APPUNTI DI ANALISI I

ELEFANTE PAOLA

MATR. 900025133

1. Limiti di funzioni reali

1.1. Definizioni preliminari. Siano $x_0 \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$. L' *intorno sferico di* x_0 di raggio ρ é l'intervallo

$$]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$$

Inoltre definiamo la famiglia degli intorni sferici di x_0

$$I(x_0) = \{\ ]x_0 - \rho, x_0 + \rho[:\ \rho > 0\ \}$$

e l'insieme degli *intorni forati*

$$\overset{\circ}{I}(x_0) = \{I : I = (I\ \in\ I(x_0)) \backslash \{x_0\}\}$$

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. x_0 é un *punto di accumulazione* di A se

$$A \cap I \neq \varnothing \qquad \forall I \in \overset{\circ}{I}(x_0)$$

Chiamiamo *derivato di* A, indicato con la notazione $D(A)$, l'insieme dei punti di accumulazione di A.

Una funzione f si dice *pari* se $f(-x) = f(x)$; una funzione g é invece *dispari* se $g(-x) = -g(x)$.

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *monotona*:

- *crescente* se $\forall\ x_1, x_2\ \in\ A, x_1 < x_2 \quad f(x_1) < f(x_2)$
- *non decrescente* se $\forall\ x_1, x_2\ \in\ A, x_1 < x_2 \quad f(x_1) \leq f(x_2)$
- *decrescente* se $\forall\ x_1, x_2\ \in\ A, x_1 < x_2 \quad f(x_1) > f(x_2)$
- *non crescente* se $\forall\ x_1, x_2\ \in\ A, x_1 < x_2 \quad f(x_1) \geq f(x_2)$

1.2. **Definizione di limite.** Siano

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x_0 \in D(A),\ \lambda \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty,\ +\infty\}$$

diremo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\, V \in I(\lambda) \quad \exists\, I \in \overset{\circ}{I}(x_0) : f(x) \in V \quad \forall\, x \in A \cap I$$

In modo del tutto analogo possiamo formulare una definizione leggermente diversa

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0\ :\ \forall\, x \in A \text{ con } |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - \lambda| < \varepsilon$$

N.B. ε è arbitrario, δ no!

1.3. **I principali teoremi.** Elencheró ora i principali teoremi sui limiti di funzioni reali, con relative dimostrazioni.

Teorema *(unicitá del limite)* 1.1. Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A) \cap \mathbb{R}^*$, $f :\ A \to \mathbb{R}$. Se esistono $\lambda,\ \sigma\ \in\ \mathbb{R}^*$ tali che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \sigma$$

allora $\lambda = \sigma$.

Dimostrazione.

Per la dimostrazione impostiamo un ragionamento *ad absurdum.* Supponiamo infatti che $\lambda \neq \sigma$; allora esistono $I_1\ \in\ I(\lambda),\ I_2\ \in\ I(\sigma)$ tali che $I_1\ \cap\ I_2 = \varnothing$. Per la definizione di limite devono esistere $U_1,\ U_2\ \in\ \overset{\circ}{I}(x_0)$ tali che

$$f(x)\ \in\ I_1 \qquad \forall\, x\ \in\ U_1\ \cap\ A$$

$$f(x)\ \in\ I_2 \qquad \forall\, x\ \in\ U_2\ \cap\ A$$

Se prendiamo in considerazione peró l'intorno $U_1 \cap U_2$, in esso risulterebbe $f(x) \in I_1 \cap I_2 \neq \varnothing$, il che contraddice l'ipotesi.

C.V.D

Teorema *(segno)* 1.2. Siano $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua[1] in A, $x_0 \in D(A), \lambda \in \mathbb{R}^*$. Se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \quad \Rightarrow \quad \exists\, I \in \overset{\circ}{I}(x_0) : f(x) * \lambda > 0 \quad \forall\, x \in I \cap A$$

Dimostrazione.

