Capitolo 2

Relatività ristretta

Fra l'Ottocento ed il Novecento la meccanica classica entrò in una grave crisi che portò ad una critica profonda dei suoi fondamenti. Si trattò, però, di una crisi tanto travagliata quanto costruttiva che gettò le basi per la nascita delle due teorie su cui è fondata la scienza contemporanea: la teoria della relatività (relatività ristretta, Einstein, 1905, relatività generale, Einstein, 1915) e la meccanica quantistica (ipotesi dei quanti di Planck, 1900, principio di indeterminazione di Heisenberg, 1927).

Il fatto principale che aprì le porte alla teoria della relatività fu la non coerenza fra il modello di Maxwell che stava consolidandosi in quegli anni circa la propagazione delle onde elettromagnetiche e gli assunti della meccanica classica, in particolare il fondamentale principio di relatività galileiana. Il tentativo, finalmente coronato da Einstein nel 1905, di risolvere l'incoerenza, salvando ed aggiornando l'irrinunciabile principio di relatività, portò a qualcosa di assolutamente imprevisto: un ripensamento radicale dei concetti fisici fondamentali di spazio e di tempo. Rifondati i concetti di spazio e di tempo che confluiscono, indissolubilmente uniti, nel concetto di spazio−tempo (cronotopo), fu poi possibile riscrivere la teoria della gravitazione e di estendere il principio di relatività, a sistemi di riferimento qualunque (relatività generale).

2.1 Equazioni di Maxwell

Le proprietà del campo elettromagnetico sono descritte dai vettori campo elettrico E e campo magnetico B. I vettori E e B sono generati dalle cariche elettriche che qui consideriamo immerse nel vuoto. Non prendiamo in considerazione il campo elettromagnetico nella materia.

Matematicamente, E e B sono campi vettoriali regolari da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^3$. Essi sono definiti, in componenti, da

$$\mathrm{E} = (\mathrm{E}_x(x, y, z, t), \mathrm{E}_y(x, y, z, t), \mathrm{E}_z(x, y, z, t))$$

e

$$\mathrm{B} = (\mathrm{B}_x(x, y, z, t), \mathrm{B}_y(x, y, z, t), \mathrm{B}_z(x, y, z, t)).$$

I vettori E e B possono essere definiti a partire dal potenziale scalare Φ e dal potenziale vettore A nel seguente modo:

$$\mathrm{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial t}, \quad \mathrm{B} = \mathrm{rot}\mathrm{A}.$$

Anche Φ e A sono matematicamente dei campi regolari dipendenti anche dal tempo t, cioè

$$\Phi = \Phi(x, y, z, t), \quad \mathrm{A} = (\mathrm{A}_x(x, y, z, t), \mathrm{A}_y(x, y, z, t), \mathrm{A}_z(x, y, z, t)).$$

Nel 1873 Maxwell dimostrò che il campo elettromagnetico generato da cariche immerse nel vuoto, descritto dai vettori E e B, doveva soddisfare le seguenti equazioni, dette equazioni di Maxwell e date da

$$\begin{cases} \mathrm{div}\mathrm{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \mathrm{rot}\mathrm{E} = -\dfrac{\partial \mathrm{B}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\mathrm{B} = 0 \\ \mathrm{rot}\mathrm{B} = \mu_0 \mathrm{J} + \varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} \end{cases} \tag{2.1}$$

dove $\rho = \rho(x, y, z, t)$ è la densità di carica, mentre

$$\mathrm{J} = \rho(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

è la densità di corrente, ε_0 è la costante dielettrica del vuoto e μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto.

Sia f una qualunque grandezza caratteristica del campo elettromagnetico, cioè una delle componenti $\mathrm{E}_x, \mathrm{E}_y, \mathrm{E}_z, \mathrm{B}_x, \mathrm{B}_y, \mathrm{B}_z, \Phi, \mathrm{A}_x, \mathrm{A}_y, \mathrm{A}_z$. Maxwell dimostrò che f soddisfa, nel vuoto e fuori dalle cariche, l'equazione di D'Alembert data dall'equazione differenziale

$$\Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \tag{2.2}$$

dove ricordiamo che

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

è l'operatore laplaciano classico e $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$. La costante c vale circa

$$299.792.458\,\mathrm{m/s}$$

ed è detta velocità della luce nel vuoto. L'equazione di D'Alembert, detta equazione delle onde, esprime matematicamente il fatto fondamentale che il campo elettromagnetico si comporta nel vuoto come onde che si propagano alla velocità della luce c: le cosidette onde elettromagnetiche. Per esempio, l'onda piana dipendente da una sola coordinata espressa da

$$f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

è una soluzione dell'equazione d'onda, e rappresenta un'onda il cui fronte d'onda viaggia a velocità c. Infatti il fronte d'onda è dato dalla condizione

$$t - \frac{x}{c} = \text{costante}$$

che rappresenta appunto la legge oraria di un moto rettilineo uniforme con velocità c. Posto

$$\psi(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

e $\xi = t - \frac{x}{c}$, si ha

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{df}{d\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{df}{d\xi}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{df}{d\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{df}{d\xi}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x}\frac{df}{d\xi} = -\frac{1}{c}\frac{d^2 f}{d\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{1}{c^2}\frac{d^2 f}{d\xi^2}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{df}{d\xi} = \frac{d^2 f}{d\xi^2}\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{d^2 f}{d\xi^2}$$

per cui ψ risolve l'equazione (2.2).

Va qui sottolineato che l'ipotesi delle onde elettromagnetiche fu avanzata da Maxwell per via del tutto teorica e che la dimostrazione sperimentale della loro esistenza, da parte di Hertz, avvenne successivamente. È anche fondamentale ricordare che solo grazie al lavoro di Maxwell fu possibile considerare la luce come un tipo di radiazione elettromagnetica e quindi unificare in un solo spettro di frequenze crescenti onde radio, raggi infrarossi, luce, raggi ultravioletti, raggi x, raggi gamma.

2.2 Principio di relatività ristretta

Come abbiamo visto, l'equazione d'onda (2.2) descrive un campo elettromagnetico che si propaga con velocità c. Ma rispetto a quale sistema di riferimento? Per rispondere a questa domanda fu avanzata l'ipotesi dell'esistenza dell'etere luminifero, cioè di un ipotetico mezzo che, in analogia con le onde acustiche, vibrando, facesse propagare l'onda elettromagnetica. L'etere doveva anche essere solidale con un particolare SRI che per questo motivo doveva fungere da SRI assoluto di $\mathbb{R}^3$. Chiamiamo tale SRI assoluto K_0 e consideriamo l'ulteriore SRI che denotiamo con K' in moto rispetto a K_0 con velocità costante V lungo la direzione positiva dell'asse x. Consideriamo anche un'onda elettromagnetica che si propaga rispetto a K_0 con velocità c anch'essa lungo la direzione positiva dell'asse x; la situazione è presentata nella figura 2.1 Se le ipotesi sono esatte e la legge che lega il riferimento

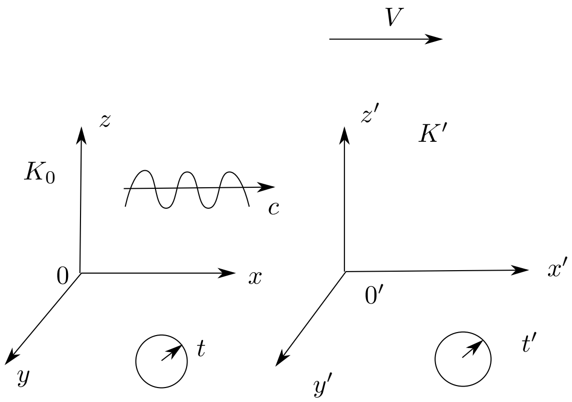

Figura 2.1: Onda elettromagnetica a velocità c rispetto a K_0.

K_0 con il riferimento K' è, come in prima istanza si potrebbe supporre, data dalle trasformazioni di Galileo, l'onda dovrà propagarsi rispetto a K' con velocità $c - V$. Infatti, se l'onda rispetto a K_0 è descritta dalla funzione

$$f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

applicando le trasformazioni di Galileo $x = x' + Vt'$, $t = t'$, la stessa onda rispetto a K' sarà descritta dalla funzione

$$f\left(t' - \frac{x' + Vt'}{c}\right) = f\left(\frac{c - V}{c}t' - \frac{x'}{c}\right)$$

che rappresenta appunto un'onda cha avanza, rispetto a K', con velocità $c - V$. Ricaviamo questo risultato anche partendo dell'equazione d'onda. Prima, però, e per utilizzo futuro, ricaviamo alcune formule di carattere generale.

