

Su alcune note di storia della geometria

Guido Carolla¹

E' quasi impossibile trattare la storia della geometria senza cadere, data la sua vastità, nelle inevitabili imprecisioni ed omissioni. Noi qui, col proposito un po' ambizioso di essere letti anche da studenti, ci siamo sforzati di riportare alcuni argomenti in modo didatticamente semplice, forse con soverchia pretesa di accessibilità anche per chi ha poca dimestichezza con la matematica.

Un po' di storia

La parola geometria proviene dal greco e significa “misura della terra”. Ed Erodoto, il padre della storia, ritiene che la geometria sia nata presso gli antichi Egiziani, vari millenni a. C., per la necessità che questi avevano di ripristinare confini di proprietà, che ogni anno venivano cancellati dalle inondazioni del Nilo. D'altro canto è assodato che ancor prima altri popoli, come per es. gli Assiro-Babilonesi, ebbero spiccate cognizioni di geometria, oltre che di aritmetica.

Gli Assiro-Babilonesi abitavano in Mesopotamia, la vasta pianura che ha per confini naturali i due fiumi Tigri ed Eufrate, che attualmente si può identificare con l'Iraq. Centro della loro vita politica e culturale era l'antichissima Babilonia. Essi, profondi cultori di Astronomia, erano abbastanza progrediti nelle cognizioni geometriche. Infatti, parallele, quadrati, triangoli, angoli retti s'incontrano fra le materie della civiltà babilonese; inoltre è certo che quei popoli della Mesopotamia erano in grado di calcolare con

¹ Docente di matematica e preside a r. Lecce; e-mail guidocarolla@libero.it

precisione aree di quadrati, di rettangoli, di triangoli rettangoli e persino di trapezi, mentre per determinare l'area del cerchio si servivano del valore $\pi = 3$. Presso gli Egiziani però si riscontravano più vaste e più profonde cognizioni matematiche, in gran parte raccolte nel famoso Papiro Rhind (2000 a. C. circa) – di contenuto aritmetico-geometrico – e nel Papiro di Mosca, interpretato dallo Struve. Ma, tanto presso gli Assiro-Babilonesi, quanto presso gli Egiziani le conoscenze matematiche servivano a scopi principalmente pratici. Spetta ai Greci, a partire da Talete di Mileto – uno dei sette savi dell'antica Grecia, (600 a. C. circa) – e Pitagora di Samo, fondatore della famosa scuola pitagorica a Crotona (540 a. C. circa), che forse fu allievo di Talete, il merito di aver elevato la matematica a dignità di scienza.

La geometria a fondamento degli studi filosofici

Sembra che presso i pitagorici la geometria sia stata posta per la prima volta sotto forma deduttiva.

Va pure ricordato il grande filosofo Platone di Atene (420-348 a. C.) a cui si debbono notevoli contributi circa la risoluzione di problemi geometrici e soprattutto nei riguardi dell'uso della logica nello studio della geometria, che egli metteva a fondamento degli studi filosofici.

Si narra che egli raccomandava così caldamente lo studio della geometria da scrivere sulla porta della sua scuola: “Nessuno ignaro della geometria entri sotto il mio tetto”. Soleva anche dire: “Dio geometrizza sempre”. Ulteriori progressi la geometria compie, dal punto di vista razionale, dopo che Aristotele, il grande discepolo di Platone, dà alla logica una importantissima sistemazione.

Euclide e gli studi euclidei

In seguito il pensiero greco trova la sua meravigliosa sintesi in Euclide vissuto in Alessandria verso il 300 a. C. Egli nei suoi

Elementi, di contenuto aritmetico-geometrico, raccoglie e sistema tutto il complesso delle conoscenze matematiche del tempo secondo un mirabile schema logico-deduttivo. Gli *Elementi* hanno avuto una diffusione seconda solo alla Bibbia, e costituisce il più grande monumento che l'uomo abbia saputo elevare alla matematica.

