Moto in Due Dimensioni
Moto di un proiettile

Il ***moto*** di un proiettile è la combinazione di moto orizzontale con velocità costante e moto verticale con accelerazione in discesa costante. Il percorso del proiettile, chiamato **traiettoria**, può essere trovato determinando la distanza orizzontale percorsa dal proiettile in un determinato tempo e poi calcolando la sua posizione verticale in ogni momento. In assenza di resistenza dell'aria, il risultato è una curva matematica conosciuta con il nome di **parabola**.

Variabili

Posizione iniziale:

$x_0 \;\; y_0$

Velocità iniziale:

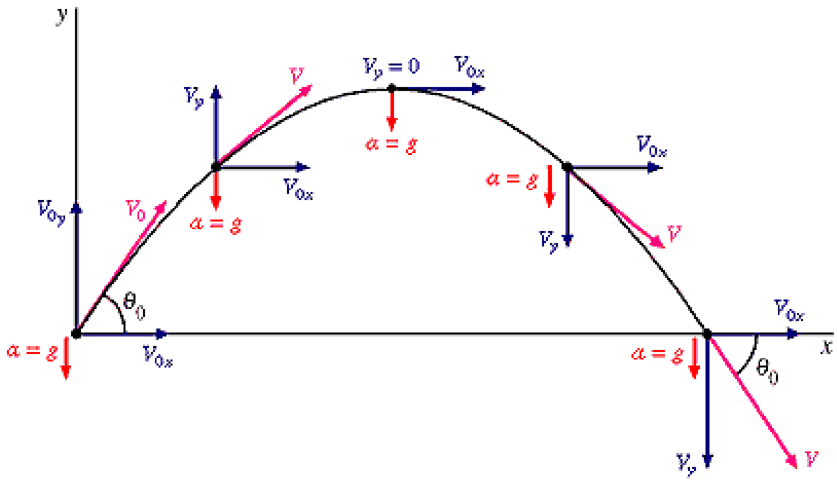
v_0

Angolo di lancio:

θ_0

Tempo:

t



Formule

Velocità iniziale orizzontale:

$v_{0x} = v_0 \cdot \cos(\theta_0)$

Velocità iniziale verticale:

$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin(\theta_0)$$

Spostamento orizzontale:

$$x = x_0 + v_{0x} \cdot t$$

Spostamento verticale:

$$y = 0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Velocità orizzontale:

$$v_x = v_{0x}$$

Velocità verticale:

$$v_y(t) = v_{0y} - g \cdot t$$

Velocità totale:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

(modulo)

$$\theta_v = \operatorname{atan}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$$

(direzione)

gittata

x_{range}

tempo al punto più alto

t_{alto}

tempo di arrivo al suolo

t_{suolo}

Esempio 1

Dalla suddetta equazione, vediamo che, ad ogni posizione della sua traiettoria, il proiettile ha la stessa velocità orizzontale, uguale alla componente x della sua velocità iniziale. Ma la sua velocità verticale cambia, partendo dalla componente y della sua velocità iniziale e poi aumentando nella direzione negativa y quando l'accelerazione dovuta alla gravità agisce sul proiettile. Al punto più alto del proiettile, la componente y della sua velocità è zero. Nel punto dove il proiettile torna alla stessa

altezza dalla quale è partito (che spesso è il suolo), la sua altezza è $y = y_0$. La sua distanza orizzontale in questo punto è chiamata la sua portata (gittata).
Si può illustrare questa idea disegnando la traiettoria del proiettile:

$x_0 := 0 \cdot m$

$y_0 := 0 \cdot m$

(Si possono modificare questi parametri iniziali per adeguarli al proprio problema.)

