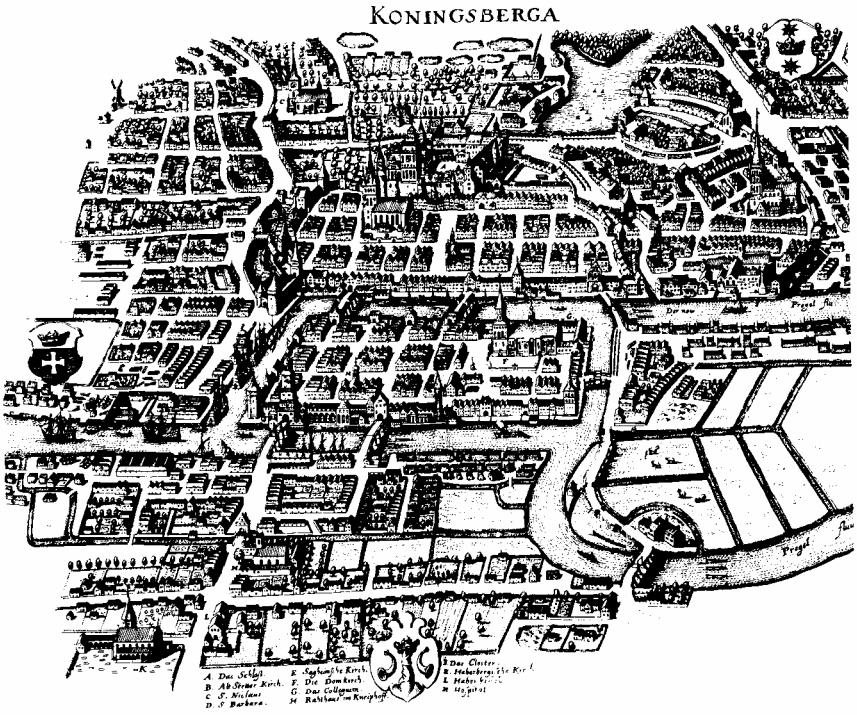
Leonardo Eulero e i ponti di Königsberg

La nascita della teoria dei grafi

di

Domenico Lenzi

In corso di stampa su **Lettera Matematica Pristem**



La nascita della teoria dei grafi si può far risalire alla prima metà del XVIII secolo. Non che precedentemente non si fosse mai ragionato in termini di grafi; solo che una presa di coscienza dell'importanza di tale teoria come disciplina matematica si ebbe in quel periodo grazie ad Eulero (Leonhard Euler) che risolse un importante problema di cui parleremo più avanti. Comunque, come Eulero fa presente all'inizio di [E], il primo studioso che parlò di questo genere di matematica fu Leibniz (1646-1716). Però la ricerca in teoria dei grafi restò limitata agli studi di Eulero per circa un secolo, e solo dopo la prima metà del XIX secolo gli studi relativi a questa importantissima disciplina ripresero nuovamente, specialmente in Inghilterra, grazie a molti problemi scientifici che furono formulati usando la teoria dei grafi.

