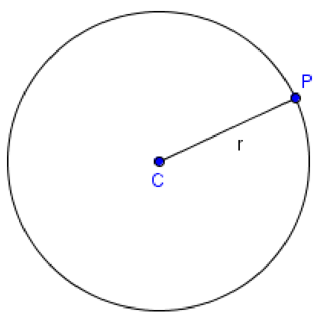
Circonferenza e cerchio

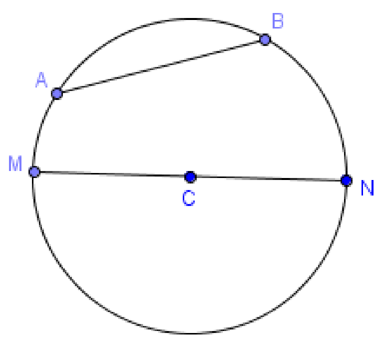
1 Definizioni e proprietà



Si chiama ***circonferenza*** il luogo geometrico dei punti del piano tali che la loro distanza da un punto fisso è costante. Il punto fisso si chiama ***centro*** della circonferenza; la distanza costante si chiama ***raggio*** della circonferenza. Così, se C è il centro e *r* é il raggio, un punto P appartiene alla circonferenza se risulta PC = *r*.

Si chiama, invece, ***cerchio***, l'insieme dei punti interni alla circonferenza ed, eventualmente, l'insieme dei punti della circonferenzas stessa. Piú precisamente:

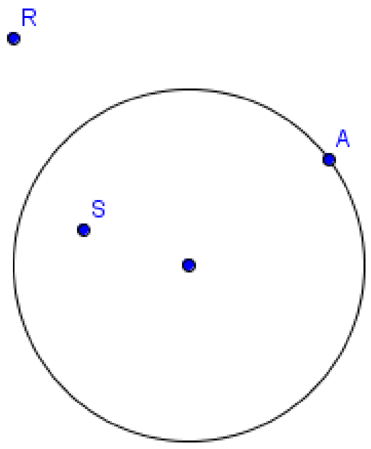
- *cerchio aperto* è l'insieme dei punti P tali che PC < *r*
- *cerchio chiuso* è l'insieme dei punti P tali che PC ≤ *r*.



Nella circonferenza (o nel cerchio) bisogna mettere in evidenza alcuni elementi particolari:

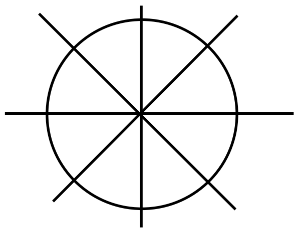
- corda è qualunque segmento che unisce due punti della circonferenza (ad esempio il segmento [AB] della figura a lato)
- diametro è una corda passante per il centro (ad esempio il segmento [MN] della figura a lato); tutti i diametri sono corde massime per una circonferenza data
- ***arco*** è una parte di circonferenza sottesa da una corda (ad esempio: arco AB, arco BN,...)
- ***settore circolare*** è la parte di piano compresa tra un arco e la corda che lo sottende.

Un punto del piano puo essere classificato rispetto ad una circonferenta data in funzione della sua distanza dal centro della circonferenza:

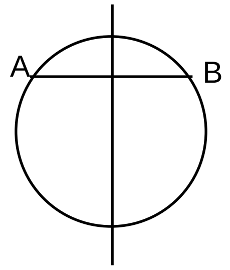


- se la distanza tra il centro della circonferenza e il punto è maggiore del raggio della circonferenza, si dice che il punto è **esterno** alla circonferenza (punto R della figura)
- se la distanza tra il centro della circonferenza e il punto è uguale del raggio della circonferenza, si dice che il punto **appartiene** alla circonferenza (punto A della figura)
- se la distanza tra il centro della circonferenza e il punto è minore del raggio della circonferenza, si dice che il punto è **interno** alla circonferenza (punto S della figura)

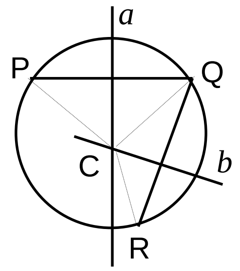
<u>Proprietà di simmetria</u>



Una circonferenza (o un cerchio) ha **infiniti assi di simmetria ortogonale**: sono tutte le rette diametrali, cioè le rette passanti per il centro della circonferenza (nella figura a lato sono mostrati solo alcuni di questi assi di simmetria).



Ogni retta diametrale è anche asse di simmetria per tutte le corde che sono perpendicolari a questa retta: dunque *per ogni corda esiste uno ed un solo asse di simmetria ortogo-nale passante per il centro della circonferenza* (come nel caso della corda [AB] della figura a lato).



Se si hanno tre punti non allineati, P, Q e R, si possono considerare gli assi *a* e *b* dei segmenti [PQ] e [QR] rispetti-vamente. Gli assi *a* e *b* si intersecano in un punto C.
Essendo $C \in a$, risulta CP = CQ.
Essendo $C \in b$, risulta CQ = CR.
Dunque, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, risulta:

$$CP = CQ = CR,$$

cioè il punto C è equidistante da ciascuno dei punti P, Q e R. Si può, allora, considerare C come il centro dell'unica circonferenza passante per i tre punti non allineati P, Q e R.