Introduciamo la generica trasformazione lineare $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$T : \begin{cases} x' = \alpha x + \beta t \\ t' = \gamma x + \delta t \end{cases} \tag{2.3}$$

la cui trasformazione inversa T^{-1} è evidentemente data da

$$T^{-1}: \begin{cases} x = \dfrac{\delta}{\alpha\delta-\beta\gamma}x' - \dfrac{\beta}{\alpha\delta-\beta\gamma}t' \\[2ex] t = -\dfrac{\gamma}{\alpha\delta-\beta\gamma}x' + \dfrac{\alpha}{\alpha\delta-\beta\gamma}t' \end{cases}$$

supponendo $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Per la generica funzione $\psi(x,t)$ si ha allora

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x} = \alpha\frac{\partial\psi}{\partial x'} + \gamma\frac{\partial\psi}{\partial t'},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = \beta\frac{\partial\psi}{\partial x'} + \delta\frac{\partial\psi}{\partial t'},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial t'}{\partial x} \\ &= \alpha\frac{\partial}{\partial x'}\left(\alpha\frac{\partial\psi}{\partial x'} + \gamma\frac{\partial\psi}{\partial t'}\right) + \gamma\frac{\partial}{\partial t'}\left(\alpha\frac{\partial\psi}{\partial x'} + \gamma\frac{\partial\psi}{\partial t'}\right) \\ &= \alpha^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2} + 2\alpha\gamma\frac{\partial^2\psi}{\partial x'\partial t'} + \gamma^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t'^2},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'}\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial t'}{\partial t} \\ &= \beta\frac{\partial}{\partial x'}\left(\beta\frac{\partial\psi}{\partial x'} + \delta\frac{\partial\psi}{\partial t'}\right) + \delta\frac{\partial}{\partial t'}\left(\beta\frac{\partial\psi}{\partial x'} + \delta\frac{\partial\psi}{\partial t'}\right) \\ &= \beta^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2} + 2\beta\delta\frac{\partial^2\psi}{\partial x'\partial t'} + \delta^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t'^2}.\end{aligned}$$

Nel caso delle trasformazioni di Galileo si ha

$$\alpha = 1, \quad \beta = -V, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 1$$

per cui, avendo posto

$$\psi(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

si trova

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2}, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = V^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2} - 2V\frac{\partial^2\psi}{\partial x'\partial t'} + \frac{\partial^2\psi}{\partial t'^2}.$$

Sostituendo nell'equazione d'onda in una dimensione

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \tag{2.4}$$

si ricava

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2} + \frac{2V}{c^2 - V^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x'\partial t'} - \frac{1}{c^2 - V^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t'^2} = 0. \tag{2.5}$$

Utilizzando per convenienza ancora le lettere f e ψ introduciamo ora l'onda piana riferita a K' data da

$$\psi(x',t') = f\left(t' - \frac{x'}{a}\right).$$

Si verifica immediatamente che deve essere $a = c - V$ oppure $a = -c - V$; quest'ultima soluzione, che non consideriamo, corrisponde alla propagazione dell'onda in verso contrario. Infatti, se $\xi = t' - \dfrac{x'}{a}$, si ha

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2} = \frac{1}{a^2}\frac{d^2 f}{d\xi^2}, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x'\partial t'} = -\frac{1}{a}\frac{d^2 f}{d\xi^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t'^2} = \frac{d^2 f}{d\xi^2}$$

da cui, sostituendo nella (2.5), si ottiene l'equazione algebrica di secondo grado in a data da

$$a^2 + 2Va - (c^2 - V^2) = 0$$

le cui soluzioni sono appunto $a = -V \pm c$.

L'onda piana

$$f\left(t' - \frac{x'}{a}\right)$$

si dovrebbe propagare quindi rispetto al sistema K' con velocità $c - V$, esattamente come ci si deve aspettare applicando i presupposti della meccanica classica. In un SRI qualunque, quindi, un raggio di luce (d'ora in poi ci riferiremo alle onde elettromagnetiche chiamandole raggi di luce) dovrebbe possedere una velocità dipendente dalla velocità del suddetto SRI rispetto all'etere. Per rilevare sperimentalmente tale dipendenza, nel 1887 Michelson e Morley eseguirono un esperimento considerato universalmente un esperimento cruciale. Esso non portò ad alcun risultato e non fu possibile rilevare, nonostante la grande precisione ed accuratezza, alcuna velocità relativa, nella fattispecie della Terra rispetto all'etere. Il profondo significato dell'esperimento di Michelson e Morley, nell'interpretazione che ne diede Einstein, è che la velocità della luce c nel vuoto è la stessa in tutti i SRI. Questo risultato costituisce una nuova legge di natura, sconosciuta ai creatori della meccanica classica, che va sotto il nome di principio di costanza della velocità della luce.

Sulla base di questo risultato, nel 1905, Einstein propose una modifica al principio di relatività galileiana in questi termini: tutti i SRI devono essere meccanicamente ed elettromagneticamente equivalenti ovvero le leggi della meccanica e dell'elettromagnetismo devono essere le stesse in tutti i SRI. Queste affermazioni equivalenti costituiscono il cosiddetto *principio di relatività ristretta*. Questo principio, in definitiva, consiste nella fusione di due principi: il principio di relatività, ovvero che tutti i SRI devono essere meccanicamente equivalenti, ed il principio di costanza della velocità della luce.

Siamo così pervenuti al seguente scenario: la meccanica classica descritta dalla lagrangiana (1.2) è invariante rispetto alle trasformazioni di Galileo; la teoria del campo elettromagnetico di Maxwell, in particolare l'equazione d'onda, non è invariante rispetto alle trasformazioni di Galileo. Ma, se la natura è da considerarsi un *unicum* interconnesso, allora le sue leggi devono essere non contraddittorie. Partendo da questo presupposto siamo invece in presenza di una palese contraddizione. Come uscirne? Se consideriamo l'esperimento di Michelson e Morley come rivelatore di un principio di natura, basterà ricavare le trasformazioni che rendono invarianti le leggi dell'elettromagnetismo e riformulare la meccanica classica in modo che diventi anch'essa invariante rispetto alle nuove trasformazioni. Ricavare le leggi di trasformazione che rendono invarianti l'equazione d'onda è matematicamente semplice, riformulare la meccanica classica è evidentemente compito più complesso: occorre creare una meccanica relativistica. Inoltre, data la bontà della meccanica classica per fenomeni ordinari, ovvero in presenza di velocità piccole rispetto alla velocità della luce c, deve valere il limite concettuale, che chiameremo anche limite classico, espresso dalla seguente:

$$\text{meccanica relativistica} \to \text{meccanica classica, per } c \to +\infty.$$

Quando dunque si considera la velocità delle interazioni infinita, cioè istantaneità di interazione, come si presuppone in meccanica classica, si deve riottenere la meccanica classica.

2.3 Le trasformazioni di Lorentz

Le trasformazioni che rendono invariante l'equazione d'onda si chiamano trasformazioni di Lorentz e sono dovute principalmente a Lorentz e Poincaré (1900 circa). Con l'introduzione di tali trasformazioni, il principio di relatività ristretta può essere quindi formulato così: le leggi della meccanica e dell'elettromagnetismo devono essere invarianti rispetto alle trasformazioni di Lorentz.

Ricaviamo ora le trasformazioni di Lorentz supponendo che tali trasformazioni siano nella forma (2.3). Effettuando dunque le generiche trasformazioni (2.3) l'equazione d'onda (2.4) diventa

$$\left(\alpha^2 - \frac{\beta^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2} + \left(2\alpha\gamma - \frac{2\beta\delta}{c^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x'\partial t'} + \left(\gamma^2 - \frac{\delta^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial t'^2} = 0.$$

Affinchè l'equazione d'onda sia invariante rispetto alla trasformazione T occorre che sia identicamente vero

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t'^2} = 0.$$

Questo si verifica se

$$\begin{cases} \alpha^2 - \dfrac{\beta^2}{c^2} = 1 \\ 2\alpha\gamma - \dfrac{2\beta\delta}{c^2} = 0 \\ \gamma^2 - \dfrac{\delta^2}{c^2} = -\dfrac{1}{c^2}. \end{cases}$$

Risolvendo rispetto ad α si ricava

$$\begin{cases} \beta = -c\sqrt{\alpha^2 - 1} \\ \gamma = -\dfrac{1}{c}\sqrt{\alpha^2 - 1} \\ \delta = \alpha \end{cases}$$

dove i segni negativi sono stati presi per convenienza. La trasformazione T diventa perciò data da

$$T : \begin{cases} x' = \alpha x - ct\sqrt{\alpha^2 - 1} \\ \\ t' = -\dfrac{1}{c}\sqrt{\alpha^2 - 1}x + \alpha t. \end{cases}$$

Osserviamo che $\det T = 1$. L'inversa T^{-1} è di conseguenza data da

$$T^{-1} : \begin{cases} x = \alpha x' + ct'\sqrt{\alpha^2 - 1} \\ \\ t = \dfrac{1}{c}\sqrt{\alpha^2 - 1}x' + \alpha t'. \end{cases}$$

Dobbiamo ora determinare α. Per fare questo ricordiamo che il SRI dato da K' si muove con velocità uniforme V nella direzione positiva dell'asse x, rispetto al SRI dato da K. Poiché

$$dx = \alpha dx' + c\sqrt{\alpha^2 - 1}dt', \quad dt = \frac{1}{c}\sqrt{\alpha^2 - 1}dx' + \alpha dt'$$

possiamo scrivere per il moto di $0'$ rispetto al sistema di riferimento K

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha dx' + c\sqrt{\alpha^2 - 1}dt'}{\dfrac{1}{c}\sqrt{\alpha^2 - 1}dx' + \alpha dt'} = V.$$

Ma, rispetto al SRI K', l'origine $0'$ è immobile per cui si ha $dx' = 0$. Possiamo perciò scrivere

$$\frac{dx}{dt} = c\frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha} = V$$

da cui si ricava immediatamente

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}$$

dove il segno positivo è stato preso per convenienza. Le trasformazioni di Lorentz cercate sono quindi date da

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}, \quad t = \frac{\dfrac{V}{c^2}x' + t'}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}.$$

Si noti che, per $c \to +\infty$, come è giusto che sia, si riottengono le trasformazioni di Galileo.

