M-5

LA

DIVINA PROPORTIONE

[edr - Gennaio 2001]

La Geometria ha due grandi tesori: uno è il teorema di Pitagora; l' altro è la Sezione Aurea di un segmento.
Il primo lo possiamo paragonare ad un oggetto d' oro; il secondo lo possiamo definire un prezioso gioiello.

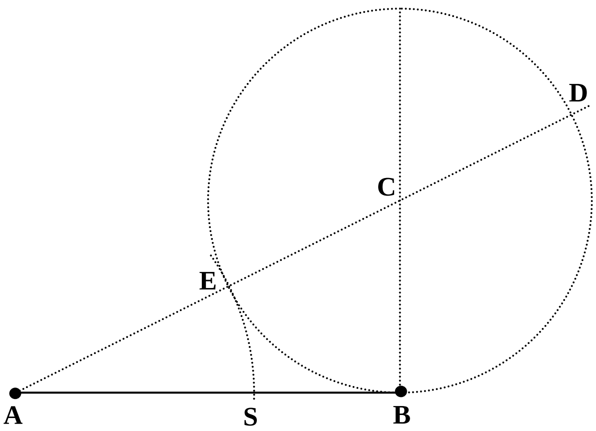
- Johannes Kepler [1571-1630] -

In copertina: Ritratto di Fra Luca Pacioli [Napoli – Museo di Capodimonte]

La Divina Proportione

Premessa

Il primo incontro con la Divina Proporzione in genere avviene in Geometria. La proposizione **11** del libro **II** degli Elementi di Euclide recita così: *“ Come dividere un segmento in modo che il rettangolo che ha per lati l’ intero segmento e la parte minore sia equivalente al quadrato che ha per lato la parte maggiore”*, ovvero come trovare la **Sezione Aurea** di un segmento, cioè la parte media proporzionale tra l’ intero segmento e la parte rimanente. La costruzione è tra le più classiche della Geometria: dato il segmento **AB** tracciare il cerchio di pari diametro e tangente ad esso in **B**, quindi la secante per **A** passante per il centro **C** del cerchio. La parte esterna della secante (**AE**) è la sezione aurea del segmento, essendo la tangente (**AB**) media proporzionale tra l’ intera secante (**AD**) e la sua parte esterna (**AE**) [**Euclide L. III – P. 36**], essendo **ED = AB** e per alcune proprietà delle proporzioni:

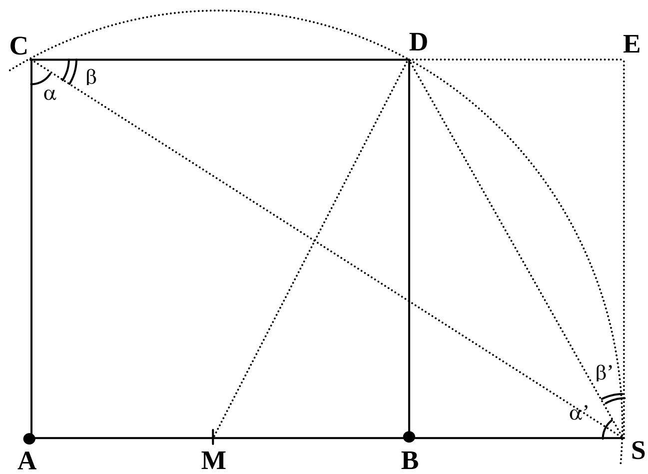


$$\mathbf{AD : AB = AB : AE \;\rightarrow\; (AD\text{-}AB) : AB = (AB - AE) : AE \;\rightarrow}$$

$$\mathbf{\rightarrow\; AS : AB = SB : AS \;\rightarrow\; AB : AS = AS : SB}$$

Volendo invece trovare quel segmento di cui un dato segmento **AB** sia la Sezione Aurea, si procede nel modo seguente:

- trovare il punto medio **M** del segmento dato;
- costruire il quadrato sul segmento dato; siano **C** e **D** gli altri due vetrici;
- centrato in **M** tracciare il cerchio con raggio **MC** (**= MD**), che interseca in **S** il prolungamento di **AB**.

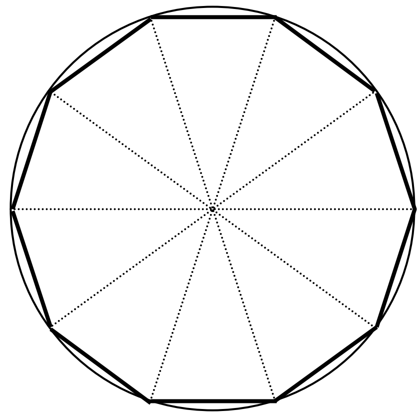


AS è il segmento cercato, di cui **AB** è la Sezione Aurea.
Infatti i triangoli **CAS** e **SBD** sono simili perché rettangoli e con gli angoli α ed α' uguali (essendo uguali i loro complementari β e β', angoli alla circonferenza che sottendono lo stesso arco **DS**); quindi i cateti sono in proporzione:

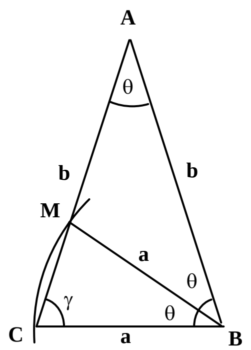
$$\mathbf{AS : DB = CA : BS \;\rightarrow\; AS : AB = AB : (AS - AB)} \qquad \text{C.v.d.}$$

Ma cos' ha di così importante questa sezione per meritarsi l' aggettivo "**Aureo"**? Lo scopriremo attraverso le sue proprietà. Restando nella Geometria ne ricaviamo immediatamente una: *"Ogni segmento è sezione aurea della sua somma con la sua sezione aurea"*; ed in effetti questo è quanto sopra si è dimostrato. Ne segue che: *"Tolta la sezione aurea la parte rimanente di un segmento è la sezione aurea della sezione aurea del segmento"*. E' come se la sezione aurea si autorigenerasse per sottrazione o addizione.

Ma scopriamone altre caratteristiche. Sempre in Geometria una delle più importanti caratteristiche della Sezione Aurea è la seguente: *"Se in un triangolo isoscele la base è la sezione aurea del lato allora l' angolo al vertice è un quinto dell' angolo piatto, ovvero la base è il lato del decagono regolare inscritto nel cerchio che ha per raggio il lato"*.



La dimostrazione è relativamente semplice: nel triangolo **CAB** isoscele sulla base **a**, sezione aurea del lato **b**, si individui per costruzione il punto **M** sul lato **AC** tale che **MB = CB**; il triangolo **MBC** è isoscele e simile al triangolo originario, quindi con i lati in proporzione: **b : a = a : CM**. Ma essendo **a** la sezione aurea di **b** sarà: **b : a = a : (b-a)**, da cui per l' unicità del quarto proporzionale sarà: **CM = (b-a)**, da cui **AM = a**; quindi anche il triangolo **AMB** è isoscele avendo **AM = BM = a**; gli angoli alla sua base sono pertanto uguali e l' angolo in **M** è uguale a $\pi - 2 \cdot \theta$. Ne segue che $\gamma = 2 \cdot \theta$; quindi, essendo $\theta + 2 \cdot \gamma = \pi$, sarà $\theta + 4 \cdot \theta = \pi$, cioè $5 \cdot \theta = \pi$ quindi $\theta = \pi / 5$; ma essendo $\pi / 5$ un decimo dell' angolo giro, ne discende che la base del triangolo è il lato del decagono regolare inscritto nel cerchio che ha per raggio il lato.