Prendiamo in considerazione il caso $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Per la definizione di limite

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, I \in \overset{\circ}{I}(x_0) : \forall\, x \in I \cap A \quad |f(x) - \lambda| < \varepsilon$$

Dato che ε é arbitrario possiamo sceglierlo in modo che $\varepsilon < \lambda \Rightarrow \lambda - \varepsilon > 0$. In questo modo otteniamo:

$$0 < \lambda - \varepsilon < f(x) < \varepsilon + \lambda$$

ovvero $f(x) > 0$ nell'intorno I e di conseguenza $\lambda f(x) > 0$.
Analogamente si dimostra il caso in cui $\lambda \in \mathbb{R}^-$. Supponiamo invece $\lambda = +\infty$. La definizione di limite diventa:

$$\forall\, M > 0 \quad \exists\, I \in \overset{\circ}{I}(+\infty) : \forall\, x \in I \cap A \quad f(x) > M$$

Dato che $0 < M < f(x)$ nell'intorno I, si vede subito che $\lambda f(x) > 0$. Il caso in cui $\lambda = -\infty$ é del tutto simile.

C.V.D.

Teorema *(dei due carabinieri)* 1.3. Siano $f,\ g,\ h\ :\ A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A) \cap \mathbb{R}^*$. Supponiamo che esista $U \in \overset{\circ}{U}(x_0)\ :\ f(x) \leq g(x) \leq h(x)$; Se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \lambda \qquad \Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = \lambda.$$

Dimostrazione.

Per ipotesi

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, U_1 \in \overset{\circ}{U}(x_0) : \forall\, x \in U_1 \cap A \quad |f(x) - \lambda| < \varepsilon$$

[1]In seguito verrá data la definizione di continuitá.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, U_2 \in \overset{\circ}{U}(x_0) : \forall\, x \in U_2 \cap A \quad |h(x) - \lambda| < \varepsilon$$

Perció nell'intervallo $U_3 = U \cap U_1 \cap U_2$ varranno tutte e tre le ipotesi, ovvero

$$\lambda - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \lambda + \varepsilon \quad \Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = \lambda$$

C.V.D.

Teorema 1.4. *Siano* $f,\ g,\ :\ A \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x_0 \in D(A) \cap \mathbb{R}^*$. Allora se:

(1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \in \mathbb{R},\ \lim_{x \to x_0} g(x) = \sigma \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = \lambda + \sigma$
(2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \in \mathbb{R},\ \lim_{x \to x_0} g(x) = \sigma \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lambda\sigma$
(3) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \in \mathbb{R},\ \lim_{x \to x_0} g(x) = \sigma \in \mathbb{R}_0$[2]
$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lambda}{\sigma} \qquad$ se $g(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in A$
(4) $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty(-\infty),\ \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty(-\infty),$
$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = +\infty(-\infty),\ \lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = +\infty$
(5) $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty,\ \lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty \ \Rightarrow \ \lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = -\infty$
(6) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \lim_{x \to x_0} |f(x)| = |\lambda|$
(7) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}_0 \ \Rightarrow \ \lim_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\lambda}$

Dimostrazione.

Le dimostrazioni si costruiscono partendo dalla definizione di limite.

1.4. **Calcolo di alcuni limiti notevoli.**

- $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$
  Come si osserva in figura (1)

$$\forall\, x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\qquad |\sin(x)| < |x| < |\tan(x)|$$

Divido per $|\sin(x)|$

$$1 < \left|\frac{x}{\sin(x)}\right| < \left|\frac{1}{\cos(x)}\right|$$

[2]Con la notazione $\mathbb{R}_0$ indico l'insieme $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

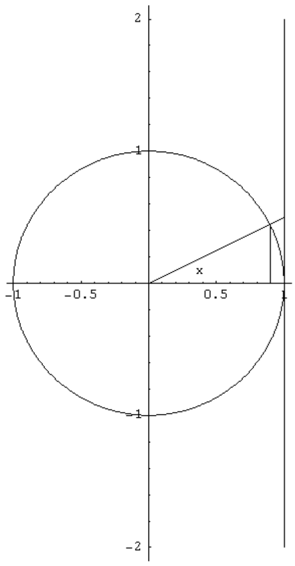

FIGURE 1. Primo limite notevole

x e $\sin(x)$ hanno segno concorde nell'intervallo $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Inoltre nel medesimo intervallo $\cos(x)>0$. Quindi posso omettere il valore assoluto.

$$\lim_{x\to 0}\cos(x)=1 \qquad \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)}=1=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$$

per il Teorema dei due carabinieri (1.3).

