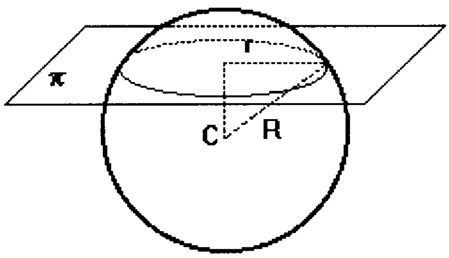
Prof. Raffaele SANTORO

Geometria

Classi 6-7 (5 periodi per settimana)

Seconda Edizione



Scuola Europea di Lussemburgo - Anno Scolastico 1994/95

Indice

Prefazione alla 2ª edizione

Le ragioni della nascita della prima edizione di questo corso di Geometria restano valide: l'assenza, nel panorama editoriale italiano, di un corso di Geometria dello spazio con l'ausilio dello strumento vettoriale e matriciale, come previsto dal programma di Matematica delle classi 6-7 (5 periodi per settimana) delle Scuole Europee.

Tuttavia, la disponibilità di un corso 'su misura ' per le Scuole Europee ha spinto alcuni colleghi a volersi sobbarcare la fatica di una traduzione della prima edizione in altre lingue. Sono così comparse, in ordine di tempo, una versione in francese (a cura del collega J.P. MASCLE, Luxembourg), una versione in danese (a cura del collega J. THORSEN, Luxembourg) ed una versione in tedesco (a cura del collega D. KORING, Bruxelles II). A tutti questi colleghi va un sentito ringraziamento, anche perchè hanno condiviso con me la filosofia dei 'diritti d'autore' di questo corso: il prezzo di ogni copia viene fissato aggiungendo al costo di riproduzione 100 FB da inviare ai Comitati Unicef.

Questa seconda edizione esce per rimediare ad alcune omissioni e per tener conto dei suggerimenti di alcuni colleghi. Questi i cambiamenti più importanti:

- per il capitolo terzo: omotetie e proiezione ortogonale su un retta;
- per il capitolo quarto: maggior peso alle proprietà geometriche di rette e piani nello spazio;
- per tutti i capitoli: aumento del numero degli esercizi proposti e correzione di errori residui.

Anche se, ovviamente, i colleghi possono seguire l'itinerario di studio che ritengono più opportuno, mi permetto di suggerire un itinerario che mi sembra ottimale per trarre il massimo profitto da questo corso:

Classe 6

- Capitolo 1 (Matrici e determinanti).
- Capitolo 2 (Punti, vettori e rette del piano - Richiami).
- Capitolo 4 (Punti, vettori, piani e rette dello spazio).

Classe 7

- Ripasso dei capitoli 1, 2 e 4 (visti in Classe 6).
- Capitolo 5 (Equazione della sfera e applicazioni)
- Capitolo 3 (Trasformazioni del piano - Aspetto analitico e matriciale).
- Capitolo 6 (Trasformazioni dello spazio - Aspetto analitico e matriciale).
- Risoluzione di tutti i problemi previsti nell'Appendice.

Resta l'auspicio che il corso, nelle sue diverse versioni, possa servire, oltre che per la preparazione al Bac Europeo, anche per la preparazione all'esame d'ingresso in alcune Università e come punto di partenza di un primo corso di Geometria per l'Università.

Luxembourg, Luglio 1994

Raffaele SANTORO

Capitolo 1

Matrici e Determinanti

1 Definizioni

Una **matrice reale** (a elementi in $\mathbb{R}$, insieme de numeri reali) è una tabella rettangolare $m \times n$ (m righe e n colonne) di numeri reali. Sono matrici reali, ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice A è una matrice rettangolare 3×1 avente 3 righe e 1 colonna. La matrice B è una matrice quadrata 2×2 avente due righe e due colonne. La matrice C è una matrice rettangolare 2×3 avente 2 righe e 3 colonne.

In generale, una matrice A con m righe e n colonne si indica così:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

dove a_{11}(da leggere 'a uno uno'), a_{12} (da leggere 'a uno due'), ..., a_{mn} (da leggere 'a emme enne') sono gli *elementi* della matrice. La matrice A, a volte, è anche indicata con $[a_{rs}]$, oppure (a_{rs}), dove a_{rs} è un generico elemento della matrice (l'elemento s-simo della riga r-sima).

Se $m = n$, la matrice si dice **matrice quadrata di ordine *n*** e, in questo caso, gli elementi a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} si dicono elementi della *diagonale principale*.

Una matrice quadrata con gli elementi della diagonale principale tutti uguali a 1 e gli altri elementi tutti uguali a 0 si dice *matrice unitaria*. Ad esempio la matrice unitaria 3 ×3 è

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Una matrice, anche non quadrata, con tutti gli elementi uguali a zero si dice *matrice nulla*. Ad esempio, la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é la matrice nulla 2x2.