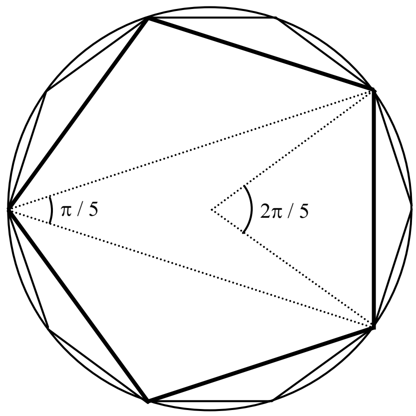


E' vero anche l' inverso, cioè *"se in un triangolo isoscele l' angolo al vertice è di* $\pi/5$ *allora la base è la sezione aurea del lato"* . Se infatti nel triangolo **CAB** isoscele sulla base **a** l' angolo al vertice è di $\pi/5$, essendo la somma degli angoli interni pari a π ed essendo gli angoli alla base uguali, questi saranno di $2 \cdot \pi / 5$. Individuando per costruzione il punto **M** sul lato **AC** tale che **MB = CB**, ne segue che il triangolo **MBC** è isoscele e simile al triangolo originario quindi con i lati in proporzione:

AC : CB = CB : MC.

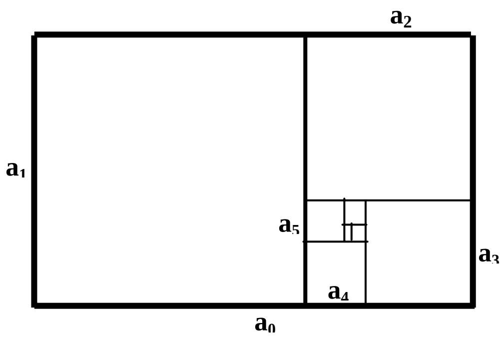
Anche il triangolo **BMA** sarà isoscele avendo gli angoli alla base **AB** uguali; sarà quindi: **MA = MB = CB**, e quindi: **MC = (AC – MA) = (AC – CB)**, che sostituita nella proporzione precedente verifica che la base **CB** è la sezione aurea del lato **AC.**

Collegando alternativamente i vertici del decagono si ottiene il pentagono regolare inscritto nel cerchio; tracciatone due diagonali dallo stesso vertice, essendo l' angolo alla circonferenza metà di quello al centro di **2π/5,** si ripropone con il lato opposto al vertice il triangolo isoscele con angolo al vertice di **π/5**; ne segue che in un pentagono regolare il lato è la sezione aurea della diagonale.



Si può altresì dimostrare che le diagonali si intersecano secondo le loro sezioni auree. Per questi motivi alla stella a cinque punte disegnata dalle diagonali di un pentagono venivano riconosciuti poteri magici. Ricordiamo il Faust di Goethe: quando il dottor Faust volendosi liberare del diavolo Mefistofele lo invita ad uscire, questi si rifiuta, poiché sulla porta è appesa una stella a cinque punte, dicendo: “Non posso uscire; me lo impedisce un piccolo ostacolo: il piede della strega sulla soglia”.

Un' altra caratteristica: un rettangolo abbia il lato maggiore $\mathbf{a_o}$ di lunghezza compresa tra quella del lato minore $\mathbf{a_1}$ ed il doppio di questa: $\mathbf{a_1 < a_o < 2 \cdot a_1}$. E' allora possibile ritagliare dal rettangolo un quadrato di lato pari al lato minore $\mathbf{a_1}$; resta un rettangolo con il lato maggiore di lunghezza $\mathbf{a_1}$ e di lato minore $\mathbf{a_2 = a_0 - a_1}$. Se $\mathbf{a_2 < a_1 < 2 \cdot a_2}$ si può ritagliare un quadrato di lato $\mathbf{a_2}$ in modo da ottenere un rettangolo con il lato maggiore di lunghezza $\mathbf{a_2}$ e di lato minore $\mathbf{a_3 = a_1 - a_2}$. Se $\mathbf{a_3 < a_2 < 2.a_3}$ si può ritagliare un quadrato di lato $\mathbf{a_3}$ in modo da ottenere un rettangolo con il lato maggiore di lunghezza $\mathbf{a_3}$ e di lato minore $\mathbf{a_4 = a_2 - a_3}$.



E così via finché si ottengono rettangoli con il lato maggiore compreso tra una e due volte il lato minore; prima o poi però si verifica che questa condizione non è più soddisfatta ed il processo si arresta. Ci si chiede se esiste un valore del rapporto tra base ed altezza del rettangolo originario per il quale il processo non si arresta mai. Per ottenere un' espressione ricorsiva per $\mathbf{a_n}$ definiamo due grandezze **A** e **B**, legate ad $\mathbf{a_0}$ ed $\mathbf{a_1}$ attraverso due costanti φ_1 e φ_2 soluzioni dell' equazione:

$$\varphi^2 = \mathbf{1 - \varphi}, \quad \text{cioè:} \quad \mathbf{0 < \varphi_1 = (\sqrt{5} - 1)/2 < 1} \quad \text{e} \quad \varphi_2 = \mathbf{-(\sqrt{5} + 1)/2 < -1}$$

Quindi siano **A** e **B**, soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{A + B = a_0} \\ \mathbf{\varphi_1 A + \varphi_2 B = a_1} \end{cases}$$

Siano cioè:

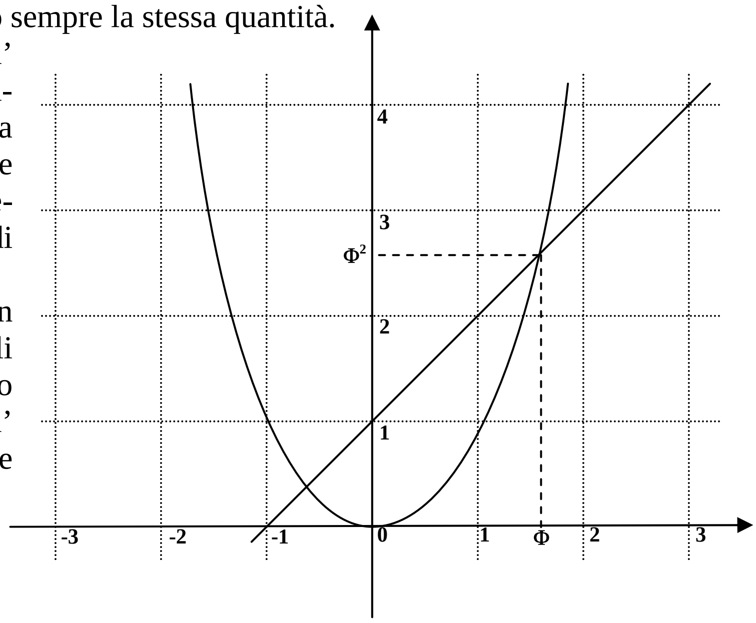
$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{(a_0 \varphi_2 - a_1)}}{\mathbf{(\varphi_2 - \varphi_1)}} \qquad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{(a_1 - a_0 \varphi_1)}}{\mathbf{(\varphi_2 - \varphi_1)}}$$

In questo modo saranno:

$\mathbf{a_0} = \mathbf{A + B = A\,\varphi_1^0 + B\,\varphi_2^0}$
$\mathbf{a_1 = A\,\varphi_1 + B\,\varphi_2 = A\,\varphi_1^1 + B\,\varphi_2^1}$
$\mathbf{a_2 = a_0 - a_1 = A\,(1 - \varphi_1) + B\,(1 - \varphi_1) = A\,\varphi_1^2 + B\,\varphi_2^2}$
$\mathbf{a_3 = a_1 - a_2 = A\,(1 - \varphi_1^2) + B\,(1 - \varphi_1^2) = A\,\varphi_1^3 + B\,\varphi_2^3}$
. . . . .
$\mathbf{a_n = a_{n-2} - a_{n-1} = A\,(1 - \varphi_1^{n-1}) + B\,(1 - \varphi_1^{n-1}) = A\,\varphi_1^n + B\,\varphi_2^n}$

