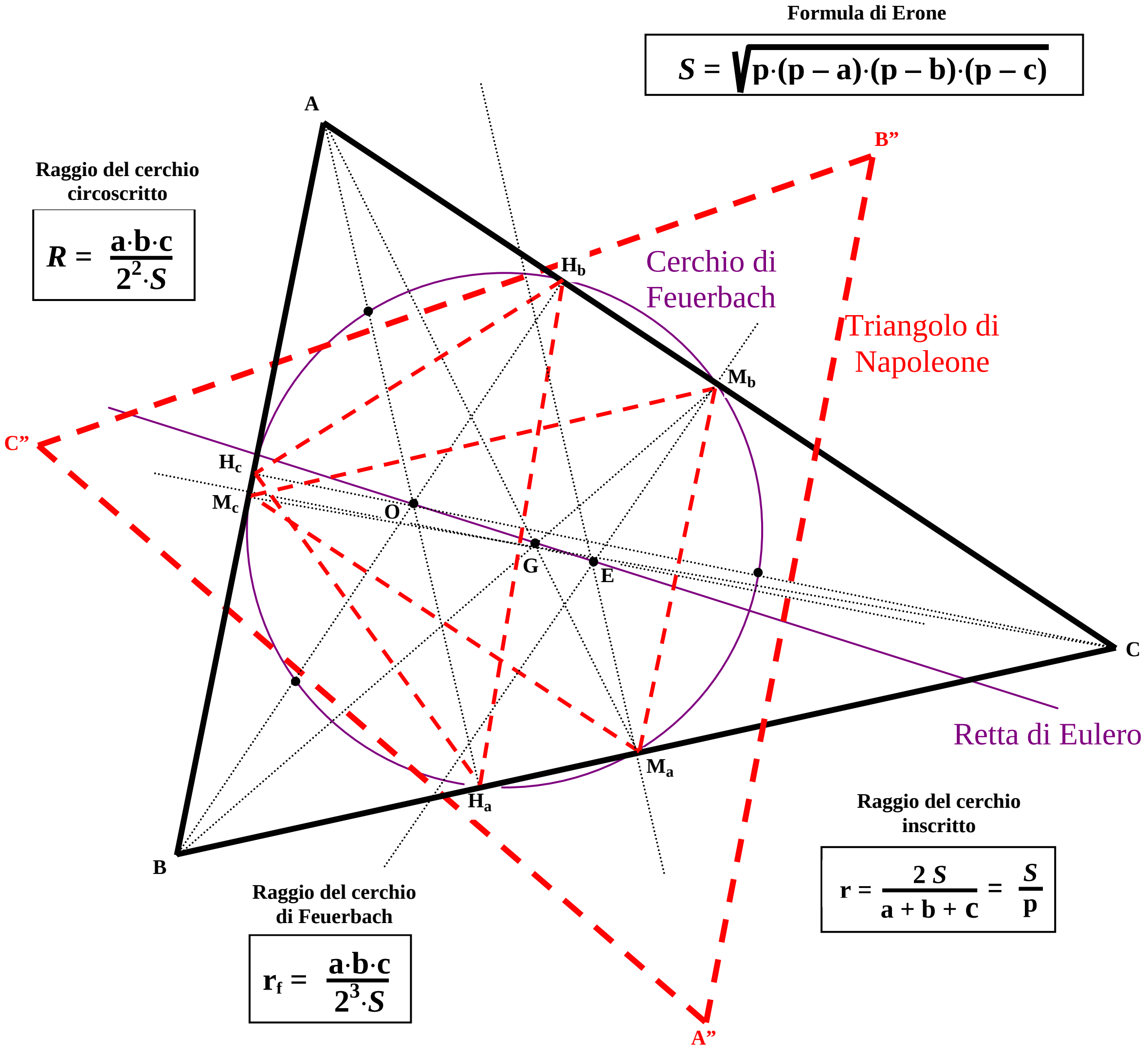
M-9

IL TRIANGOLO



[edr - Aprile 2002]

Non sembra più nemmeno mortale l'uomo che vive fra beni immortali.

[da: Epicuro, Lettera sulla felicità (a Meneceo)]

[**In copertina: Caratteristiche principali di un triangolo**]

PREMESSA

Il triangolo ha sempre esercitato un fascino particolare sui matematici di tutti i tempi; può essere considerato un τοπος, della geometria.

Già Euclide vi aveva dedicato molta attenzione: la prima proposizione del libro **I** dei suoi Elementi riguarda proprio il triangolo: "*Come costruire un **triangolo** equilatero con un dato segmento per lato*". Sempre nel libro **I** sono dedicati al triangolo anche le proposizioni:

- **I-7 :** "*Sulla stessa base e dallo stesso lato non vi possono essere due **triangoli** diversi che abbiano gli altri due lati nell'ordine uguali tra loro*", all' incirca equivalente al nostro terzo criterio di uguaglianza dei triangoli,
- **I-16 :** "*In ogni **triangolo** ogni angolo esterno è maggiore di qualsiasi degli angoli interni non adiacenti*",
- **I-17 :** "*In ogni **triangolo** la somma di due qualsiasi angoli è minore di due angoli retti,*
- **I-18 :** "*In ogni **triangolo** l'angolo opposto al maggiore dei lati è il maggiore degli angoli*",
- **I-19 :** "*In ogni **triangolo** il lato opposto al maggiore degli angoli è il maggiore dei lati*",
- **I-20 :** "*In ogni **triangolo** la somma di due qualsiasi lati è maggiore del terzo lato*",
- **I-21 :** "*La somma dei segmenti da un qualsiasi punto interno ad un **triangolo** ai due estremi di un lato è minore della somma degli altri due lati*",
- **I-22 :** "*Come costruire un **triangolo** con tre dati lati*",
- **I-24 :** "*Se due **triangoli** hanno due lati e l'angolo compreso diverso, quello che ha l'angolo maggiore ha maggiore anche il terzo lato*",
- **I-25 :** "*Se due **triangoli** hanno due lati uguali ed il terzo lato diverso, quello che ha il terzo lato maggiore ha maggiore anche l'angolo compreso tra i due lati uguali*",
- **I-26 :** "*Se due **triangoli** hanno un lato e due angoli uguali hanno uguali anche gli altri due lati ed il terzo angolo*",
- **I-32 :** "*In ogni **triangolo** ogni angolo esterno è uguale alla somma degli angoli interni non adiacenti*",
- **I-37 :** "*Due **triangoli** aventi un lato in comune ed i vertici opposti su una retta parallela a questo sono equivalenti (hanno la stessa area)*",
- **I-38 :** "*Due **triangoli** aventi un lato uguale e sulla stessa retta ed i vertici opposti su una parallela a questa retta sono equivalenti (hanno la stessa area)*",
- **I-39 :** "*Se due **triangoli** aventi un lato in comune sono equivalenti hanno i vertici opposti su una retta parallela al lato in comune*",
- **I-40 :** "*Se due **triangoli** aventi un lato uguale e sulla stessa retta sono equivalenti hanno i vertici opposti su una retta parallela a questa retta*".

Quindi il libro **I** si chiude con due proposizioni, la **I-47** e la **I-48**, che insieme sono oggi conosciute come il **Teorema di Pitagora**, definito da Keplero come uno dei tesori della matematica.

Anche il **II** libro riserva due proposizioni ai triangoli, la **II-12** e la **II-13**, che insieme possono essere considerate un'estensione del teorema di Pitagora, oggi noto come **Teorema di Carnot**: "*In ogni **triangolo** con un angolo ottuso (risp. acuto) il quadrato costruito sul lato opposto a questo è maggiore (risp. minore) della somma dei quadrati costruiti sugli altri due lati del doppio del rettangolo che ha per lati uno di questi lati ed il segmento compreso tra il vertice dell'angolo ottuso (risp. acuto) ed il piede della perpendicolare dal vertice opposto a quel lato*"
Si tenga presente che ai tempi di Euclide non era sviluppata la trigonometria, almeno con l'attuale formalismo; oggi semplicemente diremmo, con simbologia convenzionale (vedi appendice 1), che:

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cdot \cos\alpha} \,.$$

Il libro **III** è interamente dedicato al cerchio, ma nel **IV** i triangoli vengono ripresi in quattro proposizioni:

- **IV-2 :** "*Come trovare un **triangolo** inscritto in un dato cerchio e simile (letteralmente equiangolare) ad un dato triangolo*",
- **IV-3 :** "*Come trovare un **triangolo** circoscritto ad un dato cerchio e simile (letteralmente equiangolare) ad un dato triangolo*",
- **IV-4 :** "*Come trovare il cerchio circoscritto ad un dato **triangolo***", ovvero come trovare quel punto che oggi chiamiamo circocentro,
- **IV-10 :** "*Come trovare un **triangolo** isoscele con gli angoli alla base doppi dell'angolo al vertice*", ovvero la **Sezione Aurea**, secondo tesoro della matematica secondo Keplero.

Il libro **VI** conclude la trattazione dei triangoli; le prime sette proposizioni preparano l'ottava:

- **VI-1 :** "*Le superfici di **triangoli** e parallelogrammi con la stessa altezza stanno tra loro come le rispettive basi*",
- **VI-2 :** "*Una linea parallela ad un lato di un **triangolo** taglia gli altri due lati in parti proporzionali tra loro e viceversa se una retta taglia due lati di un triangolo in parti proporzionali tra loro questa è parallela al terzo lato*", in pratica il **Teorema di Talete**,
- **VI-3 :** "*La bisettrice di un angolo di un **triangolo** taglia il lato opposto in parti proporzionali ai lati adiacenti*"
- **VI-4 :** "*Due **triangoli** che abbiano gli angoli uguali hanno i lati corrispondenti ad angoli uguali in proporzione tra loro*",
- **VI-5 :** "*Due **triangoli** che abbiano i lati in proporzione tra loro hanno gli angoli uguali*",
- **VI-6 :** "*Due **triangoli** che abbiano un angolo uguale ed i lati adiacenti a quell'angolo in proporzione tra loro, hanno uguali anche gli altri due angoli*",
- **VI-7 :** "*Due **triangoli** che abbiamo un angolo uguale ed i lati adiacenti ad un altro angolo in proporzione tra loro, hanno uguali anche gli altri due angoli (anche se uno di questi è maggiore di un angolo retto)*".