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1$

  Sapendo che $\tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ ottengo

  $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x\cos(x)}$$

  Inoltre $\lim_{x\to 0}\cos(x)=1$ e, come precedentemente dismotrato, $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$; ottengo allora:

  $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1$$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$

  É sufficiente moltiplicare per $\dfrac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}$, ottendendo cosí il limite seguente:

  $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x^2(1+\cos(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2}\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos(x)}=\frac{1}{2}$$

- $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ definizione costante di Eulero
- $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln(a) \qquad a>0$
  Poniamo $a^x - 1 = t \Rightarrow x = \log_a(t+1)$; riscrivendo il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{t}{\log_a(t+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\log_a\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\log_a e} = \ln(a)$$

- $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+1)}{x} = \frac{1}{\ln(a)}$
  La dimostrazione é analoga alla precedente.

1.5. **Forme indeterminate.** Nella risoluzione dei limiti si puó giungere ad ottenere delle espressioni del genere:

Forme indeterminate	Ai fini della risoluzione
$\frac{0}{0}$	$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+1)}{x}$
$\frac{\infty}{\infty}$	$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+1)}{x}$
$0 * \infty$	Ricondurre alle due forme indeterminate precendenti
0^0	Usare il logaritmo naturale e l'esponenziale di base e
∞^0	Usare il logaritmo naturale e l'esponenziale di base e
1^∞	$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$
$\infty - \infty$	Razionalizzare, formule di prostaferesi, proprietá dei logaritmi

2. Continuitá e discontinuitá

2.1. Definizione di continuitá. Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Si dice che f é *continua in* x_0 se

$$\forall\, I \in I(f(x_0)) \quad \exists\, U \in \overset{\circ}{U}(x_0) \,:\, f(x) \in I \quad \forall\, x \in A \cap U$$

La funzione f é *continua* in A se é continua in ogni punto di A. Analogamente, se $x_0 \in D(A)$, f é continua in x_0 se e solo se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

2.2. Teoremi principali sulle funzioni continue.

Teorema 2.1. Siano f, $g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni continue in A. Allora:

(1) $f + g$ é continua
(2) fg é continua
(3) $\dfrac{f}{g}$ é continua se $g(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in A$
(4) $|f|$ é continua

Dimostrazione.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x) = f(x_0) + g(x_0)$$

per le proprietá dei limiti (1.4). Analogamente per le altre parti del 2.1.

C.V.D.

Teorema *(Bolzano)* 2.2. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua nel suo dominio tale che $f(a)f(b) \leq 0$. Allora esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = 0$.

Dimostrazione.

Supponiamo $f(a) \leq 0, f(b) > 0$. Prendiamo in considerazione il punto medio dell'intervallo $[a, b] :\ c = \dfrac{a+b}{2}$. Se $f(c) > 0$ poniamo $a = a_1 \quad c = b_1$. Altrimenti dovremmo porre $c = a_1 \quad b = b_1$. Iteriamo il procedimento, considerando il punto medio $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ e ottenendo un altro intervallo $[a_2, b_2]$ e cosí una successione di intervalli $[a_k, b_k]$, tale che $f(a_k) \leq 0, f(b_k) > 0$. Per l'assioma di continuitá di $\mathbb{R}$

esiste ed é unico $x_0 \in \mathbb{R} : a_k \leq x_0 \leq b_k \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$. Osserviamo inoltre che

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = \lim_{k\to+\infty} b_k = x_0$$

Siccome f é continua

$$\lim_{k\to+\infty} f(a_k) = \lim_{k\to+\infty} f(b_k) = f(x_0)$$

Inoltre per il Teorema del segno (1.2), dato che $f(a_k) \leq 0$, il suo limite sará negativo o nullo; la stessa osservazione vale per il limite di $f(b_k)$, che sará positivo, perció $f(x_0) = 0$.

C.V.D.

