Lo schema di corpo rigido si presta solo a rappresentare parti solide di macchine o strutture. Per mettere in relazione moti e posizioni di equilibrio di diversi organi di macchine o di una struttura e' necessario introdurre schemi meccanici più complessi soggetti a vincoli esterni.

Per un sistema S si chiamano olonomi i vincoli che limitano direttamente le configurazioni C di S e indirettamente i suoi atti di moto. Le restrizioni a cui sono soggette le configurazioni si esprimono imponendo a funzioni φ_1, φ_2 --- delle coordinate degli elementi di S di essere $= 0$ o ≥ 0.
Nel primo caso si hanno vincoli bilaterali; nel secondo unilaterali.

Un vincolo olonomo si dice dipendente dal tempo se si muove rispetto ad un riferimento fisso o se si deforma con legge assegnata. Si ha ambiguita' se il vincolo trasla con velocità $\vec{\tau}$ ad esso tangente.

- Vincoli olonomi indipendenti dal tempo: le restrizioni imposte alle configurazioni del sistema possono essere espresse imponendo alle funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ delle <u>sole</u> coordinate degli elementi di S di essere $= 0$ oppure ≥ 0.
- Vincoli olonomi dipendenti dal tempo: nelle funzioni $\varphi_1, \varphi_2 \ldots$ compare anche il tempo.

Le restrizioni che i vincoli impongono direttamente alle configurazioni limitano indirettamente anche gli atti di moto di S. Tali limitazioni sono espresse da relazioni che si ottengono derivando rispetto a t le condizioni del tipo: $\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$ ... oppure $\varphi_1 \geq 0$, $\varphi_2 \geq 0$ .... imposte dal vincolo alla configurazione. Si dice che le velocità, gli atti di moto e gli spostamenti sono possibili se compatibili con le limitazioni imposte dai vincoli.

Consideriamo un elemento E soggetto ad un vincolo dipendente dal tempo e sia V la config del vincolo all'ist t.
E all'ist t occupa il punto P compatibile con le restrizioni imposte dal vincolo. Si chiamano velocità virtuali $\vec{v}$ relative a t e P le velocità che E può assumere in P compatibilmente con le limitazioni indirette imposte dalla config del vincolo all'ist t.
Se il vincolo è bilaterale allora le velocità virtuali sono tutte tangenti in P a V: $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$.
Se il vincolo è unilaterale le velocità virtuali di E in P all'ist t devono formare un angolo non ottuso con $\vec{n}$ orientata dal vincolo all'elemento: $\vec{v} \cdot \vec{n} \geq 0$
Se il vincolo è bilaterale le vel virtuali sono invertibili mentre nel caso di vincolo unilaterale vi sono velocità non invertibili.
La velocità nulla risulta virtuale $\forall t$ e $\forall$ vincolo. Non si deve parlare di velocità virtuale (singolare) perché si tratta di un insieme di ∞ velocità.
Moltiplicando $\vec{v}$ per δt si ottiene lo spostamento virtuale $\delta \vec{OP}$

che è lo spostamento compatibile con la configurazione V del vincolo (dipendente da t) all'ist t.

Se il vincolo è bilaterale si ha: $\delta \overline{OP} \cdot \vec{n} = 0$ quindi ogni spostamento virtuale è invertibile. Se il vincolo è unilaterale $\delta \overline{OP} \cdot \vec{n} \geq 0$ ed esistono spostamenti virtuali non invertibili.

Per un sistema S_V (sistema a vincoli olonomi) si chiamano atto di moto virtuale e spostamento virtuale relativi a t e a C_V rispettivamente le velocità virtuali e gli spostamenti virtuali di S_V.