Eulero nacque a Basilea, in Svizzera, nel 1707 e fu allievo di Johann Bernoulli (1667-1748) (da molti considerato l'inventore del Calcolo delle variazioni) che a sua volta generò Nicolaus (1695-1726) e Daniel Bernoulli (1700-1782), dando origine a una ineguagliabile dinastia di scienziati.
Figlio d'arte, infatti suo padre aveva studiato matematica sotto la guida di Jakob Bernoulli (1654-1705), fratello di Johann, si può dire che Eulero abbia dato contributi eccellenti in ogni settore della matematica conosciuta al suo tempo. A dire il vero il padre di Eulero, che era un sacerdote protestante, aveva sperato a lungo che il giovane seguisse le sue orme, ma invano; infatti Leonardo preferì dedicarsi alla matematica, anche se studiò in modo approfondito molte altre discipline scientifiche, come medicina, astronomia, fisica e altre ancora.
Intanto Nicolaus e Daniel Bernoulli erano diventati professori di matematica presso l'Accademia di San Pietroburgo, fondata da Caterina I^{a}, vedova di Pietro il Grande. E nel 1727, su raccomandazione di Daniel Bernoulli (Nicolaus era morto qualche mese prima), Eulero fu chiamato come membro dell'Accademia per la sezione di medicina e fisiologia; però nel 1733 egli divenne responsabile della sezione matematica, dopo che Daniel Bernoulli ebbe lasciato l'Accademia per una cattedra di matematica a Basilea.
Eulero restò a San Pietroburgo fino al 1741, anno in cui accettò un invito di Federico il grande per l'Accademia di Berlino, dove rimase per venticinque anni. Ma ad un certo punto i rapporti con Federico – che preferiva gli studi filosofici – divennero difficili e nel 1766 Eulero riassunse il suo vecchio incarico presso l'Accademia di San Pietroburgo, sotto il regno di Caterina II, vedova di Pietro III.
Eulero durante la sua vita pubblicò più di 500 libri e articoli, nonostante nel 1766 fosse diventato completamente cieco; inoltre lasciò moltissimi manoscritti, che hanno portato il numero delle sue pubblicazioni intorno a quota 900. Egli morì improvvisamente nel 1783, all'età di settantasei anni.

D. Lenzi

1. Il problema dei ponti di Königsberg

Si narra che gli abitanti di Königsberg – una città della Prussia orientale nota per aver dato i natali a Immanuel Kant e che oggi col nome di Kaliningrad è una parte del territorio della Repubblica Russa completamente circondata da quella che ormai si va delineando come la nuova Comunità Europea – avessero un problema semplice da enunciare, che però non si riusciva a risolvere, anche se i numerosi tentativi operati facevano propendere per una risposta negativa. E se non ci fosse stato il genio di Eulero, si era nel 1735, il quesito sarebbe rimasto insoluto ancora per molti decenni. Eulero dimostrò che il problema non era risolubile, fornendo una condizione necessaria di risolubilità per problemi di quel genere. Il risultato fu presentato all'Accademia di San Pietroburgo nell'agosto del 1736 e pubblicato in [E].
Ed ecco il problema dei ponti di Königsberg. La città è attraversata dal fiume Pregolya, e un suo quartiere sorge su di un'isola (chiamata *der Kneiphof*) oltre la quale il fiume si spezza in due rami. A quei tempi l'isola era collegata tramite due ponti con ciascuna delle due sponde che il fiume ha prima di suddividersi, mentre la sponda situata dopo la suddivisione del fiume era collegata con un ponte sia con l'isola sia con le sponde citate precedentemente, per un totale di sette ponti (si veda la seguente Fig. 1, riprodotta da p. 2 di [E_1]).

È chiaro che lungo i ponti della città tedesca, come in altre situazioni analoghe, si possono compiere delle passeggiate, dei cammini caratterizzati, ovviamente, dal fatto che in essi i ponti vengono percorsi l'uno dopo l'altro, facendo seguire ad ogni ponte un altro collegato ad esso tramite l'isola o tramite una sponda. Passeggiate nelle quali un ponte non venga percorso più di una volta sono detti *semplici* (*cammini semplici*). Ebbene, gli abitanti di Königsberg si domandavano se fosse possibile compiere un cammino semplice lungo i ponti della città in modo tale da percorrerli tutti.

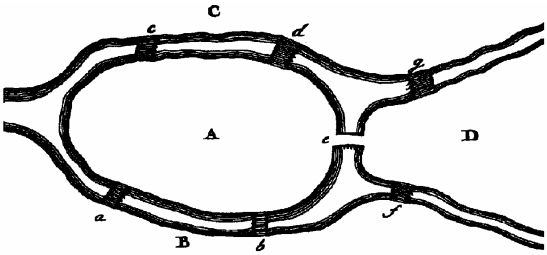


Fig. 1

Vediamo cosa Eulero scrive a p. 129 di [E] (oppure si veda [E$_1$], p. 2) a proposito del problema di Königsberg:

A Königsberg in Prussia c'è un'isola A, chiamata der Kneiphof, e il fiume che la circonda si divide in due rami, come si può vedere in figura; i rami di questo fiume sono muniti di sette ponti a, b, c, d, e, f, g. Circa questi ponti veniva posta questa domanda, si chiedeva se fosse possibile costruire un percorso in modo da transitare attraverso ciascun ponte una e una sola volta. E mi fu detto che alcuni negavano ed altri dubitavano che ciò si potesse fare, ma nessuno lo dava per certo. Da ciò io ho tratto questo problema generale: qualunque sia la configurazione e la distribuzione in rami del fiume e qualunque sia il numero dei ponti, si può scoprire se è possibile passare per ogni ponte una ed una sola volta?

È chiaro che anche le sponde del fiume avrebbero potuto essere delle isole, senza che di fatto il problema risultasse alterato. Inoltre, invece di un fiume, si sarebbe potuto avere a che fare con un mare. Quindi un aggiustamento ed una prima generalizzazione della situazione illustrata precedentemente si ha considerando un arcipelago e dei ponti che collegano alcune delle isole. Naturalmente, ci possono essere coppie di isole che *non* sono collegate *direttamente* da alcun ponte; inoltre non si esclude che ci possano essere anche dei ponti *panoramici*, che partono da un'isola e arrivano su quell'isola stessa.

2. Un utile "strumento" didattico

Ora si considerino arcipelaghi particolari, che diciamo *a ponti connessi*, nei quali due qualsiasi ponti si possano congiungere con un cammino che percorra in maniera opportuna alcuni ponti dell'arcipelago, o anche tutti se la situazione lo richiede.
In un arcipelago noi chiameremo *cammino semi-euleriano* ogni cammino semplice che attraversi ognuno dei ponti. Se il cammino si conclude sull'isola di partenza, allora parleremo di *cammino euleriano*.
Ovviamente, un arcipelago che abbia un cammino semi-euleriano è necessariamente a ponti connessi.

Dal problema di Königsberg nasce il seguente quesito: *E' possibile, partendo da un'opportuna isola di un arcipelago, attraversare i vari ponti con un cammino semi-euleriano?*

Noi – ispirandoci a quanto fatto da Eulero – cercheremo di trattare il problema di Königsberg al livello del precedente quesito.
In verità agli abitanti della città tedesca interessava dare una risposta al loro quesito. Il fatto che un problema analogo potesse interessare abitanti di altri arcipelaghi e che si cercasse di risolverlo in termini più generali poteva apparire una complicazione inutile. E la critica che spesso viene rivolta alla matematica è proprio di questo tipo, cioè di proporsi in termini troppo astratti, non adeguatamente collegati ad interessi concreti. Tuttavia, in realtà, è proprio la capacità di uscire da un ambito ristretto, che consente di trattare un problema specifico, eliminando aspetti superflui che a volte nascondono eventuali vie risolutive.
Il quesito di Königsberg può essere affrontato direttamente tentando di elencare tutti i cammini che si possono effettuare e cercando tra di loro quelli che eventualmente diano una risposta positiva. Con ogni probabilità i cittadini di Königsberg procedettero così, ma senza approdare a una soluzione definitiva. Ebbene Eulero riuscì a risolvere la questione – anche se concluse che il cammino cercato non esisteva – proprio perché uscì da quell'ottica limitata.
Intanto notiamo che l'elencazione di tutti i possibili cammini semplici

non è facile da attuare. Infatti questi sono in grandissimo numero e ad un certo punto non ci si rende conto se essi siano stati elencati tutti oppure no. Perciò, anche se i cammini esaminati non vanno bene, resta sempre il dubbio che tra quelli eventualmente non ancora considerati ce ne possa essere qualcuno che risolva il problema.
È chiaro che per la soluzione del problema di Königsberg si può prescindere da elementi di carattere architettonico. Inoltre non interessano le dimensioni delle isole o dei ponti. In definitiva, in quel caso e in altri ancora possono essere presenti particolari che non solo sono superflui per la soluzione di un problema, ma possono addirittura confondere le idee, "mascherando" e nascondendo fatti essenziali per la soluzione cercata. E allora il collocarsi a un livello più astratto permette di prescindere, di "astrarre" da quei particolari che sono causa di disturbo.