Teorema *(valore intermedio)* 2.3. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua in A. Allora $\forall\, x_1, x_2 \in A$ tali che $f(x_1) < f(x_2)$ e $\forall\, k \in \mathbb{R}$ tale che
$f(x_1) < k < f(x_2)$ esiste $x_0 \in A : f(x_0) = k$.
Dimostrazione.
Supponiamo $x_1 < x_2$. Scegliamo una funzione $g : [x_1,\ x_2] \to \mathbb{R},\ g(x) = f(x) - k$; g é continua in $[x_1,\ x_2]$ perché somma di funzioni continue.
$g(x_1)g(x_2) = (f(x_1) - k)(f(x_2) - k) < 0$ perché per ipotesi $f(x_1) < k < f(x_2)$.
Per il Teorema di Bolzano allora $\exists\, x_0 \in A : g(x_0) = 0 \;\Rightarrow\; f(x_0) = k$.

C.V.D.

2.3. **Tipi di discontinuitá.** Esistono tre tipi principali di discontinuitá per le funzioni in variabile reale. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(1) **Prima specie (salto)**:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

(2) **Seconda specie**:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$$

(3) **Terza specie (eliminabile)**:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) \qquad x_0 \notin A$$

2.4. **Tipi di singolaritá.** Siano $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A)$, $x_0 \notin A$. x_0 é detto *punto singolare.* Esistono tre tipi di singolaritá, del tutto analoghi ai casi di discontinuitá: l'unica differenza é che x_0 é un punto esterno al dominio della funzione.

3. Derivabilitá

3.1. **Definizione di derivata e funzione derivabile.** Siano
$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A \cap D(A)$. Il rapporto

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

é detto *rapporto incrementale di* f *di punto iniziale* x_0. Analogamente possiamo riscriverlo cosí:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad x = h + x_0$$

Diciamo che f é *derivabile in* x_0 se esiste ed é finito

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Questo limite é detto *derivata di* f *in* x_0 e si indica $f'(x_0)$ oppure $D\left(f(x_0)\right)$.

3.2. **Teoremi principali sulle funzioni derivabili.** Elenco i principali teoremi sulle funzioni derivabili:

Teorema 3.1. Siano $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A) \cap A$. Se f é derivabile in x_0 allora f é continua in x_0.

Dimostrazione.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0) + f(x_0)\right) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0) \right) = f(x_0)$$

C.V.D.

Teorema 3.2. Siano $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D(A) \cap A$. Siano f, g derivabili in x_0. Allora:

(1) $f + g$ é derivabile in x_0 e $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
(2) fg é derivabile in x_0 e $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
(3) se $g(x) \neq 0 \; \forall \, x \in A$, $\dfrac{f}{g}$ é derivabile in x_0 e $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Dimostrazione.

Per ogni $x \in A \setminus \{x_0\}$

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)+g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)+g'(x_0)$$

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0} &= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \\ = \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)}{x-x_0} &= \\ = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x)+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}f(x_0) &= f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)\end{aligned}$$

In quanto $x \to x_0$. L'espressione si ottiene sapendo inoltre che $g(x)$ é continua in x_0 in quanto derivabile in x_0.

$$\begin{aligned}\frac{\frac{f}{g}(x)-\frac{f}{g}(x_0)}{x-x_0} &= \frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} = \\ = \frac{f(x)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{(x-x_0)g(x)g(x_0)} &= \\ = \frac{g(x_0)(f(x)-f(x_0))-f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{(x-x_0)g(x)g(x_0)} &= \\ = \frac{g(x_0)f'(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}\end{aligned}$$

C.V.D.

Teorema 3.3. Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}, g : B \to \mathbb{R}, f(A) \subseteq B$. Siano f, g derivabili. Allora esiste $(g \circ f)'(x_0)$ e

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

Dimostrazione.

Si ha

$$\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Da qui si ottiene

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

C.V.D.

Teorema 3.4. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione invertibile, continua e tale che $f'(x_0)$ esiste e non é nulla. Allora f^{-1} é derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e si ha $D(f^{-1}(y_0)) = \dfrac{1}{D(f(x_0))}$.

Dimostrazione.

Consideriamo $y \in f(A) : y \neq y_0$. Allora si ha

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

E considerando il limite del rapporto incrementale si dimostra la tesi.

C.V.D.

Teorema *(Fermat)* 3.5. Siano $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0$ un punto di massimo o minimo locale *interno* ad A. Se f é derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione.