Quindi la proposizione **VI-8**, e il suo corollario, oggi noti proprio come **Primo e Secondo Teorema di Euclide**:
"*Se in un **triangolo** rettangolo si traccia l'altezza relativa all'ipotenusa, questa lo divide in due triangoli simili al primo triangolo, quindi tra loro*", quindi "*Se in un **triangolo** rettangolo si traccia l'altezza relativa all'ipotenusa, quella risulta media proporzionale tra le due parti in cui l'ipotenusa risulta divisa dal suo piede*".

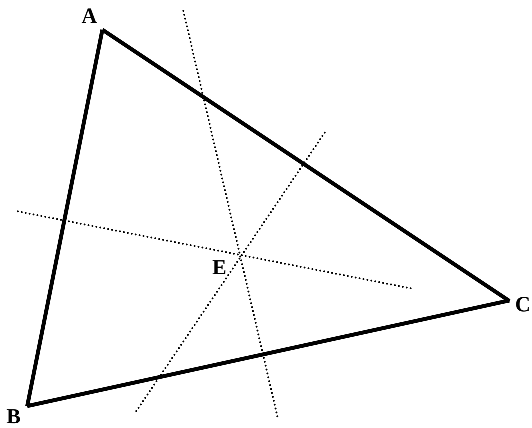
Qualche altra proposizione del libro **VI** tratta i triangoli ma solo per la misurazione delle aree, quindi null'altro, neanche nei libri successivi. Infatti i libri **VII**, **VIII** e **IX** trattano i numeri naturali, seppure con riferimento alla geometria, e gli ultimi libri (**X**, **XI**, **XII** e **XIII**) trattano la geometria solida.

Stranamente quindi Euclide non trattò i punti notevoli dei triangoli, probabilmente perché non finalizzati ai suoi propositi.

RISULTATI SUCCESSIVI

Ma la geometria non si esaurisce (fortunatamente) col suo fondatore Euclide. I suoi epigoni hanno individuato una serie di caratteristiche dei triangoli, alcune delle quali molto interessanti.
Vediamone alcune:

IL CIRCOCENTRO

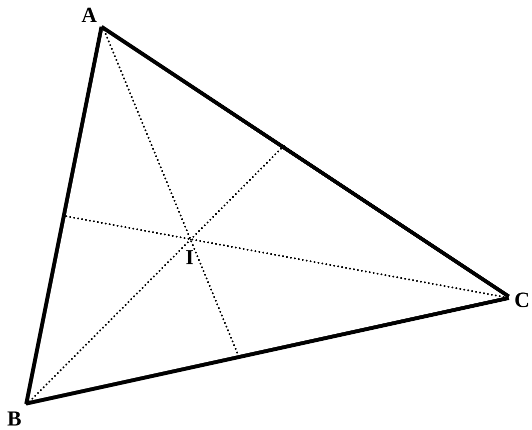


In un triangolo, ogni lato ha un proprio asse (perpendicolare per il punto medio). Vale in proposito il seguente teorema:
"***In un triangolo i tre assi dei lati passano per un unico centro***".
La spiegazione geometrica è relativamente semplice. Sia infatti **E** il punto di incontro degli assi dei lati **AB** e **BC** del nostro triangolo **ABC**. Ricordando che l'asse di un segmento è il luogo geometrico dei punti equidistanti dagli estremi, è evidente che il punto **E** appartenendo all'asse di **AB** è equidistante da **A** e da **B** ed appartenendo anche all'asse del segmento **BC** è equidistante da **B** e da **C**, quindi per la proprietà transitiva dell'uguaglianza è equidistante da **A** e da **C**, cioè appartiene all'asse del segmento **AC**; quindi l'asse del segmento **AC** passa anch'esso per il punto **E**.
Il punto di incontro dei tre assi dei lati di un triangolo è detto **circocentro** ed è anche il centro del cerchio circoscritto al triangolo, cioè il punto equidistante dai tre vertici del triangolo. Interessante è il valore ***R*** del raggio del cerchio circoscritto ad un triangolo:

$$\boxed{R = \frac{a \cdot b \cdot c}{2^2 \cdot S}}$$

dove ***S*** è l'area del triangolo (per la dimostrazione vedasi appendice **2**); cioè: "***Il raggio del cerchio circoscritto ad un triangolo è ¼ del rapporto tra il prodotto dei lati e l'area del triangolo stesso***".

L'INCENTRO

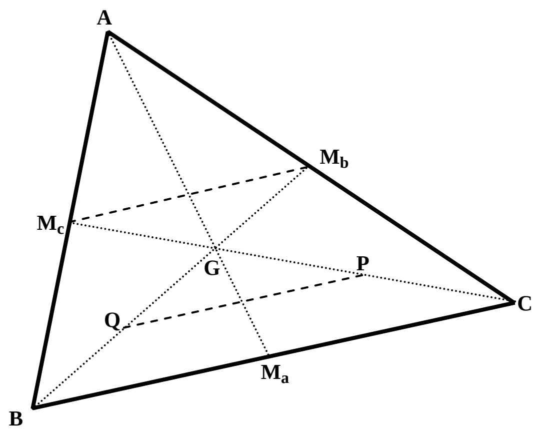


In ogni triangolo vi sono tre angoli interni, ognuno dei quali ha un bisettrice interna. Vale in proposito il seguente teorema:
"***In un triangolo le tre bisettrici interne passano per un unico punto***".
Anche qui la spiegazione è relativamente semplice e molto simile al precedente. Sia infatti **I** il punto di incontro delle bisettrici dell'angolo in **A** e dell'angolo in **B**. Ricordando che la bisettrice di un angolo è il luogo geometrico dei punti equidistanti dai lati dell'angolo, è evidente che il punto **I** appartenendo alla bisettrice dell'angolo in **A** è equidistante dai segmenti **AC** e **AB**, ed appartenendo anche alla bisettrice dell'angolo in **B** è equidistante dai segmenti **AB** e **BC**, quindi per la proprietà transitiva dell'uguaglianza è equidistante dai segmenti **AC** e **BC**, cioè appartiene alla bisettrice dell'angolo in **C**; quindi la bisettrice dell'angolo in **C** passa anch'essa per il punto **I**.
Il punto di incontro delle tre bisettrici interne di un triangolo è detto **incentro** ed è anche il centro del cerchio inscritto nel triangolo, quindi il punto equidistante dai tre lati del triangolo. Interessante è il valore **r** del raggio del cerchio inscritto in un triangolo:

$$\boxed{\mathbf{r} = \frac{2\,S}{\mathbf{a + b + c}} = \frac{S}{\mathbf{p}}}$$

(per la dimostrazione vedasi appendice **3**), cioè "***Il raggio del cerchio inscritto in un triangolo è pari al doppio del rapporto tra l'area e la somma dei lati, ovvero è pari al rapporto tra l'area ed il semiperimetro***".

IL BARICENTRO

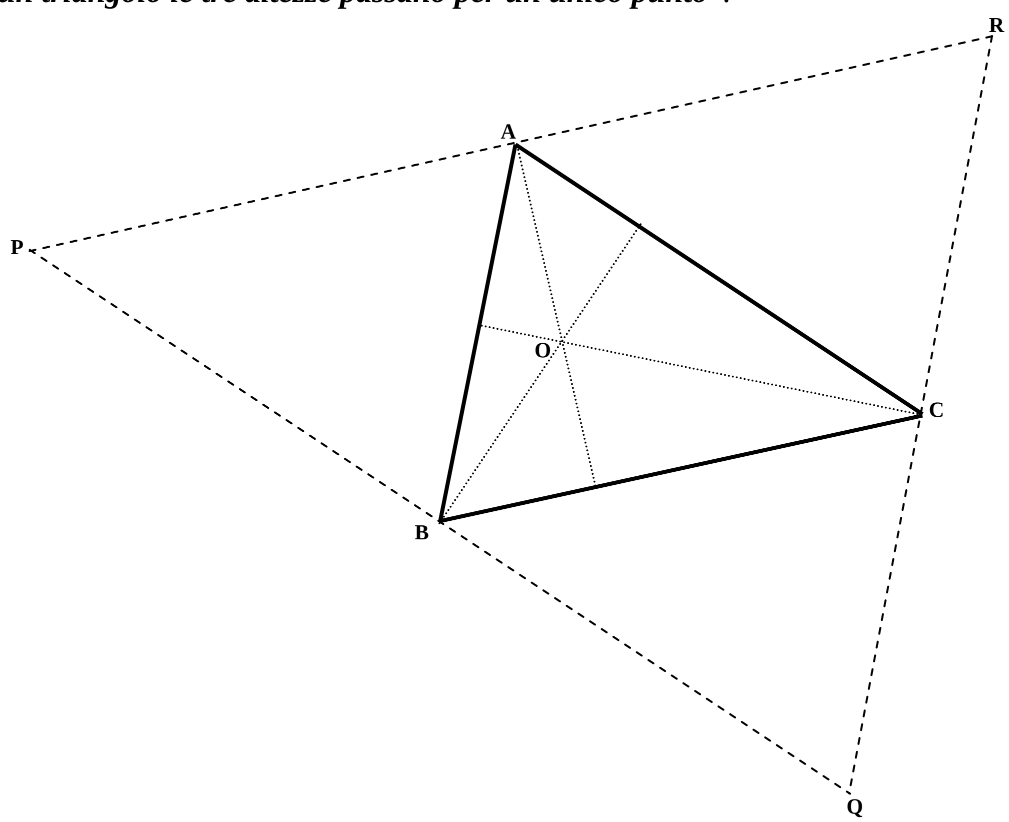


Nel triangolo una mediana è un segmento che ha per estremi un vertice ed il punto medio del lato opposto; in ogni triangolo vi sono ovviamente tre mediane. Vale in proposito il seguente teorema:
"***In un triangolo le tre mediane passano per un unico punto***".
Ma qui la spiegazione geometrica non è immediata come nei casi precedenti. Siano quindi $\mathbf{M_a}$, $\mathbf{M_b}$ e $\mathbf{M_c}$ i tre punti medi dei lati del nostro trangolo **ABC** e consideriamo due mediane, ad es. $\mathbf{BM_b}$ e $\mathbf{CM_c}$: esse si incontrano in un punto **G**. Il segmento $\mathbf{M_bM_c}$ risulta parallelo al lato **BC** per il teorema di Talete (infatti le rette di $\mathbf{M_bM_c}$ e di **BC** intercettano sulle due rette trasversali, quelle di **AB** e **AC** segmenti uguali tra loro, quindi in proporzione) e per la conseguente similitudine del nostro triangolo **ABC** con il triangolo $\mathbf{A\ M_bM_c}$, il segmento $\mathbf{M_bM_c}$ è la metà del lato **BC**. Ma ancora, diciamo **P** e **Q** i punti medi