3 Il concetto di grafo

Osserviamo che, grazie a quanto è stato detto poco fa, un arcipelago può essere descritto su di un foglio rappresentando le sue isole con dei "pallini" e rappresentando i ponti con delle linee che congiungano le varie isole (si vedano le seguenti Fig. 2 e Fig. 3). In Fig. 2 si ha una rappresentazione dell' "arcipelago" di Königsberg. Lì il pallino di sinistra rappresenta l'isola, mentre gli altri rappresentano le sponde.

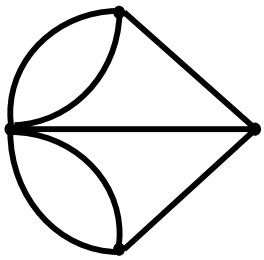


Fig. 2

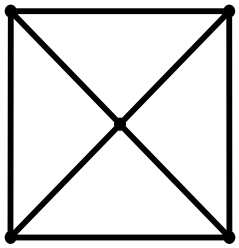


Fig. 3

In questo tipo di rappresentazione, proprio perché si eliminano tanti particolari inutili, problemi del tipo "Königsberg" e altri ancora sono più facili da affrontare. In esso un cammino si trasforma in un percorso di linee, che si chiamerà ancora cammino.
Come vedremo, gli studi di Eulero ci garantiscono che anche la percorribilità relativa al caso di Fig. 3 è impossibile. Facciamo notare che, se consideriamo Fig. 2 e Fig. 3 come un'unica figura, questa può essere considerata come la descrizione di un unico arcipelago. Naturalmente, questo nuovo arcipelago non è a ponti connessi.
Le precedenti Fig. 2 e 3 viste separatamente oppure insieme possono diventare lo spunto per un nuovo concetto matematico, quello di grafo, che traduce geometricamente quello di arcipelago con eventuali ponti. Infatti basta sostituire le isole con dei punti dello spazio, detti *vertici*, e i ponti con delle linee continue, dette *lati* o *spigoli*, che collegano alcuni di quei punti (detti *estremi* di quelle linee) - qui, per semplicità, ci riferiamo all'idea intuitiva di linea continua. Una linea che rappresenta un ponte panoramico – e quindi si richiude su se stessa – è detta *cappio*. Ebbene quei punti e quelle linee di collegamento presi insieme danno luogo a un ente geometrico chiamato *grafo* (*non orientato*).

Osserviamo che in un cammino su di un arcipelago si ha un susseguirsi di isole e di ponti tali che ogni ponte è preceduto e seguito dall'unica sua isola se esso è panoramico, altrimenti è preceduto da una sua isola ed è seguito dall'altra. Analogamente, in un grafo $\boldsymbol{G}$ si chiama *cammino* una sequenza di vertici e spigoli $a_1, a_2, \dots, a_n$ tali che i termini di indice dispari siano vertici e quelli di indice pari siano spigoli ciascuno dei quali nella sequenza sia preceduto e seguito dall'unico suo vertice o dai suoi due vertici a seconda che esso sia un cappio oppure no. In tal caso si dice che il cammino ha come estremi i vertici a_1 e a_n. Il numero degli spigoli di un cammino $\Pi = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ – ciascuno contato con la sua molteplicità in Π (cioè, il numero dei suoi indici pari in Π) – è detto lunghezza di Π. Quando il primo e l'ultimo vertice di un cammi-

no Π coincidono, allora Π è detto *chiuso*. Come nel caso di un arcipelago, Π si dice *semplice* quando in esso gli spigoli hanno molteplicità 1 (cioè, non intervengono più di una volta); inoltre Π si dice *elementare* quando in esso un'eguaglianza tra vertici può riguardare al più i suoi estremi. Ovviamente, un cammino che non sia semplice non può essere nemmeno elementare, poiché la ripetizione in esso di uno spigolo ***s*** comporta il fatto che uno dei vertici di ***s*** si trovi in una posizione che non lo qualifica come estremo, purtuttavia quel vertice è presente più volte nel cammino in quanto questo si verifica per ***s***.
Un cammino semplice e chiuso è detto *ciclo*. E' chiaro che, considerando in un ciclo Π due vertici che siano consecutivi come vertici coincidenti, la parte di Π che li collega dà luogo ad un ciclo elementare.