2.3.1 Conseguenze delle trasformazioni di Lorentz

Siano K e K' due SRI di cui il secondo si muove con velocità uniforme V lungo la direzione positiva dell'asse x rispetto al primo, come illustrato nella figura 2.2. Le trasformazioni di Lorentz, esprimendo tutte le coordinate, sono date da

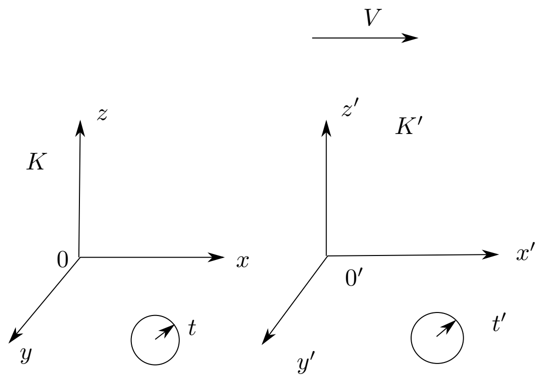

Figura 2.2: K' si muove con velocità V rispetto a K.

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}, \qquad \begin{cases} y = y' \\ z = z', \end{cases} \qquad t = \frac{\dfrac{V}{c^2}x' + t'}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}. \tag{2.6}$$

Esse conducono ad un radicale ripensamento dei concetti classici di spazio e di tempo. Tali concetti sono desunti dal senso comune che si è evoluto avendo il nostro cervello a che fare continuamente con fenomeni ordinari, fenomeni cioè che avvengono a velocità molto piccole rispetto a c, mentre tale velocità non è percepita dai sensi.

Mostriamo che questa è stata una vera e propria rivoluzione nel pensiero scientifico in alcuni fondamentali aspetti: simultaneità, lunghezza, durata, composizione di velocità.

Consideriamo, nel SRI dato da K', i due eventi (il significato della parola evento è intuitivo, per la definizione esatta si veda la sezione 2.4) (x'_A, t') e (x'_B, t') con $x'_A \neq x'_B$. Si tratta di due eventi simultanei rispetto a K' che avvengono in due punti diversi dello spazio, rispetto al riferimento K' come illustrato nella figura 2.3.

Usando il senso comune e la meccanica classica, in cui il tempo è considerato universale, ovvero lo stesso per ogni SRI, cioè $t = t'$, ci si aspetterebbe che anche

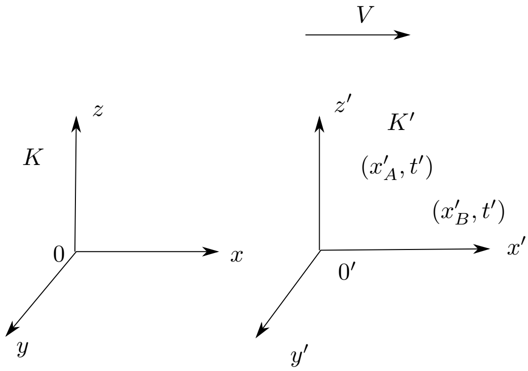

Figura 2.3: I due eventi (x'_A, t') e (x'_B, t') in K'.

in K i medesimi due eventi avvengano nello stesso istante di tempo, ovvero siano ancora simultanei. Applicando le trasformazioni di Lorentz si ottiene invece

$$x_A = \frac{x'_A + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad t_A = \frac{\frac{V}{c^2}x'_A + t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$x_B = \frac{x'_B + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad t_B = \frac{\frac{V}{c^2}x'_B + t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Come si vede bene $t_A \neq t_B$, perciò, rispetto a K i due eventi non sono più simultanei.

Il concetto di simultaneità, apparentemente così ordinario, riceve così una radicale modifica: eventi simultanei in un SRI non lo sono rispetto ad un altro SRI, se in punti diversi dello spazio.

Consideriamo nel SRI dato da K' un regolo rigido, ovvero un corpo rigido usabile come metro per misurare le lunghezze, solidale, ovvero in quiete, con esso e posizionato parallelamente all'asse x' come nella figura 2.4. Tale regolo rappresenta un intervallo spaziale. Agli estremi A e B del regolo possono essere associati gli eventi (x'_A, t'_A) e (x'_B, t'_B) con $x'_A < x'_B$ e dove t'_A e t'_B sono opportuni istanti. Si tenga presente che, essendo il regolo in quiete rispetto al riferimento K', in ogni istante, misurato in K', gli estremi A e B saranno, nel riferimento K', in posizioni spaziali invariate.

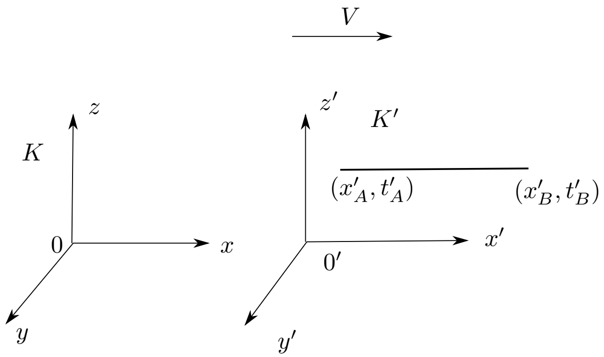

Figura 2.4: Il regolo di estremi (x'_A, t'_A) e (x'_B, t'_B).

Applicando le trasformazioni di Lorentz si ottiene

$$x_A = \frac{x'_A + Vt'_A}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}, \quad t_A = \frac{\dfrac{V}{c^2}x'_A + t'_A}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}$$

$$x_B = \frac{x'_B + Vt'_B}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}, \quad t_B = \frac{\dfrac{V}{c^2}x'_B + t'_B}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}.$$

Affinchè la misura del regolo rispetto al riferimento K abbia senso, occorre che $t_A = t_B$, ovvero che sia

$$\frac{V}{c^2}x'_A + t'_A = \frac{V}{c^2}x'_B + t'_B$$

da cui

$$t'_B - t'_A = \frac{V}{c^2}(x'_A - x'_B).$$

La lunghezza del regolo nel riferimento K sarà allora data da

$$x_B - x_A = \frac{x'_B - x'_A + V(t'_B - t'_A)}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} = \frac{x'_B - x'_A + \dfrac{V^2}{c^2}(x'_A - x'_B)}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}$$

da cui

$$x_B - x_A = (x'_B - x'_A)\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Indicando con ℓ_0 la lunghezza del regolo rispetto al riferimento K', il SRI rispetto al quale esso è in quiete, e con ℓ la lunghezza rispetto al riferimento K, scriveremo più incisivamente

$$\ell = \ell_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Il valore ℓ_0 si chiama lunghezza propria del regolo, la lunghezza del regolo in quiete, ed ℓ, che risulta minore della lunghezza propria, si dice che ha subito la contrazione di Lorentz. Si noti l'importante fatto indicato dal limite

$$\lim_{V \to c} \ell = 0.$$

In definitiva, possiamo affermare contro il senso comune che un regolo in moto sembra, a chi sta fermo, accorciato.