dei segmenti **GB** e **GC** rispettivamente; con considerazioni sul triangolo **GBC** analoghe a quelle fatte per il triangolo **ABC**, possiamo affermare che anche **QP** è la metà di **BC**, quindi parallelo ed uguale a $\mathbf{M_bM_c}$. Ne consegue che i triangoli $\mathbf{G\ M_bM_c}$ e **GPQ** sono uguali e pertanto saranno uguali tra loro i lati corrispondenti $\mathbf{GQ = GM_b}$ e $\mathbf{GP = GM_c}$. In conclusione le due mediane $\mathbf{BM_b}$ e $\mathbf{CM_c}$ si incontrano in un punto **G** che le divide in due parti, l'una doppia dell'altra. Le stesse considerazioni si possono fare con la terza diagonale che incontrà le altre due in punti che la dividono in due parti l'una doppia dell'altra e per l'unicità di questo punto le tre diagonale non possono che incontrarsi nello stesso punto.
Il punto di incontro delle tre mediane di un triangolo è detto **baricentro**. Questo è anche il punto di applicazione della forza peso (equivalente) di un corpo con la forma del nostro triangolo.
Si noti che il triangolo che ha per vertici i tre punti medi dei lati, detto **triangolo mediano**, avendo i lati in proporzione (1:2) con triangolo principale è simile a questo, ha lo stesso baricentro coincidendo le rispettive mediane, ed è ruotato di π proprio intorno a **G** rispetto al principale.

L' ORTOCENTRO

Nel triangolo un'altezza è un segmento che ha per estremi un vertice ed il piede della perpendicolare da quel vertice al lato opposto; in ogni triangolo vi sono ovviamente tre altezze. Vale in proposito il seguente teorema:
"***In un triangolo le tre altezze passano per un unico punto***".

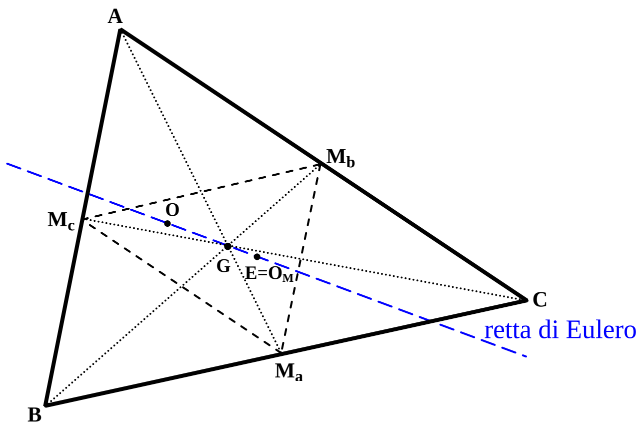


Per la dimostrazione tracciamo per i tre vertici le parallele ai rispettivi lati opposti; queste determinano un nuovo triangolo; indichiamolo con **PQR**. E' facile verificare che i vertici del nostro triangolo sono i punti medi del lati del nuovo

triangolo; infatti **ABCR** e **ACBP** sono, per costruzione, due parallelogrammi, quindi con i lati opposti uguali; ne segue che: **BC=AR** e **BC=PA**, quindi **AR=PA**, cioè **A** è il punto medio di **PR**. Analogamente per gli altri vertici.
Si osservi ora che le altezze relative ai vertici del nostro triangolo sono gli assi dei lati del nuovo triangolo e questi per quanto visto per il circocentro si incontrano in un unico punto. **C.V.D.**
Il punto di incontro delle tre altezze di un triangolo è detto **ortocentro**, ed il triangolo che ha per vertici i piedi delle tre altezze è detto **triangolo ortico**. Curiosamente l'ortocentro di un triangolo coincide con l'incentro del suo triangolo ortico. E più avanti vedremo che triangolo ortico e triangolo mediano hanno le stesso cerchio circoscritto, quindi lo stesso circocentro.

LA RETTA DI EULERO

Sui punti notevoli di un triangolo Eulero (sempre lui) trovò una interessante correlazione oggi nota come **Teorema di Eulero sui triangoli** (da specificare perché di teoremi di Eulero ve n'è uno quasi in ogni campo della matematica):
"***Nel triangolo Ortocentro, Baricentro e Circocentro sono allineati, con Ortocentro e Circocentro da parti opposte rispetto al Baricentro e distanziati in modo che la distanza Ortocentro - Baricentro è doppia della distanza Baricentro - Circocentro*** "



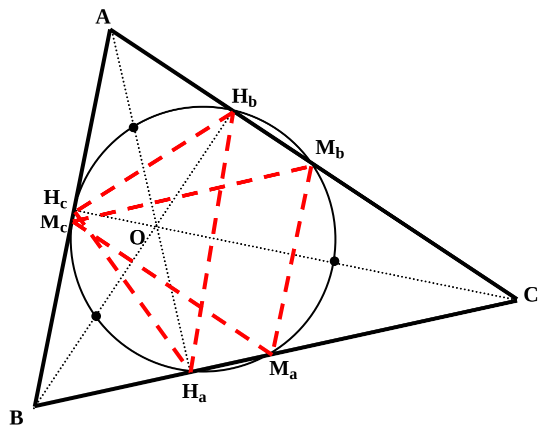
Abbiamo già notato infatti che ogni triangolo è simile al suo mediano, che hanno lo stesso baricentro **G**, e che il mediano risulta ruotato di π intorno al comune baricentro **G** rispetto al triangolo principale.
Notiamo ancora che la relazione di similitudine tra triangoli (ma in generale per tutte le figure geometriche), conserva gli angoli e mantiene il rapporto tra le lunghezze. Di conseguenza l'ortocentro $\mathbf{O_M}$ del mediano è anch' esso ruotato di π rispetto al comune baricentro **G**, quindi in linea con **G** ed **O** e distante da **G** la metà di quanto dista $\mathbf{O_M}$. Ma l'ortocentro del mediano coincide con il circocentro **E** del triangolo principale; infatti gli assi dei lati del triangolo principale sono le altezze del suo triangolo mediano $\mathbf{M_aM_bM_c}$. C.V.D.
La retta che passa per l'ortocentro, il baricentro ed il circocentro di un triangolo la chiameremo **retta di Eulero** del triangolo.
Dobbiamo ad Eulero la scoperta di un'altra curiosa caratteristica dei triangoli. E' noto che solo nei triangoli equilateri i quattro centri coincidono; nei triangoli non equilateri essi sono diversamente dislocati. Eulero scoprì che il quadrato della distanza tra il circocentro e l'incentro, detti al solito R ed r rispettivamente i raggi dei cerchi circoscritto ed inscritto, è: $\mathbf{IE}^2 = R^2 - 2\,R\cdot r$ ovvero il raggio del cerchio circoscritto è sempre maggiore del diametro del cerchio inscritto (al più uguale, come nei triangoli equilateri) $R \geq 2r$, nota come **disuguaglianza di Eulero**.
Si osserva anche che la retta di Eulero del triangolo mediano avendo due punti in comune ($\mathbf{G}=\mathbf{G_M}$ e $\mathbf{E}=\mathbf{O_M}$) con quella del triangolo principale, coincide con questa.

Un triangolo ed il suo mediano hanno la stessa retta di Eulero. Alla quale quindi appartiene anche il circocentro $\mathbf{E_M}$ del mediano, dalla parte opposta di **E** rispetto a **G** e ad una distanza da questo di: $\mathbf{GE_M} = \frac{1}{2}\,\mathbf{GE}$

Del Teorema di Eulero sui triangoli se ne può dare anche una dimostrazione per via analitica (vedasi appendice **5**).

IL CERCHIO DI FEUERBACH

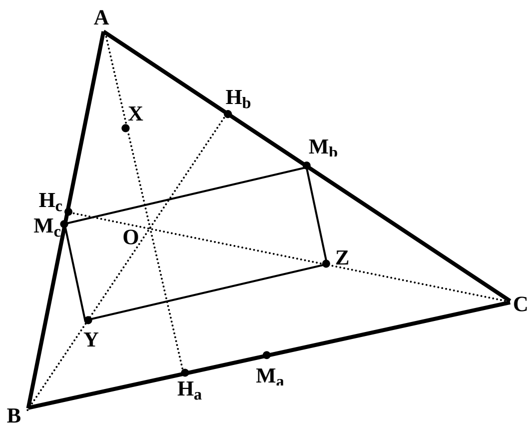
Dato quindi un triangolo si possono determinare il suo triangolo **mediano** ed il suo triangolo **ortico**. Accade che questi due triangoli, nati il primo dal **baricentro**, il secondo dall'**ortocentro**, hanno lo stesso cerchio circoscritto, quindi hanno in comune il **circocentro**.



Il cerchio circoscritto al triangolo mediano ed al triangolo ortico, detto **"cerchio di Feuerbach**", passa anche per i punti medi delle tre congiungenti l'ortocentro con i vertici ed è pertanto detto anche "**cerchio dei nove punti**".

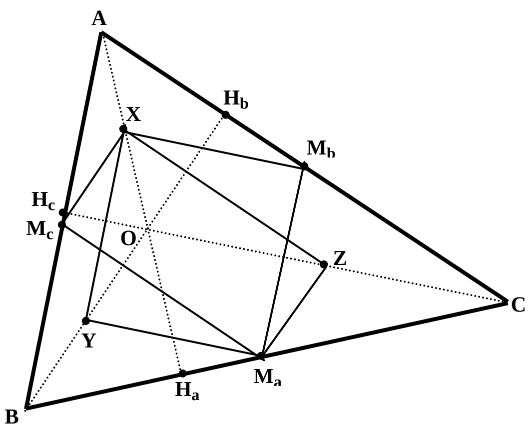
Per la dimostrazione consideriamo prima i punti medi dei lati $\mathbf{M_a}$, $\mathbf{M_b}$ e $\mathbf{M_c}$ e quelli delle congiungenti i vertici con l'ortocentro **X** , **Y** e **Z**.

