Potenze e Radici quadrate

1 Valore assoluto di un numero

Il valore assoluto di numero è uguale al numero stesso se il numero è positivo o nullo,è uguale all'opposto del numero se il numero é negativo:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{SE } x \geq 0 \\ -x & \text{SE } x < 0 \end{cases}$$

Ad esempio: $|7| = 7$, $|0| = 0$, $|-3| = 3$, $|-2.25| = 2.25$, $\left|-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$.

Molte calcolatrici scientifiche programmabili hanno un tasto specifico (indicato con $|x|$ o con ABS) per determinare il valore assoluto di un numero.

<u>Proprietà</u>:

$|x+y| \leq |x| + |y|$

Il valore assoluto della somma di due numeri è minore o uguale della somma dei valori assoluti dei due numeri.
Il segno di uguaglianza è vero solo quando i due numeri reali hanno lo stesso segno, oppure quando almeno uno dei due numeri è nullo. Ecco alcuni esempi:

- $|5+3| = |8| = 8$ e $|5| + |3| = 5+3 = 8$. In questo caso risulta: $|5+3| = |5| + |3|$.
- $|5+(-3)| = |2| = 2$ e $|5| + |-3| = 5+3 = 8$. In questo caso risulta: $|5+(-3)| < |5| + |-3|$.
- $|(-5)+(-3)| = |-8| = 8$ e $|-5| + |-3| = 5+3 = 8$. In questo caso risulta: $|(-5)+(-3)| = |-5| + |-3|$.

$|x-y| \leq |x| + |y|$

Il valore assoluto della differenza di due numeri è minore o uguale della somma dei valori assoluti dei due numeri.
La dimostrazione di questa proprietà fa riferimento alla precedente. Infatti si ha:
$|x-y| = |x+(-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$.

$|xy| = |x||y|$

Il valore assoluto del prodotto di due numeri è uguale al prodotto dei valori assoluti dei due numeri.
La dimostrazione di questa proprietà fa riferimento alla radice quadrata e si trova nel paragrafo 4. In ogni caso è di facile verifica con esempi numerici.

$\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ (y≠0) **Il valore assoluto del rapporto di due numeri è uguale al rapporto dei valori assoluti dei due numeri**.
La dimostrazione di questa proprietà fa riferimento alla radice quadrata e si trova nel paragrafo 4. In ogni caso è di facile verifica con esempi numerici.

2 Potenze ad esponente intero e loro proprietà

Una potenza è un'espressione del tipo: $a^2 = a \cdot a,\ a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$; in generale:

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ fattori}}$$

dove *a* è un numero reale.

Vocabolario: a^m è la ***potenza***
a è la ***base*** della potenza
m è l'***esponente*** della potenza

Ad esempio: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Qui 2^3 è la potenza, 2 è la base della potenza, 3 è l'esponente della potenza e 8 è il valore numerico della potenza.

Proprietà:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (1) **Il prodotto di due potenze, aventi la stessa base, è un'altra potenza avente per base la stessa base e per esponente la somma dei due esponenti**.
Formula certamente valida quando *m* e *n* sono numeri naturali.
Ad esempio:

$$a^3 \cdot a^4 = \underbrace{(a \cdot a \cdot a)}_{3 \text{ fattori}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a)}_{4 \text{ fattori}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{3+4=7 \text{ fattori}} = a^7$$

$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (2) **Il rapporto di due potenze, aventi la stessa base, è un'altra potenza avente per base la stessa base e per esponente la differenza dei due esponenti**.
Anche questa formula è certamente valida quando *m* e *n* sono numeri naturali ed $m \geq n$. Ad esempio:

$$\frac{a^5}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = \frac{a \cdot a \cdot a}{1} = a^3 = a^{5-2}$$

$$\frac{a^3}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = 1 = a^{3-3} = a^0$$

$a^0 = 1$ (3) **Una potenza con esponente nullo è uguale a 1**.
Quest'ultima conclusione è suggerita dal secondo esempio fatto per la proprietà (2).