Una matrice A in cui si scambiano tra di loro le righe con le colonne dà luogo ad un'altra matrice $'A$ che si chiama *trasposta* di A. Così, ad esempio:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow {}'A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}.$$

2 Somma di due matrici dello stesso tipo

Sia $\mathbf{A}_{m\times n}$ l'insieme delle matrici $m\times n$. In questo insieme si definisce l'operazione ' + ' (somma) che associa a due matrici A e B una terza matrice $C = A + B$, tale che:

$$\left(A=\left[a_{rs}\right], B=\left[b_{rs}\right]\right)\Rightarrow C=\left[c_{rs}\right]=\left[a_{rs}+b_{rs}\right].$$

Esempio

Se $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -4\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\\ 1 & -3\end{pmatrix}$,determinare $C = A+B$.

<u>Soluzione</u>:

Risulta:

$$C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -4\\ -1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-1 & 3+2\\ 2+3 & -4+0\\ -1+1 & 1-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 5 & -4\\ 0 & -2\end{pmatrix}.$$

➢

É facile rendersi conto che la struttura **($\mathbf{A}_{m\times n}$,+) è una struttura di gruppo commutativo**, dove l'elemento neutro è la matrice nulla $m\times n$ e la matrice inversa di $A=\left[a_{rs}\right]$ è la matrice $A'=\left[-a_{rs}\right]$ (tale matrice prende anche il nome di *matrice opposta* di A e viene indicata con $-A$). Qui le propietà di gruppo derivano dalla definizione stessa della somma di due o più matrici come somma degli elementi corrispondenti delle matrici da sommare: dal momento che l'insieme di numeri reali, rispetto all'operazione somma é una struttura di gruppo commutativo, anche **($\mathbf{A}_{m\times n}$,+)** sarà una struttura di gruppo commutativo.

3 Moltiplicazione di una matrice per un numero reale

Se $A=\left[a_{rs}\right]$ è una matrice di $\mathbf{A}_{m\times n}$, si definisce prodotto della matrice A per il numero reale k quella matrice, B, i cui elementi sono gli elementi di A moltiplicati per k:

$$kA=k\left[a_{rs}\right]=\left[ka_{rs}\right]=\left[b_{rs}\right]=B.$$

Esempio Se $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$, determinare le matrici -2A e 3A.

Soluzione: Risulta subito:

$$-2A=\begin{pmatrix}-2 & -4 & 6\\ -4 & -2 & 0\end{pmatrix},\ 3A=\begin{pmatrix}3 & 6 & -9\\ 6 & 3 & 0\end{pmatrix}.$$

➢

La moltiplicazione di una matrice di $\mathbf{A}_{m\times n}$ per un numero reale è un'operazione esterna ad $\mathbf{A}_{m\times n}$, in quanto risulta essere un'applicazione f di $\mathbb{R}\times\mathbf{A}_{m\times n}$ in $\mathbf{A}_{m\times n}$:

$$f:\mathbb{R}\times\mathbf{A}_{m\times n}\rightarrow\mathbf{A}_{m\times n}.$$

Si può considerare la struttura ($\mathbf{A}_{m\times n}$,$\mathbb{R}$, +), dove ' + ' indica la somma (operazione interna) di due matrici di $\mathbf{A}_{m\times n}$ e '$\mathbb{R}$' sta ad indicare l'operazione esterna di moltiplicazione degli elementi di $\mathbf{A}_{m\times n}$ per un elemento di $\mathbb{R}$ (insieme dei numeri reali e insieme degli operatori). É facile rendersi conto allora che la struttura

($\mathbf{A}_{m\times n}$,$\mathbb{R}$, +) è una struttura di spazio vettoriale reale.

I 'vettori' di questa struttura sono le matrici di $\mathbf{A}_{m\times n}$.

4 Determinante di una matrice quadrata

Il determinante di una matrice quadrata è un numero associato alla matrice stessa. Tale numero si ottiene a partire dagli elementi della matrice applicando determinate regole di calcolo.
In questa sede si considereranno principalmente i casi delle matrici quadrate di ordine n con $n = 2$ o $n = 3$ e si farà un rapido cenno a come calcolare il determinante di una matrice quadrata con $n > 3$.

1° caso: matrice 2×2.

Sia $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ la matrice. Si definisce determinante di A il numero:

$$\boxed{\det A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}.}$$

Esempio

Se $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}$,calcolare det$A$ e det$B$.

Soluzione: Si ha:

$$\det A=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-1\cdot 1-3\cdot 2=-1-6=-7;$$

$$\det B=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix}=2\cdot 4-1\cdot(-1)=8+1=9.$$

➢

2° caso: matrice 3×3.