Le matematiche elementari, così come vengono insegnate, non differiscono nei fondamenti dalla impostazione di Euclide, che scrisse gli *Elementi* in Alessandria, subito dopo la fondazione della città, nell'epoca in cui il genio militare di Alessandro Magno unificava in un solo impero il mondo greco e quello orientale fino alle Indie, mentre Roma compiva la grande opera di unificazione della penisola italiana, primo passo verso l'unificazione di tutto il mondo mediterraneo.

Archimede: il grande matematico, primo ingegnere dell'umanità

Nella storia della matematica un posto a parte spetta ad Archimede di Siracusa, vissuto verso il 287 a. C. Il grande scienziato – ucciso, come è noto, da un soldato romano durante il saccheggio di Siracusa nel corso della seconda guerra punica – è senza dubbio uno dei più grandi matematici di tutti i tempi. Egli per primo, affrontando i più ardui problemi rimasti fino a quel tempo insoluti, come per esempio quello del calcolo delle aree e dei volumi, gettò le basi del calcolo infinitesimale.

Archimede affrontò, tra l'altro, il problema della rettificazione della circonferenza, che – com'è noto – consiste nel trovare un segmento lungo quanto una circonferenza data. Presso gli Assiro-Babilonesi, come già detto, si riscontra la regola che per rettificare la circonferenza basta triplicare il diametro: perciò si usa per π il valore 3, valore che si incontra successivamente nella Bibbia. Gli Egiziani assegnavano a π il valore 3,1604, che è più preciso di 3. Nella pratica noi adoperiamo il valore 3,14; che fu anche usato da Archimede, a cui va il grandissimo merito di aver fatto conoscere pienamente il numero π . Egli dimostrò che π è un numero decimale con infinite cifre e assegnò la legge per ottenerle.

Da Archimede a Gauss e Lindemann

Le grandi e geniali idee di Archimede non furono comprese pienamente dai suoi contemporanei. L'umanità poté recepirle nel loro giusto valore circa ventuno secoli dopo; quando – per opera di Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647), Isaac Newton (1642-1727), Gottfried Wilhelm von Leibniz (1746-1716) e altri – furono definitivamente sistemati i concetti che governano l'infinitesimo. E la figura di Archimede giganteggia sempre più col progredire della Scienza.

Gli antichi tentarono di rettificare la circonferenza adoperando la riga e il compasso, come si fa per altre costruzioni della geometria elementare. Essi però non poterono realizzare ciò, in quanto il problema non è risolubile con riga e compasso (partendo dal raggio).

L'impossibilità di rettificare la circonferenza con riga e compasso è stata provata nel 1882 e discende da un famoso teorema di Ferdinand Lindemann (1852-1939), che enuncia la trascendenza di π (cioè, π non è soluzione di equazioni a coefficienti razionali). Se con riga e compasso sappiamo dividere un arco per metà, possiamo anche inscrivere in una circonferenza i poligoni regolari che hanno 3, 6, 12, 24 lati, e via raddoppiando; 4, 8, 16, 32, ... lati; 5, 10, 20, 40, ... lati.

Gli antichi tentarono di risolvere il problema della divisione della circonferenza in parti uguali adoperando la riga e il compasso anche in tutti gli altri casi, ma non vi riuscirono.

Il loro insuccesso si deve al fatto che il suddetto problema non è in generale risolubile con l'uso di tali strumenti. Ciò è stato dimostrato da Carl Friedrich Gauss (1777-1855) nel teorema che dice: *una circonferenza si può dividere in un numero n di parti uguali, mediante riga e compasso, soltanto quando n scomposto in fattori primi abbia i fattori diversi da 2 tutti alla prima potenza e tali che diminuiti di 1 diano luogo ad una potenza di 2.*

In base a questo teorema non è possibile con riga e compasso dividere una circonferenza in 7, 11, 13 parti uguali, perché tali numeri primi diminuiti di 1 non danno una potenza di 2. Analogamente non è possibile dividere la circonferenza in 9 parti uguali, perché $9=3^2$ e il fattore 3 non si presenta alla prima potenza. E non è possibile dividere la circonferenza in 14 parti uguali, perché $14=2 \times 7$, e $7-1$ non è una

potenza di 2. Al contrario, mediante riga e compasso, è possibile dividere la circonferenza in 17 parti uguali, poiché $17-1 = 2^4$. Va notato che la suddivisione della circonferenza in 17 parti uguali, era sfuggita completamente agli antichi, ed è frutto delle ricerche di Gauss.