Inoltre, lo stesso esempio porta ad estendere la validità della formula (1) al caso in cui gli esponenti *m* ed *n* sono numeri interi (positivi e negativi), in quanto, essendo il prodotto di due numeri reciproci uguali a 1, si ha, ad esempio:

$$\frac{a^3}{a^3} = a^3 \cdot \frac{1}{a^3} = 1.$$

Allora, ponendo la definizione $\frac{1}{a^3} = a^{-3}$, si avrebbe applicando la formula (1): $1 = a^3 \cdot \frac{1}{a^3} = a^3 \cdot a^{-3} = a^{3+(-3)} = a^0$

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ (4) Generalizzando, si può porre la definizione (4), in quanto consistente con le proprietà (1) (2) e (3):

$$1 = \frac{1}{a^m} \cdot a^m = a^{-m} \cdot a^m = a^{-m+m} = a^0.$$

Ad esempio:

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0.01$$

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} \quad \left(= \frac{8}{1000} = 0.008 = 8 \cdot 10^{-3} \right)$$

$$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} \left(= \frac{5^4}{2^4 \cdot 5^4} = \frac{5^4}{10^4} = \frac{625}{10000} = 0.0625 = 6.25 \cdot 10^{-2} \right)$$

La validità delle formule (1), (2), (3) e (4), allora, si può estendere ad esponenti appartenenti all'insieme Z dei numeri interi.

$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ (5) **La potenza, di dato esponente, del prodotto di due numeri è uguale al prodotto delle potenze dei due numeri con l'esponente dato**.

La proprietà (5) si può giustificare così:

$$(a \cdot b)^m = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{m \text{ fattori}} = \ldots =$$

$$= \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \text{ fattori}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{m \text{ fattori}} = a^m \cdot b^m$$

dove i puntini tra i due segni '=' stanno a rappresentare l'applicazione successiva della proprietà commutativa e di quella associativa.

Ad esempio:

$$(4x)^3 = 4^3 x^3 = 64x^3$$

$$(3y)^{-2} = \frac{1}{(3y)^2} = \frac{1}{3^2 y^2} = \frac{1}{9y^2}$$

$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ (6) **La potenza, di dato esponente, del rapporto di due numeri è uguale al rapporto delle potenze dei due numeri con l'esponente dato**.

La proprietà (6) si può giustificare così:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{m\text{ fattori}}=\frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{m\text{ fattori}}}=\frac{a^m}{b^m}$$

Ad esempio:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2^2}{3^2}=\frac{4}{9}$$

$$\left(\frac{x}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{x}\right)^2=\frac{9}{x^2}\ \left(=9x^{-2}\right)$$

$$\left(\frac{4}{x}\right)^3=\frac{4^3}{x^3}=\frac{64}{x^3}\ \left(=64x^{-3}\right)$$

$$\left(\frac{a}{x}\right)^{-1}=\frac{1}{\frac{a}{x}}=\frac{x}{a}$$

$\left(a^m\right)^n=a^{mn}$ (7) **La potenza di una potenza è un'altra potenza avente per base la base della prima potenza e per esponente il prodotto degli esponenti**.

La proprietà (7) si può giustificare così:

$$\left(a^m\right)^n=\underbrace{a^m\cdot a^m\cdot\ldots\cdot a^m}_{n\text{ fattori}}=\underbrace{\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m\text{ fattori}}\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m\text{ fattori}}\cdot\ldots\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m\text{ fattori}}}_{n\text{ fattori}}=$$

$$=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m\cdot n\text{ fattori}}=a^{mn}$$

Ad esempio, risulta:

$$\left(2^2\right)^3=2^{2\cdot 3}=2^6=64\ \left(\text{oppure:}\left(2^2\right)^3=4^3=64\right)$$

$$\left(3^{-2}\right)^2=3^{-4}=\frac{1}{3^4}=\frac{1}{81}\ \left(\text{oppure:}\left(3^{-2}\right)^2=\left(\frac{1}{9}\right)^2=\frac{1}{81}\right)$$

Le potenze trovano un'applicazione importante, specie nelle scienze applicate quali la fisica e la chimica, per la **scrittura dei numeri in notazione scientifica**. Questo significa che un numero x viene scritto come prodotto di un numero a compreso tra 1 e 10 (10 escluso) per un'opportuna potenza di 10:

$$x=a\cdot 10^n \qquad (1\leq a<10)$$

Ad esempio:

$300000=3\cdot 10^5$ (velocità della luce nel vuoto in km/s)
$150000000=1.5\cdot 10^8$ (distanza media Terra-Sole in Km)
$0.0241=2.41\cdot 10^{-2}$
$0.0002=2\cdot 10^{-4}$
$0.0000000053=5.3\cdot 10^{-9}$ (raggio medio, in cm, dell'atomo d'idrogeno)

La parte decimale del numero *a* si chiama **mantissa** (e può avere una o piú cifre decimali, dette *cifre significative*), l'esponente *n* di 10 esprime l'**ordine di grandezza** del numero *x*.