Sia $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ la matrice. Si definisce determinante di A il numero:

$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{31}a_{23}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{31}a_{22}$$

Ci sono *6 modi diversi* per calcolare il determinante di una matrice 3x3, a seconda della riga o della colonna che si sceglie per sviluppare il calcolo. In effetti, si prendono gli elementi di una riga o di una colonna, moltiplicati per il segnante $(-1)^{r+s}$ (r è il numero di riga e s il numero di colonna dell'elemento), ciascuno moltiplicato ancora per il determinante 2×2 che si ottiene eliminando dal determinante di partenza la riga e la colonna dell'elemento considerato; si sommano i 3 risultati ottenuti.

Esempio

Calcolare il determinante della matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$.

Soluzione: Sviluppando secondo gli elementi della prima riga, si ha:

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 3\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}3 & 0\\ 1 & 3\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot 3-2\cdot 9-1\cdot(-7)=3-18+7=-8$$

Oppure (sviluppando secondo gli elementi della terza colonna):

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (-7) + 3 \cdot (-5) = 7 - 15 = -8$$

ecc.

➢

Dall'esempio precedente si vede subito che, per il calcolo del determinante, conviene scegliere la riga o la colonna contenente il massimo numero di elementi nulli.

É facile rendersi conto che:

- **il determinante di una matrice unitaria è uguale a 1**
- **il determinante di una matrice nulla è uguale a zero**
- **il determinante di una matrice avente almeno una riga o una colonna di elementi nulli è uguale a zero**
- **il determinante di una matrice avente due righe o due colonne di elementi rispettivamente uguali o proporzionali è uguale a zero**

Nel caso delle matrici 3×3 esiste una *regola pratica*, per il calcolo del loro determinante, chiamata **regola di Sarrus**: si riscrivono le prime due colonne del determinante come quarta e quinta colonna *fittizie*, in modo da poter effettuare sei prodotti diversi in diagonale (da sinistra a destra, i primi tre dall'alto verso il basso, gli ultimi tre dal basso verso l'alto) secondo lo schema seguente:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

Il valore del determinante é allora dato dalla somma di 6 prodotti, di 3 fattori ciascuno, in diagolale; i singoli addendi sono presi col proprio segno se provenienti dalla prima serie di prodotti, con il segno opposto al proprio se provenienti dalla seconda serie.

Effettuando tali prodotti si ha che:

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right. =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}\,.$$

Ad esempio, calcolando il determinante della matrice A dell'esempio precedente con la regola di Sarrus, si ha:

det$A$ = 1·1·3 + 2·0·1 + (-1)·3·(-2) - 1·1·(-1) - (-2)·0·1 - 3·3·2 = 3 + 6 + 1 - 18 = -8.

3° caso: matrice $n \times n$ (con $n > 3$).

La regola di calcolo enunciata sopra per un determinante 3×3 vale in generale anche per un determinante $n \times n$ (con $n > 3$). In questo caso ci sono *2n modi diversi* per il calcolo del determinante e tutti questi modi conducono allo stesso risultato.
Non è il caso, in questa sede, di sviluppare una teoria completa del calcolo dei determinanti, in quanto lo studente che continuerà gli studi scientifici all'Università avrà modo e occasione di studiare una tale teoria. Ci si limita, qui, solo a citare alcuni risultati importanti, omettendone la facile dimostrazione:

1. *Se tutti gli elementi di una riga o di una colonna di una matrice sono moltiplicati per un numero reale* k*, il valore del determinante della matrice viene moltiplicato per* k.

2. *Se tutti gli elementi di una matrice* $n \times n$ *sono moltiplicati per k, il valore del determinante della matrice viene moltiplicato per* k^n.

3. *Scambiando fra di loro gli elementi di due righe o di due colonne di una matrice, il determinante della matrice cambia di segno.*

4. *Sostituendo gli elementi di una riga di una matrice con la somma degli elementi di questa riga con gli elementi corrispondenti di un'altra riga della matrice, il valore del determinante della matrice non cambia. Stessa cosa per gli elementi di una colonna.*

Le proprietà 1. 3. e 4., in particolare, sono molto importanti in quanto consentono, con passaggi successivi, di trasformare un determinante in un altro per cui gli elementi di una riga (eccetto uno) o gli elementi di una colonna (eccetto uno) sono nulli, facilitando il calcolo del valore del determinante.