$$v_0 := 100 \cdot \frac{m}{sec}$$

$\theta_0 := 30 \cdot deg$

$v_{0x} := v_0 \cdot \cos(\theta_0)$

$v_{0y} := v_0 \cdot \sin(\theta_0)$

$x(t) := x_0 + v_{0x} \cdot t$

$$y(t) := y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Risolvendo l'equazione rispetto alla velocità verticale $v_y(t) = v_{0y} - g \cdot t$ per la condizione in cui $v_y(t_{alto}) = 0$ otteniamo la seguente espressione per il tempo t_{alto} quando il proiettile raggiunge il punto più alto della sua traiettoria:

$$t_{alto} := \frac{v_{0y}}{g}$$

$x_{alto} := x(t_{alto})$

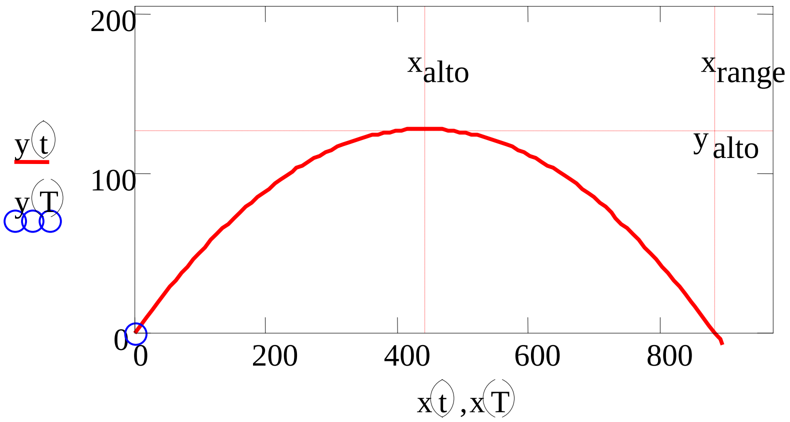
$y_{alto} := y(t_{alto})$

Risolvendo l'equazione per la posizione verticale $y(t)$ per la condizione in cui $y(t_{suolo}) = 0$ e mantenendo solo la soluzione positiva, otteniamo la seguente espressione per il tempo t_{suolo} quando il proiettile tocca il suolo

$$t_{suolo} := \frac{v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2 \cdot g \cdot y_0}}{g}$$

$$x_{range} := x(t_{suolo}):$$

$$t := 0 \cdot sec, \frac{t_{suolo}}{100} .. 1.1 \cdot t_{suolo}$$

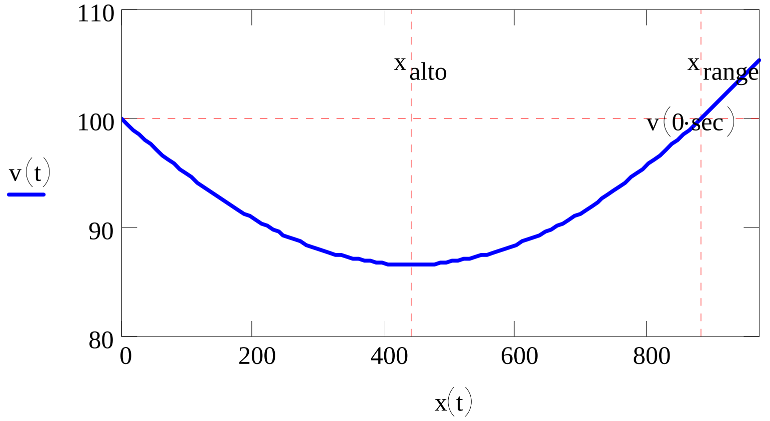


Consideriamo ora cosa accade con la velocità del proiettile disegnando la sua dimensione $v(t)$ e lo spostamento orizzontale del proiettile $x(t)$:

$$v_x := v_{0x}$$

$$v_y(t) := v_{0y} - g \cdot t$$

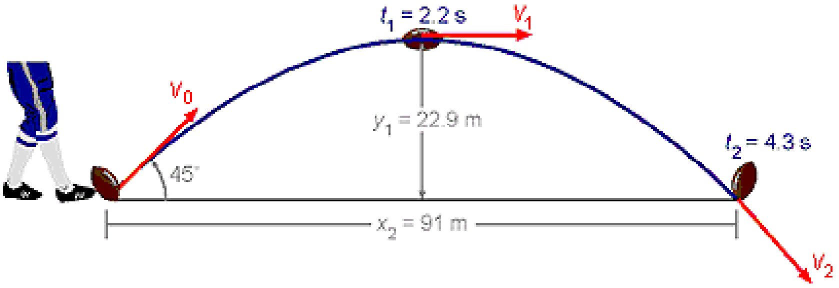
$$v(t) := \sqrt{v_x^2 + v_y(t)^2}$$



Da notare che la velocità totale decresce come il proiettile si sposta, e poi comincia ad aumentare di nuovo non appena il proiettile supera il punto più alto della sua traiettoria (x_{alto}, y_{alto}). Al punto finale della traiettoria (x_{range}, y_0) a $t=t_{suolo}$ la velocità del proiettile ha una grandezza uguale a quella della velocità iniziale v_0.