Consideriamo ora nel SRI dato da K' un orologio solidale con esso e posizionato, per comodità, nell'origine $0'$. All'orologio siano associati gli eventi che rappresentano l'inizio e la fine di un intervallo temporale $(0', t'_1)$ e $(0', t'_2)$ con $t'_1 < t'_2$, come mostrato nella figura 2.5

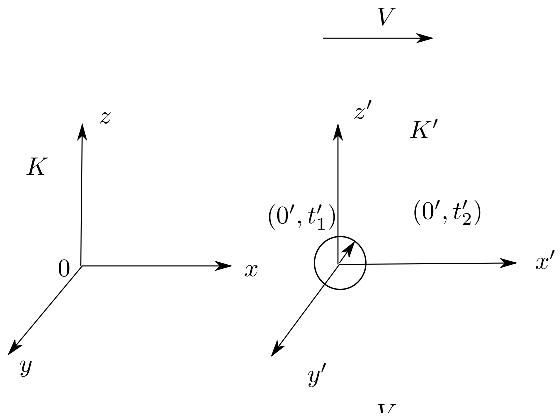

Figura 2.5: Inizio e fine dell'intervallo temporale $(0', t'_1) - (0', t'_2)$.

Applicando le trasformazioni di Lorentz si ottiene

$$x_1 = \frac{Vt'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad t_1 = \frac{t'_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$x_2 = \frac{Vt'_2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad t_2 = \frac{t'_2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Da queste si ricava direttamente

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}.$$

Indicando con Δt_0 l'intervallo temporale rispetto al riferimento K', il SRI rispetto al quale l'orologio è in quiete, e con Δt l'intervallo temporale rispetto al riferimento K, abbiamo

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}.$$

Il valore Δt_0 si chiama tempo proprio, il tempo misurato dall'orologio in quiete, e Δt, che risulta maggiore del tempo proprio, si dice che ha subito la dilatazione di Lorentz. Anche in questo caso si noti l'importante fatto indicato dal limite

$$\lim_{V \to c} \Delta t = +\infty.$$

In definitiva, possiamo affermare contro il senso comune che un orologio in moto sembra, a chi sta fermo, scandire il tempo più lentamente.

Consideriamo infine nel SRI dato da K' un punto che si muove di moto rettilineo uniforme lungo una traiettoria parallela all'asse x' e con verso positivo. La velocità di detto punto sia, nel riferimento K', data da v'. Si considerino i due eventi (x'_1, t'_1) e (x'_2, t'_2), con $x'_1 < x'_2$ e $t'_1 < t'_2$, per cui valga

$$v' = \frac{x'_2 - x'_1}{t'_2 - t'_1}$$

come illustrato nella figura 2.6

Applicando le trasformazioni di Lorentz si ottiene

$$x_1 = \frac{x'_1 + V t'_1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}, \quad t_1 = \frac{\dfrac{V}{c^2} x'_1 + t'_1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}$$

$$x_2 = \frac{x'_2 + V t'_2}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}, \quad t_2 = \frac{\dfrac{V}{c^2} x'_2 + t'_2}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}.$$

Nel SRI dato da K la velocità v del punto sarà vista come

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

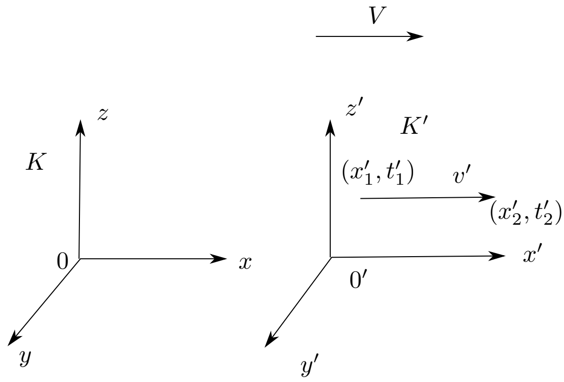

Figura 2.6: Gli eventi (x'_1, t'_1) e (x'_2, t'_2).

che, sostituendo e semplificando, diventa

$$v = \frac{v' + V}{1 + \dfrac{v'V}{c^2}}.$$

Questa è la formula della composizione relativistica delle velocità. È interessante notare il caso limite in cui $V = c$ e $v' = c$ perché il conseguente risultato $v = c$ mostra chiaramente che, come è giusto aspettarsi in relatività ristretta, la velocità della luce nel vuoto c risulta insuperabile. D'altra parte, invece, facendo il limite classico $c \to +\infty$, ritorna la legge classica di composizione delle velocità $v = v' + V$.

2.4 Lo spazio−tempo $\mathbb{M}^4$

Siano K e K' due SRI di cui il secondo si muove con velocità uniforme V lungo la direzione positiva dell'asse x rispetto al primo, come nella figura 2.2. La trasformazione di Lorentz è dunque data da

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}, \quad \begin{cases} y = y' \\ z = z' \end{cases}, \quad t = \frac{\dfrac{V}{c^2}x' + t'}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}.$$

Il fatto saliente di questa trasformazione è che le coordinate spaziali e temporali sono mescolate. Questo suggerisce la rivoluzionaria idea, rispetto alla meccanica classica ed al senso comune, di spazio−tempo (cronotopo), cioè di un *unicum* in cui spazio e tempo sono indissolubilmente legati. Un evento spazio−temporale, detto anche punto d'universo, è indicato dalla quaterna (x, y, z, t) ed una curva nello spazio−tempo è detta linea d'universo.

È quindi possibile creare uno spazio quadridimensionale a struttura vettoriale al quale riferire i fenomeni meccanici ed elettromagnetici, oggetto della teoria della relatività ristretta. Per fare questo conviene porre $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ e $x^3 = z$. Un evento è quindi indicato dal punto, o quadrivettore, $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ che è detto raggio vettore quadridimensionale, o raggio quadrivettore o quadrivettore posizione. La trasformazione di Lorentz diventa di conseguenza

$$x^0 = \frac{(x^0)' + \frac{V}{c}(x^1)'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x^1 = \frac{\frac{V}{c}(x^0)' + (x^1)'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \begin{cases} x^2 = (x^2)' \\ x^3 = (x^3)'. \end{cases}$$

e invertendo

$$(x^0)' = \frac{x^0 - \frac{V}{c}x^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (x^1)' = \frac{-\frac{V}{c}x^0 + x^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad \begin{cases} (x^2)' = x^2 \\ (x^3)' = x^3. \end{cases}$$

Indichiamo con $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}^{-1}$ le matrici che rappresentano le trasformazioni Lorentz diretta ed inversa; tali matrici sono date da

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & \frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & \frac{-\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{-\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Introduciamo ora il prodotto interno fra i vettori $a = (a^0, a^1, a^2, a^3)$ e $b = (b^0, b^1, b^2, b^3)$ definito da

$$\langle a, b\rangle = a^0b^0 - a^1b^1 - a^2b^2 - a^3b^3. \tag{2.7}$$

Nella letteratura a volte si trova anche una analoga definizione in cui il segno meno è presente al primo termine mentre gli altri segni sono positivi. Lo spazio $\mathbb{R}^4$ dotato del prodotto interno (2.7) è detto spazio pseudoeuclideo di Minkowski $\mathbb{M}^4$. È facile dimostrare che

$$\langle a, b\rangle = \langle \mathcal{L}(a), \mathcal{L}(b)\rangle.$$

Per questo motivo $\mathcal{L}$ è un operatore ortogonale e questo significa che $\mathcal{L}$ può considerarsi un operatore di rotazione nello spazio pseudoeuclideo $\mathbb{M}^4$. La trasformazione di Lorentz, quindi, rappresenta geometricamente una rotazione in $\mathbb{M}^4$. Il prodotto interno (2.7) induce in $\mathbb{M}^4$ la pseudometrica di Lorentz

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \tag{2.8}$$

che è una metrica pseudoriemanniana; la forma quadratica associata è definita dalla matrice

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

la quale risulta invertibile, essendo $\det(g_{ij}) = -1$; denotiamo con (g^{ij}) la matrice inversa della matrice (g_{ij}). Evidentemente si ha $g_{ij} = g^{ij}$. La norma quadra di un vettore $a = (a^0, a^1, a^2, a^3)$ di $\mathbb{M}^4$ è quindi data da

$$|a|^2 = \langle a, a\rangle = (a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2$$

Il significato fisico della pseudometrica (2.8) sta nel fatto che la formula della distanza (2.8) vale anche per eventi non infinitamente vicini; si ha perciò

$$\Delta s^2 = (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2.$$

L'elemento Δs^2 è evidentemente invariante rispetto alla trasformazione di Lorentz.