Esempio

Calcolare il determinante $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

Soluzione: A questo determinante si applicano le proprietà precedenti per far comparire nella seconda linea 3 elementi nulli.
Moltiplicando gli elementi dell'ultima colonna per -2 si ha (proprietà 1.: il de-terminante viene moltiplicato per -2, dunque bisogna dividere il nuovo determinante per -2):

$$D = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}.$$

Sostituendo gli elementi dell'ultima colonna con la somma degli elementi delle colonne 2 e 4 precedenti si ha (proprietà 4.):

$$D=-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -6 \\ 4 & 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

Si moltiplicano ora gli elementi della prima colonna per -4, il valore del determinante risulta allora:

$$D=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)\begin{vmatrix} -8 & 1 & 3 & 3 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ -12 & -2 & 1 & -6 \\ -16 & 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

Sostituendo agli elementi della seconda colonna gli elementi dati dalla somma dei corrispondenti elementi delle precedenti colonne 1 e 2 si ha:

$$D=\frac{1}{8}\begin{vmatrix} -8 & -7 & 3 & 3 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -14 & 1 & -6 \\ -16 & -15 & 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

A questo punto, essendo gli elementi della seconda riga tutti nulli (eccetto il primo), si può concludere il calcolo del determinante di ordine 4 con il calcolo di un solo determinante di ordine 3:

$$D=\frac{1}{8}(-1)(-4)\begin{vmatrix} -7 & 3 & 3 \\ -14 & 1 & -6 \\ -15 & 2 & 7 \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -7 & 3 & 0 \\ -14 & 1 & 7 \\ -15 & 2 & -5 \end{vmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(-7\cdot\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix} -14 & 7 \\ -15 & -5 \end{vmatrix}\right)=-\frac{1}{2}\left(-7\cdot(-19)-3\cdot 175\right)=1$$

➢

Il procedimento può sembrare artificioso, ma risulta utile in quanto, nell'esempio precedente, con i successivi passaggi si è potuto calcolare un determinante di ordine 4, che richiedeva il calcolo di 3 (era già presente uno 0 nella seconda riga) determinanti di ordine 3 con il calcolo di 2 determinanti di ordine 2 (ma si sarebbe potuto fare meglio!). Inoltre, con un po' di pratica, si possono saltare alcuni passaggi (da fare mentalmente).

5 Prodotto di due matrici

La definizione del prodotto di due matrici è piuttosto complicata in quanto, in primo luogo, non sempre tale prodotto è consentito secondo lo schema classico riga-colonna. Pertanto si comincia a vedere, con questo schema, il **prodotto di due matrici quadrate di ordine 2**:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} = C.$$

Il risultato è la matrice C, i cui elementi sono dati da: $c_{rs} = a_{r1}b_{1s} + a_{r2}b_{2s}$.
Nello schema adottato riga-colonna, **un elemento della matrice prodotto, c_{rs}, è dunque uguale alla somma dei prodotti degli elementi della riga *r*-sima della matrice A per i corrispondenti elementi della colonna *s*-sima della matrice B**.

Lo schema può essere generalizzato al caso del prodotto di due matrici quadrate di ordine n ($n > 2$). In questo caso, gli elementi della matrice prodotto C sono dati da:

$$c_{rs} = a_{r1}b_{1s} + a_{r2}b_{2s} + \ldots + a_{rn}b_{ns} = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ri}b_{is}.$$

Lo schema seguente può aiutare a visualizzare come si ottiene la matrice prodotto:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1s} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2s} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{a_{r1}} & \boldsymbol{a_{r2}} & \ldots & \boldsymbol{a_{rs}} & \ldots & \boldsymbol{a_{rn}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{ns} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & \boldsymbol{b_{1s}} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & \boldsymbol{b_{2s}} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{r1} & b_{r2} & \ldots & \boldsymbol{b_{rs}} & \ldots & b_{rn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & \boldsymbol{b_{ns}} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{i=n} a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{i=n} a_{1i}b_{i2} & \ldots & \sum_{i=1}^{i=n} a_{1i}b_{is} & \ldots & \sum_{i=1}^{i=n} a_{1i}b_{in} \\ \sum_{i=1}^{i=n} a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{i=n} a_{2i}b_{i2} & \ldots & \sum_{i=1}^{i=n} a_{2i}b_{is} & \ldots & \sum_{i=1}^{i=n} a_{2i}b_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_{i=1}^{i=n} a_{ri}b_{i1} & \sum_{i=1}^{i=n} a_{ri}b_{i2} & \ldots & \boxed{\sum_{i=1}^{i=n} \boldsymbol{a_{ri}b_{is}}} & \ldots & \sum_{i=1}^{i=n} a_{ri}b_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_{i=1}^{i=n} a_{ni}b_{i1} & \sum_{i=1}^{i=n} a_{ni}b_{i2} & \ldots & \sum_{i=1}^{i=n} a_{ni}b_{is} & \ldots & \sum_{i=1}^{i=n} a_{ni}b_{in} \end{pmatrix}$$

La definizione riga per colonna si può anche estendere alle *matrici non quadrate*, ma con una restrizione importante: *il numero delle colonne della prima matrice deve essere uguale al numero delle righe della seconda matrice*. In tal caso, il prodotto di una matrice A ($m \times p$) per una matrice B ($p \times n$) è una matrice C ($m \times n$). Simbolicamente:

$$A_{(m\times p)} \cdot B_{(p\times n)} = C_{(m\times n)} .$$

Esempio 1

Calcolare $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Soluzione:

Risulta: $C = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+3\cdot 2 & 1\cdot(-1)+3\cdot 3 \\ -2\cdot 1+1\cdot 2 & -2\cdot(-1)+1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Esempio 2

Calcolare $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Soluzione:

Risulta:

$C = \begin{pmatrix} 1\cdot 3+(-1)\cdot(-2)+2\cdot 2 & 1\cdot 1+(-1)\cdot 4+2\cdot(-1) \\ 3\cdot 3+2\cdot(-2)+1\cdot 2 & 3\cdot 1+2\cdot 4+1\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$.