Apollonio di Pergamo: precursore della geometria proiettiva

Di poco posteriore ad Archimede, e sempre nel III sec. a. C., va ricordato Apollonio di Pergamo, che svolse la sua magnifica attività scientifica ad Alessandria, come successore di Euclide nella cattedra di geometria di quella Università. Egli, per primo, sottopose a rigorosa critica gli *Elementi* di Euclide e nuove gemme portò alla geometria con i suoi studi sulle sezioni coniche, con i quali si rivelò un precursore dei più moderni concetti della geometria proiettiva.

Il terzo secolo a. C. è detto giustamente il secolo d'oro della geometria, in quanto in esso videro la luce i tre sommi geometri: Euclide, Archimede, Apollonio, che, ben a ragione, furono detti i legislatori della geometria. In questo stesso secolo, per opera del sommo Archimede, avveniva in Sicilia il primo incontro dell'umanità con il calcolo infinitesimale. Alessandria, che ebbe per prima il privilegio di ascoltare la parola di Euclide e di Apollonio, restò per parecchi secoli il centro degli studi matematici, e da essa il mondo ricevette per moltissimo tempo la luce eterna della quale Euclide, Archimede ed Apollonio inondarono la geometria.

Applicazioni pratiche agli studi matematici

Col trascorrere del tempo la tradizione dei tre legislatori si va sempre più affievolendo, e in Alessandria gli studi matematici si rivolgono più che altro alle loro applicazioni pratiche. In questo periodo si distingue Erone di Alessandria, vissuto tra il I e il II sec. d. C., noto per la formula che dà l'area del triangolo conoscendo le misure dei lati. Dalla morte di Apollonio, la geometria classica non aveva più

trovato nessun sostenitore. Tuttavia, durante il regno di Diocleziano (284-305), visse ad Alessandria uno scienziato animato dallo spirito che aveva posseduto Euclide, Archimede e Apollonio: Pappo di Alessandria, che verso il 320 compose un'opera dal titolo *Collezioni matematiche*. Questa opera è molto importante in quanto ci fornisce una preziosa documentazione storica concernente alcuni aspetti della matematica greca, che altrimenti sarebbero rimasti sconosciuti. Per esempio, è dal Libro V delle *Collezioni* che si è venuti a sapere della scoperta di Archimede dei tredici poliedri semiregolari, noti come "solidi archimedei". Le *Collezioni* contengono anche dimostrazioni alternative e lemmi supplementari relativi a teoremi di Euclide, Archimede, Apollonio e Tolomeo. Il trattato presenta infine nuove scoperte e generalizzazioni che non è dato trovare in nessuna opera precedente.

Dagli Indiani ed Arabi al Medio Evo ed oltre

Successivamente il mondo mediterraneo entra nell'oscurità del Medio Evo e si perde quasi del tutto la bella tradizione del pensiero greco. Questo, però, passato con le conquiste di Alessandro Magno dal mondo greco agli Indiani, viene riportato nel decadente occidente cristiano dagli Arabi (600 d. C.), per influsso dei quali torna a fiorire in Europa e specialmente in Italia la purezza della tradizione greca, insieme con i motivi pratici presi dagli Indiani. Rifioriscono in tal modo gli studi di aritmetica che culminano nell'opera *Liber Abbaci* di Leonardo Pisano, detto il Fibonacci (1202). Il ritorno in Italia degli studi matematici che si compie in tal modo porta di conseguenza, nel volgere di qualche secolo, alla meravigliosa collana degli Algebristi Italiani del 1500, di cui daremo qualche cenno, ma in questa epoca va pure ricordato Francesco Maurolico (1494-1575) di Messina, a cui non poco si deve circa il ritorno degli studi di geometria alla pura tradizione Euclidea e intorno ai contributi che la geometria poté portare agli studi anche dell'ottica, che precorrono gli ampi sviluppi della geometria differenziale.