Il numero delle cifre significative con cui si esprime il numero *x* esprime anche il livello di precisione (o semplicemente la precisione) con cui si è misurato *x*. Riprendendo uno degli esempi precedenti sulla velocità della luce nel vuoto, si può scrivere questa come:

$3\cdot 10^5$ km/s (una sola cifra significativa: 3)

oppure

$3.00\cdot 10^5$ km/s (3 cifre significative: 3, 0, 0)

e la seconda scrittura è autorizzata solo se la precisione della misura effettuata lo consente.

Le proprietà viste sulle potenze possono allora così riassumersi (*m* ed *n* sono interi appartenenti, quindi, a Z):

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $a^0 = 1$
- $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$

$(a\cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ $\quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$ $\quad (a^m)^n = a^{mn}$

3 Esercizi sulle potenze ad esponente intero

1 Calcolare:

a) 2^7 **b)** 5^{-2} **c)** $(-1)^{21}$ **d)** $(-1)^{-16}$ **e)** $(-3)^{-4}$ **f)** $(-5)^{-3}$

g) 7^0 **h)** $2^3\cdot 3^3$ **i)** $3^2\cdot 3^3$ **j)** $2^{-3}\cdot 2^5$ **k)** $\dfrac{3^5}{3^3}$ **l)** $\dfrac{5^{-3}}{5^{-2}}$

2 Scrivere sotto forma di potenza con esponente intero i seguenti numeri:

a) 8 **b)** 27 **c)** 625 **d)** 0.001 **e)** 10000 **f)** 0.00001

g) 0.125 **h)** $\dfrac{1}{64}$ **i)** $\dfrac{1}{100}$ **j)** $\dfrac{1}{256}$ **k)** -1024 **l)** 0

m) -0.5 **n)** -729 **o)** 1 **p)** -1 **q)** $-\dfrac{1}{625}$ **r)** $-\dfrac{1}{512}$

3 Scrivere in notazione scientifica i seguenti numeri:

a) 1200 **b)** 420 **c)** 0.1200 **d)** 0.0035 **e)** 0.00072 **f)** -0.0025

4 Calcolare le potenze indicate:

a) $(3x)^2$ **b)** $(5x)^{-3}$ **c)** $(4ax)^3$ **d)** $\left(\dfrac{2}{y}\right)^3$ **e)** $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-1}$

f) $\left(\dfrac{9}{2}\right)^{-2}$ **g)** $\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^3$ **h)** $(3a^3)^4$ **i)** $(2xy)^5$ **j)** $\left(\dfrac{4x}{y^2}\right)^{-2}$

5 Esprimere le seguenti espressioni sotto forma di potenza di un prodotto o di un rapporto opportuni:

a) $8x^3$ **b)** $0.25x^2y^2$ **c)** $\frac{27}{8}$ **d)** $\frac{4x^2}{9}$ **e)** $\frac{0.125a^3}{x^3y^6}$

6 Calcolare le seguenti espressioni (esprimendo il risultato sotto forma di potenza di un numero intero o di una frazione):

a) $5^2 2^2$ **b)** $\frac{10^3}{8}$ **c)** $\frac{4^{13}}{2^{20}}$ **d)** $\frac{40^{20}}{2^{55}5^{15}}$ **e)** $\frac{121^{12}}{(-11)^{31}}$

7 Esprimere sotto forma di potenza di una o piú lettere, che esprimono numeri reali non nulli:

a) $a^3 \cdot a^{-2}$ **b)** $a^4 \cdot a^{-3} \cdot a^2 \cdot a^{-5}$ **c)** $\frac{x^3 \cdot x^4}{x^2 \cdot x^5 \cdot x^{-4}}$ **d)** $\frac{x^5 \cdot y^3}{x^4 \cdot y^{-4}}$

e) $\left(a^3b^2\right)^5$ **f)** $\left(\frac{a^4b^3}{x^2}\right)^2$ **g)** $\left(\frac{x^3y^2z^5}{a^4b^2}\right)^3$ **h)** $\left(\frac{x^{-2}y^5}{a^{-3}}\right)^{-4}$

8 Eseguire, con l'ausilio di una calcolatrice tascabile, i calcoli indicati dei numeri espressi in notazione scientifica, esprimendo il risultato ancora in notazione scientifica e con la mantissa avente 2 cifre decimali:

a) $2.11 \cdot 10^3 + 5.32 \cdot 10^3 + 1.52 \cdot 10^3$ **b)** $5.37 \cdot 10^3 + 1.49 \cdot 10^2$

c) $\left(9.35 \cdot 10^3\right) \cdot \left(4.12 \cdot 10^4\right)$ **d)** $\frac{5.12 \cdot 10^5}{4.21 \cdot 10^2}$

e) $\frac{8.18 \cdot 10^4}{3.27 \cdot 10^{-2}}$ **f)** $\frac{\left(-5.18 \cdot 10^4\right)\left(8.2 \cdot 10^{-4}\right)}{4 \cdot 10^{-2}}$

g) $\frac{\left(4.13 \cdot 10^4\right) \cdot \left(2 \cdot 10^5\right)^2}{5 \cdot 10^7}$ **h)** $\frac{\left(4 \cdot 10^4\right)^3 \cdot \left(2.3 \cdot 10^4\right)^2}{\left(5.2 \cdot 10^7\right)^2}$