Il segmento $\mathbf{M_cM_b}$ è parallelo al lato **BC** per il teorema di Talete applicato al triangolo **ABC**. Analogamente parallelo al lato **BC** è il segmento **YZ** per Talete al triangolo **OBC**. Quindi $\mathbf{M_cM_b}$ e **YZ** sono paralleli.



Il segmento $\mathbf{M_bZ}$ è parallelo ad **AO** per Talete applicato al triangolo **AOC**. Analogamente parallelo ad **AO** è il segmento $\mathbf{M_cY}$ per Talete applicato al triangolo **AOB**. Quindi $\mathbf{M_bZ}$ e $\mathbf{M_cY}$ sono paralleli e, essendo AO perpendicolare a BC, entrambi perpendicolari a $\mathbf{M_cM_b}$ e **YZ**. Pertanto il quadrilatero $\mathbf{M_cM_bZY}$ è un rettangolo e per questo i quattro punti stanno sulla circonferenza di diametri $\mathbf{M_cZ}$ e $\mathbf{M_bY}$.

La stessa cosa può dirsi per i quadrilateri $\mathbf{M_aM_cXZ}$ e $\mathbf{M_bM_aYZ}$, anch'essi inscritti in una circonferenze che condividendo almeno un diametro con le altre, coincidono con quella in cui è inscritta il primo quadrilatero.



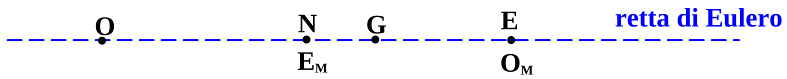
Ne segue che $\mathbf{M_a}$, $\mathbf{M_b}$, $\mathbf{M_c}$, **X**, **Y** e **Z** giacciono tutti sulla stessa circonferenza.

Resta da dimostrare che appartengono a questa circonferenza anche i piedi delle perpendicolari $\mathbf{H_a}$, $\mathbf{H_b}$ e $\mathbf{H_c}$. Ma questo appare immediatamente evidente se si considera che il triangolo $\mathbf{M_aXH_a}$ è rettangolo in $\mathbf{H_a}$, per cui

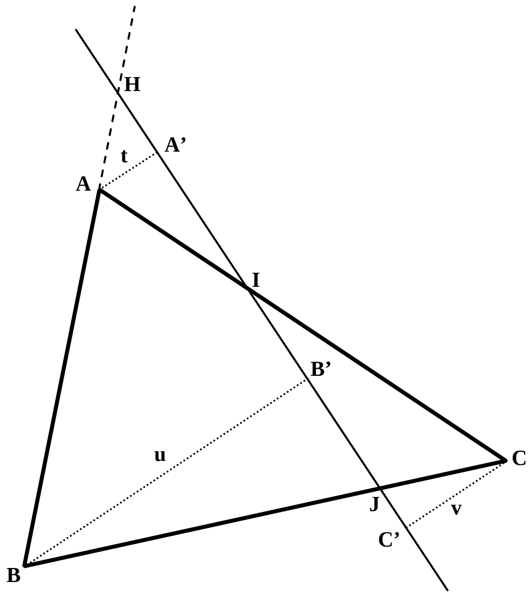
quest'ultimo appartiene alla circonferenza che ha per diametro l'ipotenusa $\mathbf{XM_a}$ che è la nostra circonferenza. Ed analogamente può dirsi di $\mathbf{H_b}$ e $\mathbf{H_c}$.
Quindi "*I piedi delle tre altezze di un triangolo, i punti medi dei tre lati e dei segmenti congiungenti i tre vertici con l'ortocentro giacciono tutti sulla medesima circonferenza*". A dispetto del nome l'esistenza di questo cerchio fu per primo dimostrata da Poncelet nel 1821, mentre Feuerbach ne ottenne altre interessanti proprietà.
Essendo in pratica il cerchio di Feuerbach circoscritto al triangolo mediano ed essendo questo simile al triangolo principale nel rapporto 1:2, il suo raggio è la metà del raggio circoscritto al triangolo principale:

$$\boxed{\mathbf{r_f} = \frac{\mathbf{a\cdot b\cdot c}}{\mathbf{2^3\cdot} \boldsymbol{S}}}$$

Un interessante proprietà del cerchio di Feuerbach è l'appartenenza del suo centro alla retta di Eulero in una ben precisa posizione. Questo deriva dall'avere il triangolo mediano la stessa retta di Eulero del triangolo principale e dall'essere il cerchio di Feuerbach il cerchio circoscritto al triangolo mediano. Ne segue che il centro **N** del cerchio di Feuerbach appartiene alla retta di Eulero dalla parte opposta di **E** rispetto a **G** ad una distanza da questo metà della distanza di **E**; il centro del cerchio di Feuerbach è di conseguenza al centro (mi si perdoni il bisticcio) tra circocentro **E** e ortocentro **O**.



IL TEOREMA DI MENELAO



Ovviamente non è l'eroe omerico dell'Iliade, ma il grande matematico alessandrino vissuto intorno all'anno 100 d.C. Il teorema afferma: " ***Se una retta interseca i lati di un triangolo, determina sui lati segmenti dei quali sono uguali i prodotti dei non adiacenti***".
Del teorema se ne possono dare diverse dimostrazioni; ne riportiamo due:
Prima dimostrazione:
Il triangolo **ABC** sia quindi intersecato da una retta **r** nei punti **H**, **I** e **J**. Dai tre vertici del triangolo si traccino le perpendicolari a **r** e siano **A'**, **B'** e **C'** i rispettivi tre piedi.

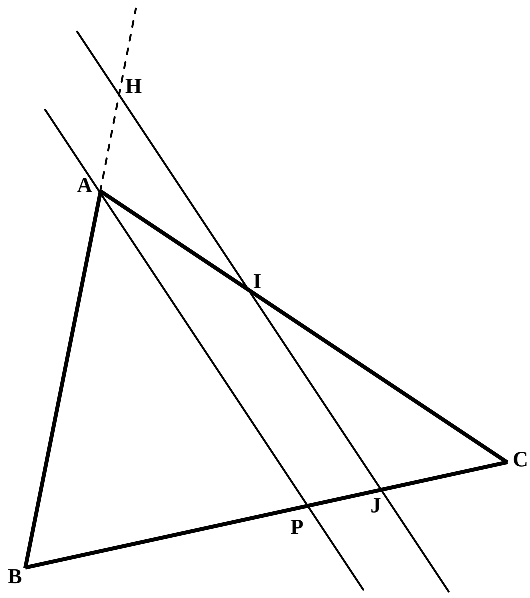
Per la similitudine tra i triangoli **BB'J** e **CC'J** sarà: $\frac{CJ}{JB} = \frac{CC'}{BB'}$

Per la similitudine tra i triangoli **CC'I** e **AA'I** sarà: $\frac{IA}{CI} = \frac{AA'}{CC'}$

Per la similitudine tra i triangoli **BB'H** e **AA'H** sarà: $\frac{BH}{HA} = \frac{BB'}{AA'}$

Moltiplicando membro a membro: $\frac{CJ \cdot AI \cdot BH}{BJ \cdot CI \cdot AH} = \frac{CC' \cdot AA' \cdot BB'}{BB' \cdot CC' \cdot AA'} = 1$

Ovvero: $AI \cdot CJ \cdot BH = AH \cdot BJ \cdot CI$



Seconda dimostrazione:
Come prima il triangolo **ABC** sia intersecato da una retta **r** nei punti **H**, **I** e **J**. Si tracci la parallela ad **r** per un vertice, ad es. **A**, che intersechi il lato opposto **BC** nel punto **P**.
Per il teorema di Talete sarà:

$\frac{AH}{BH} = \frac{PJ}{BJ}$ da cui $PJ = \frac{AH\ BJ}{BH}$

e

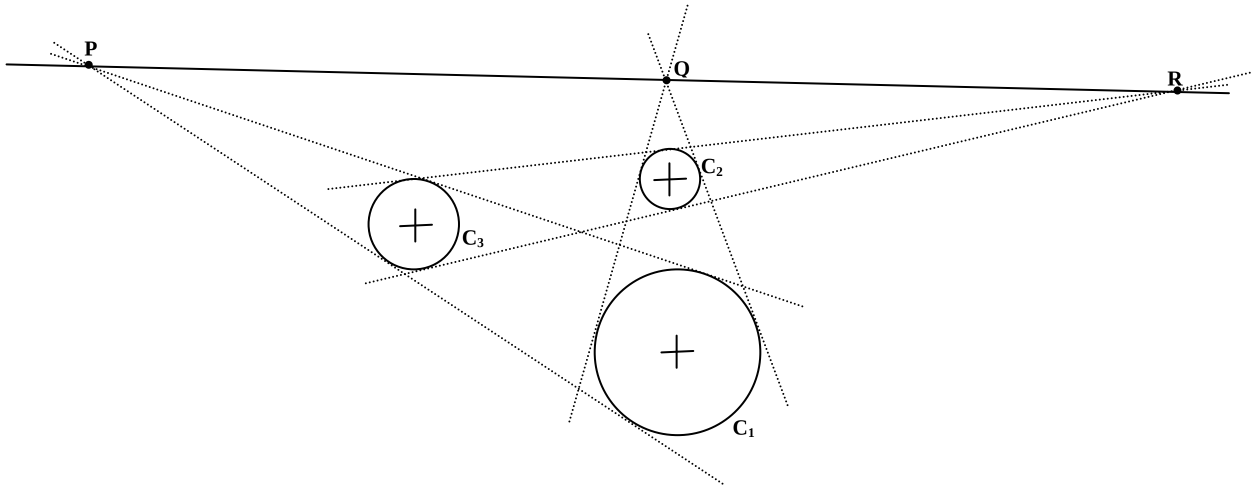
$\frac{CI}{AI} = \frac{CJ}{PJ}$ da cui $PJ = \frac{CJ\ AI}{CI}$

Quindi: $\frac{AH\ BJ}{BH} = \frac{AI\ CJ}{CI}$

da cui: $AI \cdot BH \cdot CJ = AH \cdot BJ \cdot CI$

Il teorema continua a valere anche se la retta interseca esternamente.
Vale anche il contrario del teorema, cioè che se tre punti sui tre lati di un triangolo determinano segmenti per i quali vale l'uguaglianza di sopra, allora i tre punti sono allineati.