Consideriamo il caso in cui x_0 é un massimo locale.

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h}$$

$f(x_0 - h) - f(x_0) \leq 0$ (x_0 é un massimo locale), $h < 0 \Rightarrow f'_-(x_0) \geq 0$.

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h}$$

$f(x_0 - h) - f(x_0) \leq 0$ (x_0 é un massimo locale), $h > 0 \Rightarrow f'_+(x_0) \leq 0$. Quindi, dato che per ipotesi f é derivabile in x_0, $f'(x_0) = 0$. Analogo il caso in cui x_0 é un minimo locale.

C.V.D.

Teorema *(Rolle)* 3.6. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che f sia derivabile (e quindi continua) in $[a, b]$ e inoltre $f(a) = f(b)$. Allora $\exists\, x_0 \in [a, b] : f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione.

Per il Teorema di Weierstrass f é dotata di massimo e minimo assoluti, rispettivamente x_{max} e x_{min}. Dividiamo la dimostrazione in casi:

(1) Se $x_{max} = a \wedge x_{min} = b \Rightarrow f(x_{max}) = f(x_{min})$. La funzione é quindi costante: $f'(x) = 0 \quad \forall\, x \in [a, b]$.

(2) Se $x_{max} = a \wedge x_{min} \neq b$, x_{min} deve essere interno ad $[a, b]$ e per il Teorema di Fermat (3.5) ha derivata nulla.

(3) Se $x_{max} \neq a \wedge x_{min} = b$, caso analogo al precedente.

(4) Se $x_{max} \neq a \wedge x_{min} \neq b$, sia x_{max} che x_{min} sono interni all'intervallo $[a, b]$ e hanno derivata nulla, per il Teorema di Fermat (3.5).

C.V.D.

***Teorema** (Lagrange)* 3.7. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Allora $\exists\, x_0 \in (a, b) : f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Dimostrazione.

La retta passante per i punti $(a, f(a)), (b, f(b))$ ha equazione:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Introduco allora una funzione, $L(x) = f(x) - \left(\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\right)$, che ha come valori la differenza dei valori della curva e della retta. Osserviamo che:

- $L(a) = 0$.
- $L(b) = 0$.
- $L(x)$ é continua in $[a, b]$ perché somma di funzioni continua in $[a, b]$.
- $L(x)$ é derivabile in (a, b) perché somma di funzioni derivabili in (a, b).

Sono quindi presenti tutte le condizioni per applicare il Teorema di Rolle (3.6) $\Rightarrow \exists\, x_0 \in (a, b) : L'(x_0) = 0$.

$$f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \;\Rightarrow\; f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

C.V.D.

***Corollario** (della derivata nulla)* 3.8. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f'(x) = 0,\ \forall\, x \in A$. Allora $f(x)$ é costante.

Dimostrazione.

Siano $x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2$. Nell'intervallo $[x_1, x_2]$ $f(x)$ rispetta le condizioni del Teorema di Lagrange (3.7), quindi $\exists\, x_0 \in [x_1, x_2] : f'(x_0) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Ma per ipotesi $f'(x) = 0 \; \forall \, x \in A$, quindi

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = f(x_2)$$

cioé f é costante.

C.V.D.

Corollario *(monotonia)* 3.9. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivabile in A. Se $\forall \, x \in A$ risulta che:

- $f'(x) > 0 \;\Rightarrow\; f$ é monotona crescente in A.
- $f'(x) \geq 0 \;\Rightarrow\; f$ é monotona non decrescente in A.
- $f'(x) < 0 \;\Rightarrow\; f$ é monotona decrescente in A.
- $f'(x) \leq 0 \;\Rightarrow\; f$ é monotona non crescente in A.

Dimostrazione.

Siano $x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2$. f nell'intervallo $[x_1, x_2]$ rispetta le condizioni del Teorema di Lagrange (3.7), quindi

$$\exists \, x_0 \in A : f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Il denominatore é positivo per ipotesi. A seconda del segno del numeratore si deduce il tipo di monotonia della funzione.

C.V.D.