9 Calcolare, in notazione scientifica e con due cifre decimali nella mantissa, il volume medio di un atomo d'idrogeno ($r = 5.3 \cdot 10^{-9}$ cm). Sapendo che il suo nucleo ha un raggio medio di circa $5 \cdot 10^{-13}$ cm, calcolare anche il volume del nucleo ed il rapporto tra il volume dell'atomo e quello del suo nucleo. Riflessioni (fisiche? filosofiche?)

10 Calcolare il volume della Terra, supponendo che sia una sfera perfetta e sapendo che il suo raggio medio è uguale a $6.37 \cdot 10^4$ km.

4 Radice quadrata di un numero reale (positivo o nullo)

Se si vuole risolvere un'equazione del tipo:

$$x^2 = 4,$$

allora si verifica subito che $(-2)^2 = 4$ e $2^2 = 4$, il che significa che $x = -2$ e $x = 2$ sono soluzioni dell'equazione data. Si può anche dire che la radice quadrata di 4 è 2: $\sqrt{4} = 2$.

Generalizzando, si può dare la seguente definizione:

$$\sqrt{a} = x \iff \begin{cases} a \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x^2 = a \end{cases}$$

La radice quadrata di un numero positivo o nullo è quel numero positivo o nullo che elevato al quadrato dà il numero dato.

$\sqrt{a}$ è la **radice quadrata di *a*** ($a \geq 0$)

$\sqrt{}$ è il **simbolo di radice quadrata**

a è il **radicando**

$\sqrt{0} = 0$
$\sqrt{25} = 5$
$\sqrt{1.44} = 1.2$
$\sqrt{\dfrac{16}{9}} = \dfrac{4}{3}$
$\sqrt{0.01} = 0.1$

Si ammette che ogni numero reale *a* (positivo o nullo) è il quadrato di un'altro numero reale *x*.

Dalla definizione di radice quadrata risulta anche che l'*operazione di radice quadrata è l'operazione inversa di elevamento al quadrato*, in quanto:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \, .$$

Se *a* é un numero reale qualunque (negativo, nullo o positivo) si deve scrivere:

$\sqrt{2^2} = 2$
$\sqrt{0^2} = 0$
$\sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7$

$$\sqrt{(a)^2} = |a|$$

in quanto la radice quadrata di un numero è definita positiva o nulla.

$x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$
$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$
$x^2 + 9 = 0$ non ha soluzioni in quanto la somma di due numeri positivi non può essere uguale a zero!

L'equazione $x^2 = a \ \left(a \in R^+\right)$ può essere risolta come segue:

$$x^2 = a \Rightarrow x^2 - a = 0 \Rightarrow \left(x - \sqrt{a}\right)\left(x + \sqrt{a}\right) = 0 \Rightarrow$$
$$x - \sqrt{a} = 0 \ \vee \ x + \sqrt{a} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{a} \ \vee \ x = -\sqrt{a} \, .$$

L'equazione $x^2 + a^2 = 0 \ \left(a \in R_0^+\right)$ non ha soluzioni in quanto la somma di due numeri positivi non può essere uguale a zero. Oppure si può riscrivere l'equazione precedente come $x^2 = -a^2$ e dire che un numero positivo non può essere uguale ad un numero negativo!

Proprietà della radice quadrata:

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

(*a* e *b* sono due numeri reali positivi o nulli)
Il prodotto delle radici quadrate di due numeri positivi è uguale alla radice quadrata del prodotto dei due numeri.
La proprietà si 'dimostra' verificando che sono uguali i quadrati di entrambi i membri:

$$\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = a \cdot b = ab$$

$$\left(\sqrt{ab}\right)^2 = ab$$

Così, ad esempio:

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 2} = \sqrt{4} = 2$ (o anche perchè: $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$)

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{3\cdot 6}=\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot 2}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2}$$
$$\sqrt{48}=\sqrt{16\cdot 3}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{3}=4\sqrt{3}$$
$$\sqrt{x^2 y}=\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{y}=|x|\sqrt{y}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