Se ne può dedurre anche che le coppie di tangenti esterne a tre cerchi di qualsiasi raggio (purché diversi) e comunque disposti (purché i centri non siano allineati) si incontrano in tre punti allineati.



LA FORMULA DI ERONE

E' uno dei più importanti risultati della geometria e della matematica in generale. La formula è attribuita ad Erone perché citata nel primo libro della sua *Metrica*, un trattato sui metodi di misura. In mancanza di notizie su di lui, incerta è la sua collocazione storica; alcuni lo collocano intorno al 150 A.C., altri intorno al 250 D.C.. Recentemente è stata ipotizzata la sua collocazione nel primo secolo avendo egli riferito di una eclissi che si sarebbe verificata ad Alessandria il 13 marzo del 62 D.C. Personalità eclettica, spaziò in ogni campo della scienza dell'epoca, dalla matematica alla fisica (ricordiamo l'eolipila, il primo motore termico della storia), dalla astronomia alla meccanica.
Non si può escludere che Erone abbia solo riportato un risultato già noto ai suoi tempi; ne è stata scoperta infatti una dimostrazione di Archimede. Ma la diffusione dei suoi trattati nel Medio Evo gliene hanno definitivamente attribuito la paternità.
Secondo i criteri di uguaglianza, un triangolo è completamento individuato se sono noti tre elementi qualsiasi purché almeno uno di essi sia un lato; quindi: due lati ed un angolo (1°), un lato e due angoli (2°) o i tre lati (3°).
Ciò significa che dovrebbe essere possibile calcolarne l'area a partire da una terna qualsiasi di elementi (con almeno un lato).
Dalla trigonometria allora apprendiamo come calcolare l'area del triangolo avendo due lati, ad es. **a** e **c**, e l'angolo compreso β :

$$\boxed{S = \tfrac{1}{2}\ \mathbf{a \cdot c \cdot sen}\ \beta}$$

Bellissima formula, ricavata immediatamente dalla stessa definizione della funzione seno; infatti l'altezza $\mathbf{h_a}$ relativa alla base **a** è proprio $\mathbf{c \cdot sen}\ \beta$.
Sempre dalla trigonometria apprendiamo come calcolare l'area di un triangolo avendo un lato **a** e i due angoli adiacenti β e γ :

$$\boxed{S = \frac{\mathbf{a^2 \cdot sen}\ \beta \cdot \mathbf{sen}\ \gamma}{\mathbf{2 \cdot sen}\ (\beta + \gamma)}}$$

Ricavabile immediatamente dalla precedente, ricordando che per il teorema dei seni (ennesimo teorema di Eulero): $\mathbf{c / sen}\ \gamma = \mathbf{a / sen}\ \alpha$ cioè: $\mathbf{c = a \cdot sen}\ \gamma\ \mathbf{/ sen}\ \alpha$ e che essendo: $\alpha = \pi - (\beta + \gamma)$, è: $\mathbf{sen}\ \alpha = \mathbf{sen}\ (\beta + \gamma)$.
Resta il calcolo dell'area del triangolo quando sono noti i tre lati. Dalla formula di Carnot possiamo ricavare il valore di $\mathbf{cos}\ \alpha$ in funzione del valore dei lati:

$$\mathbf{cos}\ \alpha = \frac{\mathbf{b^2 + c^2 - a^2}}{\mathbf{2\ b \cdot c}}$$

Quindi dalle formule di bisezione e con un po' di algebra:

$$\mathbf{sen\ a/2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{(p-b)\cdot(p-c)}{b\cdot c}} \qquad \mathbf{cos\ a/2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{p \cdot (p-a)}{b\cdot c}}$$

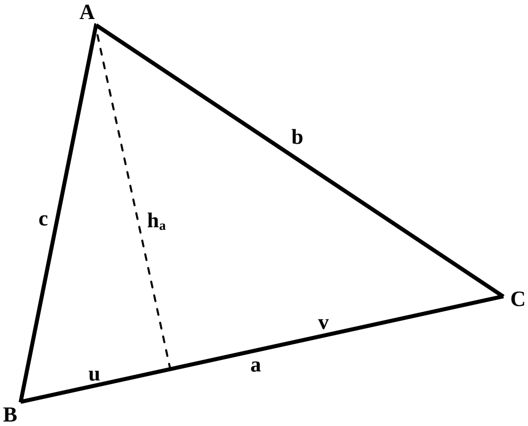
Ed infine per la formula di duplicazione applicata alla prima formula:

$$S = \tfrac{1}{2}\ \mathbf{b \cdot c \cdot sen}\ \alpha = \tfrac{1}{2}\ \mathbf{b \cdot c \cdot sen}\ (2\ \alpha/2) = \mathbf{b \cdot c \cdot sen}\ \alpha/2 \cdot \mathbf{cos}\ \alpha/2$$

combinandole insieme e sempre con un po' di algebra:

$$\boxed{S = \sqrt{p\cdot(p - a)\cdot(p - b)\cdot(p - c)}}$$

nota come Formula di Erone. Ma ai tempi di Erone la trigonometria non era ancora sviluppata; ci deve quindi essere un metodo per dedurre la formula partendo dai soli teoremi della geometria euclidea.



Una dimostrazione che non fa uso della trigonometria è il seguente:
Si tracci l'altezza $\mathbf{h_a}$ relativa alla base **a**; l'area del triangolo sappiamo essere:

$$S = \mathbf{a\, h_a / 2}$$

Il piede dell'altezza divide la base in due segmenti di lunghezza **u** e **v**, e per Pitagora è: $\mathbf{h_a^2 = c^2 - u^2 = b^2 - v^2}$
Quindi:
$\mathbf{u^2 - v^2 = (u+v)(u-v) = a\,(u-v) = c^2 - b^2}$
da cui: $\mathbf{u - v = (c^2 - b^2) / a}$
Sommando $\mathbf{(u+v) = a}$ ad ambo i membri si ottiene:

$$\mathbf{(u+v) + (u-v) = 2\,u = \frac{c^2 - b^2}{a} + \frac{a^2}{a} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{a}}$$

Che sostituita nella precedente fornisce:

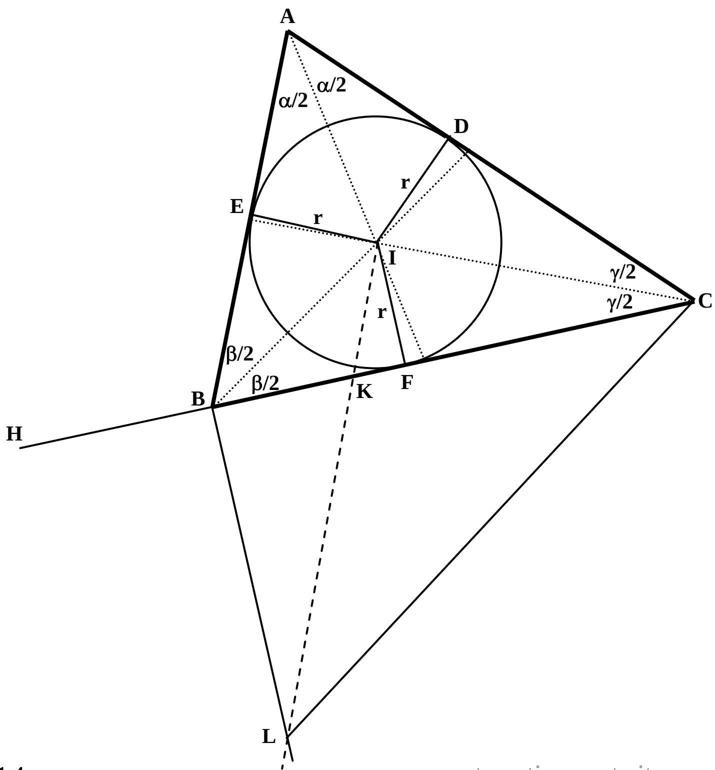
$$\mathbf{h_a^2 = c^2 - u^2 = c^2 - \frac{(a^2 - b^2 + c^2)^2}{4\,a^2}} \quad \text{da cui:} \quad \mathbf{h_a = \sqrt{c^2 - \frac{(a^2 - b^2 + c^2)^2}{4\,a^2}}}$$

L'area può allora essere espressa in funzione dei soli lati:

$$\mathbf{S = a\,h_a / 2 = \tfrac{1}{2} \sqrt{a^2\,c^2 - \frac{(a^2 - b^2 + c^2)^2}{4}}}$$

Che si dimostra essere equivalente alla nostra formula (vedasi appendice **4**).

Questa seconda dimostrazione però fa ampio uso dell'algebra, anch'essa non sviluppata ai tempi di Erone. Ci proponiamo pertanto di trovarne una dimostrazione puramente geometrica.