Esempio 3

Calcolare $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Soluzione: Risulta: $C = \left(1\cdot 2+2\cdot 1+(-1)\cdot(-3)\right) = (7)$

Esempio 4

Calcolare $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Soluzione:

Risulta: $C = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot(-1) \\ -2\cdot 1+1\cdot 2+(-1)\cdot(-1) \\ 1\cdot 1+0\cdot 2+2\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

➢

É facile rendersi conto che, in generale, *il prodotto di due matrici **non** è commutativo*:

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Se si hanno due matrici quadrate dello stesso ordine, A e B, si dimostra che:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B ,$$

cioè: *il determinante del prodotto di due matrici è uguale al prodotto dei determinanti delle due matrici.*

6 Risoluzione dei sistemi lineari con la regola di Cramer

Un sistema lineare di 2 equazioni in 2 incognite è un sistema del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \qquad (1),$$

dove a_{11}, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1 e b_2, sono numeri reali.
Un sistema del tipo (1) è risolto quando si trova una coppia (x,y) di numeri reali che soddisfa entrambe le equazioni.
Esistono diversi metodi di risoluzione di un sistema del tipo (1) (sostituzione, confronto, riduzione), già studiati negli anni passati. Ma esiste anche un quarto metodo che utilizza il calcolo di opportuni determinanti.
Questo è il **metodo o regola di Cramer**, che fornisce subito la soluzione del sistema dato:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \end{cases}$$

con D = $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$.

Esempio Risolvere il sistema lineare $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$.

Soluzione: Applicando al regola di Cramer precedente, si ha subito:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{9+1}{6-1} = \dfrac{10}{5} = 2 \\ y = \dfrac{-2-3}{5} = -1 \end{cases}$$

➢

L'aspetto più interessante della regola di Cramer consiste nel fatto che questa é generalizzabile alla risoluzione di un sistema lineare di n equazioni in n incognite. Per esempio, nel caso di un sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite, si ha:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} \\ y = \dfrac{D_y}{D} \\ z = \dfrac{D_z}{D} \end{cases} \qquad (2)$$

dove:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

con $D \neq 0$ (D viene chiamato determinante dei coefficienti del sistema lineare).

Le (2) forniscono chiaramente la **regola di Cramer** per la risoluzione di un sistema lineare di 3 equazioni lineari in 3 incognite: *ciascuna incognita è uguale ad una frazione che ha al denominatore il determinante dei coefficienti del sistema ed al numeratore lo stesso determinante, che ha al posto dei coefficienti dell'incognita che si sta calcolando i termini noti (o i secondi membri) del sistema stesso.*

Discussione dei casi possibili:

1. $D \neq 0$ — Il sistema si dice **determinato** ed ammette una soluzione unica, cioè una terna di valori (x, y, z) che verifica le 3 equazioni del sistema.

2. $D = 0$ — Il sistema può non avere soluzioni (sistema **impossibile**) oppure può avere infinite soluzioni (sistema **indeterminato**).

Due esempi rappresentativi di ciò che può succedere quando $D = 0$ chiariranno meglio le idee.

Esempio 1

Discutere il seguente sistema lineare: $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 3x + y - z = 3 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$.

Soluzione: Per questo sistema il determinante dei coefficienti é nullo ($D = 0$). Facendo la somma, membro a membro, delle prime due equazioni, si ottiene l'equazione $4x - y = 4$, che è in contraddizione con la terza equazione del sistema. Essendo le sue equazioni contraddittorie fra di loro, il sistema risulta impossibile.

Esempio 2

Risolvere il sistema lineare: $\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 3x+y-z=3 \\ 4x-y=4 \end{cases}$.

Soluzione: Il determinante dei coefficienti é nullo (D = 0). In questo caso, sommando membro a membro le prime due equazioni, si ottiene proprio la terza equazione del sistema, che risulta perciò inutile. Il sistema dato è equivalente allora al sistema

$$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ 3x+y-z=3 \end{cases},$$

ridotto alle sole prime due equazioni del sistema precedente.
Quest'ultimo sistema, potendosi scrivere:

$$\begin{cases} x=1+\dfrac{1}{7}z \\ y=\dfrac{4}{7}z \end{cases},$$

ammette infinite soluzioni, una per ogni valore assegnabile a z.
Dunque il sistema è indeterminato.