Quindi Gerolamo Cardano (1501-1576), Nicolò Tartaglia (1500 circa-1557), Ludovico Ferrari (1522-1565) ed altri spalancarono

all'umanità le porte dell'Algebra, e diedero successivamente a René Descartes (Cartesio, 1596-1650) e a Pierre de Fermat (1601-1665) gli strumenti necessari per la creazione della geometria analitica. Nella *Geometria*, opera di Cartesio, non si trova ciò che oggi viene insegnato a scuola con il nome di “geometria analitica o cartesiana”, né si parla di assi coordinati ortogonali che ci sono così familiari e che portano addirittura il suo nome. Secondo il Boyer (si veda [2], pag. 560) fu Newton il primo a introdurre in geometria analitica un sistema di assi coordinati ortogonali. Fermat aveva colto più chiaramente di Cartesio l'essenza concettuale della geometria analitica, l'“isomorfismo” fra struttura algebrica e struttura geometrica, cioè la traduzione esatta del linguaggio della geometria in quello dell'algebra e viceversa. Si ricorda ancora il Cavalieri che a partire dal 1635 fondò la *Geometria indivisibilibus*, James Gregory (1638-1675) che dal 1667 trattò la *Geometriae pars universalis*, e l'*Exercitationes geometricae*, pubblicati rispettivamente a Padova e a Londra.

Il contributo di Eulero

Nel 1706 William Jones (1675-1749) comincia ad usare il π nella *Synopsis Palmariorum Matheseos, or A New Introduction to the Mathematics* (Sinossi dei capolavori della matematica, ossia nuova introduzione alla matematica); nel 1737 fu l'adozione di questo simbolo da parte di Leonhard Euler (1707-1783) e l'impiego in numerosi manuali a diffonderne la conoscenza e l'uso².

²Ad Eulero (nome italianizzato) si deve anche la scrittura $e^x = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i$, quando con i egli intendeva rappresentare l'attuale simbolo di infinito ∞ , dovuto a Wallis, per cui si preferisce $e^x = \lim_{h \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{h}\right)^h$, il cui numero e fu scoperto da Nepero, ma il merito per averlo approfondito e reso popolare va ad Eulero. Egli nel 1779 verso la fine della sua vita, adottò anche l'uso del simbolo i per indicare $\sqrt{-1}$. I

Lo stesso Eulero è stato giudicato come il più grande matematico del secolo XVIII per gli innumerevoli e fondamentali contributi che apportò a molti rami della matematica compresa la geometria. Nella breve trattazione non si può riferire che qualcosa delle sue innumerevoli scoperte e si dirà subito della relazione fra sei lunghezze, pur sé risultati equivalenti sono della geometria antica: $4rRs=abc$, con s semiperimetro del triangolo di lati a, b, c , con r raggio del cerchio inscritto al triangolo ed R raggio del cerchio circoscritto.

In particolare si ricorda che a lui si deve l'utilizzazione di schemi grafici per rappresentare i rapporti logici, il cui precursore fu il già citato Leibniz che si occupò della branca della geometria che tratta delle relazioni che dipendono solo dalla posizione e che studia le proprietà di posizione, cioè la *Geometria di posizione* (*geometria situs*), la cui dizione oggi è "topologia". I grafi di cui sopra vengono chiamati "diagrammi di Eulero" o anche "diagrammi di Eulero-Venn", dal logico inglese John Venn (1834-1923). E' arduo il compito di dare un'idea dell'opera di Eulero, al quale si deve la risoluzione del problema "dei sette ponti di Königsberg" (v. pp. 1-13 [4]) o di un numero qualsiasi di ponti e regioni che si traduce in un problema di percorrenza di grafi e i risultati di Eulero valgono per qualsiasi problema che ammetta la stessa rappresentazione. Tra l'altro, dal 1728 Eulero trattò anche la geometria analitica, tanto che sui *Commentarii* di Pietroburgo pubblicò una serie di articoli sulle coordinate dello spazio tridimensionale formulando le equazioni generali di tre classi delle superfici di cilindri, coni e superfici di rivoluzione. Nell'intento di ottenere risultati della massima generalità, nel secondo volume della sua *Introductio*, tra l'altro per la prima volta figurano le equazioni per la trasformazione delle coordinate ortogonali in coordinate polari. L'appendice della *Introductio* costituisce il contributo più significativo alla prima esposizione manualistica della geometria analitica solida.

tre simboli e , π ed i associati con i numeri 0 ed 1 danno la più importante relazione e operazione matematica $e^{\pi i} + 1 = 0$.