Interessante è la seguente, attribuita ad Archimede:
Tracciato il cerchio inscritto nel triangolo, di raggio **r**, è evidente che, detto **p** il semi-perimetro, l'area del triangolo è: $S = \mathbf{p \cdot r}$.
E' anche evidente che prolungando un lato, ad es. **BC** di un segmento di lunghezza metà del lato adiacente **BH=AD**, allora **CH** è proprio il semi-perimetro, quindi l'area è:

$$S = \mathbf{CH \cdot r}.$$

Tracciamo ora la perpendicolare a **BC** per **B** e la perpendicolare alla bisettrice

CD per l'incentro **I**. Le due perpendicolari si incontrino nel punto **L** che congiungiamo con **C**. Si può mostrare che i triangoli **CBL** e **ADI** sono simili; essendo entrambi rettangoli sarà sufficiente dimostrare che hanno un altro angolo uguale.
Si osservi che i due triangoli **CBL** e **CIL** sono entrambi rettangoli sulla stessa ipotenusa, quindi inscritti nella stessa circonferenza; in questa circonferenza sarà inscritto anche il quadrilatero **CIBL**. Per una nota proprietà dei quadrilateri inscritti in una circonferenza gli angoli opposti sono supplementari (la loro somma è π); di conseguenza l'angolo **CIB** è supplementare dell'angolo **CLB**. Ma l'angolo **CIB** è supplementare anche dell'angolo **AID**; per convincersene basta osservare che:
$\mathbf{AID} = \pi - \pi/2 - \alpha/2 = \pi/2 - \alpha/2$ e che: $\mathbf{CIB} = \pi - (\beta/2 + \gamma/2) = \pi - (\pi/2 - \alpha/2)$,
essendo: $\beta/2 + \gamma/2 = \pi/2 - \alpha/2$
Pertanto gli angoli **CLB** e **AID**, supplementari dello stesso angolo **CIB**, sono uguali ed i triangoli **CBL** e **ADI** simili, quindi con i lati in proporzione:

$$\mathbf{BC : AD = BL : DI} \quad \text{ovvero} \quad \mathbf{BC : BH = BL : r}$$

Anche i triangoli **BLK** e **FIK** sono evidentemente simili, quindi anch'essi con i lati in proporzione: $\mathbf{BK : FK = BL : FI}$ ovvero $\mathbf{BK : FK = BL : r}$
Dal confronto tra le due proporzione si ricava che: $\mathbf{BC : BH = BK : FK}$

Applicando alla quale la regola del componendo: $\dfrac{\mathbf{BC + BH}}{\mathbf{BH}} - \dfrac{\mathbf{BK + FK}}{\mathbf{FK}}$

Cioè: $\dfrac{\mathbf{CH}}{\mathbf{BH}} - \dfrac{\mathbf{BF}}{\mathbf{FK}}$ da cui: $\dfrac{\mathbf{CH^2}}{\mathbf{BH \cdot CH}} - \dfrac{\mathbf{BF \cdot CF}}{\mathbf{FK \cdot CF}}$

Si osservi infine che nel triangolo **CIK**, rettangolo per costruzione, l'altezza $\mathbf{IF = r}$ è media proporzionale tra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa **FK** e **CF**, quindi è: $\mathbf{r^2 = FK\ CF}$, che sostituita nella relazione precedente la trasforma in:

$$\frac{\mathbf{CH^2}}{\mathbf{BH \cdot CH}} = \frac{\mathbf{BF \cdot CF}}{\mathbf{r^2}}$$

Che può essere scritta come: $\mathbf{CH^2 \cdot r^2 = BF \cdot CF \cdot BH \cdot CH}$

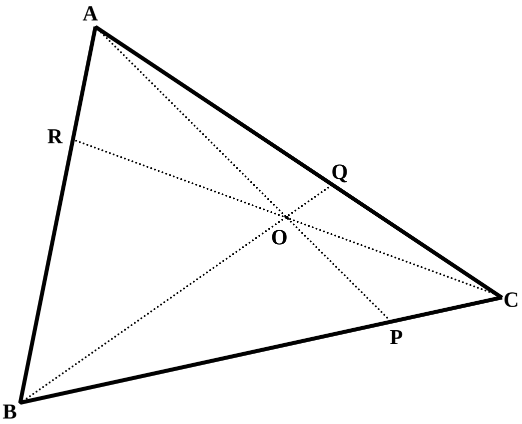
E' quanto cercavamo essendo:

$$\mathbf{CH^2 \cdot r^2 = \mathit{S}^2}, \quad \mathbf{CH = p}, \quad \mathbf{BH = (p - a)}, \quad \mathbf{BF = (p - b)} \quad \text{e} \quad \mathbf{CF = (p - c)}$$

Quindi: $\mathbf{\mathit{S}^2 = p\ (p - a)\ (p - b)\ (p - c)}$.

C.V.D.

IL TEOREMA DI CEVA



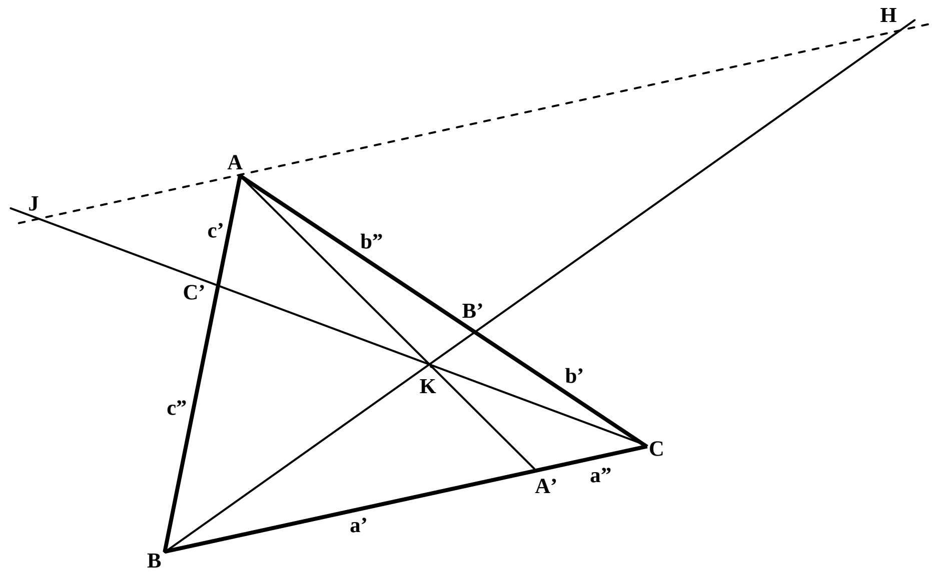
Grande matematico italiano del 1700, poco noto tra i “non addetti ai lavori”. Ceva fu incuriosito da quei punti notevoli ottenuti da rette uscenti dai vertici e con un punto in comune come il circocentro, l’incentro, il baricentro e l’ortocentro, notando che queste rette formavano sul lato opposto segmenti in precisa relazione tra loro.
Già da Euclide (**L.VI-p.3**) si sapeva che ogni bisettrice divide il lato opposto in parti in proporzione con i lati adiacenti; ad es. detti **a’** e **a”** le misure dei due segmenti in cui viene diviso il lato **BC** (**a**) dalla bisettrice dell’angolo in **A** (α) vale:

$$AB : AC = a' : a'' = c : b.$$

Analogamente per gli altri lati: $BC : BA = b' : b'' = a : c$
e $CA : CB = c' : c'' = b : a$.
Moltiplicando membro a membro le tre relazioni si ha:

$$(a' \cdot b' \cdot c') / (a'' \cdot b'' \cdot c'') = (c \cdot a \cdot b) / (b \cdot c \cdot a) = 1$$

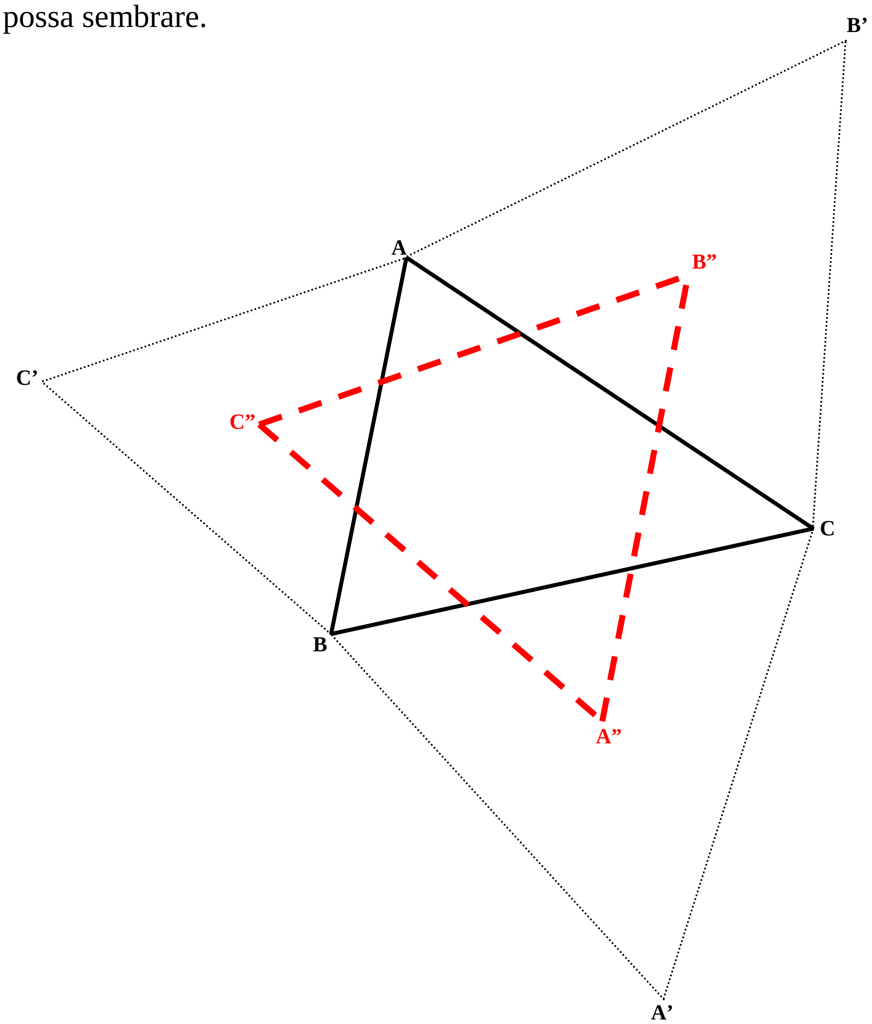
Quindi le tre bisettrici, che sappiamo incontrarsi nell’incentro determinato sui lati segmenti dei quali il prodotto dei rapporti vale 1.
Più evidentemente la stessa relazione vale per i segmenti determinati dalle mediane che essendo uguali fra loro hanno rapporto unitario e tale sarà pertanto anche il prodotto di detti rapporti. Anche le mediane si intersecano in punto, il baricentro.
La stessa cosa si potrebbe dimostrare per le altezze che pure si incontrano in un punto, l’ortocentro.
Ebbene Ceva si chiese se la stessa relazione valesse per ogni tripla di rette uscenti dai vertici di un triangolo e stabilì che questo si verifica in generale, cioè “***In un triangolo, tre rette passanti per i vertici ed aventi un punto in comune determinano sui lati segmenti dei quali, presi nell’ordine, il prodotto dei rapporti vale 1***”.
La dimostrazione è relativamente semplice. Dato un triangolo **ABC** nel quale tre rette passanti per i vertici si intersecano in un punto **K,** intersecando i lati nei punti **A’**, **B’** e **C’**, si tracci la parallela ad un lato per un vertice, ad es. per **A**. Questa incontra le tre rette in **A** stesso, quindi in **H** e **J**.
Si determinano molti triangoli simili: **AHB’** e



CBB’, quindi **AJC’** e **BCC’**, quindi **AHK** e **A’BK** ed infine **AJK** e **A’CK**.
Per queste sarà: **CB’ : B’A = BC : AH**
AC’ : C’B = AJ : BC
AJ : CA’ = AK : A’K
AH : BA’ = AK : A’K
Dalle ultime due:
AJ : CA’ = AH : BA’ ovvero **BA’ : A’C = AH : AJ**
E moltiplicando membro a membro quest’ultima con le prime due:
(CB’/B’A) (AC’/C’B) (BA’/A’C) = (BC/AH)(AJ/BC)(AH/AJ) = 1
C.V.D.
Ceva fu più completo dimostrando anche l’inverso, cioè che se vale la relazione di sopra le tre rette si incontrano in un punto.