(a è un numero positivo o nullo e b è un numero positivo)

Il rapporto delle radici quadrate di due numeri positivi è uguale alla radice quadrata del rapporto dei due numeri.
Anche questa proprietà si 'dimostra' verificando che sono uguali i quadrati di entrambi i membri:

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2}=\frac{a}{b}$$

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2=\frac{a}{b}$$

Così, ad esempio:

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{8}{2}}=\sqrt{4}=2$$
$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{12}{6}}=\sqrt{2}$$
$$\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$$
$$\sqrt{\frac{x}{y^2}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y^2}}=\frac{\sqrt{x}}{|y|}$$

Radice quadrata: definizione e proprietà	**Alcuni prodotti notevoli utili**
$\sqrt{a}=x \Leftrightarrow \left(a\ge 0, x\ge 0, x^2=a\right)$	$\left(x+y\right)^2=x^2+2xy+y^2$
$\left(\sqrt{a}\right)^2=a$	
$\sqrt{(a)^2}=\lvert a\rvert$	$\left(x-y\right)^2=x^2-2xy+y^2$
$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$	
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ $(b\neq 0)$	$\left(x-y\right)\left(x+y\right)=x^2-y^2$

Razionalizzazione
Con questa espressione si intende l'insieme di operazioni da effettuare per far scomparire delle radici quadrate dal denominatore di una frazione (ma a volte, per alcuni tipi particolari di operazioni, si richiede di fare anche il contrario, cioé far scomparire le radici quadrate dal numeratore di una frazione data). Alcuni esempi illustreranno come bisogna procedere in entrambi i casi:

$$\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{\sqrt{3}+1}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{3-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}=\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\frac{5-2\sqrt{5}\sqrt{3}+3}{5-3}=\frac{8-2\sqrt{15}}{2}=4-\sqrt{15}$$

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}=\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}{2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{2\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$$

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{\left(\sqrt{x+h}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{x+h-x}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{h}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{6}}=\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-\sqrt{6}}{\left[\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\sqrt{6}\right]\left[\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-\sqrt{6}\right]}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3-2\sqrt{6}+2-6}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{-1-2\sqrt{6}}=\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)\left(1-2\sqrt{6}\right)}{-\left(1+2\sqrt{6}\right)\left(1-2\sqrt{6}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{18}-\sqrt{2}+2\sqrt{12}-\sqrt{6}+2\left(\sqrt{6}\right)^2}{-\left[1-\left(2\sqrt{6}\right)^2\right]}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}-6\sqrt{2}-\sqrt{2}+4\sqrt{3}-\sqrt{6}+12}{-(1-24)}=\frac{12-7\sqrt{2}+5\sqrt{3}-\sqrt{6}}{23}$$

Radicali doppi

Con questo termine si indicano delle espressioni contenenti radici quadrati del tipo:

$$\sqrt{2-\sqrt{3}},\ \sqrt{5+\sqrt{2}},\ \sqrt{-1+\sqrt{3}}$$

o, in generale, del tipo:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}}\,,$$

dove a e b sono numeri reali tali che ciascuna radice abbia senso (cioè il radicando rispettivo sia positivo o nullo). Per i radicali doppi, vale la seguente relazione:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

che sdoppia un radicale doppio nella somma di due radicali doppi! Qualcuno penserà: questi matematici sono proprio matti... Può capitare.

Ma, se a^2 - b è un quadrato perfetto, allora il secondo membro dell'ultima relazione, in effetti, è la somma di due radicali semplici. Allora la relazione è utile e bisogna rimangiarsi i cattivi pensieri sui matematici!

La verifica della relazione (che è valida in ogni caso) si effettua facilmente elevando ambo i membri al quadrato ed effettuando tutte le semplificazioni possibili. Infatti si ha:

$$\left(\sqrt{a \pm \sqrt{b}}\right)^2 = a \pm \sqrt{b}$$

$$\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2 =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2 \pm 2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} + \left(\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2 =$$

$$= \frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2} \pm 2\sqrt{\frac{\left(a+\sqrt{a^2-b}\right)\left(a-\sqrt{a^2-b}\right)}{4}} + \frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2} =$$

$$= \frac{a+\sqrt{a^2-b}+a-\sqrt{a^2-b}}{2} \pm 2\sqrt{\frac{a^2-\left(\sqrt{a^2-b}\right)^2}{4}} =$$

$$= \frac{2a}{2} \pm \frac{2}{2}\sqrt{a^2-\left(a^2-b\right)} = a \pm \sqrt{a^2-a^2+b} = a \pm \sqrt{b}$$

Avendo ottenuto risultati uguali, la relazione è verificata.