Infine una circonferenza (o un cerchio) ha un **centro di simmetria**: il centro C.

<u>Relazioni metriche</u>
Come già studiato alla scuola media, lo studente deve ricordare che:
- la **lunghezza di una circonferenza** di raggio r è uguale a $2\pi r$, dove π è un numero irrazionale uguale approssimativamente a: 3.1416;
- la misura dell'**area di un cerchio** di raggio r è uguale a πr^2.

2 Retta e circonferenza

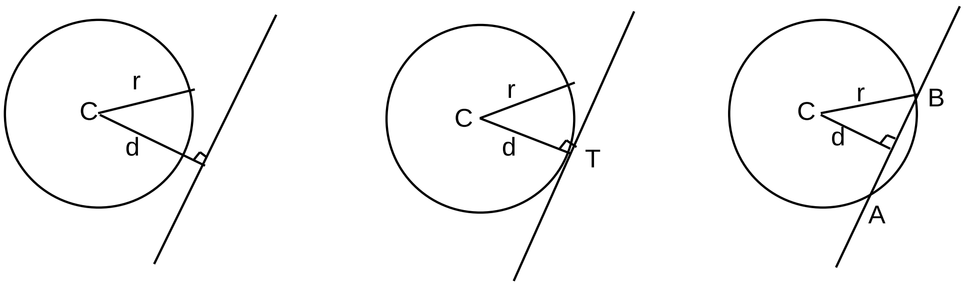
Per le posizioni relative di una retta ed una circonferenza di un piano possono presentarsi tre casi distinti:

- la retta è **esterna** alla circonferenza e non ha punti in comune con la circonferenza (in tal caso la distanza d del centro della circonferenza dalla retta è maggiore del raggio r della circonferenza: d > r)

- la retta è **tangente** alla circonferenza ed ha un solo punto in comune T con la circonferenza; il punto T si chiama anche punto di tangenza (in tal caso la distanza d del centro della circonferenza dalla retta è uguale al raggio r della circonferenza: d = r); il raggio passante per il punto di tangenza è perpendicolare alla retta tangente;

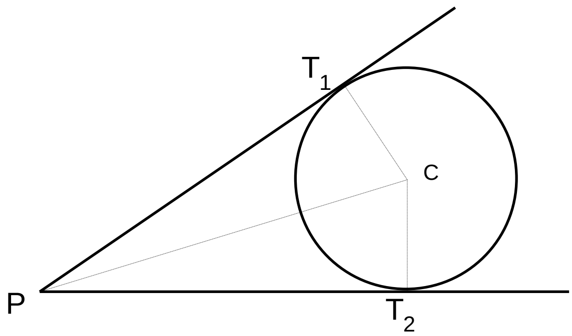
- la retta è **secante** la circonferenza ed ha due punti distinti in comune con la circon-ferenza (in tal caso la distanza d del centro della circonferenza dalla retta è minore del raggio r della circonferenza: d < r); applicando il teorema di Pitagora si ha su-bito che la lunghezza della corda [AB] è data da:

$$\mathrm{AB} = \sqrt{r^2 - d^2}$$



retta esterna d > r | retta tangente d = r | retta secante d < r

Per un punto P, esterno ad una circonferenza è possibile tracciare due rette tangenti alla circonferenza. Se i due punti di tangenza sono T_1 e T_2, è facile dimostrare che *i due segmenti di tangenza* PT_1 *e* PT_2 *sono uguali*: $PT_1 = PT_2$.



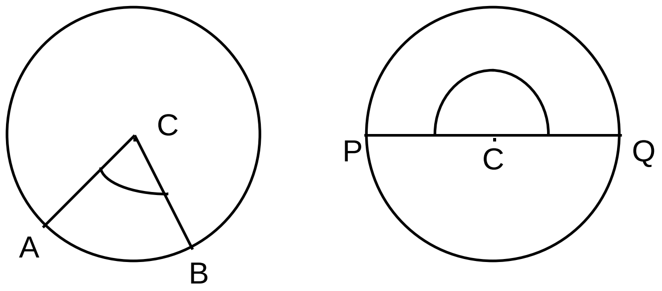
(La facile dimostrazione tiene conto dell'uguaglianza dei triangoli rettangoli PT_1C e PT_2C: questi due triangoli rettangoli hanno l'ipotenusa in comune e i cateti T_1C e T_2C uguali in quanto entrambi raggi di una stessa circonferenza. Dunque anche i cateti PT_1 e PT_2 sono uguali).