Dalla Rivoluzione Francese a tutto il diciottesimo secolo

Con la Rivoluzione Francese, verso la fine del diciottesimo secolo, Adrien Marie Legendre (1752-1833) apportò un valido contributo con gli *Elements de geometrie* e si affermò l'Ecole Polytechnique, nella quale con Gaspard Monge (1746-1818) appartenente anche all'Ecole normale (creata anche durante la Rivoluzione Francese), con Lazare Carnot (1753-1823) e Jean-Victor Poncelet (1788-1867) fiorì la geometria moderna.

La geometria descrittiva non fu l'unico contributo dato da Monge alla matematica dello spazio: all'Ecole Polytechnique egli tenne anche un corso sull'applicazione dell'analisi alla geometria, la cui espressione abbreviata *geometria analitica* fu coniata dopo, ma il corso tenuto da Monge con i *Feuilles d'analyse* (dal 1795) era essenzialmente un'introduzione alla geometria differenziale, per cui si può affermare che detto corso fu il prototipo dei programmi, ancora attuali, di geometria analitica solida. Dal 1797 con Mascheroni si ebbe la geometria del compasso.

Cenni sulla geometria dall'ottocento in poi

Agli albori del diciannovesimo secolo Lazare Carnot si continuò ad occupare della *Géométrie de position*. Nel 1816, con l'espulsione di Carnot e di Monge, all'Ecole Polytechnique venne nominato Augustin Cauchy (1789-1857), il quale pur non attratto dalla geometria nelle sue varie forme, nel 1811 presentò una generalizzazione della formula di Descartes-Eulero relativa ai poliedri: $S+2=F+V$ (dove S, F, V sono rispettivamente il numero degli spigoli, delle facce e dei vertici di un poliedro) e tra l'altro dimostrò il teorema del triangolo del Fermat tre.

A partire dal 1829 con Nikolai Ivanovic Lobacevskij (1772-1865) si ebbe la geometria non euclidea detta *iperbolica*. In essa, pur conservando tutti gli altri assiomi euclidei, si ammette che (si veda [1], pag. 159) *dati in un piano una retta e un punto esterno ad essa, per il*

punto passano almeno due rette che non incontrano la retta data (assioma di Lobacevskij). Fra queste rette soltanto due si dicono parallele alla data retta; precisamente, quelle che separano le secanti dalle non secanti rispetto ad essa. In tale geometria si può dedurre che la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di un angolo piatto; diversamente da ciò che succede nella geometria euclidea, nella quale la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto.

Ora è naturale chiedersi se il precedente postulato di Lobacevskij si possa sostituire col postulato secondo cui dati in un piano una retta e un punto esterno ad essa, ogni retta che passa per il punto incontra la retta data; o, equivalentemente, *due rette qualsiasi di un piano hanno sempre un punto in comune* (assioma di Riemann, si veda [1], pag. 251, ASSIOMA IV''1) Ebbene, se si conservano tutti gli altri assiomi euclidei, allora quest'assioma risulta in contraddizione con quelli (si veda [1], pag. 104). Perciò se si vuole avere una geometria di ispirazione euclidea, ma in cui valga il suddetto assioma di Riemann, allora bisogna rinunciare a qualcun altro degli assiomi euclidei. Su tale argomento sono stati dati contributi fondamentali da G. F. Bernhard Riemann (nato nel 1826 in Germania a Breselenz, vicino ad Hannover, e morto nel 1866 a Selasca, in Italia).