Teorema *(Cauchy)* 3.10. Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue in $[a, b]$, derivabili in (a, b), $g'(x) \neq 0 \quad \forall \, x \in (a, b)$. Allora

$$\exists \, x_0 \in [a, b] : \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Dimostrazione.

Per prima cosa si nota che necessariamente $g(b) \neq g(a)$, perché se fosse il contrario, per il Teorema di Rolle (3.6) dovrebbe esistere $x_1 \in (a, b) : g'(x_1) = 0$, ma questo contraddirebbe l'ipotesi. Introduciamo quindi una funzione

$$C(x) = g(x) \left(f(b) - f(a) \right) - f(x) \left(g(b) - g(a) \right)$$

$C(x)$ é continua in $[a, b]$ perché somma di funzioni continue in quell'intervallo e derivabile in (a, b) perché somma di funzioni derivabili nel medesimo intervallo.

Osserviamo inoltre che $C(a) = C(b)$. Questo soddisfa tutte le ipotesi del Teorema di Rolle (3.6), perció

$$\exists\, x_0 \in (a,b) : C'(x_0) = 0 \Rightarrow 0 = g'(x_0)\,(f(b) - f(a)) - f'(x_0)\,(g(b) - g(a))$$

E cosí é dimostrata la tesi.

C.V.D.

Teorema *(Bernoulli - De L'Hopital)* 3.11. La regola attribuita a De L'Hopital, che in realtá é opera del matematico Bernoulli, dice che: se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono due funzioni continue in $[a,b]$ e derivabili in (a,b), tali che $g(x) \neq 0 \neq g'(x)\ \forall\, x \in [a,b]$, $g(x_0) = f(x_0) = 0$ e se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Dimostrazione.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad x \to x_0$$

C.V.D.

3.3. **Regole di derivazione.** Questo elenco raccoglie le principali regole di derivazione, ricavate dalla definizione di derivata e dai Teoremi precedenti.

- $D(a) = 0 \qquad a \in \mathbb{R}$
- $D(x) = 1$
- $D(x^k) = kx^{k-1} \qquad k \in \mathbb{Z}$
- $D(\sin(x)) = \cos(x)$
- $D(\cos(x)) = -\sin(x)$
- $D(\tan(x)) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- $D(\cot(x)) = -\dfrac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$
- $D(ln(x)) = \dfrac{1}{x}$
- $D(a^x) = a^x ln(a) \qquad a > 0$
- $D(\arcsin(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- $D(\arccos(x)) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $D(\arctan(x)) = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $D(arccot(x)) = -\dfrac{1}{1+x^2}$
- $D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $D(\dfrac{f(x)}{g(x)}) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \qquad g(x) \neq 0$
- $D(cf(x)) = cf'(x) \qquad c \in \mathbb{R}$
- $D((g \circ f)(x)) = g'(f(x))f'(x)$
- $D(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$
- $D(f(x)^{g(x)}) = f(x)^{g(x)} \left(g'(x)ln(f(x)) + g(x)\dfrac{f'(x)}{f(x)} \right)$

4. Analisi di funzione

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

4.1. **Calcolo del dominio.** Nell'analisi di funzione il calcolo del dominio deve essere il primo passo. Se non é indicato nessun dominio esplicito (dichiarato) si tiene conto solo del dominio implicito. Le principali limitazioni sono:

- Se $f = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ é necessario porre $h(x) \neq 0$.
- Nel caso del logaritmo: $\log_a(x) \ \Rightarrow \ a > 0 \vee a \neq 1, \ x > 0$.
- Se ci sono delle radici di indice pari: $\sqrt[2n]{g(x)} \ \Rightarrow \ g(x) \geq 0$.
- Per le funzioni inverse trigonometriche:

  $y = \arcsin(g(x)) \ \Rightarrow \ -1 \leq g(x) \leq 1$

  $y = \arccos(h(x)) \ \Rightarrow \ -1 \leq h(x) \leq 1$
- Per la funzione tangente: $y = tan(g(x)) \ \Rightarrow \ g(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$
- Per la funzione cotangente: $y = \cot(g(x)) \ \Rightarrow \ g(x) \neq k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$
- Per le potenze con esponente reale, la base deve essere positiva.

Si devono classificare inoltre i punti di singolaritá.

