Successioni e serie

Ermanno Travaglino

Una successione è una sequenza ordinata di numeri o di altre grandezze, e una serie è la somma dei termini di tale sequenza.

Una successione si rappresenta con l'espressione a_1, a_2 …, a_n, … , nella quale n è un intero positivo, e i termini possono essere o meno distinti; a_1 è il primo termine, a_2 il secondo, e così via. Se l'espressione ha un ultimo termine, la successione si dice finita o, in altre parole, è composta da un numero finito di termini; nel caso contrario, essa si dice infinita. Una successione è definita solo se esiste una regola che permette di determinare l'*n*-esimo termine per ogni numero intero positivo *n*. Ad esempio, tutti i numeri interi positivi, nel loro ordine naturale, costituiscono una successione infinita definita dalla relazione $a_n = n$. La formula $a_n = n^2$ determina invece la successione 1, 4, 9, 16, … , cioè la sequenza dei quadrati dei numeri naturali. Se si assegnano i valori 0, 1 ai primi due termini e poi si continua in modo che ogni termine sia la somma dei due termini precedenti, si ottiene la successione 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …, nota come successione di Fibonacci.

Tra le successioni notevoli vi sono le successioni aritmetiche (dette anche progressioni aritmetiche), in cui è costante la differenza tra due termini consecutivi, e le successioni geometriche (o progressioni geometriche), in cui invece è costante il rapporto tra due termini consecutivi. Come esempio, si consideri l'investimento di una data somma di denaro *P*. Se l'interesse dell'investimento è semplice, ed è dell'8%, dopo un numero di anni pari a *n* il capitale iniziale *P* diventa $a_n = P + n \times (0{,}08)P$. Le quantità annue a_n formano allora una progressione aritmetica, la cui ragione (la differenza costante tra due termini successivi) è $(0{,}008)P$. Se invece l'interesse dell'investimento è composto, dopo un certo numero di anni le somme annue prendono la forma di una progressione geometrica il cui termine generale è $g_n = P \times (1{,}08)^n$. In entrambi i casi è chiaro che a_n e g_n sono destinati a crescere indefinitamente all'aumentare di *n*.

In generale, tuttavia, i termini di una successione non necessariamente crescono senza limite. Ad esempio, al crescere di *n* la successione $a_n = 1/n$ si avvicina al valore limite 0, e $b_n = A + B/n$ si avvicina sempre più al valore *A*. In ciascuno di questi casi esiste quindi un numero finito *L* tale che, fissato un qualunque intervallo di tolleranza *e*, i termini della successione, da un certo punto in poi, sono destinati a cadere entro l'intervallo *e* da *L*. Ad esempio, nel caso della successione $2 + (-1)^n/2n$, $L = 2$. Anche se assumessimo per *e* un valore piccolissimo, come 1/10.000, si potrebbe dimostrare che per tutti gli *n* maggiori di 5000, i termini di questa successione non differiscono da 2 per più del valore *e*. Il numero *L* è chiamato il limite della successione, dal momento che anche se i suoi singoli termini possono essere minori o maggiori di *L*, alla fine si accumulano intorno al valore che esso assume. Quando la successione ammette il valore limite *L*, si dice che essa è convergente e che converge a *L*. Allora se la successione generica a_n, converge a *L*, si scrive: $\lim a_n = L$, e si legge "il limite di a_n per *n* che tende a infinito è uguale a *L*".

Il termine serie indica invece la somma $a_1 + a_2 + \dots + a_n$, o $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ dei termini di una successione. Una serie può essere finita o infinita, a seconda che il numero di termini della successione corrispondente sia finito o infinito.

La successione $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$, … $s_n = a_1 + a_2 + … + a_n$, …, è detta successione delle somme parziali della serie $a_1 + a_2 + … + a_n + …$. La serie converge o diverge se e solo se converge o diverge la successione delle somme parziali. Una serie si dice numerica se i suoi termini sono numeri; invece, se ogni termine è una funzione di una o più variabili, la serie è una serie di funzioni. In particolare, una serie di potenze è una particolare serie di funzioni, data da $a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + … + a_n(x - c)^n + …$, in cui c e i termini in a sono costanti. Per le serie di potenze, determinare la convergenza o meno della serie vuol dire trovare, se esiste, l'insieme dei valori di x in corrispondenza dei quali si verifica la convergenza. Se esiste un x per il quale la serie converge, allora l'insieme cercato è almeno quello degli x minori in valore assoluto di quello trovato. La teoria della convergenza delle serie, elaborata dal matematico francese Augustin-Louis Cauchy intorno al 1820 ha grande importanza praticamente in ogni ramo della matematica pura e applicata.