Le indagini intorno alla questione delle parallele sono state fatte con grande cura anche da eminenti matematici come Gerolamo Saccheri (1667-1773), Carl Friedrich Gauss già citato avanti, Farkas e Janos Bolyai padre (1775-1856) e figlio (1802-1860) (quest'ultimo anticipato di poco per la grande scoperta attribuita a Lobacevsky), Felix Christian Klein (1849-1925), Eugenio Beltrami (1835-1900) e molti altri.

La parte maggiore del merito di aver gettato le basi della geometria non-euclidea spetta al Lobacevskij, ma essa per diversi decenni continuò a rappresentare un aspetto marginale della matematica fino a che non venne incorporata in questa come parte integrante attraverso le concezioni generali di Riemann, che nel 1854 diventò Privatdozent all'Università di Gottinga, dove pronunciò la più famosa dissertazione di abilitazione della storia della matematica con un'ampia e profonda visione dell'intero campo della geometria. La tesi "Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria" non forniva alcun esempio specifico,

sosteneva invece una visione globale della geometria come studio di varietà di un numero qualsiasi di dimensioni in qualsiasi genere di spazio. Infatti, le geometrie di Riemann sono non-euclidee in un senso molto più generale di quello di Lobacevskij, dove si tratta semplicemente di stabilire quante rette parallele sono possibili per un punto.

Nella sua lunga carriera il grande studioso Gauss espresse per la prima ed ultima volta la propria ammirazione per l'opera di un altro matematico, cioè Riemann. Oggi l'espressione "geometria di Riemann" viene usata per indicare quella particolare geometria piana che si ottiene partendo dall'ipotesi dell'angolo ottuso di Saccheri nel caso in cui si abbandoni anche la prolungabilità dei segmenti, ed un modello di questa geometria è dato dall'interpretazione di "piano" come superficie di una sfera e di "retta" come cerchio massimo della stessa. In proposito si può consultare il Capitolo Quinto di [1] (La geometria sferica e ellittica).

Se Monge era stato il primo geometra in senso moderno, Julius Plucker (1801-1868) nel 1829, mediante l'introduzione di un importante punto di vista, diventò il primo geometra analitico. Allievo e assistente di quest'ultimo fu Klein, che può essere considerato il suo successore per la dedizione alla geometria analitica e la sua opera rappresenta il culmine dell'età eroica della geometria, inoltre egli è noto per aver dato prova della coerenza logica delle geometrie non-euclidee, dimostrando che sono casi particolari della geometria più generale, cioè quella proiettiva e dando il contributo dei nomi di geometria ellittica e di geometria iperbolica a quelle corrispondenti alle ipotesi dell'angolo ottuso e a quella dell'angolo acuto.

Ora, appare opportuno citare Eugenio Bertini (1846-1933), allievo di Luigi Cremona (1830-1903), tra i primi a capire l'importanza nel fissare l'attenzione sulle proprietà invariantive, effettuando il passaggio, dal punto di vista proiettivo del Cremona, al nuovo ramo della geometria algebrica, nel quale prevale la classificazione e lo studio delle involuzioni nel piano e pure notevoli sono state le sue ricerche sulla geometria proiettiva degli iperspazi. Altro grande italiano fu Corrado Segre (1863-1924) la cui opera si è esplicata principal-

mente nella geometria proiettiva degli iperspazi e nella prima fase di quella algebrica. Egli fu il caposcuola della geometria italiana, i cui maggiori cultori, anche successivamente, furono Castelnuovo, Enriques, Severi e altri; tra i quali con Ugo Morin (1901-1968) e Franca Busulini³, l'autore si permette di ricordare suo padre Vincenzo Carolla (1903-1969) – che con essi partecipò a numerosi convegni – per un pregevole lavoro di geometria degli iperspazi: *La massima dimensione dei sistemi lineari di curve piane di dato genere p* ⁴, di cui si era occupato il Castelnuovo.