2.4.1 Trasformazioni di Lorentz generiche

Accenniamo brevemente, in questa sezione, alle trasformazioni di Lorentz rispetto ad una generica velocità costante $V = (V^1, V^2, V^3)$. Si può dimostrare che in tale contesto la matrice della trasformazione di Lorentz

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) \mapsto ((x^0)', (x^1)', (x^2)', (x^3)')$$

ha la seguente espressione:

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\dfrac{V^1}{c} & -\gamma\dfrac{V^2}{c} & -\gamma\dfrac{V^3}{c} \\ -\gamma\dfrac{V^1}{c} & 1+\dfrac{\gamma^2}{\gamma+1}\dfrac{(V^1)^2}{c^2} & \dfrac{\gamma^2}{\gamma+1}\dfrac{V^1V^2}{c^2} & \dfrac{\gamma^2}{\gamma+1}\dfrac{V^1V^3}{c^2} \\ -\gamma\dfrac{V^2}{c} & \dfrac{\gamma^2}{\gamma+1}\dfrac{V^1V^2}{c^2} & 1+\dfrac{\gamma^2}{\gamma+1}\dfrac{(V^2)^2}{c^2} & \dfrac{\gamma^2}{\gamma+1}\dfrac{V^2V^3}{c^2} \\ -\gamma\dfrac{V^3}{c} & \dfrac{\gamma^2}{\gamma+1}\dfrac{V^1V^3}{c^2} & \dfrac{\gamma^2}{\gamma+1}\dfrac{V^2V^2}{c^2} & 1+\dfrac{\gamma^2}{\gamma+1}\dfrac{(V^3)^2}{c^2} \end{pmatrix}$$

dove abbiamo posto

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{(V^1)^2+(V^2)^2+(V^3)^2}{c^2}}}.$$

L'insieme delle trasformazioni di Lorentz forma un gruppo, e più precisamente un sottogruppo del gruppo delle isometrie (gruppo di Poincaré) dello spazio−tempo $\mathbb{M}^4$; in particolare il gruppo delle isometrie di $\mathbb{M}^4$ contiene le trasformazioni di Lorentz e le traslazioni. Lo spazio−tempo di Minkowski quindi può essere studiato, dal punto di vista matematico, seguendo il Programma di Erlangen, ovvero studiando le trasformazioni dello spazio stesso. Osserviamo a tal proposito che la pseudometrica di Lorentz rende la geometria dello spazio $\mathbb{M}^4$ una geometria non euclidea, e più precisamente di tipo iperbolico; per maggiori dettagli sullo studio matematico dello spazio di Minkowski si veda [8].

2.4.2 Proprietà fisiche della metrica di Lorentz

Vediamo ora le conseguenze fisiche della formula della distanza nel caso di una sola coordinata spaziale, cioè $\Delta s^2 = (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2$, osservando la figura 2.7. Su tale grafico sono riportati gli eventi

$$P(x^0, x^1), \quad A(x^0+\Delta x^0_A, x^1+\Delta x^1), \quad B(x^0+\Delta x^0_B, x^1+\Delta x^1)$$

$$C(x^0+\Delta x^0_C, x^1+\Delta x^1).$$

L'intervallo spazio−temporale PA ha lunghezza

$$PA = \sqrt{(\Delta x^0_A)^2 - (\Delta x^1)^2}.$$

Supponiamo che sia $PA = 0$; si tratta quindi di un intervallo nullo. Il significato fisico di un intervallo nullo è che i suoi estremi, nell'esempio gli eventi P e A, sono

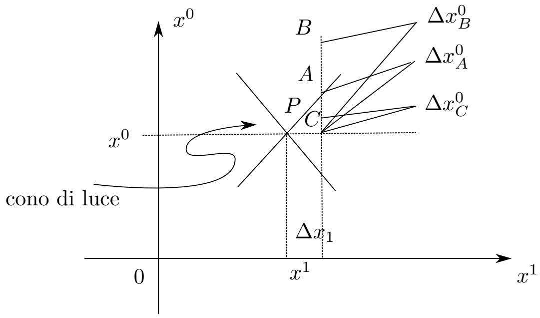

Figura 2.7: Intervalli spazio−temporali.

collegabili da un raggio di luce. Infatti $(\Delta x^0_A)^2 - (\Delta x^1)^2 = 0$ implica $\Delta x^0_A = \pm\Delta x^1$ cioè $c\Delta t_A = \pm\Delta x^1$ per cui

$$\frac{\Delta x^1}{\Delta t_A} = \pm c$$

Nell'esempio considerato si ha $\dfrac{\Delta x^1}{\Delta t_A} = c$.

Generalizzando questo risultato, gli eventi che sono collegabili da un raggio di luce al punto P si trovano sulla superficie del cosiddetto cono di luce rappresentato in figura 2.8 che ha vertice in P. Naturalmente, la superficie del semicono inferiore

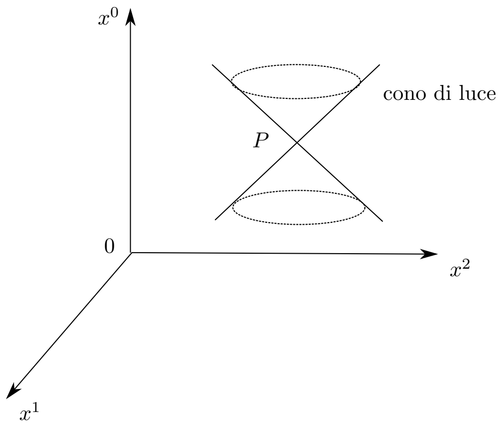

Figura 2.8: Cono di luce.

è formata da eventi dai quali nel passato di P, tenendo fisse le sue coordinate spaziali, sono partiti raggi di luce che poi hanno raggiunto P, mentre la superficie del semicono superiore è formata da eventi che saranno raggiunti nel futuro di P da raggi di luce che partono da P.

L'intervallo PB ha lunghezza

$$PB = \sqrt{(\Delta x_B^0)^2 - (\Delta x^1)^2} > 0.$$

Si tratta, come si dice, di un intervallo di genere tempo, rappresentato dalla figura 2.9 Il significato fisico di un intervallo di genere tempo è che i suoi estremi, nell'esempio gli eventi P e B, sono collegabili da un eventuale segnale di velocità minore di c. Infatti, il segnale rappresentato dal segmento PB ha velocità minore di c essendo $\Delta x_B^0 > \Delta x^1$ da cui deriva che

$$\frac{\Delta x}{\Delta t_B} < c.$$

L'intervallo PC ha lunghezza

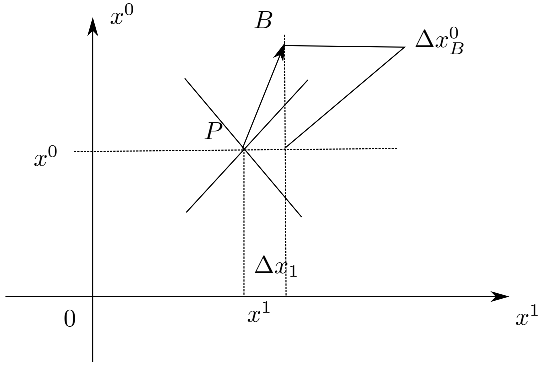

Figura 2.9: Intervallo di genere tempo.

$$PC = \sqrt{(\Delta x_C^0)^2 - (\Delta x^1)^2}$$

immaginaria. Si tratta, come si dice, di un intervallo di genere spazio rappresentato in figura 2.10. Il significato fisico di un intervallo di genere spazio è che i suoi estremi, nell'esempio gli eventi P e C, non possono essere collegati da nessun segnale, essendo c insuperabile. Infatti, per un ipotetico segnale rappresentato dal segmento PC si avrebbe $\Delta x_C^0 < \Delta x^1$ da cui deriverebbe

$$\frac{\Delta x^1}{\Delta t_C} > c.$$

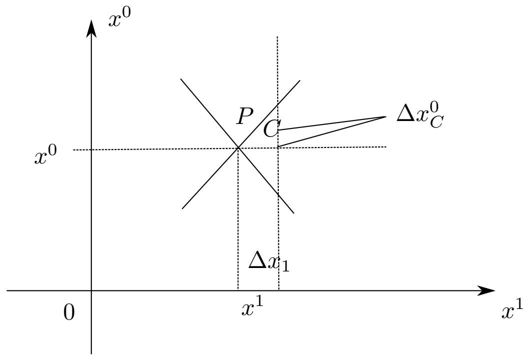

Figura 2.10: Intervallo di genere spazio.

Per quanto riguarda i concetti di prima, dopo, futuro e passato, si deve notare quanto segue, illustrato nella figura 2.11 L'intervallo PA è di genere tempo ovvero

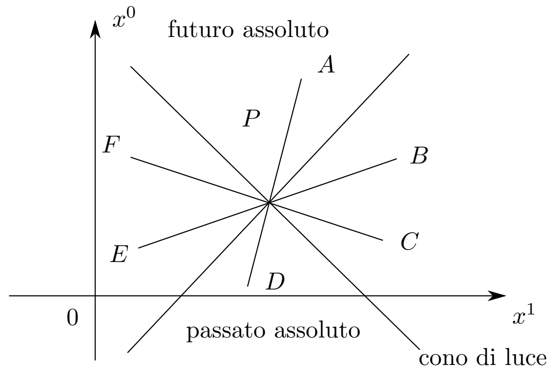

Figura 2.11: Futuro assoluto e passato assoluto.

la sua lunghezza è positiva. Questo significa che, essendo essa invariante per la trasformazione di Lorentz, sarà positiva anche per ogni altro SRI. Poiché $t_A > t_P$, l'evento A sarà sempre dopo l'evento P in ogni SRI, cioè in modo assoluto. I punti interni al semicono superiore del cono di luce con vertice in P sono detti il futuro assoluto di P. Anche l'intervallo PD è di genere tempo, ma per esso vale $t_D < t_P$. I punti interni al semicono inferiore del cono di luce con vertice in P sono detti, per questo, il passato assoluto di P. Gli intervalli PB, PC, PE, PF, sono di genere spazio cioè hanno lunghezza immaginaria. Per questi eventi, pur essendo le lunghezze dei suddetti intervalli ancora degli invarianti, il prima e il dopo l'evento P non sono concetti assoluti, bensì sono relativi. Per esempio, l'evento B nel grafico risulta dopo P. In un altro SRI il suo trasformato potrebbe avvenire prima del trasformato di P.