Lo spostamento virtuale dell'intero S_V lo si indica così: δC_V

Se S_V è un corpo rigido tutti i suoi atti di moto e gli spostamenti virtuali sono rigidi $\forall t$ e $\forall C_V$. Le velocità virtuali dell'elemento E in P all'ist t sono espresse da

$$\overline{V}_P = \overline{V}_\Omega + \vec{\omega}^v \times \overline{\Omega P}$$

dove $\overline{V}_\Omega$ e $\vec{\omega}^v$ sono virtuali cioè compatibili con le config dei vincoli all'ist t. Gli spostamenti virtuali di un corpo rigido sono dati da

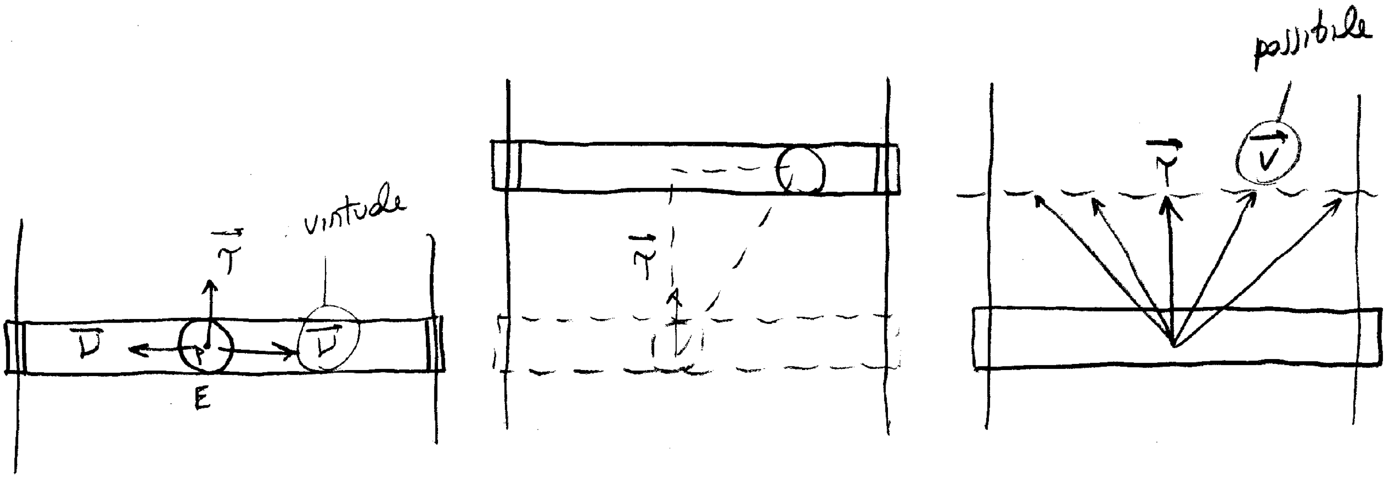
$$\delta \overline{OP} = \delta \overline{O\Omega} + \vec{\omega}^v \delta t \times \overline{\Omega P}$$

Qualunque sia S_V e qualunque siano i vincoli l'atto di moto e lo spostamento nullo sono virtuali.

Le velocità virtuali sono indipendenti dall'atto di moto dei vincoli; le velocità possibili, invece, no.

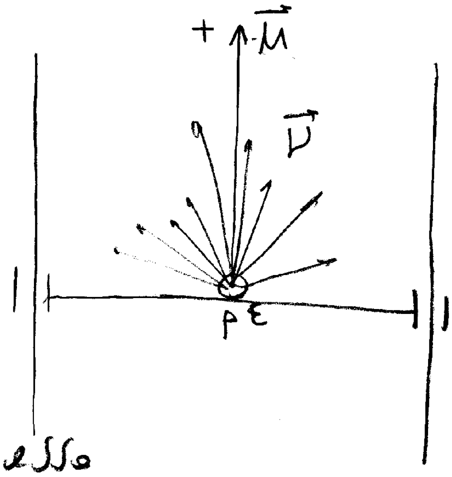
Consideriamo il vincolo bilaterale dipendente dal tempo di seguito schematizzato:

$$\vec{V} = \vec{\nu} + \vec{\tau}$$



- Se $\tau \neq 0$ vel poss. $\neq$ vel virt.
- Se $\tau = 0$ vel poss. $=$ vel virt. $\forall p$ occupato da E

consideriamo un vincolo unilaterale dipendente da t



- Se $\tau > 0$ l'insieme delle velocità virtuali comprende quello delle vel possibili ma non coincide con esso
- Se $\tau < 0$ l'insieme delle velocità virtuali è compreso in quello delle vel possibili ma non coincide con esso
- Se $\tau = 0$ i due insiemi coincidono.