La lunghezza comune dei due segmenti di tangenza si calcola applicando il teorema di Pitagora e si ha:

$$\mathrm{PT}_1 = \mathrm{PT}_2 = \sqrt{\mathrm{PC}^2 - r^2}$$

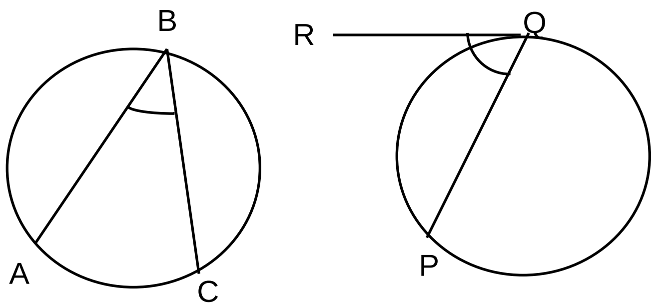
3 Angoli al centro ed angoli alla circonferenza

Si dice angolo al centro di una data circonferenza un angolo che ha il vertice nel centro della circonferenza.



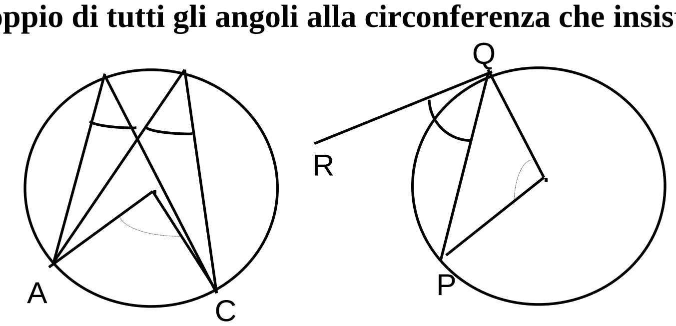
Nella figura di sopra, gli angoli ACB e PCQ (quest'ultimo è piatto) sono angoli al centro in quanto entrambi hanno il vertice C nel centro della circonferenza. Si dice anche che l'angolo ACB insiste sull'arco AB e l'angolo PCQ insiste sull'arco PQ.

Si dice angolo alla corconferenta un angolo che ha il vertice sulla circonferenza ed i lati secanti o tangenti la circonferenza.



Nella figura di sopra, gli angolo ABC e PQR sono angoli alla circonferenza in quanto i due vertici rispettivi (B e Q) appartengono alla circonferenza. I lati del primo angolo sono entrambi secanti la circonferenza; quelli del secondo sono uno secante e l'altro tangente. Si dice anche che l'angolo ABC insiste sull'arco AC e l'angolo PQR insiste sull'arco PQ (dalla parte di R).

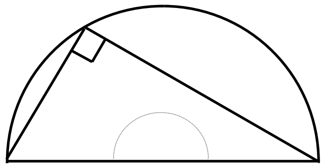
E' facile dimostrare che, **per una data circonferenza, l'angolo al centro che insiste su un determinato arco è doppio di tutti gli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco**.



Come conseguenza immediata di quanto detto sopra si deduce che:

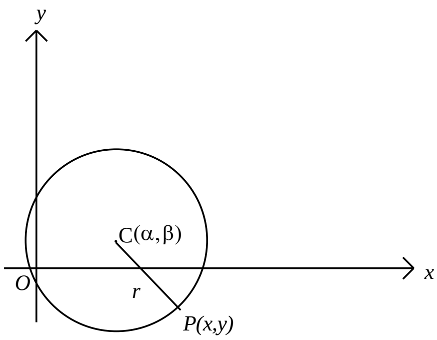
- **angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono uguali** (infatti sono tutti uguali alla metà del corrispondente angolo al centro)

- **ogni triangolo rettangolo inscritto in una semicirconferenza** (quindi l'ipotenusa coincide con il diametro della semicirconferenza) **è rettangolo**; infatti l'angolo opposto all'ipotenusa è un angolo alla circonferenza il cui corrispondente angolo al centro è un angolo piatto.



4 Equazione della circonferenza nel piano cartesiano

Nel piano cartesiano, la definizione geometrica di circonferenza consente di scrivere l'equazione cartesiana di una circonferenza con centro e raggio assegnati. Infatti, se il centro C(α, β) è il centro e r è la misura del raggio, un generico punto P(x,y) è tale che appartiene alla circonferenza di centro e raggio r se risulta verificata la condizione:



$$PC = r \Rightarrow PC^2 = r^2 \qquad (1).$$

L'ultima condizione consente di scrivere anche:

$$\boxed{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2} \qquad (2).$$

L'equazione (2) è l'**equazione cartesiana della circonferenza avente centro in C(α, β) e raggio *r***.

Esempio 1: Scrivere l'equazione della circonferenza di centro C(1,2) e raggio r = 3.

<u>Soluzione</u> Applicando la (2) si ha subito:

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$

da cui sviluppando i calcoli:

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 9 \Rightarrow$

$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$

L'ultima espressione è l'equazione richiesta.

Esempio 2: Scrivere l'equazione della circonferenza avente come diametro il segmento [AB], dove A(1, -3) e B(5, 1).