Successioni di numeri reali

Sia f una funzione di una variabile, definita per ogni numero naturale positivo n e assumente sempre valori reali; si definisce successione di infiniti numeri reali (simbolo $\{a_n\}$) l'insieme ordinato di numeri $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, …………….. $a_n = f(n)$, …………….

Se:
- $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$ (valore finito) ➔ successione convergente
- $\lim_{n\to+\infty} a_n = \pm\infty$ ➔ successione divergente (positivamente o negativamente)
- $\lim_{n\to+\infty} a_n$ non esiste ➔ successione indeterminata

successione limitata se esiste un numero positivo M tale che per ogni n risulta $|a_n| \le M$:

- successione superiormente limitata se esiste un numero A tale che per ogni n sia $a_n \le A$
- successione inferiormente limitata se esiste un numero A tale che per ogni n sia $a_n \ge A$

Se per ogni n risulta:

a) $a_n < a_{n+1}$ ➔ successione crescente in senso stretto
b) $a_n \le a_{n+1}$ ➔ successione crescente in senso lato
c) $a_n > a_{n+1}$ ➔ successione decrescente in senso stretto
d) $a_n \ge a_{n+1}$ ➔ successione decrescente in senso lato

} successioni monotone

Successione di Cauchy ➔ $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, \delta>0 : \forall\, r,s>\delta\ \ |a_r - a_s| < \varepsilon$
Teorema: una successione di numeri reali è convergente se e solo se è una successione di Cauchy

Rappresentazione grafica di una successione di numeri reali:
$a_n = f(n)$ ➔ insieme di infiniti punti isolati di coordinate $(n;a_n)$

Progressione aritmetica

Sequenza di numeri tale che ciascuno di essi sia maggiore o minore del precedente di una quantità costante detta ragione. Ad esempio, i numeri naturali 1, 2, 3, 4 formano una progressione aritmetica la cui ragione è 1, mentre la sequenza 22, 19, 16, 13, 10, 7 è progressione aritmetica di ragione -3. Per determinare la somma di una progressione limitata, cioè costituita da un numero finito di termini, è sufficiente moltiplicare la somma del primo e dell'ultimo termine, per il numero totale di termini, diviso per due. Così, la somma dei primi dieci numeri naturali è (1 + 10) × (10 ÷ 2) = 55.

a_1, a_2, a_3, a_4, ... a_k,............ a_n

÷ a_1, $a_1 + d$, $a_1 + 2d$, $a_1 + 3d$, ..., $a_1 + (k-1)d$, ...$a_1 + (n-1)d$

$a_k = a_1 + (k-1)d$ →
- 1° termine: $a_1 = a_k - (k-1)d$
- ragione: $d = (a_k - a_1)/(k-1)$
- posto: $k = [(a_k - a_1)/d] + 1$

$a_3 = a_2 + d$
....
....
$a_n = a_{n-1} + d$
$a_{n-1} = a_n - d$

$$\mathbf{a_k = a_s + (k-s)d}$$

Proprietà di una progressione aritmetica con un numero finito di termini:
la somma dei termini equidistanti dagli estremi è costante ed è uguale alla somma degli estremi; in particolare, se n è dispari, il termine medio è uguale alla semisomma degli estremi.

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d)+(a_n - d) = a_1 + a_n$$

$$a_3 + a_{n-2} = (a_1 + 2d)+(a_n - 2d) = a_1 + a_n \text{ ....}$$

Somma dei termini $\underline{S_n = \sum_k a_k}$

$S_n = a_1 + a_2 + \text{..............} + a_{n-1} + a_n$

prop. commutativa➔ $S_n = a_n + a_{n-1} + \text{..............} + a_2 + a_1$ ➔ sommo membro a membro:

$2\ S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \text{.........}(a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) = n(a_1 + a_n)$
(per la prop. precedente)

➔ $\mathbf{S_n = [(a_1 + a_n) / 2] * n}$

Progressione geometrica

Sequenza di numeri tale che il rapporto tra ciascun termine (escluso il primo) e quello precedente abbia un valore costante, detto ragione. Ad esempio, la sequenza di numeri 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, è una progressione geometrica di ragione 2, mentre i numeri 1, 1/3, 1/9, 1/27, 1/81, costituiscono una progressione geometrica di ragione 1/3. In generale, una progressione geometrica è univocamente definita dal suo termine iniziale, che si indica con a_1, e dalla sua ragione q.