7 Matrice inversa di una matrice quadrata

Se I indica una matrice unitaria di ordine n e A è una matrice quadrata di ordine n, si chiama matrice inversa della matrice A la matrice A^{-1} tale che:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I \;.$$

Il calcolo diretto di A^{-1} non sempre è facile. Anzi è tanto più difficile quanto più grande è n: basti pensare che, per determinare A^{-1} con metodo diretto, è necessario risolvere n sistemi lineari di n equazioni con n incognite ciascuno.
Per tale ragione, in questa sede, il calcolo sarà limitato ai casi $n = 2$ e $n = 3$ con il metodo diretto e si indicherà una regola generale (senza dimostrazione) nel caso generale.

1° caso: $n = 2$.

Siano

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ e } A^{-1}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix},$$

dove x, y, z e t sono gli elementi incogniti della matrice A^{-1} da determinare.
La definizione di matrice inversa consente di scrivere, dall'uguaglianza di due matrici, due sistemi di due equazioni lineari in due incognite. Deve essere:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}x+a_{12}z & a_{11}y+a_{12}t \\ a_{21}x+a_{22}z & a_{21}y+a_{22}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases}$$

Risolvendo separatamente i due sistemi (1) e (2) con la regola di Cramer, si ha:

$$(1) \begin{cases} a_{11}x+a_{12}z=1 \\ a_{21}x+a_{22}z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \dfrac{a_{12}}{\det A} \\ z = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{21} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \dfrac{-a_{21}}{\det A} \end{cases} \qquad (\det A \neq 0)$$

$$(2) \begin{cases} a_{11}y+a_{12}t=0 \\ a_{21}y+a_{22}t=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 1 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \dfrac{-a_{12}}{\det A} \\ t = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \dfrac{a_{11}}{\det A} \end{cases}$$

Quindi la matrice $A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{22}}{\det A} & \dfrac{-a_{12}}{\det A} \\ \dfrac{-a_{21}}{\det A} & \dfrac{a_{11}}{\det A} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$.

Nel caso $n = 2$ é facile ricordare come determinare la matrice inversa di una matrice data A con queste osservazioni:

- gli elementi della diagonale principale della matrice A si devono scambiare
- gli elementi della seconda diagonale della matrice A devono cambiare di segno
- tutti gli elementi vanno divisi per il determinante della matrice A.

2° caso: $n = 3$.

Siano

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ e } A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix},$$

dove le x_{ij} sono le incognite da determinare per definire A^{-1}.

La definizione di matrice inversa $\left(A \cdot A^{-1} = I\right)$ consente di scrivere, dalla uguaglianza di due matrici, tre sistemi di tre equazioni lineari in tre incognite:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1) \\ (2) \\ (3) \end{cases}$$

Risolvendo separatamente i sistemi (1), (2) e (3), si ha (purché $\det A \neq 0$):

$$(1) \begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + a_{13}x_{31} = 1 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + a_{23}x_{31} = 0 \\ a_{31}x_{11} + a_{32}x_{21} + a_{33}x_{31} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{11} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\det A} = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\det A} = \dfrac{A_{11}}{\det A} \\ x_{21} = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix}}{\det A} = \dfrac{-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}{\det A} = \dfrac{-A_{12}}{\det A} \\ x_{31} = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix}}{\det A} = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}{\det A} = \dfrac{A_{13}}{\det A} \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + a_{13}x_{32} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} + a_{23}x_{32} = 1 \\ a_{31}x_{12} + a_{32}x_{22} + a_{33}x_{32} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{12} = \dfrac{-A_{21}}{\det A} \\ x_{22} = \dfrac{A_{22}}{\det A} \\ x_{32} = \dfrac{-A_{23}}{\det A} \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} a_{11}x_{13} + a_{12}x_{23} + a_{13}x_{33} = 0 \\ a_{21}x_{13} + a_{22}x_{23} + a_{23}x_{33} = 0 \\ a_{31}x_{13} + a_{32}x_{23} + a_{33}x_{33} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{13} = \dfrac{A_{31}}{\det A} \\ x_{23} = \dfrac{-A_{32}}{\det A} \\ x_{33} = \dfrac{A_{33}}{\det A} \end{cases}$$

In generale, quindi, si ha:

$$x_{rs} = \frac{(-1)^{r+s} A_{sr}}{\det A} \qquad \text{(Notare: } x_{rs} \text{ e } A_{sr}\text{)}$$

dove A_{sr} è il determinante che si ottiene dal determinante di A eliminando la riga s-sima e la colonna r-sima.

A_{sr} si chiama anche *minore dell'elemento a_{sr} di A*,

$C_{sr} = (-1)^{r+s} A_{sr}$ si chiama anche *minore complementare* o *cofattore* dell'elemento a_{sr} di A.