<u>Soluzione</u> In questo caso, il centro C è il punto medio di [AB] e quindi C(3, -1). Il raggio è uguale alla metà della lunghezza del segmento [AB], dunque:

$$r = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(5-1)^2 + (1+3)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{16 \cdot 2} = 2\sqrt{2}\,.$$

Applicando la (2), allora, si ha che l'equazione della circonferenza richiesta è:

$$(x-3)^2+(y+1)^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow$$
$$x^2-6x+9+y^2+2y+1=8 \Rightarrow$$
$$x^2+y^2-6x+2y+2=0$$

➢

Gli esempi precedenti mostrano che, sviluppando i quadrati nell'equazione del tipo (2) di una circonferenza, si ottiene un'equazione del tipo:

$$\boxed{x^2+y^2+ax+by+c=0}, \qquad (3)$$

dove a, b e c sono numeri reali.

Dall'equazione (3) si noterà che:

- c'è un termine in x^2
- c'è un termine in y^2
- c'è un termine lineare (di primo grado) in x
- c'è un termine lineare (di primo grado) in y
- <u>non</u> c'è il cosiddetto termine rettangolare, cioè il prodotto xy.

Allo stesso tipo di risultato si giunge sviluppando i calcoli della (2). Infatti si ha successivamente:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \qquad \Rightarrow$$
$$x^2-2\alpha x+\alpha^2+y^2-2\beta y+\beta^2=r^2 \qquad \Rightarrow$$
$$x^2+y^2+(-2\alpha)x+(-2\beta)y+\left(\alpha^2+\beta^2-r^2\right)=0 \Rightarrow \mathbf{(4)}$$
$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

dove si è indicato con a, b e c rispettivamente le tre espressioni in parentesi della (4), dove si è posto cioé:

$$\begin{cases} -2\alpha=a \\ -2\beta=b \\ \alpha^2+\beta^2-r^2=c \end{cases} \qquad (5)$$

Il sistema (5) può essere risolto rispetto a α, β e r e quindi si può anche dire che data una un'equazione del tipo (3):

$$x^2+y^2+ax+by+c=0,$$

questa rappresenta l'equazione di una circonferenza di centro C(α, β) e raggio r, dove α, β e r sono dati dalla risoluzione del sistema (5):

$$\begin{cases} -2\alpha = a \\ -2\beta = b \\ \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{\alpha}{2} \\ b = -\dfrac{b}{2} \\ \left(-\dfrac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{b}{2}\right)^2 - r^2 = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{\alpha}{2} \\ b = -\dfrac{b}{2} \\ r = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \end{cases} \qquad (6)$$

Naturalmente, perchè un'equazione del tipo (3) rappresenti l'equazione di una circonferenza è necessario che il radicando dell'espressione (6) che consente di calcolarne il raggio sia positivo o nullo; deve cioè risultare che:

$$a^2 + b^2 - 4c \geq 0 \qquad (7)$$

La relazione (7) costituisce la condizione di esistenza e realtà della circonferenza la cui equazione è la (3).

Se la relazione (7) non è verificata, la circonferenza non esiste nel piano reale e solo la conoscenza dei numeri complessi consentirebbe un’ulteriore approfondimento su questa eventualità

Il quadro seguente riassume alcuni casi particolarmente importanti di circonferenze:

Equazione	**Particolarità**
$x^2 + y^2 = r^2$	Circonferenza con centro in O(0,0) e raggio *r*
$x^2 + y^2 + ax + by = 0$	Circonferenza passante per O(0,0)
$x^2 + y^2 + ax + c = 0$	Circonferenza avente il centro sull'asse *x*
$x^2 + y^2 + by + c = 0$	Circonferenza avente il centro sull'asse *y*
$(x - r)^2 + y^2 - r^2 = 0 \Rightarrow$ $x^2 + y^2 - 2rx = 0$	Circonferenza con centro in (*r*,0) e raggio *r* (tangente all'asse *y* in O)
$x^2 + (y - r)^2 - r^2 = 0 \Rightarrow$ $x^2 + y^2 - 2ry = 0$	Circonferenza con centro in (0,*r*) e raggio *r* (tangente all'asse *x* in O)
$(x \mp \alpha)^2 + (y \mp \alpha)^2 = \alpha^2 \Rightarrow$ $x^2 + y^2 \mp 2\alpha x \mp 2\alpha y + \alpha^2 = 0$	Circonferenza con centro in C($\pm\alpha$,$\pm\alpha$) e raggio uguale a α (tangente ad entrambi gli assi cartesiani, 4 casi possibili)

Esempio 3: E' data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$.

a) Determinare le coordinate del centro e la misura del raggio.
b) Determinare le coordinate dei punti d'intersezione della circonferenza con gli assi *x* e *y*.

c) Calcolare le misure delle corde intercette dalla circonferenza sugli assi x e y.