Perché si possa procedere con i tagli all' infinito occorre che gli $\mathbf{a_n}$ siano tutti positivi; ma essi sono somma di due addendi dei quali uno è sempre positivo ($\mathbf{A}\cdot\varphi_1^n$) e minore di **A**, l' altro ($\mathbf{B}\cdot\varphi_2^n$) è alternativamente positivo e negativo, secondo il valore di **n**, maggiore di **B** e crescente con **n** in valore assoluto (essendo $|\varphi_2| > \mathbf{1}$) per cui per ottenere valori di $\mathbf{a_n}$ tutti positivi occorre che sia $\mathbf{B = 0}$, cioè occorre che sia $\mathbf{a_1 = \varphi_1\,a_0}$. Quindi perché si possa procedere all' infinito con i tagli occorre che l' altezza del rettangolo sia la Sezione Aurea della base, come vedremo nel prossimo paragrafo.

Ancora: in un diagramma cartesiano un retta di equazione: $\mathbf{y = x + 1}$ rappresenta una crescita lineare, cioè una crescita nella quale l' incremento si ottiene "sommando" a quanto raggiunto sempre la stessa quantità.
Una crescita invece in cui l' incremento si ottiene moltiplicando quanto raggiunto per una quantità a questo proporzionale si dice quadratica ed è rappresentato da una parabola di equazione: $\mathbf{y = x^2}$.
I due diagrammi si incontrano in un punto **P** che determina con gli assi cartesiani un rettangolo aureo, quasi a significare l' equilibri tra una crescita lineare ed una crescita quadratica.



In Matematica

Per analogia con la Geometria, dato un numero **u** trattasi di trovare il medio proporzionale **x** tra il numero dato e la sua differenza **u-x** con questo medio proporzionale; in pratica trattasi di risolvere l' equazione:

$$\boxed{u : x = x : (u-x)} \quad \text{ovvero} \quad \boxed{x^2 = u^2 - ux} \quad \text{quindi} \quad \boxed{x^2 + ux - u^2 = 0}$$

che ha due soluzioni:

$$x_1 = u\,\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$x_2 = -u\,\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

scartando la soluzione negativa si ricava che il rapporto tra il medio proporzionale **x** ed il numero **u** vale:

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \varphi = 0{,}6180339887498948482045 86\ldots$$

che ovviamente è un numero irrazionale (ma non trascendente). Viceversa il rapporto tra il medio proporzionale **x** ed il numero **u** vale:

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \Phi = 1{,}6180339887498948482045 86\ldots$$

La denominazione di **Rapporto Aureo** viene talora data alla prima (φ), talora alla seconda (Φ). E' facile mostrare che tra le due vale la relazione: $\Phi = 1 + \varphi$.
Vale altresì la relazione:

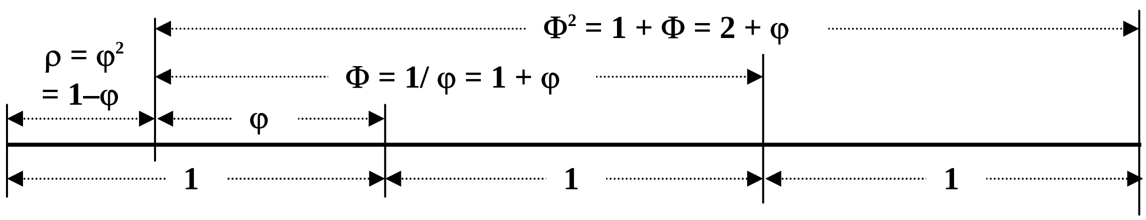
$$\Phi^2 = \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \Phi$$

ovvero: $\boxed{\Phi = \Phi^2 - 1}$

quindi: $\Phi = \sqrt{1 + \Phi} \quad \sqrt{1 + \sqrt{1 + \Phi}} = \ldots = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}$

Cioè Φ ha il valore della cosiddetta radice continua.
E' facile anche mostrare che, per una nota proprietà delle proporzioni, la differenza $\rho = u - x$ è in rapporto aureo con **x**, e che $\varphi^2 = \rho$.

Graficamente possiamo rappresentare così le relazioni tra **1,** ρ, φ e Φ:



La successione di Fibonacci.

Le successioni numeriche sono sequenze infinite di numeri, casuali o determinati. Le successioni casuali possono essere studiate solo statisticamente. Le successioni determinate sono quelle nelle quali è stabilita una regola che determina il valore di ogni elemento data la sua posizione nella successione.
Le più classiche successioni determinate sono le progressioni aritmetiche (quelle nelle quali ogni elemento è ottenuto dal precedente sommandogli un numero fisso detta ragione) e quelle geometriche (nelle quali ogni elemento è ottenuto dal precedente moltiplicato per un numero fisso, detto anche qui ragione).
Altri esempi di successioni determinate sono quelle nelle quali ogni elemento è funzione della sua posizione.
Tra le successioni determinate vi sono le ricorrenti, quelle nelle quali ogni elemento è funzione dei precedenti. La successione di Fibonacci è una successione ricorrente di numeri naturali: dati in qualsivoglia modo i primi due elementi, ogni altro elemento è la somma dei due precedenti. Ad ogni coppia di elementi iniziali corrisponde quindi una successione differente.
In verità la successione di Fibonacci fu da questi definita assumendo il numero **1** per i primi due elementi; la successione infatti rispondeva al seguente problema: "*Quante coppie di conigli ci saranno dopo n mesi a partire da un' unica coppia immatura, se ogni coppia diventa matura per la procreazione dopo un mese dalla nascita e genera ogni mese una nuova coppia?*" La risposta è evidentemente la successione:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, …

Questa successione ha molte curiose proprietà; ne riportiamo alcune:

- Ogni **due** numeri ve n'è uno divisibile per **due**, ogni **tre** numeri ve n'è uno divisibile per **tre**, ogni **quattro** numeri ve n'è uno divisibile per **cinque**, …,ogni **n** numeri vi è o un numero primo o un numero divisibile per lo stesso numero primo.
- Comunque si prendano due elementi, in posizione **n**-esima ed **m**-esima, il loro Massimo Comun Divisore è un elemento della successione di posizione **p**, M.C.D. tra **n** ed **m**.
- Il quadrato di ogni elemento **differisce** di **uno** (alternativamente in più o in meno) dal prodotto del precedente per il successivo.
- Sommando alternativamente gli elementi della successione (uno sì ed uno no) il risultato è sempre l' elemento successivo all' ultimo sommato.

ed altre ancora per le quali si rimanda alle numerose trattazioni specifiche sull' argomento. Ma sopra tutte ha rilevanza la proprietà che segue, che mette in relazione la successione con il Rapporto Aureo.
La successione di Fibonacci è divergente (tende all' infinito al crescere di n) ma il rapporto tra un qualsiasi elemento $\mathbf{f_n}$ ed il precedente $\mathbf{f_{n-1}}$ tende a Φ al tendere di **n** all' infinito cioè:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \Phi \qquad \text{ovvero} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{1}{\Phi} = \varphi$$

Infatti per la proprietà di Φ per cui: $\Phi = 1 + \varphi = 1 + \dfrac{1}{\Phi}$ si ha:
cioè Φ ha il valore della cosiddetta frazione continua:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\Phi}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\Phi}}}} = \dots$$

Per altra via il rapporto tra due elementi consecutivi di una successione di Fibonacci, essendo $\mathbf{f_{n+1} = f_n + f_{n-1}}$, sarà:

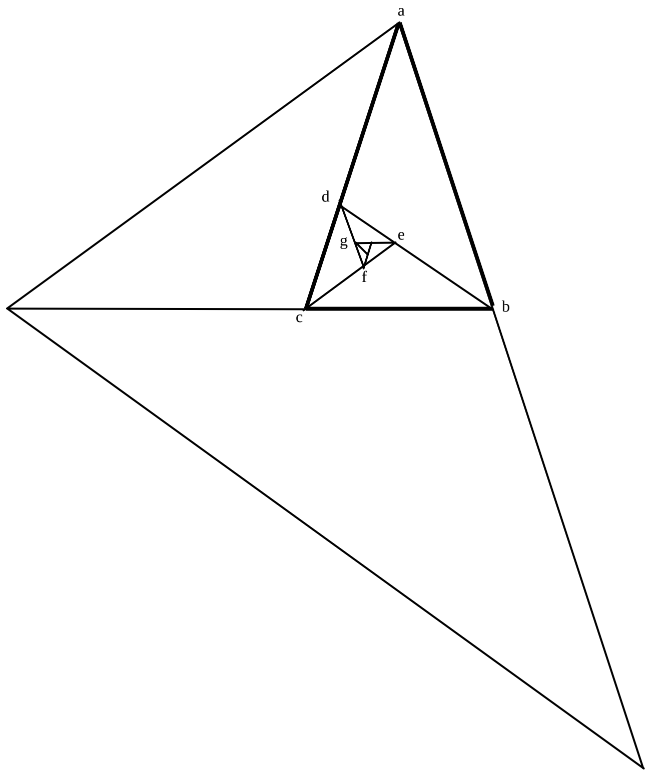
$$\mathbf{R} = \frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{f_n}{f_{n-1}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{f_{n-1}}{f_{n-2}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{f_{n-2}}{f_{n-3}}}}} = \dots$$

al tendere quindi di n all' infinito, anche il rapporto tra due elementi consecutivi di una successioni di Fibonacci tende alla frazione continua cioè a **Φ** .
Non avendo utilizzato ipotesi sui primi due numeri questa proprietà vale per ogni successione di Fibonacci, cioè qualunque siano i primi due numeri. Lo verifichiamo per la successione originaria e per una generalizzata, assumendo per i primi due elementi casualmente i numeri **27** e **33** :

1^ Successione			2^ Successione	
f_n	f_n/f_{n-1}		f_n	f_n/f_{n-1}
1			**27**	
1	1,00000000		**33**	1,22222222
2	2,00000000		**60**	1,81818182
3	1,50000000		**93**	1,55000000
5	1,66666667		**153**	1,64516129
8	1,60000000		**246**	1,60784314
13	1,62500000		**399**	1,62195122
21	1,61538462		**645**	1,61654135
34	1,61904762		**1044**	1,61860465
55	1,61764706		**1689**	1,61781609
89	1,61818182		**2733**	1,61811723
144	1,61797753		**4422**	1,61800220
233	1,61805556		**7155**	1,61804613
377	1,61802575		**11577**	1,61802935
610	1,61803714		**18732**	1,61803576
987	1,61803279		**30309**	1,61803331
1597	1,61803445		**49041**	1,61803425
2584	1,61803381		**79350**	1,61803389
4181	1,61803406		**128391**	1,61803403
6765	1,61803396		**207741**	1,61803397
…	…		**…**	…

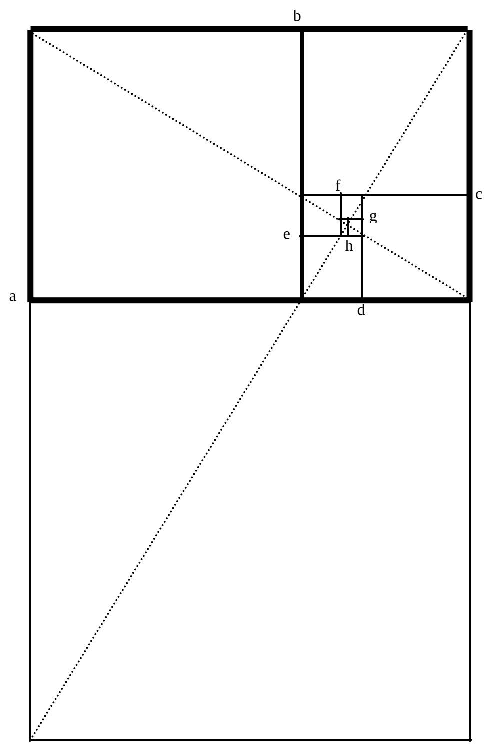
da cui si vede che il rapporto converge molto rapidamente e dopo alcuni elementi approssima già ottimamente **Φ.**

La spirale logaritmica

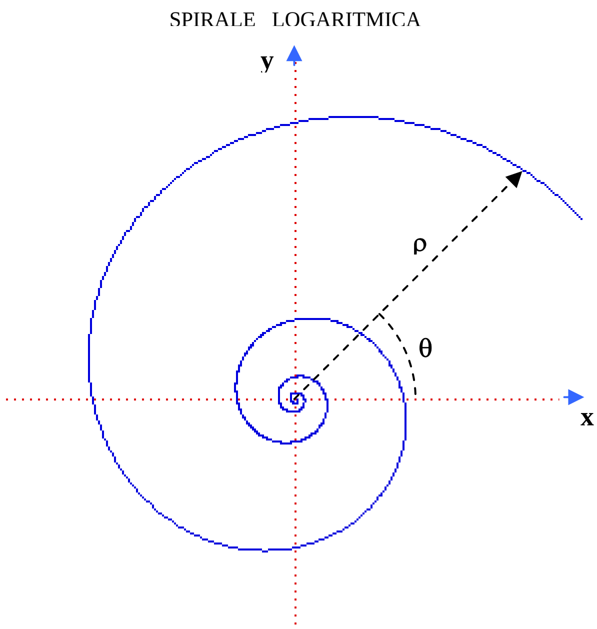


Un passo indietro: ritorniamo al triangolo isoscele con angolo al vertice di $\pi/5$, che chiameremo **Triangolo Aureo**. Abbiamo visto che tracciando la bisettrice di un angolo alla base questa interseca il lato opposto in un punto che lo divide nel Rapporto Aureo e si determina così un secondo triangolo simile al primo; con la stessa operazione su questo secondo si può determinare un terzo triangolo simile al secondo e così via ottenendo triangoli sempre più piccoli ma sempre simili tra loro. In modo analogo prolungando la base per un tratto uguale al lato e congiungendo l' estremo con il vecchio vertice, si ottiene un nuovo triangolo maggiore del primo e ad esso simile, sul quale si può operare la stessa costruzione per ottenere un triangolo ancora più grande ma ancora simile ai precedenti e così via ottenendo triangoli sempre più grandi. Se la costruzione dei triangoli avviene sempre dallo stesso lato i punti di sezione dei lati (i punti a, b, c, d, e, f,… nel disegno in figura) giacciono tutti su una famosa curva: una **Spirale Logaritmica**.