Esempio 2

Un pallone è calciato dal suolo con una velocità iniziale di 30 metri al secondo ad un angolo di $45 \cdot deg$ rispetto al suolo. Quanto alto andrà? Quanto lontano andrà prima di toccare il suolo? Quanto tempo impiegherà prima di arrivare al suolo?



$x_0 := 0 \cdot m$

$y_0 := 0 \cdot m$

$v_0 := 30 \cdot \frac{m}{sec}$

$\theta_0 := 45 \cdot deg$

$v_{x0} := v_0 \cdot \cos(\theta_0)$

$$v_{y0} := v_0 \cdot \sin(\theta_0)$$

Considerando il pallone come un proiettile e tralasciando la resistenza dell'aria, sappiamo che esso raggiunge il punto più alto quando la sua velocità verticale è zero. L'equazione per la sua velocità verticale è

$$v_y = v_{y0} - g \cdot t$$

Risolviamo per t quando la velocità verticale $v_y := 0 \cdot \frac{m}{sec}$, chiamando questo tempo (quando il pallone raggiunge il suo punto più alto) t_1:

$$t_1 := \frac{(v_{y0} - v_y)}{g}$$

$$t_1 = 2.2 \cdot sec$$

Usiamo il valore t_1 per trovare la posizione verticale del pallone:

$$y := y_0 + v_{y0} \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^{\,2}$$

$$y = 22.9 \cdot m$$

La gittata del pallone è raggiunta quando la sua distanza verticale è zero. Risolviamo per questo tempo, chiamandolo t_2:

$$y_0 + v_{y0} \cdot t_2 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^{\,2} = 0$$

ha come soluzione:

$$\begin{bmatrix} t'_2 \\ t''_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \dfrac{v_{y0} - \sqrt{v_{y0}^{\,2} + 2 \cdot g \cdot y_0}}{g} \\ \dfrac{v_{y0} + \sqrt{v_{y0}^{\,2} + 2 \cdot g \cdot y_0}}{g} \end{bmatrix}$$

$t'_2 = 0 \cdot sec$

$t''_2 = 4.3 \cdot sec$

$t_2 := t''_2$

Il pallone raggiunge il suolo quando $t_2 = 4.3 \cdot sec$ La sua distanza x per questo valore di tempo (gittata) è:

$x := x_0 + v_{x0} \cdot t_2$

$x = 91.8 \cdot m$

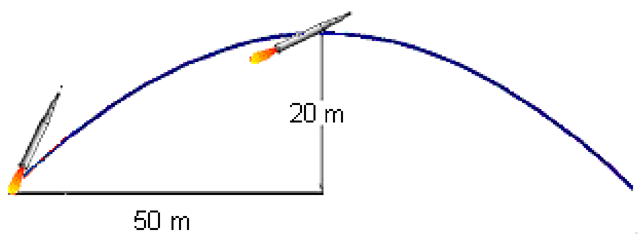
Esempio 3

Ai giochi olimpici nell'estate 1992 a Barcellona, la fiaccola fu accesa da un arciere che scoccò una freccia fiammeggiante sulla fiaccola. Il moto della freccia è quello di un proiettile che viaggia in due dimensioni.
Ci sono numerose cose da considerare nel lanciare una freccia fiammeggiante diretta ad un bersaglio; cose come l'altezza del bersaglio, la distanza dal bersaglio, la velocità iniziale della freccia, e l'angolo al quale si sta lanciando la freccia. Questi due ultimi elementi sono fortemente dipendenti da cose come la resistenza dell'aria e dal vento ma, per non rendere il problema troppo complicato, ignoreremo questi effetti.
Sappiamo che il bersaglio è lontano 50 metri ed è a un’altezza di 20 metri:

$L := 50 \cdot m$

$h := 20 \cdot m$

Se assumiamo che la freccia raggiungerà il bersaglio al punto massimo della sua traiettoria, a quale angolo e velocità dovrà essere lanciata la freccia?