Concludendo, la matrice inversa di A è data da:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}.$$

3° caso: $n > 3$

La formula precedente può essere estesa al caso generale di una generica matrice quadrata di ordine n (con n ≥ 2):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix},$$

dove, al solito, $C_{sr} = (-1)^{r+s} A_{sr}$.

La matrice dei cofattori di una matrice A si dice **matrice aggiunta** della matrice A (e si indica con A^{+}). Allora, si può anche dire che la matrice inversa della matrice A è uguale alla matrice aggiunta della matrice trasposta di A diviso il determinante di A:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{({}^{t}A)^{+}}{\det A}}$$

sempre che sia $\det A \neq 0$.

Da quanto precede risulta che, per ogni n, la matrice inversa di una matrice quadrata A di ordine n esiste solo se $\det A \neq 0$.
Tali matrici si dicono *regolari* o *non singolari*.
Una matrice A per cui $\det A = 0$ si dice, invece, *singolare*.
Quindi: *una matrice singolare non ammette inversa.*

Esempio 1

Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, determinare A^{-1}.

Soluzione:

Risulta subito che (essendo $\det A = 5$): $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Esempio 2

Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, determinare A^{-1}.

Soluzione:

Si ha:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -9 - 10 = -19$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4 \Rightarrow C_{11} = -4$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \Rightarrow C_{12} = -5$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow C_{13} = 2$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 \Rightarrow C_{21} = -9$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow C_{22} = 3$$

$$A_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \Rightarrow C_{23} = -5$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow C_{31} = 2$$

$$A_{32} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \Rightarrow C_{32} = -7$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow C_{33} = -$$

Dunque: $A^{-1} = -\frac{1}{19}\begin{pmatrix} -4 & -9 & 2 \\ -5 & 3 & -7 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

➢

Come si vede dagli esempi precedenti, il metodo dei cofattori risulta abbastanza efficace in quanto, essendo del tutto meccanico, riduce le possibilità di errori di calcolo.

8 Risoluzione di un sistema lineare con il calcolo matriciale

Un sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite (ma il discorso può estendersi anche al caso generico di un sistema lineare di n equazioni in n incognite):

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

può scriversi sotto la forma matriciale

$$\boldsymbol{A \cdot X = B} \qquad (2)$$

dove:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

La matrice X delle incognite del sistema lineare si può determinare, a partire dalla (2), moltiplicando ambo i membri dell'equazione matriciale a sinistra per A^{-1} (supposto che A, matrice dei coefficienti del sistema, sia regolare, supposto cioè che il sistema sia determinato):

$$A^{-1}\cdot(A\cdot X) = A^{-1}\cdot B \Rightarrow (A^{-1}\cdot A)\cdot X = A^{-1}\cdot B \Rightarrow I\cdot X = A^{-1}\cdot B \Rightarrow$$

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

Dunque, per risolvere il sistema (1), supposto determinato (cioè con det A $\neq 0$), basta moltiplicare A^{-1} per B ed avere la matrice X delle incognite da determinare.

Resta, in ogni caso, la difficoltà del calcolo della matrice inversa (in matematica non ci sono vie speciali per i re!), come risulta dall'esempio che segue:

Esempio

Risolvere il sistema lineare: $\begin{cases} 2x + y - 3y = 1 \\ x + 2z = 3 \\ -x + 2y + 3z = -2 \end{cases}$.

Soluzione:

Il sistema si può scrivere sotto la forma: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, da cui si ha ancora (utilizzando il calcolo della matrice inversa fatto nell'esempio del paragrafo precedente):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{19} \begin{pmatrix} -4 & -9 & 2 \\ -5 & 3 & -7 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{35}{19} \\ -\frac{18}{19} \\ \frac{11}{19} \end{pmatrix}$$

(Consiglio metodologico: in casi come questi é sempre bene fare la verifica dei risultati sostituendo la soluzione trovata nelle equazioni del sistema dato. Nel caso in cui la verifica non dia i risultati sperati é bene rifare i calcoli!)

➢

9 Anello delle matrici quadrate di ordine n

Sia $\mathsf{A}_{n\times n}$ l'insieme delle matrici quadrate di ordine *n*. In $\mathsf{A}_{n\times n}$ si sono definite due operazioni interne: la somma e la moltiplicazione di due matrici. Se si considera la struttura algebrica ($\mathsf{A}_{n\times n}$, +, •), è facile convincersi, da quanto visto finora, che detta struttura costituisce un *anello non commutativo e unitario*, le cui proprietà possono riassumersi così:

. $(A+B)+C = A+(B+C)$,

2. $A + A_0 = A_0 + A = A$ $\quad (A_0 \in \mathsf{A}_{n\times n}$ matrice nulla)

3. $A+(-A) = (-A)+A = A_0$ $\quad (-A \in \mathsf{A}_{n\times n}$ matrice opposta)

4. $A+B = B+A$

5. $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$

6. $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$

7. $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$

8. $I_n \cdot A = A \cdot I_n$ $\quad (I_n \in \mathsf{A}_{n\times n}$, matrice unitaria di ordine n)

dove le matrici A, B e C sono sempre matrici arbitrarie di $\mathsf{A}_{n\times n}$.
L'anello ($\mathsf{A}_{n\times n}$, +, •) **non** è un *dominio d'integrità*, in quanto vi sono *divisori dello zero*, esistono, cioè, matrici non nulle tali che il loro prodotto è una matrice nulla, come nel caso delle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

per cui risulta:

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

nonostante A e B siano manifestamente delle matrici non nulle.