Non esiste una relazione generale tra vel virt. e vel poss $\forall c$ e $\forall t$.

Se i vincoli sono indipendenti dal tempo gli atti di moto virtuali $\equiv$ con quelli possibili $\forall t$ e $\forall C_v$

Gli atti di moto virtuali relativi a t e a C_v è indipendente dall'atto di moto effettivo infatti gli atti di moto virtuali sono definiti anche se il corpo è in quiete.

Se $\vec{f}_h$ e' una forza (di qualsiasi tipo) agente su $E_h \in S_v$ all'ist t nel quale E_h occupa P_h, il lavoro virtuale della forza $\vec{f}_h$ per lo spostamento $\delta \vec{OP}_h$ di P_h relativo a t e' dato da

$$\delta L_h = \vec{f}_h \cdot \delta \vec{OP}_h = \vec{f}_h \cdot \vec{v}_h \delta t$$

ed ha le stesse dim del lavoro effettivo.

Consideriamo la sollecitazione costituita da N forze $\vec{f}_h$ agenti sugli elementi di S_v e lo spostamento virtuale di S_v (δC_v) costituito dagli N spostamenti virtuali $\delta \vec{OP}_h$ relativi all'ist t. Il lavoro virtuale della sollecitazione per lo spostamento δC_v relativo a t e' dato da

$$* \quad \delta L = \sum_1^N{}_h \vec{f}_h \cdot \delta \vec{OP}_h = \sum_1^N{}_h \vec{f}_h \cdot \vec{v}_h \delta t$$

Lavori elementari possibili $\equiv$ virtuali $\forall t$ e $\forall C_v$ $\Longleftrightarrow$ i vincoli sono indipendenti da t.

I lavori virtuali sono definiti anche in un intervallo di tempo durante il quale il sist e' in quiete.

Se S_v e' un corpo rigido moltiplicando per δt la

$$\vec{v}_P = \vec{v}_\Omega + \vec{\omega}^v \times \Omega P$$

e tenendo conto della $*$ si ha

$$\vec{v}_P \cdot \delta t = \vec{v}_\Omega \delta t + \omega^v \delta t \times \Omega P$$

$$* \quad \delta L = \sum_1^N{}_h \vec{f}_h \cdot \vec{v}_\Omega \delta t + \sum_1^N{}_h \Omega P_h \times \vec{f}_h \cdot \vec{\omega}^v \delta t = \vec{F} \cdot \vec{v}_\Omega \delta t + \vec{M}_\Omega \cdot \vec{\omega}^v \delta t$$

quindi il lavoro virtuale di una qualsiasi sollecit. agente su un corpo rigido e' nota se sono noti lo spost. virt di Ω ($\vec{v}_\Omega \delta t$), la rotaz virtuale del corpo ($\vec{\omega} \delta t$), $\vec{M}_\Omega$ ed $\vec{F}$.

• ELEMENTO NB: i vincoli considerati sono lisci

Se E è soggetto ad un vincolo bilaterale $\forall P$ compatibile col vincolo occupato da E in t e qualunque sia la velocità effettiva di E, le reazioni $\vec{r}$ che il vincolo può esplicare su E sono $\perp$ al vincolo in P mentre gli spostamenti virtuali sono // al vincolo quindi si ha $\delta L^v = \vec{r} \cdot \delta \vec{OP} = 0 \; \forall \vec{r}$ e $\forall P$.