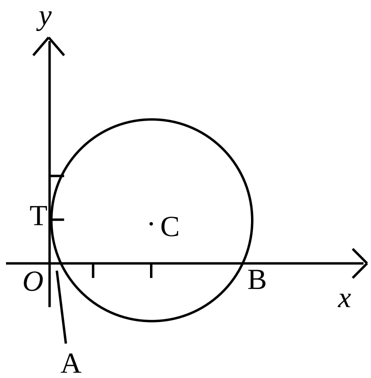
Soluzione a) Dall'equazione della circonferenza data, a = -4, b = -2 e c = 1. Dunque, applicando le (6), si ha subito:

$$\alpha = -\frac{-4}{2} = 2$$
$$\beta = -\frac{-2}{2} = 1$$
$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 - 4} = \frac{1}{2}\sqrt{16+4-4} = \frac{4}{2} = 2$$

Allora la circonferenza data ha centro C(2,1) e raggio r = 2.

b) Le intersezioni con l'asse x si determinano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} x^2 - 4x + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} x = 2 \pm \sqrt{3} \\ y = 0 \end{cases}$$



I punti d'intersezione con l'asse x sono allora: $\mathbf{A}\left(2-\sqrt{3},0\right)$ e $\mathbf{B}\left(2+\sqrt{3},0\right)$.

Le intersezioni con l'asse y si determinano risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 2y + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

L'unico punto d'intersezione con l'asse y è allora T(0,1).

c) La lunghezza della corda AB è data da:

$$\mathbf{AB} = x_{\mathbf{B}} - x_{\mathbf{A}} = \left(2+\sqrt{3}\right) - \left(2-\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}$$

La lunghezza della corda intercettata sull'asse y è uguale a zero in quanto con questo asse la circonferenza ha l'unico punto T in comune (la circonferenza è tangente all'asse y).

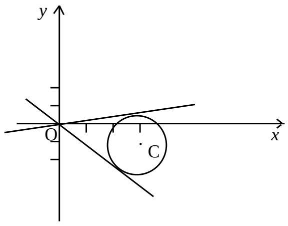
Esempio 4: E' data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 8 = 0$.
Disegnare la circonferenza e scrivere le equazioni delle tangenti alla circonferenza stessa che passano per l'origine O(0,0) degli assi cartesiani.

Soluzione Dall'equazione data risulta a = -6, b = 2 e c = 8. Applicando le (6) si ha subito che:

$$\alpha = -\frac{-6}{2} = 3,\ \ \beta = -\frac{2}{2} = -1,$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + 2^2 - 4\cdot 8} = \frac{1}{2}\sqrt{36+4-32} = \frac{1}{2}\sqrt{8} = \sqrt{2}.$$

Dunque C(3,-1) e $r = \sqrt{2}$.



L'equazione di una generica retta passante per O ha equazione $y = mx$, dove m è un parametro incognito da determinare in modo che la retta sia tangente alla circonferenza. In effetti, $y = mx$ è l'equazione del fascio infinito di rette che passano per O. Fra tutte queste rette bisogna cercare le due che sono tangenti alla circonferenza. E' possibile seguire due metodi diversi per calcolare m.

<u>Primo metodo</u>

Consiste nello scrivere il sistema contenente l'equazione della circonferenza e quella della retta generica:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 2y + 8 = 0 \\ y = mx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (mx)^2 - 6x + 2(mx) + 8 = 0 \\ y = mx \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (m^2 + 1)x^2 - 2(3-m)x + 8 = 0 \ (*) \\ y = mx \end{cases}$$

L'equazione risolvente (*) del sistema deve avere due radici coincidenti se si vuole che la retta sia tangente alla circonferenza. In altre parole, il discriminante di detta equazione deve essere nullo:

$$4(3-m)^2 - 4(m^2+1)\cdot 8 = 0 \Rightarrow 9 - 6m + m^2 - 8m^2 - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$7m^2 + 6m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{-3 \pm \sqrt{9+7}}{7} = \frac{-3 \pm 4}{7} = \begin{cases} -1 \\ 1/7 \end{cases}$$

Dunque le rette $y = -x$ e $y = \frac{1}{7}x$ sono le rette tangenti alla circonfe-renza data e passanti per O(0,0).

<u>Secondo metodo</u>

Consiste nell'imporre che la retta $y = mx$ abbia una distana dal centro della circonferenza uguale al raggio della circonferenza stessa.

> Si ricorda che dato un punto $\mathbf{P}(x_0, y_0)$ ed una retta $ax + by + c = 0$, la distanza di P dalla retta è data da:
>
> $$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Dopo aver scritto l'equazione della generica retta sotto la forma $mx - y = 0$):

$$\frac{|3m - (-1)|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2} \ \Rightarrow \frac{|3m+1|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{2}.$$

Elevando al quadrato ambo i membri dell'ultima equazione, si ha successivamente:

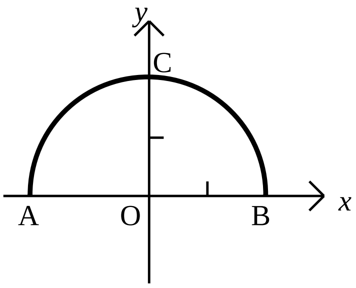
$$\frac{(3m+1)^2}{(m^2+1)}=2\Rightarrow 9m^2+6m+1=2m^2+2\Rightarrow$$

$7m^2+6m-1=0$

... si ottiene la stessa equazione per *m* che con il metodo precedente, quindi gli stessi risultati.