a_1, a_2, a_3,........ a_k,............ a_n

÷÷ a_1, a_1q, a_1q^2, ..., a_1q^{k-1}, ..., a_1q^{n-1}

$$a_k = a_1 * q^{k-1} \rightarrow \begin{cases} a_1 = a_k/q^{k-1} \\ q = \sqrt[k-1]{a_k/a_1} \\ k = \lg_q (a_k/a_1) * q \end{cases}$$

$$\mathbf{a_k = a_s * q^{k-s}}$$

Somma dei termini $\quad S_n = \sum_k a_k$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_{n-1} + a_n$$

moltiplico tutto per q ➔ $S_n * q = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots\ldots + a_n + a_n * q$ ➔

sottraggo membro a membro:

$$S_n - S_n * q = a_1 - a_n * q = a_1 - a_1 * q^{n-1} * q = a_1 - a_1 * q^n$$

$$S_n (1 - q) = a_1 (1 - q^n) \quad ➔ \quad \mathbf{S_n = a_1 * [(1 - q^n)/(1 - q)]}$$

$$S_\infty = \lim_{n \to \infty} S_n = \begin{cases} + \infty & \text{se } |q| > 1 \\ a_1/(1 - q) & \text{se } |q| < 1 \end{cases}$$

Le serie geometriche e le progressioni geometriche trovano numerose applicazioni nell'ambito delle scienze fisiche, biologiche e sociali, come pure nelle scienze bancarie. Molti problemi sugli interessi composti e sulle annualità vengono facilmente risolti ricorrendo a questi concetti.

Serie di numeri reali

Serie numerica: successione di somme parziali costruite a partire da una data successione

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n + \ldots\ldots = \sum_n a_n$$

$s_1 = a_1$
$s_2 = a_1 + a_2$
....
$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n$

$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ ➔ somme parziali o ridotte della serie

Carattere di una serie

Se:
- $\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_k a_k = S$ ➔ serie convergente (S = valore o somma)
- $\lim_{n \to +\infty} s_n = \pm\infty$ ➔ serie divergente (positivamente o negativamente)
- $\lim_{n \to +\infty} s_n$ non esiste ➔ serie indeterminata o oscillante

Resto n-esimo della serie ➔ $a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ ottenuta sopprimendo i primi n termini della serie

Serie di Mengoli

$$\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\frac{1}{3*4}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots\ldots\ldots$$

$$Poiché\ \frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} \implies S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1} \implies$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

➔ serie convergente avente per somma 1

Serie di Wallis $\sum_n (-1)^{n+1}$

$s_1 = 1$

$s_2 = 1 - 1 = 0$

$s_3 = 1 - 1 + 1 = 1$....................... ➔ $s_n = \begin{cases} 1 \text{ per n dispari} \\ 0 \text{ per n pari} \end{cases}$ ➔ non esiste $\lim s_n$ ➔ serie oscillante

Serie geometrica $a + aq + aq^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + aq^n + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\lim s_n = +\propto$ per $|q| > 1$ ➔ serie divergente

$\lim s_n = a/(1 - q)$ per $|q| < 1$ ➔ serie convergente

casi particolari:
- per $q = 1$ ➔ $s_n = n*a$ ➔ $\lim s_n = +\propto$ ➔ serie divergente
- per $q = -1$ ➔ $s_n = \begin{cases} 0 \text{ per n pari} \\ a \text{ per n dispari} \end{cases}$ ➔ serie oscillante

Criterio di Cauchy per la convergenza di una serie

Teorema: Se una serie è convergente allora il suo termine generale a_n tende a zero per $n\to\propto$, cioè

$$\lim_{n\to\propto} a_n = 0$$

Questa è una condizione necessaria, ma non sufficiente.