Quindi la relazione $\delta L^v = 0$ è soddisfatta $\forall$ spost virtuale relativo a P e a t di un elemento E soggetto a un vincolo bilaterale. Se il vincolo è unilaterale le reazioni $\vec{r}$ che il vincolo può esplicare su E sono $\perp$ al vincolo in P mentre gli spost virtuali devono formare un angolo non ottuso con $\vec{n}$ quindi

$\delta L^v = \vec{r} \cdot \delta \vec{OP} \geq 0$. Quindi la relazione $\delta L^v \geq 0$ è soddisfatta $\forall$ spost virtuale relativo a P e t di un elemento E soggetto ad un vincolo unilaterale

• CORPO RIGIDO

Se il corpo è vincolato ad uno snodo sferico qualunque sia la posizione e l'atto di moto effettivo del corpo deve essere $\vec{M}^v_\Omega = 0$ e gli spostamenti virtuali sono tutte e sole le rotazioni virtuali $\vec{\omega}^v \delta t$ con asse per Ω. Quindi ponendo $\vec{V}_\Omega = 0$ e $\vec{M}^v_\Omega = 0$ nella * si ha $\delta L^v = 0 \; \forall$ spost. rigido virtuale.

Allo stesso risultato si giunge se il corpo è vincolato ad una cerniera, ad un collare cilindrico o ad una guida cilindrica.

Finora ho considerato vincoli bilaterali ora consideriamo vincoli in parte unilaterali.

In presenza di vincoli unilateri gli spostamenti virtuali di R sono gli spostamenti rigidi in corrispondenza dei quali ciascun elemento E_h di R a contatto con il vincolo subisce uno spostamento δOP_h formante un angolo non ottuso con la normale dal vincolo al corpo. Per questo motivo la relazione $\delta L^v \geq 0$ caratterizza le sollecitazioni esplicate da questi vincoli. Nelle posizioni ordinarie tutti gli spostamenti virtuali sono invertibili; in quelle di confine ve ne sono alcuni non invertibili. quindi nelle posizioni ordinarie per ciascuna coppia di spostamenti opposti si ha $-\delta L^v \geq 0$ e $\delta L^v \geq 0$ che sono soddisfatte simultaneamente solo se $\delta L^v = 0$. Quindi

vincoli unilaterali:
- posiz. ordinarie $\delta L^v = 0$
- posiz. confine $\delta L^v \geq 0$

- SISTEMA DI DUE CORPI RIGIDI

$S_v = R_1 \cup R_2$

vincoli interni: collegano tra loro i due corpi

vincoli esterni: collegano i due corpi con altri corpi esterni a S_v.

per le sollecitazioni esplicate dai vincoli esterni si ha

$\delta L^v = 0$ posizioni ordinarie (vincoli unilateri) e vincoli bilateri

$\delta L^v \geq 0$ posizioni di confine

per le sollecitazioni esplicate dai vincoli interni si ha che ogni spostamento virtuale di S_v si può scomporre nella somma di uno d'assieme e di uno di R_1 risp R_2 (o viceversa).

* Per la 2° e la 3° legge fondamentale le sollecit. vincolari scambiate tra R_1 ed R_2 sono complessivamente equivalenti a zero quindi per ogni spostamento rigido d'assieme $\delta L^v = 0$.
Per lo spostamento virtuale di R_1 risp R_2 (o viceversa) per il lavoro delle sollecit. esplicate dai vincoli interni, si ha

$\delta L^v = 0$ config ordinaria

$\delta L^v \geq 0$ config confine

GENERICO SIST A VINCOLI OLONOMI

Qualunque sia il numero di corpi rigidi $R_1, R_2 \ldots$ ogni spost virt di Sv può essere decomposto in uno spost rigido d'assieme e in spostamenti rigidi relativi di un corpo rispetto all'altro. Tenendo conto di quanto detto * si ha che per un generico sistema a vincoli olonomi privi d'attrito e per le sollecit. che possono essere generalmente dipendenti da t, le sollecit. esplicate dai vincoli sono quelle che $\forall \delta C_v$ relativi a t e alla config considerata soddisfano la

$\delta L^v = 0$ config ordinarie (δC_v invertibili)

$\delta L^v \geq 0$ config confine (δC_v non invertibili)

- Se la sollecit vincolare complessiva è caratterizzata da $\delta L^v = 0$ nelle config ordinarie e dalla $\delta L^v \geq 0$ in quelle di confine $\forall$ tipo di vincolo il sistema si dice a vincoli perfetti (SP)

Teorema del lavoro $dT = dL^i + dL^e$

Una forma equivalente è data da $dT = dL^a + dL^v$ che differisce dal primo per la diversa classificazione delle forze agenti su S.