Esempio 5 Scrivere l'equazione della semicirconferenza avente centro nell'origine O(0,0), raggio uguale a 2 e passante per il punto (0,2).

Soluzione La semicirconferenza é posta nel semipiano delle y positive o nulle (in quanto passa per (0,2). Essendo $x^2+y^2=4$ l'equazione di tutta la circonferenza, ci sono due modi diversi per scrivere l'equazione della semicirconferenza:



$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y\ge 0 \end{cases}$$ **oppure** : $y=\sqrt{4-x^2}$.

Il primo modo, in effetti, consiste in un sistema comprendente una equazione ed una disequazione. Questo metodo, in generale, è il piú utile per scrivere l'equazione di una semicirconferenza, come risulta dall'**Esempio 6**.

Esempio 6 Scrivere l'equazione della semicirconferenza avente come diametro il segmento [AB] e contenuta nel semipiano passante il punto C, dove: A(1,-2), B(3,6) e C(2,1).

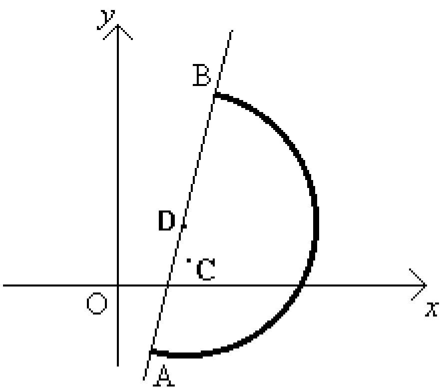
Soluzione Tutta la circonferenza ha centro in D(2,2) e raggio

$$r=\frac{1}{2}\mathbf{AB}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sqrt{(3-1)^2+(6+2)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4+64}=\sqrt{17}\ .$$

Dunque l'equazione di tutta la circonferenza è:

$$(x-2)^2+(y-2)^2=17\Rightarrow x^2+y^2-4x-4y-9=0\,.$$

La retta (AB) ha equazione: $\dfrac{y+2}{8}=\dfrac{x-1}{3-1}\Rightarrow y+2=4(x-1)\Rightarrow 4x-y-6=0$.



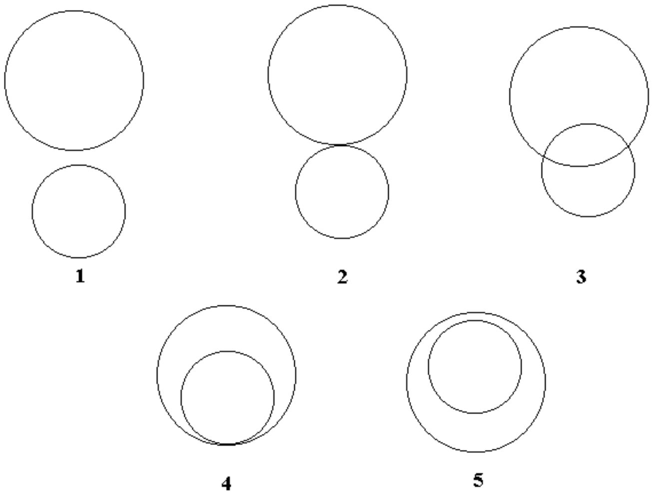
La retta (AB) divide il piano in due semipiani. Il punto C appartiene al semipiano di equazione $4x-y-6\ge 0$. Dunque l'equazione richiesta della semicirconferenza é:

$$\begin{cases} 4x-y-6\ge 0 \\ x^2+y^2-4x-4y-9=0 \end{cases}$$

➢

5 Posizioni relative ed asse radicale di due circonferenze

Due circonferenze del piano possono avere diverse posizioni reciproche l'una rispetto all'altra, come mostrato nella figura seguente:



Nel commento ai diversi casi che segue, *d* è la distanza fra i centri delle due circonfe-renze, *R* è il raggio della circonferenza maggiore, *r* quello della circonferenza minore:

1 Le circonferenze sono esterne l'una all'altra; la distanza tra i loro centri è maggiore della somma dei loro raggi: ***d* > *R* + *r***

2 Le circonferenze sono tangenti esternamente; la distanza tra i loro centri é uguale alla somma dei loro raggi: ***d* = *R* + *r***

3 Le circonferenze sono secanti in due punti distinti; la distanza tra i loro centri è compresa tra il valore assoluto della differenza dei loro raggi e la somma dei loro raggi: ***R* - *r* < *d* < *R* + *r***

4 Le circonferenze sono tangenti internamente e la distanza tra i loro centri è uguale al valore assoluto della differenza dei loro raggi: ***d* = *R* - *r***

5 Le circonferenze sono l'una interna all'altra, senza punti in comune; la distanza tra i loro centri è minore del valore assoluto della differenza dei loro raggi: ***d* < *R* - *r***

Dal punto di vista analitico, per studiare le posizioni reciproche di due circonferenze date, si studia il sistema delle loro due equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ (a_2 - a_1)x + (b_2 - b_1)y + c_2 - c_1 = 0 \end{cases}$$

dove la seconda equazione lineare del secondo sistema è stata ottenuta facendo la dif-ferenza, membro a membro, fra le equazioni del primo sistema. I due sistemi sono equivalenti, nel senso che hanno le stesse soluzioni, ma il secondo sistema è piú facile da risolvere, in quanto è di 2° grando (il primo è di 4° grado!). Inoltre la seconda equa-zione è l'equazione di una retta (passante per i punti comuni delle due circonferenze, ove questi esistano) che prende il nome di **asse radicale** delle due circonferenze.