Analogamente per il **Rettangolo Aureo**: abbiamo visto che in un tale rettangolo, in cui il lato minore è la sezione aurea di quello maggiore, risecando un quadrato di lato pari al lato minore, si ottiene un rettangolo più piccolo simile al primo, quindi aureo, dal quale risecando un quadrato dal lato minore si ottiene un terzo rettangolo ancora più piccolo, simile ai precedenti, quindi aureo anch' esso; e così via ottenendo rettangoli aurei sempre più piccoli. Analogamente costruendo sul lato maggiore del primo rettangolo un quadrato, questo insieme al primo rettangolo determina per le note proprietà della sezione aurea, ancora un rettangolo aurea sul quale operando analogamente si ottiene un rettangolo aureo ancora più grande e così via all' infinito. Se la costruzione dei rettangoli avviene sempre dallo stesso lato i punti di sezione (i punti a, b, c, d, e, f,… nel



disegno in figura a fianco) giacciono tutti su una **Spirale logaritmica**, con il polo nell' incrocio tra la diagonale comune ai rettangoli orizzontali con quella comune ai rettangoli verticali; anzi questa particolare spirale logaritmica è appunto detta **Spirale Aurea**.



La spirale logaritmica è una delle curve più famose e fu probabilmente considerata già dagli antichi egizi; lo fu certamente dagli antichi greci, ma occorre attendere il 17° secolo per una prima rigorosa definizione ed un approfondito studio delle sue proprietà.

Fu appunto Descartes nel 1638 che ne diede una prima definizione. Qualche anno dopo Torricelli la studiò scoprendone una delle più sorprendenti caratteristiche, come vedremo nel seguito.

Ma più di tutti l' ammirò Jacob Bernoulli definendola "*Spira mirabilis*" (spirale meravigliosa), disponendo che fosse scolpita sulla tomba con la frase "*Eadem mutata resurgo*" (sebbene cambiata, ritorna come prima),sebbene poi la spirale che oggi appare sulla sua tomba sia in realtà una spirale di Archimede; forse lo scalpellino non faceva differenza o per lui la logaritmica era troppo difficile.

La curva può essere definita in vari modi. Cominciamo col definire una spirale come ogni curva che in coordinate polari è rappresentata da una equazione del tipo $\rho = \mathbf{f}\ (\theta)$**,** con **f** funzione monotòna (sempre crescente o sempre decrescente).

Il segmento tra l' origine e un punto qualsiasi della curva è detto raggio vettore.

Quindi la logaritmica è una spirale:

1) nella quale per angoli in progressione aritmetica i raggi vettore sono in progressione geometrica (per questo talvolta è riferita come spirale <u>geometrica</u>);
2) nella quale per ogni suo punto è costante l' angolo tra la tangente alla curva in quel punto ed il raggio vettore (per questo talvolta è riferita come spirale <u>equiangolare</u>).
3) che taglia ogni semiretta con origine in **O** in segmenti nella stessa proporzione tra loro (e per questo talvolta è riferita come spirale <u>proporzionale</u>).

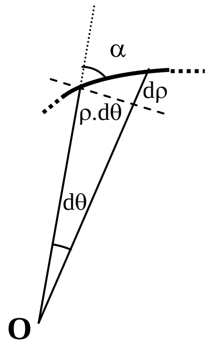
Ma la più ricca di fantasia è la definizione che la vuole "*traiettoria di un punto che si muove su una semiretta con velocità proporzionale alla distanza dall' origine, mentre la semiretta ruota uniformemente intorno alla sua origine*"; ricorda un po' la definizione del logaritmo data dal suo inventore Neper, e forse anche per questo è riferita come spirale <u>logaritmica</u>.

E’ ovvio che ciascuna di queste definizione identifica univocamente la curva ed assunta una di esse come definizione le altre diventano proprietà dimostrabili della curva.
Si nota che la curva esegue infinite evoluzioni intorno al suo polo sia verso l’ infinitamente grande che verso l’ infinitamente piccolo.
Ma veniamo alla sua equazione: partendo dalla definizione **1)**, indicando con **a** il valore del raggio vettore per $\theta = 0$, l’ equazione della curva sarà: $\rho = \mathbf{a} \cdot \mathbf{p}^{\theta}$, ovvero ponendo: $\mathbf{q} = \mathbf{p}^{2\pi}$, cioè $\mathbf{p} = \mathbf{q}^{1/2\pi}$:

$$\boxed{\rho = a \cdot q^{\theta/2\pi}}$$

dove il coefficiente **q** è detto indice di accrescimento e rappresenta il fattore di cui cresce il raggio vettore ad ogni evoluzione della curva (θ che varia di 2π).
Ponendo invece: $\mathbf{b} = (\ln q) / 2.\pi$ l’ equazione diventa:

$$\boxed{\rho = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^{\,b \cdot \theta}}$$



più diffusa della precedente e nella quale il parametro **b** ha un significato ben preciso: infatti, con riferimento anche al disegno a fianco si ha che:

$$\mathbf{cotg}\ \alpha = d\rho / \rho\, d\theta = a \cdot b \cdot e^{b\theta}\, d\theta \;/\; a \cdot e^{b\theta}\, d\theta = b$$

è cioè la cotangente dell’ angolo formato dalla tangente alla curva con il raggio vettore.
Quindi più che geometrica, equiangolare, proporzionale o logaritmica, la nostra spirale dovrebbe chiamarsi <u>esponenziale</u>.

Molte sono le proprietà di questa curva, alcune sorprendenti, come quella scoperta da Torricelli secondo la quale, sebbene la curva compia infinite evoluzioni intorno al suo polo d’ origine, la lunghezza dell’ arco di curva da ogni punto fino all’ origine è finita. Oggi lo si può facilmente dimostrare con l’ ausilio del calcolo infinitesimale senza ricorrere alle complesse costruzioni geometriche cui era costretto, in mancanza, il suo scopritore. Sappiamo infatti che, disponendo dell’ equazione parametrica, la lunghezza di un arco di curva tra due valori τ_1 e τ_2 del parametro è :

$$s = \int_{\tau_2}^{\tau_1} \sqrt{x'^2 + y'^2}\; d\theta$$

nel nostro caso, utilizzando come parametro proprio l’ angolo θ, l’ equazione parametrica è :

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta = a \cdot \cos\theta \cdot e^{b\theta} \\ y = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta = a \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot e^{b\theta} \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} x' = -\,a \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot e^{b\theta} + a \cdot b \cdot \cos\theta \,.\, e^{b\theta} = -\,y + b \cdot x \\ y' = a \cdot \cos\theta \,.\, e^{b\theta} + a \cdot b \cdot \cos\theta \cdot e^{b\theta} = -\,x + b \cdot y \end{cases}$$

Quindi:

$$s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\; d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{y^2 - 2bxy + b^2x^2 + x^2 + 2bxy + b^2y^2}\; d\theta =$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(x^2 + y^2) \cdot (b^2 + 1)}\ d\theta = \sqrt{b^2 + 1} \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} a \cdot e^{b\,\theta}\ d\theta = \frac{a\sqrt{b^2 + 1}}{b} \left[e^{b\,\theta}\right]_{\theta_1}^{\theta_2} =$$

$$= \frac{a\sqrt{b^2 + 1}}{b} \left[e^{b\,\theta_2} - e^{b\,\theta_1}\right]$$

essendo: $\sqrt{x^2 + y^2} = \rho = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^{b\,\theta}$.

Per $\theta_1 \to -\infty$, $\mathbf{e}^{b\,\theta_1} \to \mathbf{0}$, quindi l' integrale per $\theta_2 = \theta$, tende al valore finito:

$$s = \frac{\sqrt{b^2 + 1}}{b}\, a\, e^{b\,\theta} = \frac{\sqrt{b^2 + 1}}{b}\, \rho$$

che, ricordando che: $\mathbf{b = cotg}\ \alpha$, per una nota formula trigonometrica può essere scritta semplicemente:

$$\boxed{s = \rho \cos \theta}$$

cioè la lunghezza di un arco di spirale logaritmica dall' origine ad un suo punto è proporzionale al raggio vettore in quel punto, essendo il coefficiente di proporzionalità semplicemente il coseno dell' argomento θ in quel punto.