Nel 1899 David Hilbert (1862-1943) (v. pp. 9-20) pubblicò il volumetto *Grundlagen der Geometrie* (Fondamenti della geometria), che divenne subito famoso e fu tradotto in diverse lingue. Hilbert fu tra i primi a dare alla geometria un assetto puramente formale e assiomatico, già riscontrabili nell'algebra e nell'analisi, formulando per la geometria un insieme di ventuno assiomi. Altri matematici ne proposero alcuni alternativi o sostitutivi, facendo emergere sin dall'inizio del secolo il carattere formale e deduttivo della geometria.

Andrebbero citati tanti altri matematici del diciannovesimo e del ventesimo secolo; in particolare nel panorama italiano degli studi sui

³ I loro *Elementi di geometria*, per la scuola secondaria, (Ed. Milani, Padova), per dirla con le parole di Vincenzo Carolla: "... sono in accordo col famoso *Erlangen* dovuto a Klein, secondo cui ogni ramo di geometria è caratterizzato da un gruppo continuo fondamentale di trasformazioni che lasciano immutate le proprietà di cui quella geometria si occupa. Una porta, quindi, aperta per la comprensione elementare a ben distinguere tra di loro la geometria proiettiva, la geometria euclidea, la geometria non-euclidea, la geometria non-archimedeo, ecc."

I lavori del Morin lo segnalano come uno dei primi matematici italiani capaci di cogliere l'importanza che l'Algebra può avere per lo sviluppo della Geometria algebrica. Questa attenzione lo indusse a scrivere un trattato di algebra astratta e geometria algebrica di cui riuscì a completare solo la prima parte.

⁴ La ricerca, in cui si ricorre alle superfici omaloidi, si basa sul fatto che ogni sistema lineare semplice di curve piane irriducibili può considerarsi come quello delle immagini delle superfici iperpiane di una superficie razionale F riferita biunivocamente al piano del sistema; e che ogni sistema lineare ottenuto dal dato, mediante l'imposizione alle sue curve di un ulteriore punto doppio, può considerarsi come il sistema rappresentativo di una superficie ottenuta proiettando F da un suo piano tangente.

fondamenti della geometria di fine Ottocento sono sicuramente di grande rilievo le ricerche di Giuseppe Veronese (1854-1917) con l'approccio in termini sintetici alle basi della geometria quadridimensionale. Egli così scriveva: "Il metodo da me seguito è principalmente sintetico e intuitivo, come nelle altre mie memorie sulla geometria a n dimensioni. [...] per me il punto, la retta, il piano e lo spazio a tre dimensioni in quello a n dimensioni sono elementi di natura nota, cioè hanno sempre lo stesso significato, quello che posseggono nello spazio ordinario; e quindi i corpi a più di tre dimensioni generati con questi stessi elementi sono essi stessi intuitivi, perché vengono rappresentati nella nostra mente non già mediante equazioni, ma mediante figure geometriche". Veronese cercherà il riferimento, la garanzia euclidea per i suoi studi mediante le trasformazioni proiettive e descrittive, le quali permettono di rappresentare ad esempio un oggetto dello spazio quadridimensionale nello spazio tridimensionale e quindi di seguito, sempre tramite proiezioni, nello spazio bidimensionale: fondamentale il suo lavoro del 1884 *La superficie omaloide normale a due dimensioni e le sue proiezioni nel piano e nello spazio ordinario*.

A questo punto sono da evidenziare i contributi funzionali della scuola di Giuseppe Peano (1858-1932), che con la scuola di geometria algebrica costituiscono due posizioni che confrontate fanno emergere chiare differenze. Dietro all'apparente eclettismo della sua opera (in quanto sembra spaziare nei campi più disparati, dall'analisi alla geometria, dall'aritmetica alla logica) si nasconde un unitario interesse per i fondamenti della matematica. Benché numeri e punti siano gli oggetti fondamentali della matematica classica, incentrata appunto su aritmetica e geometria, essi hanno qualcosa che si contrappone perché i numeri sono tutti diversi, i punti sono tutti uguali. Dell'aritmetica era sensato cercare una fondazione logica che definisse ciascun numero isolatamente, della geometria si poteva immaginare solo una fondazione assiomatica che descrivesse i punti in maniera generica e questa ultima determinò l'interesse di Peano per la geometria. Egli, in particolare, dedicò all'assiomatizzazione della geometria molti articoli e quattro libri, nel 1888 il *Calcolo geometrico*, nel 1889 *I principi di*