Esempio 7 Sono date le equazioni delle circonferenze C_1: $x^2+y^2-4x+5y+1=0$, C_2: $x^2+y^2-2x=0$ e C_3: $x^2+y^2+2y=0$.

a) Determinare gli elementi caratteristici delle 3 circonferenze.
b) Trovare l'asse radicale delle coppie di circonferenze $(C_1,C_2),(C_1,C_3)$**e**(C_2,C_3).
c) Dimostrare che i tre assi radicali concorrono in uno stesso punto (detto centro radicale delle 3 circonferenze), di cui bisogna determinare le coordinate.

<u>Soluzione</u>

a) La circonferenza C_1 ha centro in $\mathbf{C}_1\left(2,-\frac{5}{2}\right)$ e raggio uguale a

$$r_1=\frac{1}{2}\sqrt{16+25-4}=\frac{1}{2}\sqrt{37}.$$

La circonferenza C_2 ha centro in $\mathbf{C}_2(1,0)$ e raggio uguale a $r_2=1$.
La circonferenza C_3 ha centro in $\mathbf{C}_3(0,-1)$ e raggio uguale a $r_3=1$.

b) Per determinare gli assi radicali delle circonferenze prese a due a due, basta fare la differenza fra le equazioni rispettive celle due circonferenze. Così, si ha rispettivamente:

$$(C_1,C_2)\Rightarrow\left(x^2+y^2-4x+5y+1\right)-\left(x^2+y^2-2x\right)=0\Rightarrow$$
$$-2x+5y+1=0\Rightarrow s_1:2x-5y-1=0$$

$$(C_1,C_3)\Rightarrow\left(x^2+y^2-4x+5y+1\right)-\left(x^2+y^2+2y\right)=0\Rightarrow$$
$$-4x+3y+1=0\Rightarrow s_2:4x-3y-1=0$$

$$(C_2,C_3)\Rightarrow\left(x^2+y^2-2x\right)-\left(x^2+y^2+2y\right)=0\Rightarrow$$
$$-2x-2y=0\Rightarrow s_3:y=-x$$

c) Per dimostrare che i tre assi sono concorrenti in uno stesso punto basta determinare le coordinate del punto d'intersezione di due di essi e verificare che questo punto appartiene anche al terzo asse. Dunque si ha:

$$s_1\cap s_3:\begin{cases}2x-5y-1=0\\ y=-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+5x-1=0\\ y=-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{7}\\ y=-\frac{1}{7}\end{cases}\Rightarrow$$

$$s_1\cap s_3=A\left(\frac{1}{7},-\frac{1}{7}\right)$$

Il punto A così trovato appartiene al secondo asse radicale. Infatti si ha:

$$4\cdot\frac{1}{7}-3\left(-\frac{1}{7}\right)-1=\frac{4}{7}+\frac{3}{7}-1=0\Rightarrow A\in s_2.$$

Da notare, infine, che la proprietà appena vista è del tutto generale e vale per ogni terna di circonferenze.

➢

6 Esercizi

1 Scrivere l'equazione della circonferenza avente centro in C(3,-2) e raggio uguale a 5.

2 Scrivere l'equazione della circonferenza avente come diametro il segmento [AB], dove A(1,-3) e B(5,3).

3 Per le seguenti circonferenze, di cui è data l'equazione, determinare le coordinate del centro, la misura del raggio e le intersezioni, se esistono, con gli assi x e y:
a) $x^2+y^2-4x-2y-1=0$
b) $x^2+y^2-5x+2y-1=0$
c) $x^2+y^2+7x-2y+2=0$
d) $2x^2+2y^2-8x+6y-3=0$
e) $3x^2+3y^2-4x+6y-1=0$

4 Sono dati i punti P(2,-3), Q(4,1) e R(-1,2).
a) Dopo aver scritto le equazioni degli assi dei segmenti [PQ] e [PR], determinare le coordinate della loro intersezione C.
b) Calcolare le lunghezze dei segmenti CP, CQ, CR. Cosa si può osservare?
c) Scrivere, infine, l'equazione della circonferenza che passa per i punti P, Q e R.

5 Risolvere l'ultima parte dell'esercizio precedente senza considerazioni geometriche, cominciando con l'equazione di una generica circonferenza che deve passare per i punti P, Q e R; quindi le coordinate di questi punti devono soddisfare l'equazione della circonferenza...

6 Scrivere l'equazione della circonferenza passante per i punti A(2,0), B(6,0) e C(8,3), con entrambi i metodi visti negli esercizi **4** e **5**.

