il tempo t'. In meccanica classica si suppone che il tempo scorra indipendentemente dai sistemi di riferimento, cioè sia assoluto. Si pone perciò, sincronizzando gli orologi, $t = t'$. Se al tempo $t = 0$ le origini 0 e $0'$ coincidono, per una particella possiamo scrivere $r = r' + Vt'$, dove i vettori sono riferiti a K. Le equazioni

$$\begin{cases} r = r' + Vt' \\ t = t' \end{cases}$$

sono dette trasformazioni di Galileo. Derivando rispetto al tempo, si ottiene direttamente

$$v = v' + V$$

che costituisce la legge di trasformazione delle velocità fra i due sistemi di riferimento. Se i sistemi di riferimento K e K' hanno gli assi paralleli e concordi allora, passando alle componenti, con $r = (x, y, z)$ riferito a K e $r' = (x', y', z')$ riferito a K', si ha

$$\begin{cases} x = x' + Vt' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t'. \end{cases}$$

Possiamo a questo punto fare due fondamentali considerazioni.

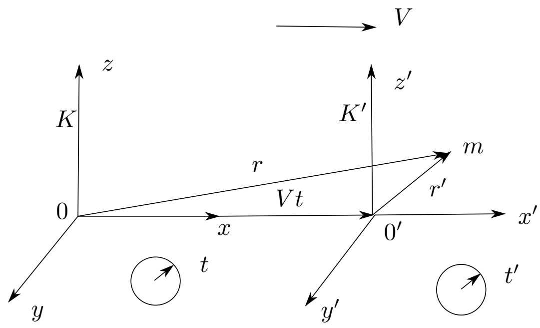

Figura 1.2: SRI in moto rettilneo uniforme uno rispetto all'altro.

1) Una particella libera ha velocità costante anche in K'. Questo significa che anche K' è un SRI. In generale, esistono infiniti SRI in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro.

2) poiché $\dot{v} = \dot{v}'$ e poiché U dipende solo dai moduli delle differenze dei raggi vettori, le equazioni del moto di un sistema meccanico sono le stesse in tutti i SRI. Questa affermazione va sotto il nome di *principio di relatività galileiana*.

Il principio di relatività galileiana è uno dei principi fondamentali della fisica. Il principio può essere generalizzato nei seguenti modi equivalenti: le leggi della meccanica classica devono essere le stesse in tutti i SRI e le leggi della meccanica classica devono essere invarianti rispetto alle trasformazioni di Galileo.

1.3 Leggi di conservazione

Rispetto ad un SRI il tempo è omogeneo e lo spazio è omogeneo ed isotropo. Tutti gli istanti di tempo sono quindi meccanicamente equivalenti. La lagrangiana di un sistema meccanico isolato, quindi, non deve contenere il tempo in modo esplicito; da ciò deriva direttamente che la grandezza

$$E = \sum_{i=1}^{n} \dot{r}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} - L \tag{1.4}$$

non cambia al variare del tempo durante l'evoluzione del sistema meccanico, ovvero si conserva. Tale grandezza è detta energia meccanica del sistema. Se la lagrangiana è data dalla (1.2), allora l'energia del sistema è data da

$$E = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 + U(r_1, r_2, \ldots, r_n) \tag{1.5}$$

ovvero $E = T + U$.

Tutti i punti dello spazio sono meccanicamente equivalenti. Le equazioni del moto di un sistema meccanico isolato, quindi, non devono cambiare se si esegue una traslazione parallela in blocco del sistema meccanico stesso rispetto ad un SRI. Da ciò, per la lagrangiana (1.1), deriva direttamente che la grandezza

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial v_i}$$

si conserva. La grandezza P è detta quantità di moto o impulso del sistema e la grandezza $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial v_i}$ è detta quantità di moto o impulso della particella i-esima.

Se la lagrangiana è data dalla (1.2), allora la quantità di moto del sistema vale

$$P = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i,$$

mentre $p_i = m_i v_i$ è la quantità di moto della particella i-esima. La conservazione della quantità di moto implica $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i = 0$ che è l'espressione matematica del *terzo principio della meccanica.*

Tutte le direzioni dello spazio sono meccanicamente equivalenti. Le equazioni del moto di un sistema meccanico isolato, quindi, non devono cambiare se si esegue una rotazione in blocco del sistema meccanico stesso rispetto ad un SRI. Da ciò deriva direttamente che la grandezza

$$M = \sum_{i=1}^{n} r_i \wedge p_i,$$

dove $\wedge$ indica il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$, si conserva. La grandezza M è detta momento angolare del sistema, mentre $M_i = r_i \wedge p_i$ è il momento angolare della particella i-esima.

1.4 Altri modelli per la meccanica classica

Esistono altri modelli per la meccanica classica; si tratta di modelli equivalenti a quello lagrangiano mostrato fin qui. Se si considera l'energia come una funzione delle coordinate e delle quantità di moto si ha il modello hamiltoniano dove il ruolo della lagrangiana L è svolto dall'hamiloniana H del sistema. Le equazioni fondamentali per questo modello sono le equazioni di Hamilton. Se si considera l'azione S come una funzione delle coordinate e del tempo si ha un ulteriore modello per la meccanica classica; le equazioni fondamentali per questo modello sono le equazioni di Hamilton−Jacobi.

Non sviluppiamo oltre questi concetti perché, per i nostri scopi, ci riferiremo sempre e solo al modello lagrangiano.