Criterio di Cauchy (o criterio generale di convergenza): una serie è convergente se, e solo se, fissato ad arbitrio un numero positivo ε, è possibile determinare un indice η tale che, per ogni n > η e per ogni numero naturale k, si abbia:

$$|r_{n,k}| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n+k}| < \varepsilon$$

Serie armonica $1 + ½ + 1/3 + \ldots. + 1/n + \ldots\ldots$

Pur essendo lim $a_n = 0$, la serie non è convergente; infatti per ogni n e per k = n risulta:

$$r_{n,n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{2n} = n * \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow r_{n,n} \geq ½$ e non $|r_{n,n}| < \varepsilon$

<u>Resto n-esimo di una serie:</u> $R_n = S - S_n = a_{n1} + a_{n+2} + ...$
Per le serie convergenti può essere considerato come differenza tra la somma S della serie stessa e la sua ridotta n-esima.
Una serie e il suo resto n-esimo hanno lo stesso carattere.

Criteri di convergenza

- **Serie a termini positivi**

1) <u>Criterio del confronto (o di Gauss)</u>

Se per ogni n risulta $a_n \leq b_n$

$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ ➔ serie minorante

$b_1 + b_2 + b_3 + ... + n_n + ...$ ➔ serie maggiorante

Una serie è

convergente se ammette una maggiorante convergente

divergente se ammette una minorante divergente

2) <u>Secondo criterio del confronto (o criterio del confronto asintotico)</u>
Date le due serie a termini positivi $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$, si supponga che esista il $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = l$

a) se la serie $\sum_n b_n$ è convergente e il limite l è finito ($l \geq 0$), allora anche $\sum_n a_n$ è convergente;
b) se la serie $\sum_n b_n$ è divergente e il limite l è non nullo (finito o infinito), allora anche $\sum_n a_n$ è divergente.

3) <u>Criterio del rapporto (o di D'Alembert))</u>
Se per una serie a termini positivi si ha:

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} / a_n = k$

per k < 1 ➔ serie convergente
per k > 1 ➔ serie divergente
per k = 1 ➔ non si può stabilire il carattere della serie

4) <u>Criterio della radice (o di Cauchy)</u>
Se per una serie a termini positivi si ha:

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$

per k < 1 ➔ serie convergente
per k > 1 ➔ serie divergente
per k = 1 ➔ non si può stabilire il carattere della serie

- **Serie a termini di segno qualunque**

Una serie a termini di segno qualunque si dice assolutamente convergente quando converge la serie dei valori assoluti dei suoi termini.

1) Criterio generale
   Una serie assolutamente convergente è anche convergente (ma non viceversa)

2) Criterio di Leibniz
   Una serie con segni alterni è sicuramente convergente se:
   $|a_1| \geq |a_2| \geq |a_3| \geq \dots |a_n| \geq \dots$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

In una serie convergente di somma S il resto n-esimo R_n è

$$R_n = S - S_n \quad \text{e si ha che} \quad \lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

Per una serie a segno alterno che soddisfi il criterio di Leibniz si ha $|R_n| < |a_{n+1}|$ cioè, sostituendo a S il valore S_n l'errore che si commette non supera, in valore assoluto, il primo termine trascurato.

Serie notevoli

Serie di Mengoli $\quad \Sigma_n\ 1/n(n+1)$ ➔ serie convergente ➔ $S = 1$

Serie di Wallis $\quad \Sigma_n\ (-1)^{n+1}$ ➔ serie indeterminata

Serie geometrica $\quad \Sigma_n\ aq^n$
- $|q| < 1$ ➔ convergente
- $|q| > 1$ e $q = 1$ ➔ divergente
- $q = -1$ ➔ indeterminata o oscillante

Serie armonica $\quad \Sigma_n\ 1/n$ ➔ serie divergente

Serie armonica generalizzata (o serie di Riemann)

$\Sigma_n\ 1/n^{\alpha}$
- $\alpha = 1$ ➔ serie armonica ➔ divergente
- $\alpha \leq 0$ ➔ divergente
- $0 < \alpha < 1$ ➔ divergente (perché maggiorante della serie armonica)
- $\alpha > 1$ ➔ convergente (perché minorante di una serie geom. con $|q| < 1$)

Serie di funzioni

Data la successione di infinite funzioni della variabile reale $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$,...... tutte definite in uno stesso insieme D, si dice serie di funzioni il simbolo

$$\Sigma_n f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) + ...$$

(Se alla variabile x si attribuisce un valore numerico, si ottiene una serie numerica che può essere o non essere convergente)

L'insieme **D** si dice **insieme di definizione (o dominio)** della serie.

Per ogni serie di funzioni è possibile determinare un **insieme di convergenza C**, che è l'insieme dei valori di x per i quali la serie converge ($C \subseteq D$).