2.5 Meccanica relativistica

La meccanica classica, come visto in precedenza, non è Lorentz−invariante, ovvero non è invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz, ma è invariante rispetto alle trasformazioni di Galileo. La meccanica classica, allora, deve essere corretta con la creazione di una meccanica relativistica. La meccanica relativistica deve avere due fondamentali requisiti: essere Lorentz−invariante e tendere alla meccanica classica quando $c \to +\infty$ (limite classico).

Costruiamo la meccanica relativistica limitandoci al caso della particella libera. La presenza dell'interazione elettromagnetica verrà trattata nella prossima sezione dedicata all'elettrodinamica relativistica. Le altre interazioni presenti in natura, gravitazionale, nucleare debole e forte, non sono inscrivibili nella teoria della relatività ristretta. È opportuno precisare a questo punto che la meccanica classica, la teoria del campo elettromagnetico di Maxwell, la teoria della relatività di Einstein, sia ristretta sia generale, sono teorie classiche in senso lato. Esse si basano sui concetti fondamentali di traiettoria regolare e di campo regolare: i punti materiali si muovono lungo traiettorie che sono curve regolari e il campo elettromagnetico e gravitazionale sono rappresentati da grandezze regolari. La meccanica quantistica, e ogni teoria da essa derivata, invece, non è una teoria classica. La meccanica quantistica si basa sul presupposto totalmente non classico che non esiste il concetto di traiettoria regolare. L'aggettivo "classico" è quindi estendibile anche alla teoria del campo elettromagnetico di Maxwell ed alla teoria della relatività, ristretta e generale. Le problematiche quantistiche esulano dai nostri scopi totalmente classici.

Fatte queste precisazioni logiche e metodologiche, procediamo a costruire la meccanica relativistica di una particella libera. Consideriamo gli eventi A e B di $\mathbb{M}^4$ come nella figura **??**. Fra le infinite linee d'universo che uniscono i due eventi, una particella di massa m percorrerà quella che minimizza l'azione. Naturalmente, tale linea dovrà essere costituita da elementi ds di genere tempo. Come possiamo definire l'azione in meccanica relativistica? Ovviamente postulando che debba essere Lorentz−invariante. Partendo da questo presupposto del tutto plausibile, la forma matematica più semplice di azione è la seguente:

$$S = k \int_{AB} ds \tag{2.9}$$

dove k è una opportuna costante che in questa fase non possiamo ancora definire, e AB è un arco di curva che congiunge gli eventi A e B, dunque una traiettoria nello spazio−tempo $\mathbb{M}^4$. Supponendo che il principio di minima azione sia un principio generale che sta alla base di ogni teoria fisica, possiamo scrivere la condizione

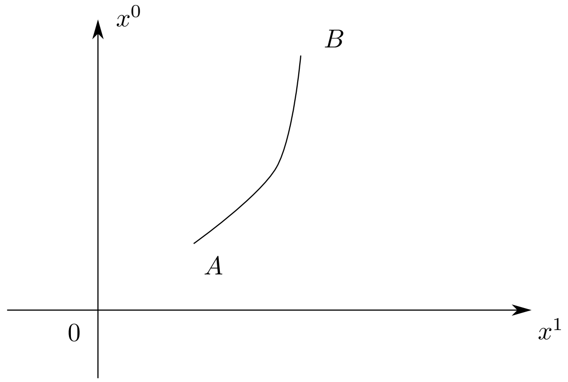

Figura 2.12: Linea d'universo congiungente A con B.

variazionale

$$\delta S = k\delta \int_{AB} ds = 0.$$

Questa equazione determina l'equazione del moto di una particella libera in meccanica relativistica. Definiamo $dx_0 = dx^0$ e $dx_i = -dx^i$ per $i = 1, 2, 3$; allora si ha

$$ds = \sqrt{\sum_{i=0}^{3} dx_i dx^i}$$

Ne segue che

$$\delta S = k \int_{AB} \sum_{i=0}^{3} \frac{dx_i}{ds} \delta dx^i = 0.$$

Introducendo il quadrivettore velocità

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}, \quad u_i = \frac{dx_i}{ds}$$

si ha

$$\delta S = k \int_{AB} \sum_{i=0}^{3} u_i \delta dx^i = 0.$$

Integrando per parti e tenendo presente che $\delta dx^i = d\delta x^i$ si ottiene

$$\delta S = k \sum_{i=0}^{3} \left[u_i \delta x^i\right]_B^A - k \int_{AB} \sum_{i=0}^{3} \frac{du_i}{ds} \delta x^i = 0.$$

Poiché per definizione di variazione è $\delta x^i(A) = \delta x^i(B) = 0$, si ottiene infine, per l'arbitrarietà di δx^i,

$$\frac{du_i}{ds} = 0. \tag{2.10}$$

che sono le equazioni di Eulero−Lagrange per l'azione (2.9). Queste sono le equazioni del moto di una particella libera in meccanica relativistica. Il vettore $\dfrac{du^i}{ds}$ è detto quadriaccelerazione e la (2.10) dice, in analogia con la meccanica classica, che l'accelerazione di una particella libera in un SRI è nulla, ovvero la sua velocità è costante.

Le equazioni del moto (2.10) sono Lorentz−invarianti in quanto un vettore che è nullo in un sistema di riferimento lo sarà, date le leggi di trasformazioni dei vettori, anche in ogni altro. Abbiamo così costruito la meccanica relativistica almeno soddisfacendo il requisito di Lorentz−invarianza. Per soddisfare il limite classico, cioè

$$\text{meccanica relativistica} \to \text{meccanica classica per } c \to +\infty$$

procediamo secondo il modello lagrangiano. In questo modo verrà definita anche la costante k. Secondo il modello lagrangiano si ha, ponendo $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ e $x^3 = z$

$$S = k \int_{AB} \sqrt{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2} = kc \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt.$$

Possiamo allora scrivere

$$L = kc\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

e questa è la lagrangiana della particella libera.

Determiniamo il valore della costante k imponendo il limite classico. Se poniamo $\beta = \dfrac{v}{c}$, la lagrangiana diventa $L = kc\sqrt{1-\beta^2}$. Sviluppando in serie di Taylor nell'intorno di $\beta = 0$, si ottiene

$$L = L(\beta) = L(0) + \beta L'(0) + \frac{\beta^2}{2} L''(0) + o(\beta^2)$$

Essendo

$$L'(\beta) = -kc\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad L''(\beta) = -kc\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^3}}$$

avremo

$$L = kc - \frac{1}{2}k\frac{v^2}{c} + o(v^2/c^2)$$

Tenendo presente che la lagrangiana è definibile a meno di una costante additiva e facendo il limite $\beta = \dfrac{v}{c} \to 0$, otteniamo, approssimando al secondo ordine, la lagrangiana classica $L = -\dfrac{1}{2}k\dfrac{v^2}{c}$ che, confrontata con la nota $L = \dfrac{1}{2}mv^2$, fornisce $k = -mc$. La lagrangiana relativistica della particella libera è allora data da

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{2.11}$$

mentre l'azione sarà dunque data da

$$S = -mc^2\int_{t_A}^{t_B}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt.$$

Ricaviamo ora le equazioni del moto per la particella libera. Deve essere

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial L}{\partial y}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \frac{\partial L}{\partial z}$$

da cui, utilizzando la (2.11), si deduce

$$\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\dot{y}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{\dot{z}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = 0$$

ovvero

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \text{costante}, \quad \frac{\dot{y}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \text{costante}, \quad \frac{\dot{z}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \text{costante}.$$

La soluzione del sistema precedente è il moto rettilineo uniforme

$$\begin{cases} x = a_1 t + b_1 \\ y = a_2 t + b_2 \\ z = a_3 t + b_3 \end{cases}$$

dove le costanti a_i, b_i sono legate agli eventi dati A e B. Secondo il modello lagrangiano, l'energia meccanica E della particella è definita dall'equazione (1.4), cioè da

$$E = v\frac{\partial L}{\partial v} - L$$

ovvero da

$$E = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \dot{z}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - L.$$

Utilizzando la (2.11) si ricava

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}.$$

Questa formula ha un significato imprevisto e rivoluzionario rispetto alla meccanica classica. Se $v = 0$ allora si ottiene la celebre formula $E_0 = mc^2$: una particella in quiete possiede quindi un'energia intrinseca, che si chiama energia a riposo della particella, non nulla, in antitesi con quanto previsto dalla meccanica classica. Questo fatto è alla base delle reazioni nucleari di fissione e di fusione nonché di tutte le interazioni fra particelle.