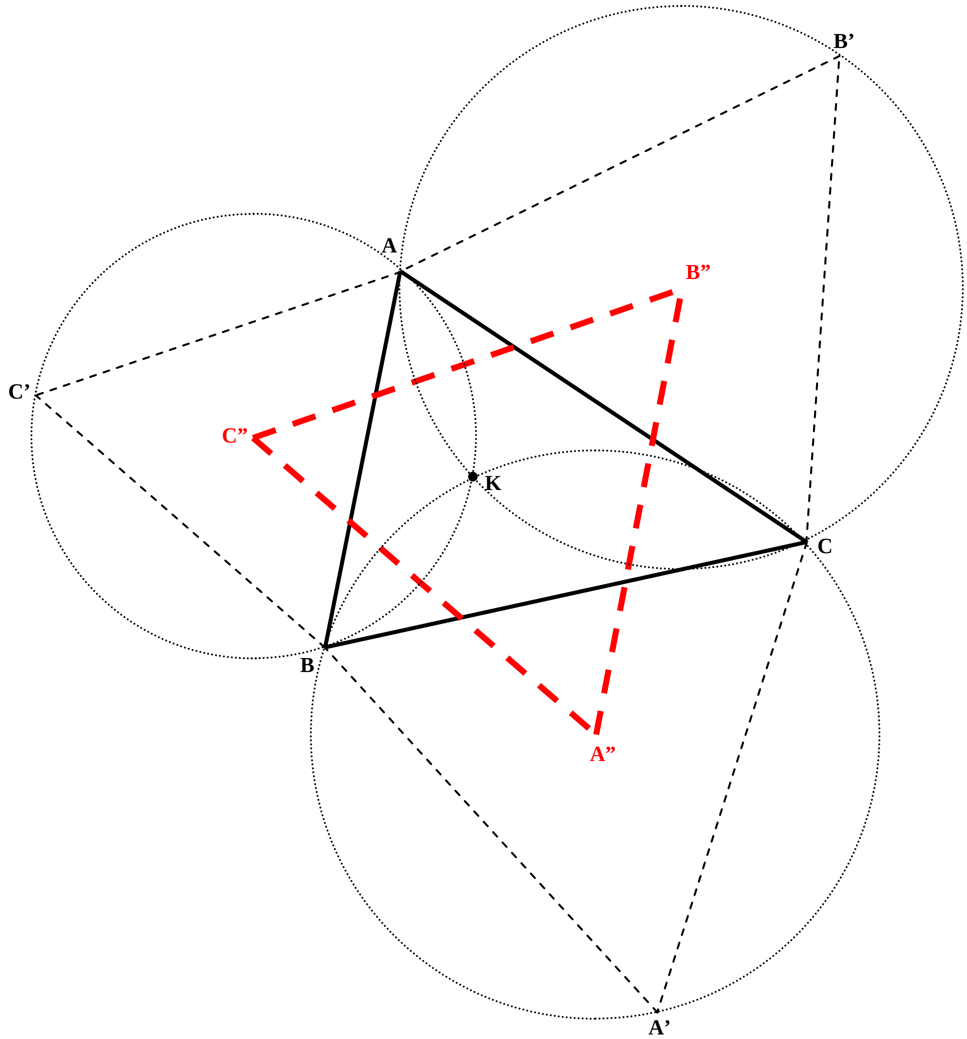
IL TEOREMA DI NAPOLEONE

Anche Napoleone Bonaparte ha dato il suo contributo alla geometria; un teorema sui triangoli porta il suo nome **Teorema di Napoleone**: “***Il triangolo che ha per vertici i centri dei tre triangoli equilateri costruiti esternamente sui lati di un qualsiasi triangolo, è un triangolo equilatero***”, meno banale di quanto a prima vista possa sembrare.



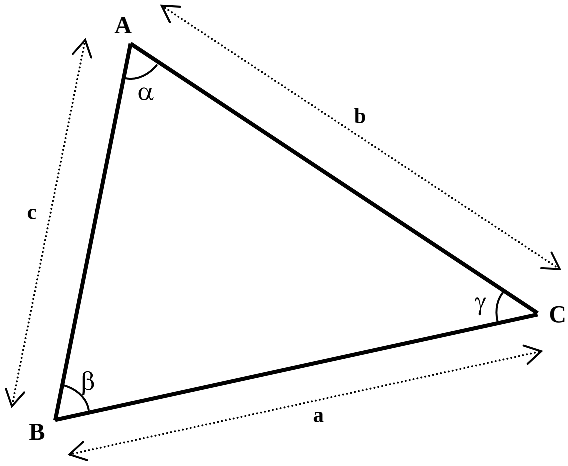
Il triangolo così costruito lo potremo chiamare **triangolo di Napoleone**. Sulla paternità del teorema sono stati però avanzati molti dubbi, sebbene sia noto che Napoleone Bonaparte avesse il pallino della matematica ed in particolare della geometria e le sue biografie riferiscano dei successi scolastici in matematica del futuro imperatore. Napoleone stesso era orgoglioso dell’appartenenza all’ Istitute de France, massima società scientifica francese, ed amico di molti famosi matematici tra i quali Laplace e Lagrange.
Del teorema si può dare la solita veloce dimostrazione trigonometrica, alla quale come al solito preferiamo quella geometrica.

Con riferimento allora alla costruzione in figura si traccino le circonferenze circoscritte ai tre triangoli equilateri e se prendano in considerazione due, ad es. quella circoscritta al triangolo **AB'C** e quella al triangolo **AC'B**; queste si incontreranno, oltre che nel punto **A**, anche in un punto **K**. Si può dimostrare che per questo punto passa anche la terza circonferenza, quella circoscritta al triangolo **BA'C**.
Infatti gli angoli **AKB** e **AKC** sono di **2π/3** perché angoli alla circonferenza con un corrispondente angolo al centro (**AC"B** e **AB"C** risp.) di **4π/3**. Ne segue che anche **BKC** è di **2π/3**, quindi **K** appartiene alla circonferenza circoscritta al triangolo **BA'C**.



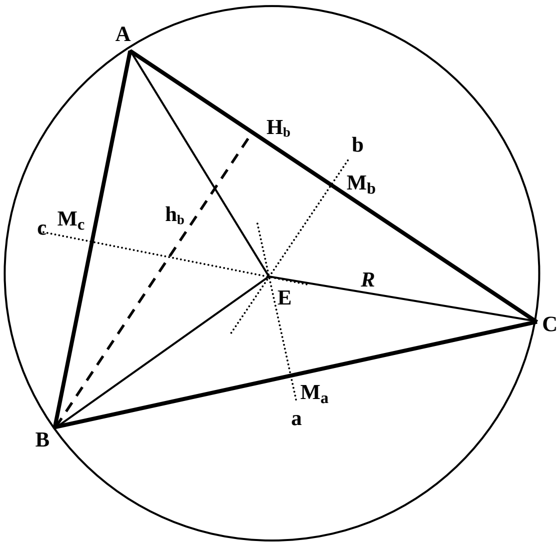
La congiungente i due centri **B"** e **C"** è perpendicolare alla corda **AK**, quindi l'angolo **KB"C"** è la metà dell'angolo **KB"A** ed analogamente l'angolo **KB"A"** è la metà dell'angolo **KB"C**; di conseguenza l'angolo **C"B"A"** sarà la metà dell'angolo **AB"C** che per costruzione è di **2π/3**. Allora nel nostro triangolo l'angolo in **B"** è di **π/3**. La stessa cosa può dirsi degli angoli in **A"** e **C"**; ne segue che il nostro triangolo è equilatero.
Il teorema può essere generalizzato. Anzitutto è sufficiente che i tre triangoli costruiti sui lati siano simili tra loro; i loro circocentri saranno vertici di un triangolo simile ai tre. Inoltre il teorema continua a valere anche se i tre triangoli vengono costruiti internamente e si può anche dimostrare che l'area del triangolo "esterno" differisce dall'area del triangolo originario dell'area del triangolo "interno".

Appendice 1: Simbologia standard per il triangolo:



Semiperimetro:
p = (a + b + c) / 2

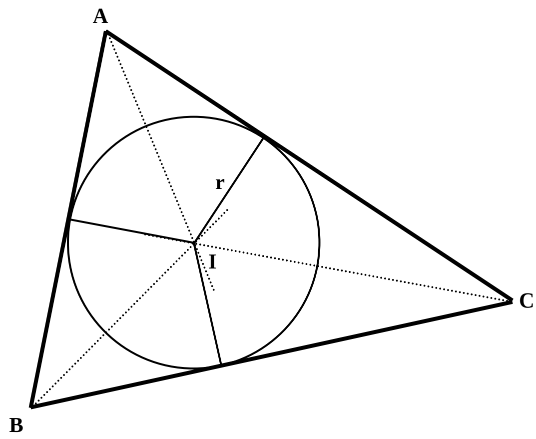
Appendice 2: Il raggio del cerchio circoscritto ad un triangolo è ¼ del rapporto tra il prodotto dei lati e l'area del triangolo stesso.