4.2. **Segno e classificazione della funzione.** Successivamente bisogna determinare dove la funzione assume valori positivi e dove negativi. Per determinarlo bisogna studiare il segno, ovvero porre $f(x) \geq 0$. Sul grafico vanno indicate le intersezioni della curva con gli assi.

N.B. Bisogna considerare il dominio nello studio del segno!!

Classificare la funzione: definire se si tratta di una funzione algebrica o trascendente, razionale o irrazionale, intera o fratta; inoltre verificare se é monotona, se é pari, se é dispari e se é periodica.

4.3. **Limiti.** La funzione ci risulta definita in un determinato dominio: dobbiamo ora stabilire il suo comportameno "ai confini" di questo dominio. Si tratterá di stabilire il comportamento della funzione nei pressi dei suoi punti di accumulazione. Inoltre bisogna verificare se la funzione possiede degli asintoti (verticali, orizzontali, obliqui). Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ la funzione potrebbe possedere asintoti obliqui.

Teorema 4.1. Se l'asintoto obliquo esiste ha equazione $y = mx + q$ dove

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$q = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx)$$

Dimostrazione.

I punti generici A, B segnati nel grafico (2) hanno coordinate $A(x, mx+q)$ $B(x, f(x))$. Inoltre $d(A, B) \to 0$ $x \to \infty$. Quindi

$$\lim_{x\to\infty} |f(x) - mx - q| = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = q$$

Inoltre possiamo ricavare anche m:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - q}{x} = m = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{q}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

C.V.D.

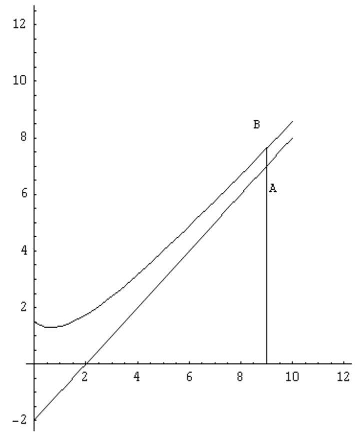

FIGURE 2. Esempio di asintoto obliquo

4.4. **Studio della derivata prima.** Dopo aver calcolato la derivata dobbiamo determinarne il segno e dove é nulla. Il segno infatti ci indica dove il grafico della curva é crescente e dove decrescente, mentre i punti in cui la derivata é nulla sono i punti di massimo o minimo relativi. Anche durante lo studio del segno della derivata é *fondamentale* considerare il dominio della funzione.

4.5. **Studio della derivata seconda.** La derivata seconda stabilisce la concavitá della curva; anche il segno della derivata seconda va studiato: dove é positiva la curva ha concavitá rivolta verso l'alto, dove é negativa, invece, accade l'opposto. I punti di derivata nulla sono detti punti di flesso e vanno indicati.

4.6. **Disegnare il grafico.** Possediamo tutti i dati per tracciare il grafico della curva. Il metodo pratico da seguire é il seguente:

(1) Escludere gli intervalli dove la funzione non é definita, cioé non facenti parte del suo dominio.
(2) Siccome é stato studiato il segno della curva, si possono barrare gli intervalli dove sappiamo non assume valori; per esempio se nell'intervallo $[1, 2]$ é positiva, possiamo segnare la parte negativa dell'asse delle ordinate nel suddetto intervallo. Indicare inoltre le intersezioni della curva con gli assi.

(3) Bisogna rendere visibili i punti singolari e segnare in qualche modo il comportamento della funzione nei pressi dei punti di accumulazione del suo dominio. se la funzione possiede degli asintoti, disegnarli.

(4) Segnare sul grafico i punti di derivata nulla e i punti di flesso.

(5) Contraddistinguere gli intervalli in cui la derivata prima é positiva e quelli in cui é negativa.