Attribuendo alla x valori appartenenti all'insieme C si ottengono diversi valori della serie, che dipendono dal particolare valore scelto per la x; si ha quindi

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) + ...$$

e diciamo che la serie $\Sigma_n f_n(x)$ converge alla funzione f(x).

Si conclude che è possibile passare da una serie di funzioni ad un'unica funzione f(x), inversamente una funzione può essere scritta come somma di infinite funzioni, metodo noto come **sviluppo in serie.**

Esempio:

Le infinite funzioni $f_1(x) = 1/x$; $f_2(x) = 1/x^2$; $f_3(x) = 1/x^3$; ...... $f_n(x) = 1/x^n$; ......
Sono tutte definite per ogni valore di x diverso da zero; la relativa serie è:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+.....+\frac{1}{x^n}+.....=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}$$

Per x = 1 si ottiene la serie numerica divergente:

$$1 + 1 + 1 + ...+ 1 + 1/1^n +.....$$

Per x = – 1 si ottiene la serie numerica oscillante:

$$-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1/(x-1)^n +........$$

Per x = 3 si ottiene la serie convergente:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+........+\frac{1}{3^n}+........$$

la cui somma è ½.

Serie di potenze

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots + a_n x^n + \ldots\ldots = \Sigma_n a_n x^n \quad (\text{ n varia da } 0 \text{ a } +\infty)$$

Teorema di Abel: Per le serie di potenze valgono le seguenti proprietà:

Prima proprietà: se una serie di potenze converge nel punto $x_0 > 0$, allora essa converge assolutamente per ogni $|x| < x_0$

Seconda proprietà: se una serie di potenze non converge nel punto $x_0 > 0$, allora essa non converge per ogni x tale che $|x| > x_0$

Per ogni serie di potenze è possibile individuare un intervallo $(-R, R)$, con $R > 0$, tale che la serie converga assolutamente per ogni x interno all'intervallo stesso, mentre non converga per valori esterni all'intervallo.

L'intervallo **(– R, R)** è detto **intervallo di convergenza**, **R raggio di convergenza.**

Considerazioni:
1) l'intervallo di convergenza ha sempre centro nel punto $x = 0$
2) il comportamento della serie agli estremi va analizzato caso per caso

Casi particolari:
1) se $R = 0$ l'intervallo di convergenza si riduce al punto $x = 0$
2) se $R = +\infty$ l'intervallo di convergenza si estende al campo reale

Determinazione del raggio di convergenza di una serie di potenze

Data una serie di potenze $\Sigma_n a_n x^n$ (n varia da 0 a $+\infty$) , se risulta:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$$

con l numero finito non nullo ➔ $R = 1 / l$

se lim = 0 ➔ $R = +\infty$

se lim = $+\infty$ ➔ $R = 0$

Serie di potenze di $(x - x_0)$

Una serie di potenze della forma $\Sigma_n a_n (x - x_0)^n$ (n varia da 0 a $+\infty$)

si dice serie di potenze della variabile $x - x_0$, o anche serie di potenze di punto iniziale $x = x_0$

Ponendo $x - x_0 = X$ si ha $\Sigma_n a_n X^n$ (n varia da 0 a $+\infty$)

Se quest'ultima serie ha raggio di convergenza R, si ha che la serie di partenza converge per

$$-R < x - x_0 < R \quad ➔ \quad x_0 - R < x < x_0 + R$$

Considerazioni:
1) l'intervallo $(x_0 - R, x_0 + R)$ ha x_0 come punto medio
2) valgono le stesse proprietà già viste

Serie di Taylor e serie di Mac Laurin

Sia f(x) una funzione definita in un insieme D ed ivi indefinitamente derivabile.

Serie di Taylor

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+..........+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+.....$$

Per $x_0 = 0$ si ha la **Serie di Mac Laurin**

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+..........+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+.....$$

Sviluppo in serie di Mac Laurin di alcune funzioni elementari

Funzioni e^x ed e^{-x}

Data la funzione **f(x) = e^x** si ha $f^{(n)}(x) = e^x$ per ogni n ➔ f(0) = f'(0) = f''(0) = $f^{(n)}(0)$ = 1 ➔

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+.......+\frac{x^n}{n!}+..... = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

Per **f(x) = e^{-x}** si ha:

$$e^{-x} = 1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+.......+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+..... = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$$