In fine si dice che un cammino Π è *semi-euleriano* quando esso è semplice e tutti gli spigoli di ***G*** sono considerati in Π (*euleriano*, qualora Π sia un ciclo); e allora anche il grafo ***G*** è detto semi-euleriano (oppure euleriano, qualora Π sia un ciclo).

Osservazione 1. Grazie a un cammino $\Pi = (a_1, \dots, a_n)$ che sia chiuso (onde $a_n = a_1$) si può costruire un nuovo cammino chiuso $\Pi' = (b_1, \dots, b_n)$ ripercorrendo circolarmente $a_1, a_2, \dots, a_n$ a partire da un vertice a_h, con h diverso da 1 e da n. Infatti Π è costituito dalla "saldatura" di due sue parti: Π_1, che va da a_1 ad a_h; e Π_2, che va da a_h ad $a_n = a_1$. Allora Π' lo si ottiene percorrendo prima Π_2 e poi Π_1.
In definitiva, il nuovo cammino lo si ricava ponendo $b_1 = a_h$, $b_2 = a_{h+1}$, $\dots$, $b_{n+1-h} = a_n = a_1$, $b_{n+2-h} = a_2$, e così via.
È chiaro che Π è semplice (elementare) se e solo se anche Π' è sem-

plice (elementare); inoltre, Π è semi-euleriano (o euleriano) per il grafo G se e solo se anche Π' lo è. ⇄

Accanto ai grafi non orientati hanno notevole importanza anche i *grafi orientati*, che traggono origine dall'idea di percorrere i ponti che collegano le isole di un arcipelago soltanto in un senso di marcia. E' ovvio che quando di un grafo non orientato si può fornire un cammino semi-euleriano (euleriano), allora quel cammino determina anche un orientamento sugli spigoli del grafo.
Noi ci occuperemo soprattutto di grafi (non orientati) che ricordano arcipelaghi con ponti connessi; cioè, grafi nei quali due arbitrari spigoli distinti p e q sono collegati da un cammino avente p come primo spigolo e q come ultimo spigolo. In tal caso noi parleremo di *grafi con spigoli connessi*.
Facciamo presente che un grafo si dice connesso quando due arbitrari vertici distinti sono collegati da un cammino che parte da uno di essi e termina sull'altro. Si vede subito che quando un grafo è connesso, allora esso è anche con spigoli connessi. Infatti siano dati uno spigolo p di estremi **A**, **B** e uno spigolo q di estremi **C**, **D**. Allora un cammino Π avente per estremi **B** e **C** – cioè, Π = (**B** … **C**) – può essere ampliato nel cammino (**A**, p, **B** … **C**, q, **D**), che collega i due spigoli p e q.

Osservazione 2. Siano dati un grafo a spigoli connessi G e un suo cammino Π che non utilizzi tutti gli spigoli di G. Allora c'è uno spigolo r che non sta in Π, ma ha in comune con Π un vertice. Infatti, considerato uno spigolo p di Π e uno spigolo q di G non utilizzato in Π, poiché G è a spigoli connessi, deve esserci un cammino $\Pi°$ che ha come primo spigolo p e come ultimo spigolo q. Perciò il primo spigolo r

di Π° che non sta in Π, essendo preceduto da uno spigolo ***s*** di Π, ha in comune con **s** un vertice che sta in Π. ⇄

Per i grafi esiste un grado di astrazione matematica ancor più elevato, in cui i vertici "diventano" semplicemente gli elementi di un insieme **V**, mentre gli spigoli (o gli archi, nel caso dei grafi orientati) "diventano" gli elementi di un insieme ***I*** di indici, che svolge il ruolo di dominio di un'opportuna funzione. Tale funzione nel caso dei grafi non orientati associa a ogni indice (spigolo) ***i*** un insieme di vertici avente due elementi; se questi vertici sono uguali ***i*** è detto *cappio*. Invece nel caso dei grafi orientati la funzione associa a ogni indice (arco) ***i*** una coppia ordinata di vertici, che nell'ordine esprimono il vertice di partenza e quello di arrivo della linea.