Dato quindi un triangolo **ABC** si traccino le perpendicolari ai lati nei punti medi **M_a**, **M_b** e **M_c** determinando il circocentro **E** ed il raggio del cerchio circoscritto ***R***.
Si tracci ancora l'altezza relativa ad un vertice, ad es. con riferimento alla figura relativa a **B**. L'area ***S*** del triangolo è:
$S = b\, h_b / 2$ quindi: $h_b = 2\, S / b$.
Si noti ora la similitudine dei triangoli **BH_bA** e **CEM_a**, entrambi rettangoli e con l'angolo **BAH_b** uguale all'angolo **CEM_a**, entrambi metà dell'angolo al centro **BEC**.
Da questa similitudine si ricava la proporzione:
$EC : AB = CM_a : BH_b$ cioè: $R : c = a/2 : h_b$ da cui: $R = a\, c / 2\, h_b = a\, b\, c / 4\, S$
C.V.D.

Appendice 3: Il raggio del cerchio inscritto in un triangolo è pari al doppio del rapporto tra l'area e la somma dei lati, ovvero è pari al rapporto tra l'area ed il semi-perimetro del triangolo stesso.

Dato quindi un triangolo **ABC** si traccino le bisettrici dei tre angoli al vertice determinando così l'incentro **I** ed il raggio del cerchio inscritto **r**.



Il triangolo **ABC** risulta composto dai tre triangoli:

- **AIB** di area: $S_c = \mathbf{c\ r / 2}$,
- **BIC** di area: $S_a = \mathbf{a\ r / 2}$,
- **CIA** di area: $S_b = \mathbf{b\ r / 2}$.

L'area S del triangolo è la somma delle tre aree:

$$S = S_a + S_b + S_c = (a + b + c)\, r / 2$$

da cui: $\mathbf{r = S / p}$

Avendo come di consueto indicato con **p** il semiperimetro.

C.V.D.

Si noti che **r** può anche essere espresso come: $r = \sqrt{(p - a)\,(p - b)\,(p - c) / p}$

molto simile alla formula di Erone.

Appendice 4: Equivalenza della formula di Erone alla seguente:

$$S = a\, h_a / 2 = \tfrac{1}{2} \sqrt{a^2 c^2 - \frac{(a^2 - b^2 + c^2)^2}{4}}$$

Infatti la formula si può porre:

$$S = a\, h_a / 2 = \tfrac{1}{2} \sqrt{a^2 c^2 - \frac{(a^2 - b^2 + c^2)^2}{4}} = \sqrt{\frac{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2}{16}}$$

E la formula di Erone si può porre:

$$S = \sqrt{p\cdot(p - a)\cdot(p - b)\cdot(p - c)} = \sqrt{\frac{(a+b+c)}{2}\cdot\frac{(a+b+c-2a)}{2}\cdot\frac{(a+b+c-2b)}{2}\cdot\frac{(a+b+c-2c)}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(-a^2+ab+ac-ab+b^2+bc-ac+bc+c^2)\cdot(a^2+ab-ac-ab-b^2+bc+ac+bc-c^2)}{16}} =$$

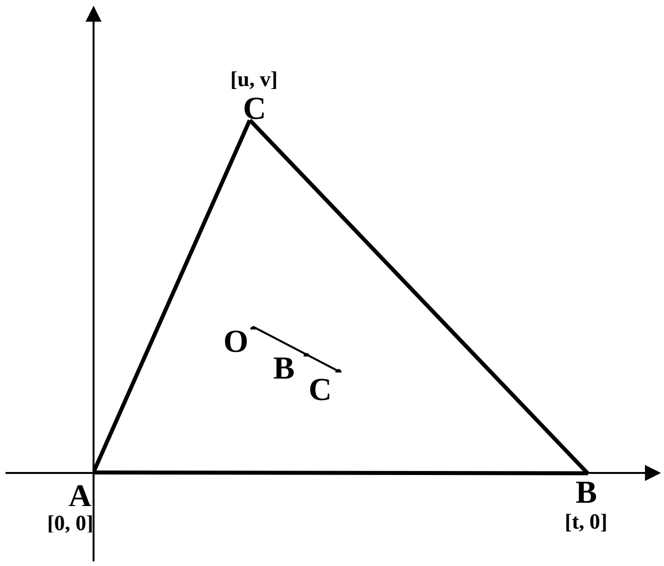
$$= \sqrt{\frac{(-a^2+b^2+c^2+2bc)\cdot(a^2-b^2-c^2+2bc)}{16}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(-a^4+a^2b^2+a^2c^2-2a^2bc+a^2b^2-b^4-b^2c^2+2b^3c+a^2c^2-b^2c^2-c^4+2bc^3+2a^2bc-2b^3c+4b^2c^2)}{16}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2)}{16}}$$

Appendice 5: Il teorema di Eulero per via analitica

Ci proponiamo di dimostrare il teorema di Eulero sui triangoli per via analitica.
Stabiliamo allora un sistema di assi cartesiani con l'origine in uno dei vertici del triangolo, ad es. **A**, ed un asse parallelo ad uno dei lati, ad es. l'asse **x** parallelo al lato **AB**.
In questo modo il vertice **A** ha coordinate [**0, 0**] e siano [**0, t**] le coordinate di **B** e [**u, v**] quelle di **C**.
Troviamo allora le coordinate del baricentro **C**, dell'ortocentro **O** e circocentro **C**.



<u>Baricentro</u>: Il baricentro si ottiene come intersezione di due mediane; consideriamo quelle per **A** e per **B**.
Il punto medio di **BC** ha coordinate [**(t+u)/2, v/2**], quindi la mediana per **A** [**0, 0**] ha equazione ([1]):

$$\mathbf{x\ v/2 - y\cdot(t+u)/2 = 0}$$
$$\mathbf{x\ v - y\cdot(t+u) = 0}$$

Il punto medio di **AC** ha coordinate [**u/2, v/2**], quindi la mediana per **B** [**t, 0**] ha equazione:

$$\mathbf{(x - t)\cdot(v/2) = y\cdot(u/2 - t)}$$
$$\mathbf{x\cdot v + y\cdot(2t - u) - v\cdot t = 0}$$

L'intersezione delle due rette si ottiene risolvendo il sistema delle due equazioni:
Sottraendo membro a membro la prima dalla seconda si ha:
$\mathbf{y\cdot(2t - u + t + u) - v\cdot t = 0}$, cioè: $\mathbf{3\ t\ y = v\ t}$, quindi: $\mathbf{y = v/3}$
Sostituendo nella prima: $\mathbf{x\ v - v\ (t+u)/3 = 0}$ quindi: $\mathbf{x = (t+u)/3}$

Il baricentro ha quindi coordinate: $\mathbf{P}_B$ = [**(t+u)/3, v/3**]

<u>Ortocentro</u>: l'ortocentro si trova come intersezione di due altezze; consideriamo quelle per **C** e per **A**.
La perpendicolare per **C** [**u**, **v**] al lato **AB** (coeff. angolare $\mathbf{m_{AB} = 0}$) ha equazione ([2]):

$$\mathbf{x = u}$$

La perpendicolare per **A** [**0**, **0**] al lato **BC** (coeff. angolare $\mathbf{m_{BC} = -\,v/(t-u)}$) ha equazione:

$$\mathbf{y\ v = x\ (t-u)}$$

L'intersezione delle due rette si ottiene risolvendo il sistema delle due equazioni:
Sostituendo la prima nella seconda: $\mathbf{y\ v = u(t-u)}$ da cui: $\mathbf{y = u(t-u)/v}$

L'ortocentro ha quindi coordinate: $\mathbf{P}_O$ = [**u, u(t–u)/v**]

[1] L'equazione della retta passante per due punti P_1 [x_1, y_1] e P_2 [x_2, y_2] è: $(y - y_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1)$
[2] L'equazione della perpendicolare alla retta di equazione: $y = mx + c$ ha equazione: $y = m'x + c'$ con: $m' = -1/m$

<u>Circocentro</u>: il circocentro si trova come intersezione degli assi di due lati; consideriamo quelli dei lati **AB** e **AC**.
L'asse del lato **AB** (coeff. angolare $\mathbf{m_{AB} = 0}$) ha l'equazione della perpendicolare passante per il punto medio [**t/2**, **0**]:

$$\mathbf{x = t/2}$$

L'asse del lato **AC** (coeff. angolare $\mathbf{m_{AC} = v/u}$) ha l'equazione della perpendicolare passante per il punto medio [**u/2**, **v/2**]:

$$\mathbf{y = -u/v\ x + v/2 + u^2/2v}$$

L'intersezione delle due rette si ottiene risolvendo il sistema delle due equazioni:
Sostituendo la prima nella seconda si ha: $\mathbf{y = v/2 + u^2/2v - ut/2v}$ cioè: $\mathbf{y = v/2 - u(t-u)/2v}$

Il circocentro ha quindi coordinate: $\mathbf{P_C = [t/2,\ v/2 - u(t-u)/2v]}$

Verifichiamo che i tre punti siano allineati. Dalla geometria analitica sappiamo che tre punti $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3)$ sono allineati se:

$$\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

Nel nostro caso:

$$\boxed{\begin{array}{l} P_1 = P_B = [(t+u)/3,\ v/3] \\ P_2 = P_O = [u,\ u(t-u)/v] \\ P_3 = P_C = [t/2,\ v/2 - u(t-u)/2v] \end{array}}$$

Quindi:

$$\begin{vmatrix} t/2 - (t+u)/3 & v/2 - u(t-u)/2v - v/3 \\ u - (t+u)/3 & u(t-u)/v - v/3 \end{vmatrix} = [t/2 - (t+u)/3]\,[u(t-u)/v - v/3] - [v/2 - u(t-u)/2v - v/3]\,[u - (t+u)/3] =$$

$$ut(t-u)/2v - vt/6 - u(t^2-u^2)/3v + v(t+u)/9 - uv/2 + v(t+u)/6 + u^2(t-u)/2v - u(t^2-u^2)/6v + uv/3 - v(t+u)/9 =$$

$$3\cancel{ut^2/6v} - 3\cancel{u^2t/6v} - \cancel{vt/6} - 2\cancel{ut^2/6v} + 2\cancel{u^3/6v} + \cancel{vt/9} + \cancel{uv/9} - 3\cancel{uv/6} + \cancel{vt/6} + \cancel{uv/6} +$$

$$+ 3\cancel{u^2t/6v} - 3\cancel{u^3/6v} - \cancel{ut^2/6v} + \cancel{u^3/6v} + \cancel{2uv/6} - \cancel{vt/9} - \cancel{uv/9} = 0$$

C.V.D.