La quantità di moto p di una particella è data da

$$p = \frac{\partial L}{\partial v}.$$

Utilizzando la (2.11) si ricava

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Si noti che per $v = 0$ si riottiene la formula classica. Energia e quantità di moto sono evidentemente legate dalla relazione

$$p = \frac{Ev}{c^2}.$$

Concludiamo osservando che se $v \to c$ sia l'energia che la quantità di moto divergono: la velocità c non è quindi raggiungibile da corpi dotati di massa. In meccanica quantistica relativistica, però, sono previste particelle di massa nulla che viaggiano alla velocità della luce, per esempio i fotoni. Per queste particelle si ha

$$p = \frac{E}{c}.$$

2.6 Elettrodinamica relativistica

Consideriamo un sistema isolato di particelle elettricamente cariche, ovvero di particelle puntiformi dotate di massa e carica elettrica e che chiameremo per semplicità cariche, rispetto ad un SRI di $\mathbb{M}^4$. Le cariche generano un campo elettromagnetico che interagisce a sua volta con le cariche stesse. Tutte le proprietà del campo elettromagnetico sono definite dal quadripotenziale A^i che è legato al potenziale scalare Φ ed al potenziale vettore A secondo la teoria di Maxwell dalla relazione $\mathrm{A}^i = \left(\frac{\Phi}{c}, \mathrm{A}\right)$ essendo $\mathrm{A} = (\mathrm{A}_x, \mathrm{A}_y, \mathrm{A}_z)$. L'azione per il sistema di cariche e il campo è data da $S = S_1 + S_2 + S_3$ dove S_1 è l'azione delle particelle intese libere, S_2 è l'azione relativa all'interazione fra le cariche ed il campo ed S_3 è l'azione del campo elettromagnetico inteso come entità fisica. L'azione per una particella libera, come sappiamo, è data da

$$S_1 = -mc \int_{AB} ds.$$

Le altre azioni, S_2 e S_3, verranno definite in seguito. L'elettrodinamica relativistica fornisce una descrizione non completa del moto delle cariche e delle proprietà del campo che conduce in ultima analisi all'equazione del moto di Lorentz ed alle equazioni di Maxwell. Per descrizione non completa intendiamo il fatto che l'elettrodinamica relativistica non descrive simultaneamente l'evoluzione delle cariche e del campo. I due aspetti, evoluzione delle cariche e del campo, vengono trattati separatamente: si assegna il campo e si ricavano le equazioni del moto delle cariche, supponendo che le cariche siano piccole in modo da non interagire fra loro né modificare il campo assegnato, oppure si assegnano le cariche, ed il loro moto, e si determina il campo elettromagnetico che esse creano. Procediamo allora illustrando i due casi separatamente.

2.6.1 Campo elettromagnetico assegnato

Se il campo elettromagnetico è assegnato, allora deve essere $\delta S_3 = 0$. In questo caso, allora, l'azione che ci interessa è solamente $S = S_1 + S_2$. Poiché le cariche, come già detto, sono supposte piccole, esse non interagiscono fra loro ma risentono solo delle forze con le quali il campo dato agisce su di esse. Per questo consideriamo per semplicità una sola particella carica. L'azione che esprime l'interazione fra il campo e una particella carica è definita da

$$S_2 = -q \int_{AB} \sum_{i=0}^{3} \mathrm{A}_i \, dx^i,$$

dove q è la carica della particella e $\mathrm{A}_i = \left(\frac{\Phi}{c}, -\mathrm{A} \right)$. Applichiamo il principio di minima azione; si ha

$$\delta S = \delta(S_1 + S_2) = \delta \int_{AB} \left(- mc \, ds - q \sum_{i=0}^{3} \mathrm{A}_i \, dx^i \right) = 0.$$

Eseguendo le usuali metodiche variazionali si ottiene l'equazione

$$mc \frac{du_i}{ds} - q \sum_{k=0}^{3} \left(\frac{\partial \mathrm{A}_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial x^k} \right) u^k = 0.$$

Introducendo le matrici di componenti

$$F_{ik} = \frac{\partial \mathrm{A}_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathrm{A}_i}{\partial x^k}, \quad F^{ik} = \sum_{\ell,m=0}^{3} g^{\ell i} g^{mk} F_{\ell m} \tag{2.12}$$

le equazioni di Eulero-Lagrange per S sono date da

$$mc \frac{du^i}{ds} = q \sum_{k=0}^{3} F^{ik} u_k, \quad i = 0, 1, 2, 3. \tag{2.13}$$

Le equazioni (2.13) sono le equazioni del moto di una carica puntiforme in un campo elettromagnetico. Poiché la matrice F_{ik} è evidentemente una matrice antisimmetrica, cioè vale $F_{ik} = -F_{ki}$, abbiamo

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ -F_{01} & 0 & F_{12} & F_{13} \\ -F_{02} & -F_{12} & 0 & F_{23} \\ -F_{03} & -F_{13} & -F_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Per ricavare le componenti di F_{ik} utilizziamo la formula (2.12) nonché le definizioni di E e B che ricordiamo essere dati da

$$\mathrm{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial t}, \quad \mathrm{B} = \mathrm{rot}\mathrm{A} = \left(\frac{\partial \mathrm{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{A}_y}{\partial z}, \frac{\partial \mathrm{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{A}_z}{\partial x}, \frac{\partial \mathrm{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{A}_x}{\partial y}\right).$$

Si ottiene

$$F_{01} = \frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial x^0} - \frac{\partial \mathrm{A}_0}{\partial x^1} = \frac{1}{c}\left(-\frac{\partial \mathrm{A}_x}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) = \frac{\mathrm{E}_x}{c}, \quad F_{02} = \frac{\mathrm{E}_y}{c}, \quad F_{03} = \frac{\mathrm{E}_z}{c}$$

$$F_{12} = \frac{\partial \mathrm{A}_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \mathrm{A}_1}{\partial x^2} = -\frac{\partial \mathrm{A}_y}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{A}_x}{\partial y} = -\mathrm{B}_z, \quad F_{13} = \mathrm{B}_y, \quad F_{23} = -\mathrm{B}_x.$$

Riassumendo si ha

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\mathrm{E}x}{c} & \frac{\mathrm{E}_y}{c} & \frac{\mathrm{E}_z}{c} \\ -\frac{\mathrm{E}_x}{c} & 0 & -\mathrm{B}_z & \mathrm{B}_y \\ -\frac{\mathrm{E}_y}{c} & \mathrm{B}_z & 0 & -\mathrm{B}_x \\ -\frac{\mathrm{E}_z}{c} & -\mathrm{B}_y & \mathrm{B}_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\mathrm{E}_x}{c} & -\frac{\mathrm{E}_y}{c} & -\frac{\mathrm{E}_z}{c} \\ \frac{\mathrm{E}_x}{c} & 0 & -\mathrm{B}_z & \mathrm{B}_y \\ \frac{\mathrm{E}_y}{c} & \mathrm{B}_z & 0 & -\mathrm{B}_x \\ \frac{\mathrm{E}_z}{c} & -\mathrm{B}_y & \mathrm{B}_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Analizziamo ora l'equazione del moto (2.13), facendo il limite classico $\frac{v}{c} \to 0$. La quadrivelocità, come sappiamo, è definita da

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}$$

e l'elemento ds, espresso nelle coordinate cartesiane x, y, z ed il tempo t, vale

$$ds = cdt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Inoltre, nelle medesime coordinate ordinarie, il quadrivettore x^i è dato da $x^i = (ct, x, y, z)$. Eseguendo il limite classico, possiamo scrivere $ds = cdt$ per cui si ricava

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} = \left(1, \frac{\dot{x}}{c}, \frac{\dot{y}}{c}, \frac{\dot{z}}{c}\right), \quad \frac{du^i}{ds} = \left(0, \frac{\ddot{x}}{c^2}, \frac{\ddot{y}}{c^2}, \frac{\ddot{z}}{c^2}\right),$$

$$u_i = \frac{dx_i}{ds} = \left(1, -\frac{\dot{x}}{c}, -\frac{\dot{y}}{c}, -\frac{\dot{z}}{c}\right).$$

L'equazione del moto (2.13), per quanto riguarda la coordinata spaziale x, fornisce

$$\begin{aligned} mc\frac{du^1}{ds} = m\frac{\ddot{x}}{c} &= q(F^{10}u_0 + F^{11}u_1 + F^{12}u_2 + F^{13}u_3) \\ &= q\left(\frac{\mathrm{E}_x}{c} + \mathrm{B}_z\frac{\dot{y}}{c} - \mathrm{B}_y\frac{\dot{z}}{c}\right) \end{aligned}$$

da cui si deduce $m\ddot{x} = q(\mathrm{E}_x + \mathrm{B}_z\dot{y} - \mathrm{B}_y\dot{z})$. Procedendo analogamente per le altre coordinate si ottiene $m\ddot{y} = q(\mathrm{E}_y + \mathrm{B}_x\dot{z} - \mathrm{B}_z\dot{x})$, e $m\ddot{z} = q(\mathrm{E}_z + \mathrm{B}_y\dot{x} - \mathrm{B}_x\dot{y})$. Questi risultati si riassumono nella formula

$$m\dot{v} = q\mathrm{E} + qv \wedge \mathrm{B}$$

che rappresenta l'equazione classica del moto di una carica puntiforme in un campo elettromagnetico dove il termine a destra dell'uguale è detto forza di Lorentz. Sottolineiamo il fatto che questa formula vale per velocità piccole rispetto a c, per velocità relativistiche vale, ovviamente, la (2.13).