Ora facciamo presente che in un grafo non orientato ***G*** il grado (locale) di un vertice è il numero di spigoli che hanno tale vertice come estremo, contando due volte ciascun cappio; mentre il grado del grafo stesso è la somma dei gradi dei singoli vertici.
E' facile vedere che il grado di ***G*** è un numero pari. Infatti esso è il doppio del numero degli spigoli, dal momento che se eliminiamo da ***G*** uno spigolo che collega due vertici **A** e **B**, allora abbiamo un nuovo grafo ***G'*** che ha un grado che è chiaramente diminuito di due rispetto al grado di ***G***. Poiché sottraendo tutti gli spigoli di ***G*** abbiamo un grafo di grado 0, si ha immediatamente la tesi.
Da quanto detto segue subito che in un grafo ***G*** i vertici di grado dispari sono necessariamente in quantità pari; altrimenti essi darebbero un contributo dispari al grado di ***G***, il che è assurdo in quanto i vertici di grado pari danno complessivamente un contributo pari.

4. La soluzione del problema di Königsberg

Tornando al problema iniziale, supponiamo che un grafo ***G*** abbia un cammino Π semi-euleriano che parta da un vertice **A** e termini su di un

vertice **B**. Naturalmente, **A** può coincidere con **B**.
Per seguire meglio le cose che diremo nel seguito, supponiamo di eliminare i vari spigoli di ***G*** a mano a mano che immaginiamo di percorrerli in quel cammino. Ovviamente, se ***G*** ha più di uno spigolo e in ***G*** si elimina il primo spigolo di Π, allora il grafo residuo ***G°*** ha ancora una cammino semi-euleriano, dato da Π privato del suo primo vertice e del suo primo spigolo. Quindi supponiamo di iterare questo processo di eliminazione fino a quando tutti gli spigoli di Π saranno stati cancellati.

Dato che in Π ad ogni transito attraverso un vertice **C** si deve entrare in quel vertice da uno spigolo e poi uscirne, dopo ogni transito attraverso **C** il suo grado diminuisce di due. Inoltre alla partenza da **A** e all'arrivo su **B** i loro gradi diminuiscono di uno.
Poiché dopo aver eliminato in ***G*** tutti gli spigoli di Π ogni vertice di ***G*** ha grado zero, allora ogni vertice di ***G*** diverso da **A** e da **B** deve avere grado pari. Perciò si possono distinguere le due seguenti alternative:

1) **A** e **B** sono distinti, onde essi hanno grado dispari;

2) **A** e **B** coincidono, onde essi hanno grado pari.

Come immediata consequenza abbiamo la seguente condizione necessaria – che chiameremo *condizione di Eulero* – affinché un grafo a spigoli connessi ***G*** sia semi-euleriano:

3) ***G*** ha al più due vertici di grado dispari.

In particolare, si hanno i due seguenti casi:

3') ***G*** ha esattamente due vertici di grado dispari, che sono il vertice di partenza e il vertice di arrivo di ogni cammino semi-euleriano;

3") ***G*** ha soltanto vertici di grado pari e in ogni cammino semi-euleriano il vertice di partenza e il vertice di arrivo coincidono, onde quel cammino è euleriano. Inoltre, in virtù dell'Osservazione 1, ogni vertice è il punto di partenza di un opportuno cammino euleriano.

Notiamo che il problema di Königsberg ha risposta negativa, poiché esso può essere riformulato tramite il grafo di Fig. 2, che ha quattro vertici di grado dispari.