10 Esercizi

1 Date le matrici: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, determinare:

a) $A + B,\ 2A,\ -3B,\ \det A,\ \det B$

b) $A \cdot B,\ A^2,\ B^2,\ \det(A \cdot B),\ \det A \cdot \det B$

c) $A^{-1},\ B^{-1},\ A^{-1} \cdot B,\ A \cdot B^{-1}$.

2 Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

determinare (ove possibile):

a) $A \cdot B,\ A \cdot C,\ B \cdot C,\ C \cdot D$

b) $\det C,\ \det D,\ \det(C \cdot D)$

c) $C^{-1},\ D^{-1},\ C^{-1} \cdot D$.

3 Applicando la regola di Cramer, risolvere i sistemi lineari:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 3y + 2z = 0 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x + y + z = -2 \\ 4x + y - 2z = 3 \end{cases}.$$

4 Determinare il parametro k in modo che la matrice $\begin{pmatrix} 1 & k & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & k \end{pmatrix}$ risulti singolare.

5 Sono date le matrici : $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{pmatrix}$. Sapendo che $\det(A \bullet B) = \det A \bullet \det B$, dimostrare che: $(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2)^2 + (a_2 b_1 + a_1 b_2)^2$.

6 Date la matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, dimostrare che è $AB \neq BA \neq A'B' \neq AB' \neq A'B' \neq B'A'$ (dove A' indica la matrice trasposta di A), ma che il determinante di ciascun prodotto è sempre 4.

7 Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcolare:

a) $AB,\ BA$

b) $\det A,\ \det B,\ \det(AB),\ \det(BA)$

c) $A^{-1},\ B^{-1}$

8 Data la matrice $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$,

a) dimostrare che il minore complementare di ciascun elemento coincide con l'elemento stesso;
b) calcolare il determinante della matrice;
c) determinare la matrice inversa di quella data.

9 Dimostrare che $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -4 & -5 \\ 3 & -4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -304.$

10 Calcolare: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

11 Risolvere i sistemi proposti nell'esercizio **3** con il metodo matriciale visto nel paragrafo **8**.

12 Risolvere il sistema: $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x - 3y + 2z = 2 \\ -4x + 4y + az = a \end{cases}$, distinguendo i vari casi che possono presentarsi al variare del parametro a.

13 Applicando la regola di Cramer, risolvere il sistema di equazioni:
$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z + t = 0 \\ x + y - z + t = -1 \\ x + y + z - t = 0 \end{cases}$$

14 Risolvere il sistema dell'esercizio precedente con il metodo matriciale visto nel paragrafo **8**.

15 Calcolare la matrice inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$ precisando per quali valori del parametro a esiste.

16 Sono date le matrici: $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$.

a) Risolvere il sistema $(A \cdot B)X = B$.

b) Si può dire che la matrice X, soluzione del sistema precedente, é anche soluzione del sistema $(B \cdot A)X = B$?

17 Spiegare se è possibile affermare che la struttura (Q_{nxn},+, .), dove Q_{nxn} é l'insieme delle matrici quadrate regolari, é una struttura di corpo non commutativo o no.

18 Dimostrare che è nullo un determinante avente due righe o due colonne di elementi corrispondenti proporzionali.

19 Dimostrare le proprietà dei determinanti enunciate a pagina 7.

20 Determinare, nel piano xOy, il luogo dei punti per i quali risulta nullo il determinante:

$$\begin{vmatrix} y & -y & -1\\ 0 & x & 1\\ -x^2 & y & 1\end{vmatrix}$$

21 Determinare, al variare del parametro a, le soluzioni del seguente sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} 2x - ay + z = 0\\ x + 3y + az = 0\\ x - 4y = 0\end{cases}$$

22 Per le affermazioni che seguono, dire quali sono vere e quali sono false, giustificandone la risposta (A e B sono matrici quadrate di ordine n):

a) $k \in \mathbb{R} \Rightarrow \det(kA) = k^n \det A$.

b) $(\det A = \det B = 0) \Rightarrow \det(A+B)=0$.

c) $\{\det(A+B)=0, \det(A-B)= 0\} \Rightarrow$ o $\det A = 0$ o $\det B = 0$.