Tante sono le proprietà di questa curva; ne ricordiamo solo alcune:

- la sua evoluta è ancora una spirale logaritmica, quindi anche la sua involuta;
- la sua pedale rispetto al polo è una spirale ad essa uguale;
- la sua inversa è ancora una spirale logaritmica;
- la sua radiale è la spirale stessa moltiplicata per un coefficiente di scala,

che spiegano l' esclamazione di Bernoulli.

Ma torniamo alla sezione aurea da cui siamo partiti: l' equazione della spirale ha due parametri dei quali il primo (**a**) è poco significativo, mentre il secondo (**b**) determina significativamente l' evoluzione della curva. Ci proponiamo di determinare il valore di **b** per la Spirale Aurea; in questa quando i raggi vettore formano angoli di $\pi/2$ il loro rapporto è aureo, cioè :

$$\rho(\theta) = a \cdot e^{b\,\theta}\ ;\ \rho(\theta + \pi/2) = a \cdot e^{b(\theta + \pi/2)} = a \cdot e^{b\,\theta} \cdot e^{\pi/2}$$

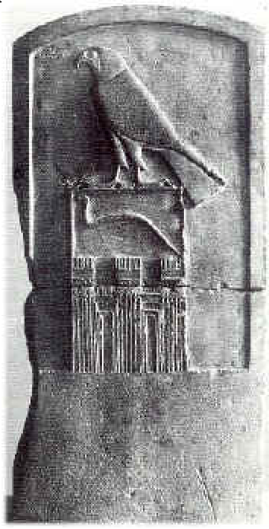
Allora:
$$\frac{\rho(\theta + \pi/2)}{\rho(\theta)} = \frac{a \cdot e^{b\,\theta} \cdot e^{b \cdot \pi/2}}{a \cdot e^{b\,\theta}} = e^{b \cdot \pi/2} = \Phi$$

Quindi per la spirale aurea il coefficiente **b** vale:
$$b = \frac{\ln \Phi}{\pi/2}$$

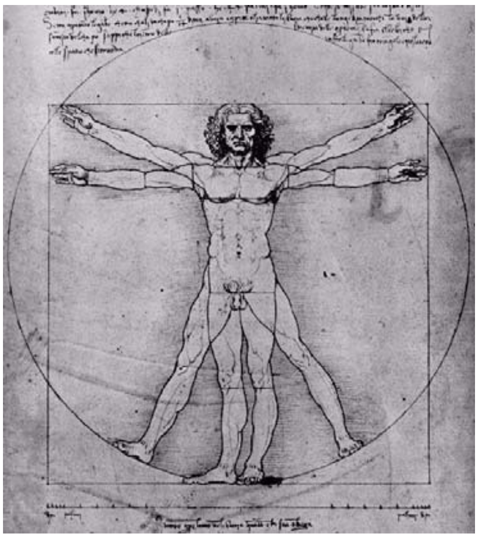
cioè la spirale aurea mette in relazione la nostra costante con le altre due costanti più significative della matematica: **e** e π.

Il Rapporto Aureo nell’ Arte e in Natura

Il Rapporto Aureo ha avuto ed ha ancora grandi applicazioni nei progetti dell’ uomo.



Storicamente le prime applicazioni del Rapporto Aureo risalgono agli antichi Egizi. Nella stele del re Get, proveniente da Abido (antica capitale dell’ Egitto nel periodo predinastico) ed oggi al Louvre, si osserva al centro un rettangolo aureo, nella cui parte bassa il quadrato costruito sul lato più corto, sezione aurea di quello più lungo, contiene la città mentre nella parte rimanente, che per quanto visto sopra è ancora un rettangolo aureo, è riportato il serpente simbolo del re. Il reperto risalirebbe alla prima dinastia, quindi a quasi 5000 anni fa. La sezione aurea fu anche applicata nella costruzione delle piramidi (**vedasi Appendice 2**).
Ma i veri cultori della Sezione Aurea furono gli antichi Greci, ai quali si deve la denominazione di aurea: nel *Timeo* Platone sostiene che i tre termini di una proporzione divina - il più grande (la linea intera), quella di mezzo (il segmento più lungo) e la più piccola (il segmento più corto) - sono "tutti di necessità gli stessi, e, poiché sono gli stessi, non sono che uno".
Il Partenone di Atene, il più celebre dei monumenti ellenici, contiene molti rettangoli aurei. Ne deriva un aspetto armonico, che ispira una profonda sensazione di equilibrio. Il simbolo Φ è stato dato al Rapporto Aureo proprio in onore del grande Fidia, progettista dell’ opera, che ne fece un canone estetico.
Ma il vero trionfo della sezione aurea nell’ arte si ebbe nel Rinascimento quando rappresentò per tutti gli artisti di quel periodo un canone di bellezza cui ispirasi per ogni composizione artistica dall’ architettura alla scultura, alla pittura. Più di tutti contribuì a questa concezione l’ opera di Luca Pacioli (vedasi **Appendice 1**) “La Divina Proportione”, stampata e diffusa in tutta Europa, incentrata proprio sulla proporzione come chiave universale per penetrare i segreti della bellezza ma anche della natura; ed al centro è collocato l’ uomo, misura di ogni cosa, sospeso tra un quadrato ed un cerchio nell’ “Uomo Vitruviano”, il celebre disegno di Leonardo. E tra tutte le possibili proporzioni, quella aurea sembra essere la vera ispiratrice della bellezza, quindi del creato, quindi del Suo creatore, quindi Divina.



In effetti la proporzione aurea sembra trasmettere un senso di armonico equilibrio; è stata condotta una ricerca mostrando a più persone vari rettangoli

con diversi rapporti tra i lati, chiedendo poi di indicare quale rettangolo avesse destato in loro una maggiore sensazione di armonia; la preferenza per il rapporto aureo ha confermato l' intuizione degli antichi artisti. I teorici dell' arte parlano del rapporto aureo come rispondente ad un principio di "simmetria dinamica".
Anche la musica non sfugge al fascino del rapporto aureo. Anzitutto le note: una scala completa (compreso il **do** della scala successiva) si compone di **5** diesis e **8** note, per un totale di **13** toni, e questi sono numeri di Fibonacci. Quindi il rapporto tra i toni dei **Do** di due scale successive è **2/1**, il rapporto tra il tono di **Do** e quello di **Sol** è con ottima approssimazione **2/3** (per la precisione 0,7491…, la famosa *diapente* greca), il rapporto tra il **Do** ed il **Fa** è con buona approssimazione **3/5** (precisamente 0,6674…, detta *sesta maggiore*) ed il rapporto tra il **Mi** ed il **Do** successivo (**Do**$_2$), è circa **5/8** (per la precisione 0,629…, detta *sesta minore*, complementare della *terza maggiore* **Do-Mi**), e così via; e questi sono rapporti tra numeri di Fibonacci. Infine un ambiente d' ascolto, ma anche una cassa acustica, minimizzerà le risonanze se le dimensioni sono in rapporto aureo tra loro.
Ancora oggi la sezione aurea è ampliamente utilizzata: le dimensioni standard di carte di credito, tessere telefoniche, badge per ogni applicazione, corrispondono (salvo tolleranze di fabbricazione) al rettangolo aureo.
Ma la sezione aurea si insinua anche nei regni della Natura e, come **e** e π, $\mathbf{\Phi}$ è uno di quei misteriosi numeri naturali che sembrano essere alla base della struttura del cosmo.
Uno dei più classici esempi è il Nautilus, un mollusco dei mari tropicali; la sua conchiglia, sezionata, è una spirale aurea. Tra l' altro il Nautilus viene considerato letteralmente un fossile vivente, essendo la sua specie antichissima; ha avuto quindi tutto il tempo per perfezionarsi; che sia nel perfetto equilibrio delle sue forme il segreto di tanta longevità?
Anche nel corpo umano troviamo rapporti aurei: l' ombelico è posto ad un' altezza che è in rapporto aureo con quella dell' individuo con una tolleranza di qualche percento.
Ma è nei fiori, più che altrove, che la natura ha voluto ricordarci la sua sapienza matematica. Le varie specie di margherite e girasoli hanno petali in numero della successione di Fibonacci che abbiamo visto legata al rapporto aureo.
Le curve che si osservano in pigne ed ananas sono spirali logaritmiche, legate anch' esse alla sezione aurea.
Ed ancora secondo spirali logaritmiche si succedono gli stami nelle corolle di margherite e girasoli.
Nel firmamento molte galassie hanno forma a spirale. Osservando attentamente le spirali sono logaritmiche; è presumibile che tali siano le traiettorie delle stelle attratte al centro della galassia. Ma quale forza imprime una tale traiettoria dal momento che tutte le forze a noi note comportano solo traiettorie coniche (ellissi, parabole o iperboli)?
Ma questi sono temi di altre discipline.