Seguono alcuni esempi di applicazione della relazione:

- Per il radicale doppio $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ conviene applicare la relazione in quanto 2^2 - 3 = 1 è un quadrato perfetto. Infatti si ha:

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2^2-3}}{2}} - \sqrt{\frac{2-\sqrt{2^2-3}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2+1}{2}} - \sqrt{\frac{2-1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} = ... = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

- Per il radicale doppio $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ conviene applicare la relazione in quanto 3^2 - 5 = 4 è un quadrato perfetto. Si ha allora:

$$\sqrt{3+\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{3^2-5}}{2}} + \sqrt{\frac{3-\sqrt{3^2-5}}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = ... = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$$

- Per il radicale doppio $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$ la scomposizione è conveniente (perchè?) ed immediata in quanto si ha:

$$\sqrt{7-2\sqrt{10}} = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - 2\sqrt{5}\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2} = \left|\sqrt{5}-\sqrt{2}\right| = \sqrt{5}-\sqrt{2}$$

- Per il radicale doppio $\sqrt{5+\sqrt{3}}$ la relazione non è di alcuna utilità in quanto 5^2-3 non è un quadrato perfetto.

Dimostrazione di due proprietà sul valore assoluto di due numeri

$|xy| = |x||y|$ **Il valore assoluto del prodotto di due numeri è uguale al prodotto dei valori assoluti dei due numeri**.

Infatti si ha:

$$|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |xy|.$$

$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ **Il valore assoluto del rapporto di due numeri è uguale al rapporto dei valori assoluti dei due numeri**.

Infatti si ha:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} = \frac{|x|}{|y|}$$

Approssimazione della radice quadrata di un numero

La radice quadrata di un numero positivo dato risulta un numero esatto solo quando il radicando è un quadrato perfetto; in tutti gli altri casi è un numero decimale illimitato e non periodico (cioè un numero irrazionale). Anche se esistono degli algoritmi (procedimenti di calcolo) che in linea di principio consento di trovare la radice quadrata con la precisione che si vuole, in pratica questo costa tempo e lavoro; inoltre, non sempre si ha

bisogno di un numero eccessivo di cifre decimali. Per questo ci si accontenta di una precisione limitata che dipende dal contesto del problema che si sta risolvendo.
Per esempio, volendo calcolare $\sqrt{3}$, non essendo il numero 3 un quadrato perfetto, si cercano innanzitutto due interi il cui quadrato sia rispettivamente minore e maggiore di 3. Questi interi sono 1 e 2, in quanto $1^2 < 3$ e $3 < 2^2$; dunque risulta:

$$1 < \sqrt{3} < 2.$$

Allora si è individuato l'intervallo [1,2] (la cui ampiezza è uguale a 2 - 1 = 1) a cui appartiene $\sqrt{3}$.
Si può migliorare la precisione alla prima cifra decimale cercando fra tutti i numeri 1.1, 1.2, ..., 1.9 due i cui quadrati siano uno minore e l'altro maggiori di 3. Con l'ausilio di una tavola numerica (o con una calcolatrice elettronica) si vede subito che questi due numeri sono 1.7 e 1.8, in quanto $(1.7)^2 = 2.89$ (< 3) e $(1.8)^2 = 3.24$ (> 3). Dunque:

$$1.7 < \sqrt{3} < 1.8$$

Allora si è individuato l'intervallo [1.7, 1.8] (la cui ampiezza è 1.8 - 1.7 = 0.1) a cui appartiene $\sqrt{3}$.

Allo stesso modo si trova in terzo intervallo [1.73, 1.74] (la cui ampiezza è 1.74 - 1.73 = 0.01) a cui appartiene $\sqrt{3}$.

Come si vede l'ampiezza degli intervalli diventa sempre piú piccola, man mano che si migliora la precisione, in modo da avere **intervalli incapsulati** uno nell'altro.

Oggi l'uso delle calcolatrici elettroniche tascabili ha reso obsoleta la ricerca dei successivi intervalli incapsulati al cui interno si trova il valore numerico della radice quadrata di un numero. Ciò nonostante, è importante che lo studente ne apprezzi il valore formativo!

5 Esercizi sulla radici quadrate e applicazioni relative

1 Come sarebbe possibile, con una calcolatrice tascabile sprovvista di tasto di valore assoluto, calcolare il valore assoluto di un numero *x*?