(6) Tenendo conto del segno della derivata seconda, delle aree e dei punti segnati, tracciare la curva.

```
In[30]:= f[x_] := (E^(x + 1)) / (4 + x^2)

In[31]:= Reduce[f[x] > 0, x]

Out[31]= x ∈ Reals

In[32]:= a = D[f[x], x]

Out[32]= -(2 e^(1+x) x)/(4 + x^2)^2 + e^(1+x)/(4 + x^2)

In[33]:= Reduce[a > 0, x]

Out[33]= x ∈ Reals

In[34]:= b = D[f[x], {x, 2}]

Out[34]= -(4 e^(1+x) x)/(4 + x^2)^2 + e^(1+x)/(4 + x^2) + e^(1+x) ((8 x^2)/(4 + x^2)^3 - 2/(4 + x^2)^2)

In[35]:= Reduce[b > 0, x]

Out[35]= x ∈ Reals

In[36]:= Limit[f[x], x → +Infinity]

Out[36]= ∞

In[37]:= Limit[f[x], x → -Infinity]

Out[37]= 0
```

FIGURE 3. Passaggi di calcolo

5. ESERCIZIO

Con l'aiuto del programma Mathematica, é stato possibile svolgere un esercizio di analisi di funzione. I passaggi di calcolo sono visibili nella figura (3). La funzione analizzata é per l'appunto

$$f(x) = \frac{e^{x+1}}{4 + x^2}$$

Il primo passo é il calcolo del dominio: in questo caso non abbiamo limitazioni: $f(x)$ é definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si tratta di una funzione trascendente, né pari né dispari, non periodica. Studiando il segno della funzione, osserviamo che essa é

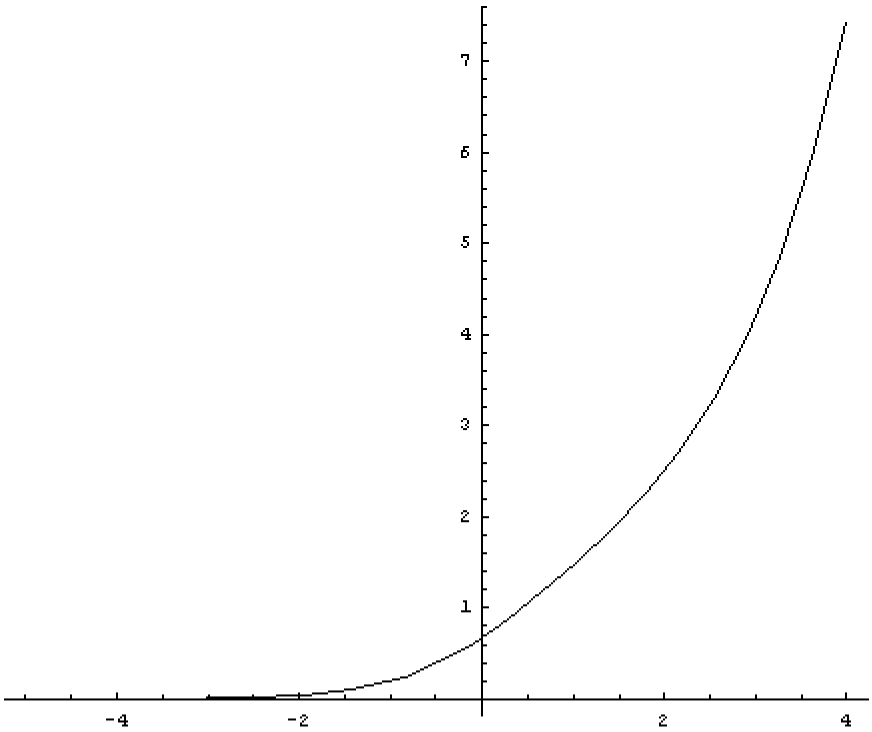

FIGURE 4. Grafico della funzione

positiva in ogni suo punto e non ha intersezione con l'asse delle ascisse. Interseca l'asse delle ordinate nel punto $P(0, \frac{e}{4})$. I punti di accumulazione del suo dominio sono $+\infty$, $-\infty$. Il risultato dei limiti é osservabile in figura (3); l'unico asintoto é $y = 0$, in quanto non possiede asintoti obliqui per $x \to +\infty$. Anche la derivata prima é positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi la funzione é monotona crescente. É inferiormente limitata ($inf(f) = 0$), ma non lo é superiormente. La concavitá, come si osserva dallo studio della derivata seconda, é rivolta verso l'alto in ogni punto del dominio. La funzione non ha flessi. Otteniamo quindi il grafico in figura (4).