Appendice 1: Luca Pacioli

Luca Pacioli nacque nel 1445 in Toscana a Sansepolcro, città commerciale posta al centro, nello spazio e nel tempo, del Rinascimento. Sebbene si conosca poco della sua infanzia e fanciullezza, si suppone con ragionevole certezza che il Pacioli abbia ricevuto almeno in parte i primi insegnamenti presso lo studio di Piero della Francesca, che in Sansepolcro aveva studio e laboratorio, e ciò per la conoscenza che Egli aveva del lavoro del Maestro e per l' influenza che Questi ebbe sulle sue opere.
Lasciò Sansepolcro ancora giovane per andare al servizio di Rompiansi, un ricco commerciante veneziano, ed è da presumere che avesse già una discreta preparazione, specialmente in Matematica, visto che fu scelto come tutore dei figli. Pacioli colse l' opportunità della presenza a Venezia del grande matematico Bragadino per continuare sotto il suo insegnamento gli studi Matematici. In questo periodo ebbe anche la possibilità di fare esperienza come tutore nell' insegnamento e di imparare la contabilità, aiutando l' impresa commerciale del Rompiansi. Durante questo periodo scrisse anche il suo primo lavoro, un libro di aritmetica che dedicò al suo datore di lavoro. Questo fu completato nel 1470, ma nello stesso anno il Rompiansi morì e Pacioli si trasferì a Roma dove dimorò presso un altro grande di quel periodo, Leon Battista Alberti, che all' epoca era segretario della cancelleria papale. A Roma Pacioli studiò teologia e dopo qualche anno divenne frate dell' ordine dei Francescani.
Dal 1477 Fra Luca Pacioli cominciò a viaggiare insegnando matematica in quasi tutte le Università italiane: dal 1477 al 1480 insegnò a Perugia e qui scrisse il suo secondo lavoro con scopo prevalentemente didattico. Quindi insegnò a Zara (che all' epoca faceva parte della Repubblica di Venezia) e qui scrisse un suo terzo libro di aritmetica. Di queste opere ci resta solo una copia della seconda, trascritta per uno studente di Perugia. Dopo Zara Pacioli fu di nuovo a Perugia, quindi all' Università di Napoli ed a quella di Roma. Le migliori università e le più illuminate corti dell' epoca se lo contendevano; tra le altre frequentò anche quella dei duchi di Urbino, dove fu tutore del futuro duca Guidobaldo da Montefeltro.
Nel 1489 Pacioli tornò alla sua Sansepolcro, dove trovò ostilità e diffidenza tra i confratelli del suo ordine religioso, forse per gelosia per i privilegi concessigli dal papa; di fatto gli fu impedito di insegnare. In questo periodo lavorò al suo libro più famoso "*Summa de arithmetica, geometria, proportioni et propotionalità*" un sommario della matematica di quel tempo con molti spunti originali, che pubblicherà qualche anno dopo nel 1496 a Venezia. La parte più originale dell' opera è quella dedicata alla contabilità, dove per la prima volta viene teorizzata la "partita doppia"; sebbene probabilmente la sua non fu che una sistemazione di una tecnica già in uso presso i commercianti veneziani dell' epoca, il Pacioli per questo è universalmente riconosciuto come il padre della Ragioneria.
Quello stesso anno Pacioli fu invitato ad insegnare matematica a Milano da Ludovico Sforza, uno dei più raffinati mecenati dell' epoca, probabilmente su suggerimento di Leonardo da Vinci che da tempo era al suo servizio. A Milano Pacioli e Leonardo strinsero una profonda amicizia; li univano la passione per la Matematica e per l' Arte e dalla collaborazione entrambi ne guadagnarono reciprocamente. In quel tempo Pacioli lavorava al secondo dei suoi più famosi

lavori, la "*Divina Proporzione*" e Leonardo in persona gliene fornì le illustrazioni; penso che nessun altro matematico abbia più potuto vantare una collaborazione più eccellente. Chiaramente l' interesse prevalente di Leonardo era l' estetica e la sezione aurea soddisfaceva entrambi i punti di vista, matematico ed artistico. La divina proporzione era proprio il rapporto aureo senza il quale "…*moltissime cose de admiratione dignissime in philosophia, nè in alcun altra scientia mai a luce poteriono pervenire.*". L' ammirazione che il Pacioli aveva per questa costruzione era tale da indurlo a metterla in relazione con la Divinità come la quale è una e trina: "*Commo Idio propriamente non se po diffinire ne per parolle a noi intendere, così questa nostra proportione non se po mai per numero intendibile asegnare, nè per quantità alcuna rationale exprimere, ma sempre fia occulta e secreta e da li mathematici chiamata irrationale*".
Nel trattato si trova un pò di tutto; nel Rinascimento non vigeva ancora la specializzazione moderna del sapere e un uomo colto trattava indifferentemente astronomia, filosofia, prospettiva, pittura, musica, architettura e matematica, anche se poi inevitabilmente finiva con l' eccellere solo in alcune. L' opera fu pubblicata a Venezia nel 1509 e con la precedente "*Summa* …" contribuì alla rinascita della Scienza in Europa attraverso la riscoperta di Euclide ed Archimede con i loro metodi logico-deduttivi.
Nel 1494 l' Università di Pisa fu trasferita a Firenze e nel 1500 Pacioli vi fu chiamato ad insegnarvi Geometria, fino al 1506, salvo un breve periodo tra il 1501 ed il 1502 in cui insegnò all' Università di Bologna dove lavorò con un altro grande scienziato dell' epoca, Scipione Del Ferro, con il quale certamente collaborò per la soluzione dell' equazione cubica. Infatti Pacioli trattò del problema nella sua "*Summa* …" e subito dopo la sua permanenza a Bologna, Del Ferro risolse uno dei due casi di questo classico problema.
Durante la sua permanenza a Firenze Pacioli curò insieme alla sua Matematica anche gli interessi della Chiesa, per cui fu nominato Priore del suo ordine, quindi nel 1506 entrò nel Monastero di Santa Croce, ma poco dopo lasciò Firenze per ritornare a Venezia dove aveva concesso i diritti esclusivi alla pubblicazione delle sue opere per i successivi quindici anni. A Venezia quindi nel 1509 pubblica la sua "Divina Proportione" in tre volumi ed una traduzione in latino degli Elementi di Euclide.
Nel 1510 Pacioli ritornò di nuovo ad insegnare a Perugia, quindi di nuovo a Roma nel 1514, ma oramai era vecchio, aveva quasi 70 anni di vita intensa di docente e discente. Ritornò infine a Sansepolcro dove morì qualche anno dopo lasciando incompleto un grande lavoro "*De viribus amanuensis*" su proverbi, problemi ricreativi e problemi geometrici. In questo lavoro fa frequente riferimento all' amico Leonardo. Anche in questo lavoro non vanta alcuna originalità essendo, nelle intenzioni dell' autore, prevalentemente un compendio. Vogliamo ricordarne alcuni proverbi:

"**Dove non c' è ordine, c'è caos"**,

solo apparentemente banale; ma anche da buon esperto di economia:

"**Chi fa affari senza conoscere tutto su di essi, vedrà svanire i suoi soldi",** ed ancora:

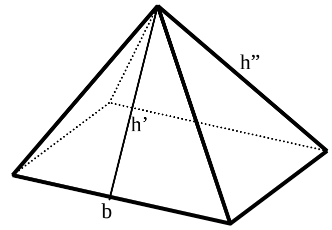
“**Ogni azione è determinata da un fine”**

anche se dopo “azione” andrebbe inserito l’ aggettivo “intelligente”; ed uno dei più famosi, spesso citato senza conoscerne la vera fonte:

“ **Chi non fa, non sbaglia; e chi non sbaglia, non impara**”.

Aveva chiesto nel suo testamento di essere sepolto a Sansepolcro e che gli fosse dedicato un monumento tombale, ma non v’ è traccia di Lui né nel borgo né nel monastero. Solo nel 1878 gli abitanti di Sansepolcro gli hanno dedicato una lapide.
Al contrario di Leonardo che ottenne fama solo dopo la morte, Pacioli ebbe fama in vita, come testimonia la sua carriera, forse meno dopo la morte.
Nel 1550 Giorgio Vasari scrisse una biografia di Piero della Francesca in cui accusava il Pacioli di plagio per aver fatto propri lavori dell’ artista sulla prospettiva sull’ aritmetica e sulla geometria. Quest’ accusa appare però ingiustificata, sebbene il Pacioli facesse ampio uso del lavoro degli altri nelle sue pubblicazioni, ma mai si accreditò alcun merito, specialmente nei confronti del Maestro Piero, riconoscendo e specificando sempre le fonti di quanto scriveva.
A dispetto però dell’ originalità, le opere del Pacioli contribuirono moltissimo allo sviluppo della Matematica per la particolare influenza che ebbero per lungo tempo.

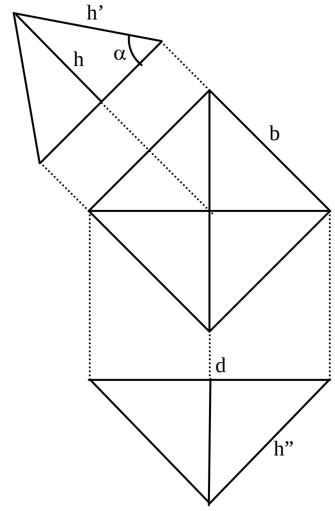
Appendice 2: **La Sezione Aurea nella Grande Piramide.**



Nella Grande Piramide le proporzioni tra le dimensioni non sono casuali; oltre che rispondere a canoni estetici, richiamano alcune tra le più importanti costanti della matematica.
Partiamo dalle misure:

- il lato di base: **b = 232 m.**
- l’ altezza della faccia laterale: **h’ = 187 m.**
- lo spigolo: **h” = 220 m.**

che supponiamo note con un errore minore di **+/- .5 m**. Le incertezze sono d’ obbligo in considerazione della indisponibilità del rivestimento esterno che solo potrebbe fornire le esatte dimensioni finali.



Si possono quindi dedurre la diagonale di base **d**:

$$\mathbf{d = \sqrt{2}\ .\ b = 1,4142\ldots\ .\ 232 = 328\ m.}$$

e l’ altezza **h**, deducibile da **h’** o da **h”**:

$$\mathbf{h = \sqrt{h'^2 - (b/2)^2} = \sqrt{34969 - 13456} = \sqrt{21513} = 146,7}$$

$$\mathbf{h = \sqrt{h''^2 - (d/2)^2} = \sqrt{48400 - 26896} = \sqrt{21504} = 146,6}$$

Con l’ imprecisione che deriva dai dati di partenza. Inoltre ogni faccia laterale forma con il piano di base (orizzontale) un angolo **a** di circa **51° 50’**; questo indicherebbe un un valore dell’ altezza **h** di:

$$\mathbf{h = (b/2) \cdot tg\ (51°\ 50') = 116 \cdot 1,272\ldots = 147,5\ldots}$$

Una **prima ipotesi** è che il progettista, fissata la base **b**, abbia scelto l’ altezza **h** tale che il perimetro di base fosse uguale alla circonferenza che ha per raggio **h** (**c = 2πh**).
In questo modo l’ altezza avrebbe un valore dato da:

$$\mathbf{4\,b = 2\pi h \;\Rightarrow\; h = 2\,\frac{b}{\pi} = \frac{4}{\pi}\,\frac{b}{2} = 1,273\ldots \cdot 116 = 147,7\ldots}$$

molto prossimo al valore stimato con le misure. Per spiegare la differenza spesso si porta a giustificazione l’ assunto secondo il quale gli antichi egizi assegnassero a π il valore **3,16**. Questa convinzione deriva dal fatto che nei pochissimi testi pervenutici in cui si trattava di matematica, si indicava tale valore per π , senza considerare lo scopo di tali testi, che probabilmente era o didattico (diretto ad allievi che oggi possiamo assimilare a studenti di scuola media) o pratico, diretto ad esempio ad agrimensori. In entrambi i casi non era conveniente per lo scopo del testo dare indicazioni molto precise sul valore della costante. E’ come se lo sviluppo della nostra civiltà venisse giudicata da un libro di scuola media. Molto più probabilmente gli esperti egizi conoscevano molto bene il valore di π con molte cifre significative; nè altrimenti potrebbe essere per una tecnologia che ha prodotto capolavori che ancora oggi stupiscono per la loro perfezione sia estetica che tecnica. Forse non era nota la natura irrazionale della costante o qualche metodo per dedurne il valore teoricamente con la precisione voluta, ma certamente tale

valore poteva facilmente essere ricavato con almeno 4 o 5 cifre significative con accurate misurazioni di raggi e circonferenze.
Si ritiene pertanto che le differenze siano piuttosto dovute all' incertezza sui dati di partenza.

Una **seconda ipotesi** vorrebbe che la metà del lato di base **b/2** sia la sezione aurea dell' altezza della faccia laterale **h'**. In questo modo l' altezza avrebbe un valore dato da:

$$\mathbf{h'} = \frac{1}{\Phi}\,\frac{b}{2} = \Phi\,\frac{b}{2} \Rightarrow \mathbf{h} = \sqrt{\left[\frac{b}{2}\right]^2 (\Phi^2 - 1)} = \frac{b}{2}\sqrt{\Phi} = 1{,}272\ldots \cdot 116 = 147{,}5\ldots$$

anch' esso molto prossimo al valore stimato con le misure e praticamente coincidente con il valore ottenuto nella prima ipotesi.
Questa seconda ipotesi appare la più plausibile per il fascino che la sezione aurea ha sempre esercitato in architettura.

Ma balena una affascinante **terza ipotesi**, che cioè gli antichi egizi conoscessero entrambe le costanti ed avessero scoperto la straordinaria coincidenza per la quale:

$$\boxed{\frac{4}{\pi} \approx \sqrt{\Phi}}$$

con una differenza minore del **.1%** ed abbiano voluto immortalare nel monumento questa scoperta.

01 / 01 divpro.doc