2 Calcolare:

a) $\sqrt{121}$ **b)** $\sqrt{\frac{9}{4}}$ **c)** $\sqrt{\frac{81}{256}}$ **d)** $\sqrt{0.04}$ **e)** $\sqrt{0.0121}$

f) $\sqrt{\frac{144}{9}}$ **g)** $\sqrt{25 \cdot 16}$ **h)** $\sqrt{0.04 \cdot 0.0121}$ **i)** $\sqrt{10^{-4}}$

3 Portare fuori dal segno di radice tutto il possibile:

a) $\sqrt{18}$ **b)** $\sqrt{45}$ **c)** $\sqrt{\frac{5}{9}}$ **d)** $\sqrt{\frac{18}{80}}$ **e)** $\sqrt{0.12}$

f) $\sqrt{x^3}$ **g)** $\sqrt{a^7}$ **h)** $\sqrt{x^2y}$ **i)** $\sqrt{\dfrac{a^5}{b^2}}$ **j)** $\sqrt{\dfrac{a^2b^3c^3}{d^9}}$

4 Eseguire le operazioni indicate e semplificare i risultati:

a) $\sqrt{2}+3\sqrt{3}-\sqrt{8}$ **b)** $\sqrt{5}+7\sqrt{2}+\sqrt{20}$ **c)** $\sqrt{48}-2\sqrt{2}+\sqrt{3}$

d) $\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)$ **e)** $\left(2\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)$ **f)** $\left(2\sqrt{3}-1\right)\left(2\sqrt{3}+1\right)$

g) $\left(\sqrt{3}+1\right)^2$ **h)** $\left(3\sqrt{3}-1\right)^2$ **i)** $\left(\sqrt{2}+3\right)^4$

5 Calcolare:

a) $\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+1\right)$ **b)** $\left(\sqrt{a}+1\right)\left(\sqrt{a}-1\right)$ **c)** $\left(\sqrt{a}+a\right)\left(\sqrt{a}-a\right)$

d) $\left(\sqrt{a}+a\right)^2$ **e)** $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$ **f)** $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$

g) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$ **h)** $\left(\sqrt{a}-2\sqrt{b}\right)^3$ **i)** $\left(2\sqrt{a}+3\sqrt{b}\right)^4$

6 Sdoppiare in radicali semplici (ove possibile):

a) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ **b)** $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ **c)** $\sqrt{12-2\sqrt{35}}$ **d)** $\sqrt{4+\sqrt{7}}$

e) $\sqrt{12-\sqrt{23}}$ **f)** $\sqrt{12+2\sqrt{5}}$ **g)** $\sqrt{15+\sqrt{29}}$ **h)** $\sqrt{7-2\sqrt{3}}$

7 Razionalizzare il denominatore:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **b)** $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ **c)** $\dfrac{7}{\sqrt{5}}$ **d)** $\dfrac{1}{\sqrt{5}+2}$

e) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$ **f)** $\dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2}$ **g)** $\dfrac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$

h) $\dfrac{7+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-\sqrt{7}}$ **i)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$ **j)** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

k) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ **l)** $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ **m)** $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

8 Razionalizzare il denominatore:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ **b)** $\dfrac{a}{\sqrt{a}}$ **c)** $\dfrac{1}{\sqrt{a}-1}$ **d)** $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

e) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}$ **f)** $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ **g)** $\dfrac{a+2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ **h)** $\dfrac{a+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

9 Razionalizzare il numeratore:

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2}$ **c)** $\dfrac{7+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-\sqrt{7}}$

d) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ **e)** $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ **f)** $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

10 Razionalirrare il numeratore:

a) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}$ **b)** $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ **c)** $\dfrac{a+2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

11 Eseguire i calcoli indicati e semplificare ove possibile:

a) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}$ **b)** $\sqrt{\frac{9a}{b}}\sqrt{\frac{b^2-2b}{3ab-6a}}$

c) $\sqrt{\frac{4a^2-b^2}{a^2-b^2}}\sqrt{\frac{a-b}{2a+b}}$ **d)** $\sqrt{\frac{9a^2-b^2}{25a^2-b^2}}\sqrt{\frac{5a+b}{3a-b}}$

e) $\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}\sqrt{\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}}$ **f)** $\sqrt{\frac{9a^2-6ab+b^2}{a^2-b^2}}\sqrt{\frac{a+b}{3a-b}}$

12 Con il metodo degli intervalli incapsulati calcolare (con 2 cifre decimali *esatte*):
a) $\sqrt{5}$ **b)** $\sqrt{11}$ **c)** $\sqrt{22}$ **d)** $\sqrt{55}$
e) $\sqrt{117}$ **f)** $\sqrt{180}$ **g)** $\sqrt{12.1}$ **h)** $\sqrt{7.25}$