Se S è soggetto a vincoli olonomi lisci bilaterali si ha che $\delta L^v = 0$ e se il vincolo è indipendente da t allora i lavori possibili sono anche virtuali $\delta L^v = dL^v = 0$

quindi $dT = dL^a$. *

Questa relazione esprime il teorema del lavoro anche nel caso di vincoli unilaterali in ogni intervallo di regolarità!

La * esprime il teorema del lavoro per un sistema a vincoli perfetti indipendenti da t.

Se la sollecitazione attiva è posizionalmente conservativa dalla * si ricava il teo di conservazione dell'energia che nel caso di sistema a vincoli completi (vincoli tali da lasciare al sistema 1 g dl) oltre che perfetti e indipendenti da t fornisce un'equazione scalare pura suff ad individuare tutti i possibili moti del sistema

Consideriamo il sistema fondamentale della statica

$$* \quad \vec{f}_h^{\,v} = -\vec{f}_h^{\,a}(\vec{OP};0;t) \qquad h = 1 \dots N$$

Se $\delta\vec{OP}_1$, $\delta\vec{OP}_2$ -- è una N-pla di spostamenti virtuali relativi a C di S all'ist t, moltiplicando le * ordinatamente per gli spostamenti virtuali di ugual indice e sommando si ha

$$\delta L^v = -\delta L^a_{\odot} \quad \text{ponendo} = 0 \text{ le velocità nelle leggi delle forze attive}$$

Questa relazione è conseguenza della * quindi è verificata in ogni istante e in tutte le config di equilibrio della sollecit attiva e vincolare.

Se S è un sistema a vincoli perfetti $\delta L^v = 0$ nelle config ordinarie e $\delta L^v \geq 0$ in quelle di confine $\forall t$ e $\forall$ spost virtuale.

Quindi se il sist è a vincoli perfetti affinché Cv sia di equilibrio è necessario che $\forall t$ ed ogni spost virtuale

$\delta L^a_o = 0$ se config ordinaria

$\delta L^a_o \leq 0$ se config confine

• PRINCIPIO LAVORI VIRTUALI:

Per un sist a vincoli perfetti dipendenti da t affinché Ce sia di eq è N e S che

- Ce sia compatibile coi vincoli
- $\forall$ spost virtuale relativo a Ce e $\forall t$

$\delta L^a_o = 0$ se config ordinaria

$\delta L^a_o \leq 0$ se config confine

- Se Ce e' una config di eq ordinaria o di confine per Sp in corrisp ad una assegnata sollecit. attiva, se si introducono ulteriori vincoli, con i quali Ce e' compatibile, essa e' ancora config di eq.

- Se Ce e' config di eq ordinaria o di confine per Sp in corrisp a diverse sollecit attive, quando si sovrappongono queste ultime Ce e' ancora sollecit di eq.

Se la sollecit attiva e' conservativa, di potenziale U, ∀ spost virtuale del sistema si ha $\delta L_o^a = \delta U$. Le config di equilibrio ordinarie sono quelle per le quali $\delta U = 0$ ∀ spost virtuale mentre quelle di confine sono tali che ∀ spost virtuale $\delta U \leq 0$.
Se la sollecit e' costituita soltanto dai pesi il potenziale dipende solo dalla quota di G quindi dal principio dei lavori virtuali si ha:

- PRINCIPIO DI TORRICELLI

Per un sistema Sp se la sollecit attiva si riduce al peso sono di eq tutte e sole le config nelle quali G non subisce abbassamenti in corrisp ad alcuno spost virtuale.