Usando la definizione di F_{ik} è immediato verificare che

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^\ell} + \frac{\partial F_{k\ell}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{\ell i}}{\partial x^k} = 0. \tag{2.14}$$

Le equazioni indipendenti non identicamente nulle fornite dalla (2.14) sono quattro e più precisamente

$$\begin{aligned} i = 0,\ k = 2,\ \ell = 3 &\Longrightarrow \frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial z} = -\frac{\partial \mathrm{B}_x}{\partial t} \\ i = 0,\ k = 1,\ \ell = 3 &\Longrightarrow \frac{\partial \mathrm{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial x} = -\frac{\partial \mathrm{B}_y}{\partial t} \\ i = 0,\ k = 1,\ \ell = 2 &\Longrightarrow \frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{E}_x}{\partial y} = -\frac{\partial \mathrm{B}_z}{\partial t} \\ i = 1,\ k = 2,\ \ell = 3 &\Longrightarrow \frac{\partial \mathrm{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{B}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{B}_z}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

Le equazioni ricavate sono riassumibili in

$$\mathrm{rotE} = -\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial t}, \quad \mathrm{divB} = 0.$$

che costituiscono due delle quattro equazioni di Maxwell (2.1). La (2.14) rappresenta quindi la notazione quadridimensionale di due delle quattro equazioni di Maxwell, quelle che descrivono un campo elettromagnetico assegnato.

2.6.2 Cariche assegnate

Se sono date le cariche ed il loro moto, applicando il principio di minima azione, si ha $\delta S_1 = 0$. In questo caso, allora, l'azione che ci interessa è $S = S_2 + S_3$. Occorre quindi considerare più cariche, per cui l'azione S_2 sarà data da

$$S_2 = -\sum_j \int_{AB} q_j \sum_{i=0}^{3} \mathrm{A}_i \, dx^i$$

dove la sommatoria va fatta separatamente su tutte le particelle puntiformi cariche in quanto ognuna fornisce il proprio contributo di azione (ovviamente, gli eventi A e B indicano simbolicamente gli eventi iniziali e finali per ogni carica). L'azione del campo elettromagnetico S_3 è data, per definizione, da

$$S_3 = -\frac{c\varepsilon_0}{4} \int \sum_{i,k=0}^{3} F_{ik} F^{ik} \, d\Omega$$

dove $d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = cdtdxdydz = cdtdV$ è l'elemento volumetrico quadri-dimensionale e l'integrale è eseguito su tutto il volume, rispetto alle coordinate spaziali, e fra gli istanti t_A e t_B rispetto alla coordinata temporale. Nella maggioranza dei casi pratici, invece di considerare cariche puntiformi, si usa considerare distribuzioni continue di cariche. Sia $\varrho = \dfrac{dq}{dV}$ la densità di carica. Poiché $dq = \varrho dV$ è uno scalare, possiamo costruire il quadrivettore

$$dq dx^i = \varrho dV dx^i = \varrho dV dt \frac{dx^i}{dt}.$$

Poiché $dV dt$ è uno scalare, si deduce che $\dfrac{dx^i}{dt}$ è un quadrivettore. Definiamo così il quadrivettore densità di corrente, o semplicemente quadricorrente, come il vettore

$$\mathrm{J}^i = \varrho \frac{dx^i}{dt}$$

le cui componenti sono $\mathrm{J}^i = (c\varrho, \varrho\dot{x}, \varrho\dot{y}, \varrho\dot{z}) = (c\varrho, \varrho v) = (c\varrho, \mathrm{J})$, dove J è la densità di corrente della teoria del campo elettromagnetico di Maxwell. L'azione S_2 allora diventa

$$\begin{aligned} S_2 = -\sum_j \int_{AB} q_j \sum_{i=0}^{3} \mathrm{A}_i \, dx^i = -\int \varrho \sum_{i=0}^{3} \mathrm{A}_i \, dx^i dV &= -\int \varrho \sum_{i=0}^{3} \mathrm{A}_i \frac{dx^i}{dt} dV dt \\ &= -\int \sum_{i=0}^{3} \mathrm{A}_i \mathrm{J}^i \, dV dt \end{aligned}$$

cioè

$$S_2 = -\frac{1}{c} \int \sum_{i=0}^{3} \mathrm{A}_i \mathrm{J}^i \, d\Omega$$

dove l'integrale è eseguito su tutto il volume, rispetto alle coordinate spaziali, e fra gli istanti t_A e t_B rispetto alla coordinata temporale. Applichiamo il principio di minima azione. Si ha

$$\delta S = \delta(S_2 + S_3) = -\delta \int \left(\frac{1}{c} \sum_{i=0}^{3} \mathrm{A}_i \mathrm{J}^i + \frac{c\varepsilon_0}{4} \sum_{i,k=0}^{3} F_{ik} F^{ik} \right) d\Omega = 0.$$

Eseguiamo la variazione indicando i passaggi salienti. Considerando che in questo contesto J^i non varia, si ha

$$\int \left(\frac{1}{c} \sum_{i=0}^{3} \delta \mathrm{A}_i \mathrm{J}^i + \frac{c\varepsilon_0}{4} \sum_{i,k=0}^{3} \delta F_{ik} F^{ik} + F_{ik} \delta F^{ik} \right) d\Omega = 0$$

da cui, poiché $F^{ik}\delta F_{ik} = F_{ik}\delta F^{ik}$, si ha

$$\int \left(\frac{1}{c} \sum_{i=0}^{3} \delta \mathrm{A}_i \mathrm{J}^i + \frac{c\varepsilon_0}{2} \sum_{i,k=0}^{3} \delta F_{ik} F^{ik} \right) d\Omega = 0$$

da cui, tenendo presente la definizione di F_{ik} si trova

$$\int \left(\frac{1}{c} \sum_{i=0}^{3} \delta \mathrm{A}_i \mathrm{J}^i + \frac{c\varepsilon_0}{2} \sum_{i,k=0}^{3} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \delta \mathrm{A}_k - \frac{\partial}{\partial x^k} \delta \mathrm{A}_i \right) F^{ik} \right) d\Omega = 0.$$

Sfruttando ora l'antisimmetria di F^{ik} si perviene a

$$\int \left(\frac{1}{c} \sum_{i=0}^{3} \delta \mathrm{A}_i \mathrm{J}^i - c\varepsilon_0 \sum_{i,k=0}^{3} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta \mathrm{A}_i F^{ik} \right) d\Omega = 0$$

per cui, integrando per parti il secondo termine e supponendo il campo nullo all'infinito, si ricava

$$\int \sum_{i=0}^{3} \left(\frac{1}{c} \mathrm{J}^i + c\varepsilon_0 \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} \right) \delta \mathrm{A}_i \, d\Omega = 0.$$

Dovendo l'integrale essere nullo per ogni $\delta \mathrm{A}_i$ si avrà

$$\frac{1}{c} \mathrm{J}^i + c\varepsilon_0 \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = 0$$

per ogni $i = 0, 1, 2, 3$. Ricordando che $\dfrac{1}{c^2} = \varepsilon_0 \mu_0$ possiamo infine scrivere

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\mu_0 \mathrm{J}^i, \quad i = 0, 1, 2, 3. \tag{2.15}$$

Passando alle coordinate (x, y, z, t) è immediato ricavare

$$\mathrm{divE} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}, \quad \mathrm{rotB} = \mu_0 \mathrm{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t}$$

che costituiscono le altre due delle quattro equazioni di Maxwell (2.1). La (2.15) rappresenta quindi la notazione quadridimensionale delle altre due equazioni di Maxwell, quelle che descrivono il campo elettromagnetico generato dalle cariche.