geometria logicamente esposti, nel 1891 *Gli elementi del calcolo geometrico* e nel 1894 *Sui fondamenti della geometria*. Molti lavori furono ottenuti dalla sua scuola da M. Pieri ed egli perciò si deve ritenere debitore a H. Grassmann (1809-1877) e a Moritz Pasch (1843-1930) (v. [6] pp. 20-24) per l'ispirazione: due dei libri sviluppano il calcolo geometrico inventato nel 1844 da Grassmann.

Per quanto riguarda l'assiomatizzazione della geometria Peano adottò, pur migliorandola, l'impostazione di Pasch del 1882, con vantaggi e svantaggi rispetto all'assiomatizzazione di Hilbert, del quale non ha raggiunto la perfezione del lavoro e la popolarità. Ma il suo nome viene ancora oggi ricordato in relazione agli *assiomi di Peano* dai quali dipendono molte rigorose costruzioni.

Gli studi ai nostri giorni

Ai nostri tempi l'interesse per gli studi matematici coinvolge molti studiosi. Solo negli Stati Uniti, fino a qualche anno fa, si trovavano oltre 50000 matematici organizzati in associazioni nazionali e si pubblicavano al mondo più di 1500 riviste e periodici di argomenti matematici, con almeno 25000 articoli di ricerca o di rassegna all'anno. Negli ultimi cinquanta anni, a detta di Franco Pastrone, si è creata più matematica che nei precedenti duemilacinquecento anni di storia di questa disciplina. Uno stuolo di studiosi gira il mondo facendo conferenze, seminari, partecipando a congressi, simposi, convegni, incontri di matematica in cui vengono proposte nuove teorie. In tempi recenti si è assistito ad un gran movimento di una categoria di matematici (i cosiddetti geometri algebrici) a causa della asserita dimostrazione del famoso ultimo teorema di Fermat (enunciato e non dimostrato da Pierre de Fermat nel 1600 circa), finalmente dimostrato da Andrew Wiles e pubblicato nel numero di maggio 1995 degli *Annals of Mathematics* in due saggi di centotrenta pagine in tutto, che furono i manoscritti più scrutinati della storia. Il fermento è ancora dovuto sia al fatto che questo teorema aveva costituito argomento di discussione da più di tre secoli e i vari tentativi di dimostrazione e questa ultima hanno condotto e stanno conducendo a risultati ben più vasti delle semplici implica-

zioni iniziali, sia al tentativo di controllare l'esattezza della dimostrazione, però ormai assodata, e di individuare eventuali pecche, trattandosi di prova lunga, complessa, astrusa, di difficile comprensione.

Già da qualche anno, d'ausilio alla didattica e alla ricerca vi sono alcuni softwares di geometria statica e dinamica. Tutta la geometria è alla portata di poche "digitazioni" al computer, anche con software di geometria interattiva, che con semplici e veloci operazioni permettono di realizzare complicate costruzioni geometriche con un numero infinito di parametri; ciò anche solo con l'uso di calcolatrici grafiche ed eventualmente simboliche.

BIBLIOGRAFIA

- [1] E. Agazzi; D. Palladino. *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria*, Brescia, ed. La Scuola, 1998.
- [2] C. B. Boyer, *Storia della matematica*, A. Mondadori, (1997).
- [3] V. Carolla, "Massima dimensione e massimo grado dei sistemi lineari di curve piane di dato genere p ", Palermo, Fratelli Vena, 1932.
- [4] D. Lenzi, *Leonardo Eulero e i ponti di Königsberg*, in sez. Storia e Matematica di www.matematicamente.it, 2003.
- [5] M. Kline *Storia del pensiero matematico*; Vol. I., Torino, Ed. Einaudi, 1999.
- [6] D. Lenzi, "D. Hilbert e i suoi assiomi della geometria, con un'appendice dedicata a M. Pasch", in *Periodico di Matematiche*, Serie VIII N. 4, 2003.