13 Metodo di Cardano per il calcolo della radice quadrata di un numero
Cardano, matematico del quattrocento, aveva escogitato un metodo ingegnoso per calcolare la radice quadrata di un numero maggiore di 1. A grandi linee, con terminologia e simboli moderni, il ragionamento di Cardano era questo:
Dato un numero N (>1), se x è il massimo intero il cui quadrato è minore di N, si può scrivere:

$$\sqrt{N}=x+y$$

dove y è la parte decimale della radice quadrata di N (è $0 \le y < 1$).
Elevando al quadrato ambo i membri dell'ultima relazione, si ha:

$$N=(x+y)^2 \Rightarrow N=x^2+2xy+y^2 \Rightarrow N-x^2=2xy+y^2 \Rightarrow$$

$$N-x^2=y(2x+y) \Rightarrow y=\frac{N-x^2}{2x+y}$$

L'ultima relazione è una relazione ricorrente (?!?) che consente di ricavare y partendo da un valore iniziale di $y = 0$; i successivi valori di y così calcolati forniranno una parte decimale della radice quadrata di N sempre piú precisa.
Ad esempio, sia da calcolare $\sqrt{3}$. Ponendo $\sqrt{3}=1+y$ (qui $N = 3$ e $x = 1$) ed applicando l'ultima relatione (cominciando da $y_0 = 0$), si ha:

$y_1=\frac{3-1}{2}=\frac{2}{2}=1$, che fornisce un valore approssimato per eccesso $\sqrt{3}\cong 2$

$y_2=\frac{3-1}{2+1}=\frac{2}{3}\cong 0.7$, che fornisce un valore approssimato per difetto $\sqrt{3}\cong 1.7$;

$y_3\cong\frac{3-1}{2+\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}=0.75$, che fornisce un valore approssimato per eccesso $\sqrt{3}=1.75$;

$y_4\cong\frac{3-1}{2+\frac{3}{4}}=\frac{8}{11}\cong 0.73$, che fornisce un valore approssimato per difetto $\sqrt{3}\cong 1.73$;

...

Come si vede i valori approssimati per difetto e per eccesso di $\sqrt{3}$ si alternano e convergono verso $\sqrt{3}$.

Utilizzando il metodo precedente, calcolare, con 3 cifre decimali esatte:
a) $\sqrt{5}$ **b)** $\sqrt{7}$ **c)** $\sqrt{11}$

14 <u>Metodo di Newton per il calcolo della radice quadrata di un numero</u>

Esiste un metodo per il calcolo della radice quadrata di un numero che è molto piú 'rapido' (nel senso che consente di ottenere piú rapidamente un numero maggiore di cifre decimali esatte) del precedente. Se N è il numero di cui si vuole la radice quadrata e $\sqrt{N} = x$, si usa la formula:

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{N}{x_0}\right) , \qquad (*)$$

dove x_0 è un primo valore approssimato della radice quadrata di N. Il procedimento continua usando la formula

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{N}{x_1}\right).$$

In questo modo, la successione dei valori $x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots$'tende' (si avvicina, converge) rapidamente al valore 'vero' x.

Ad esempio, con N = 3 e prendendo x_0 = 1, si ha:

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{1}\right) = 2$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{3}{2}\right) = \frac{7}{4} = 1.75$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{4} + \frac{3}{\frac{7}{4}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{4} + \frac{12}{7}\right) = \frac{97}{56} = 1.732$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{97}{56} + \frac{3}{\frac{97}{56}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{97}{56} + \frac{168}{97}\right) = \frac{18817}{10864} = 1.73205081$$

dove solo l'ultima cifra decimale <u>non</u> è corretta.

Una giustificazione della formula ricorrente (*) potrebbe essere questa: siano x_0 e x_1 due valori approssimati della radice quadrata di N; dunque la loro differenza è piccola ed il quadrato della loro differenza è ancora piú piccolo tanto da poter ritenere che sia approssimativamente uguale a zero:

$$\left(x_1 - x_0\right)^2 = 0 \Rightarrow x_1^2 - 2x_1x_0 + x_0^2 = 0 \Rightarrow N - 2x_1x_0 + x_0^2 = 0 \Rightarrow$$

$$N + x_0^2 = 2x_1x_0 \Rightarrow \frac{N + x_0^2}{2x_0} = x_1 \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{N}{x_0}\right).$$

Utilizzando il metodo precedente, calcolare, con almeno 4 cifre decimali esatte:

a) $\sqrt{5}$ **b)** $\sqrt{7}$ **c)** $\sqrt{11}$