7 E' data la circonferenza di equazione $x^2+y^2-8x+4y+3=0$.
a) Determinare le coordinate del centro e la misura del raggio.
b) Determinare le intersezioni della circonferenta con l'asse delle *x*.
c) Determinare le equazioni delle tangenti in questi due punti.
d) Dato il punto P(5,7), scrivere le equazioni delle tangenti alla circonferenza uscenti da P.
e) Determinare la lunghezza della corda che unisce i due punti di tangenza della domanda precedente.

8 E' data la circonferenza di equazione $x^2+y^2-8x=0$.
a) Disegnare la circonferenza.
b) Considerare la retta $y = 1$. Questa interseca la circonferenza in A e in B. Determinare le coordinate di questi punti.
c) Considerare l'angolo alla circonferenza che ha vertice in O (origine degli assi cartesiani) e l'angolo al centro che insistono sull'arco AB. Verificare analiticamente che l'angolo al centro è doppio dell'angolo alla circonferenza.

9 E' data la circonferenza di equazione $x^2+y^2-3x+2y-3=0$.
a) Determinarne coordinate del centro e misura del raggio e rappresentarla.
b) Determinare le rette parallele all'asse *x* che intersecano la circonferenza.

c) Determinare le rette parallele all'asse *x* che intercettano sulla circonferenza una corda di lunghezza uguale a 4.

10 E' data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x - 3 = 0$.

a) Determinarne coordinate del centro e misura del raggio e rappresentarla.

b) Determinare le rette parallele alla retta $y = x$ che intersecano la circonferenza.

c) Determinare le rette parallele alla retta $y = x$ che intercettano sulla circonferen-za una corda di lunghezza uguale a 3.

11 Scrivere l'equazione della semicirconferenza avente centro in O(0,0), raggio uguale a 3 e passante per il punto (-3,0).

12 Scrivere l'equazione del quadrante (quarto di cerchio chiuso) di centro O(0,0) e passante per i punti A(1,0) e B(0,1).

13 Scrivere l'equazione della semicirconferenza avente come diametro il segmento [AB] e contenuta nel semipiano passante per il punto C, doce: A(-1,3), B(5,1) e C(4,7).

14 Sono date le circonferenze che hanno equazioni:

$$x^2 + y^2 - x + 2y - 1 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 - 4x - 4y + 1 = 0.$$

a) Dopo aver determinato l'equazione dell'asse radicale delle due circonferenze, determinare le coordinate dei punti d'intersezione A e B delle due circonferenze.

b) Verificare che se da un punto qualunque dell'asse radicale si conducono le due rette tangenti alle due circonferenze, i due segmenti di tangenza risultano uguali.

15 Disegnare le curve di equazione:

a) $x^2 + y^2 + 2|x| + y - 1 = 0$

b) $x^2 + y^2 + x - 4|y| - 2 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 2|x-1| + y = 0$

d) $x^2 + y^2 + |2x - 3y| - 3 = 0$

16 E' data la famiglia di circonferenze C_m : $x^2 + y^2 - 2mx + 2my + 3 = 0$, per cui le coordinate del centro e la misura del raggio dipendono dal parametro *m*.

a) Stabilire quali sono i valori di *m* per cui esiste una circonferenza della famiglia C_m.

b) Determinare le coordinate del centro di una generica circonferenza della famiglia C_m e verificare che il luogo geometrico dei centri della famiglia è una retta di cui bisogna determinare l'equazione.

c) Esistono dei valori di *m* per cui le circonferenze corrispondenti della famiglia risultano tangenti all'asse delle *x*?

17 E' data la famiglia di circonferenze C_m : $x^2 + y^2 + 2(m-1)x - 2my + 1 = 0$, per cui le coordinate del centro e la misura del raggio dipendono dal parametro *m*.

a) Stabilire quali sono i valori di *m* per cui esiste una circonferenza della famiglia C_m.

b) Determinare le coordinate del centro di una generica circonferenza della famiglia C_m e verificare che il luogo geometrico dei centri della famiglia è una retta di cui bisogna determinare l'equazione.

c) E' possibile trovare due circonferenze concentriche della famiglia C_m che abbiano raggi diversi? Spiegare.

d) Determinare, se esistono, le circonferenze della famiglia C_m che siano tangenti alla retta di equazione $x - y + 3 = 0$.

18 E' data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 8x - 4y = 0$ e la famiglie di rette r_m: $mx - y + 2m - 1 = 0$, dipendenti dal parametro m.

a) Dimostrare che tutte le rette r_m passano per uno stesso punto P, di cui bisogna determinare le coordinate.

b) Determinare la retta r_m che passa per il centro della circonferenza. Questa retta interseca la circonferenza in due punti A e B. Dopo aver determinato le coordinate di A e B, scrivere le equazioni delle tangenti alla circonferenza in questi due punti.

c) Determinare le rette della famiglia r_m che sono tangenti alla circonferenza.

d) Determinare le rette della famiglia r_m che staccano sulla circonferenza una corda di lunghezza uguale a 4.

19 Determinare il centro radicale delle prime 3 circonferenze dell'esercizio **3**.