Sebbene non possiamo dimostrarlo qui, è possibile mostrare che la gittata orizzontale di un proiettile (quanto lontano andrà) è data da:

$$x_{range} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2 \cdot \theta_0)$$

al punto più alto della traiettoria del proiettile è dato da:

$$y_{alto} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(\theta_0)^2$$

Nel nostro caso,

$$x_{range} = 2 \cdot L$$

$$y_{alto} = h$$

Risolvendo queste equazioni per θ_0 e v_0, avremo:

angolo iniziale di lancio:

velocità iniziale:

$$\theta_0 := \operatorname{atan}\left(\frac{2 \cdot h}{L}\right)$$

$$v_0(\theta_0) := \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot L}{\sin(2 \cdot \theta_0)}}$$

$$\theta_0 = 38.7 \cdot deg$$

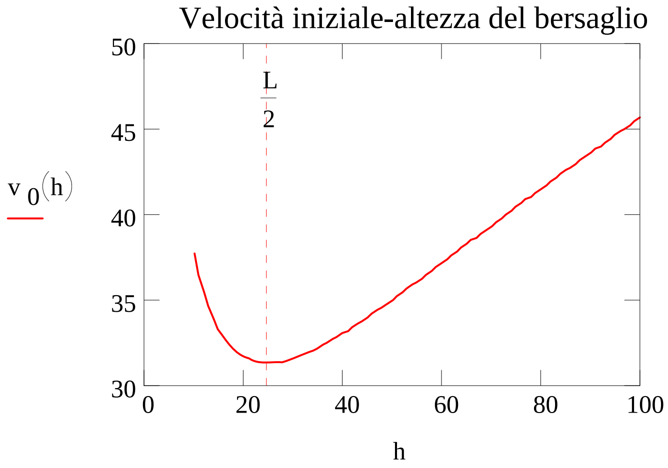
$$v_0(\theta_0) = 31.7 \cdot \frac{m}{sec}$$

Guardiamo il grafico per vedere come la velocità iniziale della freccia cambia con l'altezza del bersaglio:

$$\theta_0(h) := \operatorname{atan}\left(\frac{2 \cdot h}{L}\right)$$

$$v_0(h) := \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot L}{\sin(2 \cdot \theta_0(h))}}$$

$h := 10 \cdot m, 11 \cdot m .. 100 \cdot m$



Interessante! La velocità iniziale richiesta DECRESCE, quando il bersaglio è posto più in alto; fino ad h equivale a metà della distanza dal bersaglio (L/2). Questo può apparire alquanto intuitivo, dato che vi sareste aspettati che se il bersaglio fosse posto più alto (e per il **Teorema di Pitagora**, più lontano), la velocità dovrebbe essere ancora più grande.

Matematicamente, quello che accade è che quando h = L/2, l'espressione per l'angolo iniziale si riduce a

$$\theta_0 = \operatorname{atan}\left(\frac{2 \cdot h}{L}\right) = \operatorname{atan}(1)$$

$$\operatorname{atan}(1) = 45 \cdot deg$$

così l'angolo iniziale è di 45 gradi. L'espressione per la velocità iniziale è

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot L}{\sin(2 \cdot \theta_0)}}$$

E, poiché seno di $2 \cdot 45 \cdot deg = 90 \cdot deg$ è uguale ad uno (il massimo valore per la funzione sinusoidale), la velocità richiesta è al suo minimo (perchè più grande il divisore, più piccolo il risultato).

Questo per la Matematica. FISICAMENTE è semplicemente un caso in cui il bersaglio è molto basso rispetto a quanto lontano esso è; voi dovete lanciare la freccia molto velocemente, così che essa non possa raggiungere il suolo prima di raggiungere il suo bersaglio.