Funzioni sen x e cos x

Per **f(x) = sen x** si ha:

f'(x) = cos x f''(x) = – sen x f'''(x) = – cos x f''''(x) = sen x

che si ripetono periodicamente ogni quattro derivazioni, assumendo in x = 0, alternativamente i quattro valori 1 0 -1 0 ➔

$$\operatorname{sen} x = \frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+........+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Per **f(x) = cos x** si ha:

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+........+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Sviluppo in serie di Fourier

Metodo utilizzato per rappresentare una funzione dotata di particolari caratteristiche di continuità e periodicità come la somma di una serie di termini trigonometrici pesati da opportuni coefficienti. Fu sviluppato dal matematico francese Jean-Baptiste-Joseph Fourier, da cui prende il nome, nell'ambito dei suoi studi sull'analisi armonica, e trova numerose applicazioni sia in matematica sia in fisica. Ad esempio, in matematica viene usato per sfruttare il metodo di integrazione per serie delle funzioni; in fisica è un importante strumento per lo studio dei fenomeni periodici. Data una funzione *f(x)*, periodica di periodo 2π, si dicono coefficienti di Fourier della funzione *f(x)* gli integrali, definiti nell'intervallo $(-\pi, \pi)$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(nx)dx$$

per tutti i numeri naturali $n = 1, 2, ...$

Se tali integrali esistono, la serie trigonometrica

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n cos(nx) + b_n sin(nx)\right)$$

si dice serie di Fourier associata alla funzione *f(x)*. Nel caso particolare in cui la somma *S(x)* della serie sia finita (serie convergente) e coincida con la funzione *f(x)*, quest'ultima si dice sviluppabile in serie di Fourier, e si può scrivere

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n cos(nx) + b_n sin(nx)\right)$$

In generale, affinché una funzione periodica *f(x)* ammetta lo sviluppo in serie di Fourier, è necessario che essa sia continua all'interno dell'intervallo di periodicità, tranne al più in un numero finito di punti, in corrispondenza dei quali deve comunque essere limitata, cioè può assumere solo valori finiti. Quando queste condizioni sono soddisfatte, la serie di Fourier converge esattamente al valore della funzione *f(x)* nei punti *x* di continuità. In ciascuno degli eventuali punti di discontinuità invece, la serie converge a un valore finito, dato dalla media tra il limite destro e il limite sinistro della funzione in quel punto.

In generale non è necessario che la funzione *f(x)* sia periodica: qualunque funzione che presenti nell'intervallo compreso tra *0* e π le caratteristiche di continuità e limitatezza sopra precisate, può essere ridefinita in modo da essere estesa per periodicità a tutto l'asse reale, e quindi sviluppata in serie di Fourier come funzione periodica.

Le funzioni simmetriche rispetto all'asse delle *y* (funzioni pari) ammettono uno sviluppo in serie di Fourier che contiene termini di soli coseni; le funzioni simmetriche rispetto all'origine degli assi invece (funzioni dispari), presentano uno sviluppo in serie di soli seni.

Si consideri, ad esempio, la funzione $f(x) = x$ ristretta all'intervallo compreso tra - π e π, e la si estenda per periodicità a tutto l'asse reale. Così definita, tale funzione presenta tutte le caratteristiche necessarie per ammettere lo sviluppo in serie di Fourier. Essendo una funzione dispari, i suoi coefficienti di Fourier sono solo coseni:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} x \int_{-\pi}^{\pi} x cos(nx) dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot sin(nx) dx = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

Risulta allora

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} sin(nx) = 2\left(sinx - \frac{sin2x}{2} + \frac{sin3x}{3} + \ldots \right)$$

e vale $S(x) = f(x)$ per tutti gli x diversi da $n\pi$; in tutti i punti di discontinuità $x = n\pi$, la serie di Fourier assume un valore dato dalla media aritmetica tra limite destro e limite sinistro della funzione e cioè, in questo caso, $S(x) = 0$.

Serie di Fourier in forma complessa

In virtù delle formule di Eulero, che permettono di scrivere *sin nx* e *cos nx* in forma di esponenziali complessi, lo sviluppo in serie di Fourier di una funzione *f(x)* si può scrivere equivalentemente nella forma:

$$f\left(x\right)=c_0+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(c_n e^{inx}+c_{-n}e^{-inx}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{inx}$$

dove

$$c_0=\frac{a_0}{2}$$

$$c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}$$

$$c_n=\frac{a_n+ib_n}{2}$$