Osservazione 3. Della condizione di Eulero si ha la seguente interessante conseguenza, che riguarda un arbitrario grafo ***G***: dato un vertice **A** di ***G***, si consideri un cammino semplice Π che parta da **A** e termini su di un vertice **B** tale che tutti gli spigoli aventi **B** come estremo siano presenti in Π. Allora o **B** ha grado pari e **B** = **A**, o **B** ha grado dispari e **B** ≠ **A**. Infatti Π è un cammino semi-euleriano per il grafo ***G°*** i cui vertici e i cui spigoli sono quelli considerati in Π. Quindi, poiché **B** ha in ***G°*** e in ***G*** lo stesso grado, per le condizioni 3') e 3") abbiamo l'asserto. Quanto visto assicura che se ***G*** ha tutti i vertici di grado pari, allora il precedente cammino Π è un ciclo. Perciò da Π si può estrarre un ciclo elementare. ⇄

6. Il contributo di Eulero al problema di Königsberg

Ecco cosa Eulero scrive nella parte finale di [E], pp. 139 e 140 (in alternativa si può vedere [E_1], p. 9), a proposito della soluzione del problema di Königsberg:

20. Quindì, qualunque caso venga proposto, si può facilmente vedere se un cammino che attraversi tutti i ponti possa essere costruito oppure no, attraversando ciascun ponte una sola volta, tramite la seguente regola: Se ci sono più di due zone su cui arriva un numero dispari di ponti, allora tale cammino è impossibile.
Se, comunque, ci sono soltanto due zone su cui arriva un numero dispari di ponti, allora il cammino si può effettuare se esso inizia in una di queste zone.

Infine se non c'è alcuna zona su cui pervenga un numero dispari di ponti, allora il cammino desiderato si può effettuare a partire da una qualsiasi zona.
Quindi la regola data risponde in modo completo al problema proposto.
21. Una volta accertato che tale cammino si possa effettuare, rimane il problema di come si possa organizzare tale cammino. A tal fine io uso la seguente regola: si supponga di eliminare coppie di ponti che colleghino le medesime zone, con tale convenzione il numero dei ponti si riduce notevolmente; allora risulta facilitata la richiesta di costruire lungo i ponti rimasti il cammino desiderato; e una volta che sia stato trovato, i ponti che si è supposto di eliminare non lo altereranno in modo significativo, il che risulta chiaro con una semplice riflessione; né penso sia il caso di dare ulteriori dettagli su come costruire i cammini.

Dalla lettura fatta si evince che Eulero pensava di aver provato che la precedente condizione 3) fosse necessaria e sufficiente per l'esistenza del cammino richiesto. Ma in realtà l'articolo di Eulero richiamato non assicura che la precedente condizione sia sufficiente – anche se ciò, come si è visto, è vero – e la costruzione che egli propone è carente. Solo nel 1873 si ebbe, grazie ad [H] di Carl Hierholzer una prima dimostrazione anche della sufficienza della condizione 3).
Hierholzer morì prematuramente il 13 Settembre 1871, senza vedere la pubblicazione del suo risultato (che pare egli avesse conseguito senza conoscere il lavoro di Eulero). Fortunatamente egli ne aveva parlato ad alcuni matematici, pur senza lasciare alcuna traccia scritta. Fu il collega C. Wiener che ricostruì il lavoro di Hierholzer, con l'aiuto di J. Lürot, e lo diede alle stampe. Per altri dettagli in proposito e sulla storia della teoria dei grafi si può consultare [Bi].

7. Appendice

Concludiamo questo intervento con alcune considerazioni mediante le quali cercheremo di capire quale possa essere stata la linea di pensiero che portò Eulero alla convinzione che il suo ragionamento garantisse la

sufficienza della condizione 3); e proporremo un percorso dimostrativo che in qualche modo può essere stato quello da lui intravisto.
Intanto osserviamo che in un grafo che goda della proprietà di Eulero l'eliminazione di due spigoli che abbiano gli stessi estremi (che diremo *spigoli paralleli*) non garantisce granché nel caso in cui il grafo sia privo di spigoli di questo tipo. Ebbene ciò si supera facilmente se, invece di considerare coppie di spigoli paralleli, si considerano coppie di *cammini paralleli*, cioè coppie di cammini che sono semplici ed hanno in comune i soli estremi **A** e **B**, con **A** distinto da **B**. Ovviamente due spigoli paralleli che non siano dei cappi esprimono anche due cammini paralleli di lunghezza 1.
Il fatto che un grafo $\boldsymbol{G}$ a spigoli connessi non presenti coppie di cammini paralleli è chiaramente equivalente al fatto che esso manchi di cicli elementari. Infatti facendo seguire a un cammino elementare un cammino a esso parallelo, ma percorso in senso inverso, si ha un ciclo elementare; viceversa, due vertici distinti di un ciclo elementare "spezzano" il ciclo in due cammini paralleli che hanno quei vertici come estremi.
Ed ecco la linea di pensiero che è ragionevole pensare si sia affacciata in Eulero. Intanto assumiamo che il grafo $\boldsymbol{G}$ abbia solo vertici di grado pari; infatti in caso contrario possiamo supporre di aggiungere a $\boldsymbol{G}$ uno spigolo fittizio che congiunga i due vertici di grado dispari, che potrà essere rimosso al termine del processo che ora illustreremo.

La parte finale dell'Osservazione 3 assicura che in $\boldsymbol{G}$ c'è almeno un ciclo elementare Π_1. Se questo ciclo si identifica con $\boldsymbol{G}$ non c'è niente da provare. Altrimenti consideriamo il grafo $\boldsymbol{G}^*$ ottenuto da $\boldsymbol{G}$ sopprimendo gli spigoli presenti in Π_1 (il che corrisponde alla soppressione in $\boldsymbol{G}$ degli spigoli di due cammini paralleli). E' chiaro che in $\boldsymbol{G}^*$ i vertici continuano ad essere di grado pari, poiché nel passaggio da $\boldsymbol{G}$ a $\boldsymbol{G}^*$ i vertici presenti in Π_1 hanno in $\boldsymbol{G}^*$ un grado che risulta diminuito di due rispetto a $\boldsymbol{G}$, mentre gli altri vertici conservano il loro grado iniziale. Perciò anche da $\boldsymbol{G}^*$ possiamo estrarre allo stesso modo un ciclo elementare Π_2;

e così via. Siano Π_1, … Π_m i cicli elementari che si ottengono in tal modo.
E ora possiamo costruire per ***G*** un cammino euleriano servendoci di Π_1, … Π_m. Il procedimento richiama in parte quello seguito nella dimostrazione presentata alla fine del paragrafo 5.
A partire dal suo primo estremo **A** si percorra Π_1 finché non si perviene a un suo vertice **B** che in Π_1 ha indice diverso da 1, ed è presente in un ciclo Π_i distinto da Π_1. A questo punto si prosegua nel cammino lungo Π_i, fino a quando non si pervenga ad un vertice **C** che in Π_i abbia indice diverso da 1 e che sia presente in un ciclo Π_j distinto da Π_1 e da Π_i. . . . Quindi penso che ora si possa davvero concludere usando le parole finali di Eulero in [E] riportate precedentemente: *neque opus esse iudico plura ad cursus reipsa formandos praecipere.*

BIBLIOGRAFIA

[Bi] Biggs N. L., Lloyd E. K., Wilson R. J. (1976) *Graph Theory 1736-1936*, Clarendon Press, Oxford.
[E] Euler L. (1741) *Solutio Problematis ad geometriam situs pertinentis*, Comment. Acad. Sc. Petrog., t. 8 (1736), pp. 128-140.
[E_1] Euler L. (1923) *Solutio Problematis ad geometriam situs pertinentis* (ristampa di [E]), Commentationes Algebraicae, Teubner, Lipsia, Berlin (edidit L. G. Du Pasquier).
[H] Hierholzer C. (1873) *Über die Möglichkeit, einen linienzug ohne wiederholung und ohne unterbrechnung zu umfahren*, Mathematische Annalen 6, pp. 30-32 (tradotta in pp. 11 and 12 of [Bi]).